Universidade Federal de São João del-Rei
Departamento Matemática e Estatística
Câmpus de São João del-Rei

PROBLEMAS DE FERMI: uma metodologia para o ensino de Matemática

Natércia Feliciana Silva

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del-Rei , Câmpus de São João del-Rei.

Orientador
Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar

2019

Silva, Natércia Feliciana
PROBLEMAS DE FERMI: uma metodologia para o ensino de Matemática/ Natércia Feliciana Silva- São João del-Rei: [s.n.], 2019.
112 f.: fig., tab.

Orientador: Juan Carlos Zavaleta Aguilar

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei , Departamento Matemática e Estatística.

1. Modelagem Matemática. 2. Problemas de Fermi. 3. Metodologia de Ensino de Matemática. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do DEMAT
Câmpus de São João del-Rei

TERMO DE APROVAÇÃO

Natércia Feliciana Silva

PROBLEMAS DE FERMI: UMA METODOLOGIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del-Rei , pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Orientador

Profa. Dra. Andréa Cristiane dos Santos Delfino - UFSJ

Prof. Dr. Elí Wilfredo Zavaleta Aguilar - UNESP

São João del-Rei, 20 de dezembro de 2019

Dedico este trabalho à maior riqueza que tenho, minha família, minha fortaleza: meus pais Teodorico e Francisca; meus irmãos Tadeu e Lucas; meus sobrinhos (filhos de coração), Hugo, Luiza e Isabela.

Agradecimentos

Chegar até aqui não foi fácil. Foram vários os momentos em que a vontade de desistir falou mais alto. Mas também foram inúmeras pessoas que me deram força e estímulo para continuar... A essas pessoas os meus agradecimentos...

Agradeço primeiramente a Deus pela proteção divina, por ser tão abençoada, todas as minhas conquistas, sempre guiadas por Ele.

À toda minha família, que sempre acreditou em mim, sempre me encorajando a seguir em frente, e em especial, aos meus pais que souberam entender a minha ausência e pelas palavras de incentivo quando eu desabava.

A meu orientador, Juan Carlos, pela atenção, paciência e ensinamentos durante a escrita desta dissertação.

A todos os professores do PROFMAT da UFSJ que tanto me ensinaram me fazendo crescer cognitivamente, profissionalmente e como pessoa.

Aos colegas de turma, que juntos, nos fortalecíamos para que o desânimo não nos superasse.

A todos os meus alunos e colegas de trabalho que me incentivaram e oraram por mim.

À professora e coordenadora Viviane Pardini Valério pelo profissionalismo e atenção enquanto pessoa.

A técnica administrativa, Kátia Milena Mendonça Rios pela prestatividade e pelo apoio profissional e humano.

Ao Gustavo Teixeira de Castro pela valiosa ajuda com o LaTeX.

A Kelly Cristina Cândido pela grande colaboração na correção ortográfica desta dissertação.

A todos o meu muito obrigada!

Não peças tarefas iguais às suas forças
Ore por forças iguais às suas tarefas.
PHILLIPS BROOKS

Resumo

É uma realidade que ainda nos dias de hoje temos uma grande estrada por percorrer em relação ao ensino de Matemática nas escolas de Ensino Médio. Nesse sentido, foi realizado um estudo sobre os problemas de Fermi com o propósito de verificar a possibilidade de utilizá-los como introdução à Modelagem Matemática para alunos do Ensino Médio. Para isso, foi feita uma pesquisa conceitual sobre Modelagem Matemática envolvendo definições, classificações de modelagem e práticas educacionais sobre este assunto. Posteriormente, foram estudadas algumas definições sobre problemas de Fermi e a inserção destes problemas dentro da Modelagem Matemática. Sabendo que os problemas de Fermi utilizam-se da estimativa, considerou-se necessário falar sobre a importância em trabalhar a habilidade em estimar, iniciando o estímulo dessa habilidade no Ensino Fundamental I bem como apresentar sugestões em duas atividades referentes a estimativas nesse nível de ensino. Sendo os problemas de Fermi pouco conhecido no nosso meio acadêmico, embora já esteja sendo utilizado em outros países, optou-se pela proposição de algumas atividades com ênfase nesses problemas. Dessa forma, para avaliar a possibilidade de inserir os problemas de Fermi como uma metodologia do ensino de matemática, foram elaboradas duas aulas, sendo estas aplicadas a três grupos de alunos do Ensino Médio da Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues, da cidade de Carmo da Mata - MG. Estas aulas tiveram como objetivos a avaliação da aprendizagem dos tópicos matemáticos estudados, promover a interação entre alunos e verificar a aplicabilidade dos problemas de Fermi dentro do contexto da Modelagem Matemática. Cada problema apresentado foi escolhido de maneira a ser significativo na vida cotidiana dos alunos. A partir da análise dos resultados dos problemas de Fermi, verificou-se um maior interesse na resolução das atividades e na aprendizagem, mostrando que os problemas de Fermi podem ser inseridos como uma metodologia para incentivar a aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Problemas de Fermi, Metodologia de Ensino de Matemática.

Abstract

It is a reality that even now we have a long path to go through regarding mathematics teaching in high school. In this framework, a study was conducted about Fermi problems to verify if they could be used to teach mathematical modeling to high school students. For this, conceptual research on Mathematical Modeling involving definitions, modeling classifications, and education al practices was carried out. Some definitions of Fermi problems and their insertion in mathematical modeling were studied posteriorly. Knowing that Fermi problems are used by the estimate, it was considered necessary to talk about the importance of working on the ability to estimate, iniciating the stimulus of this ability in Elementary School, as well as presenting suggestions in two activities related to estimates at this level of education. Although Fermi problems are already used in other countries, they are not very known in our academic environment. Thereat, some activities that emphasize these problems were proposed. Thus, to analyze the possibility of including these problems as a mathematics teaching methodology two lessons were taught to three different groups of students at Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues, from the city of Carmo da Mata-MG. These lessons aimed to evaluate the learning of the topics studied, to promote the interaction among the students and to verify the applicability of the Fermi problems within the context of mathematical modeling. Each presented problem was chosen to be significant in the students' daily life. From the analysis of the results of the Fermi problems, there was a greater interest in there solution of activities an d learning, which shows that Fermi problems can be inserted as a methodology to encourage the know ledge of mathematics.

Keywords: Mathematical Modeling, Fermi problems, Mathematics Teaching Methodology.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Quadros

Sumário

1 Introdução

Muitas vezes em conversas informais com as pessoas, quando digo que sou professora de matemática, o que mais ouço é: “Nossa, matemática é muito difícil” Ou ainda: “Só quem é inteligente dá conta da matemática” A matemática é sempre a grande vilã nas escolas, classificada como “a matéria mais difícil”, “somente os mais inteligentes sabem matemática”, “só quem tem habilidades com cálculos consegue resolver problemas de matemática”... e por aí vai se criando um mito em seu entorno.

Mas de onde veio todo este mito?

O mito de que a matemática é difícil acaba sendo passado de geração para geração. Muitas das vezes, o educando já chega na escola com um pré-conceito de que a matemática é muito difícil. Este rótulo existe, entre outros motivos, porque muitos pais foram/são alunos de uma escola onde os tópicos de matemática foram ensinados de um modo mecânico no qual o objetivo era fazer prova apenas para alcançar nota para sua aprovação. Portanto, não se evidencia a importância da aprendizagem dos tópicos como ferramenta útil no dia a dia.

Como professora há 16 anos, é sempre muito comum ouvir de um aluno: “ Afinal de contas professora, para que eu preciso aprender isso?” Ou ainda; “vou usar isso em que na minha vida?”.

Percebo assim uma grande desmotivação em aprender por parte do aluno, pois ele acha a matemática desnecessária. Além do desânimo, observa-se que os alunos estão inseridos dentro de uma aprendizagem mecânica. Por conseguinte, quando aplicado um exercício com enunciado diferente, raros são os alunos que conseguem desenvolver a resposta. Quando o exercício é contextualizado esse número se reduz ainda mais.

Essa dificuldade dos alunos é observada pelos resultados obtidos nas provas externas que são aplicadas. Na dissertação de mestrado “Uma proposta de motivação visando despertar o interesse pela matemática”, Silva [33] analisa uma tabela, semelhante a Tabela 1.1, com resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) brasileiro e as metas esperadas para cada etapa escolar, a saber: anos iniciais do Ensino Fundamental , anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. O IDEB foi criado em 2007 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), com o objetivo de medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino. Para o cálculo do IDEB, é realizado anualmente um censo escolar, considerando a taxa de rendimento escolar (aprovação) e as médias de desempenho aplicadas pelo INEP através da Prova Brasil (avalia o desempenho individual de cada escola do município) e do Sistema de Avaliação Básica (SAEB)(avalia o desempenho de cada estado), para os estados e o país, realizados a cada dois anos.

As metas que o INEP estabelecem não são universais, diferem para cada escola e para cada rede de ensino, mas caminhando para que, em 2022, todos alcancem a média de 6 pontos, que corresponde a pontuação do sistema educacional dos países desenvolvidos.

Tabela 1.1: Resultados nacionais IDEB de 2005 a 2017 e projeções

Resultados IDEB e projeções														
Anos iniciais do Ensino Fundamental														
IDEB observado							Metas							
2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2007	209	2011	2013	2015	2017	2019	2021
3,8	4,2	4,6	5	5,2	5,5	5,8	3,9	4,2	4,6	4,9	5,2	5,5	5,7	6
Anos finais do Ensino Fundamental														
IDEB observado							Metas							
2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2007	209	2011	2013	2015	2017	2019	2021
3,5	3,8	4	4,1	4,2	4,5	4,7	3,5	3,7	3,9	4,4	4,7	5	5,2	5,5
Ensino Médio														
IDEB observado							Metas							
2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2007	209	2011	2013	2015	2017	2019	2021
3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,4	3,5	3,7	3,7	3,9	4,3	4,7	5	5,2

Fonte: elaborada pela autora de acordo com SILVA. [33]

As notas destacadas em na Tabela 1.1, mostram os anos em que cada nível de escolaridade alcançou a projeção desejada, a saber: anos iniciais do Ensino Fundamental - 2007 a 2017, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio de 2007 a 2011.

Segundo Silva [33],

> enquanto o aluno avança nos anos de escolaridade esse índice diminui. Isto nos leva a compreender que os alunos estão desenvolvendo menos competências e habilidades à medida que vão passando dos anos iniciais do Ensino Fundamental para os anos finais e para o Ensino Médio.

Este resultado mostra como nossos alunos não possuem uma aprendizagem significativa e um conhecimento reflexivo acerca da matemática.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio(1998), podemos destacar dois objetivos:

> Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação cientifica geral. Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas de matemática, das outras áreas de conhecimento e da atualidade. PCN [8].

Observando a realidade da escola em que trabalho, percebo que apenas poucos alunos são capazes de utilizar os conceitos matemáticos e aplicá-los em situações problemas, tanto na própria matemática como em outra área do conhecimento. A prática pedagógica se resume ainda, na maioria das vezes, à aula explicativa com definições e sem muita participação argumentativa do aluno.As definições atingem poucos alunos já que as turmas, muitas das vezes, são formadas por um número superior a 35 alunos no Ensino Fundamental e superior a 40 alunos no Ensino Médio e em algumas turmas há alunos com grande defasagem de aprendizagem.

Uma alternativa metodológica que possibilita o educando a levar a matemática para sua vida cotidiana é a Modelagem Matemática, que leva o mesmo a desenvolver habilidades com compreensão e ação sobre o mundo à sua volta. Muitos são os trabalhos que estão sendo desenvolvidos acerca da Modelagem Matemática como metodologia de ensino, como podem ser encontrados em Alves [5], Brumano[10] e Fonseca e Lutz [29].

Em seu trabalho "Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem por meio da atividade experimental", Fonseca e Lutz [29] citam alguns argumentos para justificar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino:

- argumento formativo: desenvolve no educando habilidades explorativas, criativas e reflexivas, auxiliando na sua formação enquanto cidadãos.
- argumento competência crítica: este argumento desenvolve as habilidades citadas anteriormente e prepara o educando para entender o mundo à sua volta, deixando-os aptos a atuarem como cidadãos críticos.
- argumento com referência à utilidade: torna o educando capaz de perceber que poderá utilizar a matemática para resolver diferentes tipos de problemas.
- argumento intrínseco: a modelagem auxilia o educando a compreender outros conceitos da própria matemática.
- argumento da aprendizagem: a modelagem possibilita ao aluno uma melhor compreensão dos conhecimentos matemáticos e a necessidade de novos conhecimentos e a importância dos mesmos.
- argumento que se refere à alternativa epistemológica. A Modelagem Matemática é considerada uma excelente metodologia de ensino, pois leva em consideração o contexto sociocultural onde o aluno está inserido.

Tendo em vista os argumentos apresentados acima, com a ajuda da Modelagem Matemática espera-se proporcionar ao aluno uma aprendizagem com mais significado, levando-o a refletir sobre a matemática, possibilitando-lhe mais autonomia para resolver problemas sem ficar preso a fórmulas e cálculos, além de motivá-lo a buscar meios para encontrar respostas, investigando, criando estratégias e tomando decisões.

A Modelagem Matemática faz com que o aluno passe de receptor a construtor do conhecimento e o professor deixe de ser o transmissor de conceitos e regras de resoluções, e assuma o papel de mediador, auxiliando o aluno a construir suas habilidades através da problematização, tornando-o mais participativo e levando-o a discutir estratégias, levantar possibilidades de resolução e fazer estimativas até chegarem a uma solução, baseado em conhecimentos prévios.

Considerando minha experiência em sala de aula, vejo que a cada ano os alunos estão mais desmotivados com a matemática, e quando o assunto é resolver problemas com muitos cálculos ou com grandes quantidades, poucos resultados são alcançados. Percebe-se a necessidade de uma mudança que torne as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras, de maneira a despertar no aluno o gosto e interesse em aprender, mais ainda se esse aprendizado for significativo no dia a dia deles, pois percebo que quando o assunto é contextualizado dentro da realidade deles, os alunos participam e oferecem respostas coerentes usando experiências e conceitos matemáticos e de outras áreas do conhecimento.

Uma ferramenta que pode ser inserida à Modelagem Matemática, porém ainda pouco conhecida no Brasil, é a metodologia que utiliza os problemas de Fermi, a qual vem sendo pesquisada dentro da educação matemática. Essa metodologia já é aplicada em alguns países como Suécia, Espanha, Alemanha, EUA, México, entre outros. Segundo Ärlebäck e Albarracin [4] "os problemas de Fermi têm sido amplamente utilizados em Física e cursos de engenharia em faculdades nos EUA". Ainda, segundo Ärlebäck e Albarracin [4], podemos olhar os problemas de Fermi desde a perspectiva da Modelagem Matemática.

O objetivo dessa dissertação é mostrar a importância de se introduzir os problemas de Fermi no ensino da matemática para alunos da Educação Básica, correspondente ao Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio, com ênfase no Ensino Médio, tornando-o uma ferramenta interessante para ser usada em sala de aula, uma vez que, segundo Ärlebäck & Albarracin [4], "o uso dos problemas de Fermi tem muito a oferecer como ferramenta para a promoção da Modelagem Matemática". Para alcançar esse objetivo serão propostas algumas atividades para serem trabalhadas com alunos do Ensino Médio, envolvendo problemas contextualizados à realidade dos alunos e que possam ser resolvidos utilizando os problemas de Fermi, usando estimativas, aproximações e conhecimentos diversos.

Esta dissertação traz, no Capítulo 2, as definições sobre a Modelagem Matemática como metodologia de ensino de matemática, os tipos de Modelagem Matemática, a análise de um estudo sobre a Modelagem Matemática para o ensino da Análise Combinatória e uma experiência realizada pela autora do trabalho, com o objetivo de introduzir volume de troncos de cone e de pirâmide, para alunos do 3º ano do Ensino Médio, apontando pontos positivos e negativos da experiência.

No Capítulo 3 são apresentadas as definições sobre problemas de Fermi, sua relação com os tipos de Modelagem Matemática e o desenvolvimento da aplicação sobre os problemas de Fermi na Matemática, apresentados em um artigo sobre o uso desses problemas analisando-os no trabalho em questão.

No Capítulo 4, será apresentada uma atividade com 3 grupos de 5 alunos do 3º ano do Ensino Médio, usando problemas de Fermi, contextualizados de acordo com a realidade desses alunos. Para avaliar a eficácia desses problemas, cada grupo responderá uma atividade contendo problemas que abordam os mesmos temas dos problemas de Fermi aplicados na 1ª aula. Todas as respostas serão analisadas e comentar-se-á os resultados encontrados tanto na 1ª aula quanto na 2ª aula. Os problemas utilizados neste trabalho, são sugestões para que outros professores possam adaptar à realidade de seus alunos e propor a utilização desta ferramenta em suas turmas de Ensino Médio.

Nas considerações finais serão apresentados os pontos positivos e negativos sobre este assunto, que servirá de base para estudos futuros, uma vez que o assunto problemas de Fermi ainda está em desenvolvimento.

