

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Giovani Batista Ribas

Aplicações de Grafos no Ensino Médio

Ouro Preto, Brasil

2019

Giovani Batista Ribas

Aplicações de Grafos no Ensino Médio

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira

Ouro Preto, Brasil

2019

R351a Ribas, Giovani Batista.
Aplicações de grafos no ensino médio [manuscrito] / Giovani Batista Ribas.
- 2019.
89f.: il.: color; grafs; mapas.

Orientador: Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. Teoria dos grafos. 2. Análise combinatória. 3. Ensino. I. Oliveira, Edney Augusto Jesus de . II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 519.1



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

Aplicações de Grafos no Ensino Médio

Autor(a): Giovani Batista Ribas

Dissertação defendida e aprovada em **20 de dezembro de 2019** pela banca examinadora constituída pelos professores:

Edney Augusto Jesus de Oliveira

Professor(a) Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira - Orientador
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Gheyza F. da Silva

Professor(a) Dra. Gheyza Ferreira da Silva
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

Thiago Morais Pinto

Professor(a) Dr. Thiago Morais Pinto
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Ao meu pai, Alair Toledo Ribas (in memoriam), que mesmo não estando mais presente fisicamente, vive em minhas lembranças, sobretudo, por amar e lutar pelos seus filhos. Registro neste trabalho: - Grato por tudo, Pai! Saiba, que seu amor e esforços foram e são base pra eu ser quem sou, além de serem o maior incentivo para esta e outras conquistas em minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me abençoar durante este período de formação, sendo a Paz e a Luz indispensáveis em todos os momentos. E à Virgem Maria, por me acolher diversas vezes nas Igrejas do Pilar e de Lourdes em Ouro Preto, ou na do Carmo em Mariana.

À minha mãe, Virgínia Gonçalves Ribas, por todo apoio e carinho, além da paciência em vista dos momentos em que eu não podia estar presente.

À minha madrinha, Maria da Conceição Martins, pelos vários terços que todos os dias rezou por mim, especialmente nas vésperas de provas.

Aos meus primos, amigos e irmãos Elias de Assis Carvalho e Fabiana Paula Fernandes, pelas várias noites e dias de acolhida, dispondo, até mesmo, as chaves da própria casa durante todo este período.

À Dona Elizabeth de Oliveira Lopes e Thatiane de Oliveira Lopes, que por várias vezes dispuseram um confortável cantinho pra eu dormir, com lanches e jantares veganos deliciosos.

Ao professor Edney Augusto Jesus de Oliveira, pelo exemplo de docência, além do zelo, empenho e paciência comigo e para a orientação deste trabalho.

Aos professores Geraldo César Gonçalves Ferreira, Gil Fidelix de Souza, Luiz Gustavo Carneiro, Marcos Roberto Marcial, Monique Rafaella Anunciação de Oliveira, Rodrigo Geraldo Couto, Sebastião Xavier e Thiago Santos, pelo grande diferencial em minha formação.

Aos colegas de curso, por dividirem seus conhecimentos durante estes anos de esforços.

Aos meus colegas de trabalho e alunos, por apoiarem e torcerem por este trabalho.

Aos meus familiares e amigos que rezaram para o êxito deste projeto.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho tem como foco central a utilização de grafos no ensino-aprendizado, mais especificamente no ensino médio. Para tal, é feita uma investigação sucinta sobre a Teoria de Grafos contendo um breve apanhado histórico seguido de um aporte teórico introdutório. Além disso, é apresentada uma correlação entre grafos e tópicos de análise combinatória. Por fim, são sugeridas três atividades práticas para exemplificar o seu uso, sendo a primeira atividade um plano de estudos de análise combinatória utilizando os grafos como facilitadores visuais. As outras duas atividades, de aspecto mais prático, apresentam uma forma mais efetiva de atrair a participação dos alunos para o estudo desta teoria.

Palavras-chave: Teoria de Grafos. Análise Combinatória. Triângulo de Pascal. Ensino.

Abstract

This work focuses on the use of graphs in teaching and learning, more specific in high school. For this, a brief investigation on the theory of graphs is made containing a brief historic followed by a theoretical summary. In addition, it is a correlation between graphs and combinatorial analysis topics. Finally, three practical activities are suggested to exemplify their use, the first activity being a combinatorial analysis study plan, using the graphs as visual facilitators. The other two activities, the more practical aspect, presents a more effective way of displaying student participation for the study of this theory.

Keywords: Graph Theory. Combinatorial Analysis. Pascal's Triangle. Education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Leonhard Euler.	21
Figura 2 – Capa do artigo de Euler de 1741.	22
Figura 3 – Diagrama das pontes de Königsberg.	23
Figura 4 – Mapa das pontes de Königsberg por Euler.	23
Figura 5 – Grafo das pontes de Königsberg.	24
Figura 6 – Árvore Genealógica, de meados do século XII, da Dinastia dos Saxões.	25
Figura 7 – Manuscrito do século XIII de Speculum Virginum - árvores de “Virtudes” e “Vícios”.	25
Figura 8 – Exemplo de Grafos Simples.	28
Figura 9 – Exemplo de Multigrafo.	28
Figura 10 – Exemplo de Dígrafo Simples.	29
Figura 11 – Exemplo de Multidígrafo.	29
Figura 12 – Exemplo de Caminho.	31
Figura 13 – Exemplo - Ciclo.	31
Figura 14 – 1º Exemplo de Trajeto.	31
Figura 15 – 2º Exemplo de Trajeto.	32
Figura 16 – 3º Exemplo de Trajeto.	32
Figura 17 – Exemplo de Circuito.	32
Figura 18 – Exemplo de Passeio.	33
Figura 19 – K_6 , um exemplo de grafo 5-regular.	33
Figura 20 – Exemplo de grafo conexo.	34
Figura 21 – 1º Exemplo de grafo com duas componentes conexas: 1-2-3-4 e 5-6.	34
Figura 22 – 2º Exemplo de grafo com duas componentes conexas: 1-2-3-4 e 6.	35
Figura 23 – 1º Exemplo de grafo complementares.	36
Figura 24 – 2º Exemplo de grafo complementares.	36
Figura 25 – Base de um grafo.	37
Figura 26 – Grafo do Princípio Aditivo.	39
Figura 27 – Exemplo de Grafo para o Princípio Multiplicativo.	40
Figura 28 – Exemplo de Grafo para o Arranjo Simples.	41
Figura 29 – Exemplo de Grafo para a Permutação Simples.	42
Figura 30 – Exemplo de Grafo para a Combinação Simples.	42
Figura 31 – Triângulo de Pascal.	45
Figura 32 – Ilustração da Regra de Stifel.	46
Figura 33 – Exemplo da relação de grafos com a Regra de Stifel do Triângulo de Pascal.	47

Figura 34 – Combinações Complementares.	48
Figura 35 – Soma dos elementos da linha 3 no Triângulo de Pascal.	48
Figura 36 – Soma de elementos de uma coluna no Triângulo de Pascal.	49
Figura 37 – Diagonal principal no Triângulo de Pascal.	50
Figura 38 – Diagonais secundárias no Triângulo de Pascal.	51
Figura 39 – Grafo - Exercício 1 - 1ª Lista	59
Figura 40 – Grafo - Exercício 2 - 1ª Lista	60
Figura 41 – Grafo - Exercício 3a) - 1ª Lista	60
Figura 42 – Grafo - Exercício 3b) - 1ª Lista	61
Figura 43 – Grafo - Exercício 3c) - 1ª Lista	61
Figura 44 – Grafo - Exercício 3d) - 1ª Lista	62
Figura 45 – Grafo - Exercício 1a) e b)- 2ª Lista	63
Figura 46 – Grafo - Exercício 1c) - 2ª Lista	64
Figura 47 – Grafo - Exercício 2a) e b)- 2ª Lista	64
Figura 48 – Grafo - Exercício 2c) - 2ª Lista	65
Figura 49 – Grafo - Exercício 2d) - 2ª Lista	65
Figura 50 – Grafo - Exercício 2e) e f) - 2ª Lista	65
Figura 51 – Grafo - Exercício 2g) - 2ª Lista	66
Figura 52 – Grafo - Exercício 2h) - 2ª Lista	66
Figura 53 – Grafo - Exercício 2i) - 2ª Lista	67
Figura 54 – Exercício 3c) da 1ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos	68
Figura 55 – Exercício 3d) da 1ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos	68
Figura 56 – Exercício 2b) da 2ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos	69
Figura 57 – Exercício 2d) e e) da 2ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos	69
Figura 58 – Exercício 2i) da 2ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos	70
Figura 59 – Plantas e Grafos de representação do campo visual de câmeras de segurança na escola	73
Figura 60 – Plantas e Grafos de representação do campo visual de câmeras de segurança na escola	74
Figura 61 – Grafos de representação do campo visual de câmeras de segurança na escola	75
Figura 62 – Representação de rotas (a pé) entre a escola (vértice E) e o ponto de ônibus (vértice O)	76
Figura 63 – Apresentação sobre a Teoria de Grafos por alunos da escola.	79

Figura 64 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola	80
Figura 65 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola	81
Figura 66 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola	82
Figura 67 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola	83
Figura 68 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola	84
Figura 69 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola	85
Figura 70 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola	86
Figura 71 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola	87

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	O SURGIMENTO DA TEORIA DE GRAFOS NA HISTÓRIA	21
2.1	A Gênese da Teoria de Grafos	21
2.2	Diagramas similares a grafos em outros períodos da história	24
3	ESTUDO SUCINTO SOBRE GRAFOS	27
3.1	Conceitos Básicos	27
3.1.1	Grafos orientados e não orientados	27
3.1.2	Conceitos métricos	30
3.1.3	Grafos particulares e definições	31
3.1.4	Árvores e florestas	37
3.2	Princípios Fundamentais de Contagem e Grafos	39
3.3	Regras no Triângulo de Pascal	44
4	APLICAÇÃO DE GRAFOS NO ENSINO-APRENDIZADO	53
4.1	Motivação	53
4.2	Utilizando grafo no ensino de análise combinatória	55
4.2.1	Plano de Ensino	56
4.3	Entendendo as câmeras de segurança na escola	68
4.4	Caminhos entre a escola e o ponto de ônibus principal mais próximo	71
5	CONCLUSÃO	77
A	BANNER DA FEIRA DE CIÊNCIAS	79
	REFERÊNCIAS	89

1 Introdução

A Teoria dos Grafos teve a sua formalização em meados do século XVIII a partir da resolução pelo matemático suíço Leonhard Euler do problema das sete pontes de Königsberg, que é observada de forma sucinta no capítulo 2 deste trabalho. Este feito foi essencial para as futuras aplicabilidades de grafos como diagramas correlacionando elementos de um dado conjunto como, por exemplo, em redes (de transporte, de comunicação, de distribuição, dentre outras) e estruturas (da genética, da química, da geografia, da matemática, da programação computacional, etc.).

Neste trabalho são estudados pontos específicos da Teoria de Grafos e apresentadas formas de empregá-los no ensino-aprendizado. Uma das formas trata-se da sua utilização como metodologia de ensino-aprendizado de princípios fundamentais da contagem. Mais especificamente será vista a utilização de grafo-árvore como ferramenta para facilitação da contagem de agrupamentos obtidos por arranjos, combinação e permutação simples em problemas básicos de Análise Combinatória.

Sendo a Análise Combinatória observada como um conjunto de estratégias para: analisar, organizar, combinar e contar diversas formas de agrupamentos com um número finito de elementos, seu ensino trata de tornar suas funcionalidades aplicáveis em situações reais. Dentre elas se destacam: logística de transporte, logística administrativa, probabilidades genéticas, e outras mais. Intuito endossado pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) do Ensino Médio como segue:

É preciso que o aluno perceba a matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. (BRASIL, 2000, pág. 40)

Porém, em anos de experiência em docência do autor, lecionando tópicos básicos de análise combinatória em uma escola pública estadual em Viçosa-MG, fora possível perceber a tendência do aluno em memorizar mecanicamente fórmulas levando-o a superficialidade no aprendizado neste conteúdo. Um dos fatores que colabora para essa tendência é a forma como é feita a abordagem das fórmulas combinatórias em livros didáticos, não primando pela construção mas, com uma considerável frequência, simplesmente pela apresentação delas. Além disso, em muitos dos livros os conteúdos de ensino são divididos por sessões, ficando evidente nos exercícios de cada sessão o raciocínio (que se trata, muitas vezes da mera utilização de fórmula) para abordá-los. Explanando sobre esse ensino de combinatória, os PCN's exortam quanto a utilização superficial de fórmulas:

A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar

números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2006a, pág. 126)

Explicita-se, ainda, na citação anterior “a construção de um modelo simplificado e explicativo(...)” em vista de organizar as informações para a contagem simples, bem como para casos mais gerais. O que é proposto neste trabalho, ao apresentar, escolhendo dentre diversas de suas aplicações, a utilização de grafos para facilitar a visualização de problemas em análise combinatória. Isto é: utiliza-se grafos como uma forma de contagem intuitiva para resolução de problemas de combinatória buscando estabelecer uma base teórica que facilite o entendimento de situações mais gerais, e conduza, assim, a reflexões e argumentações mais abstratas.

Encontrou-se incentivo à busca de uma nova metodologia em discussões como as do estudo de Xavier e Nunes (XAVIER; NUNES, 2015, pág. 74), de onde se pode inferir quanto a expectativa de que estudantes com faixa etária entre 15 e 17 alcançariam determinado estágio cognitivo, “. . . no entanto, nem todos os adolescentes atingiriam o período operatório formal e a capacidade de abstração. . .”. Consequência, segundo as autoras, da “. . . falta de elementos responsáveis pelo desenvolvimento. . .”. Objetiva-se, então, entender e atender as diferenças de cada adolescente em seu processo de desenvolvimento cognitivo, primando pela construção de raciocínios abstratos através de ferramentas que simbolizam bases concretas para eles.

Mostra-se, então, na seção 4.3 como etapa da metodologia citada, o relato sobre a resolução em sala de aula de duas listas de exercícios por grupos discentes.

Em outro âmbito, é aqui apresentado, também, um trabalho elaborado por estudantes (com a supervisão do autor desta dissertação) para uma “feira do conhecimento” nessa escola focando em aplicações práticas da teoria. Ambas ações observam sugestões da Secretaria de Educação Básica e do Ministério da Educação como se vê a seguir:

Hoje, as feiras de ciências são conhecidas como uma atividade pedagógica e cultural com elevado potencial motivador do ensino e da prática científica no ambiente escolar. Tanto para alunos e professores, quanto para a comunidade em geral, as feiras vêm constituindo uma oportunidade de aprendizagem e de entendimento sobre as etapas de construção do conhecimento científico. (BRASIL, 2006b)

Nesse trabalho para feira, elementos específicos da Teoria de Grafos são utilizados com o intuito de verificar a abrangência do campo visual de câmeras de segurança da escola e de mapear caminhos entre essa escola e o ponto de ônibus principal da região onde ela se encontra.

Por fim, constata-se que a Teoria de Grafos é uma ferramenta facilitadora para o ensino-aprendizado, em especial, auxiliando na consolidação de conceitos básicos de análise combinatória.

Esta dissertação está dividida em 5 capítulos, sendo o primeiro esta introdução. O segundo e terceiro, capítulos que apresentam uma breve introdução aos conceitos e resultados básicos da Teoria de Grafos, trazendo um pouco de sua história, as suas principais definições, e como ela pode ser relacionada com análise combinatória.

O último e mais importante capítulo descreve as três atividades de ensino que utilizam os grafos como facilitadores e motivadores no processo de ensino-aprendizado. Por fim, o capítulo 5, apresenta as conclusões e considerações finais obtidas ao longo da construção desta dissertação.

2 O surgimento da Teoria de Grafos na história

Este capítulo tem o objetivo de apresentar informalmente traços da história da Teoria de Grafos.

2.1 A Gênese da Teoria de Grafos

Considera-se que a Teoria de Grafos possui sua gênese no século XVIII tendo como seu precursor Leonhard Euler (1707-1783), um importante matemático e físico daquele século.

Figura 1 – Leonhard Euler.



Leonh. Euler

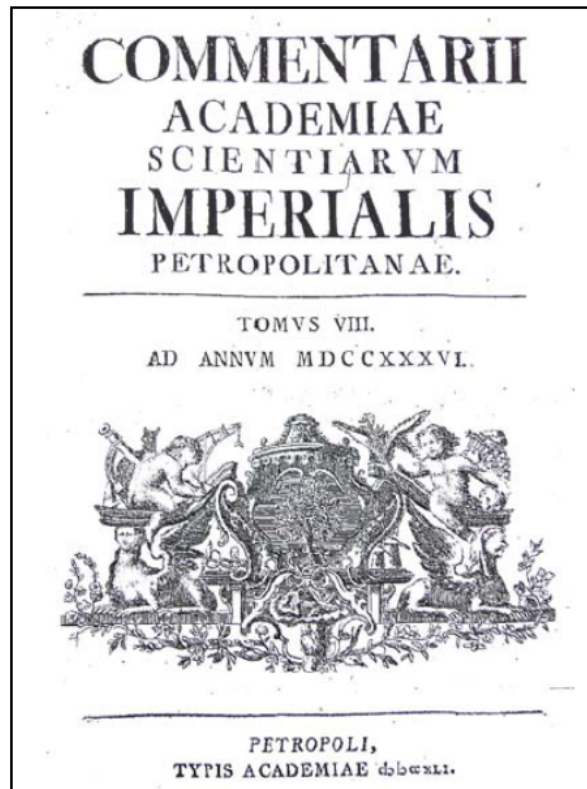
Fonte: <https://sites.unicentro.br/wp/petfisica/2016/06/30/leonhard-euler-1707-1783//>.

Este fato ocorre em vista de sua publicação “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*” de 1741 (cuja capa é vista na Figura 2) em que ele traz a resolução do “enigma das pontes de Königsberg”.

O enigma foi proposto quanto a uma situação na cidade de Königsberg no antigo império da Prússia (atual Kaliningrado, município russo). Conforme se vê na Figura 3, o rio da cidade forma duas ilhas ao longo do seu percurso, subdividindo-a em quatro regiões. Havia, naquela época, sete pontes de interligação dessas regiões. Buscava-se, então, verificar a possibilidade de si sair de um dos quatro territórios terrestres citados, perpassar por todas as pontes e retornar ao mesmo ponto.

Euler simplificou a visualização através do mapa (conforme Figura 3) ao restringir a observação somente às quatro regiões de margens distintas e às sete pontes.

Figura 2 – Capa do artigo de Euler de 1741.



Fonte: (SANTOS; MOTA, 2010, pág. 12)

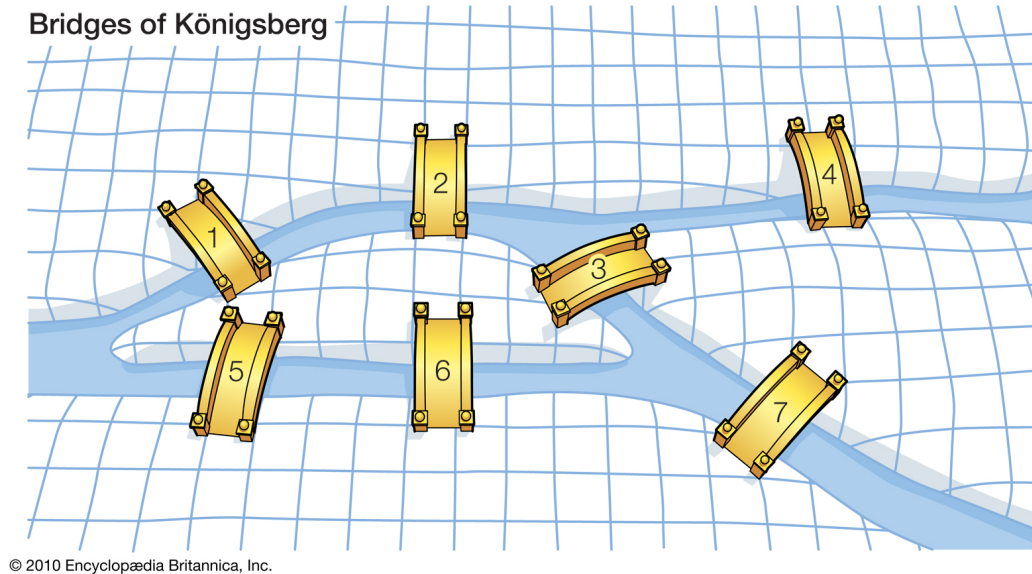
Sua solução pontua que para se verificar a situação buscada seria necessário percorrer cada extremidade de cada ponte uma única vez. Sendo assim, cada margem contendo uma extremidade como chegada de uma ponte que a intersecta, deve conter uma extremidade de outra ponte como saída. Dessa forma, o número de extremidades que intersectam as margens deve ser par. Porém, isto não ocorre na situação enunciada, conforme fica mais evidente no esquema (Grafo) da Figura 5. Considerando, neste esquema, os círculos *A*, *B*, *C* e *D* como as regiões terrestres e as linhas como as pontes, por contagem se evidencia um número ímpar de extremidades de pontes em cada região. À saber, 3 para *B*, 3 para *C*, 3 para *D* e 5 para *A*, indicando não ser possível encontrar uma rota por essas pontes como se buscava.

Após a publicação de Euler, considera-se que problemas análogos ao de Königsberg passam a ser facilitados por grafos para suas resoluções.

Outro problema típico da utilização de grafos na história, trata-se do *Problema do Caixeiro Viajante*. Isto é, a busca pelo caminho mais vantajoso em vista de percorrer várias cidades (visitando cada uma, uma única vez) e retornando ao ponto inicial. Situação muito comum atualmente na logística de redes de entrega.

É importante perceber que as situações-problema relacionadas ao Problema do

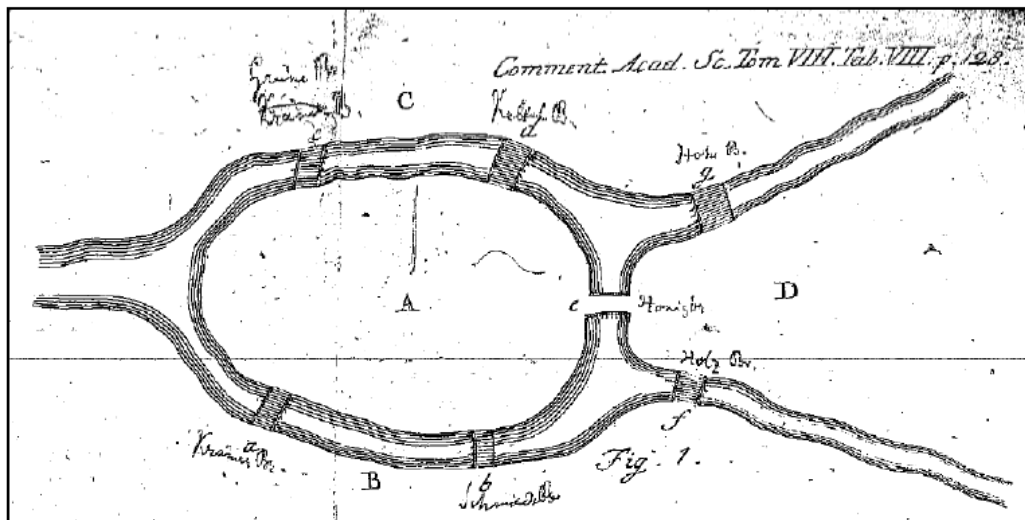
Figura 3 – Diagrama das pontes de Königsberg.



© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

Fonte: <https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem>.

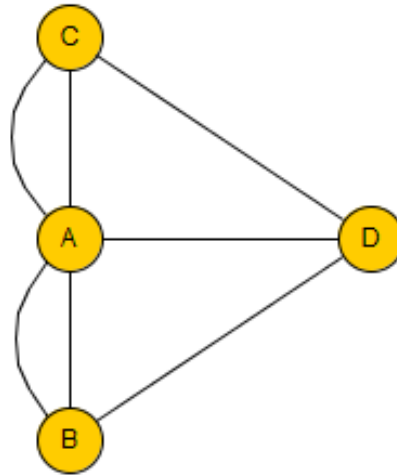
Figura 4 – Mapa das pontes de Königsberg por Euler.



