



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Bauru

Maiko Willian Coutinho

O Problema de Corte de Estoque e Aplicações

BAURU

2019

Maiko Willian Coutinho

O Problema de Corte de Estoque e Aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Sônia Cristina Poltroniere Silva

BAURU

2019

C871p

Coutinho, Maiko Willian

O Problema de Corte de Estoque e aplicações / Maiko Willian

Coutinho. -- Bauru, 2020

73 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Faculdade de Ciências, Bauru

Orientadora: Sônia Cristina Poltroniere Silva

1. Otimização. 2. Ensino. 3. Modelagem Matemática. 4. Problema
de corte de estoque. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de
Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Maiko Willian Coutinho

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Financiadora: CAPES

Prof^a. Dr^a. Sônia Cristina Poltroniere Silva - Orientadora

FC - UNESP Bauru - São Paulo

Prof^a. Dr^a. Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini

FCA - Unicamp Limeira - São Paulo

Prof. Dr. Agnaldo José Ferrari

FC - UNESP Bauru - São Paulo

BAURU, 23 de outubro de 2019

Dedico esta Dissertação à todos que direta ou indiretamente contribuíram para a sua conclusão, em especial à minha esposa pela paciência, companheirismo e por me fazer entender cada vez mais o significado da família.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida, e por colocar em meu caminho pessoas maravilhosas que posso chamar de amigos.

À minha amada esposa, sem quem a minha vida e tudo que faço não teria sentido.

Às minhas filhas, por me darem motivos para ser um ser humano melhor a cada dia.

Aos meus pais, pela educação e exemplos que me deram e ainda dão.

Aos meus sogros, por serem presentes em minha vida e terem sido um porto seguro em tantos momentos.

Aos meus tios João e Maria, por serem como pais para mim em tantos momentos.

Às minhas primas Silvana e Vera Lucia, por serem como irmãs em minha vida.

Aos meus colegas de trabalho, professores e gestores, por tornarem possível a conciliação do trabalho com os estudos.

À Prof^a. Dr^a. Sônia Cristina Poltroniere Silva pela paciência, por toda dedicação e pelo tempo despendido.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

A Matemática está constantemente presente em nosso cotidiano, sendo ferramenta importante para uma melhor compreensão do mundo e facilitadora dos processos de tomada de decisão. Neste sentido, o trabalho com resolução de problemas ao longo da formação escolar básica faz-se extremamente necessário. Inserida neste contexto, a modelagem matemática é uma ferramenta que permite uma melhor leitura e um tratamento mais adequado do problema. Essa dissertação aborda, inicialmente, conceitos básicos relativos ao Problema de Corte de Estoque e a sua modelagem matemática, com ênfase na definição dos padrões de corte. Posteriormente, é discutido o método *branch-and-bound*, utilizado na resolução de problemas de otimização linear inteira, como é o caso do problema de corte. Por fim, são propostas duas situações-problema, que consideram aplicações do Problema de Corte, para serem trabalhados com alunos do Ensino Médio, considerando os conceitos matemáticos assimilados previamente.

Palavras-Chave: Otimização; Ensino; Modelagem Matemática; Problema de corte de estoque.

Abstract

Mathematics is constantly present in our daily lives, being an important tool for a better understanding of the world and facilitating decision making processes. In this sense, problem-solving work throughout basic school education is extremely necessary. In this context, mathematical modeling is a tool that allows a better reading and a better treatment of the problem. This dissertation initially addresses the basic concepts related to the Cutting Stock Problem and the mathematical modeling for the one-dimensional case, with emphasis on the definition of the cutting patterns. Subsequently, the Branch-and-bound method, used in solving Integer Linear Programming Problems, such as the cutting problem, is discussed. Finally, problem situations are proposed, which consider applications of the Cutting Stock Problem, to be worked with high school students, emphasizing the previously assimilated mathematical concepts.

Keywords: Optimization; Teaching; Mathematical modeling; Cutting stock problem.

Lista de Figuras

2.1	Corte unidimensional	19
2.2	Corte bidimensional.	20
2.3	Corte tridimensional.	20
2.4	Exemplos de padrões de corte para o objeto de comprimento $L = 19$	21
2.5	Padrões de Cortes Regulares e Irregulares	29
2.6	Padrões de corte guilhotinado e não guilhotinado.	30
2.7	Antes e depois dos cortes do 1º estágio.	30
2.8	Antes e depois dos cortes do 2º estágio.	31
2.9	Antes e depois dos cortes do 3º estágio.	31
2.10	Padrão de corte guilhotinado 2-estágios	31
3.1	Segmentos de reta associados às restrições do PL.	39
3.2	Regiões associadas as restrições do PL	40
3.3	Regiões factíveis dos problemas linear e inteiro	40
3.4	Região factível do problema linear PL	41
3.5	Solução ótima do problema linear PL	42
3.6	Ramificação do problema PL em dois subproblemas P_1 e P_2	43
3.7	Regiões factíveis do problemas P_1 e P_2	44
3.8	Ramificação do problema linear P_2 nos subproblemas P_3 e P_4	45
3.9	Ramificação do problema P_3 em dois subproblemas (P_5 e P_6)	47
4.1	Região factível do modelo 4.5.	57
4.2	Região factível do modelo 4.6	58
4.3	Resolução gráfica do problema linear	59
4.4	Ramificação do PL em dois subproblemas P_1 e P_2	60

4.5	Resolução gráfica dos subproblemas P_1 e P_2 do problema das barras	61
4.6	Solução para as faixas 110×30 , 110×40 e 110×60 , respectivamente. . . .	68
4.7	Padrão de corte para a placa de MDF	69

Lista de Tabelas

2.1	Dados dos itens demandados	21
2.2	Dados dos itens demandados	32
2.3	Padrões com os itens de tipo 1 e 2	32
2.4	Padrões com os itens de tipos 1, 2 e 3	33
2.5	Padrões com os itens de tipos 1, 2, 3 e 4	33
3.1	Dados do problema do muambeiro	37
4.1	Dados - Problema das barras de aço	51
4.2	Padrões - Problema das barras de aço	54
4.3	Dados - Problema na indústria de móveis	66

Sumário

1	Introdução	12
2	Problema de Corte de Estoque	17
2.1	Modelagem do Problema de Corte de Estoque Unidimensional	20
2.1.1	Padrão de Corte	21
2.1.2	Modelagem supondo um único tipo de objeto em estoque	23
2.1.3	Diferentes Tipos de Objetos em Estoque em Quantidade Limitada	26
2.2	O Problema de Corte Bidimensional	29
2.2.1	Classificação dos Padrões de Corte Bidimensionais	29
2.3	Considerações importantes	32
2.4	Problema da Mochila	34
2.4.1	Modelagem matemática	34
2.4.2	Geração de padrões no corte unidimensional	35
2.4.3	Resolução do Problema da Mochila	35
3	Método de solução <i>branch-and-bound</i>	37
4	Atividades para aplicação em sala de aula	50
4.1	Empresa de barras de aço	50
4.1.1	Objetivo	50
4.1.2	Público alvo	50
4.1.3	Conteúdos envolvidos	50
4.1.4	Material necessário	51
4.1.5	Descrição do problema	51
4.1.6	Desenvolvimento	52

4.1.7	Orientação ao professor	53
4.1.8	Exemplo de resolução considerando apenas dois padrões de corte . .	55
4.1.9	Solução considerando os 22 padrões para a barra de comprimento 20	61
4.1.10	Analisando a perda total	62
4.2	Problema de corte bidimensional na indústria de móveis	64
4.2.1	Objetivo	64
4.2.2	Público alvo	64
4.2.3	Conteúdos envolvidos	65
4.2.4	Material necessário	65
4.2.5	Descrição do problema	65
4.2.6	Desenvolvimento	66
4.2.7	Orientação ao professor	67
4.2.8	Exemplo de geração de padrão de corte 2-estágios	67
5	Considerações finais	70
	Referências	71

Capítulo 1

Introdução

No ensino de matemática, visando dar significado e importância aos conteúdos abordados, recorre-se, a título de ilustração e motivação, a situações cotidianas, nas quais somos colocados na posição de tomador de decisão. De fato, facilitar a tomada de decisões, ao desenvolver habilidades e competências necessárias para compreender e resolver problemas de diferentes tipos e de diferentes áreas é um dos principais objetivos da matemática. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), são objetivos da matemática, ao longo da educação básica, que os alunos desenvolvam as seguintes competências:

Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

A Pesquisa Operacional é umas das grandes áreas da ciência, que lida com situações problemas, cujas técnicas e métodos podem ser aplicados para analisar sistemas complexos, como processos de produção e de prestação de serviços, e tomar decisões.

Desde séculos antes de Cristo, governantes e líderes de exércitos recorriam à consultoria de filósofos e cientistas para auxiliá-los na tomada de decisões estratégicas. Durante a Segunda Guerra Mundial, com o advento dos radares, os ingleses constituíram equipes com profissionais de diferentes áreas, com o intuito de analisar e dar solução a problemas estratégicos como distribuição de recursos e pessoal, dimensionamento de comboios de frota, manutenção e inspeção de aviões, escolha do avião adequado a cada missão, controle de artilharia antiaérea entre outros.

Com o fim da guerra, a Pesquisa Operacional ganhou ainda mais força com o estabelecimento de grupos de pesquisa, alguns ainda ligados as forças armadas, e de sociedades científicas, tanto nos Estados Unidos quanto na Inglaterra. Outros fatores que contribuíram para o rápido crescimento da área foram o progresso alcançado pelos computadores eletrônicos e o desenvolvimento de técnicas específicas como o método simplex para o tratamento de problemas de otimização linear. Já para a propagação dos conhecimentos desenvolvidos na área foi de grande importância a Primeira Conferência Internacional de Pesquisa Operacional realizada em Oxford, no ano de 1957.

Nas décadas de 50 e 60, a Pesquisa Operacional se fez presente em empresas do setor público e do setor privado, nas áreas de produção, logística ou de serviços, sendo aplicada à uma grande diversidade de problemas. No campo acadêmico, inicialmente, a Pesquisa Operacional era estudada apenas a nível de pós-graduação, passando, na década de 70, a ser oferecida também em cursos de graduação como, por exemplo, administração de empresas e engenharias.

A Otimização Matemática é um dos ramos da Pesquisa Operacional, que considera a modelagem matemática de problemas reais e a sua solução por meio de técnicas computacionais. Para a construção de um modelo matemático, geralmente, são necessárias

simplificações do problema real e sua validação depende de a solução ser coerente com o contexto original. O modelo deve ser suficientemente detalhado para captar os elementos essenciais do problema, mas suficientemente tratável por métodos de resolução (ARENALLES et al., 2011). Exemplos de modelos de otimização matemática são: otimização linear, otimização linear inteira, otimização em redes e otimização não linear.

Segundo Arenales et al. (2011), para construir um modelo matemático, é necessário definir as variáveis de decisão e as relações matemáticas (funções, equações e inequações) que irão descrever o comportamento relevante do problema real. Estes aspectos podem ser trabalhados em sala de aula, propondo-se uma situação problema e permitindo que os alunos, em grupos, discutam e apresentem uma modelagem matemática que atenda as condições do problema. Em seguida, técnicas de solução, que utilizem conceitos matemáticos previamente aprendidos pelos alunos, podem ser propostas para a resolução do modelo matemático.

Na literatura, vários trabalhos consideram o uso da Otimização Matemática na resolução de problemas com alunos do ensino básico (ensino fundamental e médio). Lozano (2010) considera a teoria de grafos para a determinação da quantidade de cores necessária para colorir um mapa. São apresentadas conclusões a partir da realização de uma oficina de coloração de mapas com alunos de uma escola pública. Crócoli (2016) aborda a Otimização Linear a partir da modelagem e resolução pelo método gráfico de problemas de vestibulares. Lopes (2017) aborda a teoria básica da otimização linear e do método simplex, e sua aplicação na modelagem e resolução de problemas matemáticos voltados para o ensino médio. É proposto um material, direcionado aos professores da educação básica, contendo alguns problemas para serem trabalhados com em sala de aula ou em atividades extracurriculares. São apresentadas a resolução gráfica e a obtida pelo solver do Excel. Couto (2019) apresenta diversas desigualdades conhecidas da matemática, em especial a desigualdade das médias aritmética e geométrica e sua aplicação na resolução de problemas de otimização envolvendo máximos e mínimos de funções quadráticas. Outros trabalhos consideram a resolução de problemas de otimização linear, utilizando o método gráfico, o método algébrico e/ou desigualdades das médias, tais como Barreto (2017) e Ferreira (2018).

Em especial, um Problema de Otimização Linear consiste na maximização ou mini-

mização de uma função linear, denominada *função objetivo*, respeitando-se um conjunto de equações e/ou inequações lineares, denominado *restrições do problema* (BAZARAA, JARVIS e SHERMALI et al., 1990; ARENALES et al., 2011; MARINS, 2011). A função objetivo e as restrições são expressões envolvendo várias variáveis reais, denominadas *variáveis de decisão*. No caso da Otimização Linear Inteira, as variáveis de decisão do modelo que representa o problema real só podem assumir valores inteiros.

Neste contexto, o presente trabalho aborda os conceitos de Otimização Linear Inteira, dando ênfase ao problema de corte de estoque. O Problema de Corte de Estoque consiste no corte de objetos de maiores dimensões em objetos de menores dimensões (itens) para o atendimento de uma demanda pré-estabelecida, com o objetivo de atender um critério de otimização como, por exemplo, minimizar o número de objetos cortados ou a perda de material durante o processo de corte. O problema de corte é encontrado em muitos processos industriais, em que os objetos, em geral disponíveis em estoque, correspondem a barras de aço, bobinas de papel, chapas metálicas ou de madeira, etc. e os itens, com dimensões especificadas, são em geral encomendados em grandes quantidades e, relativamente, de pouca variedade de tipos.

Apesar da sua relevante aplicação prática, o problema de corte de estoque caracteriza-se como um problema de difícil solução. Dessa forma, desde os trabalhos pioneiros de Gilmore e Gomory (1961, 1963), que propuseram o método *simplex com geração de colunas*, outros trabalhos da literatura trazem importantes contribuições, tais como as abordagens de modelagem e solução propostas por Valério de Carvalho (1999, 2002), Poldi e Araújo (2016) e Delorme et al. (2016). Além disso, podemos citar como aplicações relacionadas ao problema de corte unidimensional e bidimensional, os seguintes trabalhos: Poltroniere et al. (2008), Guidini (2008), Gramani e França (2006), Gramani et al. (2009, 2011), Santos e Almada-Lobo (2012), Kallrath et al. (2014), Leão et al. (2017), Poltroniere et al. (2016).

O objetivo deste trabalho é abordar o problema de corte de estoque de forma lúdica, com exemplos de pequenas dimensões, considerando os conceitos matemáticos que surgem na sua modelagem e resolução, propondo, assim, um material de apoio para professores de matemática do ensino médio utilizarem na preparação e desenvolvimento de atividades aplicadas com seus alunos. Para tanto, esta dissertação está estruturada como descrito a

seguir.