2 Modelagem Matemática

Perante o grande avanço tecnológico e a grande transformação contínua da sociedade é notável a necessidade de que a escola acompanhe essa transformação, pois é a escola a grande transformadora de cidadãos, dos quais se espera capacidades e conhecimentos para um novo mundo.

Para que a escola consiga acompanhar este avanço é necessário que se quebre alguns paradigmas do ensino tradicional, os quais tornam nossos alunos cada vez mais desinteressados.

Os resultados de avaliações externas como o SAEB, visto na introdução, e as experiências em sala de aula, nos alertam para a necessidade em melhorar nossas práticas de ensino, estimulando o interesse dos nossos alunos.

Com o objetivo de "quebrar paradigmas" sobre o ensino da matemática, diversos trabalhos vêm sendo desenvolvidos a fim de que as escolas habilitem seus alunos para que estes sejam capazes de raciocinar com base nos conhecimentos adquiridos, e não simplesmente decorar os assuntos para responder questionários avaliativos-quantitativos, como as avaliações aplicadas mensalmente. Uma metodologia de ensino que vem sendo abordada para diminuir a distância entre os conhecimentos matemáticos e a realidade do aluno é a Modelagem Matemática, visto que essa metodologia aguça a criatividade dos alunos, tornando-os agentes centrais do seu próprio aprendizado, além de mostrar ao aluno que a matemática pode ser sim aplicada ao seu cotidiano.

2.1 Modelagem Matemática na Educação Brasileira

Segundo Burak [12] esta metodologia teve início na década de 80, com cursos de especialização para professores, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava-Facig, hoje da Universidade Estadual do Centro-Oeste-Unicentro. A partir de então, vários trabalhos vêm sendo abordados com o objetivo de melhorar o Ensino de Matemática.

Fonseca e Lutz [29], citam a associação que os autores Barbosa e Bassanezi (ambos citados em seu trabalho) fazem da Modelagem Matemática: ambos a associam com um ambiente de problematização e investigação, com os alunos sendo os criadores de questionamentos e através de seus conhecimentos já adquiridos e construídos em sua vida escolar, encontram estratégias para resolver os problemas.

Nesta metodologia, não são apresentadas ao aluno regras de resolução de problemas matemáticos, como acontece no ensino tradicional, em que muitos problemas são abordados apenas visando a abstração e repetição de fórmulas, ou seja, sem a devida contextualização os conhecimentos ficam fora da realidade do aluno. Na Modelagem Matemática, o aluno deixa de ser o receptor do conhecimento para ser o construtor do saber, tendo o professor como seu mediador, estimulando seu crescimento cognitivo.

Alves [5] ressalta em seu trabalho "Modelagem Matemática no ensino da trigonometria" que esta metodologia voltada para a educação tem influência significativa na matemática aplicada:

> [...] através dos próprios aspectos da Modelagem Matemática é possível perceber que suas raízes encontram-se na matemática aplicada, considerando que esta se utiliza dos conceitos matemáticos para alcançar outros tipos de conhecimentos, no entanto, ao se destacar como um instrumento de apoio pedagógico, a Modelagem Matemática se desconecta da matemática aplicada e se expande para a educação matemática traçando assim um caminho próprio. ALVES [5]

Para Flemming (2005) citado por Alves [5], "a modelagem pode ser utilizada em dois contextos específicos como ferramenta na resolução de problemas e como metodologias para o processo de ensino aprendizagem da matemática."

Segundo Bassanezi (2011) de acordo com Chuquipoma [25], a Modelagem Matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Assim, entre essas novas formas de considerar e entender a Modelagem, podemos concluir que a Modelagem Matemática é utilizada como um método científico de pesquisa ou também como uma estratégia de ensino-aprendizagem.

A Modelagem Matemática, segundo Bassanezi [17], deve ser trabalhada seguindo as seguintes etapas:

1. Escolha do tema: o tema deve ser feito sob um levantamento de situações de estudo que irão levar os alunos a questionar em várias direções. Para isso é importante que o aluno faça a escolha do tema, sendo o corresponsável pelo processo de aprendizagem, levando em consideração o interesse do aluno para sua melhor compreensão do conteúdo.

2. Coleta de Dados: é o momento de busca das informações relacionadas com o assunto. Essa coleta pode ser qualitativa ou quantitativa, e poderá ser obtida através de pesquisas bibliográficas (usando dados já obtidos e catalogados em livros e pesquisas especializadas), experiências programadas pelos alunos, entrevistas.

3. Análise de dados e formulação de modelos: é o momento da busca de um modelo matemático. Este modelo é obtido quando se utiliza o problema real e o traduz para uma linguagem matemática.

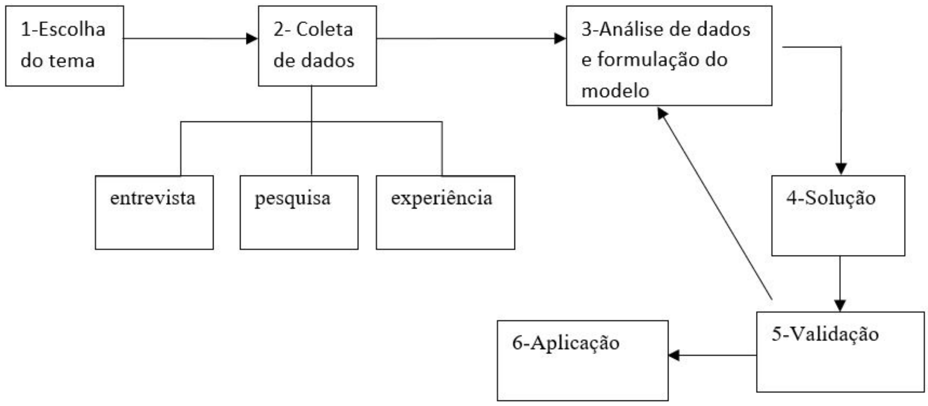
4. Solução: a solução encontrada aqui é obtida por hipóteses atribuídas ao modelo matemático. O resultado será um número aproximado à solução. Esta resolução pode ser feita através de gráficos, tabelas ou desenhos.

5. Validação: é o processo em que é verificado se o modelo matemático formulado funciona ou não. Caso não haja a veracidade, quando o modelo é testado com outros valores, é necessário que volte à etapa anterior para nova formulação do modelo matemático.

6. Aplicação: usa-se o modelo para resoluções quando este é aceito na validação.

Na Figura 2.1, é apresentado um fluxograma elaborado pela autora contendo as etapas sugeridas por Bassanezi [17].

Figura 2.1: Etapas de Modelagem Matemática baseadas em Bassanezi [17]



Fonte: elaborada pela autora baseadas em Bassanezi [17]

Embora vários autores usem definições diferentes para Modelagem Matemática o objetivo é único: tornar o aluno o construtor do seu conhecimento, tendo o professor como mediador. Para tornar-se construtor do conhecimento, o aluno deve levantar, juntamente com outros alunos, questionamentos para que, através de hipóteses e conhecimentos prévios, possam chegar a um modelo matemático, usando-se a experiência e conhecimento adquiridos dentro e fora da escola e não apenas fórmulas e regras de resolução.

Até aqui tratamos a modelagem tendo como objetivo colocar o aluno como o centro da aprendizagem e construtor do conhecimento. Mas, para trabalhar esta modelagem é necessário que o professor defina o que ele deseja priorizar com esta metodologia: motivação em aprender? Facilitar a aprendizagem? Aproximar a matemática da realidade do aluno de modo que ele saiba utilizar a matemática em outra área do conhecimento, ou seja, facilitar a interdisciplinaridade? Desenvolver habilidades de compreensão e exploração do papel da matemática na sociedade? Ou então, uma mistura dessas habilidades? Embora o professor tenha que priorizar algum desses argumentos, os outros, também serão trabalhados, pois estes se tornam meios para atingir o(s) objetivo(s). Por exemplo, quando o professor quiser motivar seus alunos em uma determinada atividade, a metodologia usada como motivadora também facilitará a aprendizagem, aproximará a matemática à realidade dos alunos e desenvolverá habilidades cognitivas neles, assim nota-se que estas habilidades estão ligadas entre si.

De acordo com Kaiser e Sriraman [38], a Modelagem Matemática pode ser classificada como modelagem realística ou aplicada, modelagem contextual, modelagem educacional, modelagem sócio-crítico, modelagem epistemológico ou teórica e modelagem cognitiva, conforme definições apresentadas no Quadro 2.1, estão contidas as definições de cada classificação de modelagem segundo Kaiser e Sriraman [38].

Tipos de Modelagem Matemática	Definição
Modelagem realística	esta perspectiva tem por base as situações problema autênticas, que são originárias da indústria ou da ciência, e tem por objetivo o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados, está assim ligada essencialmente aos aspectos pragmático-utilitários.
Modelagem contextual	considera a inclusão da Modelagem Matemática na sala de aula por meio de situações-problema reais, com o intuito de motivar os alunos e desse modo promover a aprendizagem. Está relacionada à interpretação de enunciados, sendo a obtenção do modelo matemático uma tarefa de resolução de problemas. A ideia é que em situações semelhantes àquelas já estudadas os estudantes identifiquem tais semelhanças e sejam capazes de reconstruir as ideias matemáticas que foram utilizadas.
Modelagem educacional	pode-se considerar que a modelagem educacional integra as perspectivas realística e epistemológica, pois considera situações-problema autênticas ao mesmo tempo em que se preocupa com o desenvolvimento da teoria matemática. Seus objetivos podem ser classificados em didáticos, quando relacionados com a estrutura e desenvolvimento dos processos de aprendizagem, ou conceituais, referentes à introdução de novos conceitos ou ao desenvolvimento de conceitos já apresentados aos alunos.
Modelagem sócio-crítica	enfatiza o pensamento crítico sobre o papel e a natureza dos modelos matemáticos e a função da matemática na sociedade. Está relacionada com a ideia de formar estudantes autônomos e aptos para exercerem a cidadania. Tem por objetivo desenvolver uma visão crítica do mundo.
Modelagem epistemológico ou teórica	aborda situações-problema estruturadas com o intuito de desenvolver conceitos matemáticos. Sendo assim, o objetivo principal desta perspectiva é o desenvolvimento de teorias matemáticas.
Modelagem cognitiva	pode ser descrita como uma meta-perspectiva, seus objetivos são: Objetivos de pesquisa: a) Análise dos processos cognitivos que ocorrem durante os processos de Modelagem e compreensão desses processos cognitivos. Objetivos psicológicos: b) promoção dos processos de pensamento matemático pelo uso de modelos como imagens mentais ou mesmo imagens físicas ou pela Modelagem enfatizada como um processo mental, tais como abstração ou generalização. De modo geral, esta perspectiva se preocupa com os processos cognitivos dos alunos enquanto realizam atividades de Modelagem Matemática

Fonte: TORTOLA, SILVA, ALMEIDA [36]

Quadro 2.1: Definições da classificação das perspectivas de modelagem segundo Kaiser e Sriraman

Cada uma dessas definições de modelagem pode auxiliar o professor na escolha do problema a ser trabalhado, de acordo com o(s) objetivo(s) traçado(s), de maneira a obter um resultado mais eficaz.

Trataremos a seguir da análise de trabalhos que apresentam a Modelagem Matemática como metodologia de resolução de problemas no Ensino Médio, comentando algumas abordagens, a saber: como as metodologias foram aplicadas e quais foram os resultados e suas conclusões.

2.2 A Modelagem Matemática na resolução de problemas

Muitos são os professores que desejam modificar suas práticas pedagógicas, aprimorar suas metodologias e sair do comodismo das suas aulas tradicionais. Na verdade, a própria realidade escolar pede essas mudanças na prática de ensino, mudança que a torne mais efetiva, real e prazerosa, tanto para o aluno quanto para o professor.

Ao trabalhar a Modelagem Matemática, o professor torna-se mediador entre o conhecimento e o aluno, onde este, através de atividades investigativas e interdisciplinares, constrói sua aprendizagem, desenvolvendo sua criatividade, autonomia e conhecimento.

Citarei aqui dois trabalhos envolvendo esta modelagem em conteúdos considerados complexos para alguns alunos: Análise Combinatória e Volume do tronco de Cone e Pirâmide. Será apresentado a maneira como foi realizado/implementado cada trabalho bem como os pontos positivos e negativos dessa feita.

2.2.1 A Modelagem Matemática na Análise Combinatória

A dissertação de mestrado “A Modelagem Matemática como metodologia para o estudo de Análise Combinatória” de Cleuza Eunice Pereira Brumano, usou uma abordagem qualitativa[1] através de uma pesquisa de campo realizada em um restaurante por 4 alunos do Ensino Médio.

O trabalho de Brumano [10] aborda a Modelagem Matemática como: “uma alternativa de ensino que se dá através de uma concepção que permite ao educador desenvolver uma busca pela interação proveniente da matemática contextualizada na realidade dos estudantes, e que prioriza a construção do conhecimento por parte do aluno.”

Seu objetivo no trabalho em questão, é “analisar a aplicação desta estratégia como uma proposta eficaz para favorecer o ensino da Análise Combinatória” (Brumano [10])

Para a realização do trabalho, Cleuza realizou uma pesquisa bibliográfica buscando identificar como aplicar a modelagem no conteúdo escolhido por ela, baseada nas dificuldades apresentadas por vários de seus alunos no aprendizado de Matemática, principalmente no tema Análise Combinatória. Estas dificuldades, de compreensão e entendimento do conteúdo, foram constatadas através de conversas com os alunos, professores e análise dos resultados obtidos nas avaliações, em relação a resultados anteriores, observações estas realizadas na escola em que atuava na época da pesquisa.

Esta dificuldade em relação à compreensão de conteúdo também foi observada por mim, não somente entre meus alunos, mas também por parte de alguns colegas professores (da mesma escola em que trabalho e de outras escolas), considerando-o como um dos mais complicados.

Para atingir o objetivo desse trabalho, a autora baseou-se em trabalhos e resultados de estudiosos da Modelagem Matemática Burak [11][12], Biembengut [18], Barbosa

[1] Pesquisa qualitativa é uma metodologia de investigação com o objetivo de entender o comportamento do objeto em estudo. A investigação é feita através de entrevistas cuja resposta é subjetiva.

[13][14], Chaves [22][23], D'Ambrósio [27] e Bassanezi [15], os quais defendem a ideia de que a Modelagem Matemática é uma ferramenta que descentraliza o conteúdo programático, quebrando a inércia do ensino tradicional, colocando o aluno como construtor do conhecimento , tornando as aulas mais significativas e interessantes.

Brumano [10] em seu trabalho, elegeu a pesquisa exploratória[2] como vertente orientadora do processo de confecção de toda a atividade realizada pela autora. Sua pesquisa foi realizada em um restaurante escolhido pelos alunos por ser o restaurante frequentado por eles.

As etapas usadas na pesquisa são as mesmas utilizadas e defendidas por Burak(2010) citado por Brumano [10], o qual proclama "conhecer mais sobre o tema, buscar informações no local onde se localiza o interesse do grupo de pessoas envolvidas, além de se constituir em uma das premissas para o trabalho nessa visão de modelagem, é uma etapa importante na formação de um estudante mais critico". A ordem das etapas foi: escolher o tema, fazer uma pesquisa explorativa, coletar informações, analisar os dados, modelar matematicamente o problema e fazer uma análise dos resultados

Descrição do trabalho

Para o trabalho da pesquisadora Brumano [10], 32 alunos se ofereceram para participarem das atividades propostas, mas somente 4 alunos tinham compatibilidade de horários para os oito encontros extra turnos realizados na própria escola em que ela trabalha e os alunos estudam. A escola Coluni está localizada no campus da UFV (Universidade Federal de Viçosa) localizada na cidade de Viçosa, Minas Gerais. Nesta escola, somente o Ensino Médio é oferecido e atende alunos de diversas cidades e diferentes classes sociais. De acordo com a avaliação do MEC (Ministério da Educação e Cultura) a escola Coluni é uma das melhores escolas públicas do país. O ingresso na referida escola, ocorre no 1º ano do Ensino Médio através de um exame de seleção popularmente conhecido por Vestibulinho.

No primeiro encontro esclareceram-se os objetivos da pesquisa, falou-se sobre a Modelagem Matemática e a Análise Combinatória (assunto destaque do trabalho) e para melhor conhecê-los, foi oferecida a eles a oportunidade de falar sobre a escolha da escola Coluni, quais conteúdos já estudados eles mais gostaram, quais as atividades que despertaram mais interesse, como deveriam ser trabalhados os conteúdos de matemática, opinião sobre trabalhos em grupos e o que eles consideravam ser "bom professor de matemática".

Eles foram unânimes quando responderam que as aulas deveriam ser mais voltadas para o cotidiano, sem exercícios repetitivos pois são cansativos e foram favoráveis a conteúdos com exemplos reais para facilitar o entendimento. Eles também foram unânimes quando o assunto é realização de exercícios e trabalhos em grupos para possibilitar a troca de experiência e conhecimento.

Segundo Burak (2004) citado por Brumano [10] "A Modelagem Matemática é uma alternativa metodológica para o Ensino de Matemática, que depende fundamentalmente do interesse do grupo...". Sendo assim, no segundo encontro os alunos escolheram um tema próximo à usa realidade, motivando-os a realização da pesquisa e dando mais significado à aprendizagem.