Fonte: (SANTOS; MOTA, 2010, pág. 13)

Caixeiro Viajante são, em geral, de simples solução matemática, uma vez que basta escolher a melhor dentre todas as possibilidades. No entanto tal solução só é viável para um número pequeno de cidades a serem visitadas, tendo em vista que o número de possíveis caminhos é de ordem fatorial, e para números elevados a solução se torna inviável do ponto de vista computacional. Como exemplo, havendo cinco cidades a serem visitadas, com estradas que interligam todas uma a uma, o número de possibilidades de se sair e retornar a uma delas é dado por $4! = 24$, enquanto que para quarenta cidades o número de possibilidades possui 47 algarismos!

Figura 5 – Grafo das pontes de Königsberg.



Fonte: o autor.

2.2 Diagramas similares a grafos em outros períodos da história

Muito embora considera-se sua abordagem teórica mais formal com gênese em escritos do século *XVIII*, Belmira Mota ([SANTOS; MOTA, 2010](#)) observa, de tempos mais remotos, representações esquemáticas alusivas aos atuais grafos, conforme ilustram as Figuras 6 e 7 trazidas neste texto a título de curiosidade.

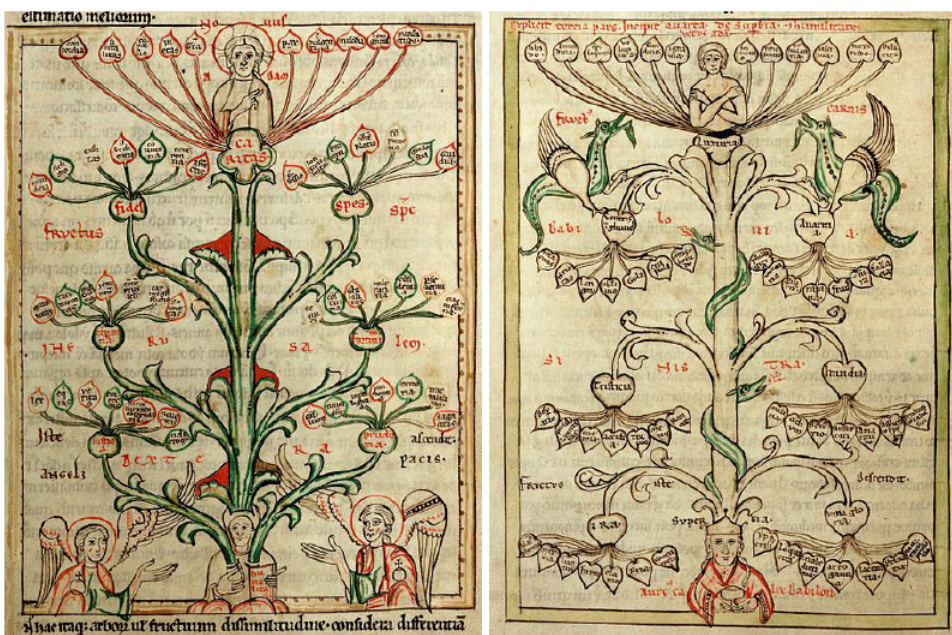
Observa-se, enfim, já há um tempo considerável, a utilização de grafos para representação de redes de diversos gêneros, facilitando e simplificando resolução de situações-problemas nas mesmas.

Figura 6 – Árvore Genealógica, de meados do século XII, da Dinastia dos Saxões.



Fonte: (SANTOS; MOTA, 2010, pág. 5)

Figura 7 – Manuscrito do século XIII de Speculum Virginum - árvores de “Virtudes” e “Vícios”.



Fonte: (SANTOS; MOTA, 2010, pág. 5)

3 Estudo sucinto sobre Grafos

Este capítulo tem o intuito de explicar de forma sucinta conceitos básicos da teoria de grafos, em vista de facilitar o entendimento de suas aplicações neste trabalho.

3.1 Conceitos Básicos

Inicialmente é importante observar que:

Muitos problemas do mundo real podem descrever-se (definir-se) na linguagem de “grafos” - ou seja, por intermédio de um figura que consiste num conjunto de pontos e um conjunto de linhas que ligam alguns pares de pontos. (CARDOSO; SZYMANSKI; ROSTAMI, 2009, pág. 329)

Dada sua vasta utilização, não existe uma unicidade para a designação de terminologias, notações e significados referentes aos elementos relacionados a grafos, e tal fato pode ser observado por exemplo nas principais referências bibliográficas utilizadas neste trabalho: (CARDOSO; SZYMANSKI; ROSTAMI, 2009) e (NETTO, 2012). Porém, em vista de auxiliar no estudo desta teoria no texto que se segue, serão admitidas algumas designações como as de vértices e arestas (arcos) para os pontos e linhas citados anteriormente.

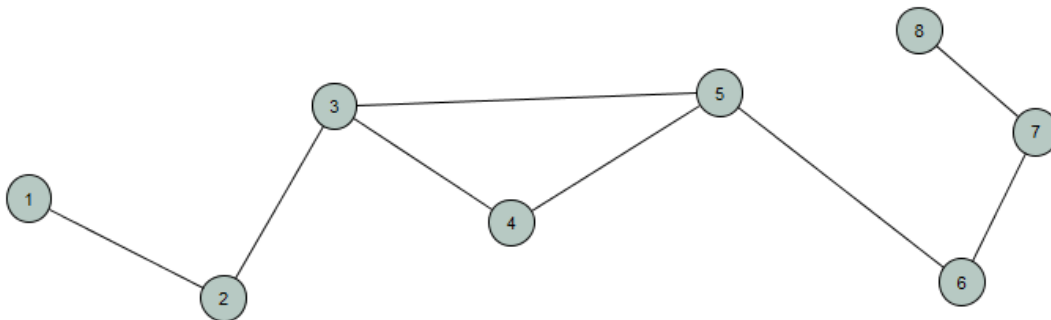
3.1.1 Grafos orientados e não orientados

Sendo V um conjunto qualquer e $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não ordenados dos elementos de V , dada ψ uma função que relaciona elementos de V cujos pares relacionados formam um conjunto $A \subseteq V^{(2)}$, designa-se por **grafo não orientado** (denotando-o por G) à associação da terna (V, A, ψ) , na qual denomina-se V como um conjunto de **vértices**, A como um conjunto de **arestas** e ψ como a **função de incidência**. Ordenando o(s) par(es) advindo(s) da função de incidência, tem-se um **grafo ordenado** ou **dígrafo** cuja associação torna-se: de \vec{G} à terna (V, A, ψ) , com A sendo designado agora como conjunto de **arcos**. É comum simplificar as associações citadas anteriormente com a simbologia $G=(V, A, \psi)$ e $\vec{G}=(V, A, \psi)$

Diz-se que uma aresta é incidente a seus vértices extremais, e que estes são adjacentes. Neste texto o vértice é denotado por v para casos gerais, ou v_j cujo índice especifica seu rótulo posicional (em que os vértices estão ordenados em um conjunto pelo índice j). Já a aresta é denotada por a para casos gerais, a_j para diferenciar j arestas, ou ainda $a_{i,j}$ nos quais os índices indicam seus vértices extremais. A uma aresta cujos extremos coincidem em um só vértice denomina-se **laço**. Já arestas distintas cujos vértices extremais coincidem são chamadas **arestas paralelas**.

Denomina-se por **grafo simples** a um grafo sem arestas paralelas e sem laços. Neste caso é possível associá-lo apenas ao conjunto de seus vértices V e o de suas arestas A : $G=(\mathbf{V}, \mathbf{A})$ ou $\vec{G}=(\mathbf{V}, \mathbf{A})$. É importante frisar que a notação de um grafo, assim como de um dígrafo, pode ser indicada simplesmente por G quando se tem clareza de seu conjunto de vértices, do de arestas e da função de incidência. Designa-se, ainda, por multigrafo ao grafo que possui laços e/ou arestas paralelas.

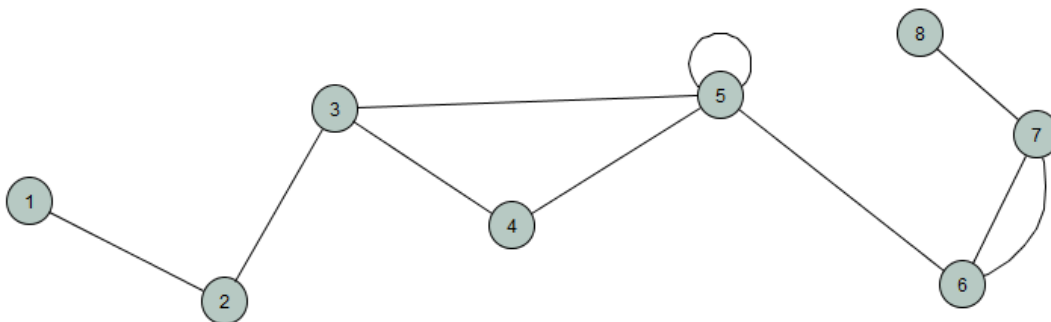
Figura 8 – Exemplo de Grafos Simples.



Fonte: o autor.

A Figura 8 apresenta um exemplo de grafo simples.

Figura 9 – Exemplo de Multigrafo.



Fonte: o autor.

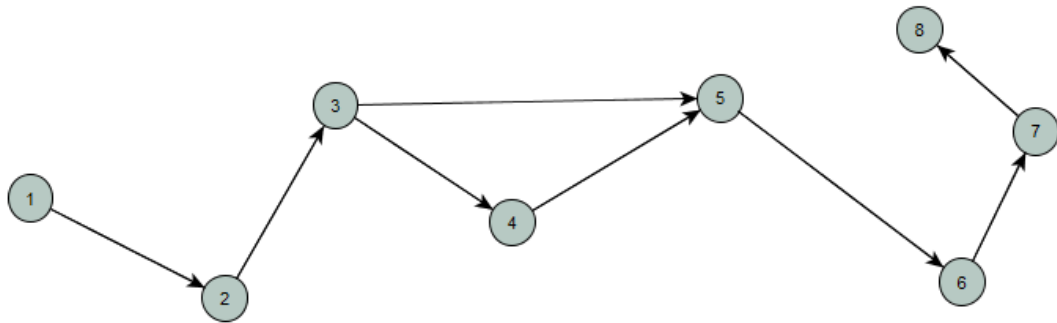
Observa-se na Figura 9 que no vértice 5 há um laço, enquanto que 6 e 7 são ligados por arestas paralelas.

A Figura 10 exibe um dígrafo simples, pois por exemplo a aresta que une os vértices 1 e 2 possui orientação específica, a saber: partindo de 1 e chegando em 2.

Tem-se na Figura 11 um laço no vértice 5 e duas arestas paralelas que incidem nos vértices 6 e 7, caracterizando assim um multidígrafo.

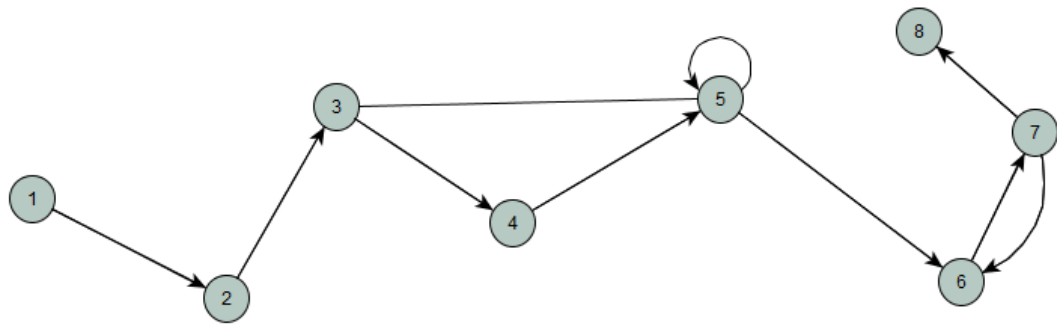
Designa-se por **ordem** e **dimensão** de um grafo G , respectivamente, seus números de vértices $|V|$ e arestas $|A|$, denotados por ν_G e α_G (ou simplesmente ν e α no caso de clareza do grafo para o qual se referem). Define-se, também, como grau (ou valência)

Figura 10 – Exemplo de Dígrafo Simples.



Fonte: o autor.

Figura 11 – Exemplo de Multidígrafo.



Fonte: o autor.

de um vértice v deste grafo ao número de arestas incidentes a ele (denotado por d_v), considerando-se dupla a incidência de um laço. Denota-se, ainda, para o maior grau dentre os vértices de G : Δ , e para o menor: δ . Já para um dígrafo \vec{G} assume-se os semi-graus, sendo d_v^+ o *semi-grau de saída* (definido como o número de arestas orientadas que saem do vértice v) e d_v^- o *semi-grau de entrada* (definido como o número de arestas orientadas que chegam no vértice v) de um vértice v deste dígrafo, obtendo-se o grau de v por: $d_v = d_v^- + d_v^+$.

Em um dígrafo chama-se **fonte** um vértice v cujo $d_v^- = 0$, e **sumidouro** um vértice v que $d_v^+ = 0$.

Um grafo é dito **vazio** se $\nu = 0$ (podendo ser denotado por G_0), **trivial** se $\nu = 1$, e **finito** se $\alpha < \infty$ e $\nu < \infty$. Neste trabalho ao se designar G por um grafo, fica implícito ser ele finito.

Define-se a igualdade de dois grafos quando há as respectivas igualdades entre seus conjuntos de vértices, de arestas, bem como entre suas funções de incidência.

Teorema 1 (Grau e dimensão em um grafo). *A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro de sua dimensão.*

Demonstração. A prova será por indução sobre a dimensão de um grafo G . Inicialmente, note que o resultado é imediato para o caso $\alpha_G = 0$.

Supondo, por hipótese de indução, que o resultado seja válido para $\alpha_G = k$, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{\nu} d_{v_j} = 2k.$$

Considerando $G=(V, A)$ um grafo de dimensão $\alpha_G = k + 1$. Seja $a_{i,j}$ uma aresta de G , e definindo $G'=(V, A \setminus \{a_{i,j}\})$. Claramente tem-se que a dimensão de G' é $\alpha_{G'} = k$ e além disto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu_G} d_{v_j} &= d_{v_1} + d_{v_2} + \dots + d_{v_i} + \dots + d_{v_j} + \dots + d_{v_{\nu_G}} \\ &= d_{v'_1} + d_{v'_2} + \dots + (d_{v'_i} + 1) + \dots + (d_{v'_j} + 1) + \dots + d_{v'_{\nu_{G'}}} \\ &= \left(d_{v'_1} + d_{v'_2} + \dots + d_{v'_i} + \dots + d_{v'_j} + \dots + d_{v'_{\nu_{G'}}} \right) + 2 \\ &= \sum_{j=1}^{\nu_{G'}} d_{v'_j} + 2 = 2\alpha_{G'} + 2 = 2(\alpha_{G'} + 1) \\ &= 2\alpha_G. \end{aligned}$$

Observa-se que a antepenúltima igualdade ocorre em vista da hipótese de indução. Logo verifica-se o enunciado. \square

3.1.2 Conceitos métricos

Dado um grafo G , com $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ e $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$, uma sequência $P=v_0a_1v_1a_2\dots a_kv_k$ é designada como um **passaio** de v_0 a v_k . Caso nesta sequência todas as arestas sejam distintas, este passeio é designado por um **trajeto**; e se, além disto, todos os vértices sejam distintos, é denominado **caminho**.

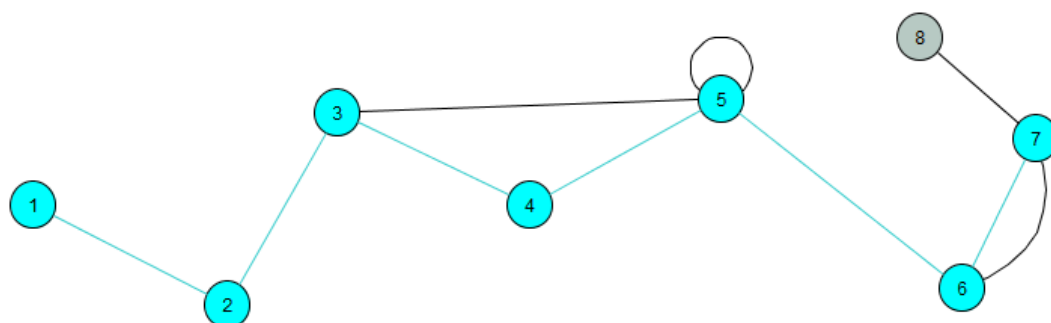
Um trajeto nos quais os vértices extremos coincidem é chamado **trajeto fechado** ou **circuito**. Define-se analogamente um **caminho fechado**, que é também nomeado por **ciclo**.

Para exemplificar estes conceitos vê-se, coloridos em azul, na Figura 12 o caminho (1-2-3-4-5-6-7), na Figura 13 o ciclo (3-4-5-3). Nas Figuras 14 a 16 tem-se, respectivamente os trajetos que não são caminhos: (1-2-3-4-5-5-6), (1-2-3-4-5-3) e (1-2-3-4-5-6-7-6). Já na Figura 17 vê-se o circuito (3-4-5-5-3) e na 18 o passeio (1-2-3-5-4-3-5-6).

O **comprimento** de uma sequência P , trata-se do número de arestas entre os vértices extremos, e é denotado por ℓ_P . Sendo P um caminho, ℓ_P coincide com seu número de arestas. É importante observar, no caso de P não ser um trajeto, que para obter esse número, algumas arestas são contadas repetidamente.

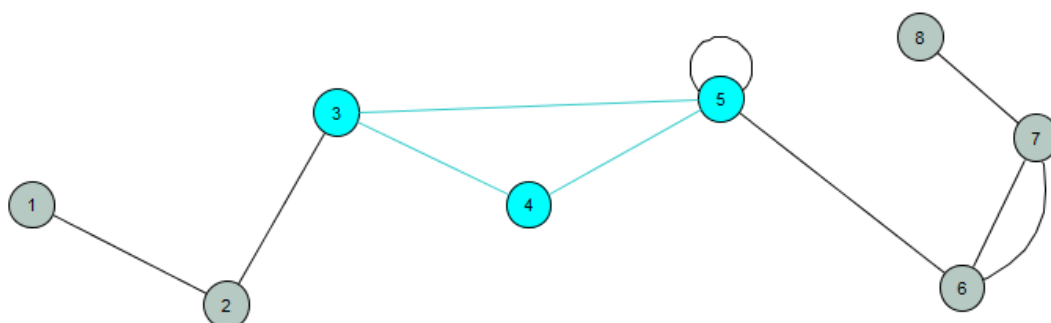
A **distância** entre dois vértices de G é definida como o número de arestas do menor caminho ligando esses vértices.

Figura 12 – Exemplo de Caminho.



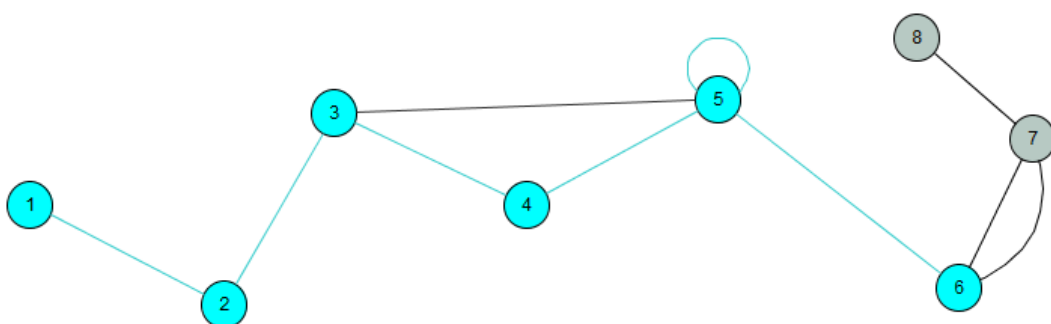
Fonte: o autor.

Figura 13 – Exemplo - Ciclo.



Fonte: o autor.

Figura 14 – 1º Exemplo de Trajeto.

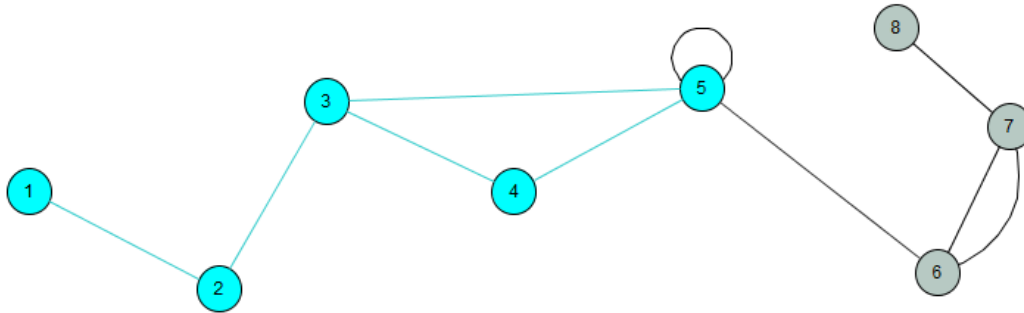


Fonte: o autor.

3.1.3 Grafos particulares e definições

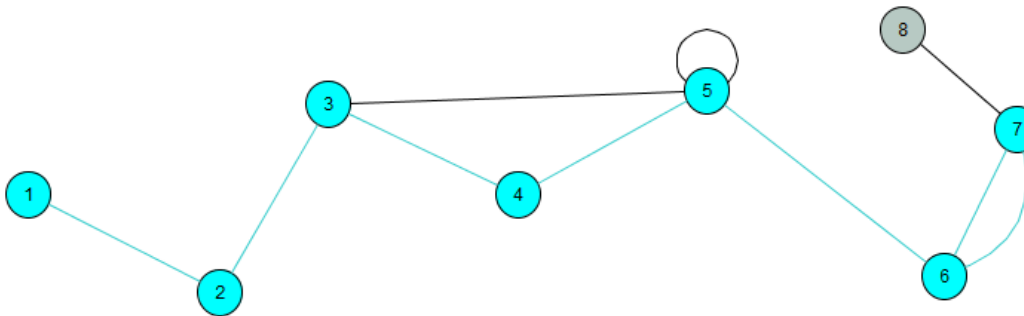
Denomina-se por **grafo completo** a um grafo simples G , com $\nu = n > 0$, no qual todos seus vértices são adjacentes, e é fácil ver que a dimensão deste grafo é $C_{n,2}$. Este grafo é normalmente denotado por K_n . Um **subgrafo** de um grafo G é identificado como um grafo cujo os conjuntos de vértices e arestas aos quais se associa são, respectivamente, subconjuntos do conjunto de vértices e arestas associados a G , bem como a sua função de incidência é uma restrição da função de incidência associada a este.

Figura 15 – 2º Exemplo de Trajeto.



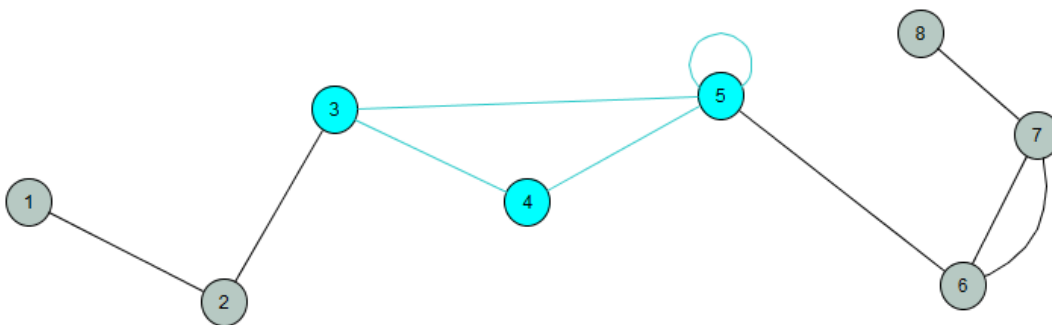
Fonte: o autor.

Figura 16 – 3º Exemplo de Trajeto.



Fonte: o autor.

Figura 17 – Exemplo de Circuito.

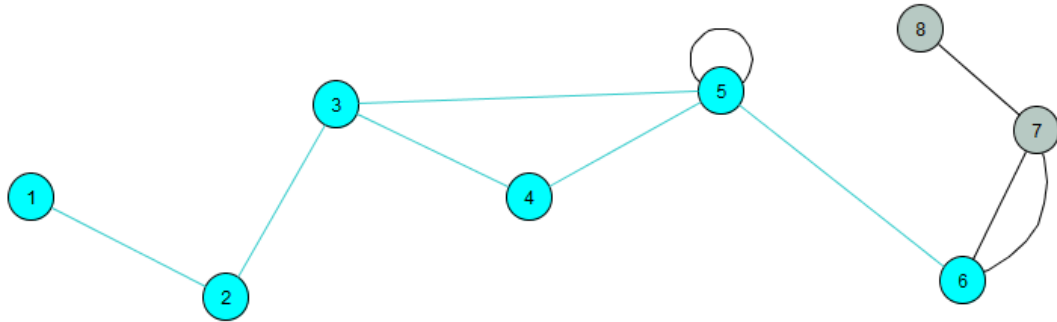


Fonte: o autor.

