UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL - UEMS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

UM SISTEMA BASEADO EM REGRAS FUZZY PARA AVALIAÇÃO CONCEITUAL

Vinícius Folle Narcizo

Dourados, MS

2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL - UEMS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

UM SISTEMA BASEADO EM REGRAS FUZZY PARA AVALIAÇÃO CONCEITUAL

Vinícius Folle Narciso

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maristela Missio.

Dourados, MS
2019

N18s Narcizo, Vinícius Folle
Um sistema baseado em regras Fuzzy para avaliação conceitual / Vinícius Folle Narcizo. – Dourados, MS: UEMS, 2019.
46p.

Dissertação (Mestrado) – Matemática – Universidade Estadual de Mato grosso do Sul, 2019.
Orientadora: Prof.ª Dra. Maristela Missio.

1. Teoria de conjuntos Fuzzy 2. Avaliação de aprendizagem 3. Modelo matemático I. Missio, Maristela II. Título

CDD 23. ed. - 511.313

Vinícius Folle Narciso

Título do trabalho: UM SISTEMA BASEADO EM REGRAS FUZZY PARA AVALIAÇÃO CONCEITUAL

Este trabalho de conclusão de curso - Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul foi avaliado e aprovado, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Prof[a] Dr[a] Maristela Missio (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof[a] Dr[a] Marina Rodrigues Maestre (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Sérgio Rodrigues (UFGD)
Universidade Federal da Grande Dourados

Dourados -MS, 28 de novembro de 2019.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar força, sabedoria e colocar pessoas que ao longo do caminho me auxiliassem, para que este curso pudesse ser concluído com êxito.

Agradeço a minha família, em especial minha esposa, pela paciência e compreensão nos momentos difíceis. Ao meu irmão Flávio Henrique pelas dicas e correções textuais. Ao meu tio e professor Vando pelos incentivos e auxilio durante todo curso.

Agradeço a minha admirável orientadora Maristela Missio pela paciência, dedicação, compreensão, contribuição, amor, incentivos e auxilio incondicional para que este trabalho pudesse ser concluído.

À CAPES, SBM e UEMS pelos auxílios intelectuais e ?nanceiros.

À todos os meus colegas do Profmat.

Resumo

Avaliar o ensino e aprendizagem pode ser entendido como o ato de conhecer o nível de desempenho do aluno comparando essa informação com aquilo que é considerado importante no processo educativo, tomando decisões que possibilitem atingir os resultados esperados. No entanto, pode ser uma tarefa desafiadora para o professor, por ser um processo pedagógico polêmico e impreciso. Uma ferramenta matemática que possibilita manipular situações muitas vezes complexas, baseadas em informações aproximadas e imprecisas é Lógica *Fuzzy*, mais especificamente os Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy* (SBRF), muito bem aceitos e adotados para auxiliar na tomada de decisões em situações onde envolva subjetividade e incerteza. Este trabalho teve como objetivo apresentar um método alternativo para avaliação conceitual, não com olhar focado apenas no conteúdo, mas aos aspectos conceituais do aluno, considerando fatores subjetivos ao que tange o processo de aprendizagem. Para tal, construímos um modelo matemático por meio de um SBRF que possibilita realizar a avaliação conceitual de educandos, levando em conta algumas características subjetivas presentes na mesma. Para a implementação computacional do modelo foi utilizada a ferramenta *Fuzzy* Logic do Toolbox contida no ambiente de programação *MatLab*. Consideramos o modelo proposto como viável por possibilitar aos professores a tomada de decisão levando em conta informações aproximadas e imprecisas na realização da avaliação conceitual de seus alunos.

Palavras-Chave: Teoria de Conjuntos *Fuzzy*; Avaliação de Aprendizagem; Modelo Matemático; Subjetividades.

Abstract

To assess the teaching and learning can be understood as the act of knowing the performance level of student comparing this information with what is considered important in the educational process, making decisions that to achieve the expected results. However, can be a challenging task for the teacher, for being a controversial and uncertain pedagogical process. A mathematical tool that makes it possible to manipulate often complex situations, based on approximate and inaccurate information is the Fuzzy Logic, more specifically Fuzzy Rule-Based Systems (FRBS), very well accepted and adopted to assist in decision making in situations that involve subjectivity and uncertainty. This work aimed to present an alternative method for conceptual evaluation, not with looking focused only on content, but to the conceptual aspects of the student, considering subjective factors related to the learning process. To this end, we built a mathematical model using an FRBS that makes it possible to carry out the conceptual evaluation of students, taking into account some subjective characteristics. For the computational implementation of the model tool Fuzzy Logic of Toolbox contained in the MatLab programming environment. We consider the proposed model as viable because it allows teachers to make decisions taking into account approximate and inaccurate information in the conceptual assessment of their students.

Keywords: Fuzzy set theory; learning assessment; mathematical model; subjectivities

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Desde os primórdios das civilizações, existem indagações comuns e intrínsecas que perduram como incertas até os dias atuais. Podemos destacar, entre outras, a forma de estabelecer medições nas mais diversas situações.

"Medições". Essa é, sem dúvidas, uma palavra que faz parte das salas de professores em escolas e universidades. Um caso particular disso é "como medir o conhecimento?", ou até mesmo, "como identificar se um aluno possui o conhecimento suficiente em um determinado assunto apresentado em sala?".

Medir o conhecimento é uma tarefa complexa, para isso, utilizam-se instrumentos denominados avaliações de ensino-aprendizagem. Segundo o dicionário Michaelis (2019), a palavra avaliação pode ser entendida como ato ou efeito de atribuir valor a algo. No âmbito da educação, a avaliação pode ser apresentada em diversos tipos, entre os principais podemos destacar as avaliações diagnóstica, formativa e somativa.

Em 1996, foi aprovada a LDB (Lei de Diretrizes e Bases) $n°$9.394/96 (Brasil, 1996), em seu texto determina que a avaliação deve ser contínua e cumulativa. Com isso, as escolas começaram a buscar novas maneiras e perspectivas para avaliar. Considerando, não apenas o conteúdo exposto em sala, mas todo o ambiente em que o aluno está inserido.

O ato de avaliar, sem dúvida, é uma habilidade intrínseca dos seres humanos, pois não necessita de treinamento prévio e nem conhecimento científico. No entanto, são necessários parâmetros e instrumentos que auxiliem na tomada de decisão.

A Teoria de Conjuntos *Fuzzy* é uma ferramenta matemática criada em 1965 pelo matemático Lotfi Asker Zadeh (ZADEH, 1965), com objetivo de programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de operações com informações imprecisas, a exemplo do que faz o ser humano. Esta teoria está sendo muito bem aceita e adotada para auxiliar na tomada de decisões em situações que envolvem subjetividade e incertezas. Mais especificamente, os Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy* -SBRF possibilitam a construção de modelos matemáticos capazes de inserir subjetividades e incertezas no processo que está sendo trabalhado, ou seja, permitem expressar numericamente termos subjetivos e imprecisos, por exemplo: ruim; bom; excelente, aproximadamente, perto, longe, etc. Esses sistemas estabelecem uma relação entre a precisão da matemática clássica e a imprecisão do mundo real, tornando possível a implementação com a utilização de algoritmos computacionais.

Diante da possibilidade desta ferramenta matemática e dos desafios em avaliar, o presente trabalho objetiva apresentar um método alternativo para avaliação conceitual, não com olhar focado apenas no conteúdo, mas aos aspectos conceituais do aluno, considerando fatores subjetivos ao que tange o processo de aprendizagem. Para tal, propomos um modelo matemático *fuzzy*, por meio de sistemas Baseados em Regras *Fuzzy*, utilizando a ferramenta *Fuzzy Logic* do "Toolbox^{TM}", simulador de modelos *fuzzy*, disponível no layout de programação *Matlab*®. (MATHWORKS, 2019)

O trabalho será desenvolvido conforme a seguinte estrutura, primeiro realizaremos o estudo teórico da Teoria de Conjuntos *Fuzzy* e os principais tipos de avaliação de aprendizagem. Em seguida, iniciaremos a construção de modelo avaliativo analisando uma ficha conceitual e definindo a sua estrutura. Na sequência, realizaremos a simulação do modelo, apresentando os resultados e as considerações finais. Veja a descrição:

No 1° capítulo, faremos uma abordagem sobre Teoria de Conjuntos *Fuzzy*: subconjuntos, operações entre conjuntos, níveis, números, conectivos lógicos, relações e o sistemas baseados em regras *Fuzzy*.

No Capítulo 2, apresentaremos os conceitos de avaliação e os principais métodos avaliativos utilizados no sistema de ensino, sendo: avaliação diagnóstica; avaliação formativa e avaliação somativa.

No Capítulo 3, descreveremos a construção e aplicação de um método alternativo para avaliação de ensino-aprendizagem utilizando o modelo matemático *fuzzy*, através de um SBRF.

No 4° capítulo, apresentaremos as considerações finais, destacando os objetivos, resultados da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy

O marco inicial da teoria de conjuntos *fuzzy*, possibilitando tratar matematicamente alguns termos linguísticos incertos, foi dado pelo matemático Lotfi Asker Zadeh, professor do Departamento de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley, por meio do artigo "*Fuzzy* Sets" publicado em 1965, (ZADEH, 1965). Esse seria um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de operações com informações imprecisas, a exemplo do que faz o ser humano. A principal intenção era a de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como "*aproximadamente*", "*em torno de*", dentre outros. Esta teoria tem contribuído de maneira significativa para o desenvolvimento de novas ferramentas para a modelagem de fenômenos incertos.