[2]Pesquisa exploratória tem por objetivo familiarizar-se com um assunto ainda pouco conhecido, pouco explorado, ajudando a melhorar na construção de hipóteses sobre o assunto pesquisado.

Essa escolha só foi feita após os alunos analisarem várias das sugestões apresentadas por Cleuza, de situações do cotidiano, como: loteria, vestuário, restaurante self service, turno de trabalho, canoa para atravessar um rio, escalação de time de futebol, lançamento de dados, agrupamento de pessoas, sendo o tema restaurante self service o de maior interesse do grupo.

A pesquisadora, mediadora dos alunos fez algumas perguntas relacionadas ao que poderiam encontrar em um restaurante e onde eles conseguiam ver a presença da matemática. Pelas respostas obtidas, como preço de alimentos e outros, ficou claro que, para eles, a matemática está reduzida a cálculos.

Para Brumano [10], nesse momento, houve a oportunidade dos alunos se expressarem, colocando toda sua visão da matemática presente em um restaurante, visão esta voltada ao calculismo de acordo com a autora da pesquisa. Abaixo apresenta-se uma parte do diálogo entre mediadora e os alunos. As perguntas realizadas aos alunos serão enumeradas de 1 a 5, seguidas das respostas registradas pelos alunos. Este diálogo está apresentado no trabalho de Cleuza, na página 93.

1 - O que é para você um bom restaurante self service?

Laura: "o que tenha muita variedade e que o quilo não seja muito caro. Que você não coloca lá um tanto de comida e dê quinze reais (preço de acordo com a data do trabalho) e você fique assim oh!"

Zelão: "nem tanto a variedade, a maioria cada dia tem uma coisa diferente, mas o preço e o ambiente, porque se for muito lotado, muito apertado..."

2 - Vocês acham que a matemática está presente nos restaurantes?

Laura: "com certeza!"

Zelão: "sim."

3 - Dá pra citar onde?

Zelão: "no preço."

Laura: "no preço, de fazer conta de quanto vai gastar, para dar troco, para calcular a quantidade de comida que você tem que comprar, pra tudo pra qualquer coisa."

Zelão: "tipo na balança a quilo, você tem um preço e aí a balança mesmo faz a conta, o preço por quilo."

Laura: "ela faz uma regra de três. Um quilo são tantos reais, se eu colocar tantos gramas vai dar tanto."

4 - E a matemática aparece na hora que você está se servindo?

Laura: "sim, você tem que pensar no tanto de coisa que você vai colocar, que, por exemplo, que você quer comer mais massa, aí seu prato fica pesado.... e se for num restaurante mais caro e colocar muita massa no prato, seu prato vai sair muito caro, aí você tem que pensar em quantidade proporcionalmente ao preço, entendeu"

Zelão: "e tem hora também que você olha um prato assim eu meio que olho a fração, tipo uma parte arroz, uma parte feijão, como se fosse um gráfico de pizza."

Pelas respostas é possível ver que os alunos enxergam a matemática somente em cálculos, e nesse caso, essa visão dá-se pela vivência que eles têm em fazer o prato, pesar, calcular preço e pagar. Laura ainda pensa mais em preço quando diz na possibilidade de colocar muita massa em seu prato.

No dia a dia escolar, a maioria dos alunos não conseguem associar a matemática a situações que eles vivem, por exemplo, não conseguem relacionar que o preço a ser pago em um produto depende da quantidade, logo temos uma função polinomial do 1º grau, assim como não conseguem relacionar a proporção a receitas culinárias, intervalos numéricos com informações importantes em alimentos perecíveis, etc.. É necessário levar essa realidade até o aluno para tornar a aula mais significativa e prazerosa.

5- Como vocês acham que é calculado o preço da comida a quilo?

Laura: “eu acho que é, o tanto que eles gastam lá no restaurante, eu acho que eles devem descontar a mão de obra também, sei lá.”

Zelão: “acho que como brasileiro come mais arroz e feijão, vai uma média ponderada dos preços do arroz, do feijão, aí por exemplo, eles olham, por exemplo.”

Laura: “o que eles estão gastando.”

Stela: “é.”

Laura: “e faz uma média de preço do quilo.”

Zelão: “ por exemplo, se 40% do prato é de arroz, 30% feijão, aí 40% do preço é diretamente proporcional ao preço de arroz e 30% diretamente proporcional ao preço do feijão e assim por diante.”

Laura: ”por exemplo, no restaurante S.C. no final de semana, o preço do quilo é trinta e nove e noventa, aí eu acho que eles fazem um valor assim sabe, do que eles estão gastando com comida durante a semana toda e aumentam no final de semana por causa do movimento.”

Pela fala dos alunos, percebe-se que eles associaram o preço que se paga pelo quilo da comida com a mão de obra e o consumo de certos alimentos. Mais uma vez, o cálculo esteve presente o tempo todo.

O terceiro encontro foi destinado a pesquisas sobre a história dos restaurantes self service, com informações sobre a disposição correta dos alimentos nos restaurantes self service, que é iniciada com as saladas.

Nesse ponto, a pesquisadora Cleuza aproveitou para falar sobre o que é uma boa nutrição, cujo diálogo auxiliaram na formação do educando.

Alguns livros didáticos, quando trabalhado o Princípio Fundamental da Contagem, cujo “exemplo tradicional”é o cálculo das possibilidades de escolha de um prato, oferecem sugestões para comentar com os alunos sobre a importância de uma boa nutrição, ou trazem alguma questão em que se pede para calcular o número de opções para montar um prato, por exemplo, colocam um item onde o aluno deve responder algo relacionado a uma boa nutrição. As vezes falamos, mas na maioria das vezes só decodificamos como resolver o problema dado fazendo a leitura conjunta com os alunos, identificando as informações dadas e relacionando-as com o modelo matemático já apresentado no início do conteúdo e, em outras vezes, ignoramos a questão interdisciplinar. Ao trabalhar com a pesquisa sobre os alimentos o assunto encaixa perfeitamente no conteúdo em questão - Análise Combinatória - e permite a interdisciplinaridade de maneira leve com a Biologia, associando a matemática a preço de alimentos, pesos de alimentos, valores calóricos dos alimentos, o que é uma alimentação saudável, etc.

No quarto encontro, a professora foi mediadora dos alunos para responderem os questionamentos voltados para o cardápio do restaurante e opções de escolha dos alimentos, de maneira a direcioná-los a encontrar situações em que aparece a Análise Combinatória.

Nesse momento, “os alunos têm a oportunidade de se expressarem acerca do que é possível encontrar no cardápio de um restaurante self service.”Brumano [10]

No quinto encontro, realizado no restaurante, finalizado com um almoço, foram elaboradas, pelos próprios alunos, várias perguntas envolvendo preço do quilo dos alimentos, destino das sobras dos alimentos (dos pratos e das travessas), número de funcionários, distribuição das funções entre outras.

Nesse momento, no restaurante, os alunos fazem uma entrevista com o gerente e anotam o cardápio do dia com todas as opções, para depois escolherem o que iriam comer, de acordo com o gosto de cada um. A escolha ficou difícil, devido a tantas opções, antes nunca observadas por eles. Além da variedade, o conhecimento sobre o valor nutricional dos alimentos também pesou na hora da escolha do prato.

Os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio(geralmente do 2º ano) e do Ensino Fundamental (uma vez que a multiplicação - revista no 6º ano - está associada a contagem de possibilidades) apresentam questões para cálculos de opções de escolha entre alimentos de restaurante, opções de montagem de sorvete em sorveterias, quantos lanches diferentes em lanchonetes etc., mas a quantidade de opções de cada evento é pequeno e a resolução pode ser feita por multiplicação ou árvore das possibilidades. Considerando nosso comodismo enquanto professores, vejo o quanto o Ensino Tradicional de Matemática limita a aprendizagem dos alunos, pois este deixa de observar quantos pratos é possível formar, sem analisar cada opção de escolha e sem analisar o valor nutricional de cada opção. Trabalha somente o cálculo numérico, cujo objetivo é único, responder à pergunta: "De quantas maneiras diferentes..."

Nesse momento do trabalho, em que os alunos fizeram sua própria escolha do prato a pesquisadora despertou nos alunos a autonomia de escolha, pensando não somente no paladar, mas também em sua saúde.

No encontro seguinte ao que ocorreu o almoço, já de posse de dados coletados no restaurante, a pesquisadora propôs um diálogo levando-os a ver a relação entre a visita ao restaurante e a matemática da sala de aula. Como uma das alunas já tinha feito o segundo ano no ano anterior, conseguiu relacionar a experiência com a Análise Combinatória, mas como o assunto é abordado no sexto ano, nada impedia que os outros três alunos conseguissem relacionar as possibilidades.

Como os alunos fizeram anotações diferenciadas de acordo com suas escolhas, eles foram orientados a usar as anotações de um dos alunos como referência para o passo do cálculo de possibilidades. Esses cálculos foram realizados com questionamentos vindos da mediadora como: "... se Zelão (pseudônimo de um dos alunos) fosse se servir de vegetais e carnes, de quantas maneiras ele poderia compor seu prato?"

Uma das habilidades do tópico Conjuntos dos Números Naturais, no eixo temático Números e Operações, contidas no CBC (Currículo Básico Comum) do Ensino Fundamental, é que os alunos saibam resolver problemas que envolvam técnicas simples de contagem através do diagrama de árvore ou pela ideia associada à multiplicação.

Nesse momento, a professora mediadora do trabalho espera que os alunos, de maneira informal, cheguem ao número de possibilidades, podendo ser utilizado o diagrama de árvore para depois usar a multiplicação.

A ideia de cálculo de possibilidades associadas à multiplicação é aprofundada no 1º ano do Ensino Médio, cuja definição segundo Luís Roberto Dante [26], em seu livro "Matemática Contexto e Aplicações volume 2", página 204, livro adotado na escola em que trabalho, Joaquim Afonso Rodrigues é: "Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto mn". A essa definição damos o nome de Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem.

Os alunos observaram que ao escolher um item diferente, a opção de prato fica diferente, e dessa forma, como uma das alunas já conhecia o conteúdo sobre Análise Combinatória associou os cálculos da possibilidade ao Princípio Multiplicativo.

Para que os alunos chegassem ao cálculo das possibilidades sem o conhecimento da definição do Princípio Multiplicativo, usando apenas suas hipóteses e deduções (a matematização do problema), a pesquisadora/mediadora utilizou de um diálogo que os levassem a dar sugestões de resolução. A princípio os questionamentos foram baseados no Quadro 2.2 feito por Zelão, com opções do restaurante visitado por eles em um dos encontros e com sua preferência com relação ao sabor. Vale ressaltar que a escolha pelas preferências de Zelão foi de forma aleatória.

Opções	**Possibilidades**	**Alimento escolhido**
Vegetais	Cenourinha, alface e tomate	Cenourinha
Saladas	Nenhuma	-
Arroz	Arroz branco	Arroz branco
Feijão	Feijão inteiro e feijoada	Feijão inteiro
Massas	Purê e macarronada	Macarronada
Carnes	Filé de frango, bife de porco, frango assado	Filé de frango, frango assado
Acompanhamentos	Batata frita e batata palha	Batata frita
Suco	Suco de laranja e suco de limão	-
Refrigerante	Coca cola	Coca cola

Fonte: Brumano [10]

Quadro 2.2: Quadro de opções de alimentos segundo Zelão

As perguntas que foram direcionadas aos alunos serão enumeradas de 1 a 3.

1 - Tem como descobrirmos o número de possibilidades de cada um para servir seu prato?

Zelão e Stela responderam que achavam que sim, mas que para isso seria necessário olhar para o cardápio do dia da visita.

Zelão pediu à mediadora as anotações feitas por ele no dia da visita ao restaurante, e essas anotações foram que serviram de apoio para os questionamentos.

2 - Se Zelão fosse se servir de vegetais e carnes, de quantas maneiras diferentes poderia compor o seu prato?

Laura: "ele tem 3 opções de vegetais e 3 opções de carne..."

Zelão: "se eu escolher a cenourinha, posso colocar no prato qualquer dos três tipos de carne né? Então... para cada vegetal, posso ter 3 pratos diferentes? Nossa!!!!! então terei 9 pratos diferentes?"

Stela: "como assim?"

Zelão: "tipo... cenourinha e frango assado, cenourinha e carne de porco, cenourinha e filé de frango. A mesma coisa com alface, entendeu?"

Laura: "isso tem um nome... é um princípio! Princípio Multiplicativo, é isso?"

Pesquisadora: "sim, é o Principio Multiplicativo!"

3 - Considerando então as preferências de Zelão , quantas opções diferentes ele tem para montar seu prato?

Stela: "é só fazer a mesma coisa!"

Zelão: "eu comi arroz,feijão, macarronada, batata frita, cenourinha e filé de frango!"

Laura: "então você tinha uma opção de arroz, duas opções de feijão, duas opções de massas, duas opções de acompanhamentos, três opções de vegetais e três opções de carne..."

Zelão: “sim...”
Laura: “uai, então é só multiplicar agora 1x2x2x2x3x3”
Stela: “são 72 opções ?”
Zelão: “Nossa!!! é muito!!!!”

Após a matematização, em que os alunos determinaram o número de opções usando a multiplicação, para validar o modelo resolução que surgiu quando Laura disse que era só multiplicar a quantidade de elementos em cada escolha, a pesquisadora pediu aos alunos que calculassem o número de possibilidades de se servir baseados em sua própria tabela.

Brumano [10], comenta nesse ponto, que de acordo com os alunos, o trabalho deu oportunidade de associar a matemática do cotidiano com a matemática da sala de aula. O trabalho foi considerado pelos alunos como muito interessante, mas demonstraram certa preferência pelo ensino tradicional, por ser mais prático, objetivo, e interessante usar as fórmulas sem contextualização.

Perante a opinião dos alunos que participaram desta pesquisa e minha experiência em sala de aula, associo essa preferência pelo ensino tradicional (somente com cálculos), com a falta de estímulo em fazer leituras, interpretar e pensar, pois com a tecnologia eles obtém respostas muito rápidas, e quando necessitam pensar e raciocinar eles preferem dizer que não sabem ou não entenderam. Não costumam tentar até conseguir uma resolução. O comodismo em fazer exercícios do livro sem contextualização, também ajuda o aluno a estranhar uma atividade de matemática que envolva situação do cotidiano, mas essa estranheza tende a diminuir à medida que se for trabalhando com questões mais inseridas na realidade do aluno.

Considero que, para diminuir a falta de significado da matemática no dia a dia dos alunos é importante ensinar e praticar a interdisciplinaridade, em que por exemplo, a interpretação de textos não seja apenas tarefa do professor de Português, pois os professores de matemática podem trabalhar também a interpretação de textos matemáticos. Nesse sentido, é importante apresentar a matemática como uma ciência formal, abstrata porém o seu ensino-aprendizagem deve ser percebido pelos alunos de maneira mais prazerosa e instigar sua curiosidade, envolvendo situações cotidianas, para que possam perceber sua aplicabilidade na vida diária, como por exemplo, representar a faixa de temperatura de um alimento perecível na forma de intervalo.

Algumas observações importantes da autora do trabalho envolvendo a metodologia da Modelagem Matemática, foram listados na página 73:

- interpretação de um contexto: o ensino tradicional não capacita o aluno a fazer leitura de um contexto como por exemplo fazer leitura de uma obra de arte.

- disponibilidade para pesquisa: como os temas exigem pesquisa, a escola muitas vezes não dispõe dos recursos necessários, e as pesquisas externas à escola soam, na maioria das vezes, inviáveis.

- escolha do tema: sendo o aluno quem escolhe o tema, se sua escolha for simples, talvez no decorrer do trabalho ele se sinta desmotivado, pois sentirá que o trabalho não acrescentará em nada seu conhecimento.

- trabalho em grupo: o trabalho em grupo não garante empenho de todos os envolvidos, nem interesse, e isso é observado em quase todos os trabalhos; somente um ou dois se empenham em realizar a tarefa pedida e os outros tornam-se meros assinantes no trabalho, tornando sem efeito o objetivo do trabalho em grupo que é a cooperação e a socialização através da troca de ideias e o crescimento de conhecimento não ocorre, pois o que não participou não teve uma real aprendizagem.

Do meu ponto de vista, para evitar a desmotivação do aluno em relação ao trabalho escolhido, é importante que o professor mediador fique atento à escolha do tema, e quando percebe que o tema escolhido pelo grupo não atingirá os objetivos, o próprio professor pode propor ao grupo outro tema que desperte o gosto pelo trabalho e consequentemente, atingir os objetivos esperados.

2.2.2 Volume de troncos

Baseado no trabalho de Rehfeldt, Puhl e Neide [31], realizei um trabalho com os alunos do 3º ano do Ensino Médio, na escola onde leciono, Joaquim Afonso Rodrigues, localizada em Carmo da Mata, MG, para introduzir o assunto volume de tronco de sólidos geométricos.