O Capítulo 2 considera a modelagem matemática do problema de corte de estoque, proposta na literatura e suas variações. O conceito de padrão de corte é discutido e exemplificado para o caso unidimensional e bidimensional. No Capítulo 3, o problema de geração dos padrões de corte é modelado como um problema da mochila. É discutido o método *branch-and-bound* para a resolução de um problema de otimização linear inteira, e um exemplo é resolvido para ilustrar o procedimento. O Capítulo 4 traz duas situações-problema, aplicações do problema de corte, para serem trabalhadas em sala de aula, com alunos do ensino médio. É apresentada a modelagem matemática e a resolução é discutida passo a passo, com alguns encaminhamentos aos professores. Resolvendo as situações-problema, os alunos terão a oportunidade de revisar conceitos como: equações, inequações, resolução de sistemas de equações lineares, valor numérico de um polinômio, combinatória, entre outros. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 2

Problema de Corte de Estoque

O problema de corte de estoque (PCE) consiste em um importante problema de otimização linear inteira, com muitas aplicações em processos de produção industrial. A modelagem matemática de um problema de otimização linear inteira está descrita a seguir, considerando a sua forma padrão (ARENALES et al., 2011).

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ e inteiros.} \quad (2.3)$$

sendo:

- x_j as *variáveis de decisão* do problema, $j = 1, \dots, n$;
- c_j os custos associados às variáveis de decisão, $j = 1, \dots, n$;
- a_{ij} os coeficientes das variáveis de decisão nas equações, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$;
- b_i o termo independente da equação i , $i = 1, \dots, m$.

A função linear f em (2.1), a ser minimizada, é uma função de n variáveis inteiras e é chamada *função objetivo*. O conjunto de equações lineares (2.2) é denominado *conjunto de*

restrições do problema. Em (2.3) temos as *condições de não-negatividade* e de *integralidade* das variáveis.

O modelo (2.1)-(2.3) pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

sendo:

$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ o vetor das variáveis de decisão;

$\mathbf{c}^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ o vetor de custos;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ a matriz dos coeficientes das variáveis nas equações;}$$

$\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ o vetor dos termos independentes das equações;

$\mathbf{0}^T = (0, 0, \dots, 0)$ o vetor nulo de n elementos.

Na resolução do modelo matemático (2.1)-(2.3), pretende-se encontrar o vetor \mathbf{x} que fornece o menor valor possível para $f(\mathbf{x})$, dentre os que satisfazem as restrições do problema. Maiores detalhes sobre a modelagem e solução de Problemas de Otimização Linear podem ser encontrados em Arenales (2011) e Lopes (2017).

Para a modelagem matemática do Problema de Corte de Estoque (PCE), uma importante característica a ser considerada é que muitos itens devem ser produzidos, porém, de poucos tipos, ou seja, é grande a repetição de itens. Para a produção dos diferentes tipos de itens demandados, muitos objetos devem ser igualmente cortados, o que sugere o uso de *padrões de corte* que serão repetidos um certo número de vezes. Um padrão de corte corresponde a uma maneira de cortar um objeto em estoque em itens demandados. O número de padrões de corte pode ser muito grande, o que introduz a dificuldade de gerá-los e determinar sua repetição.

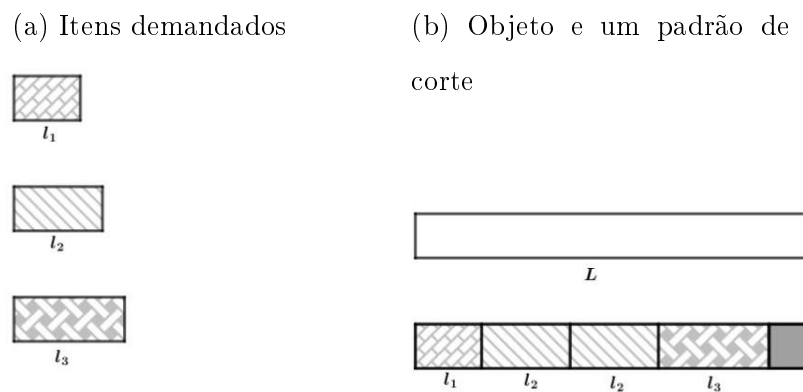
Além disso, é importante classificar o problema quanto ao número de dimensões do objeto a ser cortado, relevante para o processo de corte. Algumas regras são necessárias

para a definição dos padrões de corte. A seguir, são exemplificados os problemas de corte unidimensional, bidimensional e tridimensional.

Unidimensional

Quando apenas uma dimensão do objeto (comprimento) é relevante, o problema é denominado *unidimensional*, como ocorre, por exemplo, no corte de bobinas de papel e barras de aço, representado na Figura 2.1b.

Figura 2.1: Corte unidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Bidimensional

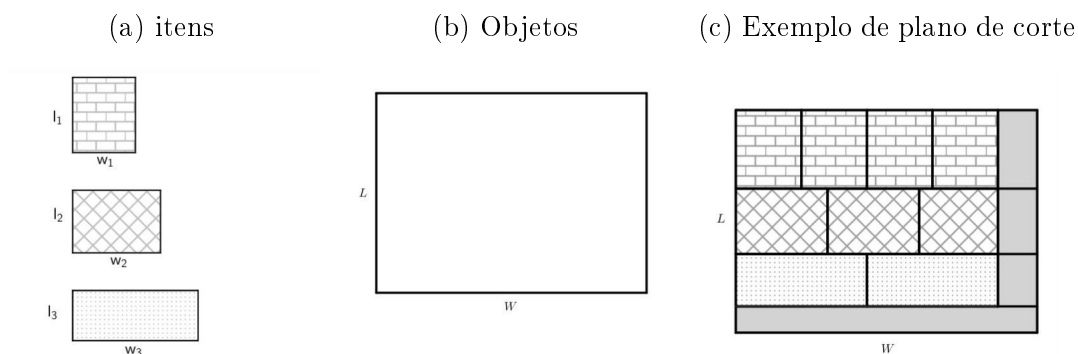
No caso do corte de placas (por exemplo, placas de madeira na indústria de móveis, chapas de aço e placas de vidro), duas dimensões do objeto (comprimento e largura) são relevantes na obtenção da solução e o problema é dito *bidimensional*. Resolver este tipo de problema consiste em distribuir geometricamente os itens retangulares ao longo do comprimento e da largura dos objetos em estoque. Esta situação está representada na Figura 2.2.

Tridimensional

Quando três dimensões do objeto (comprimento, largura e altura) são relevantes, tem-se um problema *tridimensional*, representado na Figura 2.3. Neste caso, trata-se de alocar itens espaciais menores, dentro de um objeto maior. Este tipo de problema encontra aplicação, por exemplo, no corte de espuma em indústrias de colchões. Outra aplicação, consiste no empacotamento de itens, ou seja, arranjar unidades pequenas dentro

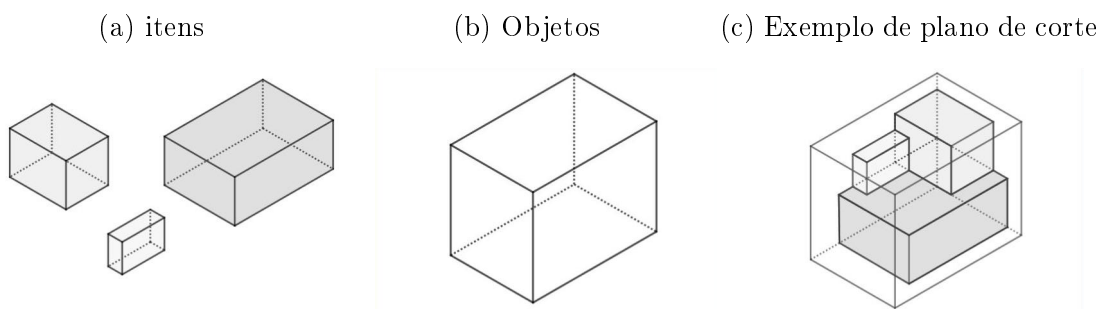
de uma unidade maior, de tal forma que um certo objetivo seja otimizado. Como exemplo, podemos citar o arranjo do maior volume possível de caixas (itens) dentro de um contêiner.

Figura 2.2: Corte bidimensional.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 2.3: Corte tridimensional.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

2.1 Modelagem do Problema de Corte de Estoque Unidimensional

O Problema de corte de estoque unidimensional consiste em cortar um número relativamente grande de objetos de comprimento L em m tipos de itens de comprimentos menores pré-definidos l_1, l_2, \dots, l_m . Cada item deve ser produzido, respectivamente, nas quantidades demandadas d_1, d_2, \dots, d_m . O problema, então, consiste em decidir como cortar os objetos em estoque de modo a atender a demanda de itens pré-estabelecida, otimizando uma função objetivo como, por exemplo, minimizar o número de objetos cortados ou minimizar a perda de material durante o processo de corte.

2.1.1 Padrão de Corte

Suponha, como exemplo, objetos em estoque de comprimento $L = 19$, que devem ser cortados em itens de comprimentos $l_1 = 3$, $l_2 = 4$, $l_3 = 6$ e $l_4 = 8$, para o atendimento das seguintes demandas: $d_1 = 5$, $d_2 = 8$, $d_3 = 12$ e $d_4 = 10$ unidades, respectivamente. Os dados deste exemplo estão organizados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Dados dos itens demandados

Item	Comprimento	Demanda
1	3	5
2	4	8
3	6	12
4	8	10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Cada maneira diferente de cortar os objetos em estoque a fim de obter os itens demandados caracteriza o que chamamos de Padrão de Corte. A Figura 2.4 apresenta alguns padrões de corte para o objeto de comprimento $L = 19$.

Figura 2.4: Exemplos de padrões de corte para o objeto de comprimento $L = 19$.

Padrão 1	$l_1 = 3$	$l_1 = 3$	$l_1 = 3$	$l_1 = 3$	$l_1 = 3$	$l_1 = 3$	1
Padrão 2	$l_2 = 4$	$l_2 = 4$	$l_2 = 4$	$l_2 = 4$			3
Padrão 3	$l_3 = 6$		$l_3 = 6$		$l_3 = 6$	1	
Padrão 4	$l_4 = 8$			$l_4 = 8$			3
Padrão 5	$l_2 = 4$	$l_2 = 4$	$l_2 = 4$	$l_3 = 6$		1	
Padrão 6	$l_2 = 4$	$l_2 = 4$	$l_4 = 8$			3	
Padrão 7	$l_2 = 4$	$l_3 = 6$		$l_4 = 8$			1
Padrão 8	$l_1 = 3$	$l_2 = 4$	$l_3 = 6$		$l_3 = 6$		

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Cada padrão de corte pode ser representado por um vetor m -dimensional, $\mathbf{a}_j^T = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})$, em que cada componente α_{ij} indica o número de itens do tipo i cortados no padrão de corte j , $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, sendo n o número de padrões de corte. Assim, temos, respectivamente, os seguintes vetores associados aos padrões de corte ilustrados na Figura 2.4:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De modo geral, um vetor $\mathbf{a}_j^T = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})$ representa um padrão de corte para o objeto de comprimento L se, e somente se, satisfaz:

$$\begin{cases} l_1\alpha_{1j} + l_2\alpha_{2j} + \dots + l_m\alpha_{mj} \leq L, \\ \alpha_{1j} \geq 0, \alpha_{2j} \geq 0, \dots, \alpha_{mj} \geq 0 \text{ e inteiros.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Padrão de Corte Homogêneo

Um padrão de corte que produz itens de um único tipo é denominado *padrão de corte homogêneo*. Assim, os vetores \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 e \mathbf{a}_4 correspondem a padrões de corte homogêneos, enquanto que, os demais vetores \mathbf{a}_5 , \mathbf{a}_6 , \mathbf{a}_7 e \mathbf{a}_8 correspondem a padrões de corte não homogêneos.

De modo geral, um vetor representa um padrão de corte homogêneo se, e somente se, possui apenas uma coordenada não nula, além de satisfazer as restrições (2.4), ou seja:

$$a_j^T = (0, \dots, \alpha_{ij}, \dots, 0), \quad \text{sendo } \alpha_{ij} = \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor$$

Padrão de Corte Desejável

Um padrão de corte é dito *desejável* quando a sobra/perda é inferior ao item de menor comprimento. Assim, na Figura 2.4, os padrões 1, 3, 5, 7 e 8 são padrões desejáveis, enquanto os padrões 2, 4 e 6 são padrões não desejáveis. Importante ressaltar que os padrões 2 e 4 são homogêneos e, ao mesmo tempo, não desejáveis.

2.1.2 Modelagem supondo um único tipo de objeto em estoque

Esta seção considera a modelagem matemática do PCE unidimensional em que os objetos em estoque, que serão cortados, são todos de um único comprimento.

Suponha um estoque composto por objetos, barras por exemplo, de comprimento L , em quantidade ilimitada. Primeiramente, definimos todos os possíveis padrões de corte, ou seja, todas as possíveis soluções de (2.4). Suponha que existam n soluções possíveis:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

sendo, α_{ij} o número de itens do tipo i cortados no padrão j , com $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Seja $\mathbf{d}^T = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ o vetor de demanda, onde d_i representa a demanda do item i . Além disso, seja x_j a variável que representa o número de objetos que deverão ser cortados usando o padrão j , e considere o objetivo de minimizar o número de objetos cortados. Assim, o problema de corte de estoque unidimensional pode ser formulado como um problema de otimização linear inteira, como segue:

Minimizar $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$\text{sujeito a: } \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ e inteiros,}$$

podendo ser escrito, também, de forma simplificada, como:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \quad (2.5)$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{d} \quad (2.6)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ e inteiros.} \quad (2.7)$$

A função objetivo (2.5) minimiza o total de objetos cortados. A restrição (2.6) garante que a quantidade de itens produzidos seja exatamente igual a demanda, e a restrição (2.7) garante que a quantidade de vezes que cada padrão de corte j é utilizado seja um número inteiro não-negativo.

O modelo (2.5 - 2.7) pode ser representado na forma matricial:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ e inteiros}$$

sendo:

$\mathbf{c}^T = (1, 1, \dots, 1)$ o vetor de custos (de dimensão n);

$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$, ou seja, cada coluna corresponde a um padrão de corte para o objeto de comprimento L .

Outros objetivos podem ser considerados como, por exemplo, minimizar a perda total durante o corte. Para esse caso, a função objetivo em (2.5) deve ser substituída pela

função Perda Total, definida por:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.8)$$

sendo que

$$c_j = L - (a_{1j}l_1 + a_{2j}l_2 + \dots + a_{mj}l_m)$$

representa a perda no padrão de corte j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Minimizar a função $f(\mathbf{x})$ em (2.8), corresponde a determinar como cortar os objetos em estoque, de modo a atender a demanda de itens gerando a menor perda possível. Como, neste caso, há um único tipo de objeto em estoque, minimizar o número de objetos cortados ou minimizar a perda total, são objetivos equivalentes, como demonstrado a seguir.