2.1 Subconjuntos *Fuzzy*

Num conjunto clássico A, sabe-se dizer se um dado elemento $x \in A$ ou se $x \notin A$. Porém, existem inúmeras situações em que a relação de pertinência não é muito clara, como para conjuntos cuja fronteira não é bem definida. Por exemplo, dado o conjunto B

$(B \subset \mathbb{R})$ dos números próximos de 0. Os números $0,1$ e $0,9$ pertencem a B? A resposta a esta pergunta é incerta, pois não pode-se dizer com objetividade se um número está ou não próximo de 0. No entanto, pode-se dizer qual o elemento do conjunto universo $\mathbb{R}$ que se enquadra "melhor" ao termo que caracteriza o conjunto B. Uma afirmação razoável, neste caso, é que $0,1$ está mais próximo de 0 que $0,9$. Assim, pode-se associar a $0,1$ e $0,9$ graus de pertinência compatíveis com o conceito que "caracteriza" o conjunto B.

Dessa forma, Barros (1992) afirma que é possível imaginar uma infinidade de conceitos que possuem a característica de não estarem bem definidos em suas fronteiras. Por exemplo, o conjunto dos homens altos, o diagnóstico médico de um paciente, classificação de bactérias quanto à sua natureza vegetal ou animal.

Para obter a formalização matemática de um conjunto *fuzzy*, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser representado por sua *função característica*, cuja definição é dada a seguir.

Definição 2.1.1 (Função característica) *Considere o conjunto universo U tal que $U \neq \emptyset$. Um conjunto $A \subset U$ tem associado, de maneira natural, sua função característica $\chi_A : U \to \{0,1\}$, definida por:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

O domínio da função χ_A é o conjunto U, ao passo que sua imagem está contida no conjunto $\{0,1\}$. Assim, a função característica descreve completamente o conjunto A, já que $\chi_A(x) = 1$ indica que o elemento x está em A e $\chi_A(x) = 0$, indica que x não é elemento de A.

A intenção de Zadeh, ao definir subconjunto *fuzzy*, foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos, criando a ideia de grau de pertinência. Dessa forma, um elemento poderia pertencer parcialmente a um dado conjunto. Ou seja, em seu artigo considerado o marco do nascimento da teoria de conjuntos *fuzzy*, Zadeh (1965) ampliou o contra-domínio da função característica χ_A, que é o conjunto $\{0,1\}$ para o intervalo

$[0,1]$. Admitiu, portanto, que um elemento ao pertencer a um conjunto o faz com um determinado grau.

Definição 2.1.2 (Subconjunto *fuzzy*) *Seja* $\mathcal{U}$ *um conjunto (clássico). Um subconjunto* fuzzy $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{U}$ *é caracterizado por uma função* $\varphi_{\mathcal{F}} : \mathcal{U} \to [0,1]$, *pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto* fuzzy $\mathcal{F}$.

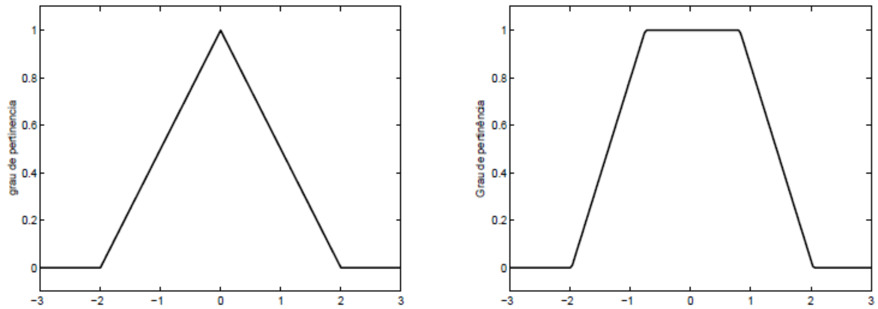
Note que $\varphi_{\mathcal{F}} \in [0,1]$ representa o grau de pertinência do elemento $x \in \mathcal{U}$ ao subconjunto *fuzzy* $\mathcal{F}$. Por outro lado, se $\varphi_{\mathcal{F}}(x) = 0$ tem-se que x não pertence a $\mathcal{F}$; se $\varphi_{\mathcal{F}}(x) = 1$ diz-se que x pertence totalmente a $\mathcal{F}$ e se $0 < \varphi_{\mathcal{F}}(x) < 1$ diz-se que x pertence parcialmente a $\mathcal{F}$. Nesse sentido, pode-se afirmar que um conjunto clássico (*conjunto crisp*) é um caso particular do subconjunto *fuzzy*, cuja função de pertinência $\varphi_{\mathcal{F}}$ é sua função característica $\chi_{\mathcal{F}}$. Com o intuito de simplificar o texto, o *subconjunto* fuzzy será referido por *conjunto* fuzzy.

Uma função de pertinência é uma função numérica gráfica ou tabulada, que atribui valores de pertinência *fuzzy* para valores de uma variável em seu conjunto universo. É importante observar que o universo de uma variável representa o intervalo numérico de todos os possíveis valores reais que uma variável específica pode assumir. As formas para as funções de pertinência são totalmente arbitrárias; sua escolha depende de fatores que estão relacionados com o contexto do problema a ser estudado.

Exemplo 2.1.1 (Números próximos de zero) *Seja o conjunto* fuzzy B *dos números próximos de* 0. *Neste caso,* $\mathbb{R}$ *será o conjunto universo.*

Do ponto de vista apenas da teoria *fuzzy*, qualquer uma das funções de pertinência ilustradas na Figura 2.1 podem representar o conjunto *fuzzy* B.

Figura 2.1: Representações do conjunto *fuzzy* “números próximos de zero”.



Fonte: Missio (2008, p. 34).

É claro que $\varphi_B(0) = 1$ significa que $x = 0$ pertence totalmente ao conjunto *fuzzy* B e cada vez que x esteja mais longe de zero seu grau de pertinência vai diminuindo simetricamente até anular-se fora do intervalo $[-2, 2]$.

Com essa escolha, se está aceitando que os elementos cuja distância a $x = 0$ é maior do que 2, são considerados definitivamente “longe” de zero.

É evidente que existem infinitos critérios diferentes de representar o mesmo conjunto *fuzzy*, mas a ideia central é que a função de pertinência tenha que refletir, da melhor maneira possível, as características mais relevantes do conjunto *fuzzy* que se deseja representar.

2.2 Operações entre conjuntos *fuzzy*

Como na lógica clássica, os operadores de intersecção e união correspondem respectivamente aos operadores lógicos de conjunção (e) e disjunção (ou). Aqui também existem muitas formalizações matemáticas possíveis para esses operadores e a relação dual entre eles também se mantém, ou seja, a escolha de um operador conjunção “define” qual será o operador disjunção, e vice-versa. O par de operadores mais amplamente utilizado nas técnicas *fuzzy* são o operador *min* (mínimo) para a conjunção e o *max* (máximo) para a disjunção *fuzzy*.

Sejam $\mathcal{F}$ e G dois conjuntos *fuzzy* num mesmo conjunto universo $\mathcal{U}$, com suas respectivas funções de pertinência indicadas por $\varphi_{\mathcal{F}}$ e φ_G.

Diz-se que $\mathcal{F}$ é um subconjunto *fuzzy* de G ($\mathcal{F} \subset G$) se, e somente se, $\varphi_{\mathcal{F}}(x) \leq \varphi_G(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}$. Ainda, diz-se que $\mathcal{F} = G$ se, e somente se, $\varphi_{\mathcal{F}}(x) = \varphi_G(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}$. A função de pertinência do conjunto vazio $\emptyset$ é indicada por $\varphi_{\emptyset}(x) = 0$ e do conjunto universo $\mathcal{U}$ é indicada por $\varphi_{\mathcal{U}}(x) = 1 \ \ \forall x \in \mathcal{U}$. Assim, pode-se dizer que $\emptyset \subset \mathcal{F}$ e que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ para todo $\mathcal{F}$.

Definição 2.2.1 (União, intersecção e complementar de conjuntos *fuzzy*) *As funções de pertinência que representam os conjuntos* fuzzy *união, intersecção e complementar de conjuntos* fuzzy *são dadas, respectivamente, por*

$$\varphi_{\mathcal{F} \cup G}(x) = max\{\varphi_{\mathcal{F}}(x), \varphi_G(x)\},$$

$$\varphi_{\mathcal{F} \cap G}(x) = min\{\varphi_{\mathcal{F}}(x), \varphi_G(x)\},$$

$$\varphi_{\mathcal{F}'} = 1 - \varphi_G(x),$$

para todo $x \in \mathcal{U}$.

2.3 Níveis de um conjunto *fuzzy*

Segundo Barros e Bassanezi (2006, p. 29), conjunto *fuzzy* $\mathcal{F}$ de $\mathcal{U}$ é formado por elementos de $\mathcal{U}$ com uma certa ordem, que é traduzida através da classificação por graus. Um elemento x de $\mathcal{U}$ está em uma classe se seu grau de pertinência é maior que um determinado valor limiar ou nível $\alpha \in [0, 1]$, que define aquela classe. O conjunto clássico de tais elementos é um α-*nível* de $\mathcal{F}$, denotado por $[\mathcal{F}]^\alpha$.

Definição 2.3.1 (α-nível) *Sejam* $\mathcal{F}$ *um conjunto* fuzzy *e* $\alpha \in [0, 1]$. *Um* α-*nível de* $\mathcal{F}$ *é definido pelo conjunto*

$$[\mathcal{F}]^\alpha = \{x \in \mathcal{U}; \varphi_{\mathcal{F}}(x) \geq \alpha\}.$$

Definição 2.3.2 (Suporte de um conjunto *fuzzy*) *Suporte de um conjunto* fuzzy *$\mathcal{F}$ são todos os elementos de $\mathcal{U}$ que têm grau de pertinência diferente de zero em $\mathcal{F}$, denotado por supp($\mathcal{F}$)*

$$supp(\mathcal{F}) = \{x \in \mathcal{U}; \varphi_{\mathcal{F}}(x) > 0\} = [\mathcal{F}]^0.$$

2.4 Números *fuzzy*

De acordo com Gomide e Gudwin (1994), os *números* fuzzy foram "criados" para generalizar os números reais. Assim como no caso clássico, aqui também é necessário fazer "contas". A diferença é que no caso *fuzzy* calculam-se quantidades imprecisas.