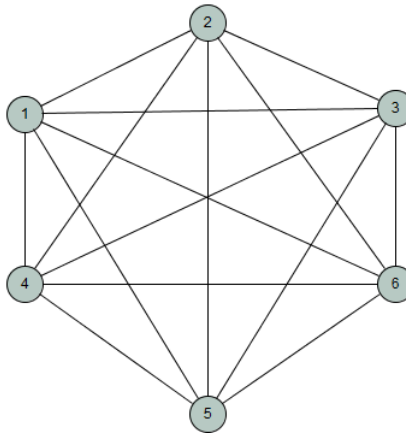
Um *grafo regular*, trata-se daquele no qual os vértices têm o mesmo grau. Sendo assim, um grafo em que cada vértice possui grau k é regular e pode ser designado por *grafo k -regular* (veja a Figura 19).

Denomina-se por *grafo conexo* aquele em que todo par de vértices é ligado através de um caminho, ou ao grafo trivial (por convenção). Caso contrário, diz-se que ele é um *grafo desconexo*. Dois vértices são ditos *vértices-conexos* quando existe um

Figura 18 – Exemplo de Passeio.



Fonte: o autor.

Figura 19 – K_6 , um exemplo de grafo 5-regular.

Fonte: o autor.

caminho no grafo que os liga. Uma **componente conexa ou componente** de um grafo G , trata-se de um subgrafo conexo maximal nele contido, isto é, do maior subgrafo próprio de G . O número de componentes conexas de um grafo é denotado por cc_G . Uma aresta e um vértice cuja sua exclusão de seu grafo o transforma em uma união de dois grafos não nulos, são denominados, respectivamente, **ponte** e **vértice de corte**.

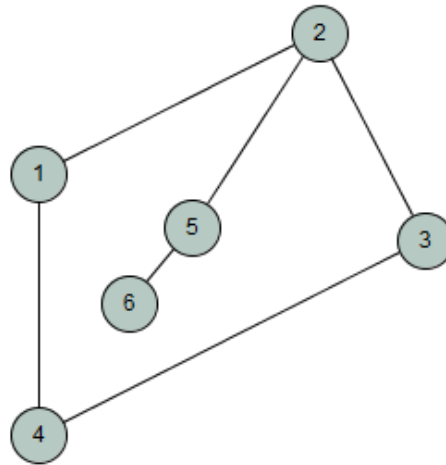
A Figura 20 é um de exemplo grafo conexo, assim como a Figura 19.

Na Figura 20 vê-se, ainda, um grafo em que v_5 é exemplo de vértice de corte, e que $a_{2,5}$ e $a_{5,6}$ de pontes. Já na Figura 21 observa-se os subgrafos conexas maximais gerados pela remoção da aresta $a_{2,5}$, enquanto na Figura 22 os subgrafos conexas maximais gerados pela remoção do vértice v_5 . Destaca-se que ao removermos um vértice consequentemente as arestas que sobre ele incidem são removidas.

Como se vê os grafos das Figuras 21 e 22 são, cada um, formados pela união de dois grafos conexas. Sendo assim, tais figuras também são exemplos de grafos desconexos.

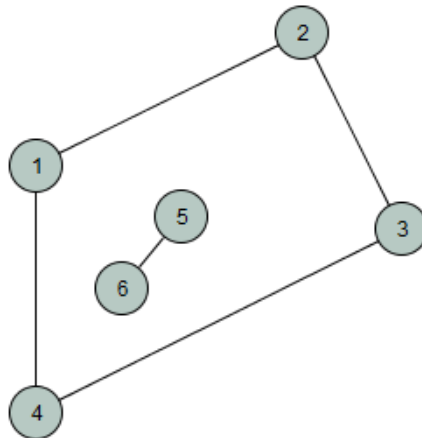
Teorema 2. *Se G um grafo simples, então: $\nu_G - cc_G \leq \alpha_G$.*

Figura 20 – Exemplo de grafo conexo.



Fonte: o autor.

Figura 21 – 1º Exemplo de grafo com duas componentes conexas: 1-2-3-4 e 5-6.



Fonte: o autor.

Demonstração. Utilizando-se do princípio de indução finita sobre α_G , vê-se, para $\alpha_G = 0$, que o número de componentes conexas de G é igual ao número de seus vértices, isto é:

$$\nu_G = cc_G \Rightarrow \nu_G - cc_G = 0 \Rightarrow \nu_G - cc_G \leq \alpha_G.$$

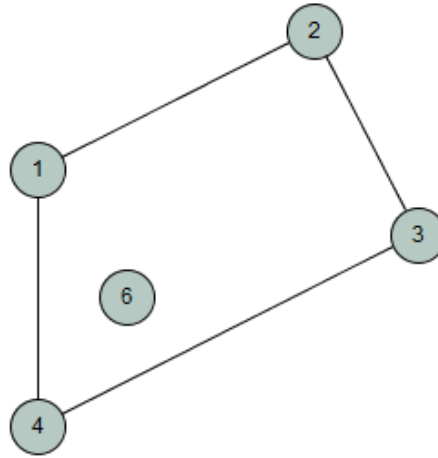
Como se queria mostrar.

Assumindo como hipótese de indução $\nu_G - cc_G \leq \alpha_G$, quando $\alpha_G = k > 0$. Para $\alpha_G = k + 1$, sendo $a \in A_G$, tem-se dois casos:

- a) Quando a não é uma ponte de G , então $cc_{(G-a)} = cc_G$, $\alpha_{(G-a)} = k$, e por hipótese de indução $\nu_{(G-a)} - cc_{(G-a)} \leq \alpha_{(G-a)}$. Daí:

$$\nu_G - cc_G = \nu_{(G-a)} - cc_{(G-a)} \leq \alpha_{(G-a)} = \alpha_G - 1 < \alpha_G$$

Figura 22 – 2º Exemplo de grafo com duas componentes conexas: 1-2-3-4 e 6.



Fonte: o autor.

b) Quando a é uma ponte de G , conseqüentemente $cc_{(G-a)} = cc_G + 1$. Assim:

$$cc_{(G-a)} - 1 = cc_G \Rightarrow -cc_G = 1 - cc_{(G-a)}.$$

De onde segue:

$$\begin{aligned} \nu_G - cc_G &= \nu_G + 1 - cc_{(G-a)} = \nu_{(G-a)} + 1 - cc_{(G-a)} \\ &= \nu_{(G-a)} - cc_{(G-a)} + 1 \leq \alpha_{(G-a)} + 1 \\ &= (\alpha_G - 1) + 1 = \alpha_G \end{aligned}$$

Logo tem-se que $\nu_G - cc_G \leq \alpha_G$, como se buscava.

□

É possível construir um grafo completo a partir de um desconexo, ao se conectar todos os seus vértices. Esta construção trata-se da união do grafo desconexo dado com o seu grafo complementar. Denomina-se por **grafo complementar** (exemplificado nas Figuras 23 e 24) de um grafo simples G , ao grafo denotado por G^C , que possui o mesmo conjunto de vértices G , porém com arestas formadas pelos seus vértices não adjacentes.

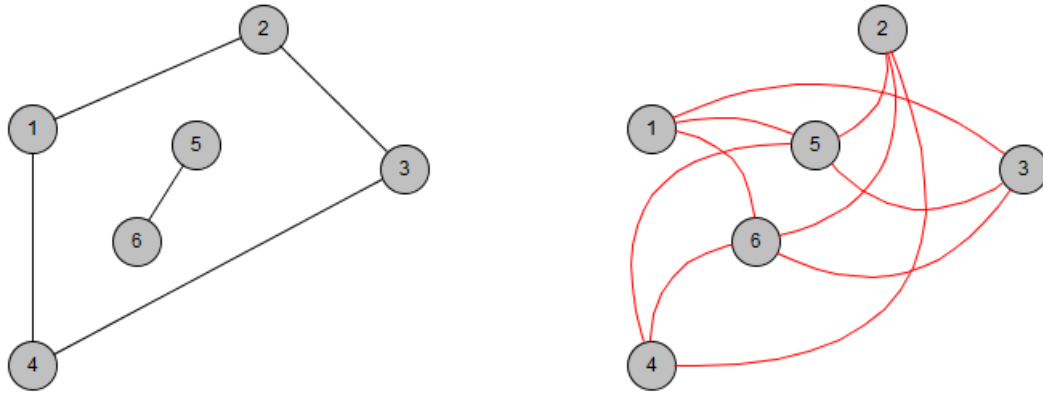
Decorre imediatamente do Teorema 2 o interessante fato:

Corolário 3. *Se G um grafo simples, conexo e sem ciclos. Tem-se que*

$$\alpha_G = \nu_G - 1.$$

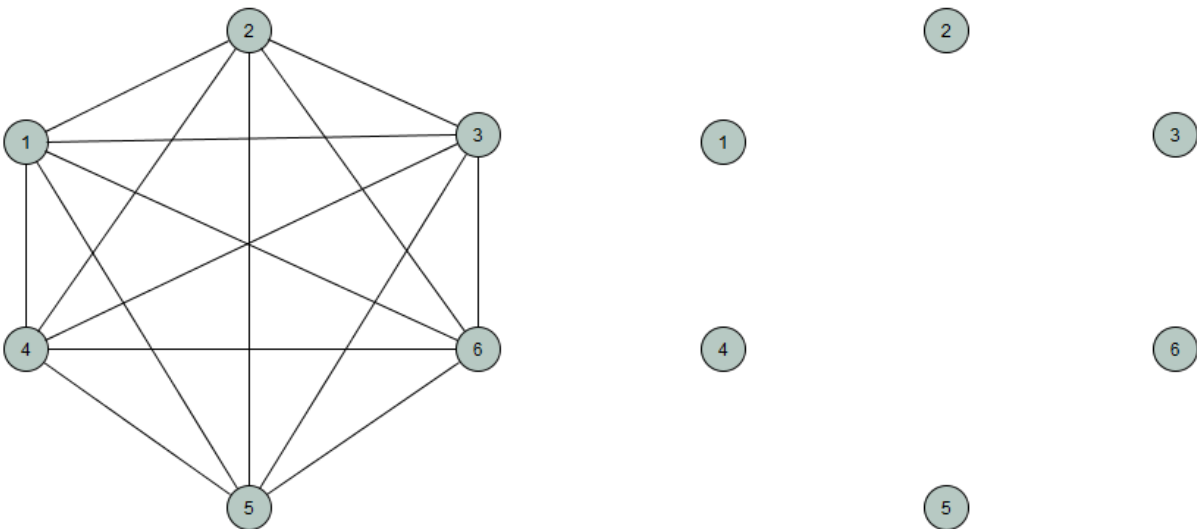
Demonstração. Seguindo a demonstração pelo princípio de indução finita sobre ν_G , é claro que se $\nu_G = 1$ então $\alpha_G = 0$, visto não haver laço, por G ser um grafo simples. Admitindo por hipótese, para um grafo simples, conexo, sem ciclos e com $\nu_G \leq k$, ser $\alpha_G = \nu_G - 1$.

Figura 23 – 1º Exemplo de grafo complementares.



Fonte: o autor.

Figura 24 – 2º Exemplo de grafo complementares.



Fonte: o autor.

Seja G um grafo simples, conexo, sem ciclos e com $\nu_G = k + 1$. Ao remover um de seus vértices v tem-se um novo grafo G' também simples e sem ciclos.

No caso em que G' é conexo, é fácil ver que $d_v = 1$, daí: $\alpha_{G'} = \alpha_G - 1$ e $\nu_{G'} = \nu_G - 1 = (k + 1) - 1 = k$. E, considerando a hipótese de indução, tem-se, ainda, que:

$$\alpha_{G'} = \nu_{G'} - 1 \Rightarrow \alpha_G - 1 = (\nu_G - 1) - 1 \Rightarrow \alpha_G - 1 = \nu_G - 2 \Rightarrow \alpha_G = \nu_G - 1.$$

Já no caso em que G' é desconexo, $d_v = s > 1$. Disto tem-se que $cc_{G'} = s$, $\nu_{G'} = \nu_G - 1$ e $\alpha_{G'} = \alpha_G - s$. E escrevendo $G' = \bigcup_{i=1}^s G'_i$, sendo G'_i suas componentes, segue

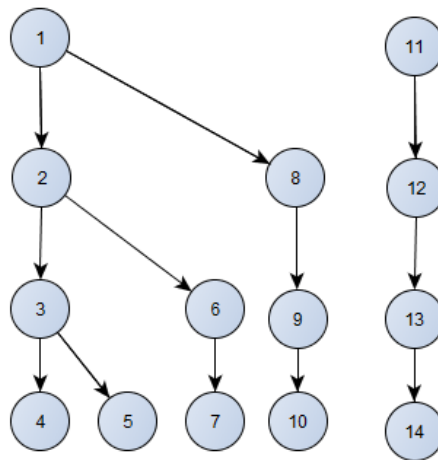
que $\nu_{G'} = \sum_{i=1}^s \nu_{G'_i}$ e $\alpha_{G'} = \sum_{i=1}^s \alpha_{G'_i}$, e daí:

$$\alpha_{G'} = \sum_{i=1}^s \alpha_{G'_i} = \sum_{i=1}^s (\nu_{G'_i} - 1) = \nu_{G'} - s \Rightarrow \alpha_{G'} + s = \nu_{G'} \Rightarrow \alpha_G = \nu_G - 1.$$

Observa-se que a segunda igualdade se dá em vista da hipótese de indução. Assim com a demonstração destes dois casos tem-se o resultado buscado. \square

Define-se por **base** de um dígrafo o conjunto formado por suas fontes. Já a **anti-base**, trata-se do conjunto formado por seus sumidouros. Caso seja um conjunto unitário, seu elemento é denominado **raiz** no caso da base, e de **anti-raiz** na anti-base.

Figura 25 – Base de um grafo.



Fonte: o autor.

Na Figura 25, são anti-base A e base B os conjuntos $A = \{v_4, v_5, v_7, v_{10}, v_{14}\}$ e $B = \{v_1, v_{11}\}$. Observa-se que este dígrafo é formado pela união disjunta de dois subdígrafos nos quais se vê v_1 e v_{11} como suas respectivas raízes. Além disto, no subdígrafo com menor número de vértices observa-se ser v_{14} sua anti-raiz. Caso seja invertida a orientação desse dígrafo, os subdígrafos terão como respectivas anti-raízes: v_1 e v_{11} .

3.1.4 Árvores e florestas

Designa-se por **floresta** a um grafo simples sem circuitos. Já à uma floresta conexa denomina-se **árvore**. Define-se, em um dígrafo, uma **arborescência** como uma árvore que possui uma única raiz. Observa-se que o dígrafo da Figura 25 é também uma floresta na qual os subgrafos disjuntos que a formam são árvores e, além disto são arborescências. Neste trabalho será considerado **nível** de um vértice de uma arborescência, o sucessor do número equivalente à distância dele à fonte.

Teorema 4. *Dado um grafo simples G , são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) G é uma árvore,

- (b) G não contém ciclos e $\alpha = \nu - 1$,
- (c) G é conexo e $\alpha = \nu - 1$,
- (d) G é conexo e cada aresta é uma ponte,
- (e) quaisquer dois vértices de G são ligados por um só caminho,
- (f) G não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b): Para $\nu = 1$ vê-se que o grafo é uma árvore com $\alpha = \nu - 1 = 0$. Fato evidente visto que um grafo simples com apenas um vértice não possui aresta.

Admitindo-se por hipótese de indução para um grafo simples G , que se ele é uma árvore com $\nu_G = k > 1$, então ele não contém ciclos e $\alpha_G = k - 1$. Tem-se, para um grafo simples com $\nu = k + 1$, que se ele é uma árvore, por definição também é uma floresta conexa. Removendo, assim, qualquer aresta sua, obtém-se um grafo formado por duas árvores (podendo inclusive uma delas ser degenerada, isto é, ser um único vértice) cuja $\alpha = k$. Mas pela hipótese de indução estas árvores não possuem ciclos, pois ao se realocar a aresta anterior o grafo original também teria esse mesmo ciclo em sua composição, contradizendo a hipótese do grafo não possuir ciclos. E como é, também, um grafo simples e conexo por definição, conclui-se pelo Corolário 3 que: $\alpha = \nu - 1$.

(b) \Rightarrow (c): Supondo ser G um grafo desconexo, com $\alpha = \nu - 1$. Tem-se então que: $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$, sendo G_i suas componentes conexas duas a duas distintas, e $n > 1$. Observa-se, ainda, que G_i não possui ciclos em vista de G não os conter. Daí, pelo Corolário 3 segue que: $\alpha_{G_i} = \nu_{G_i} - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_{G_i} = \sum_{i=1}^n (\nu_{G_i} - 1) \Rightarrow \alpha = \nu - n = \nu - 1 \Rightarrow n = 1$. Dessa forma tem-se uma contradição pois pela hipótese $n > 1$, demonstrando a implicação pedida.

(c) \Rightarrow (d): Sendo G um grafo conexo, removendo uma de suas arestas tem-se um novo grafo H com $\nu_H = \nu$ e $\alpha_H = \alpha - 1$. Por outro lado, do Teorema 2 segue que $\nu_H - cc_H \leq \alpha_H$. Daí: $\nu_H - cc_H \leq \alpha_H \Rightarrow \nu - cc_H \leq \alpha - 1 = \nu - 2 \Rightarrow -cc_H \leq -2 \Rightarrow cc_H \geq 2$. Desta forma H possui ao menos duas componentes conexas, e nesse caso a aresta retirada possui seus vértices extremos em componentes distintas deste grafo, isto é: a aresta retirada de G é uma ponte.

(d) \Rightarrow (e): Pela hipótese o grafo em questão é conexo, e por definição cada par de seus vértices estão ligados por um caminho. Também por hipótese cada aresta é uma ponte. Assim, em qualquer caminho deste grafo, suas arestas são pontes. Isto é, retirando-se qualquer uma delas haverá dois vértices desconexos, indicando não haver outro caminho que os ligue; ou seja: todos os vértices interligados o são por um único caminho.

(e) \Rightarrow (f): Se o grafo possui ciclos seus pares de vértices são ligados por ao menos dois caminhos. Além disto, se a um grafo sem ciclos acrescenta-se uma aresta, nos dois vértices

aos quais ela incidir forma-se um ciclo - visto já haver aí um caminho que os ligue, por hipótese. Assim obtém-se o que si queria mostrar.

(f) \Rightarrow (a): Sendo uma árvore um grafo simples conexo, basta, com a hipótese, mostrar a conexidade do grafo em questão. Supondo ser este desconexo, ligando dois vértices desconexos por uma aresta não se forma ciclo. E por contradição demonstra-se o enunciado.

□

3.2 Princípios Fundamentais de Contagem e Grafos

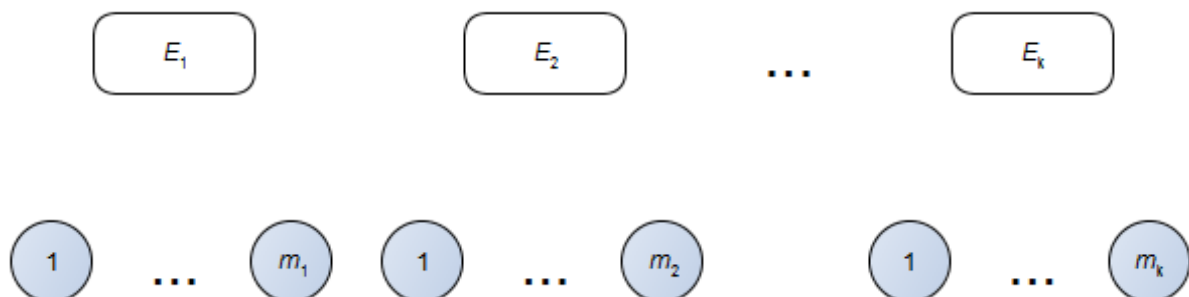
Esta sessão estuda uma curiosa relação entre princípios fundamentais de contagem e grafos. Em outras palavras, são utilizados, aqui, dígrafos para representarem contagens, facilitando a visualização dos elementos contados; e auxiliarem no processo ensino-aprendizado de princípios de contagem da análise combinatória. É evidenciado, então, que calcular o número procurado em contagens é equivalente a enumerar vértices específicos em grafos que as representam.

Os princípios de contagem elementares são os princípios *aditivo* e *multiplicativo*, os quais são enunciados à seguir.

O princípio aditivo trata-se da contagem do número de maneiras de ocorrência de k eventos mutuamente exclusivos E_1, E_2, \dots ou E_k , cujas possibilidades respectivas são m_1, m_2, \dots e m_k maneiras ($k \in \mathbb{N}$ e $m_k \in \mathbb{Z}_+$), o que se obtém pela soma $m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

Observa-se nesta situação ser possível utilizar um grafo para representar os elementos contados. Basta a cada evento E_i ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) construir um grafo G_i desconexo com $\nu_{G_i} = m_i$, isto é, cada vértice deste grafo representa uma dentre as m_i maneiras de ocorrência do evento, e dada a união destes grafos obtém-se um novo grafo G com $\nu_G = \sum_{i=1}^k m_i$ (conforme o enunciado), cuja ilustração está na Figura 26.

Figura 26 – Grafo do Princípio Aditivo.



Fonte: o autor.

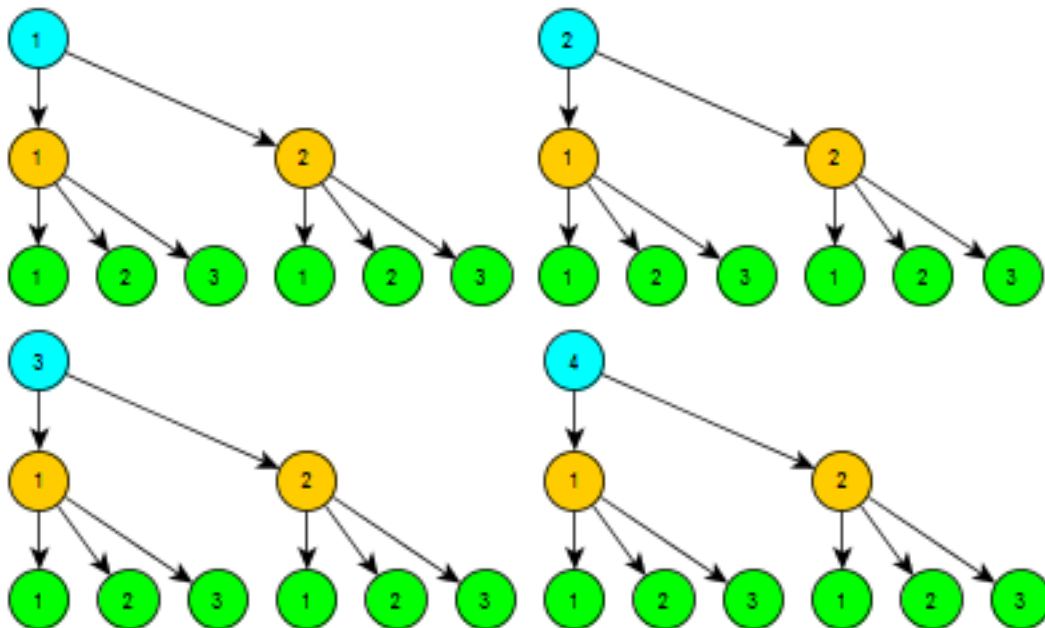
Já no princípio multiplicativo dados k ($k \in \mathbb{N}$) eventos E_1, E_2, \dots e E_k com

respectivas possibilidades de ocorrência m_1, m_2, \dots e m_k ($m_k \in \mathbb{Z}_+$), de tal modo que a cada uma das m_1 maneiras de ocorrer E_1 estão associadas m_2 possibilidades de ocorrer E_2 e assim sucessivamente até que a cada uma das m_{k-1} maneiras de ocorrer E_{k-1} estejam associadas as m_k possibilidades para a ocorrência de E_k . A contagem do número de maneiras de ocorrência de E_1, E_2, \dots e E_k é dada pelo produto $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

Sem perda de generalidade, escolhendo-se a ordem canônica, isto é, E_1, E_2, \dots e E_k , dentre os eventos dados. O grafo representativo deste princípio trata-se de uma floresta desconexa com m_1 componentes, as quais são arborescências de $k - 1$ níveis cada, cujo o j -ésimo ($j \geq 0$) nível possui m_{j+1} vértices representando cada possibilidade de escolha do evento E_{j+1} para tal nível. A representação de cada escolha possível na primeira arborescência é dada por cada caminho da raiz a um sumidouro dela. Para esta arborescência há $\prod_{j=2}^k m_j$ destes caminhos, obtendo-se, visto haverem m_1 arborescências, o

número total destes caminhos por $m_1 \cdot \prod_{j=2}^k m_j = \prod_{j=1}^k m_j$. Resultado que equivale ao produto enunciado e ao número total de sumidouros destas arborescências, podendo ser, assim, obtido pela contagem deles. Na Figura 27 observa-se um exemplo da utilização de um grafo para contagem de possibilidades de ocorrência de três eventos concomitantes (o azul, o amarelo e o verde), com respectivamente 4, 2 e 3 maneiras de ocorrência em cada; nesse grafo se observam 24 sumidouros equiparando-se ao resultado $4 \cdot 2 \cdot 3$ advindo do princípio enunciado.