Demonstração. Considere, inicialmente, o modelo (2.5 - 2.7) com o objetivo de minimizar a perda total. Como $c_j = L - (a_{1j}l_1 + a_{2j}l_2 + \dots + a_{mj}l_m)$, o problema pode ser reescrito como:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n (L - \sum_{i=1}^m l_i \alpha_{ij}) x_j \quad (2.9)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ e inteiros.} \end{cases} \quad (2.10)$$

A função objetivo (2.9) pode ser reescrita como:

$$f(\mathbf{x}) = L \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m l_i \alpha_{ij} x_j \quad (2.11)$$

Pelas propriedades comutativa da adição e distributiva, a função (2.11) pode ser reescrita como:

$$f(\mathbf{x}) = L \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{i=1}^m l_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (2.12)$$

Observe que, pelo conjunto de restrições (2.10), temos $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j = d_i$. Logo, substituindo na função (2.12), obtemos uma forma equivalente de representar a função perda total:

$$f(\mathbf{x}) = L \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{i=1}^m l_i d_i \quad (2.13)$$

Como $L > 0$ e $\sum_{i=1}^m l_i d_i$ são constantes, ou seja, não dependem das variáveis de decisão x_j , concluímos que minimizar a perda total, dada por (2.13), é equivalente a minimizar o número de objetos cortados, isto é, minimizar $\sum_{j=1}^n x_j$. ■

2.1.3 Diferentes Tipos de Objetos em Estoque em Quantidade Limitada

Consideremos, nesta seção, a situação em que temos vários tipos de objetos em estoque, cada um com uma disponibilidade limitada, e que devem ser cortados para atender a uma demanda pré-estabelecida de itens de diferentes tipos (comprimentos).

Para a modelagem matemática, suponha K tipos de objetos em estoque de comprimentos L_k e disponibilidade e_k , $k = 1, \dots, K$. Tais objetos devem ser cortados para se obter itens de m tipos, de dimensões l_i e demanda d_i , $i = 1, \dots, m$. Observe que, nesse caso, um conjunto de padrões deve ser gerado para cada um dos tipos de objetos em estoque.

Para um melhor entendimento, considere os objetos de comprimento L_1 . Um padrão de corte para estes objetos deve satisfazer:

$$\begin{cases} l_1\alpha_{11} + l_2\alpha_{21} + \dots + l_m\alpha_{m1} \leq L_1 \\ \alpha_{i1} \geq 0 \text{ e inteiros, } i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2.14)$$

sendo α_{i1} o número de vezes que o item de comprimento l_i é cortado do objeto de comprimento L_1 .

Supondo que existam N_1 possíveis padrões de corte para o objeto de comprimento L_1 , ou seja, que o sistema linear em (2.14) possui N_1 soluções, elas podem ser representadas pelos vetores:

$$\mathbf{a}_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_{111} \\ \alpha_{211} \\ \vdots \\ \alpha_{m11} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_{121} \\ \alpha_{221} \\ \vdots \\ \alpha_{m21} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_{N_1 1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1N_1 1} \\ \alpha_{2N_1 1} \\ \vdots \\ \alpha_{mN_1 1} \end{pmatrix},$$

sendo \mathbf{a}_{j1} o vetor associado ao padrão de corte j para o objetos de comprimento L_1 , $j = 1, \dots, N_1$.

Generalizando, para o objeto de comprimento L_k , teremos então N_k diferentes padrões de cortes, $k = 1, \dots, K$, satisfazendo:

$$\begin{cases} l_1 \alpha_{1k} + l_2 \alpha_{2k} + \dots + l_m \alpha_{mk} \leq L_k \\ \alpha_{ik} \geq 0 \text{ e inteiros, } i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2.15)$$

sendo α_{ik} o número de vezes que o item de comprimento l_i é cortado do objeto de comprimento L_k .

Supondo que o sistema (2.15) tenha N_k possíveis soluções, elas podem ser representadas pelos vetores:

$$\mathbf{a}_{1k} = \begin{pmatrix} \alpha_{11k} \\ \alpha_{21k} \\ \vdots \\ \alpha_{m1k} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{2k} = \begin{pmatrix} \alpha_{12k} \\ \alpha_{22k} \\ \vdots \\ \alpha_{m2k} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_{N_k k} = \begin{pmatrix} \alpha_{1N_k k} \\ \alpha_{2N_k k} \\ \vdots \\ \alpha_{mN_k k} \end{pmatrix}.$$

sendo α_{ijk} o número de vezes que o item de comprimento l_i é cortado pelo padrão de corte j do objeto de comprimento L_k , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, N_k$ e $k = 1, \dots, K$.

Dessa forma, \mathbf{a}_{jk} é o vetor associado ao j -ésimo padrão de corte para os objetos de comprimento L_k , $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, N_k$.

Determinados todos os possíveis padrões de corte para os objetos de comprimento L_k , $k = 1, \dots, K$, devemos determinar quantas vezes cada um dos N_k padrões de corte devem ser utilizados para atender as demandas de cada um dos m tipos de itens a serem produzidos, considerando as disponibilidades dos objetos em estoque.

Para a descrição do modelo matemático, consideremos como variáveis de decisão:

x_{jk} : número de vezes que o objeto de comprimento L_k é cortado usando o padrão

de corte j ,

$j = 1, \dots, N_k$ e $k = 1, \dots, K$

A formulação matemática do problema é dada por:

$$\text{Minimizar } f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{N_k, k}) = \sum_{j=1}^{N_1} c_{j1}x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} c_{j2}x_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{N_K} c_{jK}x_{jK} \quad (2.16)$$

$$\text{sujeito a: } \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{a}_{j1}x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{a}_{j2}x_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{N_K} \mathbf{a}_{jK}x_{jK} & = \mathbf{d}, \\ \sum_{j=1}^{N_1} x_{j1} & \leq e_1 \\ & \sum_{j=1}^{N_2} x_{j2} \leq e_2 \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^{N_K} x_{jK} \leq e_K \\ x_{jk} \geq 0 \text{ e inteiros, } j = 1, 2, \dots, N_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

A função objetivo (2.16) otimiza o processo de corte. O custo c_{jk} pode ser definido por $c_{jk} = L_k - \sum_{i=1}^m l_i \alpha_{ijk}$, representando a perda total no corte dos objetos; ou pode ser considerado $c_{jk} = c_k$, representando simplesmente o custo do objeto k , independentemente do padrão utilizado. Em (2.17), a primeira restrição, de igualdade, garante que a demanda de cada tipo de item seja atendida, ou seja, a quantidade total de itens do tipo i cortada, em todos os objetos, deve ser igual a d_i . As restrições seguintes, as de desigualdade, garantem que a disponibilidade de cada tipo de objeto em estoque seja respeitada. A última restrição define o domínio das variáveis de decisão, garantindo que a quantidade de vezes que cada padrão será utilizado seja um número inteiro não-negativo.

Nota-se que o modelo para um único tipo de objeto em estoque (2.5)-(2.7) é um caso particular do modelo (2.16)-(2.17), considerando-se ($K = 1$) e a disponibilidade em estoque e_1 suficientemente grande.

2.2 O Problema de Corte Bidimensional

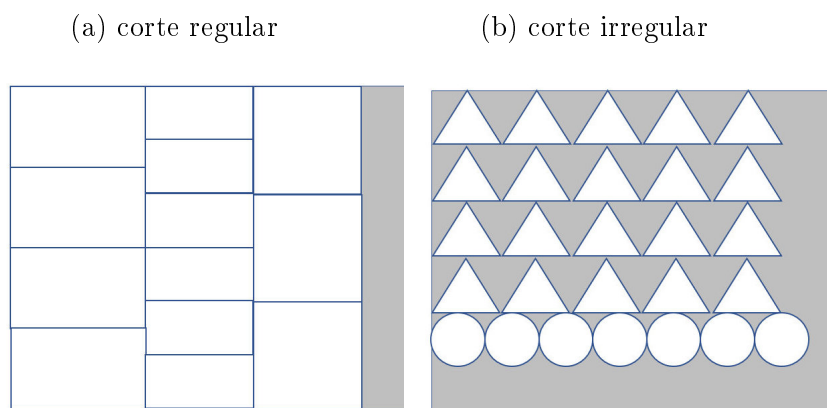
Diferentemente do problema de corte unidimensional, temos agora duas dimensões relevantes no processo de corte, comprimento e largura. Esse problema é muito comum nos processos de produção, onde os objetos em estoque, placas retangulares, devem ser cortadas para obtenção de retângulos menores (itens). Podemos considerar como exemplo, a produção na indústria de móveis: placas grandes de madeira devem ser cortadas em retângulos de diferentes tamanhos (itens) para a produção de armários, mesas, cômodas, etc (produtos finais).

Considere o problema de cortar placas retangulares de dimensões pré definidas: largura (L) \times Comprimento(W), para a obtenção de n tipos de placa menores de dimensões $l_1 \times w_1, l_2 \times w_2, \dots, l_n \times w_n$, em quantidades demandadas d_1, d_2, \dots, d_n , sendo d_i a demanda da placa de dimensões $l_i \times w_i$.

2.2.1 Classificação dos Padrões de Corte Bidimensionais

Analogamente ao Problema de Corte Unidimensional, cada maneira de cortar os objetos maiores, para a obtenção dos itens demandados, segundo as condições e restrições de comprimento e largura, determina um *padrão de corte bidimensional* (ARENALES, 2003). Os padrões de corte bidimensionais são ditos *regulares* quando produzem itens e sobras em forma de retângulos, e *irregulares* quando os produzem em quaisquer outros formatos, como exemplificado na Figura 2.5.

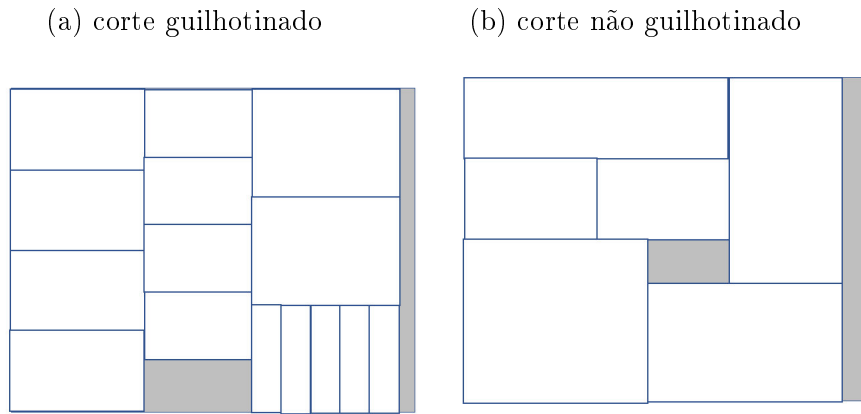
Figura 2.5: Padrões de Cortes Regulares e Irregulares



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Os padrões de corte regulares podem ainda ser classificados em *corte guilhotinado*, quando cada corte produz dois novos retângulos, e *não guilhotinado*, em caso contrário. A Figura 2.6 exemplifica esta classificação.

Figura 2.6: Padrões de corte guilhotinado e não guilhotinado.

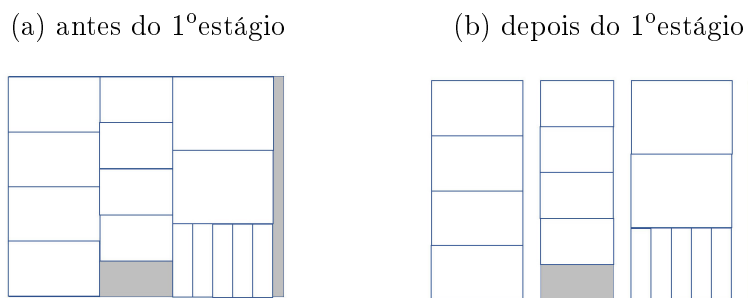


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Os Padrões de corte regulares guilhotinados podem ainda ser classificados em *estagiados* e *multi-estagiados*. Definimos como *estágio* o conjunto de cortes guilhotinados realizados em uma mesma direção; cada estágio posterior é definido pelo conjunto de cortes guilhotinados perpendiculares ao estágio imediatamente anterior.

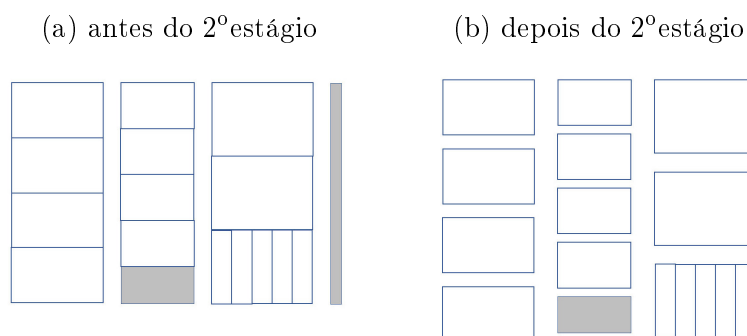
Um padrão de corte guilhotinado N -estágios permite cortes até o estágio de ordem n e um padrão de corte guilhotinado multi-estagiado tem número ilimitado de estágios. As Figuras 2.7, 2.8 e 2.9 ilustram um padrão de corte 3-estágios:

Figura 2.7: Antes e depois dos cortes do 1º estágio.



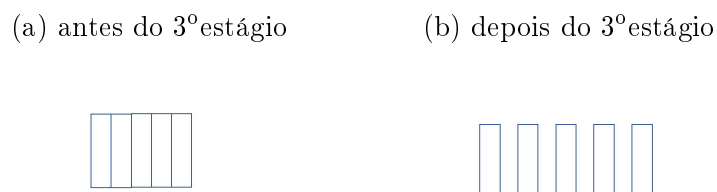
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 2.8: Antes e depois dos cortes do 2º estágio.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

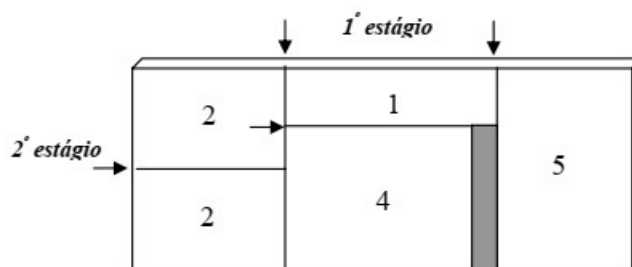
Figura 2.9: Antes e depois dos cortes do 3º estágio.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

O Problema de Corte Bidimensional pode ser tratado como um problema de corte 2-estágios, ou seja, pode ser resolvido cortando-se a placa em tiras, e em seguida cortando as tiras perpendicularmente. Dessa forma, resolver um problema de corte bidimensional 2-estágios consiste em resolver o problema de corte unidimensional duas vezes, como ilustra a Figura 2.10. No capítulo 4, será discutido uma atividade para a construção de padrões de corte bidimensionais em 2-estágios.

Figura 2.10: Padrão de corte guilhotinado 2-estágios



Fonte: Arenales, 2003.

2.3 Considerações importantes

Resolver um problema de corte de estoque pode ser uma tarefa de alta complexidade. Em primeiro lugar, o número de possíveis padrões de corte cresce consideravelmente com o aumento do número de tipos de itens demandados. Como exemplo, considere o problema de corte unidimensional descrito na Seção 2.1.1. Neste exemplo o objeto a ser cortado tem comprimento $L = 19$ e os dados dos 4 itens demandados estão descritos novamente na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Dados dos itens demandados

Item	Comprimento	Demanda
1	3	5
2	4	8
3	6	12
4	8	10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Primeiro caso: Suponha que temos somente demanda do item tipo 1. Então, considerando padrões desejáveis, gera-se somente um padrão (homogêneo), que consiste em cortar 6 itens, com perda igual a 1.