Definição 2.4.1 (Número *fuzzy*) *Um conjunto* fuzzy *A é chamado de número* fuzzy *quando o conjunto universo, na qual a função φ_A ($\varphi_A(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$) está definida, é o conjunto dos números $\mathbb{R}$ e satisfaz as condições:*

(i) *todos os $\alpha-$níveis de A são não vazios ($[A]^\alpha \neq \emptyset$), com $0 \leq \alpha \leq 1$;*

(ii) *todos os $\alpha-$níveis de A são intervalos fechados de $\mathbb{R}$;*

(iii) *$suppA = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\} = [A]^0$ é limitado.*

Todo número real r é um número *fuzzy* particular, cuja função de pertinência é a sua função característica:

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se x = r} \\ 0 & \text{se x} \neq \text{r} \end{cases}.$$

2.5 Conectivos lógicos

No desenvolvimento deste trabalho serão apresentadas informações da forma: "Se x é A e y é B, então z é C ou z é D". Para traduzir essas sentenças para a linguagem matemática, é necessário modelar os conectivos "e" e "ou", bem como a condição "Se...então...". Existem inúmeras formas de modelar tais conectivos, visto que eles possuem domínios dependentes, ou seja, variam de acordo com a área estudada.

Os modelos para os conectivos a serem tratados a seguir podem ser vistos como uma extensão dos conectivos lógicos usados na teoria clássica. Primeiramente, considera-se o conectivo "e", denotando por *norma triangular* ou simplesmente *t-norma* a família das possíveis operações que modelam esse conectivo. Adota-se como notação genérica o símbolo $\triangle$, assim $x\triangle y$.

DEFINIÇÃO 2.5.1 (T-NORMA) *A operação binária* $\triangle : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *é uma t-norma se satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Condições de fronteira:* $1\triangle x = x$;

(ii) *Comutatividade:* $x\triangle y = y\triangle x$;

(iii) *Associatividade:* $x\triangle(y\triangle z) = (x\triangle y)\triangle z$;

(iv) *Monotonicidade: se* $x \leq y$ *e* $z \leq w$ *então* $x\triangle z \leq y\triangle w$.

Análoga à construção das t-normas, numa modelagem para o termo "ou", denota-se por *conorma triangular* ou simplesmente *t-conorma* a família dessas operações. Adota-se como notação genérica o símbolo ∇, e escreve-se $x\nabla y$.

DEFINIÇÃO 2.5.2 (T-CONORMA) *A operação binária* $\nabla : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *é uma t-conorma se satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Condições de fronteira:* $0\nabla x = x$;

(ii) *Comutatividade:* $x\nabla y = y\nabla x$;

(iii) *Associatividade:* $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$;

(iv) *Monotonicidade: se* $x \leq y$ *e* $z \leq w$ *então* $x \nabla z \leq y \nabla w$*.*

Claramente, o operador *min* ($\triangle(x, y) = min\{x, y\} = x \wedge y$) é uma *t-norma* e o operador *max* ($\nabla(x, y) = max\{x, y\} = x \vee y$) é uma *t-conorma*. Assim as t-normas e t-conormas são úteis para dar base teórica aos sistemas baseados em regras *fuzzy*, que serão as principais ferramentas da lógica *fuzzy* utilizadas neste trabalho.

2.6 Relações *fuzzy*

As relações *fuzzy* são, assim como os conjuntos *fuzzy*, uma generalização das relações clássicas. Uma relação clássica descreve a inter-relação entre dois ou mais objetos e seu conceito é formalizado a partir da teoria de conjuntos. De maneira geral, quando optamos pela teoria dos conjuntos *fuzzy*, a relação será fuzzy e quando optamos pela teoria clássica de conjuntos a relação será *crisp*. Segundo Barros e Bassanezi (2006, p. 58), a adoção do tipo de relação depende muito do fenômeno estudado. Porém, a adoção da teoria dos conjuntos *fuzzy* tem sempre maior robustez no sentido que esta inclui a teoria clássica de conjuntos.

Definição 2.6.1 (Relação clássica) *Uma relação clássica R, sobre* $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$*, é qualquer subconjunto (clássico) do produto cartesiano* $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$*. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos,* $U_1 \times U_2$*, a relação é chamada de binária sobre* $U_1 \times U_2$*.*

Como a relação R é um subconjunto do produto cartesiano, então ela pode ser representada por sua função característica χ_R, da seguinte forma:

$$\chi_R(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, x_2, ..., x_n) \in R \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2, ..., x_n) \notin R \end{cases}.$$

Definição 2.6.2 (Relação *fuzzy*) *Uma relação* fuzzy *R, sobre* $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$*, é* *qualquer subconjunto* fuzzy *de* $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$. *Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos,* $U_1 \times U_2$, *a relação é chamada de* fuzzy *binária sobre* $U_1 \times U_2$.

Se a função de pertinência da relação *fuzzy* R for indicada por φ_R, então o número $\varphi_R(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0, 1]$ indica o grau com que os elementos x_i, que compõem a $n-$upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$, estão relacionados segundo a relação R. Esta é uma das vantagens em se optar pela relação *fuzzy*, pois enquanto a relação clássica diz apenas se os elementos estão ou não relacionados entre si, a relação *fuzzy* binária diz ainda o grau dessa relação.

Definição 2.6.3 (Produto Cartesiano) *O produto cartesiano* fuzzy *dos conjuntos* fuzzy $A_1, A_2, ..., A_n$ *de* $U_1, U_2, ..., U_n$, *respectivamente, é a relação* fuzzy $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *representada pela função de pertinência*

$$\varphi_{A_1} \times \varphi_{A_2} \times ... \times \varphi_{A_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge ... \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde $\wedge$ *representa o mínimo.*

O produto cartesiano entre conjuntos *fuzzy* é uma relação *fuzzy* sobre $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ de grande utilidade, principalmente nos sistemas *fuzzy*, a serem apresentados a seguir.

2.7 Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy*

Os sistemas *fuzzy* são, em geral, o resultado de uma generalização dos sistemas clássicos, ou seja, nessa abordagem os conceitos nebulosos (incertos) são incorporados a esses sistemas. Uma característica central dos sistemas *fuzzy* é que eles são baseados no conceito de partição *fuzzy* das informações. A utilização de conjuntos *fuzzy* permite uma generalização da informação, que está associada com a introdução da imprecisão, do desconhecimento dos fenômenos. Segundo Ortega (2001), em essência, a representação da informação nos sistemas *fuzzy* procura imitar o processo de raciocínio humano, considerando conhecimentos heurísticos e cruzando informações desconectadas *a priori*.

Os sistemas baseados em regras *fuzzy* têm como base um conjunto de regras do tipo Se-Então, cujos predicados são subjetivos. Neste tipo de sistemas, as quantidades estão associadas a termos linguísticos, sendo o sistema *fuzzy* essencialmente uma expressão qualitativa do fenômeno em estudo. Esse tipo de sistema é baseado na utilização da linguagem natural para descrever o comportamento dos fenômenos.

Os termos linguísticos são usados para expressar conceitos e conhecimentos na comunicação humana, e em muitas áreas eles são uma forma importante de quantificar os dados. O uso de termos linguísticos é frequente no cotidiano de cada pessoa. Diz-se que "O dia está muito quente", "O ônibus estava lotado", "Tal pessoa é alta, magra" etc. Todos estes termos possuem um significado e transmitem informação.

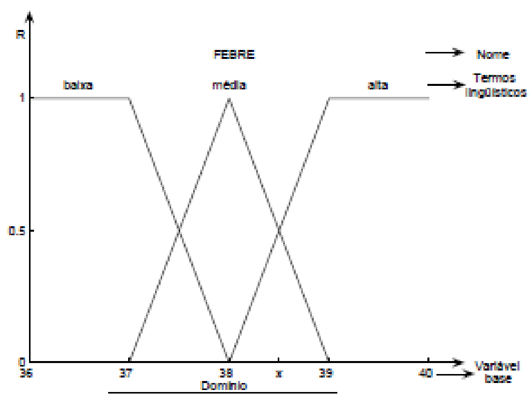
Definição 2.7.1 (Variável linguística) *Uma variável linguística* fuzzy X *num conjunto universo* U *é uma variável cujos valores são expressos qualitativamente por termos linguísticos e quantitativamente por uma função de pertinência. Ou seja, é uma variável cujos valores assumidos por ela são subconjuntos* fuzzy *de* U.

Uma variável linguística é caracterizada por: nome da variável (temperatura, pressão, febre, etc.); conjunto de termos linguísticos (elevado, baixo, pouco, extenso, etc.); domínio (Universo) de valores da variável sobre o qual o significado do termo linguístico é determinado.

A Figura 2.2 ilustra um exemplo de variável linguística, cujo nome é *Febre*. Seus termos linguísticos são *baixa, média e alta*, o domínio é o intervalo $[36, 40]$ e cada termo linguístico tem a ele associado um conjunto *fuzzy* que o caracteriza.

É importante notar que a variável linguística é expressa em termos de uma variável básica, ou seja, dentro de um certo domínio de valores, que denota a sua medida. No exemplo descrito na Figura 2.2, a *febre* é medida em graus centígrados (temperatura). Esta medida pode ser quantitativa, no caso em que é possível o uso de aparelhos de medida. Para Ortega (2001), em geral, é o especialista que define o domínio da variável e realiza sua partição *fuzzy*. Nesse contexto, o papel do especialista torna-se fundamental na modelagem *fuzzy*, particularmente em alguns modelos de epidemiologia.

