Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Profissional em Matemática - PROFMAT

Uma Abordagem dos Conteúdos de Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum: Dos Naturais aos Comensuráveis.

Valtercio de Almeida Carvalho

Teresina - 2013

Valtercio de Almeida Carvalho

Dissertação de Mestrado:

Uma Abordagem dos Conteúdos de Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum: Dos Naturais aos Comensuráveis

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes
Coorientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2013

Carvalho, V. A.

xxxx Uma Abordagem dos Conteúdos de Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum: Dos Naturais aos Comensuráveis.

Valtercio de Almeida Carvalho – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes
Coorientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

1. Área de Concentração

CDD 516.36

Dedico esse trabalho a toda minha família e em especial Meu Pai Senhor Vitório e a Minha Mãe Maria Laura, vocês são minhas maiores referências.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade de recomeçar minha vida, voltar a sonhar e crescer profissionalmente como educador.

Agradeço a minha família por me dar todo o suporte para me dedicar aos estudos e por sempre me proporcionarem a motivação necessária nos momentos de dificuldade.

Agradeço a minha esposa Valessa Zaigla, pois foi a pessoa quem mais acreditou no meu potencial e na minha vitória.

Agradeço aos meus amigos Janiel Martins e Marcos Nery, pois desde o primeiro momento dividimos todas as dificuldades e superamos juntos várias adversidades.

Agradeço aos meus amigos de turma, em especial aos do grupo de estudo (Edivan, Ethiamara, Helder, Nascimento e Paulo Airton), pois sem eles não teria chegado tão longe.

Agradeço aos professores Jurandir Lopes, Paulo Alexandre, Liane Mendes e Afonso Norberto pela aceitação em participar da banca de defesa desta dissertação. E aos demais professores do PROFMAT pelos ensinamentos dados durante o curso.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

"Se o dinheiro for a sua esperança de independência, você jamais a terá. A única segurança verdadeira consiste numa reserva de sabedoria, de experiência e de competência.".

Henry Ford.

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem dos conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC), partindo de como estes conceitos são apresentados na Educação Básica, passando por sua fundamentação teórica à nível superior, até uma proposta de ensino das definições de Mínimo Múltiplo Comum Generalizado e Máximo Divisor Comum Generalizado para pares de números comensuráveis. Para ilustrar a relevância de tais conceitos, trazemos exemplos de aplicações dos mesmos.

Palavras-chave: MMC, MDC, generalizado, comensurável.

Abstract

This paper presents an approach to the concepts of Least Common Multiple (LCM) and Greatest Common Divisor (GCD), starting from how these concepts are presented in Basic Education, through its theoretical foundation for higher level until a proposed teaching settings Generalized Least Common Multiple and Greatest Common Generalized for pairs of commensurable numbers. To illustrate the relevance of such concepts bring examples of applications thereof.

Keywords: LCM, GCD, generalized, commensurate.

Sumário

Introdução

Embora os conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e de Máximo Divisor Comum (MDC) sejam trabalhados, em geral, para o Conjunto dos Números Naturais no Ensino Fundamental e Médio, e posteriormente, para o dos Números Inteiros no Ensino Superior, estes conceitos admitem uma extensão para os Racionais e até para alguns pares de Irracionais.

Neste trabalho, veremos que tais conceitos têm como condição principal que os pares de Números Reais utilizados para cálculo de MMC e de MDC sejam Números Reais Comensuráveis, sendo assim, torna-se necessário entendermos o que são os Números Reais Comensuráveis e quais pares de Números Reais podem ser ditos Comensuráveis.

No primeiro capítulo faremos alguns comentários sobre trechos retirados dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que estão relacionados ao tema deste trabalho. Neste mesmo capítulo discorremos como os conceitos de MMC e MDC são trabalhados na Educação Básica, quais as principais estratégias ensinadas aos alunos nesse nível de ensino, e ainda uma metodologia de apresentação dos mesmos através da Teoria dos Conjuntos com a utilização do Diagramade Venn. Utilizaremos exemplos clássicos envolvendo MMC e MDC para levantar alguns questionamentos sobre a forma de apresentar os dois conceitos nos livros de Educação Básica, inclusive como uma das motivações para escrevermos este trabalho.

No segundo capítulo mostraremos as principais definições (em especial as de números primos e de números compostos), os teoremas e as proposições que fundamentam os conceitos de MMC e MDC no Conjunto dos Inteiros, onde utilizaremos o Teorema Fundamental da Aritmética e o Algoritmo de Euclides como duas das principais ferramentas para os cálculos de MMC e MDC. Também apresentaremos alguns exemplos de aplicações desta fundamentação teórica, sendo três destes exemplos retirados de olimpíadas de Matemática.

No terceiro capítulo, veremos a definição de Números Comensuráveis, com exemplos de pares de Reais Comensuráveis, as definições de Mínimo Múltiplo Comum Generalizado (MMCG) e Máximo Divisor Comum Generalizado (MDCG), também com exemplos e ainda algumas proposições e corolários sobre os mesmos.

No final do trabalho, iremos mostrar algumas aplicações de MMCG e MDCG, tanto em problemas com conotação de nível mais elementar, até outros com maior grau de dificuldade, por exemplo, na determinação do período de algumas funções periódicas, onde que estes problemas possuem valores que não são necessariamente números inteiros, o que traria maior dificuldade em encontrar alguns resultados.

Mostraremos que utilizando os conceitos de MMCG e MDCG, algo que antes parecia bastante complicado, será respondido de forma bem mais simples. E daí, surge a grande motivação em falar deste tema, algo que comparado a vários outros conteúdos vistos no Ensino Médio, não seria tão difícil de ser ensinado, e que possibilitaria ao professor ter maiores ferramentas para associar a Matemática da sala-de-aula com a vida cotidiana do aluno.

Outro ponto relevante quanto à motivação para escrevermos um trabalho sobre MMC e MDC são as Olimpíadas de Matemática, pois ambos os conceitos são bastante explorados nessas provas, em especial, nas duas principais olimpíadas brasileiras de matemática, OBM e OBMEP. Daí, também citamos neste trabalho problemas de olimpíadas.

Portanto, podemos resumir como os principais objetivos desse trabalho:

i) Fazer um enfoque dos conceitos de MMC e MDC, partindo dos Naturais, passando pelos Inteiros, até as definições de Mínimo Múltiplo Comum Generalizado (MMCG) e Máximo Divisor Comum Generalizado (MDCG) para alguns pares de Reais, ditos Comensuráveis;

ii) Através de exemplos de aplicações, mostrar a viabilidade de apresentar estes conceitos de MMCG e MDCG na Educação Básica, em especial no Ensino Médio.

Capítulo 1

MMC e MDC nos Naturais

Segundo Terezinha Nunes (2005), chefe do Departamento de Psicologia da Universidade de Oxford: "Infelizmente, o ensino de Matemática no Brasil enfatiza muito as contas e não os conceitos que estão por trás das contas".

Essa frase sintetiza bem o tema abordado por este trabalho, pois em especial, quando se fala dos conteúdos de MMC e MDC com os alunos da Educação Básica, principalmente os de Ensino Fundamental, pouco se fala sobre o que eles significam, ou seja, soube suas aplicações. A maioria dos alunos conhece apenas a "utilidade" do MMC na soma de frações; já para o MDC dificilmente eles conseguem citar um exemplo de aplicação para o mesmo, quando na verdade, os dois são ricos em aplicações. Isto é facilmente constatado pelos professores de Matemática que atuam em escolas de Educação Básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), no Capítulo que trata da Caracterização da Área de Matemática, afirmam que:

> *"(...)o conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução".*

Quando na verdade, pouco mudou na forma de ensinar Matemática nos últimos anos, pois quando comparamos versões de livros didáticos utilizados em escolas de Ensino Fundamental e Médio, as poucas modificações que existem são geralmente nos testes ou nos exercícios propostos. Logo, essa "permanente evolução" citada nos PCNs não é notada nestes livros didáticos.

Também nos PCNs, na parte que fala sobre os Conteúdos Propostos para o Ensino de Matemática no Terceiro Ciclo, encontra-se um trecho relacionado aos conceitos abordados neste trabalho:

> *"(...) Conceitos como os de múltiplo e divisor de um número natural ou o conceito de número primo podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver."* (PCNs, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática, 2ª Parte, Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo, página 66).

Assim, os PCNs deixam bem claro quanto à importância de fazer o aluno compreender as aplicações de tais conceitos, e falam ainda, da conexão que o professor deve fazer destes conceitos com os já vistos anteriormente.

Já em outro momento, nos PCNs também encontraremos a forma como, em geral, são abordados os conteúdos na Matemática:

> *"(...) A abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda bastante desconhecida da grande maioria quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos."* (PCNs, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática, 1ª Parte, Quadro atual do ensino de Matemática no Brasil, página 22).

Ou seja, as dificuldades em compreender alguns conceitos da Matemática estão na abordagem de forma paralela, como se a aplicação dos mesmos fosse algo que os alunos devem "memorizar". Percebemos também, neste mesmo trecho dos PCNs, que as aplicações de alguns conceitos matemáticos nem sempre são vistas pelos alunos, basta observarmos este fragmento: "quando é incorporada, aparece como um item isolado".

Agora, associando tudo o que foi citado dos trechos retirados dos PCNs ao tema deste trabalho, dois questionamentos podem ser feitos: Os principais problemas citados nos livros de Educação Básica retratam os do cotidiano? E como o professor deve abordar situações problemas envolvendo os conceitos de MMC e MDC? Para melhor exemplificar estes questionamentos, citamos um problema de vestibular que envolve o conceito de

MMC, presentes nos livros de Matemática; e outros dois problemas cujas soluções são dadas através do MDC.

Problema 1. No alto de uma torre uma emissora de TV duas luzes piscam com frequências diferentes. A primeira pisca 10 vezes por minuto e a segunda pisca 15 vezes por minuto. Se num instante certo as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a piscar simultaneamente?[1]

A solução deste problema parte do fato da primeira lâmpada piscar a cada 6 segundos ($60 \div 10 = 6$), e a segunda piscar a cada 4 segundos ($60 \div 15 = 4$); ora, os alunos não conseguem relacionar bem este problema com a realidade, pois sabem que qualquer lâmpada tem uma frequência de acender e apagar bem menor do que de 6 em 6 segundos, daí já surge um exemplo do nosso primeiro questionamento - este problema não retrata bem a realidade conhecida pelo aluno.

Para chegar à solução do mesmo que são 12 segundos, isto é, o MMC de 6 e 4; temos um exemplo do segundoquestionamento, por que o resultado é dado pelo MMC de 6 e 4?

O Mínimo Múltiplo Comum pode ser compreendido como o menor número que pertence ao conjunto dos múltiplos comuns aos valores dados, isso na prática, remonta a ideia de "encontro", na verdade de "próximo encontro", é uma forma simples de compreender o conceito de MMC, mas que infelizmente não é tratado nos livros didáticos disponíveis no Brasil, o que condiz à citação vista nos PCNs.

Apresentamos agora dois problemas bastante comuns em livros de Ensino Fundamental e Médio cujas soluções são dadas através do MDC.