Segundo caso: Suponha uma demanda dos itens de tipos 1 e 2. Neste caso, considerando somente os padrões desejáveis, são obtidos 5 padrões de corte.

Tabela 2.3: Padrões com os itens de tipo 1 e 2

Padrões				
6	1	2	3	5
0	4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Terceiro caso: Suponha uma demanda dos itens de tipo 1, 2 e 3. Neste caso, considerando somente os padrões desejáveis, são obtidos 11 padrões de corte.

Tabela 2.4: Padrões com os itens de tipos 1, 2 e 3

Padrões										
6	0	0	1	1	1	2	3	3	4	5
0	0	3	1	2	4	3	1	2	0	1
0	3	1	2	1	0	0	1	0	1	0

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Quarto caso: Por fim, considerando uma demanda contendo os 4 tipos de itens, são obtidos 17 padrões de corte desejáveis.

Tabela 2.5: Padrões com os itens de tipos 1, 2, 3 e 4

Padrões																
6	0	0	1	1	1	2	3	3	4	5	0	1	1	1	2	3
0	0	3	1	2	4	3	1	2	0	1	1	0	0	2	1	0
0	3	1	2	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Além disso, na modelagem matemática, a cada padrão de corte associamos uma variável de decisão para representar a quantidade de vezes que o padrão deverá ser usado. Sendo assim, em problemas práticos, o número de variáveis é muito grande. Outra dificuldade está na integralidade das variáveis de decisão. Para contornar esta última dificuldade na resolução, relaxamos as restrições de integralidade das variáveis e resolvemos o problema pelo método *simplex*, desenvolvido por Dantzig em 1947 (DANTZIG, 1963 e 1987) para a solução de problemas de otimização linear (a descrição detalhada do método pode ser encontrada em Arenales et al. (2011) e Lopes (2017)). No entanto, o grande número de padrões de corte e, conseqüentemente, de variáveis de decisão pode tornar o problema difícil e, por vezes, impossível de se resolver computacionalmente. Gilmore e Gomory (1961) propuseram a utilização do método de geração de colunas, através da solução do problema da Mochila que, a cada iteração do método *simplex*, fornece o melhor padrão de corte para ser inserido no conjunto de padrões já existentes. A partir da solução ótima do problema de corte relaxado (supondo as variáveis com valores reais não negativos),

utiliza-se uma heurística de arredondamento para obter uma solução aproximada para o problema de corte original (com variáveis inteiras não negativas).

Ao longo desse capítulo vimos que resolver problemas de corte, em especial, para o caso unidimensional, consiste basicamente em duas etapas:

- determinar os diferentes padrões de corte, ou seja, as diferentes maneiras de cortar os objetos em estoque;
- determinar quantas vezes cada padrão será utilizado de modo a atender a demanda, considerando um critério de otimização,

agora, no capítulo 2.4, discutiremos o problema da mochila e sua utilização na geração de padrões de corte desejáveis para o problema de corte relaxado.

2.4 Problema da Mochila

O problema da mochila consiste em escolher, entre certo número de itens disponíveis, quais serão colocados em uma ou várias mochilas com o intuito de maximizar um certo objetivo como, por exemplo, o valor de utilidade de cada item. Sua formulação clássica pode ser entendida pela seguinte situação hipotética:

Um muambeiro pode atravessar a fronteira com no máximo L quilogramas de produtos adquiridos (por limitações alfandegárias). Ele pode preencher sua mochila escolhendo itens dentre m tipos disponíveis. Cada um dos itens possui um peso l_i e gera para o muambeiro um lucro π_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Resolver o problema da mochila consiste em determinar a quantidade y_i do item de peso l_i que o muambeiro deve colocar na mochila, com o objetivo de maximizar o seu lucro.

2.4.1 Modelagem matemática

O problema ilustrado anteriormente pode ser modelado como a seguir:

$$\text{Maximizar} \quad \pi_1 y_1 + \pi_2 y_2 + \dots + \pi_m y_m \quad (2.18)$$

$$\text{sujeito a:} \quad l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_m y_m \leq L \quad (2.19)$$

$$y_i \geq 0 \text{ e inteiros, } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.20)$$

O problema da mochila consiste em um problema de programação linear inteira, pois as variáveis de decisão devem assumir valores inteiros e não negativos.

2.4.2 Geração de padrões no corte unidimensional

No problema de corte unidimensional, descrito no Capítulo 2, os vetores que representam os padrões de corte para um objeto de comprimento L precisam ser determinados previamente. Como já discutido, gerar todos os possíveis padrões de corte consiste em um problema de difícil solução. Dessa forma, a geração de cada possível padrão de corte pode ser modelado como um problema da mochila, considerando as adaptações necessárias, conforme descrito a seguir.

Parâmetros do problema:

- m : quantidade de tipos de itens disponíveis;
- l_i : comprimento do item de tipo i , $i = 1, \dots, m$;
- π_i : valor de utilidade do item de comprimento l_i , $i = 1, \dots, m$;
- L : comprimento do objeto em estoque.

Variáveis de decisão:

- y_i : número de itens de comprimento l_i , $i = 1, \dots, m$ cortados pelo padrão.

2.4.3 Resolução do Problema da Mochila

Resolver o problema da mochila consiste em determinar dentre as soluções factíveis (que satisfazem todas as restrições) aquela que maximiza ou minimiza certo objetivo (solução ótima). No entanto, determinar a solução ótima, caso exista, de um problema de otimização inteira consiste em um trabalho árduo, mesmo computacionalmente. O método *simplex* não pode ser utilizado neste caso, pois ele foi desenvolvido para resolver problemas de otimização linear com variáveis reais. Um dos métodos mais usados para

resolver um problema de otimização inteira é o método *branch-and-bound*. Este método consiste em fazer uso do modelo de otimização linear obtido pela relaxação da restrição de integralidade do problema inteiro original para realizar uma enumeração implícita do conjunto solução e, em seguida, analisar e descartar seus subconjuntos ou por não conterem solução ótima ou por conterem solução distinta mas de mesmo (ou menor) valor ótimo de alguma solução já obtida, no caso de uma problema de maximização. O método determina esses subconjuntos através da estratégia “dividir para conquistar” e, a cada um desses conjuntos, estabelece-se um subproblema do problema original que, espera-se, será de mais simples solução (ARENALES et al., 2011; WOLSEY, 1998)

Para exemplificar, apresentamos no capítulo 3 a resolução, detalhada e comentada, de um problema de otimização inteira pela aplicação do método *branch-and-bound*.

Capítulo 3

Método de solução *branch-and-bound*

Seja a situação hipotética de um muambeiro que tem a disposição para compra os itens A e B, com custos diferentes, pesos diferentes e oferecem a ele lucros diferentes, conforme a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Dados do problema do muambeiro

Item	Custo(em \$)	Peso(em kg)	Lucro(em \$)
A	5	2	10
B	9	2	16

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Para atravessar a fronteira, há restrições tanto no valor total da compra, quanto de peso transportado, não sendo permitido atravessar a fronteira com mais de \$45 e com um peso superior a 12 kg. O problema consiste em efetuar uma compra, obedecendo as condições, de forma a obter o maior lucro possível.

Como as quantidades adquiridas de cada item devem ser valores inteiros, estamos diante de um problema de otimização inteira. Sejam x_1 e x_2 o número de itens do tipo A e B, respectivamente, adquiridos pelo muambeiro. O modelo matemático para o problema é dado a seguir.

$$(PI) \quad \text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 16x_2 \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \quad (3.2)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (3.3)$$

$$x_i \geq 0 \text{ e inteiros, } i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4)$$

A condição de não negatividade das variáveis (3.4) define que a região factível (conjunto de soluções factíveis) fica restrita ao primeiro quadrante. As inequações (3.2) e (3.3) garantem que não sejam ultrapassados os limites de valor e de peso, respectivamente.

Para uma boa explanação para os alunos sobre a resolução de um problema de otimização inteira pelo método *branch-and-bound*, sugerimos alguns passos a serem seguidos, que podem ser melhor detalhados pelo professor, caso considere necessário.

Passo 1: Construção da região factível do problema

Como trata-se de um modelo com duas variáveis, é possível representar graficamente a região factível do problema (conjunto de todos os pontos que satisfazem as restrições). Para tanto, relaxando a condição de integralidade das variáveis do problema inteiro (PI), obtemos o seguinte problema de otimização linear (PL):

$$(PL) \quad \text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 16x_2 \quad (3.5)$$

$$\text{sujeito a:} \quad 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \quad (3.6)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (3.7)$$

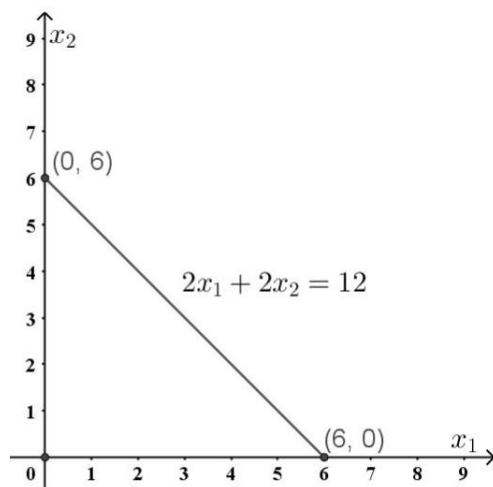
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3.8)$$

Sejam \mathbb{F}_{PI} e \mathbb{F}_{PL} as regiões factíveis do problema inteiro e do problema linear, respectivamente. Para a representação gráfica das duas regiões, considere as seguintes etapas:

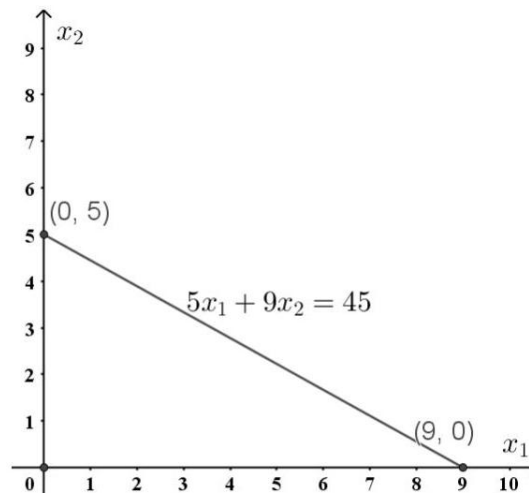
Inicialmente, consideramos as equações associadas as inequações (3.6) e (3.7) do problema linear. Essas equações correspondem a segmentos de reta que dividem o 1º quadrante em duas regiões, como ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3.1: Segmentos de reta associados às restrições do PL.

(a) associado a restrição (3.6)



(b) associado a restrição (3.7)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

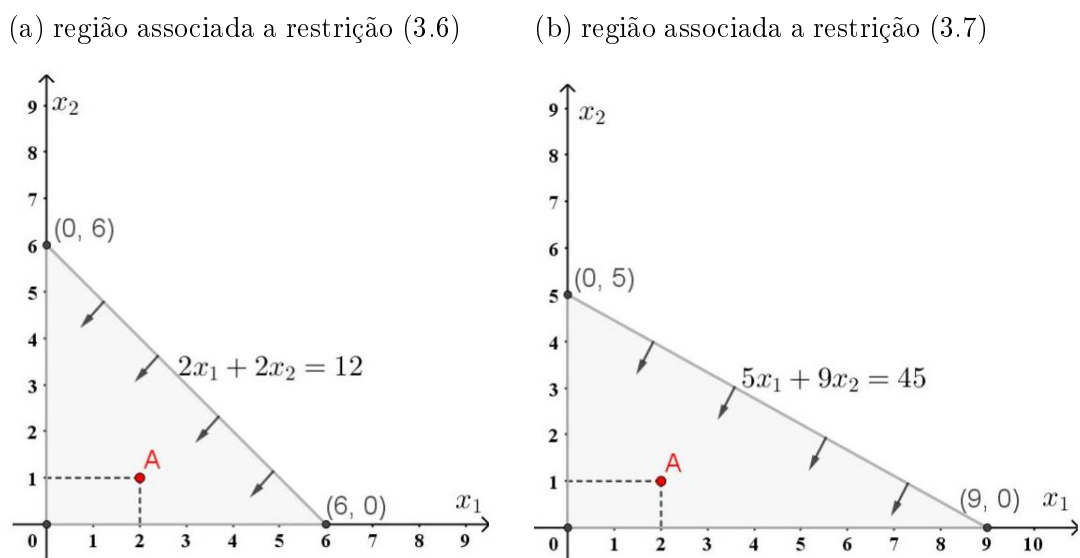
A seguir, em cada gráfico da Figura 3.1, devemos determinar qual região do plano satisfaz a inequação correspondente. Para isso, basta considerar um ponto em uma das duas regiões definidas pelo segmento de reta e testá-lo. Considerando, por exemplo, o ponto $A(2, 1)$, verificamos que:

$$2x_1 + 2x_2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 + 2 = 6 \leq 12$$

$$5x_1 + 9x_2 = 5 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 10 + 9 = 19 \leq 45$$

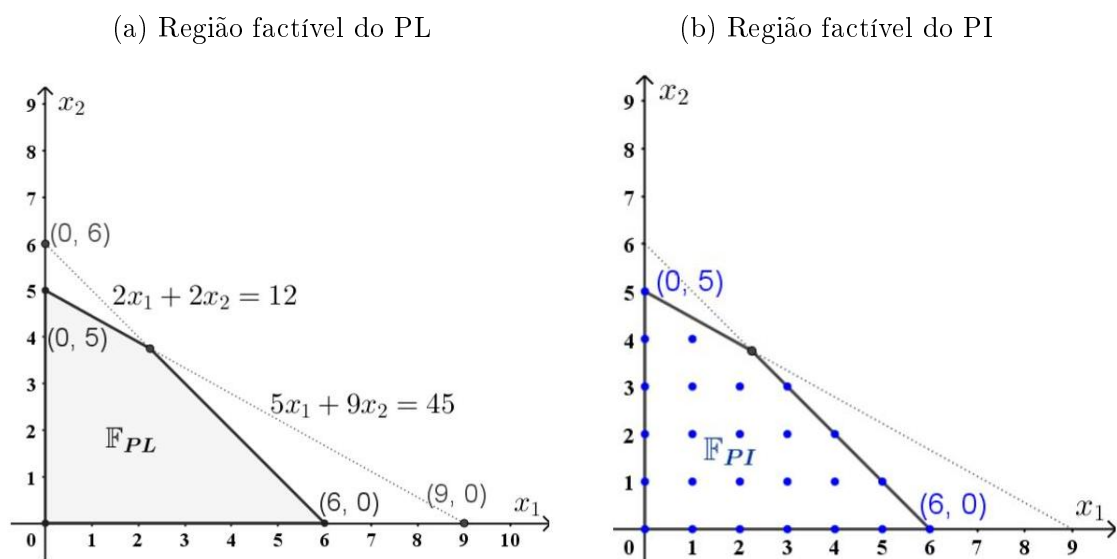
Como o ponto A satisfaz as duas inequações, em ambos os casos, a região a ser considerada está abaixo do segmento de reta que representa a equação associada, como pode ser visualizado na Figura 3.2.