Figura 2.2: Exemplo de variável linguística.



Fonte: Missio (2008, p. 40).

Definição 2.7.2 (Regras *fuzzy*) *São estruturas da forma* **Se** $\{$*antecedentes*$\}$ **Então** $\{$*consequentes*$\}$ *utilizadas para descrever situações específicas que podem ser submetidas à análise de um painel de especialistas e, cuja inferência conduz a algum resultado desejado.*

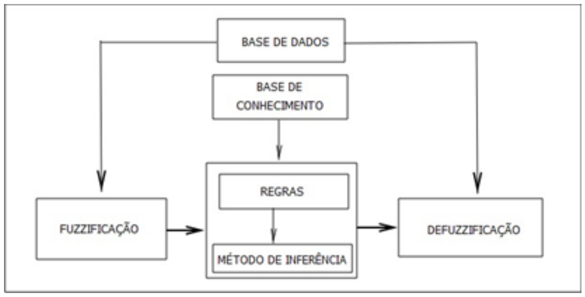
Os antecedentes definem uma região *fuzzy* no espaço das variáveis de entrada do sistema e descrevem uma condição (premissa), enquanto os consequentes definem uma região no espaço das variáveis de saída do sistema e descrevem uma conclusão ou uma ação que pode ser esboçada quando as premissas se verificam.

A regra *fuzzy* é uma unidade capaz de capturar algum conhecimento específico. Um conjunto de regras (ou Base de Regras) é capaz de descrever um sistema em suas várias possibilidades, cumprindo o papel de "traduzir" matematicamente informações que formam a base de conhecimentos do sistema *fuzzy*.

Os sistemas baseados em regras *fuzzy* (SBRF), nesse caso denominados Controladores *Fuzzy*, possuem quatro módulos: módulo de fuzzificação; módulo da base de regras linguísticas; módulo de inferência *fuzzy* e módulo de defuzzificação. Estes módulos estão conectados conforme indicado na Figura 2.3.

1. **Módulo de Fuzzificação:** Neste módulo, as entradas do sistema são traduzidas em conjuntos *fuzzy* de acordo com seus respectivos domínios. É nele que se justifica a grande importância do fenômeno a ser modelado. Juntamente com os especialistas,

Figura 2.3: Esquema geral de um SBRF.



Fonte: Do autor.

as funções de pertinência são formuladas para cada conjunto *fuzzy* envolvido no processo. Observe-se que, mesmo que a entrada seja crisp, essa será fuzzificada por meio de sua função característica.

2. **Módulo da Base de Regras *Fuzzy***

   Este pode ser considerado como um módulo que faz parte do "núcleo" do controlador *fuzzy*. Ele é composto por uma coleção de proposições (regras) *fuzzy* na forma "Se...Então...". Cada uma destas proposições pode, por exemplo, ser descrita linguisticamente de acordo com o conhecimento de um especialista. A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas, para serem utilizadas no módulo de inferência *fuzzy*.

3. **Módulo de Inferência *Fuzzy*:** É neste módulo que cada proposição *fuzzy* é "traduzida" matematicamente por meio das técnicas da lógica *fuzzy*. É onde se define quais t-normas, t-conormas e regras de inferência (que podem ou não ser implicações *fuzzy*) serão utilizadas para se obter a relação *fuzzy* que modela a base de regras. Este módulo tem tanta importância quanto o módulo da base de regras. É basicamente dele que depende o sucesso do controlador *fuzzy*, já que ele fornecerá a saída (controle) *fuzzy* a ser adotada pelo controlador, a partir de cada entrada.

- **Método de Inferência de Mamdani:** É o método baseado na regra de composição de inferência *max-min*. Uma regra *Se* (antecedente) *então* (consequente) é definida pelo produto cartesiano *fuzzy* que compõe o antecedente e o consequente da regra. O método de Mamdani agrega as regras através do conectivo lógico OU, que é modelado pelo operador máximo (max) e, em cada regra, o conectivo lógico E é modelado pelo operador mínimo (min). Ou seja, para o conectivo lógico E adota-se a $t-$norma e para o conectivo lógico OU adota-se a $t-$conorma que conecta as regras *fuzzy* da base de regras.

4. **Módulo de Defuzzificação:**

   Na teoria dos conjuntos *fuzzy*, a defuzzificação é um processo que permite representar um conjunto *fuzzy* por um valor crisp (número real). Em sistemas *fuzzy*, em geral a saída é um conjunto *fuzzy*. Assim deve-se escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente.

   - **Defuzzificador Centro de Massa**

     Este método, também denominado Centro de Gravidade, Centróide ou Centro de Área, é semelhante à média aritmética para uma distribuição de dados, com a diferença que os pesos aqui são os valores $\varphi_B(y_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor y_i, com o conceito modelado pelo conjunto *fuzzy* B. O centro de massa dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto *fuzzy*. Entre todo os métodos de defuzzificação ele é o mais preciso e preferido, mesmo sendo o mais complicado.

   Para um domínio discreto tem-se:

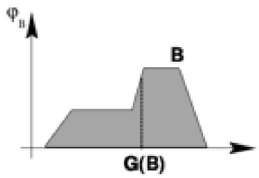
$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_B(y_i)}{\sum_{i=0}^{n} \varphi_B(y_i)}.$$

   Para um domínio contínuo tem-se:

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \varphi_B(y) dy}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(y) dy}.$$

   A Figura 2.4 ilustra o método descrito acima:

Figura 2.4: Ilustração do método de defuzzificação Centro de Massa.



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 115).

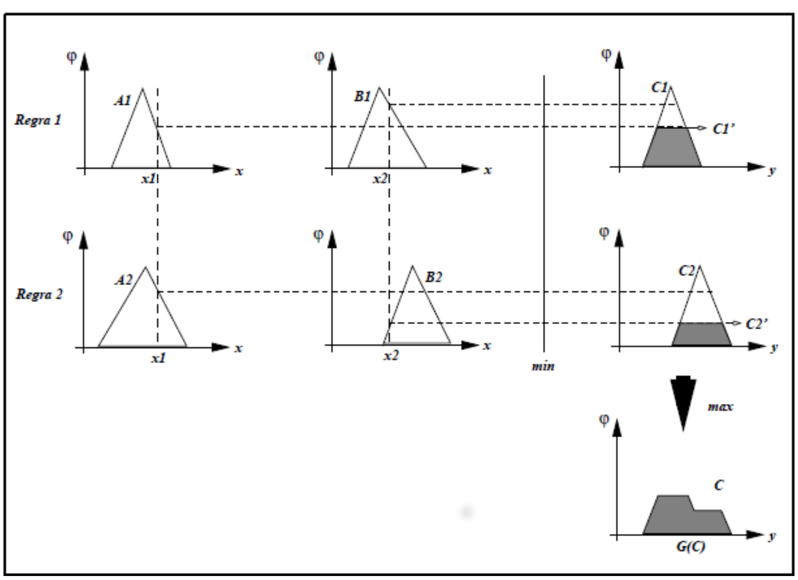
Exemplo 2.7.1 *Para representar um sistema baseado em regras* fuzzy *com essa metodologia, consideram-se duas regras genéricas, cada uma com duas entradas e uma saída:*

Regra 1: *Se* x_1 *é* A_1 *e* x_2 *é* B_1 *então* y *é* C_1

Regra 2: *Se* x_1 *é* A_2 *e* x_2 *é* B_2 *então* y *é* C_2

A Figura 2.5 ilustra o Exemplo 2.7.1, isto é, descreve como a saída real y do sistema de inferência tipo Mamdani é gerada, a partir das entradas x_1 e x_2 reais e a regra de composição *max-min*. A saída $y \in \mathbb{R}$ é obtida pela defuzzificação do conjunto *fuzzy* de saída $C = C1' \cup C2'$. O método de defuzzificação utilizado foi o Centro de Massa G(C).

Figura 2.5: Método de Mamdani com composição *max-min*.



Fonte: Missio (2008, p. 44).

Capítulo 3

Avaliação de Aprendizagem

Desde os primórdios das civilizações, existem indagações comuns e intrínsecas que perduram como incertas até os dias atuais: a forma de estabelecer medições nas mais diversas situações. Este problema que possui muitas variáveis e depende de cada momento, atravessa séculos e ainda hoje é muito investigado.

Indagações: como medir? Como contar certa quantidade de objetos? Como calcular área de um plano? Como calcular o volume de um sólido? Essas questões sempre despertaram a curiosidade de muitos matemáticos e filósofos e foram sendo respondidas com o passar dos anos, e outras, conforme a evolução tecnológica. No entanto, existem situações que por mais que nos esforçamos para calcular ainda assim não conseguiríamos obter um resultado satisfatório e concreto.

Um caso particular disso é, como medir o conhecimento? Como identificar se um aluno possui o conhecimento suficiente num determinado assunto apresentado em sala de aula? Questionamentos como estes fazem parte das salas de professores em escolas e universidades, além de ser objeto de estudo por vários pesquisadores em todo mundo e que fundamenta este trabalho.

Alguns desses questionamentos podem ser parcialmente respondidos com a aplicação de provas escritas, trabalhos, avaliações que são atribuídos um valor de 0 a 10. Porém, há casos em que nos deparamos com problemas subjetivos, onde não conseguimos mensurar a aprendizagem e transformar em dados numéricos. Nos dias atuais, o avanço tecnológico e cientifico trouxe muita informação para dentro das escolas. Antes o que precisava ser alocado em um enorme espaço físico, hoje pode ser armazenado num pequeno objeto chamado “pendrive”. Exemplo como esse serve de reflexão, pois nos motiva a pensar sobre o que a tecnologia e a ciência podem contribuir na criação e no desenvolvimento de novos métodos no processo avaliativo de ensino aprendizagem.