Problema 2. A Editora do Livro "Como Ser Aprovado no Vestibular" recebeu os seguintes pedidos, de três Livrarias: A: 1300 exemplares; B: 1950 exemplares; e C: 3900 exemplares. A Editora deseja remeter os três pedidos em n pacotes iguais de modo que n seja menor possível. Determine o número de exemplares que devem ser colocados em cada pacote e o número n de pacotes.[2]

É interessante percebermos os detalhes que existem num problema cujo conteúdo é o

[1]FUVEST (1991)

[2]PUC-RJ (adaptada)

MDC. Primeiramente, fala-se de uma "uniformidade" (no texto isto surge quando se diz que são pacotes iguais) e sempre há uma ideia de "encaixe", isto é, de "divisão exata" - o que nos remete à definição que será vista neste trabalho de números comensuráveis. Notamos que nesta "divisão exata" se exigi o menor resultado possível, daí a necessidade de usarmos o maior divisor comum aos valores dados (o máximo de livros por pacote), ou seja, o MDC destes valores.

Assim, para determinarmos a solução de tal problema é necessário calcular o MDC de 1300, 1950 e 3900, que será 650 (logo adiante faremos a justificativa deste resultado no Exemplo 2), e este valor representa o número de exemplares por pacote. Na sequência, como também foi pedido o número de pacotes, devemos fazer as seguintes divisões:

$$\frac{1300}{650} = 2, \qquad \frac{1950}{650} = 3, \qquad \frac{3900}{650} = 6.$$

Logo, serão 2 pacotes apenas com exemplares para a livraria A, 3 pacotes apenas com exemplares para a livraria B, e 6 pacotes apenas com exemplares para a livraria C. Daí, concluímos um total mínimo de 11 pacotes.

Problema 3. Numa escola foram matriculados na quinta série 138 meninos e 92 meninas. Todas as salas devem ter o mesmo número de alunos e não deve haver classe mista. Determine o menor número de classes que a escola deve ter para esta série.[3]

Notamos que a "uniformidade" é exigida neste problema no trecho "não deve haver classe mista", já a ideia de "encaixe" na frase "todas as salas devem ter o mesmo número de alunos". Na sequência do problema é pedido o menor número de classes, ou seja, necessitamos do maior número inteiro que possa dividir o número de meninos e de meninas ao mesmo tempo, o MDC de 138 e 92, que são 46 alunos. Logo serão 3 classes apenas de meninos ($138 \div 46 = 3$), e 2 classes apenas de meninas ($92 \div 46 = 2$), ou seja, no total temos 5 classes.

No último capítulo deste trabalho, voltaremos a mostrar alguns problemas semelhantes a estes abordados na Educação Básica, entretanto com valores não necessariamente inteiros. Por exemplo, o mesmo problema da lâmpada com uma frequência diferente da encontrada no Problema 1. E veremos como os conceitos de MMC e MDC generalizados podem ser utilizados para resolvê-los.

[3]UFPI/PSIU (adaptada)

Durante a pesquisa deste tema, também tivemos a preocupação de citar algo relacionado ao modo de ensinar o MMC e o MDC para alunos das séries iniciais. Algo que seja de simples compreensão e bem didático para ser trabalhado em salas de 6º ano de Ensino Fundamental, por exemplo. E nesta perspectiva, a melhor estratégia encontrada foi a utilização do Diagramade Venn, ou seja, da Teoria dos Conjuntos. O objetivo desta estratégia é facilitar o entendimento dos conceitos de MMC e MDC, e consequentemente o cálculo dos mesmos.

Nesta forma de trabalhar fatoração, escrevemos os números compostos como um conjunto formado por "átomos" (que são os números primos). E para facilitar o entendimento desta estratégia ao abordar os conceitos de MMC e MDC, iremos primeiro mostrar como são calculados os dois da forma já consagrada no Ensino Básico, e em seguida, associar estes métodos com a estratégia supracitada.

Para esclarecer bem, resolveremos dois exemplos.

Exemplo 1: Encontre o valor do MMC de 36,54 e 21.

Solução: Primeiro, devemos fatorar cada número e expressá-los como produtos de números primos, donde temos:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2; \quad 54 = 2^1 \cdot 3^3; \quad 21 = 3^1 \cdot 7^1.$$

O MMC será o produto das potências mais elevadas de cada um dos números primos que surgem na fatoração. Onde no exemplo acima, temos que as potências mais elevadas dos três números primos 2, 3, e 7 são respectivamente 2^2, 3^3 e 7^1.

Assim,

$$\mathsf{MMC}(36, 54, 21) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^1 = 756.$$

Também é bastante comum calcular o MMC pela chamada **"Fatoração Simultânea"**, nela os números envolvidos são divididos simultaneamente por um primo comum quando for uma divisão exata, utilizando na sequência do cálculo o quociente encontrado; já quando esta divisão não for possível de forma exata para todos os valores, repetimos o número que não foi dividido. Este processo segue até aparecer o **'1'** em todas as sequências de divisões. Daí, teremos que o MMC será o produto dos fatores primos utilizados nessa fatoração.

No exemplo acima, fatorando simultaneamente os números 36, 54 e 21, temos:

$$\begin{array}{ccc|c} 36 & 54 & 21 & 2 \\ 18 & 27 & 21 & 2 \\ 9 & 27 & 21 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Donde observamos que surgiram como fatores primos:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 756 = \mathsf{MMC}(36, 54, 21).$$

Exemplo 2: Calcular o MDC dos números: 1300, 1950 e 3900.

Solução: Já, a escolha para calcular o MDC seria a seguinte: após a fatoração individualizada dos valores, selecionamos os fatores primos comuns a todos os valores dados com os menores expoentes que surgem na fatoração dos mesmos.

Assim, devemos primeiro fatorar os três valores separadamente:

$$1300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 13^1; \quad 1950 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 13^1 \quad 3900 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 13^1.$$

Donde concluímos que o $\mathsf{MDC}(1300, 1950, 3900) = 2^1 \cdot 5^2 \cdot 13^1 = 650$.

Agora, vamos utilizar o Diagrama de Venn no cálculo dos dois, MMC e MDC. Nesta forma de calculá-los temos os seguintes passos:

1º) Determinar a fatoração de cada um dos números;

2º) Colocar os fatores primos num Diagrama de Venn com um conjunto para cada um dos números, onde os fatores em comum ficam nas interseções dos conjuntos;

3º) Daí, temos que para encontrar o MMC basta multiplicarmos todos os números primos que estão no Diagrama, ou seja, todos os fatores primos que surgiram na fatoração - o que é representado pela União entre os conjuntos. Já para encontrar o MDC, multiplicamos apenas os fatores primos que estão na Interseção do Diagrama, ou seja, apenas os fatores primos que são comuns aos números dados.

Notamos também que esta forma de apresentar os dois (MMC e MDC), além de bastante didática, possibilitaria ao professor associar o conceito de MMC à União de conjuntos, e o de MDC à Interseção de conjuntos. Associação esta bastante interessante e conveniente para esta etapa da vida acadêmica do aluno, pelo fato de fazer uma conexão entre dois conteúdos (Teoria dos Conjuntos e Fatoração) que geralmente já são apresentados numa mesma sequência nos livros didáticos, vide [3].

Exemplo 3: Determine o $\mathsf{MMC}(48, 180)$ e o $\mathsf{MDC}(48, 180)$.

Solução: Devemos primeiramente fatorar os dois valores:

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad e \quad 180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Agora, observamos que os fatores comuns são dois fatores “2” e um fator “3”, assim podemos representar tal fatoração no Diagrama de Venn, onde **F(N)** esta representando os fatores primos que surgem na fatoração de **N**, ou seja, temos os conjuntos F(48) e F(180) representando no diagrama abaixo as fatorações de 48 e 180, respectivamente:

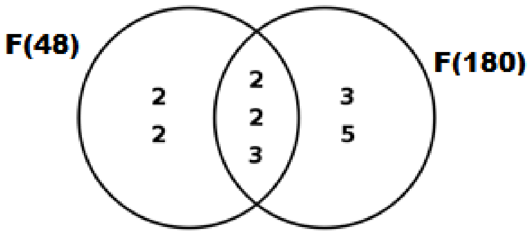

Figura 1.1: Conjuntos com as fatorações de 48 e 180.

Daí, temos que:

$\mathsf{MMC}(48, 180) = \mathsf{F}(48) \cup \mathsf{F}(180) = \{\text{produto de todos os fatores}\} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720$

e

$\mathsf{MDC}(48, 180) = \mathsf{F}(48) \cap \mathsf{F}(180) = \{\text{produto dos fatores comuns}\} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$

Exemplo 4: Determine o $\mathsf{MMC}(9360, 23100, 13230)$ e o $\mathsf{MDC}(9360, 23100, 13230)$.

Solução: Devemos primeiramente fatorar os três valores separadamente, ou seja:

$$9360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 13^1$$

$$23100 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1$$

$$13230 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2$$

Agora, observamos em qual região dos conjuntos cada fator ficará no gráfico, e, assim, podemos representar estas fatorações no diagrama a seguir:

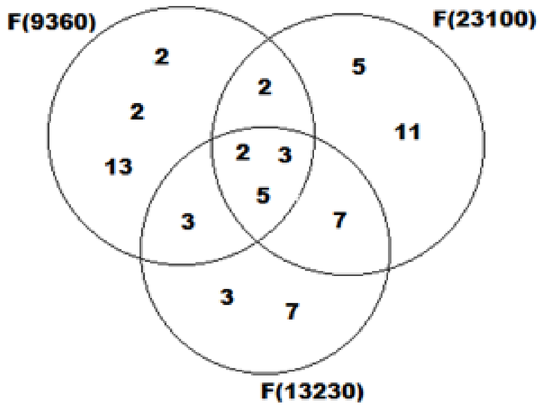

Figura 1.2: Conjunto com as fatorações de 9360, 23100 e 13230.

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}\mathsf{MMC}(9360, 23100, 13230) &= \mathsf{F}(9360) \cup \mathsf{F}(23100) \cup \mathsf{F}(13230)\\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13\\ &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{MDC}(9360, 23100, 13230) &= \mathsf{F}(9360) \cap \mathsf{F}(23100) \cap \mathsf{F}(13230)\\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5\\ &= 30.\end{aligned}$$

Capítulo 2

MMC e MDC nos Inteiros

Definição 1. *Dizemos que um inteiro* v *é múltiplo de um inteiro* u*, ou que* u *é um divisor de* v *(cuja notação é* $u|v$*), se* $v = tu$ *para algum inteiro* t.

Dizemos que m *é múltiplo comum de dois inteiros* u *e* v *se* m *é múltiplo de* u *e de* v.

Definição 2 (Mínimo Múltiplo Comum)**.** *Dados dois inteiros* u *e* v *diferentes de zero; dizemos que* M *é o Mínimo Múltiplo Comum entre* u *e* v*, e escrevemos* $M = MMC(u, v)$ *ou* $M = [u, v]$*, se:*

(i) $M > 0$*;*

(ii) M *é múltiplo comum de* u *e* v*;*

(iii) M *é o menor dos múltiplos comuns, ou seja, se* $M' > 0$ *for outro múltiplo comum de* u *e* v*, então* $M \leqslant M'$.