Figura 27 – Exemplo de Grafo para o Princípio Multiplicativo.



Fonte: o autor.

Derivados dos princípios elementares advêm outras formas de contagem, dentre

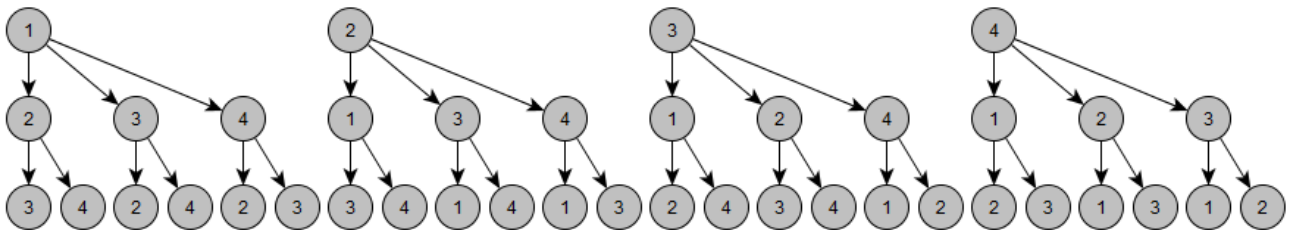
elas: arranjo simples, permutação simples e combinação simples que serão apresentadas aqui.

Dado um conjunto com n elementos distintos ($n \in \mathbb{Z}_+$), contar o número de subconjuntos (considerando a ordem de seus elementos) formados por k ($k \leq n$) destes elementos trata-se de observar k eventos em que a cada uma das suas n possibilidades no 1º evento estão associados $(n - 1)$ de ocorrer o 2º, $(n - 2)$ de ocorrer o 3º, e assim sucessivamente até $(n - k + 1)$ de ocorrer o k º evento. Daí, pelo princípio multiplicativo, o número de subconjuntos possíveis trata-se do produto: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$, ou ainda: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot [(n - k)! / (n - k)!] = n! / (n - k)!$, simbolizado por $A_{n,k}$.

O grafo que representa esta contagem é uma variação do grafo representativo do princípio multiplicativo. Todavia neste grafo, o número de vértices por níveis é sempre o antecessor do nível anterior.

Como exemplo de representação por grafo de um arranjo simples, observa-se na Figura 28 a construção de um dígrafo referente ao $A_{4,3}$. Trata-se de uma floresta com 24 sumidouros que formam, com suas fontes, caminhos com 3 níveis. Observa-se que estes caminhos possuem todas as filas em trios possíveis dentre os vértices: 1, 2, 3 e 4. É interessante perceber que esta esquematização traz uma forma concreta de contagem ordenada dos elementos em questão (filas de 3 vértices).

Figura 28 – Exemplo de Grafo para o Arranjo Simples.

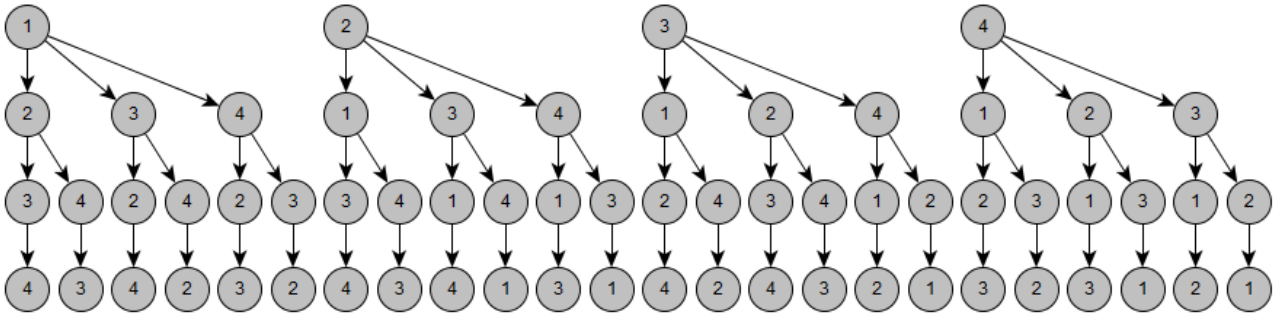


Fonte: o autor.

Agora, considerando-se um conjunto com n elementos distintos, contar o número de subconjuntos (considerando a ordem de seus elementos) formados com todas as permutações possíveis desses elementos, trata-se de observar o número de subconjuntos (considerando a ordem de seus elementos) formados por estes n objetos. Desta forma esta contagem é um arranjo simples $A_{n,n} = n!$, denotado por P_n . O grafo representativo desta contagem trata-se, assim como para o arranjo simples, de um uma floresta com arborescências; porém seu número de níveis é o mesmo do de arborescências. A representação da contagem dos elementos de P_4 é vista na Figura 29 como exemplo.

Na combinação simples, dado um agrupamento com n objetos dos quais se pode

Figura 29 – Exemplo de Grafo para a Permutação Simples.



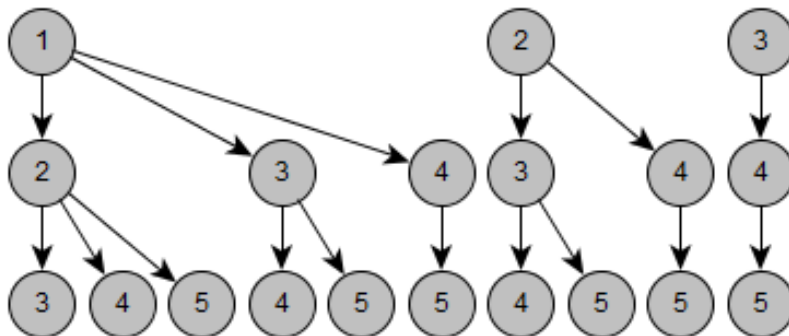
Fonte: o autor.

formar subagrupamentos com k ($k \leq n$) objetos, contar de quantas formas se pode obter tais subagrupamentos, desconsiderando a ordem de seus objetos, trata-se de contar os arranjos possíveis, $A_{n,k}$, desconsiderando a permutação dos elementos em cada subagrupamento, P_k . Isto é:

$$\frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Contagem que recebe a notação $C_{n,k}$, ela, também, pode ser representada por florestas de arborescências construídas de forma que cada um dos caminhos, das raízes aos sumidouros, são tais que o conjunto de vértices que os compõem sejam dois a dois distintos. Outra forma de construção destas arborescências é através da escolha nos caminhos, das raízes aos sumidouros, do grafo $A_{n,k}$, somente de um caminho representante daqueles que possuem os mesmos vértices em ordem distintas. Para ilustrar, a Figura 30 traz a representação da $C_{5,3}$. Neste dígrafo observa-se um decrescimento no número de sumidouros das arborescências, visto que, nesta contagem, toma-se os trios dentre os vértices 1, 2, 3, 4 e 5. E, desta forma, só há, aqui, caminhos (das fontes aos sumidouros) dos quais os conjuntos dos seus vértices coincidam.

Figura 30 – Exemplo de Grafo para a Combinação Simples.



Fonte: o autor.

É interessante observar um padrão nos grafos representantes das diversas contagens.

Como exemplo, apresenta-se aqui o padrão da combinação simples verificando-se uma equivalência do resultado da contagem de seus sumidouros com a expressão algébrica:

$$\sum_{j_1=1}^{n+1-k} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{j_{k-2}} j_{k-1} \text{ e o da } C_{n,k}.$$

Proposição 5. Com a notação acima, dados $n \geq k \geq 2$, tem-se

$$\sum_{j_1=1}^{n+1-k} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{j_{k-2}} j_{k-1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_{n,k}. \quad (3.1)$$

Demonstração. A verificação é feita através do princípio de indução finita sobre $k \geq 2$ na igualdade apresentada em (3.1) para cada valor de n previamente fixado ($n \geq k \geq 2$):

(i) Para $k = 2$ vê-se que:

$$\sum_{j_1=1}^{n+1-2} j_1 = \sum_{j_1=1}^{n-1} j_1 = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = C_{n,2}.$$

(ii) Para $k = 3$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=1}^{n-3+1} \sum_{j_2=1}^{j_1} j_2 &= \sum_{j_1=1}^{n-2} \sum_{j_2=1}^{j_1} j_2 = \sum_{j_1=1}^{n-2} (1 + 2 + \dots + j_1) \\ &= 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + \dots + (n-2)) \\ &= C_{2,2} + C_{3,2} + C_{4,2} + \dots + C_{n-1,2} = C_{n,3}. \end{aligned}$$

Observando que esta última igualdade se justifica pela regra da soma dos elementos de uma coluna do Triângulo de Pascal (Veja Proposição 9).

(iii) Para $k \leq p < n$, admitindo por hipótese serem

$$\sum_{j_1=1}^{n+1-p} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{p-1}=1}^{j_{p-2}} j_{p-1} = C_{n,p}. \quad (3.2)$$

Antes, nota-se que em (3.2)

- existem $p - 1$ somatórios iterados;
- o índice superior do primeiro somatório corresponde ao primeiro índice do símbolo de combinatório à direita da igualdade subtraído do número de somatórios envolvidos. Vale destacar os seguintes casos:

a) Se há $p - 1$ somatórios e o índice superior do primeiro somatório é a , então $a = n - (p - 1)$, ou seja, $n = a + p - 1$ e deste modo,

$$\sum_{j_1=1}^a \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{p-1}=1}^{j_{p-2}} j_{p-1} = C_{a+p-1,p}.$$

- b) Se há $p - 1$ somatórios e o índice superior do primeiro somatório é $n - p$, então $n - p = n' - (p - 1)$, ou seja, $n' = n - 1$ e deste modo,

$$\sum_{j_1=1}^{n-p} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{p-1}=1}^{j_{p-2}} j_{p-1} = C_{n',p} = C_{n-1,p}.$$

- (iv) Tem-se para $k = p + 1 \leq n$, utilizando a propriedade b) acima para a terceira igualdade, a relação da soma de elementos de uma coluna do triângulo de Pascal para a penúltima coluna, e a Regra de Stifel (veja a Proposição 6) para a última, que:

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=1}^{n-(p+1)+1} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{(p+1)-1}=1}^{j_{(p+1)-2}} j_{(p+1)-1} &= \sum_{j_1=1}^{n-p} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{j_{p-1}} j_p \\ &= \sum_{j_1=1}^{n-p-1} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{j_{p-1}} j_p + \sum_{j_2=1}^{n-p} \sum_{j_3=1}^{j_2} \cdots \sum_{j_p=1}^{j_{p-1}} j_p \\ &= \sum_{j_1=1}^{n-p-1} \left(\sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{j_{p-1}} j_p \right) + C_{n-1,p} \\ &= \left(\sum_{j_1=1}^{n-p-1} C_{j_1+p-1,p} \right) + C_{n-1,p} \\ &= (C_{p,p} + C_{p+1,p} + \cdots + C_{n-2,p}) + C_{n-1,p} \\ &= C_{n-1,p+1} + C_{n-1,p} = C_{n,p+1}. \end{aligned}$$

Como se queria mostrar. □

É interessante, ainda, notar que pelo estudo anterior uma relação entre combinação simples e arranjo simples é inferida, relação que pode ser explicitada algebricamente como segue:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{A_{n,k}}{k!}.$$

3.3 Regras no Triângulo de Pascal

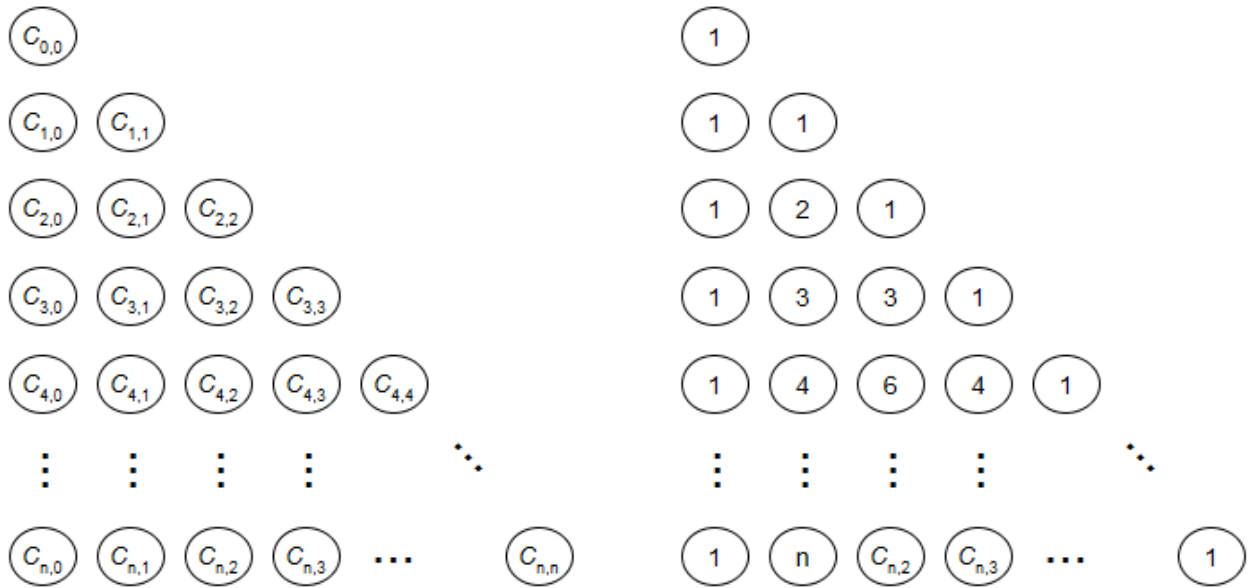
Tendo em vista a importância na análise combinatória, e a utilização de algumas delas em demonstrações deste trabalho, algumas regras no Triângulo de Pascal (Figura 31) são apresentadas nesta seção.

Talvez uma das mais conhecidas relações da Análise Combinatória, a *Regra de Stifel* (ou *Relação de Stifel*) possui uma interessante visualização no Triângulo de Pascal, a qual é exemplificada na Figura 32, mas antes, uma de suas demonstrações.

Proposição 6 (Regra de Stifel). *Se k e n números inteiros não-negativos, tais que $k \leq n$, tem-se que*

$$C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}. \quad (3.3)$$

Figura 31 – Triângulo de Pascal.



Fonte: o autor.

Demonstração. (Regra de Stifel)

$$\begin{aligned}
 C_{n,k} + C_{n,k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \cdot \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right] \\
 &= \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \cdot \left[\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} \right] = \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \cdot \left[\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \right] \\
 &= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(k+1)]!(k+1)!} = C_{n+1,k+1}.
 \end{aligned}$$

□

Para exemplificar o padrão no Triângulo de Pascal da Regra de Stifel, na Figura 32 vê-se que a soma dos valores contidos nos círculos azuis resultam no do círculo amarelo.

Um fato curioso é a relação entre grafos e a Regra de Stifel. Para exemplificar esta curiosidade exibe-se, na Figura 33, como se relacionam os grafos representativos do primeiro e do segundo membro de cada uma das igualdades dos casos particulares a seguir:

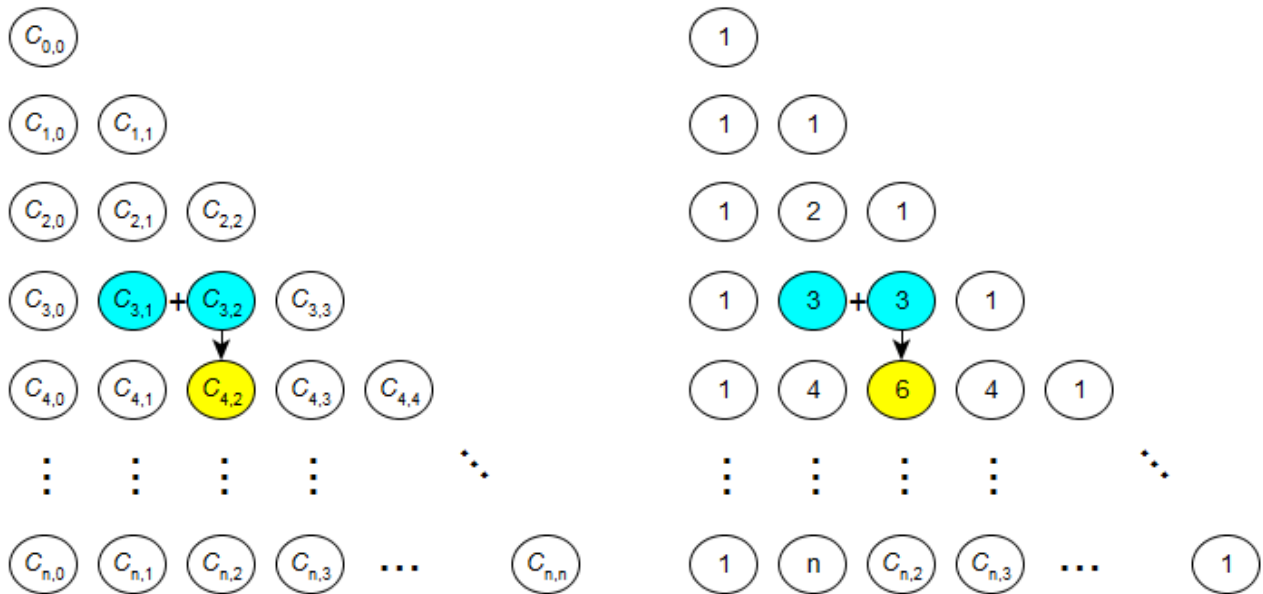
(a) $C_{3,2} = C_{2,1} + C_{2,2}.$

(b) $C_{4,3} = C_{3,2} + C_{3,3}.$

É importante observar que tais grafos são construídos do mesmo modo que $C_{5,3}$ na Figura 30.

Um outro fato bastante conhecido nos Triângulos de Pascal é o de que valores equidistantes quanto aos extremos de uma mesma linha são idênticos, fato enunciado a seguir.

Figura 32 – Ilustração da Regra de Stifel.



Fonte: o autor.

Proposição 7 (Regra das combinações complementares). *Se k e n números inteiros não-negativos, tais que $k \leq n$, tem-se que*

$$C_{n,k} = C_{n,n-k}. \quad (3.4)$$

Demonstração. Segue direto da definição algébrica de combinação como se vê:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_{n,n-k}.$$

□

Na Figura 34 os círculos de mesma cor têm posições simétricas no Triângulo de Pascal, e as combinações neles contidas possuem o mesmo valor, conforme caracterização desta regra.

Uma outra curiosidade do Triângulo de Pascal é o fato de que a soma de todos os elementos de uma de suas linhas possui um notório padrão que será apontado em seguida.

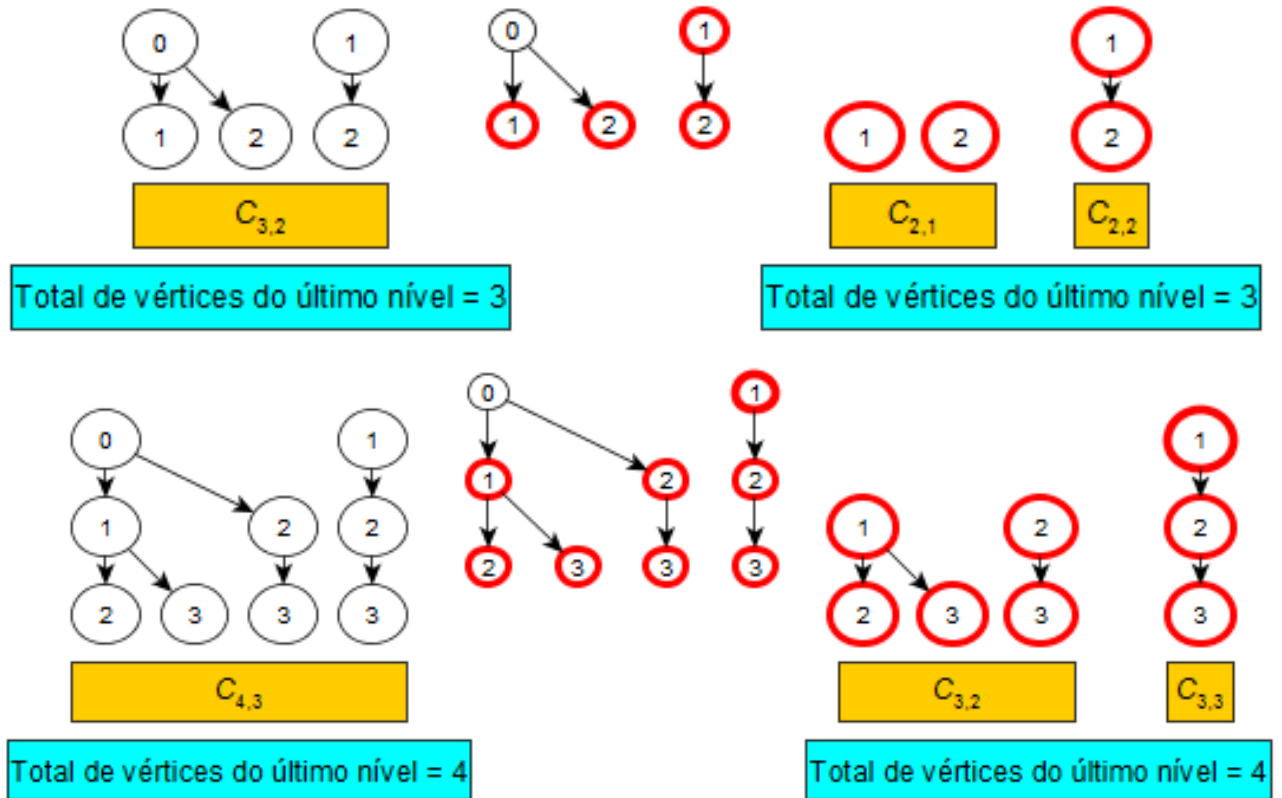
Proposição 8. *Se n um número inteiro não-negativo, segue-se que:*

$$C_{n,0} + C_{n,1} + \dots + C_{n,n} = 2^n.$$

Demonstração. Será utilizado o princípio de indução finita sobre n .

(i) Para $n = 0$ tem-se que $C_{0,0} = 1 = 2^0$, como se queria.

Figura 33 – Exemplo da relação de grafos com a Regra de Stifel do Triângulo de Pascal.



Fonte: o autor.