As dificuldades em avaliar de forma concisa a aprendizagem tem nos levado a caminhos ainda pouco trilhados. Pois, o processo avaliativo não está limitado ao caráter quantitativo atribuído ao desenvolvimento do aluno. A respeito disso, Libâneo (1994) destaca:

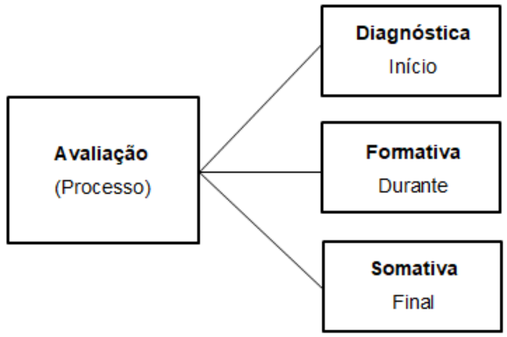
> A avaliação é uma tarefa complexa que não se resume à realização de provas e atribuição de notas. A mensuração apenas proporciona dados que devem ser submetidos a uma apreciação qualitativa. A avaliação, assim, cumpre funções pedagógico-didática, de diagnóstico e de controle em relação às quais se recorre a instrumentos de verificação do rendimento escolar, (LIBÂNEO, 1994, p. 195).

Diante dos desafios em avaliar, Freitas, Costa e Miranda (2014) argumentam que o resultado da aprendizagem deve ser o principal ponto observado no processo avaliativo:

> É evidente que não existe uma receita pronta para o processo avaliativo, mas avaliar é antes de tudo um ato de investigação, de reflexão, de intervenção e de interação em que cada sujeito envolvido deve desenvolver da melhor forma possível o seu papel, visando, o que lhes é primordial, uma aprendizagem significativa, consistente e autônoma, (FREITAS, COSTA e MIRANDA, 2014, p 96).

Para entender melhor os obstáculos enfrentados, apresentaremos quais os principais métodos avaliativos utilizados no sistema de ensino, ver esquema na Figura 3.1.

Figura 3.1: Tipos de avaliação de aprendizagem.



Fonte: Do autor.

1. **Avaliação Diagnóstica**

A avaliação diagnóstica é um instrumento que apresenta os pontos fortes e fracos dos conteúdos trabalhados em sala, elencando os que merecem maior atenção, bem como a forma em que esses podem ser abordados com melhor eficiência. Avaliação, nessa perspectiva, permite a tomada de consciência e de decisão a respeito de melhorar o desempenho de alunos e professores. É um instrumento importante para qualificar a aprendizagem, identificar problemas, encontrar soluções, corrigir rumos e acertar os passos nesse processo. Como tal, a avaliação não deve ser pontual, eventual e (ou) realizada somente ao final de cada trimestre, ela precisa ser realizada constantemente no cotidiano da prática pedagógica.

> Em primeiro lugar, há que partir para a perspectiva de uma avaliação diagnóstica. Com isso, queremos dizer que a primeira coisa a ser feita, para que a avaliação sirva à democratização do ensino, é modificar a sua utilização de classificatória para diagnóstica. Ou seja, a avaliação deverá ser assumida como um instrumento de compreensão do estágio de aprendizagem em que se encontra o aluno, tendo em vista tomar decisões suficientes e satisfatórias para que possa avançar no seu processo de aprendizagem. Se for importante aprender aquilo que se ensina na escola, a função da avaliação será possibilitar ao educador condições de compreensão do estágio em que o aluno se encontra, tendo em vista trabalhar com ele para que

> saia do estágio defasado em que se encontra e possa avançar em termos dos conhecimentos necessários, (LUCKESI, 2005, p. 81).

Mussucato e Mayrink (2015), em poucas palavras, apontam para a importância da execução deste instrumento diagnóstico no ambiente escolar:

> A avaliação diagnóstica ajuda a identificar as causas de dificuldades específicas dos estudantes na assimilação do conteúdo. Identificar o que os alunos já sabem antes de começar o trabalho de mais um ano letivo é essencial para iniciar o planejamento docente, (MASSUCATO e MAYRINK, 2015).

Para garantir que nada seja deixado de lado, organiza-se um cronograma de ações pedagógicas e um plano semestral com os professores, para analisar os dados de cada turma e, por fim, elaborar as avaliações diagnósticas. Massucato e Mayrink (2015) também argumentam que a avaliação diagnóstica ajuda a identificar o que provoca as específicas dificuldades dos alunos. Para os autores, ela possui três objetivos principais, que são:

> Identificar a realidade de cada turma; observar se as crianças apresentam ou não habilidades e pré-requisitos para os processos de ensino e aprendizagem; refletir sobre as causas das dificuldades recorrentes, definindo assim as ações para sanar os problemas,(MASSUCATO e MAYRINK, 2015).

A avaliação diagnóstica pode ser feita em qualquer momento, mas no início do ano letivo permite conhecer melhor a realidade do aluno. É importante e necessário que o professor verifica que o conhecimento prévio de cada um, constatando as condições necessárias para garantir a aprendizagem. Além disso, ela também funciona como uma análise do ensino na escola, já que os resultados das salas de aula de uma mesma série podem promover reflexões importantes para o replanejamento das propostas e atividades que devem ser oferecidas a todos.

Dentre os instrumentos que esta avaliação utiliza para verificar a aprendizagem, destacam-se a leitura, interpretação e produção de textos; resolução de problemas envolvendo as quatro operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão) e análise de dados.

Dentro da análise de dados, a tabulação dos dados obtidos oferece um mapa da turma e permite identificar quais são os alunos que precisam de uma orientação maior. O plano de trabalho precisa ser definido para atender às necessidades desses estudantes e, muitas vezes, torna-se necessário fazer uma intervenção pedagógica. O docente também não pode deixar de lado aqueles que têm mais facilidade, contemplando a todos em seu planejamento.

O professor que utiliza adequadamente a prática da avaliação diagnóstica alcança segurança na realização de sua prática pedagógica, uma vez que ensinar a partir de dados claros sob o nível e condições que se encontra o estudante permite-lhe alcançar com mais segurança os objetivos estabelecidos para a turma.

2. **Avaliação Formativa**

A avaliação formativa, também conhecida como avaliação para aprendizagens, ou formativa diagnóstica, é uma ferramenta de análise imediata que permite ao professor detectar as dificuldades dos alunos no decorrer de todo processo de ensino-aprendizado.

A avaliação formativa tem como foco melhorar e facilitar o ensino por meio do uso de informações obtidas em etapas avaliativas. Este método intenciona encontrar possíveis dificuldades inerentes aos alunos de modo que, reorganizando sua metodologia com base nas necessidades encontradas, o educador possa corrigí-las de forma imediata, acelerando assim o processo de aprendizagem.

> A avaliação formativa é realizada ao longo do processo, é contínua, e dá parâmetros ao professor para verificar se os objetivos foram alcançados, podendo interferir no que pode estar comprometendo a aprendizagem. Assim, por meio da avaliação formativa é possível constatar se os objetivos estabelecidos foram atingidos pelos alunos, como também levantar dados para que o professor possa realizar um trabalho de recuperação e aperfeiçoar seus procedimentos, (FREITAS, COSTA e MIRANDA, 2014, p 87).

Deste modo, uma das principais características desta avaliação é a possibilidade de gerar, de forma imediata, informações úteis acerca de problemas descobertos, servindo como um feedback ininterrupto do processo de ensino e aprendizagem. Outro fator peculiar deste método é a possibilidade de aproximar educador e educando e de elevar o diálogo, bem como o conhecimento mútuo.

Sendo assim, podemos dizer que este tipo de avaliação serve como orientação norteadora em relação ao processo de aprendizagem, se esse tem de fato cumprido com o seu papel. Em caso de negativa, ela possibilita ao educador uma revisão em seu planejamento, bem como nas aplicações de práticas pedagógicas, concomitantemente como parâmetro ao educando, que, por meio dela, consegue perceber seus desafios, bem como seus avanços no processo de aprendizagem.

3. **Avaliação Somativa**

Durante todo processo educacional o aluno realiza várias atividades desenvolvidas no período letivo, as quais são atribuídos valores numéricos, que ao final da etapa de ensino são somados para geração de um único valor representativo: a nota de todas as atividades. Esta é a característica que define a tradicional avaliação somativa.

Segundo Gil (2012) apud Gavassi, a avaliação somativa é entendida como:

> Uma avaliação pontual, que geralmente ocorre no final do curso, de uma disciplina, ou de uma unidade de ensino, visando determinar o alcance dos objetivos previamente estabelecidos. Visa elaborar um balanço somatório de uma ou várias sequências de um trabalho de formação e pode ser realizada num processo cumulativo, quando esse balanço final leva em consideração vários balanços parciais, (GIL, 2006, p. 248).

De acordo com Haydt (2008), a avaliação somativa intenciona considerar os resultados da aprendizagem obtidos pelos educandos, com o objetivo de ranquear e classificar o estudante ao fim do período em curso.

> Em um sistema escolar seriado, o aluno é promovido de uma série para outra e de um grau ou curso para outro, de acordo com o aproveitamento e o nível de adiantamento alcançado nos componentes curriculares estudados. Quando a avaliação é utilizada com o propósito de atribuir ao aluno uma nota ou conceito final para fins de promoção, ela é denominada avaliação somativa. Este tipo de avaliação tem função classificatória, pois consiste em classificar os resultados obtidos pelos alunos ao final de um semestre, ano ou curso, (HAYDT 2008, pag. 293).