Figura 3.2: Regiões associadas as restrições do PL



A região factível \mathbb{F}_{PL} do problema linear (PL) é determinada pela intersecção das regiões definidas pelas duas inequações, como pode ser visto na Figura 3.3(a). No entanto, observe que, nesta região, os pontos factíveis são pares ordenados de números reais. Como no modelo matemático (3.1 - 3.4) as variáveis são inteiras, o conjunto de soluções factíveis é formado somente pelos pares ordenados de números inteiros, representados na Figura 3.3(b).

Figura 3.3: Regiões factíveis dos problemas linear e inteiro

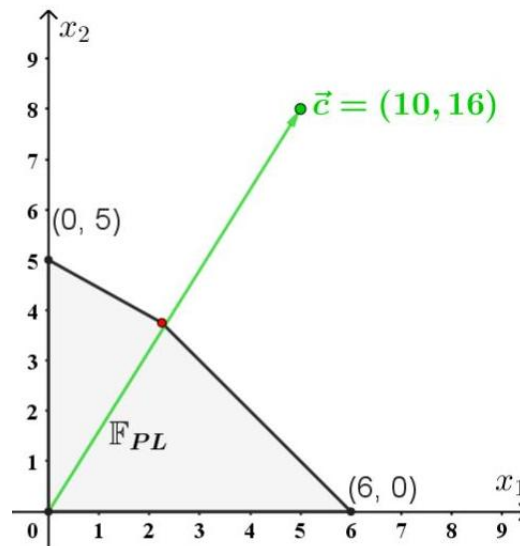


Passo 2: Resolvendo o problema linear PL

Resolver o problema linear (PL) significa determinar, dentre todas as soluções factíveis, a(s) solução(ões) que fornece(m) o maior valor para a função objetivo $z = 10x_1 + 16x_2$. Como o modelo do problema linear (PL) possui somente duas variáveis, é possível determinar a sua solução graficamente. Para isso, consideremos a região factível \mathbb{F}_{PL} do problema, representada novamente na Figura 3.4.

Considerando que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, temos que, quanto maiores os valores de x_1 e x_2 , maior será o valor da função z . Sendo assim, consideremos o vetor gradiente da função objetivo, cujas componentes são os coeficientes de x_1 e x_2 em z , ou seja, $\vec{c} = (10, 16)$, representado na Figura 3.4.

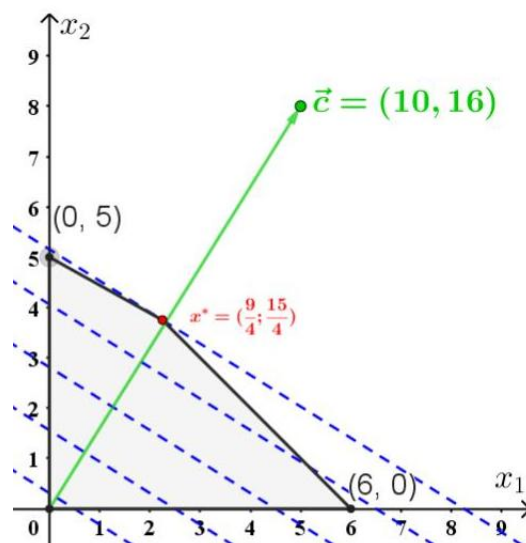
Figura 3.4: Região factível do problema linear PL



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Como o problema é de maximização, caminhamos na direção do vetor \vec{c} , ou seja, traçamos retas paralelas, perpendiculares ao vetor \vec{c} , o último ponto da região factível tocado por uma dessas retas paralelas, denominadas Curvas de nível, é a solução ótima do problema linear. Portanto, o par ordenado $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{9}{4}, \frac{15}{4}\right)$ é solução ótima do PL pois satisfaz todas as restrições do problema e maximiza a função objetivo, fornecendo o valor máximo $\bar{z} = \frac{165}{2} = 82,5$. O procedimento descrito e a solução ótima do problema linear estão representados na Figura 3.5.

Figura 3.5: Solução ótima do problema linear PL



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A solução gráfica do problema linear se baseia nos conceitos de vetor gradiente e curvas de nível de funções de várias variáveis. A seguir, são destacados resultados importantes, considerando uma função de duas variáveis reais.

Teorema 3.1: Seja f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x, y)$. O valor máximo da derivada direcional $D_u f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $|\nabla f(x, y)|$ e ocorre quando \mathbf{u} tem a mesma direção e sentido do vetor $\nabla f(x, y)$.

Corolário 3.1: Seja f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x, y)$. O valor mínimo da derivada direcional $D_u f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $-|\nabla f(x, y)|$ e ocorre na direção de $-\nabla f(x, y)$.

Teorema 3.2: Sejam f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P_0(x_0, y_0)$ e C a curva de nível de f que contém P_0 . Se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, então este vetor gradiente é ortogonal a C em P_0 . Assim, a direção da taxa máxima de variação de $f(x, y)$ em P_0 é ortogonal à curva de nível C .

Para mais detalhes sobre os conceitos do Cálculo Diferencial de Várias Variáveis que embasam a solução gráfica, consultar Lopes (2017).

Voltando na resolução do exemplo, se a solução ótima do problema linear (PL) possuir todas as componentes inteiras, então também será a solução ótima do problema inteiro (PI). Neste exemplo, como a solução ótima do PL não é solução ótima do PI, visto

que x_1 e x_2 não assumiu valores inteiros, continuaremos na busca de uma solução ótima para o problema inteiro (PI) original.

Propriedade 3.1: Considerando \mathbb{F}_{PI} e \mathbb{F}_{PL} os conjuntos soluções do problema inteiro e do problema linear, respectivamente, como $\mathbb{Z}_+^n \subset \mathbb{R}_+^n$, temos que $\mathbb{F}_{PI} \subset \mathbb{F}_{PL}$. Logo, todas as soluções inteiras são também reais e, conseqüentemente, o valor de z para a solução ótima do problema inteiro será sempre menor ou igual ao valor de \bar{z} para a solução ótima do problema linear, ou seja, $z \leq \bar{z}$. Portanto, \bar{z} é denominado LIMITANTE SUPERIOR para o valor z (para o problema de maximização). No caso do problema ser de minimização, teremos $z \geq \bar{z}$ e, assim, \bar{z} será o LIMITANTE INFERIOR para o valor de z .

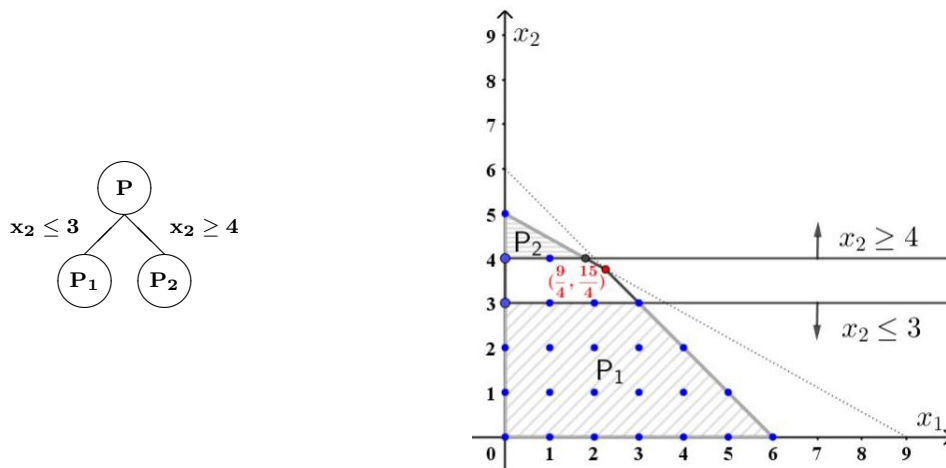
Passo 3: Ramificação do problema linear

Como a solução ótima do problema linear possui componentes não inteiras, neste passo, particionamos o problema linear (PL) da seguinte maneira: considerando, por exemplo, a componente x_2 da solução ótima, temos que $3 < x_2 < 4$. Logo, a primeira ramificação será considerar $x_2 \leq 3$ ou $x_2 \geq 4$, gerando dois subproblemas P_1 e P_2 . A Figura 3.6 ilustra os subproblemas através de uma árvore de ramificação e a equivalente representação gráfica.

Figura 3.6: Ramificação do problema PL em dois subproblemas P_1 e P_2

(a) ramificação do problema PL

(b) divisão da região factível



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Analisaremos, agora os dois novos problemas lineares a serem resolvidos. O problema

linear P_1 foi obtido pela inclusão da restrição $x_2 \leq 3$ ao problema linear PL :

$$\begin{aligned}
 (P_1) \quad & \text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 16x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \quad 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \leq 3 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, o problema linear P_2 foi obtido pela inclusão da restrição $x_2 \geq 4$ ao problema linear PL :

$$\begin{aligned}
 (P_2) \quad & \text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 16x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \quad 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \geq 4 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Para resolver os subproblemas lineares P_1 e P_2 pelo método gráfico, consideremos novamente as respectivas regiões factíveis, ilustradas na Figura 3.7.

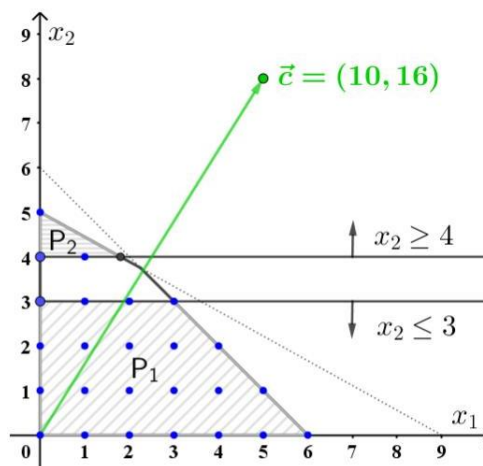


Figura 3.7: Regiões factíveis do problemas P_1 e P_2

Considerando o vetor dos coeficientes da função objetivo $\vec{c} = (10, 16)$ e as retas

paralelas, perpendiculares a \vec{c} , obtemos as soluções ótimas dos subproblemas P_1 e P_2 , representadas na Figura 3.7.

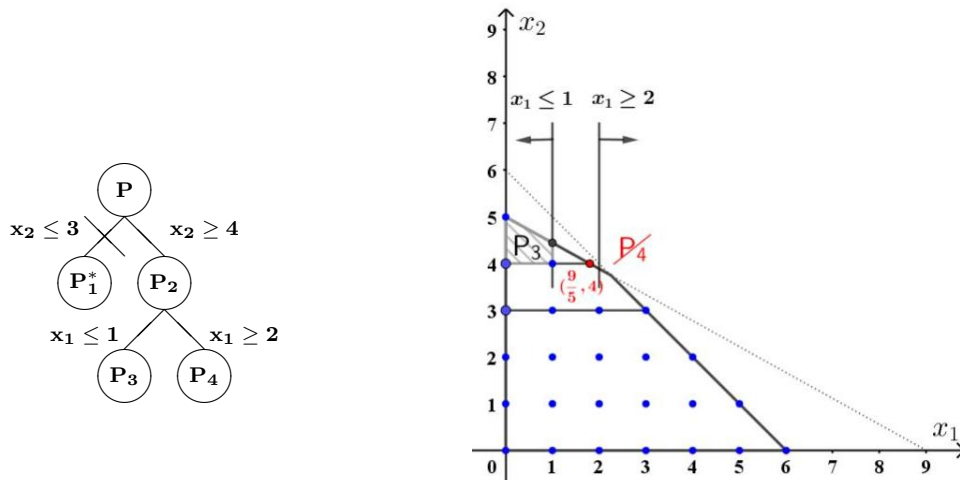
A solução ótima do problema P_1 é o ponto $(x_1, x_2) = (3, 3)$, com valor da função objetivo $\bar{z}_1 = 78$. Como as duas componentes são valores inteiros, não há na região factível de P_1 solução melhor para o problema inteiro (PI). Portanto, ramificar o subproblema P_1 não trará nenhuma vantagem. Neste caso dizemos que $(3, 3)$ é uma solução incumbente e $\bar{z}_1 = 78$ serve de limitante inferior para a solução ótima do problema inteiro (PI).

No caso do problema linear P_2 , obtemos a solução ótima $(x_1, x_2) = (\frac{9}{5}, 4)$, com valor da função objetivo $\bar{z}_2 = 82$. Caso a solução ótima de P_2 fosse inferior a solução inteira $z = 78$, obtida para o subproblema P_1 , teríamos que $(3, 3)$ seria a solução ótima do problema inteiro PI . No entanto, como $\bar{z}_2 > 78$, pode haver uma solução inteira melhor que $(3, 3)$ na região factível do subproblema P_2 .

Particionando, o subproblema P_2 , a partir de sua solução linear $(\frac{9}{5}, 4)$, fazendo a ramificação na variável x_1 , temos $x_1 \leq 1$ ou $x_1 \geq 2$, como ilustra a Figura(3.8):

Figura 3.8: Ramificação do problema linear P_2 nos subproblemas P_3 e P_4

(a) ramificação do subproblema P_2 (b) regiões factíveis de P_3 e P_4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Consideremos os dois novos subproblemas lineares a serem resolvidos. O subpro-

blema P_3 foi obtido pela inclusão da restrição $x_1 \leq 1$ ao subproblema P_2 :

$$\begin{aligned} (P_3) \quad & \text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 16x_2 \\ & \text{sujeito a:} \quad 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ & \quad \quad \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & \quad \quad \quad x_2 \geq 4 \\ & \quad \quad \quad x_1 \leq 1 \\ & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, o subproblema P_4 foi obtido pela inclusão da restrição $x_1 \geq 2$ ao subproblema P_2 :

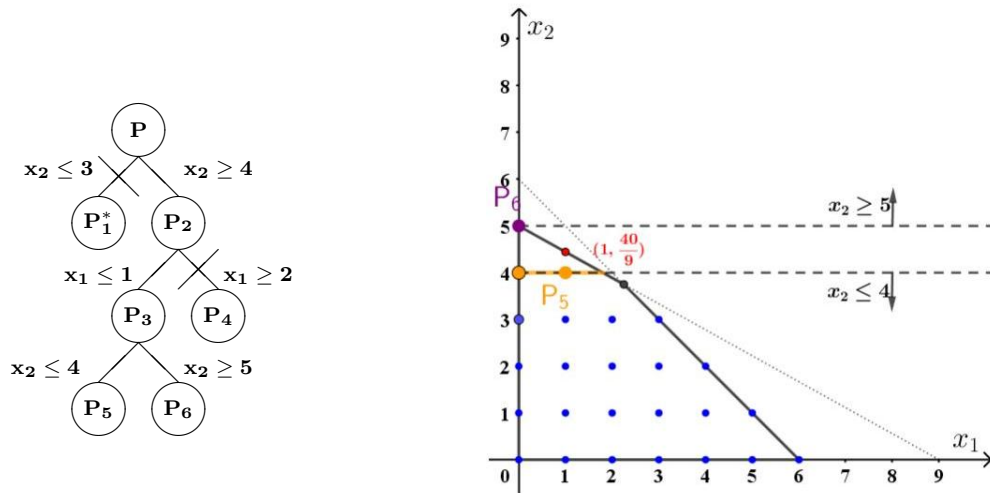
$$\begin{aligned} (P_4) \quad & \text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 16x_2 \\ & \text{sujeito a:} \quad 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ & \quad \quad \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & \quad \quad \quad x_2 \geq 4 \\ & \quad \quad \quad x_1 \geq 2 \\ & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Resolvendo graficamente o subproblema P_3 , encontramos a solução ótima $(x_1, x_2) = (1, \frac{40}{9})$, com valor da função objetivo $\bar{z}_3 = \frac{730}{9} \approx 81,1$. O subproblema P_4 não apresenta nenhuma solução factível, como nota-se na Figura 3.8, logo é infactível e, portanto, esse ramo é “podado”.