(ii) Para $n = k > 0$, admite-se por hipótese de indução ser $C_{k,0} + C_{k,1} + \dots + C_{k,k} = 2^k$,

(iii) Para $n = k + 1$, tem-se que:

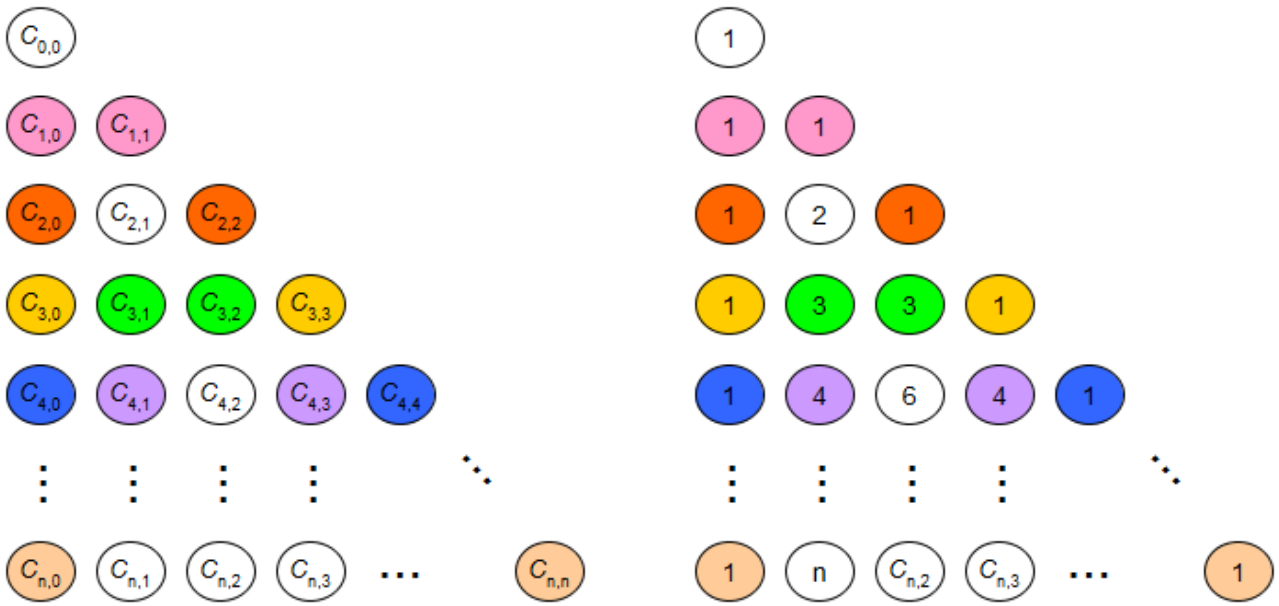
$$\begin{aligned}
 & C_{k+1,0} + C_{k+1,1} + C_{k+1,2} + \dots + C_{k+1,k} + C_{k+1,k+1} = \\
 &= C_{k+1,0} + (C_{k,0} + C_{k,1}) + (C_{k,1} + C_{k,2}) + \dots + (C_{k,k-1} + C_{k,k}) + C_{k+1,k+1} \\
 &= C_{k+1,0} + C_{k,0} + 2 \cdot [C_{k,1} + C_{k,2} + \dots + C_{k,k-1}] + C_{k,k} + C_{k+1,k+1} \\
 &= C_{k,0} + C_{k,0} + 2 \cdot [(C_{k,1}) + (C_{k,2}) + \dots + (C_{k,k-1})] + C_{k,k} + C_{k,k} \\
 &= 2 \cdot [C_{k,0} + C_{k,1} + C_{k,2} + \dots + C_{k,k-1} + C_{k,k}] = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Em que a primeira e a penúltima igualdade ocorre, respectivamente em vista da Regra de Stifel e da hipótese de indução. \square

Observa-se na Figura 35 um exemplo dessa regra ilustrando o valor dessa soma na linha 3 do Triângulo de Pascal.

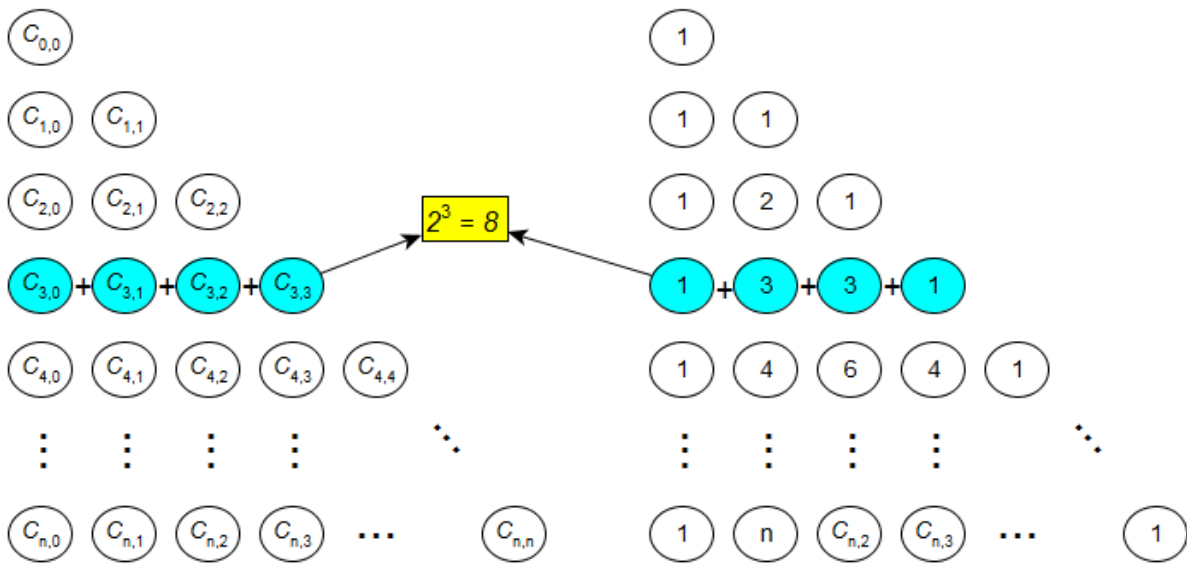
A próxima relação do Triângulo de Pascal a seguir, utilizada na Proposição 5 acima, diz que a soma dos primeiros $p + 1$ elementos de uma coluna a partir de seu topo possui uma fórmula fechada conforme a Proposição 9 enunciada abaixo.

Figura 34 – Combinações Complementares.



Fonte: o autor.

Figura 35 – Soma dos elementos da linha 3 no Triângulo de Pascal.



Fonte: o autor.

Proposição 9 (Regra da soma de elementos de uma coluna). *Se n e p números inteiros não-negativos, tem-se que:*

$$C_{n,n} + C_{n+1,n} + \dots + C_{n+p,n} = C_{n+p+1,n+1}. \tag{3.5}$$

Demonstração. Fixando um número natural n , e utilizando os passos de indução finita sobre p , segue que:

- (i) Para $p = 0$, $C_{n,n} = 1 = C_{n+1,n+1}$, como se queria.
- (ii) Para $p = k > 0$, admite-se por hipótese de indução que

$$C_{n,n} + C_{n+1,n} + \dots + C_{n+k,n} = C_{n+k+1,n+1}.$$

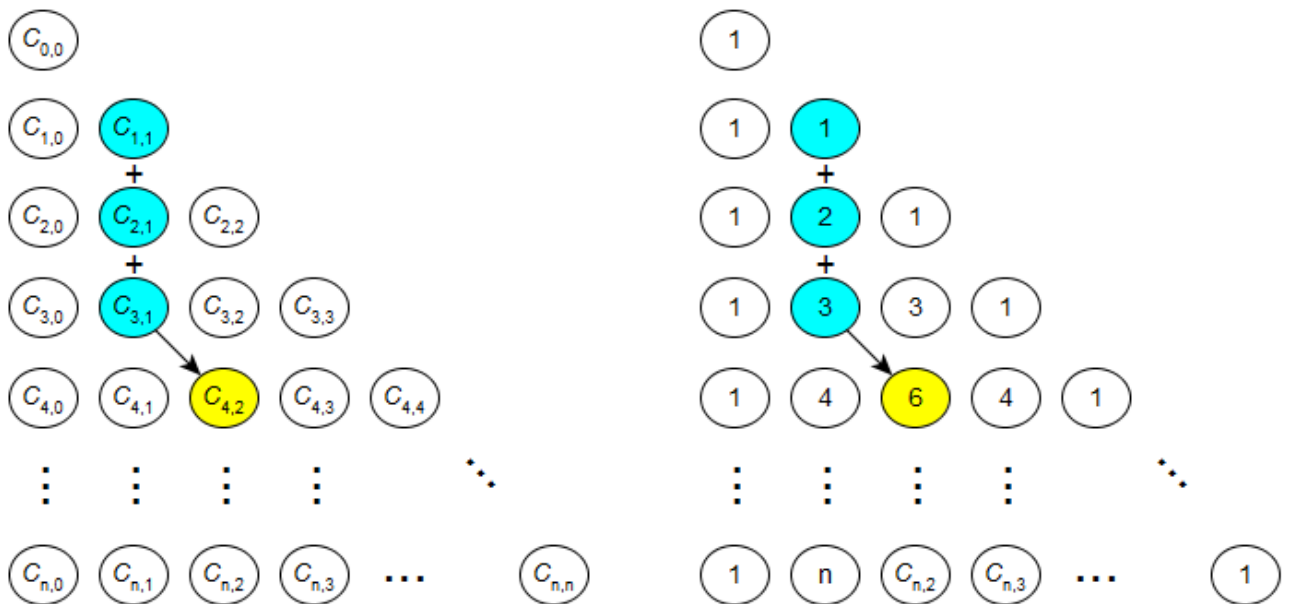
- (iii) Para $p = k + 1$, observa-se que:

$$\begin{aligned} C_{n,n} + C_{n+1,n} + \dots + C_{n+(k+1),n} &= C_{n,n} + C_{n+1,n} + \dots + C_{n+k,n} + C_{n+k+1,n} \\ &= C_{n+k+1,n+1} + C_{n+k+1,n} \\ &= C_{n+k+2,n+1}. \end{aligned}$$

Justifica-se a penúltima igualdade pela hipótese de indução, e a última pela regra de Stifel. □

Vê-se na Figura 36 que a soma dos valores contidos nos círculos azuis resulta no do amarelo, mostrando um exemplo da regra da soma de elementos de uma coluna no Triângulo de Pascal, bem como das disposições padrão dos elementos somados quanto ao que possui o valor deste resultado.

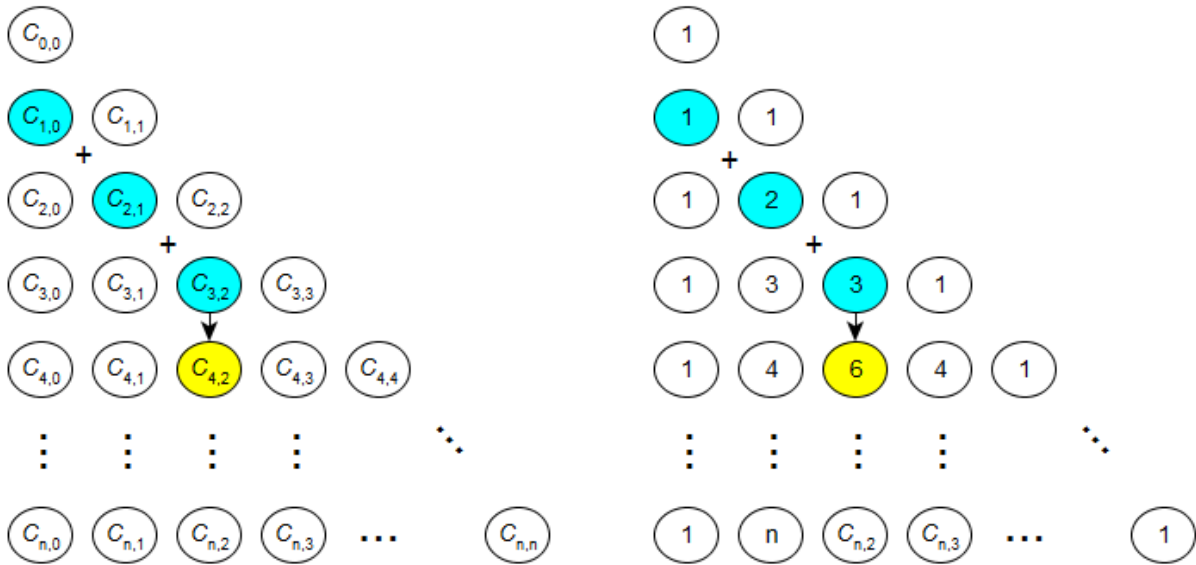
Figura 36 – Soma de elementos de uma coluna no Triângulo de Pascal.



Fonte: o autor.

Destacado na Figura 37 um exemplo do que são, aqui, considerados como elementos de uma diagonal principal no Triângulo de Pascal (elementos dos círculos azuis). A Proposição 10 a seguir traz a regra padrão da soma de seus elementos. É importante observar que a soma destes resulta no valor contido no círculo amarelo da figura citada, e

Figura 37 – Diagonal principal no Triângulo de Pascal.



Fonte: o autor.

que a localização no triângulo em que este se encontra exemplifica também uma disposição padrão para os resultados de somas deste tipo.

Proposição 10 (Regra da soma de elementos de uma diagonal principal). *Seja n e p números inteiros não-negativos, tem-se que:*

$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + \dots + C_{n+p,p} = C_{n+p+1,p}. \quad (3.6)$$

Demonstração. (Regra da soma de elementos de uma diagonal principal)

$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + \dots + C_{n+p,p} = C_{n,n} + C_{n+1,n} + \dots + C_{n+p,n} = C_{n+p+1,n+1} = C_{n+p+1,p}.$$

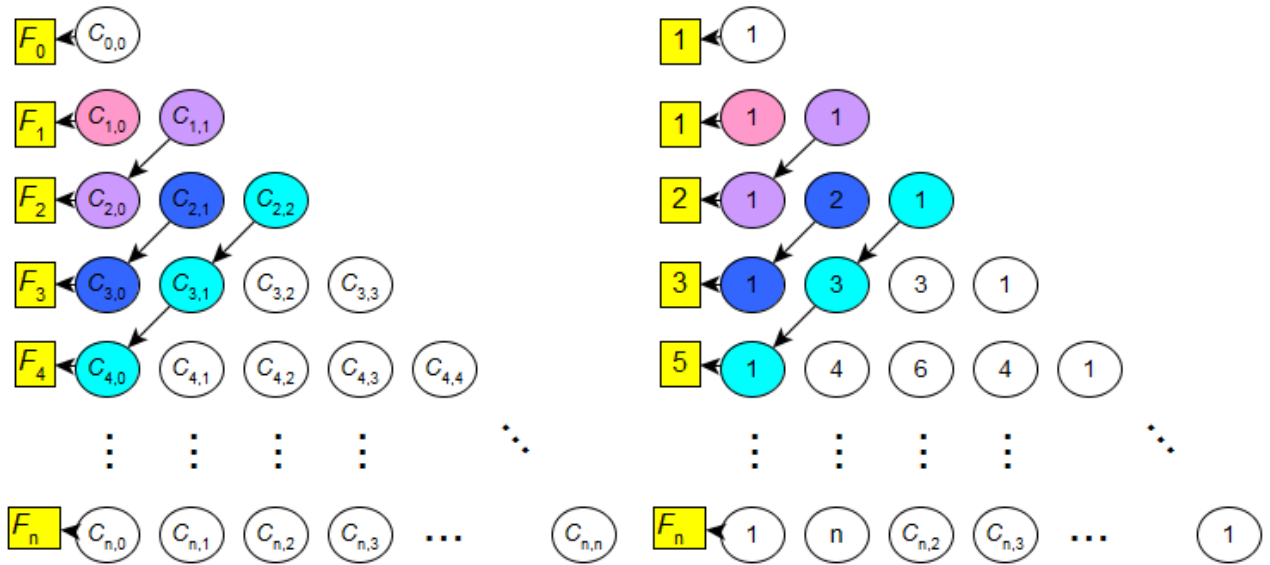
Onde a primeira e a última igualdade se justificam pelas combinações complementares, e a penúltima pela regra da soma de elementos da coluna n do Triângulo de Pascal. \square

A Figura 38 traz uma ilustração do que são, aqui, consideradas como diagonais secundárias no Triângulo de Pascal. Além disto, exemplifica que a soma de resultados das somas destas diagonais se comportam como a soma de elementos da sequência de Fibonacci (sequência recordada a seguir). Fato também estabelecido na Proposição 11.

Proposição 11 (Regra da soma dos elementos de uma diagonal secundária). *Dados n e p números inteiros não-negativos, com $n \geq p$, segue que:*

$$C_{n,0} + C_{n-1,1} + \dots + C_{n-p,p} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]. \quad (3.7)$$

Figura 38 – Diagonais secundárias no Triângulo de Pascal.



Fonte: o autor.

Aqui é importante observar que o segundo membro da igualdade 3.7 trata-se do termo de ordem $n + 1$ da sequência de Fibonacci. Sequência (denotada, aqui, por F_n) que é caracterizada pela fórmula de recorrência $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ com n inteiro não negativo.

Demonstração. Utilizando os passos de indução finita sobre n , segue:

(i) Para $n = 0$, que $C_{0,0} = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right]$, como se inferia.

(ii) Para $n = k > 0$ e $0 \leq p \leq k$ fixado, admite-se por hipótese ser:

$$C_{k,0} + C_{k-1,1} + \dots + C_{k-p,p} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

(iii) Para $n = k + 1$ e $0 \leq p \leq k + 1$ fixado, segue que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] \\ &= (C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \dots + C_{k-p,p-1}) + (C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \dots + C_{k-p,p}) \\ &= C_{k,0} + (C_{k-1,0} + C_{k-1,1}) + (C_{k-2,1} + C_{k-2,2}) + \dots + (C_{k-p,p-1} + C_{k-p,p}) \\ &= C_{k,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \dots + C_{k-p+1,p} \\ &= C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \dots + C_{k-p+1,p}. \end{aligned}$$

Expressão justificada pela utilização da regra de recorrência para o termo de ordem $k + 2$ da sequência de Fibonacci na primeira igualdade, da hipótese de indução na segunda igualdade, e da regra de Stifel na penúltima. \square

E concluindo este estudo quanto às regras no Triângulo de Pascal, segue a Regra de Fermat.

Proposição 12 (Regra de Fermat). *Com n e k números inteiros não-negativos, e $n > k$, obtém-se:*

$$C_{n,k} \cdot \frac{(n-k)}{(k+1)} = C_{n,k+1}. \quad (3.8)$$

Demonstração.

$$C_{n,k} \cdot \frac{(n-k)}{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!(k)!} \cdot \frac{(n-k)}{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = C_{n,k+1}.$$

\square

4 Aplicação de Grafos no Ensino-Aprendizado

Este capítulo apresenta a motivação para o estudo, e as práticas didáticas exibidas neste trabalho. A seção 4.1, intitulada motivação, traz uma breve contextualização teórica buscando uma metodologia para o ensino-aprendizado em vista da observação de fases do desenvolvimento cognitivo.

Em seguida, as duas primeiras atividades apresentadas (resolução de duas listas de exercícios em grupo) trazem uma apropriação de grafos como facilitadores do ensino-aprendizado. A primeira atividade, propõe o desenvolvimento dos conceitos básicos de análise combinatória utilizando esquematizações de alguns problemas introdutórios selecionados com o objetivo de despertar no aluno uma intuição combinatória. Tais esquemas na realidade são grafos, mais especificamente árvores, cujo propósito é determinar o número de vértices existentes em seu último nível. A segunda atividade dispõe ao discente a livre escolha do método de resolução dos problemas com o intuito de observar a influência da esquematização por grafos nos passos para as soluções.

As seções 4.3 e 4.4, trazem uma breve exposição sobre as apresentações discentes de trabalhos práticos, envolvendo a Teoria de Grafos, em uma feira de ciências da escola em que estudam.

4.1 Motivação

Dada a observação (pelo autor deste trabalho), em 3 anos consecutivos (2015 a 2017), no ensino-aprendizado quanto ao conteúdo Análise Combinatória de estudantes do 2º ano do ensino médio de uma escola pública do município de Viçosa no estado de Minas Gerais, ao se ater a situações que necessitam de intervenção torna-se notória a relação direta de questões quanto ao grau de abstração discente e o seu nível de aprendizado. Fato apresentado brevemente através de (XAVIER; NUNES, 2015):

Na adolescência, Piaget identificou algumas peculiaridades de pensamento que ele atribuiu à capacidade lógica, abstrata e denominou estágio operatório formal. Neste estágio, situado aproximadamente entre 11 e 15 anos (ressalte-se que, para Piaget, as idades são apenas referências), observa-se a inteligência formal. Como características dessa nova modalidade de pensamento, temos: o domínio da habilidade em aplicar regras lógicas e raciocinar frente problemas abstratos e hipóteses; o pensamento combinatório (capacidade de pensar em todas as combinações e variantes de um fenômeno - o que permite ao adolescente julgar muitas variáveis ao mesmo tempo e "pensar sobre o pensar"); e o pensamento hipotético-dedutivo (capacidade de raciocinar por meio de hipóteses, pensar não só sobre o que existe, mas sobre o que poderia ser).

As mesmas autoras propõem, então uma reflexão sobre a didática de ensino:

Algumas conquistas fundamentais a serem obtidas, nesta fase, consistiriam na capacidade do aluno de: agir com autonomia, argumentar, contrapor, compreender, interpretar, reorganizar conhecimentos, analisar, classificar, comparar, conceituar, criticar, deduzir, generalizar, levantar hipóteses, imaginar, julgar, localizar, observar, resumir, seriar, transferir, solucionar problemas. Ao fazer o seu planejamento didático que elementos desses estão sendo contemplados?

Reflexão que incita a uma busca de metodologias para auxiliar o adolescente na transição de fase no seu desenvolvimento cognitivo, em meio a uma ampla discussão de variáveis que interferem quanto ao sucesso desse processo trazido pelas autoras já referenciadas, conforme se vê:

No entanto, nem todos os adolescentes atingiriam o período operatório formal e a capacidade de abstração. A falta de alguns elementos responsáveis pelo desenvolvimento, citados anteriormente, pode impedir a conquista desses ganhos. Pode ser um dano neurológico, pode ser falta de estimulação, pode ser falta de oportunidades, dificuldades em desenvolver os esquemas necessários, pela ausência de políticas públicas que permitam a oferta de situações que promovam apoio e desafios para os adolescentes.

Frente a esta breve alusão dos estudos desta área, na observação feita às turmas discentes pôde-se observar:

a) A superficialidade do aprendizado quanto a resolução de problemas do conteúdo em questão, visto se observar um número considerável de estudantes com um nível elevado de dependência de fórmulas para resolvê-los.

b) A dificuldade de raciocínio lógico-abstrato em situações-problema, tendo em vista os erros na resolução de exercícios de caráter mais gerais.

c) A imprecisão frequente diante da resolução de exercícios, quanto a influência da ordenação de elementos na forma de contagem de seus agrupamentos.

Elencando causas quanto às situações pontuadas anteriormente, pôde-se perceber que:

A) Alguns livros didáticos primam pela apresentação de fórmulas para resolução de situações-problema, desta forma o ensino baseado nesta metodologia gera uma tendência a memorização delas, minimizando a construção e apropriação do raciocínio lógico-abstrato necessário para um verdadeiro aprendizado do conteúdo aqui discutido.

B) O raciocínio lógico-abstrato tem sido, cada vez mais, um desafio do ensino nas escolas públicas em vista da defasagem do aprendizado concreto em anos básicos do ensino (aqui caberia uma discussão em termos não só pedagógicos, mas também políticos e sociais, dadas as novas políticas educacionais que levam o discente a protelarem ao máximo o

aprendizado e as novas tendências culturais da sociedade de valorização cada vez menor do esforço para a construção do conhecimento, sobretudo o formal - discussão deixada, porém, apenas como uma reflexão). Desta forma se torna necessário buscar, nas metodologias de ensino, o estabelecimento do aprendizado em parâmetros concretos para, então, caminhar a níveis mais abstratos.

C) A mera utilização de fórmulas e a real dificuldade para o raciocínio lógico-abstrato são, sem dúvida, os vetores de base para esta imprecisão. Sem perder de vista a dificuldade de interpretação dos textos nos enunciados dos problemas propostos, que revelam as nuances que determinam a influência da ordenação de elementos na contagem de agrupamentos por eles formados.

Inferindo intervenções possíveis a essas três causas, respectivamente, tem-se:

i) Trabalhar com uma metodologia que construa o raciocínio para resolução dos problemas em questão com menor utilização possível da memorização de fórmulas, independentemente do livro-didático utilizado pela turma. E, para os casos em que tais fórmulas são necessárias, primar pela construção das mesmas, em detrimento da memorização.

ii) Muito embora a mudança da estrutura político-social do ensino público-básico seja a solução ideal, os entraves burocráticos, necessários para a sua realização, a torna impraticável. Desta forma inserir metodologias que trabalhem situações concretas pode ativar o raciocínio lógico-abstrato não estimulado nos anos anteriores, intervém sobre possíveis geradores de atraso na transição do estágio cognitivo. Mas especificamente neste caso, utilizar-se de grafos como meio concreto para a contagem em situações problema de análise combinatória.

iii) Trabalhar exemplos que esclareçam a influência da ordenação de elementos na contagem de agrupamentos entre eles, sublinhando a necessidade da leitura interpretativa dos detalhes nos enunciados dos problemas em prol dessa elucidação. Dar especial atenção ao não seccionamento do estudo das diversas contagens (destoando da sugestão de alguns livros didáticos), mas trabalhá-las paralelamente, sobretudo, quanto aos exercícios para consolidação do aprendizado.