No trabalho por Rehfeldt, Puhl e Neide a turma foi dividida em 7 grupos de 5 alunos e tiveram como objetivo calcular o volume de uma forma de bolo usando as etapas de Modelagem Matemática: coletar dados, analisar dados, encontrar um modelo matemático, resolver o problema matemático e para a validação da solução encontrada foi usado um becker e água.

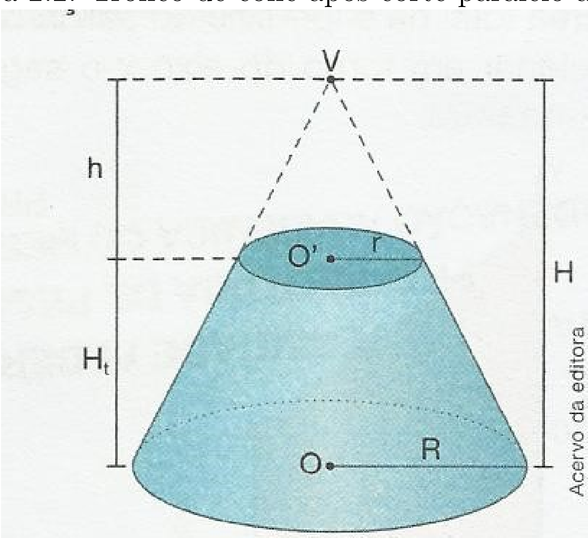
De acordo com o livro de Souza [34], a fórmula do volume de tronco de cone, representada na Figura 2.2 é dada pela expressão:

$$Volume\ do\ tronco = \frac{\pi H_t}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

onde:

H_t = altura do tronco de cone.
R = raio da base maior.
r = raio da base menor

Figura 2.2: Tronco de cone após corte paralelo à base



Fonte: SOUZA, 2013, p.132 [34]

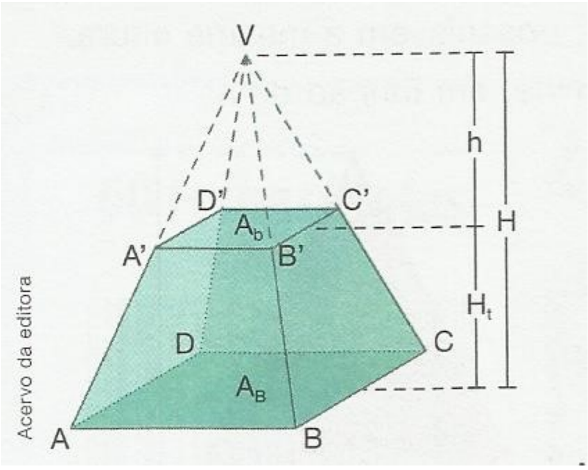
Ainda pelo livro de Souza [34], têm-se a fórmula do volume de tronco de pirâmide quadrangular, representada na Figura 2.3 e é dada pela expressão:

$$Volume\ tronco\ pir\hat{a}mide = \frac{H_t}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B(A_b)})$$

onde:

A_B = área da base maior.
A_b = área da base menor.
H_t = altura do tronco.

Figura 2.3: Tronco de pirâmide de base quadrada



Fonte: SOUZA, 2013, p.132 [34]

Quando Rehfeldt, Puhl e Neide [31] realizaram a experiência em sua turma, os alunos já conheciam a fórmula do volume do tronco do cone. A fórmula do tronco de cone foi utilizada para calcular o volume da forma de bolo, considerando o tronco de cone maior (forma de bolo) e o volume do tronco de cone menor, que representa a parte interna da forma. A parte em que se coloca a massa do bolo, que indica o volume procurado, é dada pela expressão abaixo, que foi o modelo encontrado pelos alunos de Rehfeldt, Puhl e Neide [31]t após a experiência.

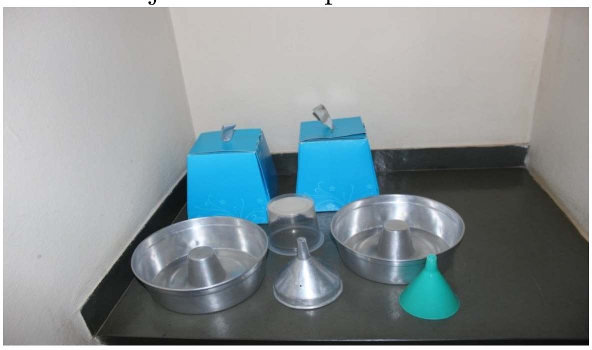
$$VF = VTG - VTP$$

onde:

VF = volume final (volume da forma de bolo).
VTG = volume do tronco cone maior.
VTP = volume do tronco de cone menor.
Quando propus a trabalhar com a turma do 3º ano o cálculo do volume dos troncos de pirâmide e de cone, com uma metodologia baseada na atividade trabalhada por Rehfeldt, Puhl e Neide [31], os alunos não conheciam a fórmula usada para calcular o volume de tronco. Entretanto, já haviam estudado o volume do cone e o volume da pirâmide, e esperava-se que eles conseguissem visualizar o tronco como um “pedaço” do cone ou da pirâmide, de acordo com o objeto recebido e pudessem utilizar essas fórmulas já estudadas.

Passarei a relatar a forma como foi conduzida esta experiência: Primeiramente, os alunos foram divididos em 7 grupos formados por 5 integrantes, denominados grupo A,B,C,D,E,F,G (a turma era composta por 35 alunos) e para cada grupo foi entregue um objeto com o formato de tronco de cone ou de pirâmide, sendo que dois grupos (B e C) receberam, cada um, uma caixa de papelão com formato de tronco de pirâmide, idênticas, dois grupos (E e F) receberam, cada um, uma forma de bolo, também idênticas, dois grupos (D e G) receberam funil, porém com medidas diferentes, e o grupo (A) recebeu uma embalagem plástica. Os objetos distribuídos aos grupos podem ser visualizados na Figura 2.4.

Figura 2.4: Objetos usados para cálculo do volume.



Fonte: arquivo pessoal

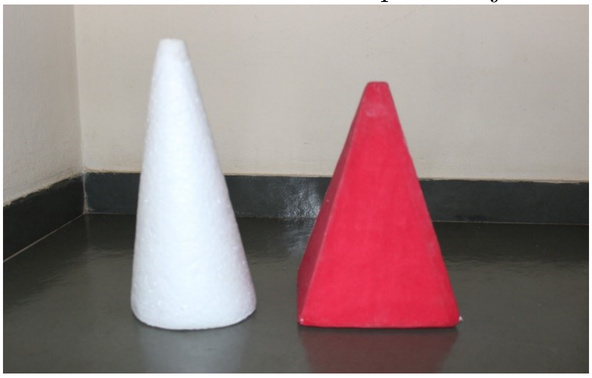
O objetivo dessa aula foi que os alunos calculassem o volume dos troncos (cone ou pirâmide) sem o uso das fórmulas, porém usando o conhecimento prévio de volume de pirâmide e volume do cone, pois esperava-se que os alunos conseguissem "visualizar" que o tronco é um "pedaço"do cone ou "pedaço"da pirâmide quando ocorre um corte paralelo à base.

Após a entrega do objeto a cada grupo, a mediação foi feita à medida que eles precisavam de ajuda, com perguntas direcionadas de maneira a fazê-los chegar a um caminho para o cálculo do volume. A partir de agora, será feito o relato da dinâmica entre a mediação e o trabalho dos grupos.

Vale ressaltar que foi unânime o interesse em saber se podiam fazer uso de réguas, consultar a internet para saber que tipo de figura geométrica se assemelhava ao objeto em mãos e se poderiam usar fórmulas já conhecidas. Como uma das características da Modelagem Matemática é que o aluno use conhecimentos já adquiridos e busque ferramentas para a resolução do problema, foi dada a autorização para que usassem o que eles consideravam necessário, inclusive uma pirâmide de base quadrada e um cone (ver Figura 2.5), que foram usados como referência para cálculo de volume. A fórmula do volume da pirâmide e do volume do cone foram consultadas pelos alunos no próprio caderno de anotações e no livro didático utilizado por eles. O livro adotado em nossa escola é "Contexto e Aplicações"de Luís Roberto Dante, vol.3.

Observa-se que para induzir o cálculo de volume dos troncos e a "visualização" de tronco como pedaço do cone ou da pirâmide, alguns grupos de alunos, quando solicitado, usaram como referência uma pirâmide e um cone que haviam sido utilizados para ensino de cálculo de área total e volume dos mesmos, conforme a Figura 2.5.

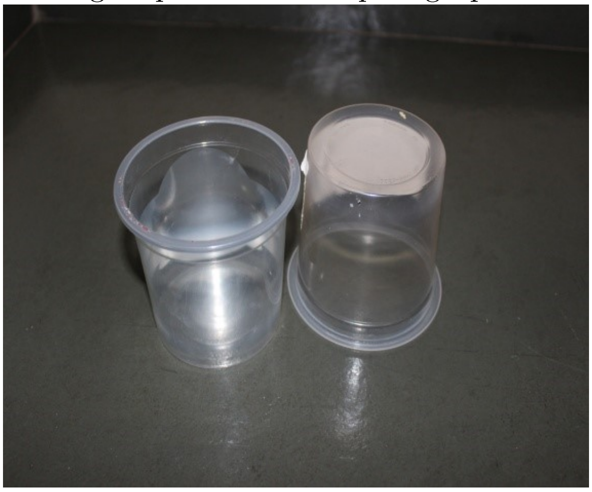
Figura 2.5: Pirâmide e cone de isopor - objetos de apoio



Fonte: arquivo pessoal

O grupo A, recebeu um tronco de cone, representado pela embalagem plástica, como mostra a Figura 2.6.

Figura 2.6: Embalagem plástica usada pelo grupo A - tronco de cone



Fonte: arquivo pessoal

O grupo A conseguiu identificar a embalagem como um tronco de cone após pesquisa na internet, mas não resolveram o problema criando um modelo matemático, foram direto na fórmula (pois buscaram a mesma na internet). Para a substituição de valores na fórmula o grupo usou régua para medir a altura do tronco e os raios das duas bases. Pediram auxílio somente para medir a altura do tronco do cone.

O grupo B recebeu uma embalagem de papelão com formato de tronco de pirâmide, conforme Figura 2.7.

Figura 2.7: Embalagem de papelão usada pelo grupo B - tronco de pirâmide

Fonte: arquivo pessoal

Esse grupo conseguiu visualizar que o tronco de pirâmide é um pedaço de uma pirâmide, que, ao receber um corte paralelo à base foi dividido em dois pedaços: uma pirâmide pequena e um tronco. O grupo também conseguiu visualizar que se calculassem o volume da pirâmide grande e também o volume da pirâmide pequena, o volume do tronco obtido após o corte paralelo à base, seria dado pela diferença entre os volumes das duas pirâmides. A dificuldade do grupo foi como determinar a altura da pirâmide antes do corte, pedindo assim orientação à professora.

Perante a solicitação desse grupo, foram feitas as seguintes perguntas para ajudá-los a chegar a uma resposta:

Professora: "Vocês conhecem a altura do tronco ?"

Grupo B: "Não, mas parece que tem jeito de medir com a régua."

Professora: "Sim, realmente. E a altura da pirâmide que foi retirada após o corte, vocês conhecem?"

Grupo B: "Também não. Mas depende da altura da pirâmide grande. Quando não conhecemos um valor na matemática, chamamos esse valor de x, y ou outra letra."

Professora: "Claro! Mas como usamos "letra"para representar esse valor, significa que ele pode assumir qualquer valor, correto?"

Grupo B: "sim. Hum... então podemos supor uma altura para a pirâmide pequena? Por que daí, se somarmos essa altura com a altura do tronco podemos achar a altura da pirâmide grande. (um integrante do grupo) Podemos fazer assim?"

Professora: "Que tal investigar com uma tentativa, dando um valor para a pirâmide pequena e determinando a altura da pirâmide grande?"

Após essa pergunta os alunos foram deixados sozinhos para tentar resolver.

O grupo C recebeu a embalagem de papelão que representa um tronco de pirâmide, como mostrado na Figura 2.8.

Figura 2.8: Embalagem de papelão apresentada ao grupo C - tronco de pirâmide

Fonte: arquivo pessoal

Os alunos que formavam esse grupo tiveram muitas dificuldades em enxergar o tronco como um pedaço de uma pirâmide, mesmo utilizando uma pirâmide como referência (construída com palitos de churrasco que fica na sala de aula para auxiliá-los no cálculo de área e volume da pirâmide). Mesmo com ajuda da professora eles fizeram o cálculo errado, ao invés de calcular o volume do tronco, calcularam a área total do tronco. Este grupo estava desorganizado e os integrantes que trocavam ideias não chegavam a um consenso, não conseguiram identificar as figuras planas no objeto.

O grupo D recebeu um tronco de cone representado por um funil, como mostra a Figura 2.9.

Figura 2.9: Funil de alumínio apresentado ao grupo D - tronco de cone

Fonte: arquivo pessoal

Este grupo não pediu ajuda do professor em momento algum. Pelo relato do grupo e pela resolução escrita, a metodologia seguida por eles foi dividir a figura em um cone e um cilindro, já que não desconsideraram o bico do funil. Usaram a medida da geratriz do cone e do raio da base para calcular a altura do cone (sem considerar o bico do funil). Depois usaram a fórmula do volume do cilindro, e ao final somaram os volumes do cilindro e do cone para obter o volume aproximado do funil, representado pelo modelo matemático:

$$V = VC_i + V_c$$

onde:

V = volume da figura
VC_i = volume do cilindro
V_c = volume do cone

O grupo E recebeu uma forma de bolo (Figura 2.10) representando o tronco de cone.

Figura 2.10: Forma de bolo apresentada ao grupo E - tronco de cone

Fonte: arquivo pessoal

Este grupo pediu ajuda somente para confirmar que o tronco era um pedaço de cone e também para calcular a altura do cone pequeno (cone retirado ao fazer o corte paralelo à base), pois o grupo também observou um cone de isopor que fica na sala de aula como referência para cálculo de área e volume do cone. O grupo conseguiu determinar o volume usando o conceito de diferença entre o volume de cone maior, volume do cone menor e o volume do tronco menor, no caso, a parte interna da forma. O modelo matemático encontrado por eles está descrito abaixo.

$$VF = (VCM - VCm) - (VCi - Vci)$$

onde:

VF = volume final
VCM = volume cone maior
VCm = volume do cone menor
VCi = volume do cone maior interno
Vci = volume do cone menor interno

Para determinar a altura do cone pequeno, os alunos solicitaram a ajuda da professora, onde foi feito o seguinte questionamento:

Grupo E: "professora, como vou saber a altura do cone da ponta"
Professora: "Qual era a altura do cone grande?"
Grupo E: "Não tem informação. Dá para encontrar usando a medida da geratriz?"
Professora: "Você tem informação suficiente para determinar a geratriz?"
Grupo E: "Não...E se eu der um valor para geratriz?"

Professora: “Você pode dar um valor para outra medida do cone?”

Grupo E: “acho que o raio da base de cima, ou da altura do cone pequeno...”

Professora: “se você der a altura do cone pequeno você precisa de mais alguma informação?”

Grupo E: “Hum.... acho que não...”

Nesse momento os alunos foram deixados sozinhos para terminar de resolver o problema.

Grupo F: “O grupo também recebeu uma forma de bolo, como visualizada na Figura 2.11.”

Figura 2.11: Forma de bolo apresentada ao grupo F - tronco de cone

Fonte: arquivo pessoal

Este grupo também não pediu muita orientação a professora. Usou uma régua e a fórmula do cone para calcular o volume. O grupo determinou a área circular da base grande e da base pequena (considerando o tronco de cone interno). Calculou a diferença entre as duas bases- considerando que a figura fosse um cone com uma base representada pela coroa circular. Para calcular o volume pedido, eles utilizaram a fórmula do volume do cone, considerando a base, a coroa circular e a altura do tronco de cone. Esta resolução ficou muito confusa. Também não foi possível refazer a etapa do modelo matemático, porque houve a apresentação de grupo, em que eles relataram a maneira como calcularam o volume para que a turma pudesse conhecer a ideia de cada grupo. O modelo matemático encontrado por eles foi:

$$VF = (AB - Ab)(H)\frac{1}{3}$$

onde:

VF = volume final da forma

AB = área da base grande

Ab = área da base pequena

H = altura do tronco

Grupo G: o grupo calculou o volume do tronco de cone, desconsiderando a parte do bico, como mostrado pela Figura 2.12.

Figura 2.12: Funil apresentada ao grupo G - tronco de cone

Fonte: arquivo pessoal

Este grupo pediu ajuda no início para saber se podia considerar a figura do funil como um cone e a resposta foi que sim, que poderia fazer uma tentativa para depois verificar se a resposta era, pelo menos, próxima. A maneira que eles usaram foi primeiro calcular o volume de um cone considerando a mesma base e o vértice do cone como o centro da base superior do cilindro (bico). Depois, calcularam o volume do cilindro (bico). De posse dos dois resultados, calcularam a diferença entre os dois volumes.

$$VF = VCn - VCl$$

onde:

VF = volume final do tronco
VCn = volume do cone grande (considerando o bico)
VCl = volume do cilindro (bico do funil)

Esta aula foi apresentada de forma a atender as etapas da Modelagem Matemática. A etapa de deixar o aluno escolher o tema da aula foi excluída uma vez que a aula foi elaborada de acordo com um trabalho já aplicado para continuar um assunto que já tinha sido introduzido, a saber Sólidos Geométricos. Os alunos coletaram dados utilizando a internet, usando régua, usando figuras espaciais construídas por eles para servir de base para comparação e identificar o tronco como pedaço de cone ou pedaço de pirâmide. Antes da validação foi sugerido que cada grupo fizesse um relato oral para o restante da turma de acordo com o raciocínio e fórmulas usadas para resolução, para que eles observassem ideias diferentes.