Definição 3 (Máximo Divisor Comum)**.** *Dados dois inteiros* u *e* v *diferentes de zero; dizemos que* D *é o Máximo Divisor Comum entre* u *e* v*, e escrevemos* $D = MDC(u, v)$ *ou* $D = (u, v)$*, se:*

(i) $D > 0$*;*

(ii) D *é um divisor comum de* u *e* v*, isto é,* D *é divisor tanto de* u *quanto de* v*, ou seja,* $D|u$ *e* $D|v$*;*

(iii) D *é o maior dos divisores comuns, ou seja, se* $D' > 0$ *for outro divisor comum de u e v, então que* $D' \leqslant D$.

Definição 4. *Um número inteiro* $n (n > 1)$ *possuindo somente os divisores positivos* n *e 1 é chamado de **primo**. Um número que não é primo é chamado **composto**.*

Do ponto de vista da estrutura dos naturais, os números primos são os mais simples e, ao mesmo tempo, são suficientes para gerar todos os números naturais, como veremos no

Teorema Fundamental da Aritmética. Assim, os números primos podem ser considerados como os "elementos atômicos" que, quando combinados, formam os números compostos.

Observação 1. *Caso o* $\mathsf{MDC}(u,v) = 1$*, dizemos que* u *e* v *são "primos entre si".*[1]

Exemplo 5: Os números 2,3,5,7 e 11 são primos e os números 10, 15, 35 e 348 são compostos. O número 1 é considerado um caso especial.[2]

Exemplo 6: Prove que o número $n = 2^{20} - 25^4$ é composto.

Solução: Escrevemos n de outra forma, com o objetivo de facilitar nossa análise:
$n = (2^{10})^2 - (25^2)^2 = 1024^2 - 625^2$.
Agora, usando a diferença de quadrados, temos:
$n = 1024^2 - 625^2$
$= (1024 - 625)(1024 + 625)$
$= 399 \cdot 1649$
$= 3 \cdot 133 \cdot 1649$
Portanto, podemos concluir que $3|n$, ou seja, que n é um número composto.

Proposição 1. *Seja* $n > 1$ *um número inteiro. Então:*

(i) o menor divisor de n *diferente de 1 é um número primo;*

(ii) se n *é composto, o seu menor divisor diferente de 1 não é maior que* $\sqrt{n}$*. Em outras palavras, se* n *não possui divisores diferentes de 1, menores ou igual que* $\sqrt{n}$*, então* n *é primo.*

Demonstração. (i) Seja p o menor divisor de n, diferente de 1. Se p fosse composto teria algum divisor q tal que $1 < q < p$, mas $q|p$ e $p|n$, o que nos diz que $q|n$, e isto contradiz a hipótese levantada sobre p.

(ii) Denotamos por p o menor divisor de n, diferente de 1. Portanto, $n = pq$ com $q \geqslant p$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por p obtemos: $n = pq \geqslant p^2$, e consequentemente vale $\sqrt{n} \geqslant p$. □

Proposição 2. *Dados* $a, b, p \in \mathbb{Z}$*. Se* $p|ab$*, com* p *primo, então* $p|a$ *ou* $p|b$*.*

[1] Também são chamados de "coprimos" ou "relativamente primos".

[2] De modo geral o número 1 não é considerado nem primo nem composto.

Demonstração. Ver [6] página 9. □

Agora vamos enunciar um dos resultados mais clássicos da Matemática, que garante a existência de infinitos números primos. Até onde se conhece a demonstração a seguir foi a primeira escrita utilizando o método de redução ao absurdo, e é devida a Euclides cerca de 300 a.C.

Teorema 1. *Existem infinitos números primos.*[3]

Demonstração. Suponhamos que exista uma quantidade finita de números primos e denotemos todos estes por: $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$.

Consideremos o número $n = p_1p_2p_3...p_k + 1$ maior do que todos os primos p_i, com $1 \leqslant i \leqslant k$. Como nenhum p_i divide 1, temos que n não é divisível por nenhum dos primos do conjunto finito $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$. Ou seja, n não pertence a este conjunto. E como n não pode ser escrito como um produto dos fatores p_i, temos que ele é primo.

Caso n seja composto, e seja q o seu menor divisor primo. Obviamente q não coincide com nenhum dos números p_i, pois caso contrário, como ele divide n, teria que dividir 1, o que é impossível. Logo, temos uma contradição à hipótese de termos uma quantidade finita de primos. □

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Aritmética[4]). *Todo inteiro maior do que **1** pode ser representado de maneira única, a menos da ordem, como um produto de fatores primos.*

Demonstração. Se n é primo não há nada a ser demonstrado.

Suponhamos n composto. Seja p_1(com $p_1 > 1$) o menor dos divisores positivos de n. Pela **Proposição 1(i)** temos que p_1 é primo. Logo, $n = p_1.n_1$.

Se n_1 for primo a prova está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como o menor fator de n_1. Pelo argumento anterior, p_2 é primo e temos que $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$.

Repetindo este procedimento, obtemos uma sequência decrescente de inteiros positivos $n_1, n_2, ..., n_r$. Como todos eles são inteiros maiores do que 1, este processo deve terminar. Logo n pode ser escrito da forma:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k.$$

[3]É conhecido como Teorema de Euclides.

[4]Também é chamado de Teorema da Fatoração Única.

Como os primos na sequência $p_1, p_2, ..., p_k$ não são, necessariamente, distintos, n terá, em geral, a forma:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_k^{a_k},$$

onde estes expoentes a_i, com $1 \leqslant i \leqslant k$, representam as quantidades de vezes que cada um dos primos p_i existentes na fatoração de n.

Para mostrarmos a unicidade usamos indução em n:

(i) Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira.

(ii) Assumimos então, que ela se verifica para todos os inteiros maiores do que 1 e menores do que n. Vamos provar que ela também é verdadeira para n.

Se n é primo, não há nada a provar.

Vamos supor, então, que n seja composto e que tenha duas fatorações, isto é,

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_s = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r.$$

Vamos provar que $s = r$ e que cada p_i (com $1 \leqslant i \leqslant s$) é igual a algum q_j (com $1 \leqslant i \leqslant r$). Como p_1 divide o produto $q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r$, então pela **Proposição 2** ele divide pelo menos um dos q_j.

Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 | q_1$. Como ambos são primos, isto implica $p_1 = q_1$. Logo, $p_2 \cdot ... \cdot p_s = q_2 \cdot ... \cdot q_r$.

Como $1 < p_2 \cdot ... \cdot p_s = q_2 \cdot ... \cdot q_r < n$, a hipótese de indução nos diz que as duas fatorações são idênticas, isto é, $s = r$ e, a menos da ordem, as fatorações $p_1 p_2 ... p_s$ e $q_1 q_2 ... q_r$ são iguais. □

Portanto, de acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética um inteiro positivo é o produto de números primos, e, exceto por sua ordem, esta representação é única:

$$n = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot 5^{n_5} \cdot 7^{n_7} ...$$

Onde os expoentes n_2, n_3, n_5, n_7 ... são inteiros não negativos que representam a quantidade de cada um dos primos $(2, 3, 5, 7, ...)$ surgiu na fatoração.[5]

Exemplo 7: Escreva os números **84** e **90** como produtos dos infinitos números primos.

[5] O Teorema Fundamental da Aritmética foi enunciado precisamente por Gauss (1777-1855). Seus antecessores, Fermat, Euler, Lagrange e Legendre, utilizavam este teorema sem a preocupação de tê-lo enunciado ou demonstrado com precisão.

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Aritmética:

$$84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 ...$$

$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 ...$$

Para facilitarmos a compreensão da ideia de fatoração, geralmente são escritos apenas os fatores primos cujos expoentes são maiores do que zero. Como a seguir:

$$84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

Proposição 3. *Se dois números inteiros positivos* a *e* b *possuem fatorações* $a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$ *e* $b = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}$ *, ou seja, se já estão escritos como produtos de fatores primos, então o Máximo Divisor Comum de* a *e* b *é igual a:*

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c_i}, \ \text{onde} \ c_i = \min\{a_i, b_i\}$$

Demonstração. Para que um produto de fatores primos comuns seja um divisor comum nenhum expoente c_i de p_i poderá superar nem a_i e nem b_i. Como estamos interessados no maior dos divisores, basta tomarmos, para c_i, o menor desses dois. □

Proposição 4. *Se* $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$ *e* $b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot p_3^{b_3} \cdot ... \cdot p_n^{b_n}$ *, onde* $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ *são primos que ocorrem nas fatorações de* a *e* b*, então o Mínimo Múltiplo Comum de* a *e* b *é igual a:*

$$[a, b] = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\text{máx}\{a_i, b_i\}}.$$

Demonstração. Da definição de Mínimo Múltiplo Comum nenhum fator primo p_i deste mínimo poderá ter um expoente que seja inferior nem a a_i e nem a b_i. Se tomarmos, pois, o maior destes dois para expoente de p_i teremos, não apenas um múltiplo comum, mas o menor possível dentre todos eles, o que conclui a demonstração. □

Proposição 5. *Se* x *e* y *são números reais então:* $\text{máx}\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$

Demonstração. Se $x = y$ então o $\text{máx}\{x, y\} = \min\{x, y\} = x = y$ e o resultado se verifica trivialmente.

Sem perda de generalidade podemos supor que $x < y$. Então, $\text{máx}\{x, y\} = y$ e o $\min\{x, y\} = x$, o que conclui a demonstração. □

Teorema 3. *Para* a *e* b *inteiros positivos temos:* $a \cdot b = [a, b] \cdot (a, b)$.

Demonstração. Sejam $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}$ e $b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}$, pelas **Proposições 3** e **4**, temos: $(a, b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min\{a_i, b_i\}}$ e $[a, b] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\text{máx}\{a_i, b_i\}}$, daí, temos:

$$(a, b) \cdot [a, b] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min\{a_i, b_i\}} \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i^{\text{máx}\{a_i, b_i\}}$$

Agora pela **Proposição 5**, temos:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{\min\{a_i, b_i\} + \text{máx}\{a_i, b_i\}} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i + b_i} = a \cdot b$$

□

Proposição 6. *Sejam* $d, \lambda \in \mathbb{N}$ *e* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Então valem as seguintes propriedades:*

(a) Se $d|a$ *e* $d|b$, *então* $d|(a, b)$.

(b) O (a, b) *é o menor valor positivo do conjunto* $\{ax + by / x, y \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $(\lambda a, \lambda b) = \lambda(a, b)$.

(d) Se $d|a$ *e* $d|b$, *então* $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b)$. *Consequentemente,* $\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right) = 1$.

(e) Se $(a, c) = (b, c) = 1$, *então* $(ab, c) = 1$.

(f) Se $c|ab$ *e* $(b, c) = 1$, *então* $c|a$.