Retrata-se, assim, o contexto de onde nasce a motivação para a utilização de uma metodologia concreta (grafos) como auxílio ao ensino-aprendizado de conceitos básicos da Análise Combinatória, estabelecendo condições a raciocínios mais gerais nestes conceitos.

4.2 Utilizando grafo no ensino de análise combinatória

Nesta seção, será apresentada uma proposta de ensino utilizando grafos para o aprendizado de conceitos básicos de análise combinatória. Em um primeiro momento, serão exibidos os objetivos para sua realização. Posteriormente, será visto um plano de ensino

no qual são detalhados os conteúdos abordados, tempo investido, descrição das etapas da atividade e dos recursos necessários. Logo após são sugeridas duas listas de exercícios para serem utilizadas para avaliação do processo de ensino-aprendizado, e por fim, exibe-se uma breve avaliação do aprendizado dos estudantes envolvidos na atividade.

O principal objetivo desta atividade é desmistificar a importância de fórmulas para a resolução de problemas básicos de análise combinatória, e instigar à construção de um raciocínio lógico-dedutivo em tais soluções. Além disso, elenca-se os seguintes objetivos secundários:

- Treinar, com o intuito de aprimorar nas resoluções dos problemas propostos, o reconhecimento da contagem a ser realizada conforme influência da ordem sobre os elementos dos agrupamentos em questão, através da leitura e interpretação dos dados enunciados.
- Utilizar grafos para contagem conforme sugerido no capítulo 3. (Propõe-se exemplos a seguir).
- Definir o operador fatorial e a construção de fórmulas, isto é, definir e utilizar fatoriais para construção das fórmulas usuais de combinatória (arranjo simples, permutação simples e combinação simples).
- Interpretar textos afins ao conteúdo, mais especificamente, atentar, nas leituras dos enunciados dos problemas propostos, quanto aos detalhes que indicam a influência da ordenação sobre os elementos dos agrupamentos a serem contados.

4.2.1 Plano de Ensino

- (i) Tópicos abordados nesta atividade: princípio aditivo, princípio multiplicativo, arranjos simples, permutação simples e combinação simples.
- (ii) O tempo investido para a realização da atividade é de cinco aulas de 50 minutos cada, organizadas em 2 categorias: aulas expositivas (3 aulas), e dois trabalhos de metodologia ativa (2 aulas).

- (iii) Descrição detalhada para as aulas

1^a e 2^a Aulas: Apresentação de grafos para contagem em exemplos básicos que abarquem: os princípios fundamentais da contagem, arranjo simples, combinação simples e permutação simples, pautando na forma de construção desses grafos (conforme exemplos que serão apresentados posteriormente) .

3^a Aula: Definição de fatorial para desenvolver a construção intuitiva das fórmulas usuais de combinatória. Apresentação da resolução dos problemas propostos sem

a utilização de grafos, atentando, porém, para o auxílio destes no entendimento de outras formas de resolução. Comparação dessas duas formas de resolução de problemas, observando as situações as quais cada forma melhor se adéqua.

4^a Aula: Atividades de combinatória com utilização obrigatória de grafos, nos grupos em sala de aula com acompanhamento e orientação aos estudantes pelo docente, quando solicitado.

5^a Aula: Atividades de combinatória sem a obrigatoriedade da utilização de grafos, nos grupos em sala de aula com acompanhamento e orientação aos estudantes pelo docente, quando solicitado.

(iv) Recursos para a atividade.

Os materiais utilizados durante as aulas foram: lousa e giz, lista de atividades impressa e um local com possibilidade de distribuir os estudantes em equipes de trabalho.

Conforme anunciado, o exemplo a seguir apresenta situações básicas cujo o objetivo é facilitar a instrução de discentes do ensino médio na construção de grafos que representem os elementos a serem enumerados numa contagem em combinatória.

Exemplo 1. *Se são efetivos num setor de uma empresa 5 homens e 6 mulheres acima de 35 anos, e 4 homens e 3 mulheres abaixo dessa faixa etária, então:*

- a) *Para determinar o total de funcionários desse setor, basta inicialmente considerar um grafo que relacione cada uma destas pessoas a um vértice de um grafo de vértices desconexos (conforme já visto no grafo do princípio aditivo da seção 3.2). Desta forma, o número procurado trata-se do total da contagem destes vértices, resultando em 18.*
- b) *Para precisar o número de duplas compostas por um homem e uma mulher com faixa etária acima de 35 anos constrói-se um grafo (baseado no princípio multiplicativo da seção 3.2) do seguinte modo: o conjunto dos homens e o conjunto das mulheres serão ambos representados por vértices que serão dispostos em dois níveis (cuja ordem destes níveis não interfere no resultado). Para facilitar, supõe-se que o grupo de vértice que representam as mulheres ficarão no primeiro nível. Daí tomando-se um vértice arbitrário deste nível, tem-se que ele pode ser conectado por uma aresta a cada um dos vértice que representam os homens, estabelecendo deste modo uma arborescência. Ao se considerar agora uma arborescência para cada vértice do primeiro nível, passa-se a ter um floresta desconexa cujo número de componentes é o número de mulheres. Já seus sumidouros representam o conjunto dos homens, repetido em cada arborescência. Em números, tem-se uma floresta de 6 arborescências*

com 5 sumidouros cada, ou seja, uma floresta com 30 sumidouros (ou caminhos das raízes aos sumidouros). É interessante frisar que estes caminhos são formados por dois vértices, isto é, formam as duplas da contagem. Assim, obtém-se o total de 30 duplas nesta contagem.

- c) Buscando estipular o número de equipes com três funcionários, do sexo masculino com faixa etária acima dos 35, para ocuparem o cargo de coordenador, secretário e tesoureiro, recorre-se a um grafo análogo ao de arranjos simples da seção 3.2. Neste caso os cargos indicam três níveis para as arborescências. Para a construção de uma arborescência nestes termos, toma-se: para raiz um dos 5 homens em questão, para vértices do segundo nível os 4 homens restantes, e para sumidouros destes vértices os três homens remanescentes do conjunto inicial, de forma a se obter da raiz aos sumidouros caminhos distintos com três vértices, totalizando 12 caminhos. Desta forma podem ser obtidas 5 arborescências distintas, formando-se, então, uma floresta com 60 sumidouros (ou caminhos das raízes aos sumidouros). Mais uma vez vê-se os caminhos citados realçando as equipes de três pessoas, isto é, os agrupamentos da contagem.
- d) Em vista de apontar o número possível de trios de funcionários abaixo de 35 anos para revezamentos no setor de recepção da empresa, tomando cada funcionário como vértices, basta no grafo que represente todos os seus enfileiramentos em três vértices (construção análoga ao item anterior), pontuar apenas um representante dentre os enfileiramentos de três permutados. Sendo assim, na nova configuração desse grafo, tem-se uma floresta com o mesmo número de arborescências, à saber 5, porém, o seguinte decréscimo do número de seus sumidouros: 15, 10, 6, 3 e 1. O que totaliza, então, um número de 35 sumidouros ou caminhos orientados com 3 vértices. É importante notar que esta construção é baseada no grafo de combinação simples da seção 3.2.

Esta forma de construção de grafos é, então, proposta como método de resolução de problemas de contagem aos discentes em vista de solucionarem as listas de atividades mostradas a seguir.

1ª Lista de Problemas Propostos

1. Utilizando-se os algarismos 1, 2, 3 e 4, esboce esquematicamente a contagem, obtendo quantos números ímpares com 3 algarismos distintos podem ser formados.
2. Utilizando-se os algarismos 0, 1, 2 e 3, esboce esquematicamente a contagem, obtendo quantos números com 3 algarismos distintos podem ser formados.

3. Em um posto de saúde Andrey, Brena, Carlota e Délcio são funcionários do setor de recepção. Esboce esquematicamente a contagem, obtendo o número total, de:
- revezamentos por trios possíveis neste setor, se a porta principal necessita de trios para recepcionarem os pacientes.
 - revezamentos dentre os quatro funcionários citados acima possíveis, se há uma ala de triagem, uma de curativos e outra para emergência, necessitando cada uma delas de um recepcionista.
 - revezamentos dentre os mesmos quatro funcionários possíveis, se for acrescentado ao item anterior uma ala para entrega de medicamentos.
 - revezamentos por trios possíveis neste setor, se Elcy foi contratado como recepcionista, mas não pode trabalhar com Brena.

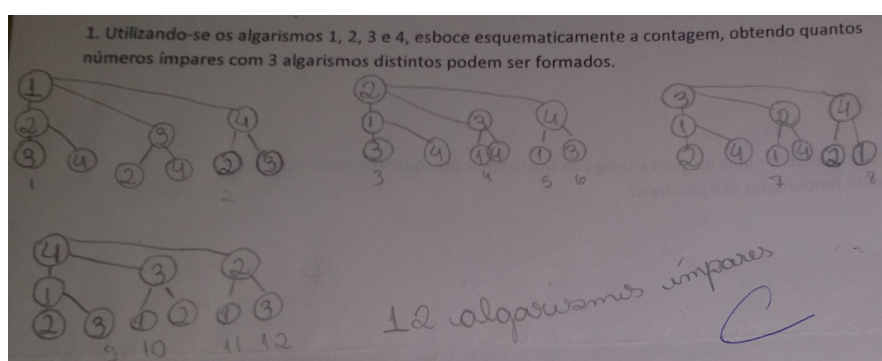
Comentários sobre as soluções propostas pelos discentes para a 1ª Lista

As soluções dos exercícios desta lista são, aqui, comentadas a partir das observações realizadas durante a sua realização por parte dos alunos. Algumas fotografias são utilizadas como recurso visual para consolidar os comentários feitos.

É importante destacar que convencionou-se a direção vertical do primeiro ao último nível nos grafos obtidos a seguir pelos estudantes, em vista de facilitar a construção das figuras pelos mesmos.

No exercício 1, formam-se árvores desconexas com três níveis, nos quais os caminhos do primeiro ao último vértice representam os números com três dígitos formados com 1, 2, 3 e 4. Destes serão contados somente os ímpares, isto é, os com vértices ímpares no último nível. Fato realizado pelos estudantes ao enumerarem sob estes vértices, conforme mostra a Figura 39, que resultou em 12 números ímpares. Houve apenas um pequeno erro destes alunos ao referenciarem 12 “*algarismos*” e não 12 números como se esperava.

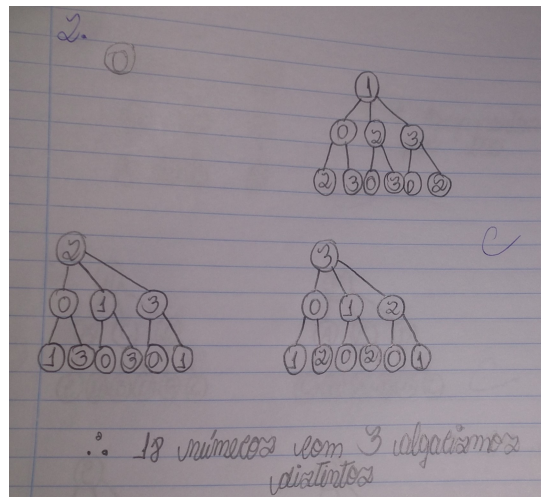
Figura 39 – Grafo - Exercício 1 - 1ª Lista



Fonte: o autor.

Já na Figura 40, referente ao exercício 2, excetua-se na contagem a árvore cujo vértice no primeiro nível representa o zero, tendo em vista a contagem de números com três algarismos distintos no sistema de numeração decimal posicional, em que o zero a esquerda é desconsiderado. Exclusão evidenciada na figura dos estudantes ao desconsiderarem a árvore que possui o vértice do primeiro nível representando o 0.

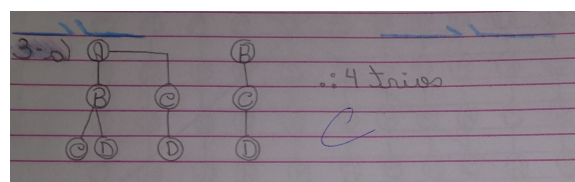
Figura 40 – Grafo - Exercício 2 - 1ª Lista



Fonte: o autor.

A Figura 41 esquematiza o exercício 3a) em que os vértices representam os funcionários e os caminhos que ligam os vértices do primeiro nível ao terceiro são os trios a serem contados. Resultando, assim, em 4 trios.

Figura 41 – Grafo - Exercício 3a) - 1ª Lista

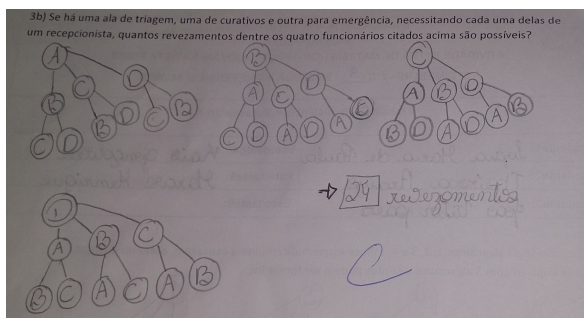


Fonte: o autor.

As árvores desconexas da Figura 42 no exercício 3b), representam em seus caminhos que ligam o vértice do primeiro nível ao do último, todos os revezamentos possíveis de quatro funcionários em três postos de trabalho. Tem-se então seis vértices no último nível de cada uma destas árvores gerando 24 destes vértices, que equivale à contagem do número de revezamentos buscado.

É importante observar que a ordem entre os funcionários fez toda a diferença no resultado. No exercício 3a) a expressão trios indica que a ordem entre os funcionários não altera a equipe a ser revezada. Em contrapartida ao exercício 3b), pois a ordem entre os

Figura 42 – Grafo - Exercício 3b) - 1ª Lista

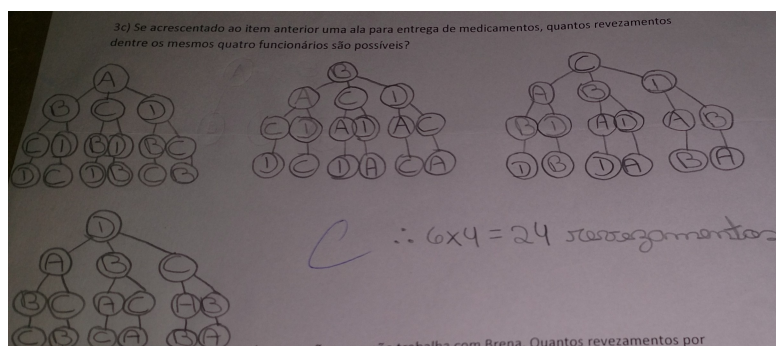


Fonte: o autor.

funcionários predispõe a mudança de ocupação entre eles, configurando equipes distintas. Interpretação textual que, ao ser evidenciada, auxilia os estudantes na diferenciação entre uma combinação simples (exercício 3a)) e um arranjo simples (exercício 3b)), nestas e em outras situações análogas.

Para o exercício 3c), busca-se o total da contagem de equipes com quatro funcionários distribuídos em quatro alas de trabalho, isto é, as permutações possíveis destes quatro funcionários. Obtém-se na Figura 43 representação da situação, dada por quatro árvores desconexas com seis vértices no quarto nível de cada. O que totaliza uma contagem de 24 destes, ou 24 revezamentos como se buscava.

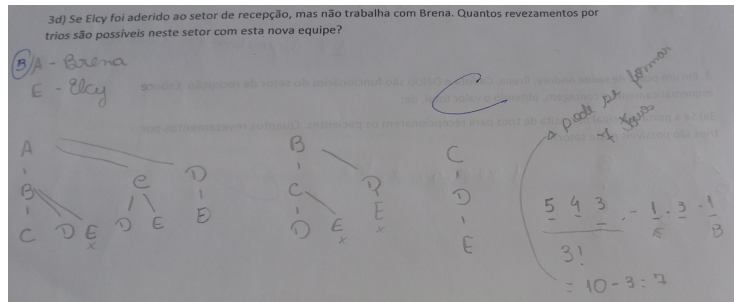
Figura 43 – Grafo - Exercício 3c) - 1ª Lista



Fonte: o autor.

Na Figura 44, referente ao exercício 3d), exclui-se da contagem os caminhos (do primeiro ao último nível) que possuem Brena e Elcy (exclusão indicada pelos estudantes com a marca de um “X” sob os vértices dos últimos níveis destes caminhos), dentre os caminhos que representam todos os trios possíveis no setor. Observa-se nesta situação a importância do grafo para identificação de 3 equipes que, pelo enunciado, não podem ocorrer para o revezamento proposto, dentre 10, o que totaliza um número de 7 equipes possíveis para a questão disposta.

Figura 44 – Grafo - Exercício 3d) - 1ª Lista



Fonte: o autor.

2ª Lista de Problemas Propostos

1. Quantos números se pode formar:

- Com três dígitos distintos e usando os algarismos 0, 2, 5 e 7?
- Que sejam pares e com três dígitos distintos e usando os algarismos 1, 3, 4 e 7?
- Que sejam divisíveis por três, com três dígitos distintos usando os algarismos 1, 3, 5 e 7?

2. Em uma escola há 3 mulheres e 4 homens para cuidarem da limpeza. Calcular o número que se pode formar de:

- Duplas para dois banheiros, sendo um funcionário em cada: um homem para o masculino e uma mulher para o feminino.
- Duplas femininas para a cozinha.
- Trios masculinos para o almoxarifado.
- Duplas para limparem o hall principal.
- Duplas femininas onde cada pessoa deve coordenar um dos segmentos do ensino fundamental: séries básicas ou séries finais.
- Trios masculinos onde cada pessoa deve coordenar um dos turnos: manhã, tarde ou noite.
- Quartetos masculinos para revezarem nos laboratórios de: biologia, química, física ou informática.
- Trios para o auditório, dentre os funcionários Alan, Bernardo, Cael, Daniel e Ercília, onde Cael e Ercília não devem compor a mesma equipe.
- De trios para treinamento profissional, tomando uma pessoa de cada um dos grupos de funcionários seguintes:

$$G1 = \{\text{Alan, Bernardo}\}, \text{funcionários com 5 anos de trabalho.}$$

$G_2 = \{\text{Calel, Daniel, Ercília, Flávia}\}$, funcionários com 7 anos de trabalho.

$G_3 = \{\text{Gean, Hélio, Inês}\}$, funcionários contratados no dia.

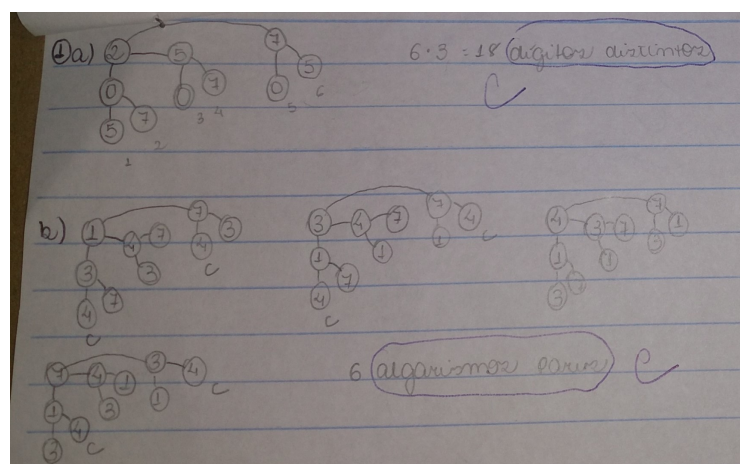
Comentários sobre as soluções propostas pelos discentes para a 2ª Lista

As soluções exibidas, aqui, através de grafos, têm como objetivo complementar a elucidação deste método de resolução. Haja vista citação anterior, a livre escolha do método pelos alunos para a resolução desta lista .

Em alguns dos grafos seguintes utiliza-se o símbolo ▲ como indicador da contagem dos elementos favoráveis aos termos do enunciado da questão, enquanto que o símbolo ★ como indicador da contagem dos elementos desfavoráveis.

Observa-se no grafo 1a) da Figura 45 que os alunos obtiveram o número de vértices no último nível de uma árvore, daí inferiram haverem somente 3 delas, pois a que possui o vértice do primeiro nível representando 0 é descartada visto esquematizar agrupamentos, distintos 2 a 2, com 3 números iniciados por 0 os quais no sistema de numeração decimal posicional não configuram um número de três dígitos. Assim, essa formação, resultou em $6 \cdot 3 = 18$ números com três dígitos distintos.

Figura 45 – Grafo - Exercício 1a) e b)- 2ª Lista



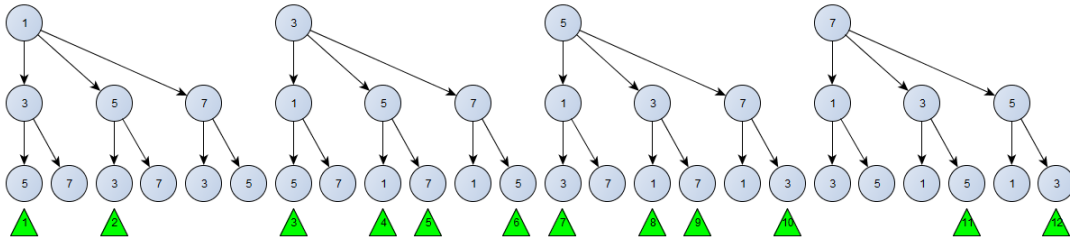
Fonte: o autor.

Ainda nesta figura, no grafo 1b) há a formação de 24 agrupamentos, distintos 2 a 2, com 3 números, dos quais 6 terminam em 4 (o único dígito par possível dos algarismos enunciados) formando, então, 6 números pares com três dígitos distintos. Aqui os alunos evidenciam a contagem através da marcação comum um “C” em vértices do nível final das árvores construídas.

No exercício 1c), muitos erros foram cometidos pelos estudantes, mas voltados à interpretação quanto à regra de divisibilidade por 3. Assim, segue as arborescências

que representariam esta resolução na Figura 46. Nela há a formação de 24 agrupamentos (distintos 2 a 2) com 3 números, dos quais observa-se serem 12 divisíveis por 3.

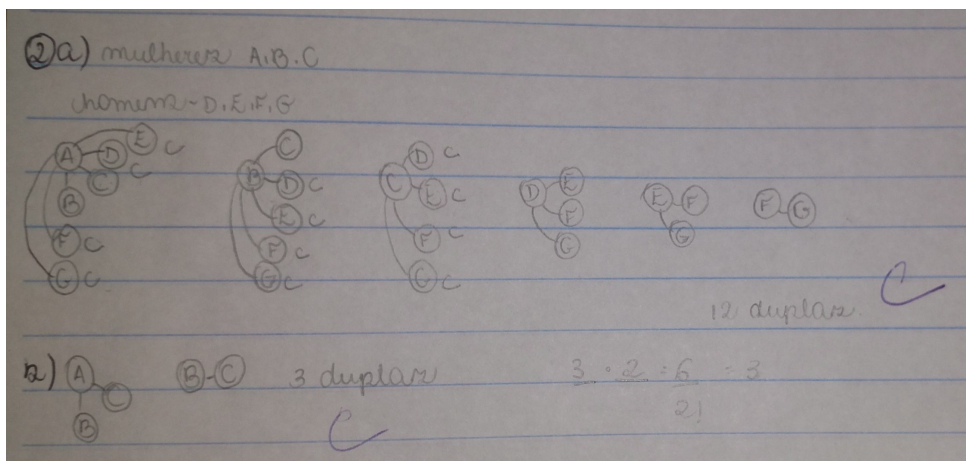
Figura 46 – Grafo - Exercício 1c) - 2ª Lista



Fonte: o autor.

Mesmo não utilizando o grafo sugerido para situações nas quais se recorre ao princípio multiplicativo. A resolução disposta por este grupo para o exercício 2a) foi bastante interessante, utilizando-se também de grafos. Elencando o grupo de mulheres: A , B e C , e o de homens: D , E , F e G , a Figura 47 mostra a formação possível de 21 duplas dentre sete pessoas. Destas duplas os alunos marcaram com “C” somente as que possuíam um homem e uma mulher, resultando em 12 duplas. Este exemplo consolida o auxílio de grafos como ferramenta no âmbito concreto para estabelecer um raciocínio lógico-abstrato para resoluções de problema. Na mesma figura, o grafo referente a 2b), os alunos o constroem obtendo as duplas possíveis dentre três mulheres representadas pelos vértices A , B e C . Dispondo assim, 3 duplas.