Esperava-se que todos os grupos conseguissem calcular o volume sem usar fórmula do tronco de cone ou a fórmula do tronco de pirâmide, porém somente três dos sete grupos (B, E, G) conseguiram realizar a tarefa. O grupo A pesquisou a fórmula do tronco de cone na internet para resolver o problema, os grupos (C e F) não conseguiram chegar ao volume, se perderam em meio aos cálculos e o grupo D usou o volume da figura por completo (corpo do funil-cone e bico do funil-cilindro).

Como houve o relato de cada grupo, a etapa de voltar para refazer o modelo matemático foi excluída, pois os grupos acabaram entendendo o raciocínio, e refazer já não era mais um desafio.

Para ocorrer a validação para os grupos que conseguiram finalizar a tarefa foi usado um copo graduado para verificar se o volume encontrado foi um valor aproximado coerente. A aplicação deste procedimento não foi possível ser realizado pelo grupo B, pois a embalagem utilizada por eles era de papelão. Nos casos da embalagem plástica, forma de bolo e dos funis, o resultado foi positivo. Para a embalagem de perfume, após conhecido a fórmula do tronco de pirâmide, foi sugerido ao grupo que substituísse as variáveis pelas medidas indicadas pelo experimento. Nos casos em que ocorreu a validação, constatou-se que o modelo matemático trazia um valor aproximado para o volume de água colocado nos objetos em questão.

O grupo C, que usou a embalagem de papelão que representa um tronco de pirâmide e fez o cálculo de maneira errada, conseguiu visualizar seu erro no momento em que os colegas foram comentando sobre o raciocínio usado para o cálculo do volume. Pediram para serem os últimos a fazer o relato da experiência e disseram que haviam feito o cálculo da área total. Explicou-se, que o ideal para o caso deles, seria que refizessem a atividade de modo a obter um novo modelo matemático, mas como foram os últimos a responderem, o modelo já estava pronto. Neste grupo achei que faltaram conhecimentos prévios de volume de pirâmide e volume de cone.

Esta aula serviu para mostrar aos alunos que existem caminhos para se chegar a um resultado, sem utilizar uma fórmula pré-estabelecida. Neste caso, os problemas foram resolvidos com o uso de uma fórmula já conhecida por eles, a saber, a fórmula do volume do cone e volume da pirâmide. Ao resolver estes problemas, houve a aproximação da matemática com a realidade do aluno, pois foram utilizados objetos que fazem parte do cotidiano. Aliás, a aproximação entre a realidade e a matemática foi um dos pontos positivos que os próprios alunos comentaram sobre a aula, incluindo a oportunidade de ter um momento para trocar ideias com os colegas. Alguns alunos ficaram calados no momento de resolução, mas estavam atentos ao que os colegas estavam comentando para resolver o exercício. O grupo era formado por 5 alunos, talvez um grupo com menor quantidade de alunos, por exemplo três, promovesse uma maior interação entre eles.

Sobre os pontos negativos do trabalho, pude observar a dificuldade dos alunos em organizar as ideias no papel até construir um modelo matemático. Essa dificuldade era esperada, uma vez que não tinham uma fórmula para o cálculo do volume do tronco pronta para substituir os valores, como de praxe na aula tradicional. Outra dificuldade observada foi na hora de medir a altura do tronco, já que a figura não era "reta", ou seja, uma figura plana. A visão espacial de altura com os objetos trabalhados foi uma habilidade que não foi percebida neles. Nesse caso, foi necessário um objeto de apoio para que eles pudessem relacionar o objeto do trabalho com o sólido geométrico. Percebe-se, nesse caso, que estas habilidades são pouco desenvolvidas durante as aulas, pois as mesmas são adquiridas com aulas práticas, e as aulas práticas são pouco utilizadas por nós professores.

Este tipo de abordagem requer que o professor esteja bem preparado em relação ao tema, para saber orientar o aluno tanto em como chegar ao modelo matemático, como também para verificar sua resposta na hora da validação. Avalio este trabalho como um pouco difícil de realizar devido ao número de alunos por turma, pois em uma turma com no mínimo 35 alunos (no dia da abordagem haviam faltado 2 alunos) fica difícil orientar todos os grupos em tempo hábil. Quando questionados sobre o trabalho, o grupo C (que foi o que mais teve dificuldade) disse que "é uma prática que deveria ser feita com mais frequência, mas que tenha mais ajuda". Talvez por ser a primeira aula prática dentro das aulas de matemática, eles ainda se sentiram muito dependentes, pois tiveram dificuldades até para fazer uso da régua.

Para mim, esta experiência serviu como referência para entender que é preciso melhorar nossas metodologias de ensino, tornando a aula mais interessante, motivando e facilitando a aprendizagem, procurando chegar a um melhor resultado nas avaliações tanto internas (na escola) quanto externas (SAEB). É uma longa estrada, pois caminhamos lentamente em melhorias na educação.

3 Problemas de Fermi

Embora pouco conhecida no Brasil, a metodologia que envolve os problemas de Fermi está sendo estudada em alguns países como Suécia, Espanha, Alemanha, EUA, México, entre outros. Alguns trabalhos que tratam este assunto podem ser encontrados em Fermi Questions [37], Navarro [39], Uma coleção de problemas de estimativas [40], Perguntas clássicas sobre Fermi [41], Perguntas de Fermi [42] e Peter-Koop [43].

Sobre o nome Fermi, que justifica o nome Problemas de Fermi, pode ser encontrado no seguinte texto:

> O nome Fermi é dado em homenagem a pessoa que recebeu o prêmio Nobel de Física, Enrico Fermi. Fermi tinha um dom para resolver problemas complexos: em vez de tentar resolver o problema de uma só vez, ele o dividia em partes pequenas e solucionáveis e então combinava essas respostas em uma solução para o todo. ABRAMS [1]

Mas, o que são os Problemas de Fermi?

Na verdade, pouco se sabe sobre os problemas de Fermi, logo são pouco utilizados pelos professores e estudantes. A primeira observação encontrada é que não há uma definição clara sobre o que são problemas de Fermi, o que confirma o dito por Ärlebäck e Albarracin [4] "definições e caracterizações dos problemas de Fermi encontrados na literatura são vagas e ambíguas". Outra observação importante é que embora o assunto venha sendo abordado há um tempo não há grandes avanços sobre este assunto, sendo que os trabalhos relacionados ao tema parecem mais uma sequência de repetições.

A seguir, são apresentadas diversas definições dos problemas de Fermi:

Figueiredo e Soares [28] definem problemas de Fermi como "problemas que envolvem algum processo de estimativa para chegar à resposta".

Ärlebäck e Albarracin [4] define os problemas de Fermi como "problemas que são utilizados para estudar o raciocínio dos alunos na solução dos chamados problemas de estimativa de grandes números".

Para Abrams [1] "os problemas de Fermi são problemas cuja solução é difícil de medir ou a resposta é imprecisa. Os cálculos dos problemas de Fermi requerem habilidades matemáticas, lógica, pensamento crítico, experiências de vida, e a capacidade de dividir problemas complexos em partes menores e solúveis"

De acordo com as definições descritas acima, para resolver problemas de Fermi é preciso saber estimar. Por outro lado, o raciocínio para resolver estes problemas envolvem diversas habilidades matemáticas e lógicas bem como experiências de vida. Nesse contexto, antes de dar continuidade ao assunto Problemas de Fermi, vamos, primeiramente, tratar sobre a habilidade em saber estimar.

3.1 A importância das estimativas

É notável a importância de se trabalhar a estimativa desde os anos iniciais, pois de acordo com a minha experiência, a maioria dos alunos não possuem o hábito de fazer estimativas, nem mesmo na hora de resolver uma operação básica através de cálculo mental. Destaca-se pois, a necessidade de abordar o assunto de estimativa nos anos inicias como parte da orientação curricular. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> A estimativa constrói-se juntamente com o sentido numérico e com o significado das operações e muito auxilia no desenvolvimento da capacidade de tomar decisões. O trabalho com estimativas supõe a sistematização de estratégias. Seu desenvolvimento e aperfeiçoamento depende de um trabalho contínuo de aplicações, construções, interpretações, análises, justificativas e verificações a partir de resultados exatos. Desde as primeiras experiências com quantidades e medidas, as estimativas devem estar presentes em diversas estratégias que levem os alunos a perceber o significado de um valor aproximado, decidir quando é conveniente usá-lo e que aproximação é pertinente a uma determinada situação,como identificar unidades de medida adequadas às grandezas. BRASIL [9]

É preciso ressaltar a importância do cálculo mental desde os primeiros anos da educação básica, desenvolvendo no aluno estratégias para esse tipo de cálculo. Para isso, por exemplo, a noção de antecessor e sucessor, dobro e metade e decomposição de um número deve ser bem trabalhada, pois são essas noções que auxiliam na compreensão e ajudam o aluno a criar suas próprias estratégias de cálculo mental e cálculo por estimativa. Sabe-se também que, fora da escola, grande parte dos cálculos presentes na vida cotidiana são realizados mentalmente usando as estimativas.

Infelizmente, considerando alunos da escola em que trabalho e relatos de colegas de outra escola, percebe-se que muitos alunos estão chegando ao sexto ano (antiga 5ª série) com grandes dificuldades na aplicação de conceitos básicos de operações fundamentais, principalmente quando estes problemas são contextualizados.

Nota-se que os alunos não sabem discernir se em um determinado problema deve ser utilizado a adição, subtração, multiplicação ou divisão. Conseguem resolver apenas exercícios utilizando algoritmos convencionais, prejudicando o processo de estimativas e cálculos mentais.

Para melhor compreensão sobre o assunto, sugiro a leitura em Brandt e Moretti [6] sobre estimativas. Nesse trabalho, as autoras trazem uma coletânea de textos de pesquisadores brasileiros com resultados de pesquisas desenvolvidas na área da educação matemática. Um dos capítulos destina-se à importância da utilização do cálculo mental no Ensino Fundamental e de estimar resultados tanto na vida cotidiana quanto na vida escolar.

Outro trabalho interessante sobre a estimativa é o trabalho de Bragança et al. [7]. "Um palpite inteligente: incentivando a estimativa em sala de aula". Este artigo trata sobre a importância de se trabalhar a estimativa e propõe algumas atividades lúdicas para esse trabalho.

Em alguns casos, as estimativas podem ser suficientes para tomar uma decisão, onde não há necessidade de uma resposta precisa, mas não pode ser confundida como uma resposta "chute", como vista por muitos alunos. Dessa maneira, a estimativa é uma habilidade que deve ser muito bem trabalhada para que o aluno tenha bons resultados tanto na vida escolar quanto no cotidiano, pois dessa forma ele se torna mais autônomo em suas decisões.

Para Reys [32] "é essencial que estratégias para estimar sejam trabalhadas com os alunos, pois a menos que estratégias sejam ensinadas, poucos estudantes terão condições de desenvolvê-las por si próprios". Segundo o autor, ao aumentar o seu repertório de estratégias de estimativas por meio de conhecimento escolar e da prática, os alunos se tornam cada vez mais conscientes das opções disponíveis.

Para De Bressan e Lebogisic [21] "é importante sim que os alunos aprendam estratégias para estimar, usadas em resoluções de problemas e em tomadas de decisões, dentro e fora da matemática, dentro e fora da escola. Estas estratégias permitem antecipar e avaliar a consistência dos resultados de medição e de cálculos e ainda permitem ao aluno entender a imprecisão da medição começando a trabalhar o conceito de erro".

Para exemplificar algumas atividades relacionadas com estimativas, citamos duas ideias de atividades apresentadas no trabalho "Um palpite inteligente: incentivando a estimativa em sala de aula", de Bragança et al. [7]., as quais são voltadas para alunos dos anos iniciais:

Atividade 1 - Apresentar aos alunos dois potes de tamanhos diferentes, cheios de balas, para que os alunos estimem quantas balas existem em cada pote. Os potes devem ser transparentes para melhor visualização.

Figura 3.1: Sugestão de pote para balas

Fonte: arquivo pessoal

Atividade 2- Nesta atividade, os alunos deverão trabalhar com medidas de volume. Para isso, apresenta-se aos alunos três sólidos geométricos vazios e três garrafas cheias de água, em diferentes níveis, garrafas também transparentes. O objetivo dessa atividade é que o aluno consiga adivinhar, por meio de uma estimativa e usando a associação entre os sólidos e as garrafas, qual o volume de cada sólido. A autora do trabalho usou sólidos geométricos de acrílico, mas os mesmos podem ser substituídos por outros objetos similares.

Figura 3.2: Sólidos geométricos usados por Bragança et al. [7]

Fonte: BRAGANÇA et. al., [7],p.7

3.2 Problemas de Fermi como estratégia de ensino de matemática

Os problemas de Fermi, também chamados problemas de estimativas, ainda são pouco conhecidos na área da educação, embora já venha sendo utilizado em alguns trabalhos desde a década de 80 Ärlebäck [3], Navarro [39] e Peter-Koop [43]. Acredita-se que pelo fato de ser pouco conhecido, os problemas de Fermi são pouco utilizados como ferramenta de ensino.

Para melhor compreensão do tema, foram estudados artigos, que apresentam textos teóricos descrevendo maneiras para resolver problemas com esta característica. Outros, apresentam os problemas de Fermi em contextos mais desafiadores, porém fora da realidade do dia a dia de muitos alunos. Ärlebäck e Albarracin [4] cita em seu trabalho alguns tipos desses problemas desafiadores como:

- Quantos afinadores de piano existem em uma cidade?
- Quantos grãos de areia cabem em um copo?

Embora sejam problemas reais, não estão próximos a realidade dos meus alunos. Sendo a educação de hoje um desafio para todos os profissionais dessa área, é importante que os problemas, de fato, instiguem a curiosidade do educando, mas sobretudo que os façam entender a importância de que o que se aprende na escola é significativo na vida deles.

Sendo os problemas de Fermi pouco conhecidos e utilizados no meio acadêmico, sugiro a proposição de alguns problemas-desafio, mas que estejam próximos ao aluno como forma de dar significado a tais problemas. Esta familiarização pode ser realizada, por exemplo, na forma de gincana, para maior motivação. Elenco a seguir 4 problemas (1-4) adaptados de Fermi Question - Science 1 - Olympics [37] : e mais 2 elaborados por mim (5-6).

1. Quantas unidades de pipoca são necessárias para encher sua sala de aula?
2. Estime quantos quilos de batata são consumidos em uma semana em nossa cidade?
3. Quantos cabelos individuais um barbeiro corta em uma vida?

4. Quantas moedas de 10 centavos são necessárias para atingir a sua altura?

5. De quantas canetas precisamos para colocá-las em fila da porta da escola até o parque de exposições?

6. Quantas bolinhas de papel as serviçais da nossa escola recolhem das salas de aula em uma semana?

Jonas Bergman Ärlebäck é um dos pesquisadores mais destacados no assunto problemas de Fermi, e juntamente com Llouis Albarracin em seu trabalho intitulado *Developing a classification scheme of definitions of Fermi problems in education from a modelling perspective*, realizado em 2017, objetivou "lançar as bases para encontrar um terreno comum para promover os problemas de Fermi na educação e pesquisas". As definições de Fermi, embora existentes em muitos artigos, ainda não são muito claras, e aparecem como um conhecimento compartilhado e quase sempre trazem alguns problemas exemplos para caracterizá-los. Através de pesquisas, eles escolheram três definições para os problemas de Fermi, que foram analisados com as perspectivas de inserção dentro da Modelagem Matemática. As definições e características escolhidas por eles são da autoria de Ärlebäck [3], Goodchild e Fuglestad [56] e Sriraman e Knott [44]. Cada uma das definições citadas no trabalho de Ärlebäck e Albarracin [4] são apresentadas a seguir.