Demonstração. Vide [5] página 110. □

Observação 2. *Embora essas propriedades tratem de números inteiros, as notações que foram utilizadas no item (d) já remetem aos racionais.*

Proposição 7. *Sejam* a *e* b *dois inteiros, então valem as seguintes afirmações:*

(i) Se a *é múltiplo de* b, *então* $(a, b) = b$.

(ii) Se $a = bq + c$, $c \neq 0$, *então o conjunto dos divisores comuns dos números* a *e* b *coincide com o conjunto dos divisores comuns dos números* b *e* c.

E particularmente, $(a, b) = (b, c)$.

Demonstração. (i) Com efeito, todo divisor comum dos números a e b é um divisor de b. Isto é, como por hipótese a é múltiplo de b, todo divisor de b é também um divisor de a, ou seja, um divisor comum dos números a e b. Portanto, o conjunto dos divisores comuns dos números a e b é igual ao conjunto dos divisores de b. Como o maior divisor de b é ele mesmo, resulta que $(a, b) = b$.

(ii) Usando a **Proposição 6(b)** temos que todo divisor comum de a e b também divide c e, consequentemente, é um divisor de b e c. Pela mesma razão todo divisor comum de b e c também divide a e, consequentemente, é um divisor de a e b. Portanto os divisores comuns de a e b são os mesmos divisores comuns de b e c.

Particularmente, também coincidem os maiores divisores comuns, ou seja, $(a, b) = (b, c)$. □

Mesmo conhecendo várias propriedades teóricas sobre o MDC entre dois inteiros, encontrá-lo de fato pode ser uma tarefa complicada, principalmente sem o auxílio das ferramentas corretas. Poderíamos pensar que basta expressarmos o conjunto com todos os divisores de um número, depois outro conjunto com todos os divisores do outro número e, na sequência, verificar qual é o maior elemento comum aos dois conjuntos, algo que para valores pequenos funciona bem. Entretanto, essa estratégia pode se tornar bastante cansativa e demorada quando os valores envolvidos não forem tão pequenos.Assim, citamos agora, um importante método denominado Algoritmo de Euclides, que torna o cálculo do MDC bem mais simples de ser efetuado, independentemente do tamanho dos valores inteiros a serem utilizados.

Teorema 4 (Algoritmo de Euclides)**.** *Dados dois inteiros positivos, a e b, aplicamos sucessivamente a Divisão Euclidiana para obtermos a seguinte sequência de igualdades:*

$$\begin{cases} b = aq_1 + r_1, & 0 \leqslant r_1 < a \\ a = r_1q_2 + r_2, & 0 \leqslant r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, & 0 \leqslant r_3 < r_2 \\ \quad \cdots & \quad \cdots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, & 0 \leqslant r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} \end{cases} \tag{2.1}$$

Onde estas divisões sucessivas continuam até algum r_n *dividir* r_{n-1}*. Daí, teremos que o* $\mathrm{mdc}(a, b) = r_n$*, ou seja, o MDC deles será o último resto não-nulo no processo de* *divisão anterior.*

Demonstração. Começamos observando que o processo de divisão (2.1) é finito. Com efeito, a sequência de números inteiros r_k, com $1 \leqslant k \leqslant n$, é estritamente decrescente e está contida no conjunto $\{r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < a\}$, portanto não pode conter mais do que $'a'$ inteiros positivos. Examinado as igualdades (2.1) de cima para baixo e usando a **Proposição 7**, temos que:

$$(a, b) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = ... = (r_{n-1}, r_n) = r_n$$

□

Proposição 8. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *e* $\lambda \in \mathbb{Z}$. *Então valem as seguintes afirmações:*

(i) se c *é múltiplo comum de* a *e* b*, então* $[a, b]|c$*;*[6]

(ii) $[\lambda a, \lambda b] = \lambda[a, b]$.

Demonstração. (i) A divisão de c por $[a, b]$ com resto r nos dá:

$$c = [a, b]q + r, \ \ onde \ \ 0 \leqslant r < [a, b]. \tag{2.2}$$

Da igualdade 2.2, basta provarmos que $r = 0$, para obter o resultado desejado.

Suponhamos, pelo contrário, que $0 < r < [a, b]$. Notemos que tanto a como b dividem c e $[a, b]$. Logo, pela **Proposição 6(b)** e pela igualdade 2.2, temos que a e b também dividem r, ou seja, r é múltiplo comum de a e b e não pode ser menor que $[a, b]$, contradizendo nossa suposição.

(ii) Observemos que $\lambda[a, b]$ é múltiplo comum de λa e λb, logo pelo item (i) desta proposição vale que:

$$[\lambda a, \lambda b]|\lambda[a, b] \Rightarrow [\lambda a, \lambda b] \leqslant \lambda[a, b]. \tag{2.3}$$

Por outro lado, $[\lambda a, \lambda b] = q_1\lambda a = q_2 \cdot \lambda b$, para alguns inteiros q_1 e q_2. Logo, $\dfrac{[\lambda a, \lambda b]}{\lambda}$ é um múltiplo comum de a e b. Portanto,

$$[a, b] \leqslant \frac{[\lambda a, \lambda b]}{\lambda} \Rightarrow \lambda[a, b] \leqslant [\lambda a, \lambda b] \tag{2.4}$$

Das igualdades 2.3 e 2.4 segue que

$$\lambda[a, b] \leqslant [\lambda a, \lambda b] \leqslant \lambda[a, b],$$

de onde vem diretamente o resultado. □

[6] [a, b] = MMC(a, b)

Para melhor compreensão de tais teoremas e proposições, citamos agora alguns exemplos.

Exemplo 8: Utilizando o Algoritmo de Euclides, determine o Máximo Divisor Comum dos números 471 e 1176.

Solução: Aplicando o Algoritmo de Euclides obtemos a seguinte sequência de divisões com resto:

$$1176 = 471 \cdot 2 + 234,$$

$$471 = 234 \cdot 2 + 3,$$

$$234 = 78 \cdot 3.$$

Portanto, o $\mathsf{MDC}(471, 1176) = 3$.

Exemplo 9: Prove que a fração $\dfrac{2n+8}{4n+15}$ é irredutível para todo número natural n.

Solução: Para uma fração ser considerada irredutível, basta mostrarmos que o MDC entre o seu numerador e o seu denominador é igual a 1. Assim, usando o Algoritmo de Euclides, temos que:

$$4n + 15 = (2n + 8) \cdot 1 + 2n + 7$$

$$2n + 8 = (2n + 7) \cdot 1 + 1$$

$$2n + 7 = (2n + 7) \cdot 1$$

Então,

$$\mathsf{MDC}(4n + 15, 2n + 8) = 1$$

E, portanto, $4n + 15$ e $2n + 8$ são primos entre si para qualquer valor de n.

Exemplo 10: Determine o $\mathsf{MDC}(\overbrace{111...1}^{100\ vezes}, \overbrace{111...1}^{60\ vezes})$.

Solução: Primeiro escrevemos os números na base decimal, isto é,

$$\overbrace{111...1}^{100\ vezes} = 10^{99} + 10^{98} + ... + 1$$

e

$$\overbrace{111...1}^{60\ vezes} = 10^{59} + 10^{58} + ... + 1$$

Aplicamos agora o Algoritmo de Euclides para obter as seguintes igualdades

$$\overbrace{111...1}^{100\ vezes} = (10^{59} + 10^{58} + ... + 1)10^{40} + 10^{39} + 10^{38}... + 1,$$

$$10^{59} + 10^{58} + ... + 1 = (10^{39} + 10^{38} + ... + 1)10^{20} + 10^{19} + 10^{18} + ... + 1,$$

$$10^{39} + 10^{38} + ... + 1 = (10^{19} + 10^{18} + ... + 1)10^{20} + 10^{19} + 10^{18} + ... + 1.$$

Disto resulta que:

$\mathsf{MDC}(\overbrace{111...1}^{100\ vezes}, \overbrace{111...1}^{60\ vezes}) = 10^{19} + 10^{18} + ... + 1 = \overbrace{111...1}^{20\ vezes}$.

Exemplo 11: Dois amigos passeiam de bicicleta, na mesma direção, em torno de uma pista circular. Para dar uma volta completa um deles demora 15 minutos e o outro demora 18 minutos. Eles partem juntos e combinam interromper o passeio quando os dois se encontrarem pela primeira vez no ponto de partida. Quantas voltas deu cada um?

Solução: Percebemos de início que este problema trata de MMC, pois tem a ideia de "primeiro encontro". Assim, denotamos por n_1 e n_2, respectivamente, o número de voltas que cada um dos amigos faz. Notemos que o tempo total da corrida é o menor valor positivo de T que satisfaz as igualdades abaixo, ou seja, o MMC de 15 e 18, logo:

$$T = 15n_1 = 18n_2,$$

ou seja,

$$T = [15, 18] = \frac{(15 \cdot 18)}{3} = 90.$$

Portanto, o número de voltas que cada amigo fez é encontrado fazendo: $n_1 = \frac{90}{15} = 6$ voltas e $n_2 = \frac{90}{18} = 5$ voltas.

Finalizamos este capítulo com dois exemplos que nos fornecem uma interpretação geométrica do Mínimo Múltiplo Comum. Estes foram propostos na OBM[7] e na OBMEP[8], respectivamente.

[7]Olímpiada Brasileira de Matemática.

[8]Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

Exemplo 12: Um retângulo de lados inteiros $AB = m$ e $AD = n$, é dividido em quadrados de lado 1. Em cada um dos vértices ele possui um pequeno orifício. Um raio de luz entra no retângulo por um dos vértices, na direção da bissetriz do ângulo reto, e é refletido sucessivamente nos lados do retângulo. Quantos quadrados são atravessados pelo raio de luz?

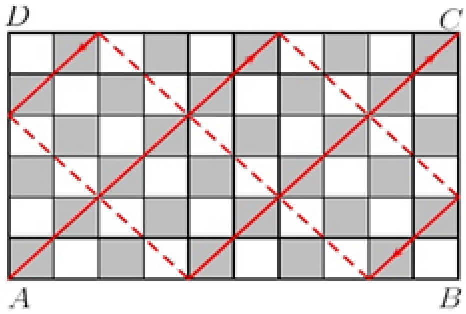

Figura 2.1: Interpretação geométrica do MMC.

Solução: Se fizermos alguns testes preliminares dando valores a m e n, veremos que em cada caso a resposta coincidirá com o $MMC(m, n)$. Provemos que isto de fato vale para m e n quaisquer. Para realizar a prova nos auxiliaremos da Figura 2.1.

Primeiramente, notemos que cada vez que o raio de luz atravessa um quadrado ele avança uma unidade tanto na direção horizontal como na direção vertical. Usando este fato fazemos as observações a seguir.

• Se o raio entra pelo vértice **A**, terá que atravessar m quadrados até chegar ao lado **BC**, imediatamente mais m para chegar ao lado **AD**, depois mais m para chegar novamente ao lado **BC**, assim sucessivamente. Além disso, depois do raio percorrer pm quadrados, com $p \in \mathbb{N}$, estará batendo no lado **BC** ou no lado **AD**.