Já para Bloom, Hastings e Madaus (1983, p. 100), este tipo de avaliação é bastante abrangente e visa apontar os resultados de forma numérica. "A avaliação somativa é uma avaliação muito geral, que serve como ponto de apoio para atribuir notas, classificar o aluno e transmitir os resultados em termos quantitativos, feita no final de um período".

Capítulo 4

Uma proposta para avaliação conceitual utilizando um SBRF

O ato de avaliar, sem dúvida, é uma habilidade intrínseca dos seres humanos, pois não necessita de treinamento prévio e nem conhecimento científico. Mas para isso, precisamos de parâmetros e instrumentos que auxilie para tomada de decisão.

Neste sentido, fizemos uma pesquisa que nos auxiliasse e fundamentasse teoricamente, um caso particular de avaliação da aprendizagem, a avaliação conceitual.

Para surpresa, muitos artigos que tratam de avaliação de aprendizagem enfatizam que devemos considerar o modo de avaliar de forma contínua, observando o ambiente e todo o contexto em que o aluno está inserido. No entanto, encontramos pouco material que realmente trata da avaliação conceitual, e muito menos, uma ferramenta que possa sistematizar e quantificar esse conhecimento.

Sendo assim, buscamos o significado da palavra avaliar, a qual, vem do latim a-valere, que significa dar valor, e ainda, segundo o dicionário Michaelis (2019), a palavra avaliação é o ato ou efeito de avaliar, ou mesmo a estimação da qualidade de algo ou da competência de alguém. Porém, o significado da palavra conceito é a representação mental das características gerais de um objeto, ou ainda, sistema de avaliação do rendimento e/ou conduta dos alunos.

Logo, com base no significado de cada palavra, neste trabalho apresentamos o entendimento de avaliação conceitual como ato de avaliar ou estimar a competência de alguém, observando suas características gerais, destacando seus rendimentos e conduta.

Com o avanço tecnológico nas últimas décadas, surgiram vários instrumentos, recursos e métodos disponíveis ao educador no auxílio da prática da docência. Podemos destacar, entre outros, a ferramenta Fuzzy Logic do "Toolbox^{TM}" simulador de modelos *fuzzy*, disponível no layout de programação Matlab®, (MATHWORKS, 2019). Com esta ferramenta, mais especificamente com os Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy*, apresentaremos no decorrer deste capítulo a proposta de um modelo matemático que possibilita realizar a avaliação conceitual de educandos, levando em conta algumas características subjetivas presentes na mesma.

4.1 Construção do SBRF para Avaliação Conceitual

As premissas que serviram para idealizar e construir o SBRF para Avaliação Conceitual que será apresentado nesta seção surgiram a partir de um instrumento de avaliação, elaborado pela coordenação pedagógica da unidade escolar em que ministrei aula no ano de 2018. Esse instrumento de avaliação trata-se de uma ficha que deveria ser preenchida pelo professor ao término de cada bimestre, com o objetivo de avaliar o desenvolvimento de cada aluno nos seguintes aspectos: se o aluno realiza as atividades propostas individualmente; se interage com os colegas e professores nos trabalhos em grupo; se tem bom relacionamento com os colegas e professor; se faz as tarefas e trabalhos e os entrega com pontualidade; se pede ajuda sempre que necessário; se é um aluno assíduo e se desenvolve o raciocínio lógico. Diante desses critérios o professor deveria atribuir um conceito, conforme a legenda: 0-Nunca; 1-Raramente; 2-Às vezes; 3-Regularmente; 4-Bom e 5-Excelente. O cabeçalho desta ficha encontra-se ilustrada na Figura 4.1.

Figura 4.1: Ficha de avaliação conceitual.

<table>
<tr><th colspan="9">FICHA DE AVALIAÇÃO</th></tr>
<tr><td>Ano:</td><td>Turma:</td><td rowspan="4">1. Realiza as atividades propostas individualmente.</td><td rowspan="4">2. Interage com os colegas e professores nos trabalhos em grupo.</td><td rowspan="4">3. Tem bom relacionamento com os colegas/professor</td><td rowspan="4">4. Faz as tarefas e trabalhos e os entrega com pontualidade</td><td rowspan="4">5. Pede ajuda sempre que necessário</td><td rowspan="4">6. É um aluno assíduo</td><td rowspan="4">7. Desenvolve o raciocínio lógico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Disciplina: Matemática</td></tr>
<tr><td colspan="2">Professor:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Legenda:
0 – Nunca   1 – Raramente
2 – Às vezes   3 – Regularmente
4 – Bom   5 – Excelente</td></tr>
</table>

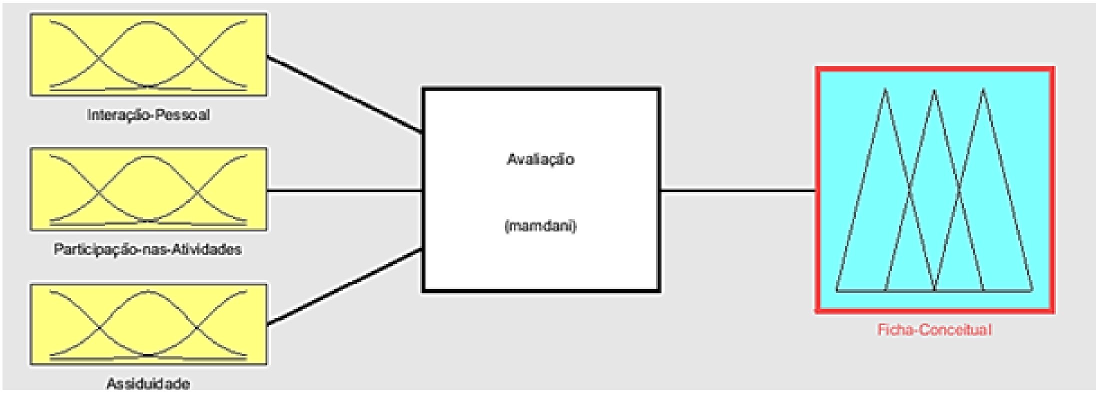
Fonte: Do autor.

Apesar de ser uma ficha avaliativa, a proposta inicial desta ferramenta não intencionava quantificar os resultados apresentados pelo educando, mas tê-los como caráter informativo e de diagnóstico para possíveis intervenções pedagógicas. No entanto, optamos em fazer uso diferente do que anteriormente era proposto por este instrumento, passando a explorá-lo como avaliação somativa, aprimorando assim a metodologia de avaliação quantitativa em sala de aula.

Para construção de nosso modelo avaliativo, primeiro realizamos o estudo teórico da Teoria de Conjuntos *Fuzzy*, mais especificamente, das relações e SBRF, conforme apresentado no Capítulo I. Na sequência, analisamos a ficha conceitual citada na Figura 4.1 e com base nela definimos as variáveis subjetivas, bem como seus termos linguísticos que irão compor o modelo matemático.

Definimos três variáveis de entrada, a saber: Interação Pessoal; Participação nas Atividades e Assiduidade. Em seguida, elencamos a variável de saída do SBRF denominada Ficha Conceitual. O esquema do SBRF que irá modelar a avaliação está representado na Figura 4.2, nele constam as três variáveis de entrada, uma de saída, a base de regras e o método de inferência de Mamdani.

Figura 4.2: Esquema do Controlador *Fuzzy* para Ficha Conceitual.



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. XX).

Para definirmos os critérios e os termos linguísticos de cada variável de entrada e saída construímos a Tabela 4.1, a qual nos auxiliará na organização, sistematização e análise dos resultados a serem obtidos com a ferramenta "*Fuzzy* Logic Toolbox^{TM}" contida no ambiente do software MatLab®, (MATHWORKS, 2019). As variáveis, sejam de entrada ou saída, são modelados por funções de pertinência (ver Figuras 4.3 a 4.6), em que o domínio de cada uma delas é representado por um intervalo de reta $[a, b] \subset [0, 10]$, uma vez que o mesmo representa a nota atribuída ao aluno, veja ilustração na Tabela 4.1.

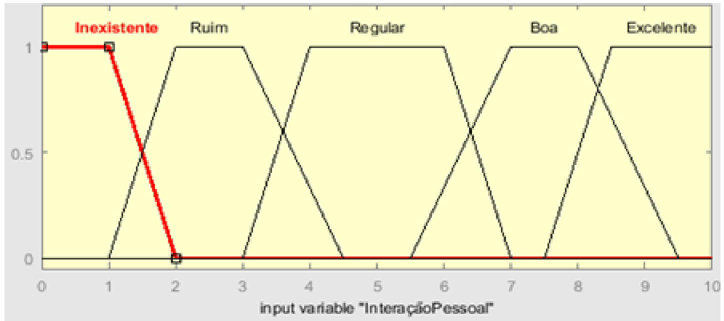
Tabela 4.1: Classificação dos termos linguísticos e seus respectivos domínios.

Interação Pessoal	**Participação nas Atividades**	**Assiduidade**	**Ficha Conceitual**
Inexistente [0,2]	Inexistente [0,2]	Baixa [0,3.5]	Insuficiente [0,3]
Ruim [1,4.5]	Ruim [1,4.5]	Média [2,8]	Razoável [2,5.5]
Regular [3,7]	Regular [3,7]	Alta [6,10]	Regular [4,7]
Boa [5.5,9.5]	Boa [5.5,9.5]		Bom [6,9]
Excelente [7.5,10]	Excelente [7.5,10]		Excelente [8,10]

(I) **Variáveis de entrada:** As funções de Pertinência das três variáveis de entrada foram organizadas e definidas com os seguintes termos linguísticos:

1. **Interação pessoal:** Inexistente; ruim; regular; boa e excelente.