Para Ärlebäck [3] os problemas de Fermi devem possuir as seguintes características:

> - sua acessibilidade, o que significa que eles podem ser abordados por todos os alunos ou grupos individuais de estudantes, e resolvido em ambos os diferentes níveis de ensino e em diferentes níveis de complexidade. Um problema realista de Fermi não exige necessariamente nenhum conhecimento matemático específico;
> - sua conexão clara no mundo real, para ser realista. Como consequência, um problema realista de Fermi é mais do que apenas um exercício intelectual, e eu concordo plenamente com Sriraman e Lesh [45] quando argumentam que "os problemas de Fermi que estão diretamente relacionados ao ambiente oferecem mais possibilidades pedagógicas significativas"
> - a especificação e estruturação das informações e relações relevantes necessárias para enfrentar o problema. Esta característica prescreve que a formulação do problema seja aberta, não imediatamente associado a uma estratégia ou procedimento conhecido para resolver o problema e, portanto, instando os solucionadores de problemas a invocar construtos, concepções, experiências e estratégias anteriores e outras habilidades cognitivas na abordagem do problema;
> - a ausência de dados numéricos, ou seja, a necessidade de fazer estimativas razoáveis de quantidades. Uma implicação dessa característica é que o contexto do problema deve ser familiar, relevante e interessante para o(s) sujeito(s) que nele trabalha(m);
> - (em conexão com os dois últimos pontos acima) seu impulso interno para promover a discussão, que, como atividade de grupo, eles convidam a discussões sobre diferentes assuntos, como o que é relevante para o problema e como estimar entidades físicas
>
> (ÄRLEBÄCK, [3], p.5, tradução nossa)

A definição de Goodchild e Fuglestad [56], é:

> Estes [problemas de Fermi] são tarefas de "estimação plausível" que consistem em uma ou duas perguntas facilmente afirmadas que, à primeira vista, parecem impossíveis de responder sem material de referência, mas que pode ser razoavelmente estimado seguindo uma série de passos simples que usam apenas sentido e números que são geralmente conhecidos ou passíveis de estimação. (ÄRLEBÄCK, [3], p.5, tradução nossa)

Por último, segundo Sriraman e Knott [44]:

> Os problemas de Fermi são problemas de estimativas usados com o propósito pedagógico de identificar claramente condições de partida ou suposições e fazendo suposições educadas sobre várias quantidades ou variáveis que surgem dentro de um problema com o requisito adicional de que o cálculo final seja viável ou computável à mão. (ÄRLEBÄCK, [3], p.5, tradução nossa)

Ärlebäck e Albarracin [4] fizeram uma análise entre as definições para os problemas de Fermi e as perspectivas de modelagem baseadas em Kaiser e Sriraman [38] citadas no capítulo anterior, visando a introdução dos problemas de Fermi ccomo ferramenta para a Modelagem Matemática. O resultado é apresentado no Quadro 3.1.

Tipo de Modelagem	**Inserção dos problemas de Fermi**	**Observações**
Contextual - tem o objetivo de resolver problemas, onde os alunos desenvolvem conceitos já aprendidos	Goodchild e Fuglestad [56] e Ärlebäck [3], afirmam que os alunos precisam entender de maneira significativa o contexto do problema de Fermi para superar as perguntas fáceis de resolver, que em um primeiro momento parecem impossível de serem resolvidas. Os alunos devem ser instigados a criar estratégias de resolução.	A modelagem contextual trabalhada por mim, e acredito pela maioria dos colegas, abrange um contexto apenas ilustrativo, de modo a fazer com que o aluno utilize as fórmulas já "aplicadas"em outras atividades. Em momento algum são instigados a recorrer à habilidades e experiências para construir um modelo matemático.
Educacional - esta perspectiva pode ser didática ou conceitual. A modelagem educacional didática tem por objetivo trabalhar problemas de forma pragmática, ou seja , os problemas são trabalhados de forma a utilizar os conceitos adquiridos em um determinado conteúdo, obedecendo um conjunto de regras Já a modelagem educacional conceitual visa a introduzir um conceito matemático ou ao desenvolvimento de um conceito matemático já aplicado.	Ärlebäck [3] e Sriraman & Knott Sriraman e Knott [44] propuseram os problemas de Fermi para promover aprendizagem de outros objetivos curriculares. Na definição de Ärlebäck [3] os problemas de Fermi devem ter acessibilidade e promover discussão entre os alunos e para Sriraman & Knott, os problemas de Fermi tem um propósito pedagógico.	A modelagem educacional didática é mais comum na sala de aula, pois são apresentados problemas cujo objetivo é desenvolver um conjunto de regras. Em outro momento, e até em alguns livros, aborda-se a introdução de um conteúdo através de um problema com elementos reais, mas nem sempre próximo ao aluno. Estes problemas são ilustrativos, somente com o intuito de chamar a atenção do aluno, ou para resolver em uma aula dialogada (professor x aluno), porém o problema é resolvido utilizando uma fórmula.

Tipo de Modelagem	Inserção dos problemas de Fermi	Observações
Realística - modelagem em que o objetivo é resolver problemas práticos: voltado para o trabalho (indústria e outros) ou no uso de problemas de Ciência.	Para os três autores: Ärlebäck [3], Sriraman & Knott [44] e Goodchild & Fuglestad [56]) os problemas de Fermi sugerem contextos reais, ou seja, devem ter uma ligação com o mundo real, com problemas que estão próximos à realidade do aluno. Porém não afirmam se há a conexão entre a perspectiva de modelagem e as definições dos problemas de Fermi.	Os problemas reais, no sentido da perspectiva de modelagem voltado para a indústria, não são trabalhados por mim em sala de aula. Os cursos de ensino médio que oferecem curso técnico como SENAI, Institutos Federais, etc. estão em melhores condições de introduzir os problemas de Fermi na modelagem realística. Mas, utilizo problemas voltados para a ciência quando ensino logaritmo e exponencial. Uso problemas que envolvem escala Richter, cálculo de PH de soluções químicas, e meia vida de medicamentos, mas são problemas já oferecidos nos livros de matemática, onde resolvemos usando o conceito já utilizado em atividades mais simples, os problemas são usados somente como aplicação do conceito dos conteúdos

Fonte: Elaborada pela autora baseada nas análises de ÄRLEBÄCK & ALBARRACÍN [4]

Quadro 3.1: Inserção dos problemas de Fermi dentro da Modelagem Matemática.

Segundo Ärlebäck e Albarracin [4], os cursos de Engenharia e Física das faculdades nos EUA, já fazem uso dos problemas de Fermi como ferramentas de ensino. No artigo apresentado por eles, o objetivo é identificar uma conexão entre as perspectivas de modelagem e as definições dos problemas de Fermi, também já citados por eles neste subcapítulo, de modo a usar os problemas de Fermi como uma ferramenta para introduzir a Modelagem Matemática. Pela análise feita no Quadro 3.1, observa-se que as modelagens contextual e educacional são as que mais têm conexão com os problemas de Fermi, facilitando assim sua inclusão no Ensino Básico das escolas públicas. Concordo fortemente com os autores em usar os problemas de Fermi como uma modelagem contextual, de modo a aplicar os conceitos já aprendidos pelos alunos, de modo que o aluno veja a aplicabilidade dos conceitos matemáticos.

A modelagem realística, também presente na Quadro 3.1 é uma modelagem mais apropriada para os sistemas de ensino como escolas técnicas e escolas federais. A inserção da modelagem realística nas escolas públicas e nas escolas particulares pode ser feita através de feiras, gincanas, apresentações, trabalhos de extensão, etc.

Mas, para que os problemas de Fermi sejam trabalhados como problemas de modelagem é necessário que sejam reformulados de acordo com a realidade dos alunos, pois encontram-se problemas de Fermi em contextos que possivelmente não sejam relevantes para o aluno, como por exemplo, um problema que deseja saber quantos grãos de areia cabem em um copo, ou ainda quantos fios de cabelo possui uma pessoa. Esses tipos de problemas possuem um elemento real, mas que não acrescentam nenhum conhecimento prático, investigativo ou experimental na aprendizagem. Para Ärlebäck e Albarracín [3] a maioria das definições sobre os problemas de Fermi, encontradas em artigos analisados por eles, estão relacionadas com o local de realização da pesquisa e têm um objetivo específico. Por isso a necessidade de reformular os problemas de Fermi para torná-los mais relevante e empolgante para sua resolução.

Como os trabalhos que envolvem os problemas de Fermi no contexto da Modelagem Matemática ainda estão em constante evolução, a seguir será apresentado um trabalho em que foi utilizado os problemas de Fermi para fazer uma estimativa. Este trabalho servirá para ilustrar a aplicação desses problemas e para fazer uma observação sob qual perspectiva os problemas apresentados foram abordados.

3.2.1 Utilizando problemas de Fermi para estimar

O artigo de Figueiredo e Soares [28], intitulado: "Utilizando Problemas de Fermi para Estimar", apresentado no XII Encontro Nacional da Educação Matemática, em São Paulo, em 2016, tem por objetivo apresentar atividades referentes ao ensino de estimativas por meio de alguns problemas de Fermi para que possa estimular os professores a criarem os seus próprios problemas de Fermi com os alunos. Ela apresenta a definição de estimativas no contexto escolar falando da importância em desenvolver esta habilidade em sala de aula, e por fim apresenta dois problemas adaptados do livro de Lawrence Weinstein , John A. Adam intitulado "Guesstimation: Solving the World's problems on the Back of Coktail Napkin"de 2008. "O livro trata a estimativa como parte essencial da matemática, apresentando ao leitor maneiras de resolver problemas aparentemente complexos usando apenas dados já conhecidos e com operações simples." Figueiredo e Soares [28].

Na terceira etapa do seu artigo, Figueiredo e Soares [28] apresentam três atividades que usam a noção de estimativa para serem resolvidas, envolvendo números grandes: duas adaptadas do livro Guesstimation: "Guesstimation: Solving the World's problems on the Back of Coktail Napkin "e uma atividade criada pelas autoras do artigo.

Como resolver um problema de Fermi

Sendo o problema de Fermi um problema de estimativa não existe um procedimento exato para sua resolução, pois, não são problemas que após a sua leitura, podemos associá-los a um conteúdo específico para dar a resposta exata usando um modelo matemático (fórmula).

Figueiredo e Soares [28], afirmam que para resolvê-los é necessário que os alunos estejam familiarizados com alguns conteúdos matemáticos, noções de cálculo mental e estimativa, noções básicas de volume e área. Elas ressalvam ainda que não se deve deixar de estimular o aluno a fazer suas próprias estimativas usando dados que considera importante, pois a autonomia quando dada ao estudante faz com que ele assimile a importância do conteúdo.

Segundo Navarro [39], para resolver um problema por estimativa, também chamado problema de Fermi, é preciso levar em consideração que:

> os problemas de Fermi são problemas de cálculo em que se espera que apresentemos como resposta uma solução aproximada, considerando que os dados apresentados são limitados ou não estão explicitamente definidos.

Ainda segundo Navarro [39], "os problemas de Fermi nos convidam a fazermos mais perguntas para resolvê-los, já que o mesmo requer vários conhecimentos. O problema principal deve ser dividido em outros mais simples de se resolver, sendo possível utilizar conhecimentos do cotidiano como a expectativa de vida de um ser humano, quantas pessoas cabem em um m^2 sem se sentirem desconfortáveis, etc"

No artigo intitulado: Fermi Estimates de Muehlhauser [30], no que se refere a estimativa por limite, que deve ser utilizada quando a estimativa vai além da nossa experiência. De acordo com Navarro [39] "é necessário utilizar um limite inferior e um limite superior e com a média geométrica entre esses limites determinar a estimativa que se deseja. Quando o número está com sua representação em notação científica a média entre os expoentes determina a ordem de magnitude". Ele sugere também que, a média geométrica seja aproximada da seguinte maneira: os limites devem estar apresentados na forma de notação científica para então calcular a média aritmética dos coeficientes e a média aritmética dos expoentes. Caso o expoente encontrado seja um número ímpar, o expoente utilizado deverá ser o número anterior ou, no caso de decimal, arredondar-se-à para o inteiro anterior. A média encontrada deverá ser multiplicada por 3.

Apresenta-se a seguir, um exemplo que ilustra o cálculo de uma estimativa em que se utiliza limites, e em seguida três problemas de Fermi acompanhados de sua solução, retirados do trabalho de Heloísa Figueiredo: "Utilizando problemas de Fermi para estimar"

Exemplo 3.1 - Como calcular a média geométrica aproximada (MGA)

Muehlhauser [30], trouxe como exemplo ilustrativo o cálculo da MGA dos números 20 e 400, considerados os limites de uma certa estimativa.

Solução: De acordo com a sugestão dada, os números 20 e 400 em notação cientifica são:

$$20 = 2(10^1) \text{ e } 400 = 4(10^2).$$

A estimativa é dada pela média aritmética dos dois limites, que também deverá ser apresentada na forma de notação cientifica. Para calcular a média aritmética de números que estão em notação cientifica, devemos determinar a média entre seus coeficientes numéricos, cujo resultado será o coeficiente numérico médio, para depois calcular a média aritmética dos expoentes, como segue:

* Cálculo da média dos coeficientes 2 e 4

$$Cm = \tfrac{2+4}{2} = 3$$

Cm = coeficiente médio

* Cálculo da média aritmética dos expoentes 1 e 2

$$Em = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

Em = expoente médio

Como o resultado da média aritmética dos expoentes é decimal, usa-se o inteiro menor que 1,5, que no caso é 1.

Com os resultados acima podemos determinar a estimativa média em notação científica como:

$$3(10^1) = 3(10) = 30$$

Quando arredondamos o expoente para o inteiro estamos encontrando um valor aproximado. Se fôssemos calcular $3(10^{1,5})$ teríamos:

$$3(10^{1,5}) = 3(10)(10^{0,5})$$

e pela propriedade da potência

$$10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3$$

Isso justifica a multiplicação por 3 citada por Muehlhauser [30]. Portanto, a nossa MGA após arredondar o expoente 1,5 para 1 será

$$(3)(3)(10) = 90.$$

Se os números não estiverem em notação cientifica, o indicado por Navarro [39] é que se faça a média geométrica dos números. Calculando a média geométrica dos números 20 e 400 teríamos:

$$\sqrt{20(400)} = \sqrt{8000} \approx 89,44$$

Observa-se que a média geométrica aproximada dos números 20 e 400 está próximo do valor da média geométrica desses números. Portanto é uma boa estimativa.

Após falar sobre como resolver um problema de Fermi, Figueiredo e Soares [28] apresentou dois problemas presentes no livro de Lawrence Winsten & Johan A. Adam [46], citado no início desse texto, lembrando que os problemas sofreram uma pequena adaptação para melhor compreensão.

Problema 3.1 - Em média, quantas pessoas estão voando sobre o Brasil em um momento qualquer?

Para facilitar a resolução dos problemas, algumas sugestões são apresentadas no livro citado por Figueiredo e Soares [28]. Estas sugestões para auxiliar as resoluções dos problemas pedem dados já conhecidos e operações simples.

As sugestões são:

- não supor um horário de madrugada.

- pensar que fração de tempo se gasta voando (horas ou dias que você voa em comparação com o número de horas ou dias em um ano).
- a fração de tempo que as pessoas passam voando é igual à fração de pessoas voando a qualquer momento.

Figueiredo e Soares [28] explicam que as ideias básicas são: que o tempo em que a média em que as pessoas passam voando é igual a média de pessoas que estão no ar em um instante qualquer, o que significa que se você gastar 10% do seu tempo voando, então em média 10% da população está no ar em um dado momento e a outra ideia é que podemos usar nossa experiência para estimar o tempo que a média das pessoas passa no ar, ou no shopping ou dormindo.

Solução:

Para determinar o número de pessoas que estão voando fez-se a proporção entre a razão do número de pessoas que estão voando e a população brasileira (na data do artigo) e a razão entre o tempo gasto voando e o tempo (em horas) de um ano.

Considerou-se a população brasileira em 200 milhões de habitantes aproximadamente.

Foi montada então a seguinte proporção, com a razão entre número de pessoas voando e população brasileira e a razão tempo gasto voando em um ano.

$$\frac{\textit{número de pessoas voando agora}}{\textit{população brasileira}} = \frac{\textit{tempo gasto voando}}{1\ \textit{ano}}$$

A estimativa feita de número de voos por brasileiro foi de 3 voos por ano, com uma duração entre 1 hora e 6 horas.

Considerou-se então voos anuais por pessoa com uma duração de 3 horas, e chegou-se ao valor de que cada pessoa faz 6 horas de voo por ano. Como o objetivo é determinar o número de pessoas voando nesse momento, a autora do artigo considerou que cada pessoa faz dois voos por ano, com duração de 3 horas cada um, obtendo então o valor de 6 horas anuais que foi substituído na proporção representada acima, Para facilitar os cálculos, o tempo em ano também foi representado em horas, de forma arredondada, pois um ano (365 dias) possui 8760 horas, mas usando a aproximação temos 10^4 horas anuais, também substituídos na expressão acima.

$$\frac{\textit{número de pessoas voando agora}}{2(10^8)} = \frac{6}{10^4}$$

$$\textit{número de pessoas voando agora} = \frac{6(2)(10^8)}{(10^4)} = 12(10^4) = 1,2(10^5)$$

O valor apresentado no problema apresentou um resultado com coeficiente numérico na forma decimal. Como foi mencionado no artigo que foi feito arredondamento para simplificar os cálculos, também foi feito o arredondamento para um número inteiro maior, obtendo resultado

$$2(10^5) = 200 \text{ mil pessoas}$$

Resposta:

Aproximadamente, 200 mil pessoas voando sobre o Brasil neste momento (considerando o ano do artigo).

Problema 3.2 - Quantos quilômetros um jogador de futebol percorre durante um jogo?