Particionando o subproblema P_3 , a partir de sua solução linear $(1, \frac{40}{9})$, fazendo a ramificação na variável x_2 , obtemos as possibilidades $x_2 \leq 4$ ou $x_2 \geq 5$, como ilustra a Figura(3.9):

Figura 3.9: Ramificação do problema P_3 em dois subproblemas (P_5 e P_6)

(a) ramificação do subproblema P_3 (b) regiões factíveis de P_5 e P_6



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Temos, então, dois novos subproblemas lineares para serem resolvidos. O subproblema P_5 , é obtido pela inclusão da restrição $x_2 \leq 4$ ao subproblema P_3 :

$$\begin{aligned}
 (P_5) \quad & \text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 16x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \quad 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \geq 4 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \leq 4 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

O subproblema P_6 é obtido pela inclusão da restrição $x_2 \geq 5$ ao problema P_3 :

$$\begin{aligned}
 (P_6) \quad & \text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 16x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \quad 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \geq 4 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \geq 5 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

No subproblema P_5 , temos que as restrições $x_2 \geq 4$ e $x_2 \leq 4$ implicam que $x_2 = 4$. Logo, a região factível possui apenas dois pontos, ambos com coordenadas inteiras: $B(0, 4)$ e $C(1, 4)$. Analisando cada uma das soluções, temos: $f(0, 4) = 64$ e $f(1, 4) = 74$, Ambas com valores da função objetivo menores que o da solução incumbente $(3, 3)$, encontrada no subproblema P_1 . Então, o subproblema P_5 pode ser podado.

Quanto ao subproblema P_6 , temos que as restrições $x_2 \geq 4$ e $x_2 \geq 5$ obrigam que $x_2 = 5$. Logo, a região factível possui apenas um ponto, que possui coordenadas inteiras: $D(0, 5)$. Calculando o valor da função no ponto D, temos: $f(0, 5) = 80$, que é melhor que o valor da função para a solução incumbente $(3, 3)$ encontrada no subproblema P_1 . Então, a solução $(0, 5)$ encontrada no subproblema P_5 é a solução ótima para o problema inteiro, com valor $z = 80$ para função objetivo.

A partir da resolução gráfica de um problema de otimização linear de duas variáveis reais, é possível entender o embasamento teórico do método *simplex*, bastante utilizado para a resolução de problemas de otimização linear, que surgem na prática, e envolvem um número significativamente grande de variáveis reais. Observe, na resolução gráfica, que a solução ótima de cada problema linear é um vértice da região factível. Considere os resultados a seguir.

Teorema 3.3: Seja $\mathbb{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = b \text{ e } \mathbf{x} \geq 0\}$ a região factível de um problema de otimização linear. O conjunto \mathbb{F} é convexo.

Teorema 3.4: Se um Problema de Otimização Linear tem solução ótima, então existe vértice ótimo.

A demonstração dos teoremas podem ser encontradas em Bazaraa *et al.* (1990).

Dessa forma, podemos concluir que o método *simplex* caminha pelos vértices da região factível, até encontrar a solução ótima, caso exista. Observe que o conjunto de vértices da região factível é um conjunto finito. Maiores detalhes podem ser encontrados em Arenales et al. (2011), Bazarraa *et al.* (1990) e Lopes (2017).

Capítulo 4

Atividades para aplicação em sala de aula

Neste capítulo, propomos duas situações-problemas, considerando o corte de barras de aço (aplicação do problema de corte unidimensional) e o corte de placas (aplicação na indústria de móveis), para ser trabalhada em sala de aula com alunos do ensino médio ou como uma atividade extracurricular.

4.1 Empresa de barras de aço

4.1.1 Objetivo

Com estas atividades, espera-se trabalhar com os alunos conceitos matemáticos previamente estudados e, através da resolução do problema proposto, que os alunos compreendam a importância da matemática como ferramenta para a tomada de decisões.

4.1.2 Público alvo

Jovens da segunda ou terceira série do Ensino Médio.

4.1.3 Conteúdos envolvidos

- Representação gráfica de igualdades no plano cartesiano.

- Representação gráfica de desigualdades no plano cartesiano.
- Coeficiente Angular da Reta
- Retas Paralelas.
- Retas Perpendiculares.
- Discussão e Resolução de Sistemas Lineares.
- Raciocínio Combinatório.

4.1.4 Material necessário

Para cada grupo de três (ou quatro) alunos será necessário:

- 1 impressão (ou fotocópia) do problema.
- 1 jogo de esquadros.
- 3 folhas de almaço.

4.1.5 Descrição do problema

Um empresa que comercializa barras de aço, sob medida, recebeu uma encomenda conforme o quadro a seguir:

Tabela 4.1: Dados - Problema das barras de aço

Item	Comprimento(em metros)	Demanda(em unidades)
1	4	30
2	6	16
3	8	18

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Para atender a demanda pré estabelecida, a empresa tem, em estoque, barras de 20 metros de comprimento. O problema consiste, então, em como atender o pedido cortando o menor número possível de barras.

4.1.6 Desenvolvimento

- Coletivamente, realizar a leitura do problema e, discutir com a sala o grau de dificuldade em se obter a melhor solução para o problema.
- Propor aos alunos que, em grupos, discutam e encontrem possíveis maneiras de cortar uma barra a fim de gerar itens demandados.
- Após as discussões entre os alunos, o professor deverá sistematizar os resultados obtidos introduzindo os conceitos de: padrão de corte, padrões homogêneos, padrões desejáveis e não desejáveis, e, ao mesmo tempo a representação de padrões de corte por vetores.
- O professor deverá discutir, coletivamente, com os grupos a melhor maneira de utilizar os padrões de corte, para o corte dos itens que irão compor a demanda. Deve indagá-los sobre quais decisões devemos tomar agora.
- Propor que os grupos, com o auxílio do professor, determinem um modelo matemático que represente o problema de corte, considerando os padrões sistematizados na lousa pelo professor.
- Após ampla discussão entre os alunos, o professor deverá sistematizar um modelo matemático em lousa, discutindo sobre as dificuldades do mesmo (número de equações, número de variáveis, significado dos coeficientes e das variáveis).
- Sugerir que cada grupo escolha um par de padrões, diferentes dos demais grupos para, posteriormente, fazer a comparação das soluções e, que realizem a resolução simplificada do problema seguindo exemplo apresentado pelo professor.
- Por fim, os grupos devem socializar as soluções obtidas, comparando os respectivos valores ótimos. Nesse momento, o professor deve lembrar que as soluções foram obtidas considerando-se a utilização de apenas os dois padrões escolhidos.
- O professor deverá, então, apresentar as soluções ótimas obtidas considerando-se todos os padrões e usando um pacote de otimização, realizando uma discussão coletiva sobre todos os resultados obtidos.

- Por fim, o professor pode discutir, coletivamente, qual das soluções apresentadas deve ser utilizada e quais as vantagens dessa solução em relação as outras soluções.

4.1.7 Orientação ao professor

Realizar, coletivamente, a leitura do problema e, discutir com a sala o grau de dificuldade em se obter a melhor solução ótima para o problema.

Etapa 1: Construção dos padrões de corte para a barra

Ao propor a geração dos padrões, os caminhos adotados pelos grupos de alunos para gerar os diversos padrões de corte poderão variar bastante. Alguns possíveis são:

- construção de padrões homogêneos, posteriormente, padrões com dois tipos diferentes de itens e, por fim, com 3 tipos diferentes de itens;
- outros poderão iniciar esgotando a barra com o maior item, para, em seguida, ir diminuindo a quantidade de itens de maior comprimento e aumentando a quantidade dos itens de menores comprimentos;
- também poderão iniciar esgotando a barra com o menor item para, em seguida, ir diminuindo a quantidade dos itens de menor comprimento e aumentando a quantidade dos itens de comprimentos maiores.

Independente do caminho adotado, espera-se que os alunos grem todos os padrões possíveis (desejáveis e não desejáveis). Na Tabela 4.2, estão listados todos os possíveis padrões de corte para a barra de aço de comprimento $20m$, considerando os itens demandados. Estes padrões são representados pelos vetores de três componentes, indicando a quantidade de cada item que será cortada da barra, usando o padrão a_j , $j = 1, \dots, 22$.

Tabela 4.2: Padrões - Problema das barras de aço

Padrão	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
$l_1 = 4$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$l_2 = 6$	0	0	1	1	2	2	3	0	0	0	1
$l_3 = 8$	1	2	0	1	0	1	0	0	1	2	0

Padrão	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}
$l_1 = 4$	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	5
$l_2 = 6$	1	2	0	0	1	2	0	0	1	0	0
$l_3 = 8$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Os alunos poderão perceber que vários desses padrões não são interessantes de serem usados, por apresentarem, por exemplo, uma perda grande de material. No entanto, eles poderão ser úteis no atendimento exato da demanda (pois a restrição de demanda é de igualdade).

Etapa 2: Resolução do problema de corte

Após a geração dos padrões, o professor poderá discutir com os alunos a melhor maneira de utilizar os padrões de corte, para a produção dos itens que irão compor a demanda. O que se espera é que os alunos percebam que o problema, nesta segunda etapa, consiste em determinar quantas barras deverão ser cortadas por cada um dos possíveis padrões. Observe que não é necessário utilizar todos os padrões elencados.

Para essa segunda etapa, sugerimos a construção de um modelo matemático, sendo que a variável de decisão x_j representará o número de vezes que o padrão de corte j , será utilizado. De forma equivalente, x_j consiste no número de barras cortadas usando o padrão j , sendo $j = 1, \dots, 22$.

Os alunos, com a orientação do professor, poderão chegar no seguinte modelo matemático:

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_{22} \quad (4.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_{22} x_{22} = \mathbf{d} \quad (4.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_{22} \geq 0 \text{ e inteiros.} \quad (4.3)$$

sendo $\mathbf{d}^T = (30, 16, 18)$.

O professor deverá enfatizar que, considerando todos os possíveis padrões, temos um modelo com 22 variáveis de decisão. Ou seja, o sistema linear 4.2 possui 3 equações (uma para cada tipo de item) e 22 variáveis. Dessa forma, para ser possível a resolução com os alunos, sugere-se escolher apenas dois dos padrões gerados permitindo, a resolução gráfica dos problemas lineares. Sugere-se que cada grupo de alunos escolha uma par de padrões, diferente dos demais grupos para, posteriormente, fazer a comparação das soluções. Por fim, o professor apresentará um exemplo de resolução (4.1.8), considerando um par de padrões, então deve propor para que os grupos resolvam o problema com os padrões escolhidos.

O professor deve auxiliar os grupos na resolução do problema e, ao final, realizar a síntese dos resultados obtidos, indicando o valor ótimo obtido e determinando a perda total associada a cada uma das soluções.

Ainda que seja obtida mais de uma solução com mesmo valor ótimo, o professor pode discutir coletivamente, qual delas deve ser escolhida e qual a sua vantagem sobre as demais.

Como exemplo, ao final desta seção(4.1.10) são analisadas as perdas totais das três soluções, de mesmo valor ótimo, obtidas computacionalmente(4.1.9) para o modelo(4.2) que considera a utilização dos 22 padrões de corte e, a perda total das soluções apresentadas no exemplo de resolução(4.1.8) que considera apenas dois padrões específicos.

4.1.8 Exemplo de resolução considerando apenas dois padrões de corte

Para exemplificar, escolhamos os seguintes padrões de corte: $a_{10}^T = (1, 0, 2)$ (padrão de corte que gera 1 unidade do item 1 e 2 unidades do item 3) e $a_{17}^T = (2, 2, 0)$ (padrão de corte que gera 2 unidades do item 1 e 2 unidade do item 2). Dessa forma, o modelo (4.1)-(4.3), considerando apenas esses dois padrões contém somente duas variáveis, como descrito pelo problema 4.4:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a:} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros.}
\end{array} \tag{4.4}$$

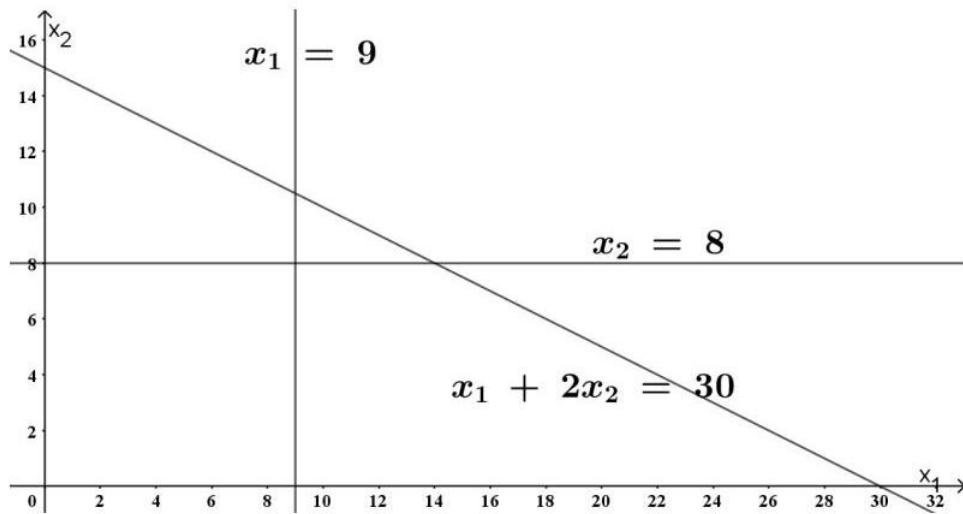
sendo x_1 e x_2 o número de vezes que os padrões de corte a_{10} e a_{17} serão utilizados, respectivamente .

Equivalentemente, podemos escrever:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a:} & x_1 + 2x_2 = 30 \\
& 2x_2 = 16 \\
& 2x_1 = 18 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros.}
\end{array} \tag{4.5}$$

Antes de atender o objetivo de minimizar o número de objetos cortados, devemos atender as restrições da demanda que, no caso, são igualdades. Analisando, algebricamente, temos um sistema com 3 equações em duas variáveis. Resolvendo, concluímos que se trata de um sistema impossível, ou seja, sem solução. Logo, a região factível é vazia, como pode ser visto na Figura 4.1. Observe que, graficamente, temos três retas que não possuem pontos de intersecção. O professor pode associar a ideia de que as restrições do problema definem o domínio da função.

Figura 4.1: Região factível do modelo 4.5.



Fonte:

Elaborado pelo autor, 2019.