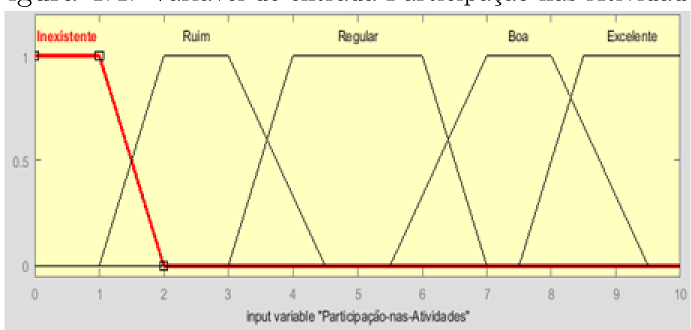
Figura 4.3: Variável de entrada Interação Pessoal.



Fonte: Do autor.

2. **Participação nas atividades:** Inexistente; ruim; regular; boa e excelente.

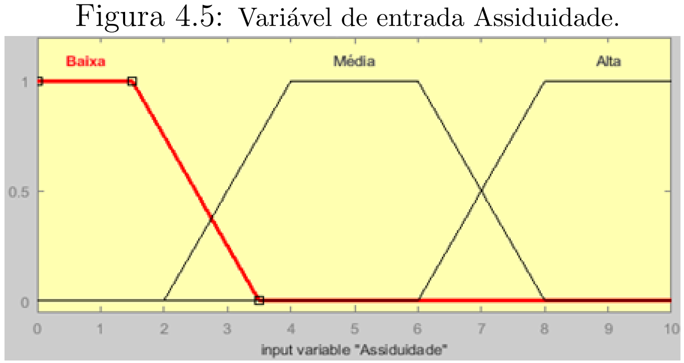
Figura 4.4: Variável de entrada Participação nas Atividades.



Fonte: Do autor.

3. **Assiduidade:** Baixa; média e alta.

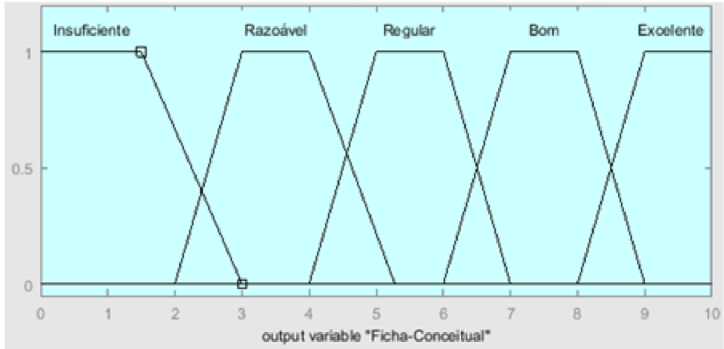
Figura 4.5: Variável de entrada Assiduidade.



Fonte: Do autor.

(II) **Variável de saída:** Definimos uma variável de saída denominada Ficha Conceitual, com os seguintes termos linguísticos: Insuficiente; razoável; regular; bom e excelente, conforme ilustração na Figura 4.6.

Figura 4.6: Variável de saída Ficha Conceitual.



Fonte: Do autor.

(III) **Avaliação:** Nesta etapa elaboramos a base de regras e definimos o método de inferência.

Base de Regras: Após estruturarmos as variáveis de entrada e saída com seus termos linguísticos, elaboramos todas as combinações possíveis dos respectivos termos linguísticos, formando assim, a base de regras organizada em 75 proposições da forma "Se.. então". Por exemplo, a regra número 12 fica da seguinte forma: "Se interação pessoal é inexistente, a participação nas atividades é boa e assiduidade é alta, então a ficha conceitual é regular."

A fim de otimizar o espaço descrevemos as 75 regras nas Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4, considerando em cada uma delas um único termo linguístico da variável de entrada "Assiduidade".

Método de Inferência: O processo de inferência propicia o cálculo da variável resposta (saída) a partir dos valores das variáveis de entrada. Isso ocorre porque os valores dos graus de pertinência das variáveis de entrada são utilizados para se obter o valor do grau de pertinência da variável resposta. Ou seja, nesta etapa final do modelo, definimos o método utilizado para defuzzificação do sistema, onde optamos pelo o método de centro de massa em que utiliza a média das áreas das figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto *fuzzy*.

Tabela 4.2: Base de Regras para quando a variável "Assiduidade" é Baixa.

Assiduidade Baixa					
Interação Pessoal	**Participação nas Atividades**				
	Inexistente	Ruim	Regular	Boa	Excelente
Inexistente	Insuficiente	Insuficiente	Insuficiente	Insuficiente	Razoável
Ruim	Insuficiente	Insuficiente	Insuficiente	Insuficiente	Razoável
Regular	Insuficiente	Insuficiente	Razoável	Razoável	Razoável
Boa	Insuficiente	Razoável	Razoável	Regular	Regular
Excelente	Razoável	Razoável	Regular	Bom	Bom

Tabela 4.3: Base de Regras para quando a variável "Assiduidade" é Média.

Assiduidade Média					
Interação Pessoal	**Participação nas Atividades**				
	Inexistente	Ruim	Regular	Boa	Excelente
Inexistente	Insuficiente	Insuficiente	Insuficiente	Razoável	Razoável
Ruim	Insuficiente	Insuficiente	Razoável	Regular	Regular
Regular	Insuficiente	Razoável	Regular	Regular	Bom
Boa	Razoável	Regular	Regular	Bom	Bom
Excelente	Razoável	Regular	Bom	Bom	Excelente

Tabela 4.4: Base de Regras para quando a variável "Assiduidade" é Alta.

Assiduidade Alta					
Interação Pessoal	**Participação nas Atividades**				
	Inexistente	Ruim	Regular	Boa	Excelente
Inexistente	Insuficiente	Razoável	Razoável	Regular	Regular
Ruim	Razoável	Razoável	Regular	Regular	Bom
Regular	Razoável	Regular	Bom	Bom	Bom
Boa	Regular	Bom	Bom	Excelente	Excelente
Excelente	Regular	Bom	Excelente	Excelente	Excelente

4.2 Simulação do SBRF para a Avaliação Conceitual

Para fazer a simulação do modelo, consideramos os dados e informações de uma turma de 2° ano do ensino médio, do qual fomos professores, na disciplina de matemática durante o período do 3° bimestre no ano de 2019.

Foram observados os seguintes critérios avaliativos para variáveis de entrada:

1. Interação pessoal: descreve como o aluno interage com os colegas, professores e demais pessoas ativas no ambiente escolar, e se coopera nos trabalhos em grupos;

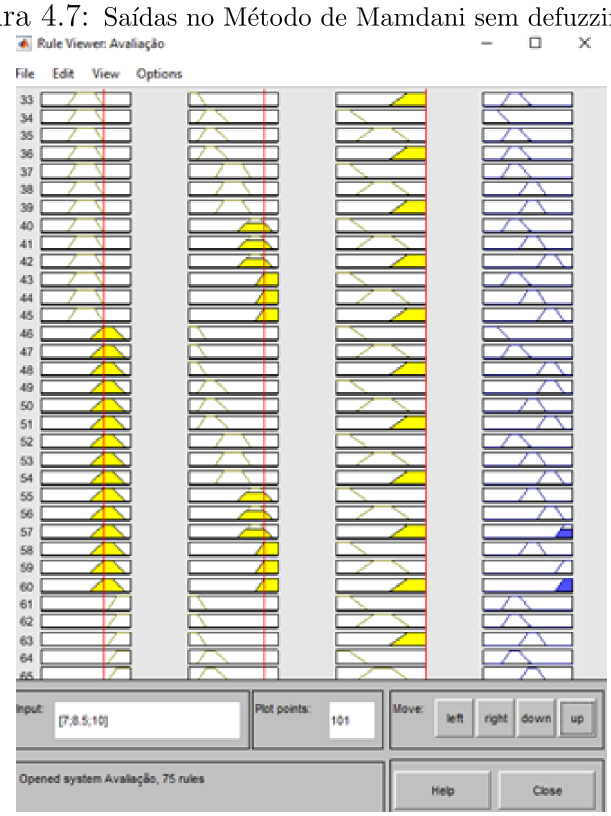
2. Participação nas atividades: descreve se o aluno se destaca realizando as atividades propostas na sala de aula e as entrega com regularidade;

3. Assiduidade: considera a frequência e a pontualidade do aluno.

A simulação do SBRF construído na Seção 4.1 foi realizada por meio da ferramenta *Fuzzy* Logic "Toolbox^{TM}" disponível no layout de programação MatLab®, (MATHWORKS, 2019).

Utilizando o Processo de Inferência de Mamdani, realizamos todas as combinações possíveis dos conjuntos *fuzzy*, ou seja, os conjuntos *fuzzy* acionados pelos valores de entrada ativam algumas regras da Base de Regras, a Figura 4.7 exemplifica algumas dessas regras acionadas:

Figura 4.7: Saídas no Método de Mamdani sem defuzzificação.



Fonte: Do autor.

Finalmente, a defuzzificação é feita por meio do Método do Centro de Massa. O papel do defuzzificador é converter cada conclusão obtida pelo método de inferência em um número real que melhor representa a ação a ser tomada, obtendo assim, os valores para a Ficha Conceitual de cada aluno.

Na Tabela 4.5 encontramos todos os valores obtidos pelo modelo do SBRF relativos aos alunos da turma de 2° ano do ensino médio, na disciplina de matemática, durante o período do 3° bimestre no ano de 2019, do qual foi aplicado o modelo. Nos mesmos quadros apresentamos as médias aritméticas da Ficha Conceitual sem a aplicação do modelo a fim de comparar os resultados.