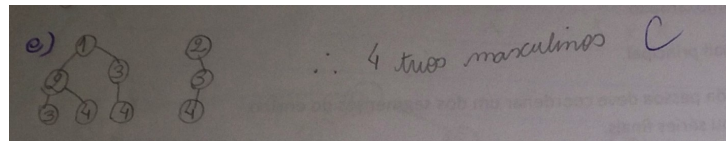
Figura 47 – Grafo - Exercício 2a) e b)- 2ª Lista



Fonte: o autor.

Representando o grupo de homens pelos vértices: 1, 2, 3 e 4, o grafo construído pelos alunos, conforme Figura 48, mostra a formação de 4 trios masculinos.

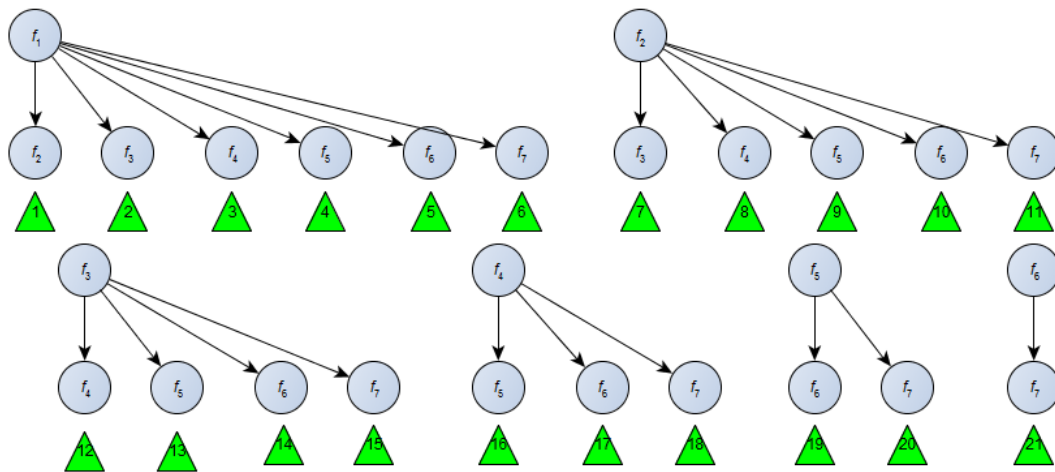
Figura 48 – Grafo - Exercício 2c) - 2ª Lista



Fonte: o autor.

No exercício 2d), os grupos discentes optaram pelo raciocínio algébrico $7 \cdot 6/2!$. No entanto, segue a construção do grafo desta resolução. Sendo o grupo de funcionários: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ e f_7 , a Figura 49 mostra a formação de 21 duplas possíveis neste grupo.

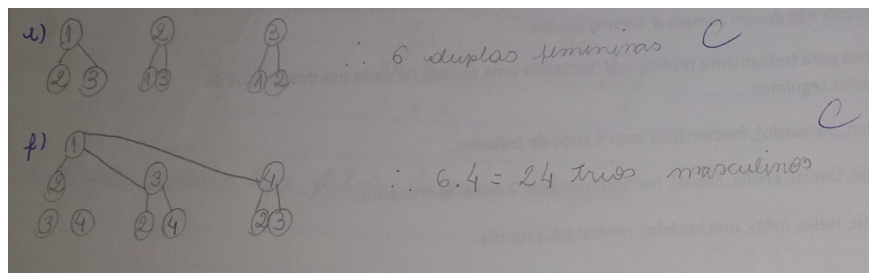
Figura 49 – Grafo - Exercício 2d) - 2ª Lista



Fonte: o autor.

Para o exercício 2e) os alunos representaram o grupo de mulheres pelos vértices: 1, 2 e 3, na Figura 50 em que a coordenação de cada hall dispôs a influência da ordem sobre os agrupamentos gerando 6 deles.

Figura 50 – Grafo - Exercício 2e) e f) - 2ª Lista



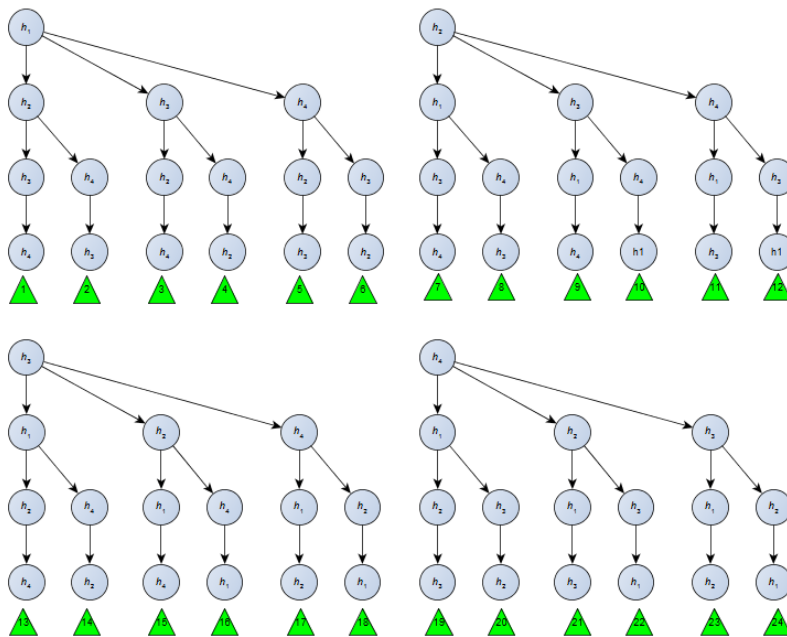
Fonte: o autor.

Já no grafo referente ao exercício 2f) representando os homens pelos vértices: 1, 2, 3 e 4, mostra-se a formação de 6 agrupamentos possíveis em uma árvore deles. Inferindo

haver mais três destas árvores, os estudantes obtêm o resultado final algebricamente: $6 \cdot 4 = 24$.

Nos exercícios 2g) e h) os estudantes optaram pela resolução algébrica. Respectivamente: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ e $(5 \cdot 4 \cdot 3 - 3!(3 \cdot 1 \cdot 1))/3! = 10 - 3 = 7$. Mas segue, também, nas Figuras 51 e 52 a resolução através de grafos.

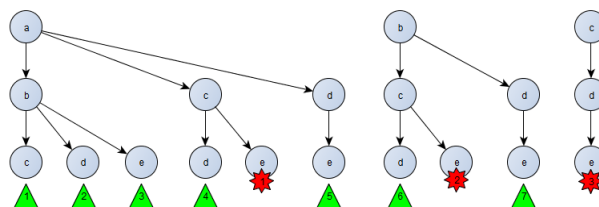
Figura 51 – Grafo - Exercício 2g) - 2ª Lista



Fonte: o autor.

Dado o grupo de homens: h_1, h_2, h_3 e h_4 , a Figura 51 mostra a formação de 24 agrupamentos possíveis com 4 deles.

Figura 52 – Grafo - Exercício 2h) - 2ª Lista



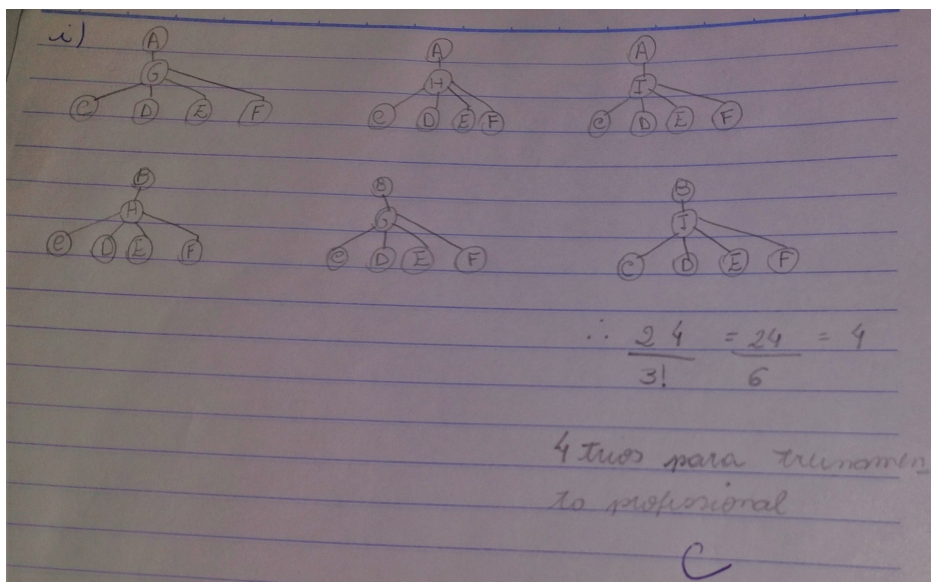
Fonte: o autor.

Dado o grupo de funcionários: a, b, c, d, e , a Figura 52 mostra a formação de 10 trios dentre eles. Excetuando-se os que possuem c e e (que são 3), observa-se então serem 7 os trios procurados.

Considerando no exercício 2i) da 2ª lista o grupo $G_1 = \{A, B\}$, $G_2 = \{C, D, E, F\}$, $G_3 = \{G, H, I\}$, a Figura 53 mostra como os estudantes, mesmo de forma distinta aos

método sugerido, escolhem por utilizar árvores desconexas para a resolução, demonstrando uma apropriação de grafos como ferramenta para a contagem do enunciado. Obtém-se, assim, 24 agrupamentos possíveis com 3 deles.

Figura 53 – Grafo - Exercício 2i) - 2ª Lista



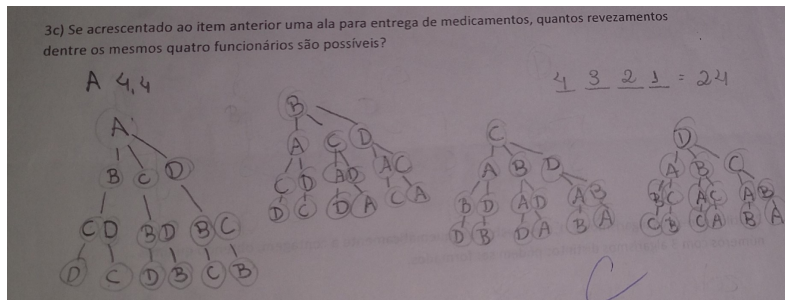
Fonte: o autor.

Comparação do aprendizado do conteúdo quanto aos anos anteriores

Diante da prévia sugerida por livros didáticos com fórmulas de resolução para problemas de combinatória, a memorização destas era o objeto principal dos estudantes. Já, após a utilização de grafos para a resolução de problemas desse estilo, observou-se o desenvolvimento de um raciocínio mais intuitivo e menos mecânico dos alunos ao analisarem os elementos a serem contados nas situações em questão. Desta forma, as fórmulas usuais de combinatória tornaram-se consequência de uma solução construída, minimizando a necessidade de sua memorização. Corroborando o texto anterior as Figuras 54 a 58 mostram situações nas listas de atividades em que os estudantes correlacionam as expressões algébricas de cálculo em contagens combinatórias com os grafos que o representam. Fato que leva a inferência de um despertar do raciocínio abstrato nestes cálculos após a utilização das representações concretas dispostas nos grafos.

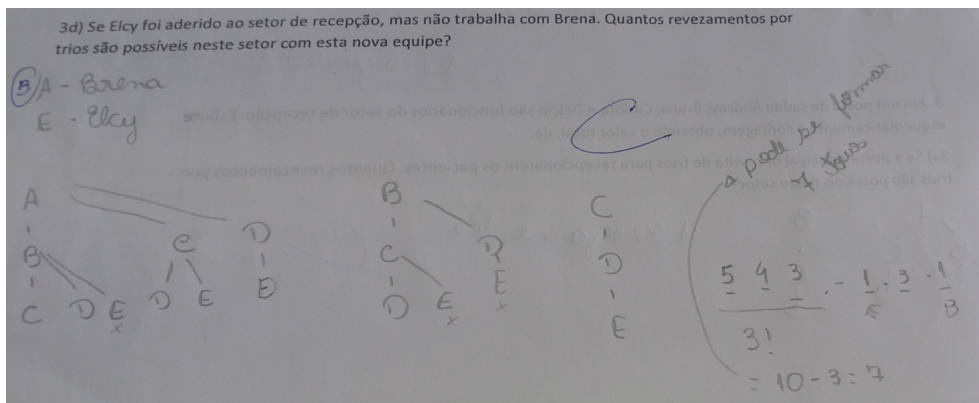
Assim, infere-se que as árvores de grafos auxiliam para maior clareza no raciocínio quanto a diferenciação da forma de contagem a ser feita na situação-problema proposta. Facilitando, ainda, a compreensão da melhor forma de resolução a ser escolhida para situações distintas.

Figura 54 – Exercício 3c) da 1ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos



Fonte: o autor.

Figura 55 – Exercício 3d) da 1ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos



Fonte: o autor.

4.3 Entendendo as câmeras de segurança na escola

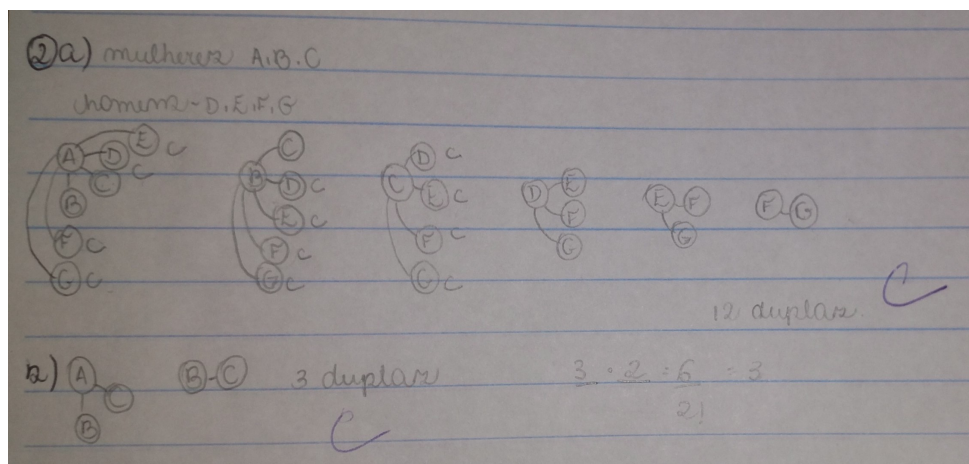
Esta seção apresenta uma curiosa aplicação de grafos, de aspecto mais prático, cujo objetivo é atrair a atenção e motivar a participação dos discentes no seu processo de ensino-aprendizado.

A aplicação aqui exposta é baseada no texto *Como Proteger um Museu* (AIGNER; ZIEGLER, 2002, cap. 28), em que os alunos foram instigados a verificarem e analisarem o sistema de câmeras dispostas em alguns pontos da escola.

A observação proposta nesta situação, foi a de interpretar tais pontos como vértices de grafos, em que as arestas são construídas de forma a representarem o alcance visual dessas câmeras, e então, esquematizar, com a área interna da figura assim obtida, as regiões na escola realmente visualizadas.

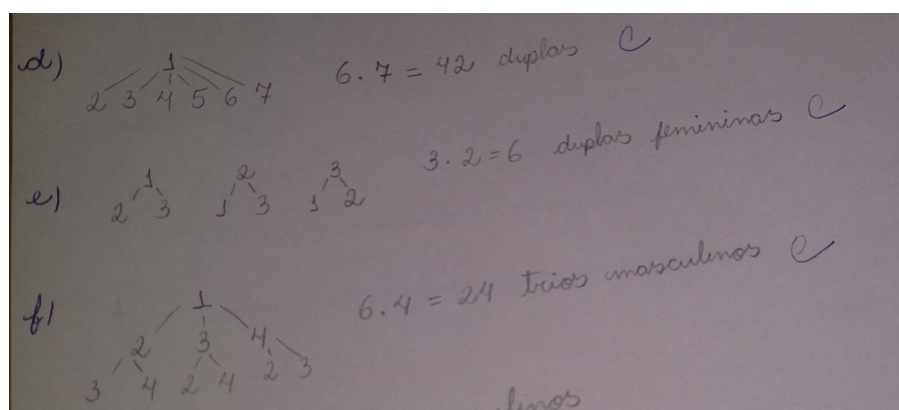
A investigação do alcance das câmeras foi feita pelos estudantes, sob orientação docente, da seguinte forma: 3 estudantes (observadores) verificaram a central de imagens geradas pelas câmeras de segurança na direção da escola e rascunharam, com o apoio

Figura 56 – Exercício 2b) da 2ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos



Fonte: o autor.

Figura 57 – Exercício 2d) e e) da 2ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos

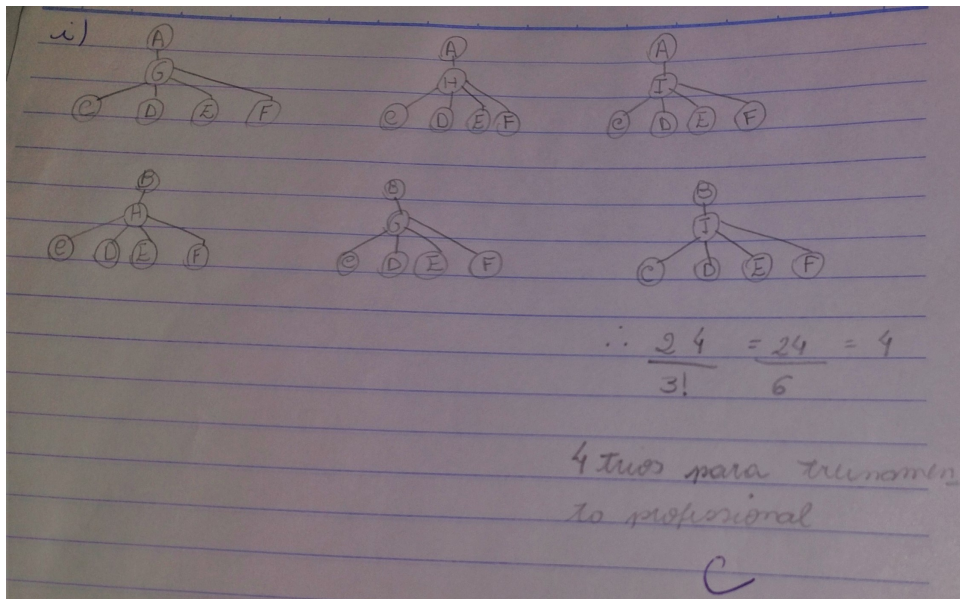


Fonte: o autor.

docente, grafos sobre a planta do perímetro investigado, em seguida, perfizeram diversos caminhos pelo perímetro escolar investigando o alcance visual dessas. No momento da investigação foram precisados os caminhos alcançados visualmente e configurados de forma mais exata as arestas do grafo em construção. Foram elaboradas, então, nas Figuras 59 a 61, o esboço da planta escolar com a localização das câmeras, bem como a esquematização do alcance visual que possuem. Para melhor entendimento destas figuras seguem as seguintes observações:

- 1º) Os campos em amarelo são os de alcance com nitidez das câmeras já existentes (câmeras indicadas por “sóis” amarelos - cujo os números indicam a numeração disposta na tela de visualização da direção).
- 2º) Os campos verdes são os que poderão ser visualizados com nitidez com a inserção

Figura 58 – Exercício 2i) da 2ª Lista resolvido por estudantes correlacionado grafos e cálculos algébricos



Fonte: o autor.

de novas câmeras (câmeras indicadas por “sóis” verdes sem numeração), ou pela mudança de posição de algumas câmeras (câmeras indicadas pelos “sóis” verdes com a mesma numeração de suas posições anteriores).

3º) Na Figura 61 são explicitados os grafos observados nas plantas cujos entornos são representados nas arestas, e as câmeras nos vértices.

Dessa forma o mapa sugere a inserção de algumas câmeras para que haja uma abrangência maior e mais nítida de espaços da escola.

Um fator interessante constatado fora a presença de pontos cegos (apresentados nas figuras citadas pelas áreas verdes) no perímetro inspecionado pelas câmeras, que levou a investigar pontos estratégicos de realocação dessas e, como outra alternativa, a inserção de mais unidades para sanar o problema.

O trabalho foi realizado em cinco reuniões. A primeira tratou da apresentação aos discentes da observação proposta e da teoria de grafos, utilizada em aplicativos para investigação de percursos entre dois pontos escolhidos, como uma ferramenta para esquematizar o observado.

A segunda dedicou-se à construção pelos alunos, com orientação docente, de um esboço de planta do perímetro escolar a ser observado (especificando a localização das câmeras), e a impressão de várias cópias para serem utilizadas como base para se rascunhar os grafos de representação das áreas visualizadas pelas câmeras.

A terceira voltou-se à observação, pelos estudantes, do perímetro escolar alcançado pelas câmeras e a elaboração de um rascunho de grafos para representação desse alcance.

A quarta problematizou os pontos cegos das câmeras e, paralelamente, a outra observação da central de imagens geradas por elas, rascunhou-se na planta alguns reposicionamentos, bem como a inserção de mais unidades das câmeras.

A quinta consolidou os resultados obtidos organizando os dados elaborados para confecção de um banner para apresentação na feira de ciências da escola (Veja o Anexo A).

4.4 Caminhos entre a escola e o ponto de ônibus principal mais próximo

Esta seção apresenta uma aplicação inspirada no célebre problema do *Caixeiro Viajante*, o qual possui como objetivo obter uma melhor rota/itinerário que inclua diversos destinos dentre todos os possíveis. Tal problema, apesar de sua elementar solução matemática, é ainda muito atual pois os recursos computacionais para executar esta solução na maioria dos casos são insuficientes ou ineficientes. Insuficiência advinda do crescimento fatorial da quantidade de possibilidades de rotas em relação ao número dos destinos que ela deve percorrer.

Nesta aplicação os alunos foram instigados a determinar qual seria a melhor rota a se tomar entre a escola e o ponto de ônibus principal mais próximo a ela.

Todavia, há algumas formas distintas de se fazer esse percurso. O proposto aos discentes nesta situação foi elaborar um esquema com os caminhos (a pé) que interligam estes locais.

A elaboração proposta ocorreu como segue: três estudantes pesquisaram em aplicativos de GPS, *Google Maps* e *Waze*¹, o mapa dos vários caminhos. Notou-se, porém, que alguns caminhos feitos a pé não constam nos aplicativos. Desta forma esquemas que representam estas rotas foram elaborados. Como vértices foram tomados figuras, dispostas por estes aplicativos, de pontos estratégicos, interligados por arestas de duplo sentido indicando a possibilidade de ida e volta nestes percursos.

No grafo exposto na Figura 62 tem-se uma síntese do trabalho realizado pelos discentes, em que os vértices E e O representam respectivamente a escola e o ponto de ônibus. Os discentes perceberam a existência de seis caminhos:

1. Caminho Vermelho: E-1-2-3-6-8-9-O;
2. Caminho Azul: E-1-3-2-6-7-10-O;

¹ Aplicativos disponíveis gratuitamente para smartphones nas lojas virtuais Play Store e App Store.

3. Caminho Amarelo: E-4-8-10-O;
4. Caminho Verde: E-1-5-6-7-10-O;
5. Caminho Rosa: E-1-5-6-8-9-O;
6. Caminho Marrom: E-1-5-6-8-10-O.

Além disso, os discentes determinaram, em seu experimento, o tempo gasto em cada caminho: Vermelho - 10min, Azul - 9min, Amarelo - 8min50s, Verde - 6min40s, Rosa - 8min50s e Marrom - 8min15s.

Durante as reuniões necessárias para implementar este estudo, as pautas foram as seguintes:

- 1^a) Apresentação aos discentes da observação proposta e da teoria de grafos, utilizada em aplicativos para otimização de percursos entre dois pontos escolhidos, como uma ferramenta para esquematizar o observado.
- 2^a) Elaboração de um grafo baseado em pesquisa nos aplicativos Google Maps e Waze dos percursos em questão. Cálculo do tempo gasto em cada percurso conforme explicitado anteriormente.
- 3^a) Apreciação de caminhos (a pé) não observados pelos aplicativos, confecção de um grafo que os contenha, bem como dos tempos neles gastos.
- 4^a) Elaboração da conclusão do trabalho quanto ao percurso ótimo e organização dos dados obtidos pra confecção de um banner para mostra na feira de ciências da escola.