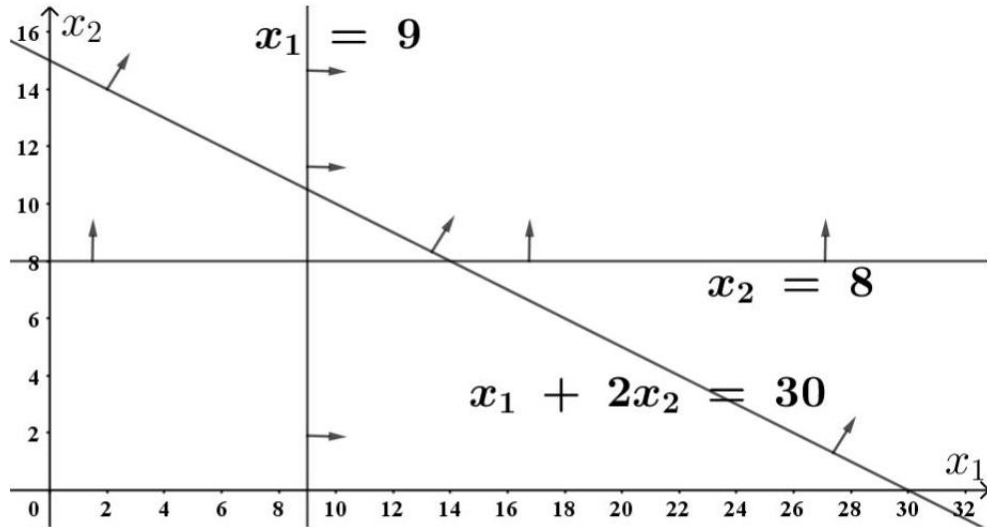
Como podemos perceber, algébrica e graficamente, o problema com apenas os padrões de corte selecionados e com restrições de igualdade para a demanda, torna-se infactível. Quando isso ocorre, uma alternativa é não considerar as restrições de demanda na igualdade, ou seja, considerar a possibilidade de atendê-la com folga, ficando os itens excedentes no estoque. Com a troca das relações, temos um novo modelo:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & z = x_1 + x_2 \\
 \text{sujeito a:} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 30 \\
 & 2x_2 \geq 16 \\
 & 2x_1 \geq 18 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros.}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

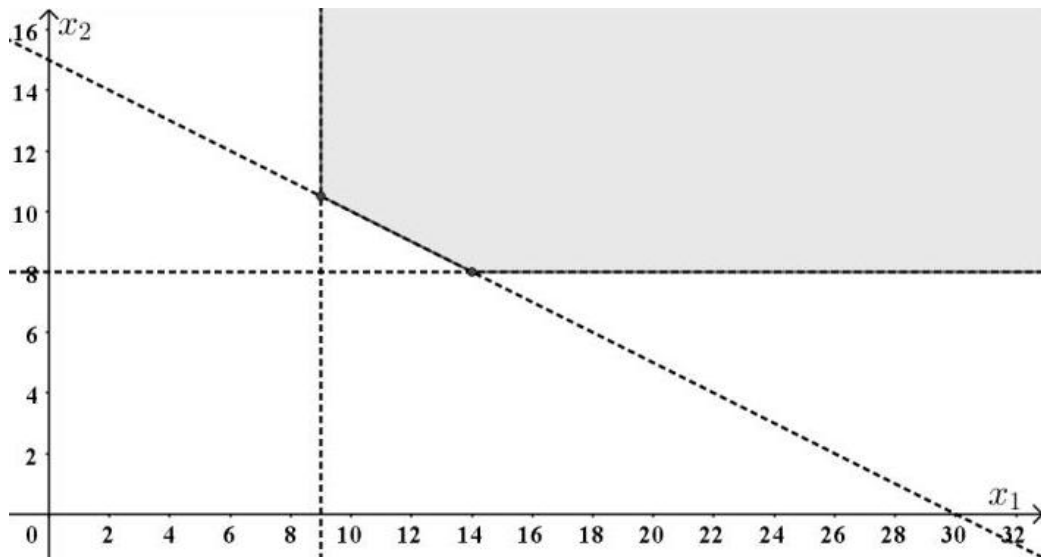
Analisando, agora, as desigualdades e representando-as graficamente, encontramos a região de pontos que satisfazem simultaneamente as três inequações. Essa região factível é ilimitada, conforme ilustra a Figura (4.2):

Figura 4.2: Região factível do modelo 4.6

(a) Inequações - Problema das barras



(b) Região factível - Problema das barras

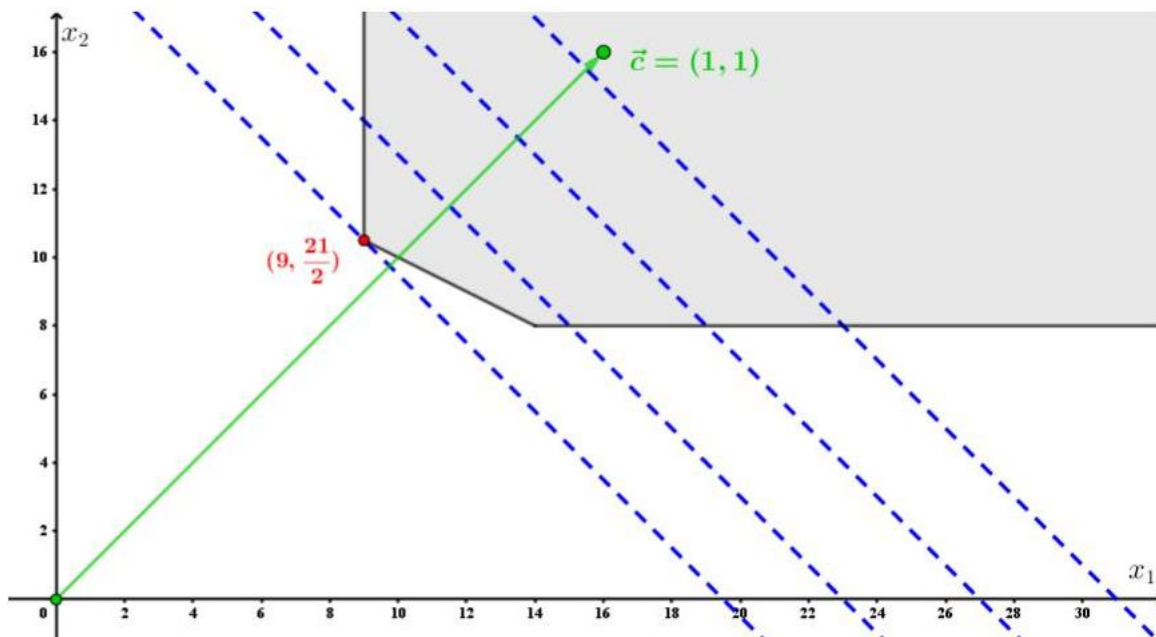


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Análogo ao desenvolvido no exemplo da Seção 3.3, encontraremos a solução ótima do problema linear, construindo as curvas de nível da função objetivo (retas paralelas) e determinando, entre os pontos da região factível, aquele que será o último a ser tocado conforme as curvas de nível deslocam-se no sentido contrário do vetor gradiente (pois se

trata de um problema de minimização). Sendo o vetor gradiente formado pelas componentes da função objetivo, logo, como a função objetivo é dada por $z = x_1 + x_2$, temos que o vetor gradiente será $\vec{c} = (1, 1)$.

Figura 4.3: Resolução gráfica do problema linear

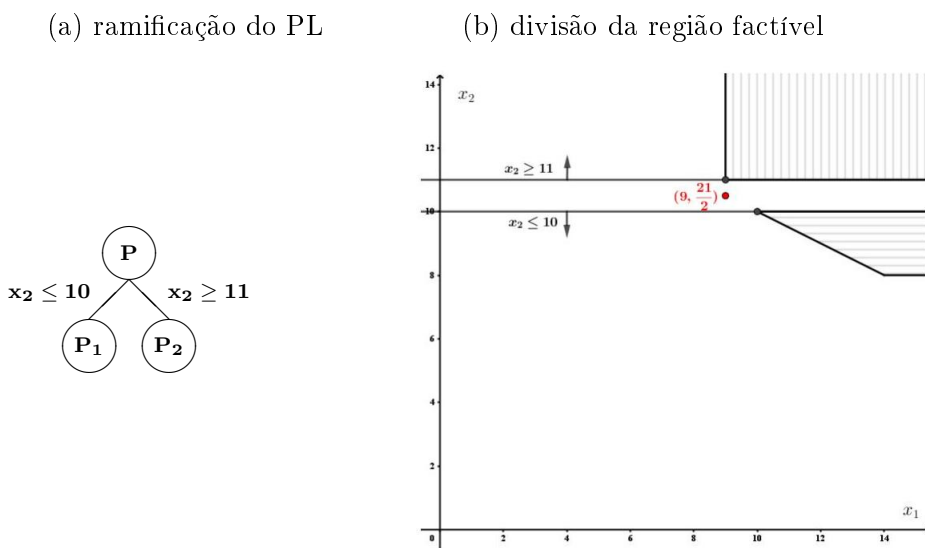


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Pela Figura 4.3, caminhando no sentido contrário do vetor \vec{c} , o último ponto da região factível a ser tocado por uma reta paralela é o ponto $(x_1^*, x_2^*) = (9, \frac{21}{2})$, que se trata da solução ótima do problema linear (PL), fornecendo o valor mínimo $\bar{z} = \frac{9}{2} = 19,5$. Como a solução ótima do problema linear possui componentes não inteiras, continuaremos a busca pela solução do problema inteiro (PI).

Particionamos, então, o problema linear (PL) da seguinte maneira: ramificaremos a componente x_2 da solução ótima, e como $10 < x_2 < 11$, a primeira ramificação será considerar $x_2 \leq 10$ ou $x_2 \geq 11$, gerando dois subproblemas P_1 e P_2 . A Figura 4.4 ilustra os subproblemas através de uma árvore de ramificação e a equivalente representação gráfica.

Figura 4.4: Ramificação do PL em dois subproblemas P_1 e P_2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Analisaremos, agora os dois novos problemas lineares a serem resolvidos. O problema linear P_1 foi obtido pela inclusão da restrição $x_2 \leq 10$ ao problema linear PL :

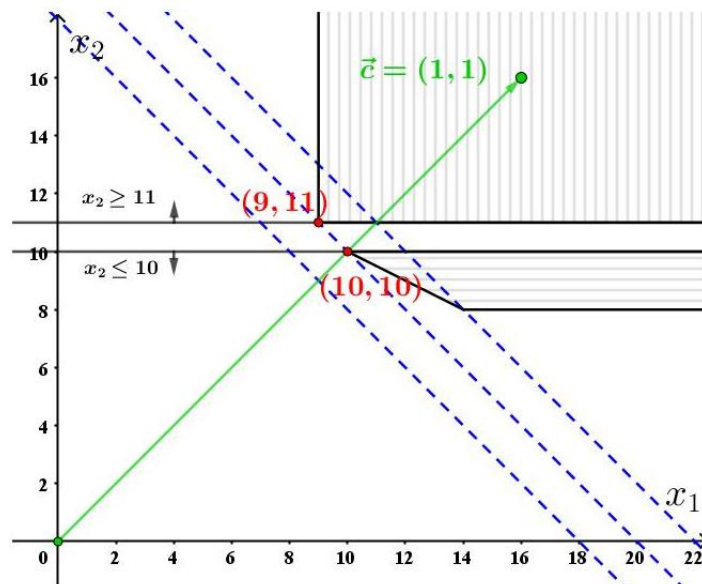
$$\begin{aligned}
 (P_1) \quad & \text{Minimizar} \quad z = x_1 + x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \quad x_1 + 2x_2 \geq 30 \\
 & \quad \quad \quad 2x_2 \geq 16 \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 \geq 18 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \leq 10 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros.}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, o problema linear P_2 foi obtido pela inclusão da restrição $x_2 \geq 11$ ao problema linear PL :

$$\begin{aligned}
 (P_2) \quad & \text{Minimizar} \quad z = x_1 + x_2 \\
 & \text{sujeito a:} \quad x_1 + 2x_2 \geq 30 \\
 & \quad \quad \quad 2x_2 \geq 16 \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 \geq 18 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \geq 11 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros.}
 \end{aligned}$$

Para resolver os subproblemas P_1 e P_2 pelo método gráfico, consideremos novamente suas respectivas regiões factíveis. Traçando retas paralelas, perpendiculares ao vetor $\vec{c} = (1, 1)$, no sentido contrário, obtemos as soluções ótimas de cada subproblema, conforme ilustrado na Figura 4.5.

Figura 4.5: Resolução gráfica dos subproblemas P_1 e P_2 do problema das barras



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A solução ótima do subproblema P_1 é o par ordenado $(10, 10)$, fornecendo o valor para a função objetivo $\bar{z} = 20$. A solução ótima de P_2 é o par ordenado $(9, 11)$, também com o valor $\bar{z} = 20$ para a função objetivo. Dessa forma, como ambas as soluções possuem componentes inteiras, obtemos dois pontos ótimos para o problema PI.

Logo, a partir da solução obtida para o problema de corte das barras de aço, considerando os padrões $a_{10}^T = (1, 0, 2)$ e $a_{17}^T = (2, 2, 0)$, concluímos que deverão ser usadas 20 barras para o atendimento da demanda.

4.1.9 Solução considerando os 22 padrões para a barra de comprimento 20

Na solução obtida no exemplo (4.1.8) para o problema inteiro, foram utilizados apenas 2 padrões de corte. No entanto, inicialmente, destacamos que há 22 possíveis padrões. Assim, resolvendo o problema (4.1)-(4.3), considerando todos os padrões e usando um

pacote computacional de otimização, obtemos o valor mínimo para a função objetivo $z = 18$. Isso significa que é possível atender a mesma demanda utilizando apenas 18 barras. Três soluções ótimas estão descritas a seguir, que representam três maneiras diferentes de atender a demanda com o mínimo de barras.

$$1^{\text{a}} \text{ Solução: } \begin{cases} 9 \text{ barras usando o padrão } a_{10}^T = (1, 0, 2) \\ 8 \text{ barras usando o padrão } a_{17}^T = (2, 2, 0) \\ 1 \text{ barra usando o padrão } a_{22}^T = (5, 0, 0) \end{cases}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Solução: } \begin{cases} 8 \text{ barras usando o padrão } a_6^T = (0, 2, 1) \\ 5 \text{ barras usando o padrão } a_{10}^T = (1, 0, 2) \\ 5 \text{ barra usando o padrão } a_{22}^T = (5, 0, 0) \end{cases}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Solução: } \begin{cases} 8 \text{ barras usando o padrão } a_6^T = (0, 2, 1) \\ 10 \text{ barras usando o padrão } a_{19}^T = (3, 0, 1) \end{cases}$$

4.1.10 Analisando a perda total

1ª Solução do Exemplo(4.1.8):

Neste exemplo, foram encontradas duas soluções de valor ótimo $z = 20$. Na primeira solução foram cortadas 10 barra segundo o padrão $a_{10}^T = (1, 0, 2)$ e, 10 barras segundo o padrão $a_{17}^T = (2, 2, 0)$. Ambos padrões não geram perdas, mas acabam produzindo itens em excesso que ficam para estoque. Nesta solução, são produzidos 30 unidades do item 1, 20 unidades do item 2 e 20 unidades do item 3:

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Temos, então, um excesso de 4 unidades do item 2(6 metros de comprimento cada) e de 2 unidades do item 3(8 metros de comprimento cada), produzindo um total de 40

metros de itens em excesso.