Tabela 4.5: Conceitos obtidos pelos alunos pelo modelo *fuzzy* e pela média aritmética

Aluno	Variáveis de Entrada			L.*Fuzzy*
	Interação Pessoal	Participação nas Atividades	Assiduidade	Ficha Conceitual Conceitual *Fuzzy*
1	Excelente	Regular	Alta	Excelente 8,44
2	Boa	Regular	Alta	Bom 7,96
3	Boa	Ruim	Alta	Bom 7,5
4	Regular	Regular	Alta	Bom 7,9
5	Excelente	Excelente	Alta	Excelente 9,25
6	Boa	Regular	Alta	Bom 7,96
7	Boa	Regular	Alta	Bom 7,5
8	Boa	Excelente	Alta	Excelente 9,25
9	Excelente	Boa	Alta	Excelente 9,25
10	Boa	Ruim	Alta	Bom 7,5
11	Boa	Excelente	Alta	Excelente 9,25
12	Boa	Regular	Alta	Bom 7,96
13	Boa	Inexistente	Alta	Regular 6,5
14	Regular	Regular	Alta	Regular 6,92
15	Regular	Ruim	Alta	Regular 4,92
16	Regular	Regular	Alta	Bom 7,5
17	Regular	Ruim	Alta	Regular 6,08
18	Regular	Ruim	Alta	Regular 6,62
19	Excelente	Excelente	Alta	Excelente 9,25
20	Regular	Regular	Alta	Bom 8,28
21	Boa	Regular	Alta	Bom 7,5
22	Inexistente	Ruim	Média	Insuficiente 2,28
23	Regular	Regular	Alta	Bom 7,5
24	Excelente	Excelente	Alta	Excelente 9.25

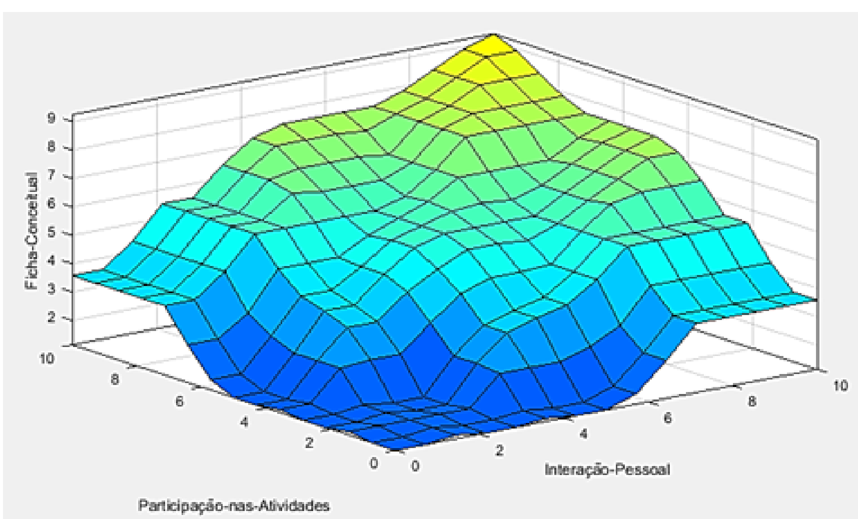
Continuação da Tabela 4.5.

Aluno	Variáveis de Entrada			L.*Fuzzy*
	Interação Pessoal	Participação nas Atividades	Assiduidade	Ficha Conceitual Conceitual *Fuzzy*
25	Boa	Boa	Alta	Excelente 9,25
26	Boa	Regular	Alta	Bom 7,5
27	Regular	Regular	Média	Regular 5,72
28	Regular	Regular	Alta	Bom 7,9
29	Regular	Boa	Alta	Bom 7,5
30	Ruim	Ruim	Média	Insuficiente 2,33

Analisando os dados da Tabela 4.5, percebemos que esse novo modelo procura de forma alternativa uma solução mais precisa no que tange a avaliação de ensino do educando, buscando mesurar não apenas conhecimentos da disciplina, mas sua formação como um todo.

O gráfico representado na Figura 4.8 mostra as relações entre duas das variáveis de entrada, no caso, participação nas atividades e interação pessoal, bem como seus valores de forma contínua.

Figura 4.8: Representação gráfica da superfície obtida entre duas variáveis de entrada.



Fonte: Do autor.

Analisando o gráfico, podemos notar pela Lógica *Fuzzy* uma elaboração de média gradativa, que procura suavizar os impactos abruptos que uma avaliação clássica apresenta. O modelo proposto mostrou-se válido, tendo em vista que a avaliação conceitual de um aluno em grande parte é desprezado pelo educador, pois esta, apresenta um caráter subjetivo, tornando na maioria das vezes inviável a sua quantificação.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos um método alternativo para avaliação conceitual, ou seja, um novo instrumento para avaliar o educando, não com olhar focado apenas no conteúdo, mas aos aspectos conceituais do aluno, considerando fatores subjetivos ao que tange o processo de aprendizagem.

Para construção do método, foi necessário o estudo teórico da Teoria de Conjuntos *Fuzzy*, a qual é uma ferramenta importante e eficaz para elaboração de um modelo alternativo de avaliação, que quantifica conceitos subjetivos à aprendizagem.

Com base no que foi discorrido até aqui, podemos dizer que este trabalho é de grande relevância para o meio escolar, já que oferece uma forma mais ampla de avaliar o aluno, procurando ser coerente com o que, de fato, este se apresenta no ambiente escolar.

Pela média aritmética, podemos dizer que a avaliação feita do aluno, muitas vezes, pode ser vista como superficial, pois acaba ignorando valores do meio que são importantes para sua formação. Já neste método, temos uma alternativa mais próxima e fiel do raciocínio humano no momento de avaliar o aluno, trazendo para análise o que o educando demonstra no dia-a-dia em sala de aula. Este aspecto pode ser determinante para o bom desempenho do estudante, já que ele passa a se preocupar não apenas em ter boas notas, mas também em dedicar-se aos fatores extras no âmbito escolar.

Neste sentido, os resultados obtidos com a pesquisa podem ser considerados satisfatórios, pois garantem a possibilidade de avaliar e até mesmo quantificar valores fundamentais ao educando. Por fim, avaliamos positivamente este trabalho, pois cumpre com um dos maiores desafios da matemática, a avaliação de aprendizagem. Com o Sistema Baseado em Regras *Fuzzy*, foi possível construir um modelo até então desconhecido no ambiente escolar que atende o desafio de avaliar o educando considerando características conceituais.

No entanto, percebemos que a forma de avaliar é peculiar de cada professor, o que torna o método passivo de mudanças. O modelo presente neste trabalho, por exemplo, pode ser melhorado, com análise, fazendo acréscimo de variáveis de entrada e termos linguísticos, adequando aos critérios avaliativos de cada professor e tornando a avaliação mais completa.

Outra possibilidade de melhoria seria a construção de um aplicativo de celular utilizando a Lógica *Fuzzy* e o modelo proposto no trabalho. Com isso, o professor poderia aplicar a avaliação conceitual durante as aulas, e não só no término do bimestre como apresentado. Desta forma, o aplicativo possibilitaria uma avaliação de forma contínua, servindo para diagnosticar e orientar o professor na organização e retificação do planejamento, buscando sanar o conteúdo em déficit.

Referências Bibliográficas

[1] BARROS, L. C. e BASSANEZI, R. C. Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. V.5 P.3-20. Campinas, (SP) 2006.

[2] BARROS, L.C. Modelos determinísticos com parâmetros subjetivos. Dissertação de Mestrado, IMECC - Unicamp, Campinas, 1992.

[3] BLOOM, B. S., HASTING, T. e MADAUS, G.. Manual de avaliação formativa e somativa do aprendizado escolar. São Paulo: Editora Pioneira, 1983.

[4] BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília : MEC, 1996.

[5] GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002, apud GAVASSI, S. L. Avaliação Formativa: um desafio aos professores das séries finais do ensino fundamental. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Medianeira, 2012.

[6] GOMIDE, F. A. C., GUDWIN, R. R. Modelagem, Controle, Sistemas e Lógica Fuzzy. SBA Controle & Automação, vol.4 n°3, 1994.

[7] HAYDT, R. C. Avaliação do processo de Ensino-Aprendizagem. 6 ed. São Paulo: Editora Ática, 2008.

[8] LIBÂNEO, J. C. Avaliação Escolar. In . Didática: Coleção Magistério 2° grau. Série Formação do Professor. São Paulo, Cortes, 1994.

[9] LUCKESI, C. C. Avaliação da Aprendizagem Escolar: estudos e proposições. 17 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

[10] MASSUCATO, M. e MAYRINK, E. D. A importância da avaliação diagnóstica inicial. 2015. Disponível em: https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1486/a-importancia-da-avaliacao-diagnostica-inicial. Acesso em: 03/10/2019.

[11] MATHWORKS. Fuzzy Logic Toolbox for MATLAB/Simulink®. 2019. Disponível em: $https://www.mathworks.com/products/fuzzy-logic.html$. Acesso em: 09/12/2019.

[12] MICHAELIS. Moderno Dicionário da Língua Portuguesa. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/. Acesso em: 03/10/2019.

[13] MISSIO, M. Modelos de EDP integrados à lógica fuzzy e métodos probabilísticos no tratamento de incertezas: uma aplicação à febre aftosa em bovinos. Tese de Doutorado. IMECC/Unicamp. Campinas, 2008.

[14] ORTEGA, N.R.S. Aplicação da teoria de conjuntos fuzzy a problemas da biomedicina. Tese de Doutorado. Instituto de Física-USP. São Paulo, 2001.

[15] FREITAS, S. L. e COSTA, M. G. N. da.; MIRANDA, F. A. de. Avaliação Educacional: formas de uso na prática pedagógica. Meta: Avaliação. Rio de Janeiro, v. 6, n. 16, p. 85-98, jan./abr. 2014.

[16] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. Information And Control. (8):338-353, 1965.