Segundo Figueiredo e Soares [28], as informações úteis que podem ser repassadas aos alunos citadas pelos autores Weinstein e Adam [46] em seu livro são:

- quantas vezes os jogadores correm de um lado para o outro no campo de futebol?
- quão rápido eles correm?
- quanto tempo do jogo eles gastam correndo?

Foi estabelecido nesse problema, pela autora do artigo, que a distância percorrida é igual à velocidade média multiplicada pelo tempo que o jogador está em movimento.

1ª Solução:

Baseado em uma partida de futebol, pode-se dizer que, com exceção do goleiro, todos os jogadores estão andando ou correndo e raramente parados.

A referência usada pela autora para estimar velocidades de caminhada e de corrida, foi a velocidade média de Usain Bolt, ex velocista jamaicano multicampeão Olímpico e Mundial nessa modalidade. Em 2009 ele percorreu 100m em 9,58 s, valor esse arredondado para 10s, com uma velocidade média de 10m/s.

De acordo com essa velocidade, atribuída a um atleta, determinou-se que um jogador tem uma velocidade média de 10m/s quando correndo e 2m/s quando caminhando.

O tempo estipulado para o tempo em que se passa correndo e o tempo em que se passa andando foi 50% para cada.

A velocidade média de um jogador em campo é de :

$$Vm = \frac{(v_1 + v_2)}{2} = \frac{(10 + 2)}{2} = 6m/s,$$

onde:

Vm = velocidade média
v_1 = velocidade máxima de um atleta, de acordo com a velocidade de Usain Bolt.
v_2 = velocidade mínima estimada, de um atleta ao caminhar.

Considerando que o tempo do jogo é de 90min = 5400s, teremos que a distância percorrida por um jogador cuja velocidade 6m/s é de, aproximadamente:

6(5400), ou seja 32400 metros, o equivalente a aproximadamente 32km.

Como ao se tratar de problemas de Fermi não há resposta certa ou errada, desde que não seja absurda, há uma outra solução para o mesmo problema no texto de Neto, Souza et. al. [35], onde foi apresentado um trabalhado baseado no artigo "Applying the Fermi estimation to business problems "de Anderson & Sherman. No texto apresentado, eles consideraram a velocidade média de um jogador de futebol quando caminhando em 4m/s e também basearam na velocidade de Usain Bolt - 10m/s, já mencionado no parágrafo anterior, na resolução apresentada por Heloísa.

2ª Solução:

Nesta situação, a velocidade média do jogador é dado por:

$$Vm = \frac{(v_1 + v_2)}{2} = \frac{(10 + 4)}{2} = 7m/s,$$

onde:

Vm = velocidade média
v_1 = velocidade máxima de um atleta, de acordo com a velocidade de Usain Bolt.
v_2 = velocidade mínima estimada, de um atleta ao caminhar.

Para o tempo de duração do jogo, 90 minutos, eles consideraram que 40% desse tempo, ou seja, 36 minutos, os jogadores passam correndo, 30% desse tempo, ou seja 27 minutos, passam andando e 30% desse tempo, também 27 minutos parados.

Com esses valores calcularam a distância percorrida por um jogador correndo e andando obtendo os seguintes valores:

- nos 36 minutos (2160s) correndo percorrem 7(2160) = 15120 metros.
- nos 27 minutos (1620s) que passam andando a uma velocidade média estimada em 0,5m/s a distância percorrida pelo jogador é:

$$0,5(1620) = 810 \text{ metros.}$$

De acordo com os cálculos eles percorrem ao todo

$$(15120 + 810) metros = 15930 \text{ metros,}$$

o que equivale a aproximadamente 15,9 km, valor este considerado correto de acordo com o site Terra [57] consultado para verificação da resposta.

O Problema 3.2 foi resolvido de duas maneiras diferentes: na 1ª resolução não foi considerado o tempo em que um jogador fica parado, valor computado no 2º modo de resolução. Ao acrescentar à 2ª solução um novo dado, foi obtido um novo modelo matemático. Observa-se que ambas as soluções para o problema têm resultados diferentes, mas como o objetivo do problema é construir uma resposta aproximada, pode-se considerar as duas respostas corretas. Entretanto, a 2ª solução é mais precisa de acordo com a validação feita por uma pesquisa no site citado anteriormente. Para a resolução do problema é necessário que se tenha um pouco de conhecimento sobre a dinâmica dos jogos de futebol e saber fazer estimativas, que se tornarão melhores quanto maior for a quantidade de informações disponíveis ou conhecidas. Os cálculos utilizados foram os mais simples possíveis, a saber, adição, multiplicação e média aritmética.

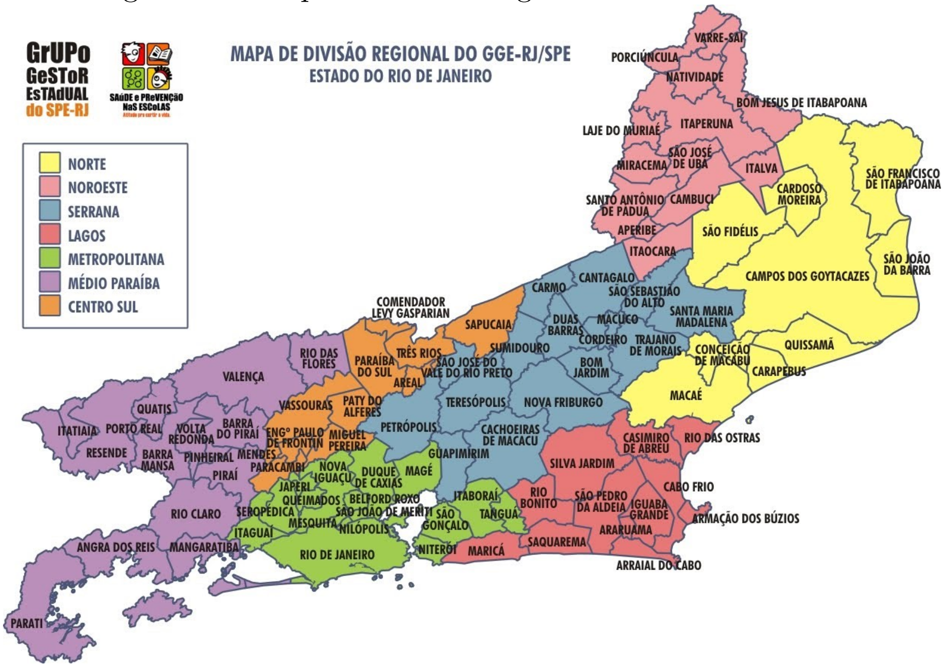
Para finalizar o artigo, Figueiredo e Soares [28] apresentaram um problema elaborado por ela e por Flávia dos Santos Soares.

Problema 3.3 - Quantos carros passam pela ponte Rio Niterói por dia?

Para tal situação, foi considerado que a travessia Rio Niterói é realizada diariamente por muitos moradores do Rio que trabalham em Niterói ou cidades circunvizinhas e vice-versa: moradores de Niterói e dessas cidades que atravessam a ponte para trabalhar no Rio.

Foi analisado um mapa das regiões do estado sobre as cidades que necessitam da ponte para que os moradores se locomovam.

Figura 3.3: Mapa de divisão regional do Rio de Janeiro



Fonte: Maps Blog - Mapas do estado do Rio de Janeiro [55]

- para ir a algumas cidades como Petrópolis e Vassouras não há necessidade de passar pela ponte.

De acordo com o mapa dado na Figura 3.3, a estimativa foi feita considerando que a travessia é realizada por moradores do Rio de Janeiro e região metropolitana (incluindo Niterói) e a parte da Região dos Lagos. O número de habitantes com o qual trabalharam foi 6 milhões para a cidade do Rio de Janeiro e 2 milhões para a cidade de Niterói e Região dos Lagos, juntos fazem um total de 8 milhões de pessoas, sendo que a fonte desses dados não foi informada pelas autoras.

A travessia da ponte pode ser de coletivo (barca, ônibus, van) carros de passeio e outros.

Algumas considerações realizadas para resolver o problema foram:

- Para determinar o número de pessoas que fazem a travessia da ponte de carro, as autoras consideraram um limite superior e um limite inferior. No limite superior foi estimado que 10% das pessoas utilizam de carro de passeio para atravessar a ponte. A estimativa foi feita considerando que vários moradores da cidade do Rio de Janeiro vão trabalhar ou estudar em Niterói e cidades circunvizinhas, assim como o inverso: moram em Niterói e cidades circunvizinhas e vão trabalhar ou estudar na cidade do Rio de Janeiro. Para o limite inferior elas consideraram que 5% das pessoas utilizam o carro de passeio para atravessar a ponte. Finalmente, uma vez calculadas as duas aproximações usando o valor máximo e o valor mínimo, elas fizeram uma estimativa média.

- considerar que a relação entre o número de carros e de pessoas no Brasil é de 1 carro para cada 4 pessoas

Solução:

Primeiro será calculado o número máximo de pessoas que atravessam a ponte Rio Niterói, considerando que seja um valor aproximado a 10% a soma das populações das cidades do Rio de Janeiro, Niterói e Região dos Lagos que atravessam a ponte de carro de passeio. Também, considera-se que a relação entre o número de carros e de pessoas no Brasil é de 1 carro para cada 4 pessoas. Logo:

$$10\% \text{ de 8 milhões} = (10^{-1})(8)(10^6) = 8(10^5) = 800mil.$$
$$\tfrac{1}{4}(800.000) = 200.000$$

Dessa forma, aproximadamente, 200 mil pessoas fazem a travessia da ponte com carro de passeio.

Estimando que o mínimo de pessoas que atravessam a ponte Rio-Niterói, seja aproximadamente a 5% da soma das populações das cidades do Rio de Janeiro, Niterói e Região dos Lagos, faz-se o cálculo:

$$5\% \text{ de 8 milhões} = 5(10^{-2})(8)(10^6) = 40(10^4) = 400.000$$
$$\tfrac{1}{4}(400.000) = 100.000$$

Logo, aproximadamente, 100 mil pessoas fazem a travessia da ponte com carro de passeio.

Para apresentar uma estimativa de quantas pessoas atravessam a ponte Rio-Niterói foi considerada nesse trabalho a média de pessoas que atravessam a ponte usando carro de passeio, assim:

$$Vm = \frac{(v_1 + v_2)}{2} = \frac{(200000 + 100000)}{2} = 150000,$$

onde:

Vm = valor médio
v_1 = valor máximo de pessoas que utilizam carro para atravessar a ponte Rio Niterói.
v_2 = valor mínimo de pessoas que utilizam carro para atravessar a ponte Rio Niterói.

Portanto, aproximadamente 150 mil pessoas atravessam a ponte Rio Niterói. As autoras não apresentaram validação da resposta, apenas consideraram uma resposta aceitável.

Analisando os três problemas apresentados por Figueiredo e Soares [28], é possível notar que para realizar as estimativas cada problema principal foi decomposto em problemas secundários para realização das estimativas. Observa-se, que após a decomposição em partes menores a solução torna-se mais fácil. As soluções envolveram noções de cálculo aproximado, arredondamento, notação científica, média aritmética, adição, multiplicação e divisão, todos cálculos simples.

Mesmo sendo problemas interessantes para fazer estimativas e considerando que os problemas acima se encaixam na modelagem contextual, definida no Quadro 2.1, avalio que seu contexto é local, próximo à realidade de alunos do Estado do Rio de Janeiro, tendo assim um caráter apenas desafiador para os alunos da escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues, onde leciono. Acredito que no problema 3.1, uma dificuldade de contextualização do problema seria a consideração do número de voos por pessoa, já que viajar de avião não é uma realidade para eles, sendo que poucos já passaram por essa experiência e assim mesmo, já que os voos em sua maioria acontecem em viagens de férias e ainda são poucas as pessoas que fazem essas viagens de férias com frequência, sendo comum em minha cidade as viagens em excursões terrestres ou até mesmo em família, porém de carro. Já no Problema 3.3, a dificuldade seria mais em coletar dados, devido a que o contexto é local. Nesse caso, considero importante o uso de pesquisas na web como, por exemplo, saber quais os transportes utilizados no estado, número de habitantes, número de carros existentes (aproximadamente), visualizar mapas. Alguns dos alunos das turmas em que leciono tentariam resolver pela responsabilidade e compromisso escolar, mas não por interesse próprio.

Para o professor que desejar trabalhar os Problemas 3.1, 3.2 e 3.3 é importante que ele proponha uma contextualização mais próxima da realidade dos alunos, evolvendo informações interessantes e reais e/ou curiosidades que despertem a motivação e o interesse em resolver os problemas, incentivando a aprendizagem.

4 Experiência pedagógica usando problemas de Fermi

Visando melhorar as práticas educacionais relacionadas ao ensino de Matemática em sala de aula para alunos do Ensino Médio, que ainda hoje enfoca-se em exercícios repetitivos e muitas das vezes descontextualizados da realidade deles, pretende-se neste capítulo propor problemas matemáticos, circunstanciados à realidade dos alunos, cuja resolução será feita através de conhecimentos já aprendidos, podendo usar operações simples ou apenas estimativas. Espera-se que ao mostrar a aplicabilidade de um conteúdo, o aluno passe a se interessar mais pela Matemática e incite sua motivação como o propósito de desenvolver suas habilidades na resolução de problemas.

O objetivo dessa dissertação é mostrar a importância de se introduzir os problemas de Fermi no ensino da Matemática para alunos da Educação Básica, sendo que nesse trabalho dá-se ênfase sua aplicação no Ensino Médio, tornando-o uma ferramenta metodológica.

Em função dos registros apresentados pelos alunos, serão avaliados e/ou discutidos: o conhecimento dos temas matemáticos que envolvem os problemas, a análise dos resultados encontrados e a interação com outros membros do grupo para discutir as ideias de solução.

Os problemas de Fermi aqui tratados serão aplicados dentro da modelagem contextual, sendo seu objetivo principal o reforço dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos e a valorização do trabalho em equipe para criar estratégias de solução. É importante ressaltar que quando se fala de modelagem contextual, fala-se no sentido de ter mais significado para os alunos, onde o escopo e os dados dos exercícios fazem parte de situações vivenciadas por eles.

Os problemas que farão parte desse trabalho não apresentam dados numéricos e nem uma afirmativa explícita sobre qual tema está sendo trabalhado, fugindo totalmente dos padrões de exercícios conhecidos por eles. O fato de não apresentar dados numéricos instigará os alunos a procurar modelos matemáticos de resolução, fazendo com que eles interajam trocando conhecimentos e experiências, que são fundamentais neste momento. O problema 1 e o problema 2 , aplicados na 1ª aula são adaptações do trabalho de Albarracín e Gorgorió [2]. Já o problema 3 é uma adaptação do trabalho de Figueiredo e Soares [28].

Ao apresentar estes problemas, pretende-se também mostrar ao aluno que nem sempre será possível encontrar uma solução exata, mas que se construirmos um bom modelo matemático, juntamente com valores razoáveis, então uma boa estimativa será suficiente para dar uma resposta razoável. Porém, a coerência da resposta precisa ser validada. Para isto é preciso incentivar a pesquisa através de materiais disponíveis como livros, internet, estrutura da escola, entre outros. Caso não haja a coerência da resposta, o aluno deverá fazer um novo modelo matemático até alcançar um melhor resultado.

4.1 Aulas de aplicação dos problemas de Fermi

4.1.1 Metodologia

Trabalhar-se-á três problemas junto aos alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues, da cidade de Carmo da Mata - MG com a minha mediação. Desses problemas, um deles é voltado para uma festa que acontece anualmente na escola, no mês de junho, outro problema envolve uma situação vivida por muitas pessoas, mesmo em crianças, que é o hábito de juntar moedas e o último problema trata de jogos de futebol.

Estes problemas serão trabalhados por 15 alunos, os quais serão divididos em 3 grupos de 5 alunos. A divisão por grupos será de acordo com suas afinidades para que eles se sintam confortáveis para opinar na resolução dos problemas apresentados.

Cada grupo receberá um problema e terão duas horas aula para resolvê-los, incluindo sua validação que será realizada com consultas em materiais disponibilizados para eles como internet, livros didáticos e o caderno de anotações. Como o objetivo é o reforço de conteúdos já estudados, em uma outra aula será apresentado aos alunos, um questionário contendo problemas voltados para a realidade deles e relacionados aos temas matemáticos tratados em cada grupo para avaliar sua aprendizagem.

A análise dos resultados para as soluções apresentadas pelos grupos levará em consideração:

- identificação de temas matemáticos: será avaliado se o desenvolvimento da solução dos problemas faz a associação com os temas matemáticos abordados de maneira correta.

- capacidade de modelar um problema: será avaliado se o grupo apresenta propostas que envolvam a construção de um modelo matemático para viabilizar uma solução.

- compreensão do problema e interação dos integrantes: será avaliado se o grupo apresentou um bom plano de ação, com boas estratégias de resolução, mesmo não conseguindo chegar ao resultado correto. Para isso, será observada a interação entre os integrantes do grupo.

4.1.2 Desenvolvimento das aulas de aplicação dos problemas de Fermi

A seguir apresentam-se os problemas de Fermi que serão trabalhados em grupos bem como a sua solução e análise de desempenho.