• Analogamente o raio baterá no lado AB ou no lado **DC** se, e somente se, atravessar qn quadrados, com $q \in \mathbb{N}$.

• Somente nos vértices **B**, **C** e **D** do retângulo pode acontecer que o raio incidente saia do retângulo, terminando assim o processo de reflexão.

Usando as observações acima é fácil ver que o raio chegará a um vértice quando chegar simultaneamente a dois lados perpendiculares do retângulo. Portanto, deve ter atravessado um número x de quadrados tal que $x = pm = qn$, ou seja, x deverá ser um múltiplo comum de m e n. É claro que a primeira vez que o raio chega a um vértice o número x é o menor múltiplo comum de m e n, isto é, $x = [m, n]$.

Finalmente, observamos que nenhum dos quadrados é atravessado duas vezes nos percursos do raio de **A** até bater no primeiro vértice, pois como vemos na figura numa das direções os quadrados atravessados serão todos cinzas e na outra direção, serão todos brancos.

Exemplo 13. *Jogando sinuca* - Na figura abaixo vemos uma mesa de sinuca quadriculada e parte da trajetória de uma bola, tacada a partir de um canto da mesa, de modo que, sempre que a bola bater em uma das beiradas da mesa, ela segue seu movimento formando ângulos de 45° com a beirada. A bola seguirá pela diagonal de quantos desses quadrados durante a trajetória até cair na caçapa?[9]

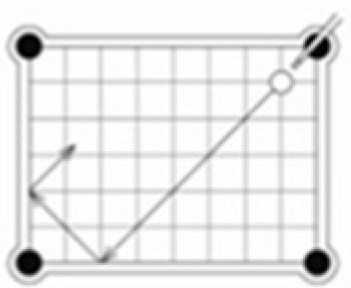

Figura 2.2: Sinuca

Solução: Usando os resultados do **Exemplo 12**, temos que a quantidade de quadrados que a bola irá passar até cair numa das caçapas será dada pelo MMC das quantidades de quadrados dos lados (6 e 8) subtraído de 1, pelo fato de onde ela esta posicionada na tacada inicial, logo temos:

$\mathsf{MMC}(6, 8) - 1 = 24 - 1 = 23$ quadrados.

Percebemos também neste problema a ideia citada no Capítulo 1 de "primeiro encontro"para os problemas que envolvem o MMC, pois a solução encontrada representa a primeira caçapa encontrada pela bola.

[9]OBMEP, Banco de questões 2010, nível 2.

Capítulo 3

MMC e MDC para pares de Reais Comensuráveis

Historicamente, a noção de comensurabilidade foi introduzida e utilizada como uma forma de comparar o tamanho de dois segmentos de reta. Na Antiguidade os gregos acreditaram, por muito tempo, que dois quaisquer segmentos de reta eram sempre comensuráveis. Nessa época, pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta, isto é, dados dois segmentos **AB** e **CD**, seria sempre possível encontrar uma unidade $\mathfrak{u}$ contida um número inteiro de vezes em **AB** e outro inteiro de vezes em **CD**, situação esta em que $\mathfrak{u}$ é um submúltiplo comum de **AB** e **CD**.

Por exemplo, os segmentos **AB** e **CD** são comensuráveis, justamente por ser possível compará-los com a unidade de medida comum $\mathfrak{u}$, dada pelo segmento **EF**:

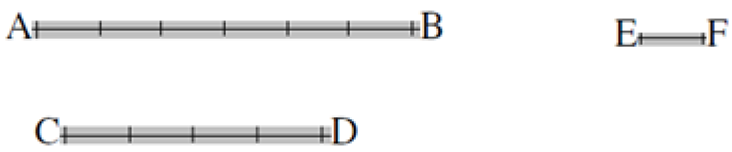

Figura 3.1: Segmentos Comensuráveis

Mas, entre 450 e 400 a.C., provou-se que o segmento que representa a diagonal de um quadrado não era comensurável com o seu lado. O que gerou uma forte crise na Matemática grega, chamada de "Crise dos Incomensuráveis", que só foi resolvida depois de muitos anos de discussão, discussão esta que levou à formulação precisa do problema da comensurabilidade em termos de medida de segmentos de retas e que se encerrou com a criação dos números reais absolutos.

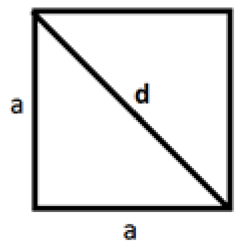

Figura 3.2: Quadrado de Lado a e Diagonal d

Embora sendo um conceito geométrico, a comensurabilidade pode ser equivalentemente definida como uma relação entre dois números reais quaisquer. Veremos agora as duas definições.

Definição 5. *Dizemos que dois segmentos de reta são comensuráveis quando ambos podem ser obtidos através de um número inteiro de partes de um mesmo segmento de reta.*

Por exemplo, os segmentos da Figura 3.1 são comensuráveis.

Definição 6. *Dois números reais r e s são comensuráveis se existem inteiros não nulos a e b tais que: $ar = bs$.*

Assim, temos algumas conclusões da definição:

1. Dois racionais são sempre comensuráveis.

2. Dois irracionais podem ser comensuráveis: por exemplo, $\sqrt{5}$ e $2\sqrt{5}$.

3. Dois reais quaisquer podem ser ou não comensuráveis: basta tomar um racional e um irracional, ou escolher pares de irracionais que não múltiplos entre si, como, por exemplo, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. De fato, se existissem naturais a e b tais que:

$$a\sqrt{2} = b\sqrt{3}, \tag{3.1}$$

teríamos então (elevando ao quadrado os dois membros)

$$2a^2 = 3b^2 \tag{3.2}$$

Considerando a fatoração em primos de inteiros, temos em 3.2 um absurdo, pois é ímpar o número de vezes que o primo 2 aparece na fatoração em primos de $2a^2$, enquanto que é par o número de vezes que 2 aparece na fatoração em primos de $3b^2$. Assim, concluímos que não existem naturais a e b para os quais 3.1 seja verdadeira.

A partir da definição de comensurabilidade entre dois números reais podemos estender a definição de múltiplo e divisor, e demonstrar algumas propriedades, como veremos a seguir:

Definição 7. *Dizemos que um número real* r *é um múltiplo inteiro de um real* s*; ou que* s *é um divisor inteiro de* r*; se existe um inteiro* t *tal que* $r = ts$*.*

Proposição 9. *Sejam* r *e* s *dois reais não nulos.*

As seguintes afirmações são equivalentes:

a) r *e* s *são comensuráveis;*

b) o quociente $\dfrac{r}{s}$ *é um número racional;*

c) existe um número real t *que é múltiplo inteiro comum de* r *e de* s*;*

d) existe um número real u *que é divisor inteiro comum de* r *e de* s*.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Se r e s são comensuráveis, então existem $a, b \in \mathbb{Z}^*$, tais que $ar = bs$, consequentemente, $\dfrac{r}{s} = \dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Suponhamos que $\dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Digamos que $\dfrac{r}{s} = \dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$. Então, multiplicando a igualdade acima por sa obtemos um $t = ar = bs$ que é um múltiplo inteiro comum de r e de s.

$(c) \Rightarrow (d)$: Seja $t \in \mathbb{R}$ um múltiplo inteiro comum de r e de s. Digamos $t = ar = bs$, com $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Então o número $u = \dfrac{r}{b} = \dfrac{s}{a}$ é um divisor inteiro comum de r e de s.

$(d) \Rightarrow (a)$: Seja u um divisor inteiro comum de r e de s. Digamos $r = ub$ e $s = ua$, com $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Então $ar = bs$. $\square$

Considerando a proposição anterior, ficam naturais as definições a seguir.

Definição 8 (Mínimo Múltiplo Comum Generalizado)**.** *Sejam* r *e* s *dois reais comensuráveis não nulos. Dizemos que* t *é o Mínimo Múltiplo Comum Generalizado entre* r *e* s*; e escrevemos* $t = \mathsf{MMCG}(r, s)$*, se:*

(i) $t > 0$*;*

(ii) t *é um múltiplo comum de* r *e* s*;*

(iii) se t' *também é um múltiplo comum de* r *e* s *e* $t' > 0$*, então* $t \leqslant t'$*.*

Definição 9 (Máximo Divisor Comum Generalizado)**.** *Sejam* r *e* s *dois reais comensuráveis não nulos. Dizemos que* u *é o Máximo Divisor Comum Generalizado entre* r *e* s*; e escrevemos* $u = \mathsf{MDCG}(r, s)$*, se:*

(i) $u > 0$*;*

(ii) u *é um divisor comum de* r *e* s*;*

(iii) se u' *também é um divisor inteiro de* r *e de* s*, então* $u' \leqslant u$*.*

No teorema a seguir obtemos uma fórmula para o **MMCG** e para o **MDCG** entre dois reais **comensuráveis** quaisquer.

Teorema 5. *Sejam* r *e* s *dois reais comensuráveis não nulos.*

Então, $\mathsf{MMCG}(r,s) = |vr| = |us|$ *e* $\mathsf{MDCG}(r,s) = \left|\frac{r}{u}\right| = \left|\frac{s}{v}\right|$*,onde* $\frac{u}{v}$ *é a forma irredutível do racional* $\frac{r}{s}$*.*

Demonstração. Primeiramente apenas para o caso de r e s positivos[1]. Assim, temos a, b, c, d inteiros tais que $ar = bs$ e $cr = ds$, logo

$$\frac{r}{s} = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Consequentemente, os menores naturais a, b que satisfazem a igualdade $ar = bs$ são claramente obtidos quando tomamos o numerador e o denominador da fração irredutível que representa o racional $\frac{r}{s}$.

Daí, pelas **Definições 8** e **9**, se $\frac{u}{v}$ é a tal fração irredutível, tem-se que:
$\mathsf{MMCG}(r,s) = vr = us$ e $\mathsf{MDCG}(r,s) = \frac{r}{u} = \frac{s}{v}$ □

Exemplo 14: Calcule o **MMCG(4, 18)** e **MDCG(4, 18)** usando o **Teorema 5**.

Solução: Fazendo uma analogia as notações utilizadas no **Teorema 5**, teríamos:
$\frac{r}{s} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} = \frac{u}{v}$, ou seja, $r = 4$, $s = 18$, $u = 2$ e $v = 9$, logo:

$$\mathsf{MMCG}(4,18) = |9 \cdot 4| = |2 \cdot 18| = 36$$

e

$$\mathsf{MDCG}(4,18) = \left|\frac{4}{2}\right| = \left|\frac{18}{9}\right| = 2.$$

No caso de r e s serem números racionais, as expressões do teorema acima podem ser reformuladas em termos das representações destes racionais em frações irredutíveis. O que torna mais simples a memorização dos cálculos do MMCG e do MDCG.

[1]Isso é possível, pois podemos supor sem perda de generalidade que r e s são positivos devido às igualdades: $[r,s] = [r,-s] = [-r,s] = [-r,-s]$ e $(r,s) = (r,-s) = (-r,s) = (-r,-s)$.