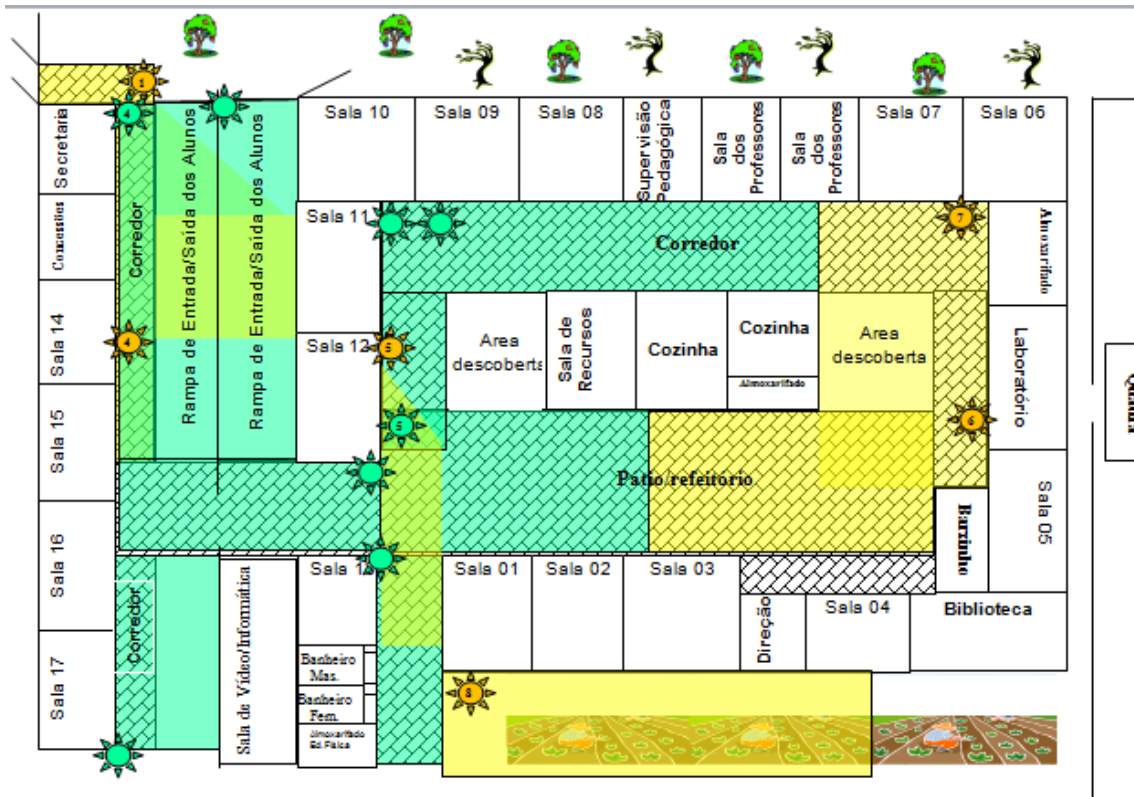
O Banner citado nestes dois trabalhos é disposto no Anexo [A](#).

Figura 59 – Plantas e Grafos de representação do campo visual de câmeras de segurança na escola



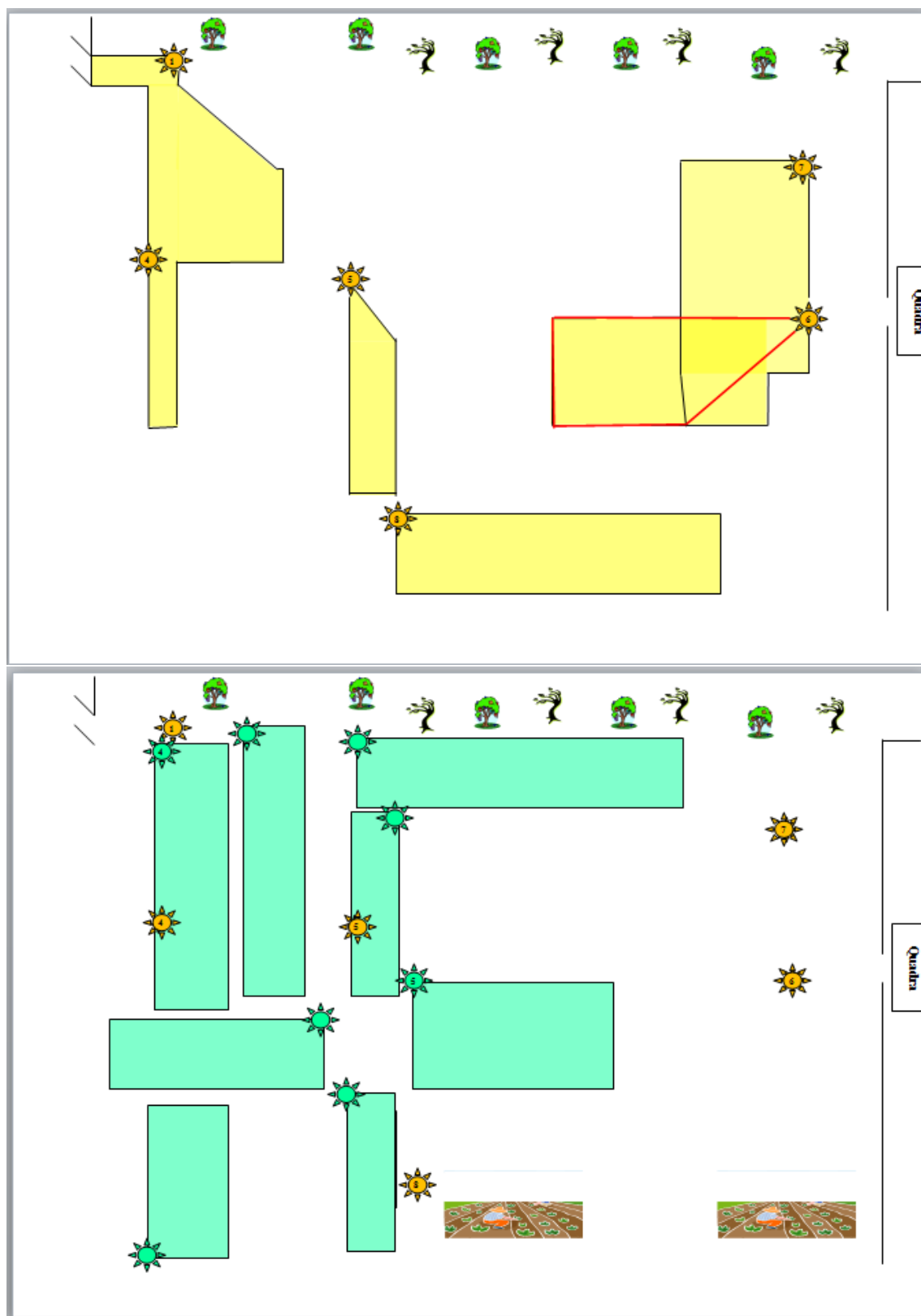
Fonte: o autor.

Figura 60 – Plantas e Grafos de representação do campo visual de câmeras de segurança na escola



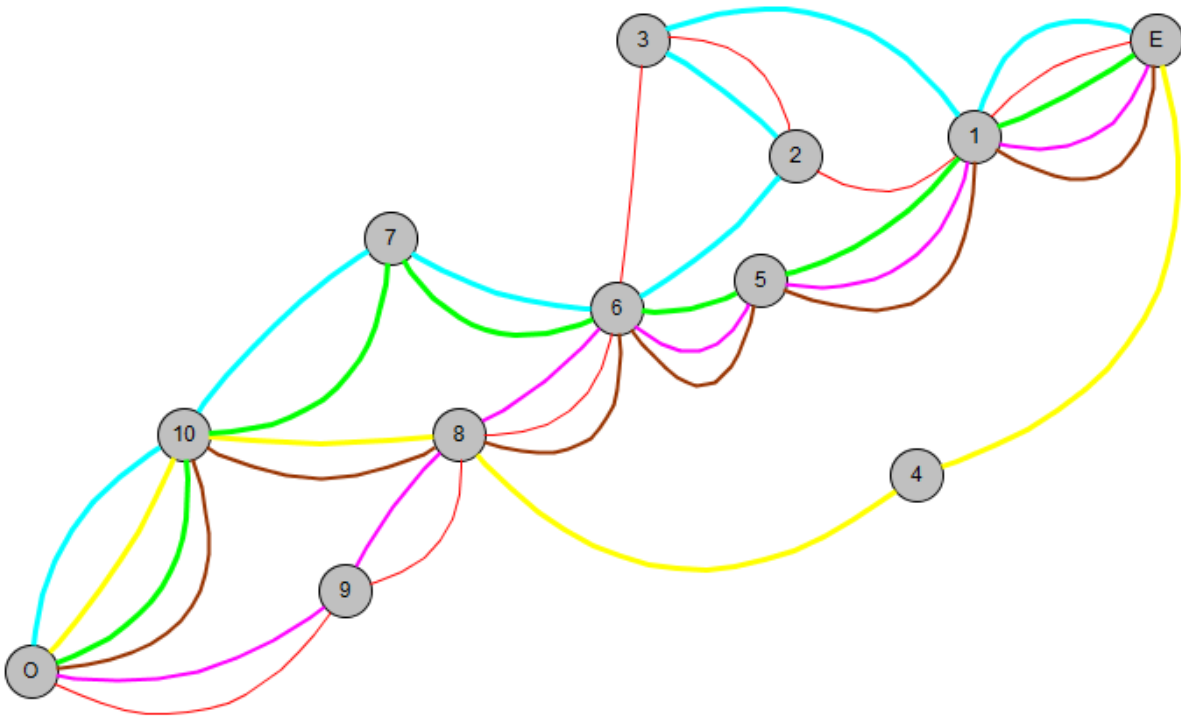
Fonte: o autor.

Figura 61 – Grafos de representação do campo visual de câmeras de segurança na escola



Fonte: o autor.

Figura 62 – Representação de rotas (a pé) entre a escola (vértice E) e o ponto de ônibus (vértice O)



Fonte: o autor.

5 Conclusão

Tendo por principal objetivo a aplicação da Teoria de Grafos como ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem em matemática no 2º ano do ensino médio, desde a revisão bibliográfica sobre sua história, foi possível observar a vasta aplicabilidade herdada desde os seus primórdios. Revisão que aponta Leonhard Euler como fundador dessa teoria em vista da resolução de uma situação relacionada a rotas de percursos (o famoso “Enigma de Königsberg” no século XVIII), muito embora figuras mais antigas (citadas por alguns teóricos) apresentem um prelúdio do que é hoje significado pela ciência como grafo. Sendo assim, tornou-se obrigatório estender a revisão à teoria em si, a qual o estudo fora apropriado por áreas diversas, dentre elas a Ciência da Computação e a Matemática, o que dispõe uma inexistência na unicidade de terminologias, notações e significados para seus conceitos, não obstante sejam estes bem estabelecidos.

Especificada a aplicação desta teoria sobre o ensino de Análise Combinatória, realizou-se, ainda, o estudo teórico de conceitos principais deste arcabouço teórico. Arcabouço que possui vínculos, também, com o Triângulo de Pascal no qual se observa diversas relações entre seus elementos. Além disto, para esse ensino se apresentou um método de facilitação para o seu aprendizado utilizando grafos, o que consolidou um elo entre a Teoria de Grafos e a Análise Combinatória.

O elo citado é, então, inserido à metodologia de ensino no planejamento e elaboração de algumas aulas, momentos em que através de exercícios de classe para grupos de estudantes ocorreram a avaliação do aprendizado do método e da aprendizagem quanto a combinatória. Observa-se, então, sua eficácia para o ensino-aprendizagem uma vez que nos exercícios propostos nas aulas citadas, pode-se constatar a apropriação, pelos discentes, do método sugerido para resolução de problemas em análise combinatória.

Logo após essa etapa, propôs-se aos discentes trabalhos de aplicação de grafos para maior conhecimento de sua aplicabilidade. Baseadas no texto *Como Proteger um Museu* (AIGNER; ZIEGLER, 2002, cap. 28) e no problema *Caixeiro Viajante* as atividades propostas foram, respectivamente, para o entendimento e a investigação de câmeras de segurança da escola, e a otimização de caminhos (a pé) de menor tempo entre esta escola e o ponto de ônibus principal mais próximo dela. Trabalhos apresentados na feira de ciência da escola com êxito.

Em uma análise da contribuição à docência, este trabalho é um incentivo à busca de instrumentos concretos para a construção de raciocínios lógico-abstratos em matemática, tornando em muitas vezes, a aula mais atrativa ao discente. Com tais recursos, o discente tende a se apropriar com mais facilidade do saber, potencializando, daí, a ação do professor

no aprofundamento do conhecimento adquirido.

Considera-se, ainda, proeminente o resultado das atividades propostas por este trabalho. Muito embora tenha ocorrido a concentração principal em situações mais simples de problemas em Análise Combinatória. Fator que motiva um aprofundamento, das atividades aqui abordadas, para situações mais complexas voltadas para o ensino deste conteúdo.

Observando, sobretudo, as atividades práticas de aula, fora possível concluir ser o grafo uma ferramenta em potencial para ensino-aprendizado tendo em vista, principalmente, o seu papel para representação concreta de elementos em contagens. Ferramenta que estimula o raciocínio lógico-abstrato, contribuindo para este avanço cognitivo.

A Banner da Feira de Ciências


Este apêndice traz fotos (Figura 63) de registro da apresentação dos alunos na feira de ciências da escola em que estudam em Viçosa/MG, bem como slides (elaborados pelos discentes e o autor) que formaram o banner que fora apresentado pelos mesmos.

Figura 63 – Apresentação sobre a Teoria de Grafos por alunos da escola.



Fonte: o autor.

Figura 64 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola

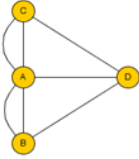


*Aplicações da
Teoria de Grafos*

Objetivo

Este trabalho tem o intuito de apresentar um breve estudo sobre a Teoria de Grafos, trazendo como foco principal algumas de suas aplicações práticas.

Conceitos da Teoria de Grafos

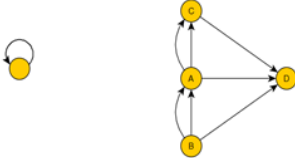


- ✓ Sinteticamente, pode-se definir um **grafo** como um **conjunto de vértices e arestas**.
- ✓ Os **vértices**, de forma geral, simplificam a representação de: locais, pessoas, objetos, fontes de distribuição, ...; e as **arestas** indicam a relação existente entre eles.

Fonte: o autor.


Figura 65 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola

Conceitos da Teoria de Grafo



- ✓ Caso a aresta possua como extremidades um só vértice, tem-se um **laço**. Ao se escolher direção para cada aresta, esta torna-se um **arco** e o grafo agora é denominado por **dígrafo**.
- ✓ Além disto, a relação entre estes vértices pode ser dimensionada, conforme será visto nos exemplos a seguir.

Primórdios da formalização da Teoria de Grafos



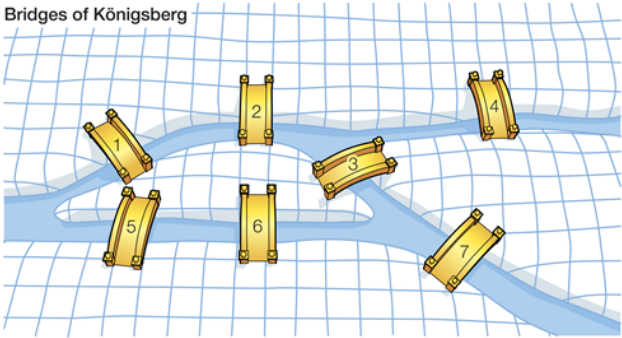
Leonh. Euler

- ✓ Por volta de 1736 Leonhard Euler autentica uma linguagem esquemática que recolhe os dados principais em situações dessa categoria.
- ✓ A partir daí considera-se a gênese de uma nova teoria consumada em sua publicação elaborada entre 1736 e 1741, hoje conhecida como Teoria de Grafos.

Foto - Leonhard Euler (Fonte: <https://sites.unicentro.br/wp/wp-content/uploads/2016/09/20/leonhard-euler-3707-3788/>)

Primórdios da formalização da Teoria de Grafos

Bridges of Königsberg




© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

Foto de Königsberg (Fonte: <https://www.britannica.com/images/KonigsbergBridges01011>)

Fonte: o autor.

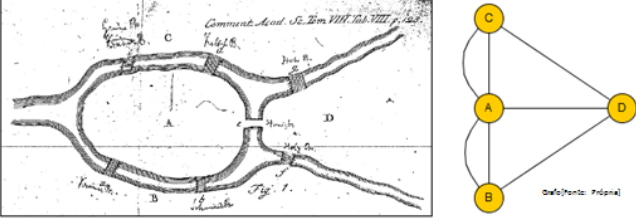
Figura 66 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola

Primórdios da formalização da Teoria de Grafos




Fonte: <https://www.google.com/maps/@54.411414,40.252141,15z>

Primórdios da formalização da Teoria de Grafos



Fonte de [Konigsberg](#) (Fonte: Euler, 1741, p. 128)

Primórdios da formalização da Teoria de Grafos



- ✓ Após a publicação de Euler, problemas análogos ao de Konigsberg podem, então, ser facilitados por grafos como o esboçado anteriormente.
- ✓ Convencionou-se a nomeação de seus círculos (ou pontos) por vértices ou nós, e das linhas que os interligam por arestas ou arcos.

Fonte: o autor.

Figura 67 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola



Fonte: o autor.

Figura 68 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola

RESPONDE QUE EU TE ESCUTO

Brasileiros criam método de análise da fala que detecta distúrbios psiquiátricos

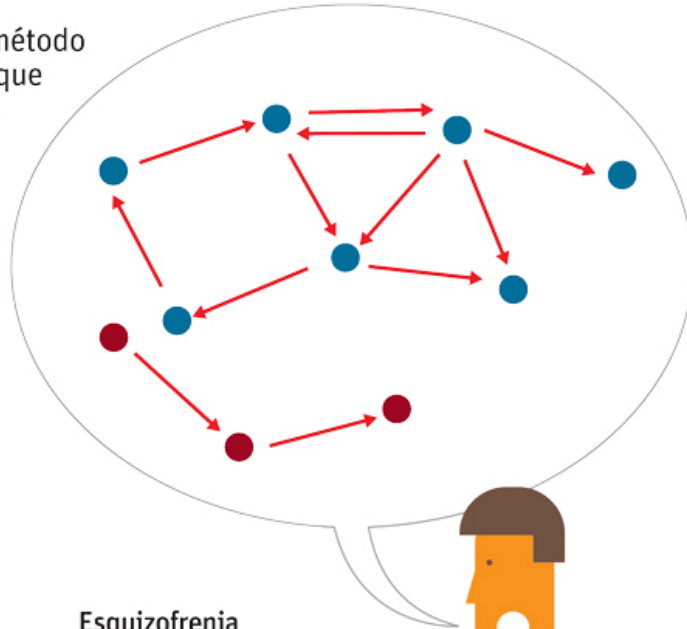
A PESQUISA

Cientistas entrevistam voluntários e pedem para que eles contem um sonho. Os relatos passam por um software e são transformados em gráficos (grafos)

CADA PONTO

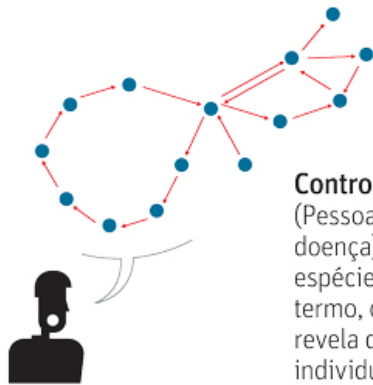
representa um assunto dentro de uma narrativa

- dentro do assunto
- fora do assunto



Esquizofrenia

Os relatos são relativamente mais retilíneos, falam menos, mas ainda saem do assunto perguntado



Controle

(Pessoas sem a doença) São uma espécie de meio termo, o que revela diferenças individuais



Mania

São prolixos, "perdem-se" mais nas respostas, indo e vindo nos assuntos

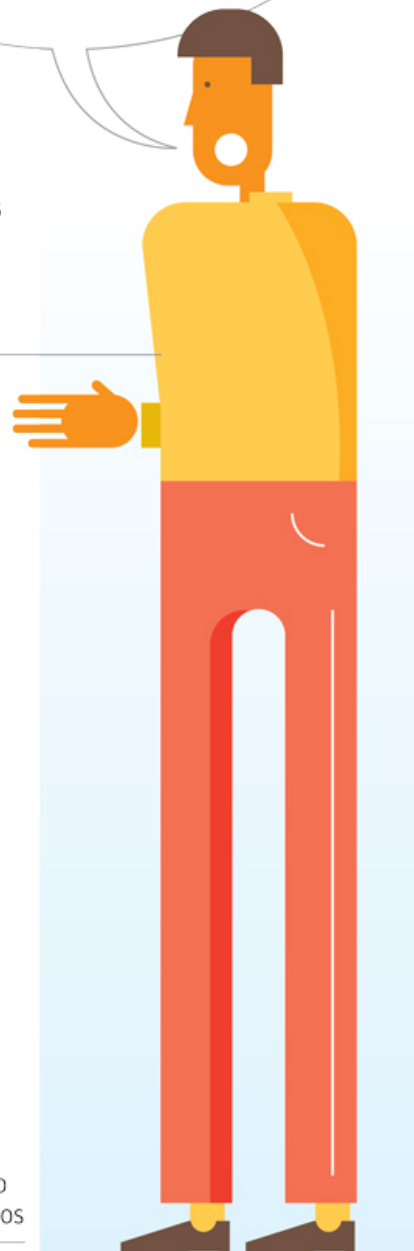


Figura 69 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola



Figura 70 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola

Aplicando Grafo como esquema para representação

Aplicando Grafos em demandas de decisão

✓ Como minimizar a suspensão de distribuição de água frente a um rompimento na rede?

Rompimento na distribuição de água (rupture representada pelo ícone azul)
Fonte: http://www.pucrs.br/pospos/cal/gd/questoes/qs_2/teoria/grafos/er/sgp/tema1_er/sgp_04.pdf

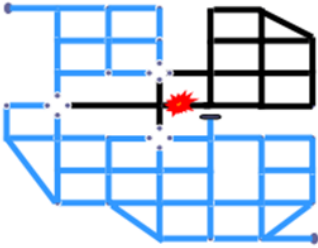
Aplicando Grafos em demandas de decisão

Fonte: o autor.

Figura 71 – Slides que compõe a apresentação: Teoria de Grafos - Feira de ciências da escola

Aplicando Grafos em demandas de decisão

✓ Após análise dos registros a serem fechados, observa-se a seguinte redistribuição na rede.




Remanejamento na distribuição de água (suasua representação pelo ícone vermelho)
Fonte: http://www.puca.com.br/portal/relacoes/ps-2/temas/pdfs/tema_4.pdf

Aplicando Grafos em demandas de decisão

Exemplo 8: Mapeamento simplificado quanto a caminhos, a pé, entre a escola e o ponto de ônibus principal mais próximo à ela, especificando:

- o percurso de cada;
- o tempo de cada percurso;
- o caminho ótimo.



Conclusão

Pôde-se constatar neste estudo a aplicabilidade diversa da Teoria de Grafos, seu caráter facilitador para visualização de redes variadas e para resoluções de situações-problema relacionados.

Referências

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **As provas estão n'Ó livro**. [S.l.]: Blucher, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília/DF, 2000.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília/DF, 2006.

BRASIL. **Programa Nacional de Apoio às Feiras de Ciências da Educação Básica Fenaceb**. Brasília/DF, 2006.

CARDOSO, D. M.; SZYMANSKI, J.; ROSTAMI, M. **Matemática Discreta**: Combinatória, teoria dos grafos, algoritmos. Lisboa: Escolar Editora, 2009.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro/RJ: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

NETTO, P. O. B. **Grafos**: Teoria, modelos, algoritmos. 5. ed. São Paulo/SP: Blucher, 2012.

SANTOS, J. C.; MOTA, B. História da matemática: Teoria de grafos. Faculdade de Ciências do Porto, Porto, 2010. Disponível em: <https://www.academia.edu/6342431/Teoria_de_Grafos_-_História>. Acesso em: 01 dez. 2019.

XAVIER, A. S.; NUNES, A. I. B. L. **Psicologia do Desenvolvimento**. 4. ed. Rio de Janeiro/RJ: EdUECE, 2015.