2ª Solução do Exemplo(4.1.8): Na segunda solução foram cortadas 9 barra segundo o padrão $a_{10}^T = (1, 0, 2)$ e, 11 barras segundo o padrão $a_{17}^T = (2, 2, 0)$. Ambos padrões não geram perdas, mas acabam produzindo itens em excesso que ficam para estoque. Nesta solução, são produzidos 31 unidades do item 1, 22 unidades do item 2 e 18 unidades do item 3:

$$9. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 11. \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Temos, então, um excesso de 1 unidades do item 1(4 metros de comprimento cada) e de 6 unidades do item 2(6 metros de comprimento cada), produzindo, também, um total de 40 metros de itens em excesso.

1ª Solução ótima(4.1.9): Na 1ª solução ótima foram cortadas 9 barra segundo o padrão $a_{10}^T = (1, 0, 2)$, 8 barras segundo o padrão $a_{17}^T = (2, 2, 0)$ e, 1 barra segundo o padrão $a_{22}^T = (5, 0, 0)$. Nenhum dos padrões gera perda e, nesta solução, são produzidos 30 unidades do item 1, 16 unidades do item 2 e 18 unidades do item 3:

$$9. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 8. \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Portanto, nessa solução, a demanda é atendida com exatidão(sem sobra de itens para estoque) e com perda total igual a zero.

2ª Solução ótima(4.1.9): Na 2ª solução ótima foram cortadas 8 barra segundo o padrão $a_6^T = (0, 2, 1)$, 5 barras segundo o padrão $a_{10}^T = (1, 0, 2)$ e, 5 barra segundo o padrão $a_{22}^T = (5, 0, 0)$. Nenhum dos padrões gera perda e, nesta solução, são produzidos 30 unidades do item 1, 16 unidades do item 2 e 18 unidades do item 3:

$$8. \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 5. \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Portanto, nessa solução, a demanda é atendida, também, com exatidão(sem sobra de itens para estoque) e com perda total igual a zero.

3ª Solução ótima(4.1.9): Na 3ª solução ótima foram cortadas 8 barra segundo o padrão $a_6^T = (0, 2, 1)$, 10 barras segundo o padrão $a_{19}^T = (3, 0, 1)$. Nenhum dos padrões gera perda e, nesta solução, são produzidos 30 unidades do item 1, 16 unidades do item 2 e 18 unidades do item 3:

$$8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Portanto, nessa solução, a demanda é atendida, também, com exatidão(sem sobra de itens para estoque) e com perda total igual a zero.

Como podemos perceber, as duas soluções ótimas do exemplo resolvido, com dois padrões, apresentam a mesma metragem de itens produzidos em excesso, assim como, as três soluções ótimas para o problema considerando o uso dos 22 padrões de corte produzem a mesma perda(perda zero). Os resultados eram esperados tendo em vista que, para o caso que considera apenas um tipo de item em estoque, minimizar o número de objetos cortados ou minimizar a perda total são objetivos equivalentes.

4.2 Problema de corte bidimensional na indústria de móveis

4.2.1 Objetivo

Com estas atividades, espera-se trabalhar com os alunos conceitos matemáticos previamente estudados e, através da resolução do problema proposto, que os alunos compreendam a importância da matemática como ferramenta para a tomada de decisões.

4.2.2 Público alvo

Jovens da segunda ou terceira série do Ensino Médio.

4.2.3 Conteúdos envolvidos

- Raciocínio Combinatório.
- Composição e decomposição de figuras geométricas.
- Representação de figuras geométrica na malha quadriculada
- Escala
- Área de Retângulos.
- Áreas equivalentes.

4.2.4 Material necessário

Para cada grupo de três (ou quatro) alunos será necessário:

- 1 impressão (ou fotocópia) do problema.
- 2 réguas
- 4 folhas de almanco quadriculadas.
- 3 folhas de almanco.
- 1 caixa de lápis colorido.

4.2.5 Descrição do problema

Suponha que em uma indústria de móveis, deverão ser cortadas placas de MDF de medidas $L \times W = 110 \times 110\text{cm}$, obtendo-se 4 tipos de retângulos menores (itens), de dimensões e valores de utilidade especificadas na Tabela 4.3, para a produção de determinado modelo de móvel.

Tabela 4.3: Dados - Problema na indústria de móveis

Item	Comprimento×Largura (cm)	Valor de utilidade (v_i)
1	20×30	6
2	30×40	12
3	50×60	30
4	60×60	36

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

O problema consiste em determinar o melhor padrão de corte, ou seja, a forma de cortar as placas de maneira a obter o maior valor de utilidade.

4.2.6 Desenvolvimento

- Coletivamente, realizar a leitura do problema e, discutir com a sala as dificuldades em se obter a melhor solução para o problema.
- Propor aos alunos que, em grupos, discutam e encontrem possíveis maneiras de cortar a placa a fim de obter o maior valor de utilidade para a placa de MDF.
- Após as discussões entre os alunos, o professor deverá sistematizar os resultados obtidos introduzindo os conceitos de: padrão de corte, padrões de cortes regulares e irregulares, padrões de corte guilhotinado e não guilhotinado, e, detalhando o conceito de padrão de corte guilhotinado N -estágios.
- O professor deverá discutir, coletivamente, com os grupos que, em geral, nas indústrias de móveis os cortes são guilhotinados e 2-estágios.
- Realizar uma breve explanação sobre como resolver o problema utilizando apenas padrões de corte 2-estágios
- Propor que os grupos busquem construir um padrão guilhotinado 2-estágios que tenha o maior valor de utilidade para a placa.
- Novamente professor deve sistematizar os resultados obtidos, comparando o diferentes valores de utilidade da placa alcançados por cada um dos diferentes padrões obtidos por cada grupo.

- O professor deverá, então, apresentar a solução fornecida pela seção (4.2.8) realizando uma discussão coletiva sobre todos os resultados obtidos.
- O professor pode propor também a comparação entre as perdas em cada um dos padrões apresentados calculando as respectivas áreas restantes em cada uma das placas cortadas pelos respectivos padrões.

4.2.7 Orientação ao professor

- Neste caso, por se tratar de um problema de corte bidimensional, mais trabalhoso de ser resolvido, sugere-se que o professor trabalhe com os alunos o conceito de corte em 2-estágios, focando somente na geração dos padrões de corte para a placa de MDF. Espera-se que cada grupo de alunos apresente um conjunto de padrões de corte.
- Os alunos devem ser orientados e encaminhados a resolver a atividade proposta de forma empírica, sempre buscando construir a solução, tentativa por tentativa.
- O professor deve orientar e auxiliar os grupos durante toda a realização da atividade, intervindo sempre que julgar necessário.
- Ao formalizar conceitos durante a sistematização dos resultados obtidos, o professor pode recorrer as capítulos anteriores desta dissertação.
- Ao realizar a explanação da solução fornecida na seção (4.2.8) o professor deve fazê-la de maneira dialogada com a classe.
- Ao realizar os cálculos das áreas das perdas o professor pode retomar o conceito de área equivalentes

4.2.8 Exemplo de geração de padrão de corte 2-estágios

Um padrão de corte para a placa de dimensões 110×110 , considerando cortes horizontais no primeiro estágio, são obtidos por combinar faixas. Por exemplo, faixas de 110×30 , 110×40 e 110×60 . Sejam os conjuntos dos itens que podem ser cortados em cada uma das três faixas:

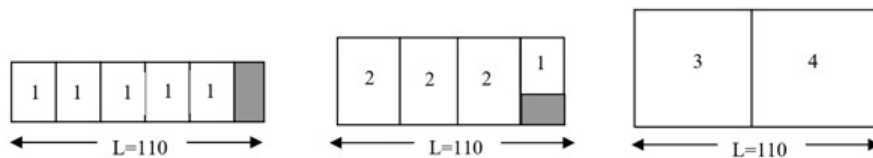
Faixa 1: 110×30 $W_1 = \{1\}$
 Faixa 2: 110×40 $W_2 = \{1, 2\}$
 Faixa 3: 110×60 $W_3 = \{1, 2, 3, 4\}$

Observe que qualquer faixa que não tem as larguras 30, 40 ou 60, introduz uma tira de perda inevitável dentro da faixa e, portanto, deve ser evitada. Por exemplo, uma faixa 110×35 introduz uma tira de 110×5 que será inevitavelmente perdida.

Considerando as três faixas: 110×30 , 110×40 e 110×60 , temos três problemas da mochila para serem resolvidos, ou seja, devemos determinar, para cada faixa, quantos itens de cada tipo, dentre os possíveis, devem ser alocados. Sugere-se que seja utilizado papel quadriculado para a realização desta atividade, ou outro tipo de material, e que os alunos façam esta tarefa empiricamente.

A Figura 4.6 apresenta a solução para os três problemas da mochila, como combinar os respectivos itens em cada faixa.

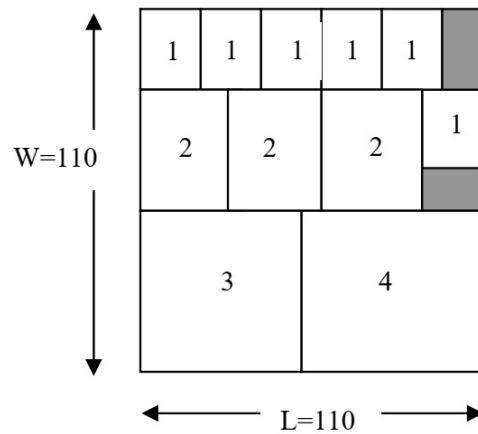
Figura 4.6: Solução para as faixas 110×30 , 110×40 e 110×60 , respectivamente.



Fonte: Arenales, 2003

O próximo passo, consiste em determinar quantas vezes cada faixa deve ser utilizada para formar o padrão de corte bidimensional. Isto consiste em um novo problema da mochila para ser resolvido, cuja solução é utilizar cada faixa exatamente uma vez. A Figura 4.7 ilustra este padrão de corte.

Figura 4.7: Padrão de corte para a placa de MDF



Fonte: Arenales, 2003

Fazendo a somatória do número de vezes que cada item é cortado em todas as faixas do padrão, obtemos o vetor associado ao padrão de corte que, neste exemplo, é dado por:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

significando que, utilizando este padrão para cortar uma placa de MDF, serão obtidos 6 itens de dimensão 20×30 , 3 itens de dimensão 30×40 , 1 item de dimensão 50×60 e 1 item de dimensão 60×60 , gerando duas perdas de medidas 10×30 e 10×20 .

Capítulo 5

Considerações finais

Esta dissertação considera os conceitos básicos e a modelagem matemática do problema de corte de estoque, em especial, para o caso unidimensional. Por se tratar de um problema de otimização linear inteira, foi abordado o método *branch-and-bound*, muito utilizado na resolução de problemas de grandes dimensões, que necessitam ser resolvidos por métodos computacionais.

As dificuldades que surgem ao se resolver um problema de corte de estoque, mesmo de pequenas dimensões, são destacadas no texto, além da sua importante aplicabilidade em problemas reais.

Foram propostos e resolvidos graficamente problemas de otimização linear inteira de duas variáveis reais. Dessa forma, tais situações podem ser trabalhadas com alunos do ensino médio, como aplicações de conceitos já vistos em sala de aula. O texto visa auxiliar os professores com sugestões de como trabalhar estes problemas com os alunos.

Como propostas futuras, pretende-se investir na preparação de outras situações-problema, para o caso unidimensional e bidimensional, analisando a possibilidade de desenvolvimento de material concreto para a realização das atividades com os alunos. Dessa forma, o trabalho desenvolvido nesta dissertação poderá servir como base na elaboração de um Projeto de Extensão para ser aplicado no Ensino Médio, como uma atividade em sala de aula ou extracurricular, visando o desenvolvimento deste conteúdo nas escolas públicas, contando com a participação dos professores da rede estadual e graduandos do curso de Licenciatura em Matemática.

Referências

- [1] ARENALES, M. **Problemas de corte e empacotamento**, in Camargo-Brunetto, M. A., XI Escola de Informática da SBC Paraná, cap. 5, ISBN 858844262-0, 2003.
- [2] ARENALES, M. , ARMENTANO, V., MORABITO, R., YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2^a Edição, 2011.
- [3] BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., SHERALI, H. D. **Linear programming and network flows**. 2nd edition. Wiley, New York, 1990.
- [4] BARRETO, S. J. P. S. **Problemas de otimização: uma proposta de abordagem no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso: 14 ago. 2019.
- [6] COUTO, R. F. A. **Desigualdade das médias: uma ferramenta para resolução de problemas de otimização**. 2019. 89f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Juazeiro, 2019.
- [7] CRÓCOLI, O. **Programação Linear: Uma Abordagem para o Ensino Médio**. 2016. 40f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Maringá, 2016.
- [8] DANTZIG, George B. **Linear Programming and Extensions**. Princeton: Princeton University Press, 1963.

- [9] DANTZIG, George B. **Origins of the Simplex Method**. Stanford: Stanford University, 1987
- [10] DELORME, M., IORI, M., MARTELLO, M. Bin packing and cutting stock problems: mathematical models and exact algorithms. **European Journal of Operational Research** 255: 1-20, 2016.
- [11] FERREIRA, E. M. **Possibilidades para o estudo de otimização no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - IMECC - UNICAMP, 2018.
- [12] GHIDINI, C. T. L. S. *Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- [13] GILMORE, P. C., GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem. **Operations Research** 9: 848-859, 1961.
- [14] GILMORE, P. C., GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. *Operations Research* 11: 863-888, 1963.
- [15] GRAMANI, M.C.N., FRANÇA, P.M., ARENALES, M.N. A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem, *International Journal of Production Economics* 119: 219-227, 2009.
- [16] GRAMANI, M.C.N., FRANÇA, P.M., ARENALES, M.N. A linear optimization approach to the combined production planning model, *Journal of the Franklin Institute* 348(7): 1523-1536, 2010.
- [17] LOPES, A. L. M. **Otimização Linear: Conceitos e Aplicação nas Aulas de Matemática para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - UNESP, Bauru, 2017.
- [18] LOZANO, D., Rangel, S., Pires, C. Uma proposta de oficina de coloração de mapas e grafos para o ensino fundamental e médio. **Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento**, Rio de Janeiro, v.3, n.3, p. 216-225, 2010.

- [19] MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011.
- [20] POLTRONIERE, S. C., POLDI, K. C., TOLEDO, F. M. B., ARENALES, M. N. Coupling Cutting Stock and Lot Sizing Problems in the Paper Industry. *Annals of Operations Research* 157: 91-104, 2008.
- [21] POLTRONIERE, S. C.; ARAUJO, S. A.; POLDI, K. C. Optimization of an Integrated Lot Sizing and Cutting Stock Problem in the Paper Industry. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional* 17: 305-320, 2016.
- [22] VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Annals of Operational Research* 86: 629-659, 1999.
- [23] VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. LP models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research* 141: 253-273, 2002.
- [24] WOLSEY, L. A. **Integer Programming**. New York: Wiley-Interscience publication, 1998.