Exemplo 15: Calcule o $\mathsf{MMCG}\left(\frac{4}{15}, \frac{6}{35}\right)$ e o $\mathsf{MDCG}\left(\frac{4}{15}, \frac{6}{35}\right)$.

Solução: Fazendo $r = \dfrac{4}{15}$ e $s = \dfrac{6}{35}$, temos $\dfrac{r}{s} = \dfrac{4/15}{6/35} = \frac{14}{9}$ que é a sua forma irredutível, logo teríamos $u = 14$ e $v = 9$, usando as mesmas notações do **Teorema 5**.

Daí, temos:

$$\mathsf{MMCG}\left(\frac{4}{15}, \frac{6}{35}\right) = \left|9 \cdot \frac{4}{15}\right| = \left|14 \cdot \frac{6}{35}\right| = \left|\frac{12}{5}\right| = \frac{12}{5},$$

e

$$\mathsf{MDCG}\left(\frac{4}{15}, \frac{6}{35}\right) = \left|\frac{4/15}{14}\right| = \left|\frac{6/35}{9}\right| = \left|\frac{2}{105}\right| = \frac{2}{105}.$$

Observação 3. *Dividindo os dois valores,* $\dfrac{4}{15}$ *e* $\dfrac{6}{35}$*, pelo MDCG,* $\dfrac{2}{105}$*, encontramos dois números inteiros: 14 e 9.*

A seguir, veremos a proposição que acreditamos ser a estratégia mais viável para ser ensinada no Ensino Médio, para o cálculo do MMCG e do MDCG.

Proposição 10. *Sejam* r*,* s *racionais não nulos e sejam* a*,* b*,* c*,* d *inteiros tais que* $\dfrac{a}{b}$ *e* $\dfrac{c}{d}$ *são as representações para* r *e* s*, respectivamente, já na forma de fração irredutível. Então:*

$$\mathsf{MMCG}(r, s) = \mathsf{MMCG}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\mathsf{mmc}(a, c)}{\mathsf{mdc}(b, d)} \tag{3.3}$$

$$\mathsf{MDCG}(r, s) = \mathsf{MDCG}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\mathsf{mdc}(a, c)}{\mathsf{mmc}(b, d)} \tag{3.4}$$

Demonstração. Aqui novamente provamos apenas para o caso de r e s serem positivos.

Como $\mathsf{MDC}(a, b) = 1$, é necessário dividir a e c pelo $\mathsf{MDC}(a, c)$; e como $\mathsf{MDC}(c, d) = 1$, também é necessário dividirmos b e d pelo $\mathsf{MDC}(b, d)$. Daí, teremos que a fração $\dfrac{r}{s} = \dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{ad}{bc} = \dfrac{a'd'}{b'c'}$ é irredutível, onde:

$$a' = \frac{a}{\mathsf{mdc}(a, c)}, b' = \frac{b}{\mathsf{mdc}(b, d)}, c' = \frac{c}{\mathsf{mdc}(a, c)}, d' = \frac{d}{\mathsf{mdc}(b, d)}.$$

E portanto, pelo **Teorema 5**, temos:

$$\mathsf{MMCG}(r, s) = r \cdot b' \cdot c' = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{\mathsf{mdc}(b, d)} \frac{c}{\mathsf{mdc}(a, c)}$$

e pelo **Teorema 3**, temos ainda:

$$\mathsf{MMCG}(r,s) = \frac{\mathsf{mmc}(a,c)}{\mathsf{mdc}(b,d)},$$

o que prova a equação 3.3; e

$$\mathsf{MDCG}(r,s) = \frac{r}{a'd'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\mathsf{mdc}(a,c)}{a} \cdot \frac{\mathsf{mdc}(b,d)}{d}$$

e ainda pelo **Teorema 3**, temos:

$$\mathsf{MDCG}(r,s) = \frac{\mathsf{mdc}(a,c)}{\mathsf{mmc}(b,d)},$$

o que prova a equação 3.4.

□

Observação 4. *A hipótese "na forma de fração irredutível" na* ***Proposição 10*** *é imprescindível, isto é, as fórmulas 3.3 e 3.4 quando aplicadas à frações não irredutíveis não proporcionam necessariamente o* ***MMCG(r, s)*** *e o* ***MDCG(r, s)****,como veremos no exemplo seguinte:*

Exemplo 16: Sejamr $r = \frac{18}{8}$ e $s = \frac{1}{7}$, que são dois racionais, ou seja, dois comensuráveis, temos:

$$\frac{\mathsf{mmc}(18,1)}{\mathsf{mdc}(8,7)} = 18 \neq 9 = \frac{\mathsf{mmc}(9,1)}{\mathsf{mdc}(4,7)} = \mathsf{MMCG}(r,s),$$

e

$$\frac{\mathsf{mdc}(18,1)}{\mathsf{mmc}(8,7)} = \frac{1}{56} \neq \frac{1}{28} = \frac{\mathsf{mdc}(9,1)}{\mathsf{mmc}(4,7)} = \mathsf{MDCG}(r,s).$$

.

Note que para encontrar os resultados corretos para MMCG e MDCG, 9 e $\frac{1}{28}$, usamos as frações irredutíveis $\frac{9}{4}$ e $\frac{1}{7}$.

Agora, veremos alguns exemplos que mostram o quanto é simples a utilização desta teoria, em especial da Proposição 10.

Exemplo 17: Calcule o **MMCG** e o **MDCG** dos comensuráveis abaixo:

a) $\mathsf{MMCG}\left(\frac{24}{18},\frac{15}{12}\right)=\mathsf{MMCG}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{4}\right)=\frac{\mathsf{mmc}(4,5)}{\mathsf{mdc}(3,4)}=\frac{20}{1}=20.$

b) $\mathsf{MDG}\left(\frac{24}{18},\frac{15}{12}\right)=\mathsf{MDCG}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{4}\right)=\frac{\mathsf{mdc}(4,5)}{\mathsf{mmc}(3,4)}=\frac{1}{12}.$

Observação 5. *Também se verifica o* ***Teorema 3*** *para os racionais, como em* $\frac{24}{18}\cdot\frac{15}{12}=\frac{360}{216}=\frac{5}{3}$ *e* $20\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{3}$*, e o mesmo será demonstrado na* ***Proposição 11.***

c) $\mathsf{MMCG}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=\frac{\mathsf{mmc}(1,3)}{\mathsf{mdc}(2,4)}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3$, pois 3 é o denominador da fração irredutível $\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$ (pelo Teorema 5).

d) $\mathsf{MDCG}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=\frac{\mathsf{mdc}(1,3)}{\mathsf{mmc}(2,4)}=\frac{1}{4}$

e) $\mathsf{MMCG}\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{\mathsf{mmc}(1,1)}{\mathsf{mdc}(2,1)}=1$

f) $\mathsf{MDCG}\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{\mathsf{mdc}(1,1)}{\mathsf{mmc}(2,1)}=\frac{1}{2}$

g) $\mathsf{MMCG}(12\sqrt{3};5\sqrt{3})=5\cdot 12\sqrt{3}=60\sqrt{3}$, pois 5 é o denominador da fração irredutível $\frac{12\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=\frac{12}{5}$ (pelo Teorema 5).

Observação 6. *O item (g) também pode ser resolvido utilizando a proposição a seguir.*

Mostramos agora que as principais proposições supracitadas com números inteiros se generalizam também para **MMCG** e **MDCG** entre reais comensuráveis.

Proposição 11. *Sejam* r *e* s *dois reais não nulos comensuráveis. Então:*

(i) $\mathsf{r}\cdot\mathsf{s}=\mathsf{MDCG}(\mathsf{r},\mathsf{s})\cdot\mathsf{MMCG}(\mathsf{r},\mathsf{s})$*;*

(ii) dado qualquer real não nulo k*, temos ainda* kr *e* ks *comensuráveis e segue-se:*

$\mathsf{MMCG}(\mathsf{kr},\mathsf{ks})=|\mathsf{k}|\cdot\mathsf{MMCG}(\mathsf{r},\mathsf{s})$ *e* $\mathsf{MDCG}(\mathsf{kr},\mathsf{ks})=|\mathsf{k}|\cdot\mathsf{MDCG}(\mathsf{r},\mathsf{s})$.

Demonstração. Consideraremos ainda apenas o caso em que k, r e s são positivos. Suponhamos que m, n são naturais não nulos tais que

$\frac{r}{s} = \frac{n}{m}$ e $MDC(n, m) = 1$, ou seja, $\frac{n}{m}$ é a forma irredutível de $\frac{r}{s}$.

Daí temos, pelo **Teorema 5**, que

$$MMCG(r, s) = mr = ns$$

e

$$MDCG(r, s) = \frac{r}{n} = \frac{s}{m},$$

de onde segue que

$$MDCG(r, s) \cdot MMCG(r, s) = \frac{r}{n} ns = rs,$$

o que prova (i).

Além disso, como $\frac{kr}{ks} = \frac{n}{m}$, temos:

$$MMCG(kr, ks) = mkr = k \cdot MMCG(r, s)$$

e

$$MDCG(kr, ks) = \frac{kr}{n} = k \cdot MDCG(r, s),$$

o que prova (ii). □

O **Corolário** seguinte nos mostra que as propriedades acima nos permitem calcular o Mínimo Múltiplo Comum Generalizado entre dois racionais de expansão decimal finita de uma forma mais rápida. Este resultado também vale quando substituímos a base 10 de numeração por uma base **b** qualquer.

Corolário 1 (da Proposição 11)**.** *Se r e s são dois números racionais que podem ser representados por uma fração decimal, digamos, $r = \frac{u}{10^k}$ e $s = \frac{v}{10^p}$ e se $t \geqslant k$ e $t \geqslant p$ então*

$$MMCG(r, s) = \frac{mmc(10^t r, 10^t s))}{10^t} \tag{3.5}$$

e

$$MDCG(r, s) = \frac{mdc(10^t r, 10^t s)}{10^t.} \tag{3.6}$$

Demonstração. Basta multiplicarmos as igualdades 3.5 e 3.6 por 10^t e utilizar a **Proposição 11(ii)**. □

Exemplo 18: Nos itens (c) e (d) do **Exemplo 17**, poderíamos ter calculado o **MMCG** e o **MDCG** da seguinte forma:

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathsf{MMCG}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) &= \mathsf{MMCG}(0,5;0,75)\\
&= \frac{\mathfrak{mmc}(100\times 0,5;100\times 0,75)}{100}\\
&= \frac{\mathfrak{mmc}(50,75)}{100}\\
&= \frac{150}{100}\\
&= 1,5
\end{aligned}$$

o que nos dá $\mathsf{MMCG}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{MDCG}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) &= \mathsf{MDCG}(0,5;0,75)\\
&= \frac{\mathfrak{mdc}(100\times 0,5;100\times 0,75)}{100}\\
&= \frac{\mathfrak{mdc}(50,75)}{100}\\
&= \frac{25}{100}\\
&= 0,25
\end{aligned}$$

o que nos dá $\mathsf{MDCG}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

Capítulo 4

Aplicações do MMCG e do MDCG

Apresentamos agora algumas aplicações dos conceitos de Mínimo Múltiplo Comum Generalizado e Máximo Divisor Comum Generalizado.

Problema 1. Duas lâmpadas piscam com frequências diferentes, a primeira pisca 55 vezes por minuto, e a segunda pisca 70 vezes por minuto; se num dado instante as duas piscam simultaneamente, em quanto tempo isso voltará a acontecer?

Solução: Primeiro vamos analisar a frequência com que as duas lâmpadas estão piscando, ou seja, como um minuto equivale a sessenta segundos temos que:
- A frequência da 1ª Lâmpada $= \frac{60}{55} = \frac{12}{11}$, ou seja, ela pisca a cada $\frac{12}{11}$ segundos;

- Já a frequência da 2ª Lâmpada $= \frac{60}{70} = \frac{6}{7}$, ou seja, ela pisca a cada $\frac{6}{7}$ segundos.

Assim, teremos como o próximo instante que as duas piscaram juntas o menor múltiplo comum dos racionais $\frac{12}{11}$ e $\frac{6}{7}$, o que pode ser cálculo através do MMCG:

$$\mathsf{MMCG}\left(\frac{12}{11}, \frac{6}{7}\right) = \frac{\mathsf{MMC}(12, 6)}{\mathsf{MDC}(11, 7)} = \frac{12}{1} = 12 \ \mathit{segundos}$$

Com isso, concluímos que o próximo instante em que as duas voltaram a piscar juntas será exatamente em 12 segundos.

Observação 7. *Note que este mesmo problema apresentaria um certo grau de dificuldade para um aluno de Ensino Médio, pois as frequências encontradas,* $\frac{12}{11}$ *e* $\frac{6}{7}$*, representam* *dízimas períodicas, o que levaria geralmente o aluno a pensar em aproximações numéricas; e com estas aproximações não encontraríamos o resultado inteiro de 12 segundos.*

Problema 2. Três ônibus de linhas diferentes (A, B e C) saem do terminal no mesmo horário - às 6h da manhã. Sabendo que o ônibus da linha A faz quinze vezes o seu percurso durante um dia, que o ônibus da linha B faz um total de vinte viagens durante o dia, e que o da linha C completa no total trinta vezes o seu percurso diário. Desconsiderando o tempo que eles trocam de motorista e outros possíveis atrasos, como alimentação ou engarrafamentos no trânsito, qual o próximo horário em que os três ônibus voltaram a sair juntos do terminal?

Solução: Primeiro observamos a frequência com que os ônibus completam os seus respectivos percursos, assim teremos:

- A frequência do ônibus da linha A $= \dfrac{24\mathtt{h}}{15\mathtt{voltas}} = \dfrac{8}{5}\mathtt{h} = 1,6\mathtt{h} =$ 1h36min, ou seja, ele completa uma volta no seu percurso em 1h36min;

- A frequência do ônibus da linha B $= \dfrac{24}{20} = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}\mathtt{h} = 1,2\mathtt{h} =$ 1h12min, ou seja, ele completa uma volta no seu percurso em 1h12min;

- A frequência do ônibus da linha C $= \dfrac{24}{30} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}\mathtt{h} = 0,8\mathtt{h} =$ 48min, ou seja, elecompleta uma volta no seu percurso em 48min;

Logo, temos pela **Proposição 8** e pelos comentários vistos no **Capítulo 1** que o horário desejado na questão é o MMCG de $\dfrac{8}{5}$, $\dfrac{6}{5}$ e $\dfrac{4}{5}$:

$$\mathsf{MMCG}\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{\mathsf{MMC}(8,6,4)}{5,5,5} = \frac{24}{5} = 4,8\mathtt{h} = 4\mathtt{h}48\mathtt{min}.$$

Logo, como eles partem inicialmente juntos às 6h, adicionando com o tempo encontrado como MMCG, temos:

6h + 4h48min = 10h48min.

Observação 8. *Essa questão poderia ser feita sem nenhum tipo de aproximação, utilizando os tempos das três linhas em minutos: 96min, 72min e 48min, respectivamente, com isso poderíamos ter resolvido o mesmo problema da maneira a seguir.*

2^a *Solução:* Primeiro fatorando os três valores separadamente, logo:

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3,$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2,$$

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3.$$

E para calcular o MMC de 96, 72 e 48 = [96, 72, 48] = $2^5 \cdot 3^2$ = 288min = 4h48min.

Problema 3. Outra aplicação bastante interessante para o MMCG está na determinação de períodos de *funções trigonométricas*[1], em especial funções que apresentam somas ou produtos de duas ou mais funções trigonométricas. Determinar o período de tais funções geralmente é algo bastante trabalhoso, e até com certas limitações nos tipos de funções em que são cobrados estes períodos. Entretanto, utilizando o conceito de MMCG estes mesmos questionamentos sobre períodos de algumas funções trigonométricas tornam-se algo bem simples e fáceis de serem realizados. Para tal aplicação torna-se necessário demonstrar um teorema que afirma que o período de funções do tipo $f + g$ ou $f \cdot g$ é dado pelo **MMCG dos períodos** de ambas as funções f e g.

Definição 10. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número real $p \neq 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, dizemos que p é um período de f, ou ainda, que f é uma função periódica de período p.*

Note que se f é uma função periódica de período p, então kp também é um período para f, para todo $k \in \mathbb{Z}^*$.

Teorema 6. *Dadas $f : \mathbb{R} \to R$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções periódicas de períodos p_f e p_g respectivamente. Se p_f e p_g são números comensuráveis, então as funções $f + g$ e $f \cdot g$ são periódicas de período $\mathsf{MMCG}(p_f, p_g)$.*

Demonstração. (i) Demonstração para o caso $f + g$. Sendo p_f e p_g por hipótese comensuráveis, está bem definido $M = \mathsf{MMCG}(p_f, p_g)$. Existem então $m, n \in \mathbb{Z}^*$ tais que

$$m \cdot p_f = n \cdot p_g = M$$

[1] Conteúdo geralmente abordado em turmas de Ensino Médio.

Obviamente, como m, n, p_f, p_g são todos não nulos, temos que M é também não nulo. Agora, dado $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}(f+g)(x+M) &= f(x+M)+g(x+M)\\ &= f(x+m\cdot p_f)+g(x+n\cdot p_g)\\ &= f(x)+g(x)\\ &= (f+g)(x).\end{aligned}$$

Portanto, $f+g$ é periódica de período $MMCG(p_f, p_g)$.

(ii) Demonstração para o caso $f \cdot g$. Sendo p_f e p_g por hipótese comensuráveis, também está bem definido $M = MMCG(p_f, p_g)$. Daí existem então $m, n \in \mathbb{Z}^*$ tais que

$$m \cdot p_f = n \cdot p_g = M$$

De forma análoga, como m, n, p_f, p_g são todos não nulos, temos que M é também não nulo. Agora, dado $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x+M) &= f(x+M)\cdot g(x+M)\\ &= f(x+m\cdot pf)\cdot g(x+n\cdot pg)\\ &= f(x)\cdot g(x)\\ &= (f\cdot g)(x).\end{aligned}$$

Assim, também provamos que $f \cdot g$ é periódica de período $MMCG(p_f, p_g)$. □

Agora, mostraremos dois exemplos desta aplicação, inclusive apresentado os gráficos de ambas as funções utilizadas.

Problema 4. Dadas $f(x) = sen(3x)$ e $g(x) = \cos(7x)$ que são funções periódicas de períodos fundamentais: $p_f = \dfrac{2\pi}{3}$ e $p_g = \dfrac{2\pi}{7}$, respectivamente. Determine o período da função $h(x) = sen(3x) + cos(7x)$.

Solução: Como p_f e p_g são comensuráveis, temos que a função $h(x)$ dada por:

$h(x) = sen(3x) + cos(7x)$ que é uma função periódica, tendo 2π como seu período, pois

$$MMCG\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{7}\right) = \frac{2\pi}{1} = 2\pi.$$

Veja o gráfico da função $h(x) = sen(3x) + cos(7x)$ feito no GeoGebra[2]:

[2]GeoGebra é um aplicativo livre de matemática que combina conceitos de geometria e álgebra numa

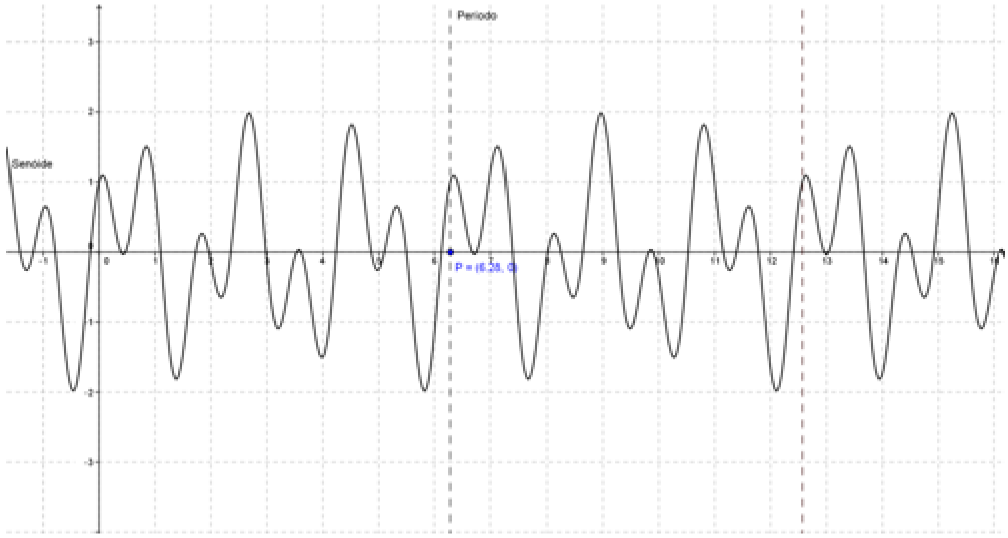

Figura 4.1: Função $h(x) = sen(3x) + cos(7x)$

Observação 9. *O período das funções* $f(x) = sen(kx)$ *e* $g(x) = cos(kx)$ *são dados por* $\left|\dfrac{2\pi}{k}\right|$

Para efeito de comparação com o que vem sendo trabalhado no ensino médio, citamos agora outro exemplo de determinação de período de função trigonométrica, e mostramos dois métodos: primeiro o que geralmente é apresentado nos livros de Ensino Médio (uma resolução mais trabalhosa); e na sequência, como o mesmo problema pode ser resolvido utilizando o conceito de Mínimo Múltiplo Comum Generalizado.

Problema 5. Estude a variação da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen(2x) + \cos(2x)$.[3]

Solução: Primeiro vamos reescrever a função f usando a propriedade que envolve os ângulos complementares, que diz que $\cos x = sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= sen(2x) + \cos(2x) \\ &= sen(2x) + sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right). \end{aligned}$$

Em seguida, usando a propriedade da transformação da soma em produto que diz que

única interface gráfica.

[3]Fonte [4], exercício 235.

$\mathit{sen}p + \mathit{sen}q = 2 \cdot \mathit{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$, e fazendo $p = 2x$ e $q = \dfrac{\pi}{2} - 2x$, temos:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2 \cdot \mathit{sen}\left(\frac{2x + \dfrac{\pi}{2} - 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{2 - \dfrac{\pi}{2} + 2x}{2}\right) \\
&= 2 \cdot \mathit{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left[\left(\frac{4x - \dfrac{\pi}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\
\Rightarrow\ & p_f = \frac{2\pi}{|2|} = \pi.
\end{aligned}
$$

Agora, fazendo $g(x) = \mathit{sen}(2x)$ e $h(x) = \cos(2x)$, cujos períodos são:

$$p_g = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

e

$$p_h = \frac{2\pi}{|2|} = \pi,$$

de onde temos como o período de $f(x) = \mathit{sen}(2x) + \cos(2x)$ o número

$$\mathsf{MMCG}(p_f, p_g) = \mathsf{MMCG}(\pi, \pi) = \pi.$$

O que condiz com o resultado encontrado anteriormente, e com o gráfico apresentado a seguir:

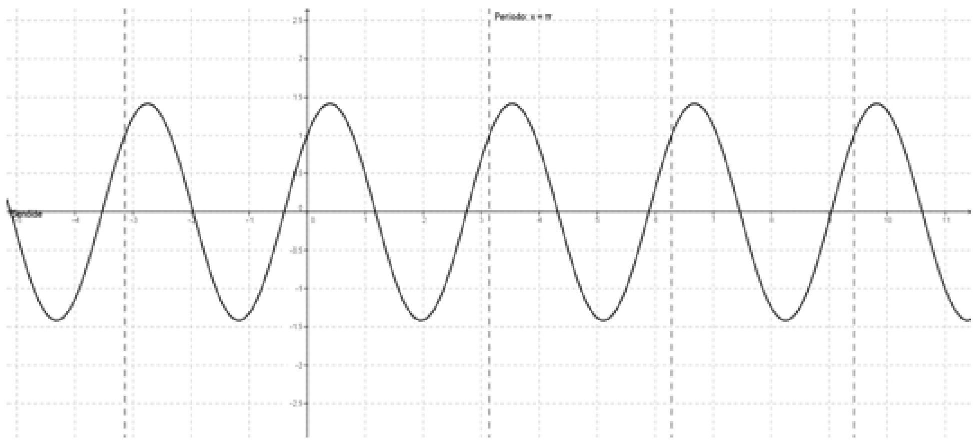

Figura 4.2: $f(x) = \mathit{sen}(2x) + \cos(2x)$

Problema 6. Apresentamos agora uma aplicação geometrica para o MDCG de números comensuráveis.

Geometricamente, se dois segmentos AB e CD tem medidas comensuráveis r e s, respectivamente, então o $MDCG(r, s)$ é a medida do maior segmento EF que, quando escolhido para nova unidade de medida para medirsegmentos de reta, proporciona medidas inteiras para AB e CD, como já vimos na Figura 3.1.

Podemos aplicar esta ideia ao ajuste de engrenagens: suponhamos que queiramos ajustar duas rodas num sistema de engrenagens, fresando dentes nas mesmas, todos de mesmo tamanho. Como cada roda deve ter um número inteiro de dentes para que o desgaste sobre as rodas seja mínimo. E isto ocorre quando os comprimentos das circunferências (consequentemente dos seus raios) são comensuráveis.

De fato, denotando por δ o dobro do comprimento do dente para levarmos em conta o espaço entre dentes (veja Figura 4.3), e denotando por r_1 e r_2 os raios das rodas, temos que existem m, n naturais tais que

$$2\pi r_1 = m\delta \quad e \quad 2\pi r_2 = n\delta$$

Donde temos:

$$\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{m\delta}{n\delta} \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{m}{n}.$$

Ou seja, isso ocorre se r_1 e r_2 forem comensuráveis, pois $nr_1 = mr_2$.

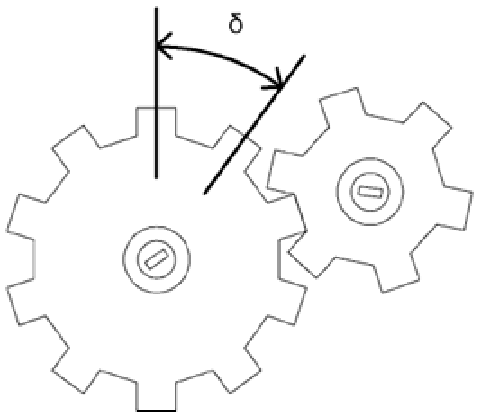

Figura 4.3: Engrenagens cujos raios são r_1 e r_2

Ainda é interessante ressaltar a ideia citada no Capítulo 1, quando apontamos um detalhe sobre os problemas que envolvem o MDC tem uma ideia de "encaixe"e de "uniformidade"que é facilmente notada neste problema, pois as engrenagens devem se encaixar e para isso deve existir uma uniformidade - um padrão - na medida dos dentes das duas rodas. Sendo que um problema semelhante a este pode ser levado aos alunos de Educação

Básica, usando como base a sua aplicação no cálculo dos tamanhos dos "dentes"da catraca e da coroa de uma bicicleta, como veremos no **Problema 7**.

Concluindo o problema, temos que o maior valor de δ, ou seja, o valor desejado, é dado pelo MDCG dos comprimentos das duas rodas:

$\mathsf{MDCG}(2\pi r_1, 2\pi r_2) = 2\pi \cdot \mathsf{MDCG}(r_1, r_2)$ (Pela Proposição 11),

e se, na prática, este comprimento se revelar inviável (por ser, por exemplo, muito "curvo"um arco de comprimento δ), então, para minimizar o desgaste, teremos que tomar comprimentos iguais a δ/k com k natural.

Problema 7. Uma bicicleta possui uma mensageira de raio $R_1 = 9$ cm e uma catraca de raio $R_2 = 4{,}2$ cm, como na Figura 4.4 . Sabemos que ambas estão conectadas por uma mesma corrente, logo os dentes existentes nelas possuem o mesmo tamanho cada. Temos ainda que a mensageira possui 46 dentes e a catraca possui 22 dentes. Sendo assim, compare o dobro do tamanho de um dente com o MDCG dos comprimentos das duas circunferências (mensageira e catraca), e verifique se o resultado obtido condiz com a conclusão encontrada no **Problema 6**.

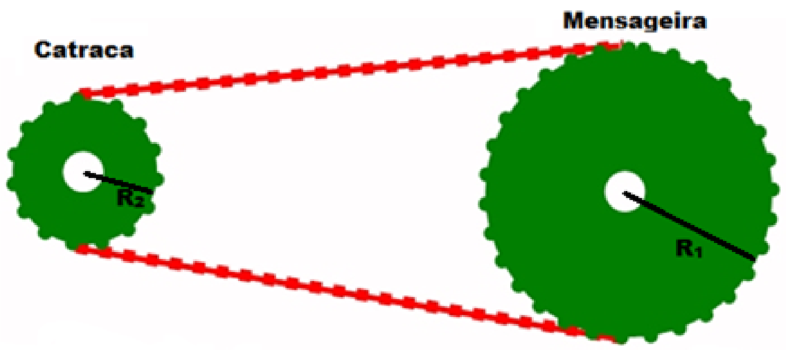

Figura 4.4: Catraca e mensageira de raios r_2 e r_1, respectivamente.

Solução: Primeiro vamos calcular o comprimento total de ambas (mensageira e catraca), e daí analisaremos a medida do dobro do comprimento de um dente em cada uma delas (D_1 e D_2).

Então,

$$C_1 = 2\pi R_1 = 2\pi \cdot 9 \cong 56,55cm$$

$$C_2 = 2\pi R_2 = 2\pi \cdot 4,2 \cong 26,39cm$$

Daí, temos:

$$\mathsf{D}_1 = 56,55\mathsf{cm} \div 46 \quad \mathsf{dentes} \cong 1,2\mathsf{cm}$$

$$\mathsf{D}_1 = 26,39\mathsf{cm} \div 22 \quad \mathsf{dentes} \cong 1,2\mathsf{cm}$$

Agora, vamos comparar este resultado com o MDCG dos comprimentos das duas, donde temos:

$$\begin{aligned}
\mathsf{MDCG}(2\pi\mathsf{R}_1, 2\pi\mathsf{R}_2) &= 2\pi \cdot \mathsf{MCDG}(\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2) \\
&= 2\pi \cdot \mathsf{MDCG}\left(9, \frac{42}{10}\right) \\
&= 2\pi \cdot \mathsf{MDCG}\left(\frac{9}{1}, \frac{21}{5}\right) \\
&= 2\pi \cdot \frac{\mathsf{MDCG}(9.21)}{\mathsf{MMCG}(1,5)} \\
&= 2\pi \cdot \frac{3}{5} \\
&\cong 3,7\mathsf{cm}.
\end{aligned}$$

Basta agora relermos o detalhe apontado no final do **Problema 6**, onde afirma-se que se, na prática, este comprimento se revelar inviável, então, para minimizar o desgaste, teremos que dividi-lo por um k natural, e quando observamos o resultado encontrado **(3,7 cm)** e o dividimos por $k = 3$, encontramos aproximadamente **1,2 cm**.

Capítulo 5

Considerações Finais

Os objetivos principais deste trabalho foram: trazer uma abordagem mais ampla dos conceitos de Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum, com especial atenção para os pares de comensuráveis; e associar estes conceitos com suas variadas aplicações.

Como a característica principal do Mestrado Profissional em Matemática, ao qual este trabalho está vinculado, é qualificar melhor os professores de Matemática da Educação Básica, permitindo assim, uma melhor educação para os alunos, a escolha deste tema foi muito pertinente. Portanto, queremos com essa dissertação transmitir aos leitores a importância do MMC e MDC de comensuráveis, e a viabilidade de apresentá-los nos diversos níveis de educação, com um maior foco no ensino médio.

Cabe ainda um prolongamento de tal trabalho: divulgar o conteúdo do mesmo, e apresentá-lo sempre que possível à outros professores de matemática.

Finalizamos com mais um trecho dos PCNs(1997) que diz que:

"(...) A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos."

Assim, esperamos que os conceitos matemáticos, de modo geral, venham sempre associados aos seus significados, e não apenas com fórmulas mecânicas, e que os alunos tenham essa consciência matemática, e, assim, possam compreender e modificar o mundo ao seu redor.

Referências Bibliográficas

[1] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra** / Adilson Gonçalves. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[2] HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética** / Abramo Hefez. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[3] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções** / Gelson Iezzi, Carlos Murakami . - 8ª ed. - São Paulo: Atual, 2004.

[4] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, 3: trigonometria** / Gelson Iezzi. - 8ª ed. - São Paulo: Atual, 2004.

[5] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções** / Krerley Irraciel Martins Oliveira, Adán Jose Corcho Fernandez. - Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[6] SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números** / José Plínio de Oliveira Santos. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[7] **http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf**

[8] **http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf**

[9] **http://rodrigomat2004.pbworks.com/f/artigommc.pdf**

[10] **http://www.obm.org.br/opencms/**