Descrição, solução e análise de desempenho do Problema 1

Problema 1 - Todo ano nossa escola realiza a tradicional festa junina, com participação de toda a comunidade escolar, onde são apresentadas por nossos alunos:

danças, o famoso quadrilhão e o casamento do jeca. Toda a escola se mobiliza para fazer uma bonita apresentação e encantar a todos que nos prestigiam. Para assistir à apresentação são vendidos ingressos para a população. Quantos ingressos poderíamos vender se quiséssemos encher a “quadra de fora”da escola no dia da festa?

Organização e tempo de aplicação: Este problema será apresentado ao grupo nomeado por G1, composto por 5 discentes identificados por G1A, G1B, G1C, G1D, G1E. Será observada a participação de cada discente e sua contribuição para as respostas apresentadas. O tempo de aplicação é de 2 horas-aula.

Temas matemáticos abordados: área de figuras regulares e irregulares, densidade populacional (densidade demográfica), operações básicas.

Objetivo: Espera-se que o grupo identifique que é necessário calcular a área do local da festa, a área ocupada por barracas e a área livre para ocupação das pessoas

Materiais disponíveis: lápis, folha de resposta, caderno de anotações diárias, livros de matemática, consulta a internet móvel, quadrado de $1m^2$ e fita métrica.

Desenvolvimento: Inicialmente, serão repassadas pela mediadora algumas sugestões e questionamentos que promovam a solução como: em qual espaço as pessoas ficam no momento da festa? O espaço é todo livre?

Solução do Problema 1

Os integrantes do grupo G1 conseguiram relacionar o problema com o conteúdo matemático já estudado, a saber, área de figuras planas, mas acharam estranho não ter as informações numéricas necessárias para o cálculo. Como mediadora, informei que os valores deveriam ser obtidos através de estimativas. Após algumas discussões os integrantes G1A, G1B e G1C, disseram que para a resolução precisariam calcular a área e que gostariam de chegar perto da quadra para estimar suas dimensões. A estimativa foi feita contando quantos quadrados (1,20mx1,20m - medida tambem estimada) formam o comprimento e quantos quadrados formam a largura. Na primeira tentativa de cálculos, o grupo obteve para a área da quadra de fora $141,12m^2$. Fizeram uma pesquisa pela internet para saber quantas pessoas cabiam em $1m^2$ de área e ao me perguntarem, fiz uma observação:

“Onde ficam localizadas as barracas de entretenimento, salgados e refrigerantes?”

O integrante G1A respondeu: “ficam na quadra de fora. Então temos que tirar o espaço das barracas”.

G1B: “acho que as barracas ocupam 30% do espaço”. Os outros integrantes concordaram, pois G1B ainda disse: “tem que ser menos que 50%, o que equivale a metade da quadra.”

Observei que os integrantes G1D e G1E participaram e opinaram quando a discussão acontecia entre eles, mas ao serem questionados por mim, somente os integrantes G1A e G1B respondiam.

Após calcularem a área livre, o grupo multiplicou a área estimada encontrada por 6, pois em sua pesquisa encontraram que o número de pessoas por m^2 variava de 3 a 9 pessoas, sendo 3 pessoas uma quantidade com folga, 6 pessoas um pouco apertado e 9 pessoas se acotovelando. A escolha de 6 pessoas é o valor médio entre as quantidades, onde pode-se observar a tendência dos alunos de considerar a média aritmética.

A quantidade de pessoas estimada pelo grupo foi de 890 pessoas , e sem fazer a validação, o grupo já comentou que este é um valor que não é razoável porque a escola tem aproximadamente 900 alunos, e cada aluno vende pelo menos um ingresso, já que o método da escola é "o aluno que vende um ingresso ganha o seu ingresso". E no dia da festa, a escola ainda vende ingressos na portaria.

Achei bem interessante o raciocínio do grupo (que estava super participativo e entrosado) em perceber o próprio erro. Em seguida, eles estimaram que o número de ingressos vendidos seria de 1800 ingressos, considerando que cada um dos 900 alunos venda dois ingressos. Nesse caso ainda justificaram que tem aluno que vende mais de dois ingressos, e que consideravam dois ingressos "um valor médio".

A seguir, de posse de fita métrica, os integrantes do grupo foram medir o comprimento e a largura da quadra, para saber sua área exata. As medidas encontradas por eles foram: comprimento 15,5 m e largura 29,5 m.

Solução:

A quadra de fora tem formato retangular e sua área é dada pela fórmula:

$$AF = (c)(l),$$

onde:

$AF =$ área total da quadra de fora
$c =$ comprimento da quadra
$l =$ largura da quadra

$$AF = (15,5m)(29,5m) = 457,25m^2.$$

Para calcular a área das barracas foi considerado a fala do integrante G1B "30% do valor da área da quadra que são ocupadas pelas barracas". Assim, foi considerado:

$$AB = (i)(AF)$$

$$AB = (0,30)(457,25) = 137,18m^2.$$

onde:

$AF =$ área total da quadra de fora
$AB =$ área da barraca

$i =$ porcentual da área da quadra ocupada pelas barracas..
Logo,

$$AL = (AF) - (AB)$$

$$AL = (457,25 - 137,18)m^2 = 320,07m^2$$

onde:

AL = área livre na quadra
AF = área da quadra de fora
AB = área das barracas

Considerando que a cada $1m^2$ cabe de 3 a 9 pessoas, foi usado pelo grupo G1 o valor médiode 6 pessoas por m^2:

$$TI = (n)(AL)$$

$$TI = (6)(320,07m^2)$$

$$TI \cong 1920$$

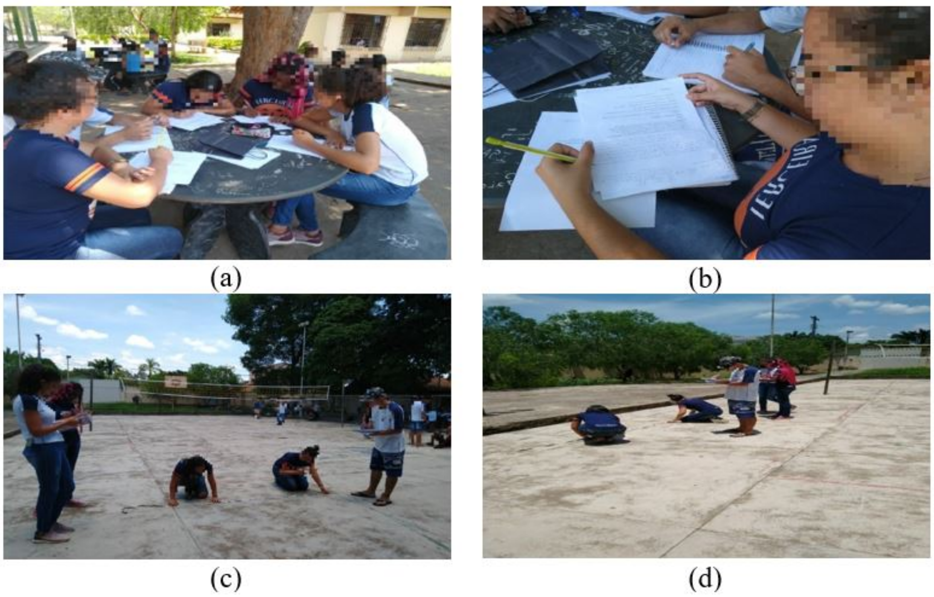
onde:

TI = total ingressos
AL = área livre na quadra
n = valor médio de pessoas por m^2

Resposta: Portanto, o total de ingressos que podem ser vendidos para encher a quadra de fora da escola é de aproximadamente 1920 ingressos.

Pela estimativa feita pelo grupo e o resultado após usar as medidas oficiais da quadra, percebeu-se que a estimativa encontrada pelo grupo foi muito boa, mesmo sem apresentar muitos cálculos. Na figura 4.1 são mostrados alguns momentos da atividade

Figura 4.1: (a) resolvendo os problemas de Fermi. (b) resolução da atividade(c) e (d) usando fita métrica para medir comprimento e largura da quadra para validação.



Fonte: arquivo pessoal

Análise de desempenho do Problema 1

O grupo G1 manteve uma boa interação entre eles o tempo todo. Foi o que melhor soube descrever a resolução do problema, sempre usando estimativas com pouco cálculo, já que os cálculos eram mais simples. Eles conseguiram identificar os seguintes conteúdos matemáticos no problema: área, estimativa, porcentagem, noções básicas de operações. Suas descrições foram bem coerentes e quase não precisaram da ajuda do professor para resolver o problema e interpretá-lo. Os alunos que mais se destacaram foram G1A, G1B e G1C. Estes integrantes fizeram diversos questionamentos e orientações aos integrantes G1D e G1E, os quais apresentaram mais dificuldade na resolução do problema. Mesmo com suas dificuldades, eles opinavam na estimativa ou no cálculo e aceitavam a orientação de outro integrante.

Descrição, solução e análise de desempenho do Problema 2

Problema 2 - Muitos comerciantes reclamam da falta de dinheiro trocado em caixa, o que dificulta o troco na hora da venda. Isso ocorre porque muitas pessoas gostam de juntar moedas em um cofre “personalizado”(este cofre geralmente é um pote de creme lata de leite em pó, garrafa de refrigerante, etc). Considerando que uma pessoa utilize uma garrafa pet de coca cola de 2 litros como cofre, quantas moedas de R$1,00 ela consegue guardar nesse cofre?

Organização e tempo de aplicação: Este problema será apresentado ao grupo nomeado por G2, composto por 5 discentes identificados por G2A, G2B, G2C, G2D, G3E. Será observada a participação de cada discente e sua contribuição para as respostas apresentadas. O tempo de aplicação é de 2 horas-aula.

Temas matemáticos abordados: volume de figuras regulares e irregulares.

Objetivo: Espera-se que o grupo identifique que é necessário estimar o volume da garrafa e da moeda, relacionar a moeda a um cilindro e a garrafa a uma figura irregular composta, sendo que o corpo da garrafa se assemelha a um cilindro e o bico a um cone. Identificar se o aluno consegue interpretar que o número de moedas é calculado pela divisão entre o volume da garrafa pelo volume da moeda.

Materiais disponíveis: lápis, folha de resposta, caderno de anotações diárias, livros de matemática, consulta a internet móvel, garrafa pet, copo graduado e moedas de R$1,00.

Desenvolvimento: Inicialmente, a mediadora irá repassar aos alunos algumas instruções e sugestões para interpretar o problema como:Quando quero saber a capacidade de um objeto preciso conhecer o que desse objeto? O conceito de capacidade está ligado a qual conteúdo matemático? A quantidade de moedas que cabem na garrafa é a mesma para todas as moedas, de qualquer valor? A quantidade de moedas que cabem na garrafa depende do quê? Outras sugestões podem ser apresentadas de acordo com a necessidade

Solução do Problema 2

Este problema foi resolvido pelo G2 após serem passadas as instruções, inclusive sobre a localização de abertura do cofre, colocada bem próxima ao gargalo.

Nesse grupo somente o integrante G2B ficou mais na observação, não deu muito palpite, porém ficou atento à todas as informações do grupo. Este grupo não teve muita dificuldade em resolver o problema de Fermi, pois o aluno G2A logo identificou o conteúdo matemático, a saber, volumes. A seguir, apresentam-se alguns diálogos entre os integrantes do grupo:

G2A: "se a garrafa contém 2 litros de coca- cola, então isso equivale a um volume de $2000cm^3$. Precisamos então do volume da moeda para ver quantas moedas cabem em um volume de $2000cm^3$."

G2C: "mas como vamos saber a altura da moeda e o diâmetro?"

G2D: "podemos procurar na internet?"

Professora: "sim".

Após pesquisarem, com facilidade, as medidas na internet, os valores usados por eles foram: diâmetro 24 mm e espessura 1,20 mm.

G2A: "tem que passar essas medidas para centímetro porque o volume está em cm^3 . Então o diâmetro será 2,4 cm e a espessura será 0,12 cm."

Rapidamente o grupo associou a moeda ao sólido geométrico cilindro e calculou o volume da moeda usando o conceito de volume do cilindro, já estudado, por eles.

Um dos livros utilizados em sala de aula para trabalhar esse conteúdo é o livro didático de Joamir Roberto de Souza, Novo Olhar Matemática, vol.3. Nesse livro, a fórmula do volume de cilindro, é dada pela expressão:

$$V = (\pi)(r^2)(a)$$

sendo:

V = volume do cilindro.
r = raio do cilindro.
a = altura do cilindro.

Solução:

Considerando:
V = volume da moeda de $R\$1,00$
r = raio da moeda de $R\$1,00$
$\pi = 3,14$
a = altura (espessura da moeda).

Da fórmula do volume do cilindro, temos:

$$V = (3,14)(1,2)^2(0,12)$$
$$V = (3,14)(1,44)(0,12)$$
$$V \cong 0,54cm^3$$

Logo, o volume da moeda de R\$1,00 é aproximadamente $0,54cm^3$.

Ao dividir o volume da garrafa ($2000cm^3$) pelo volume da moeda ($0,54cm^3$) encontraram o resultado de 3703 moedas. Mas, acharam que o valor estava grande, pois ao procurar as dimensões da moeda tinham visto um vídeo em que um galão de 20 litros comportava 4500 moedas aproximadamente.

Ao me informarem do ocorrido, verifiquei os valores das dimensões utilizados por eles e sugeri que pesquisassem em um outro site que fosse mais confiável (nesse momento eles falaram que tinham encontrado outros valores).

Professora: “quem cuida das moedas em nosso país?”

G2E: “Banco Central”

Professora: “será que tem alguma informação sobre essas medidas no site do Banco Central? Verifiquem.”

Após a consulta, os novos valores utilizados por eles foram : diâmetro 27mm (2,7cm) e espessura 1,95mm (0,19 cm).

O novo cálculo do volume da moeda ficou da seguinte forma:

$$V = (\pi)(r^2)(a)$$
$$V = (3,14)(1,35)^2(0,19)$$
$$V = (3,14)(1,82)(0,19)$$
$$V \cong 1,08cm^3$$

Assim, o volume da moeda é de aproximadamente $1,08cm^3$.

Em seguida, usaram a seguinte fórmula,

$$N = \frac{VG}{VM}$$

que serve para mostrar a quantidade de moedas contidas em uma garrafa pet de 2 litros, onde:

N = quantidades de moedas na garrafa de coca cola

VG = volume da garrafa de coca cola

VM = volume da moeda.

$$N = \frac{VG}{VM}$$
$$N = \frac{2000cm^3}{1,08cm^3}$$
$$V \cong 1851$$

A quantidade de moedas encontrada pelo grupo foi de 1851 moedas.

Para a validação do resultado, os alunos utilizaram uma garrafa de coca-cola com capacidade de 2,5 litros e a cortaram a uma altura de 200 ml. Essa altura foi determinada após usarem um copo graduado e colocado 200 ml de água na garrafa para identificar a altura de 200ml de água na garrafa. A escolha deu-se pelo fato da quantidade de moedas de R$1,00 obtida ter sido pouca para a garrafa toda, mas o suficiente para 200 ml.

Para fazer a validação, foi pedido aos alunos que levassem moedas de R$1,00 no dia da atividade. Somente 3 alunos levaram moedas, totalizando 70 moedas e eu levei algumas caso eles esquecessem. Os alunos conseguiram colocar 127 moedas em um espaço com capacidade para 200 ml. Eles consideraram que se em cada 200ml couberem 127 moedas, então estimaram que em 2000ml caberiam 1270 moedas.

A discussão entre eles sobre a diferença do número de moedas encontradas no cálculo através da fórmula e o número de moedas colocadas na garrafa foi centralizada em saber o espaço que fica entre as moedas quando colocadas na garrafa, já que não tem uma única maneira destas se acomodarem. Ao olhar a resposta apresentada por eles, coloquei em questão o fato de terem usado valores aproximados para π com duas casas decimais e para o raio, também usando duas casas decimais. Reforcei que quanto mais casas decimais usassem para π, maior seria o volume da moeda e menor seria a quantidade de moedas na garrafa. Além da garrafa de coca-cola com capacidade para 2,5 litros, os alunos utilizaram uma garrafa de água com capacidade para 510 ml de água, cortada a uma altura que indica 200ml de água e colocaram moedas nesse recipiente. Nesse caso, foi possível colocar somente 96 moedas, levando-os a concluir que o formato da embalagem também interfere na quantidade de moedas comportadas na embalagem. Na Figura 4.1 é mostrado alguns momentos da validação

Figura 4.2: (a)usando água para marcar 200 ml na garrafa pet 3l. (b)moedas na garrafa pet equivalente a 200 ml. (c)contagem das moedas. (d)contagem final das moedas.

Fonte: arquivo pessoal

Análise de desempenho do Problema 2

Como o grupo se dividiu por afinidade de modo a sentirem-se confortáveis, alguns integrantes tinham dificuldades na compreensão de conteúdos Matemática (identificados nas aulas) e alunos que têm mais facilidade. Mas nenhum dos integrantes ficou só observando. Houve participação de todos os integrantes e diversas ideias foram trocadas durante a resolução. Os alunos não tiveram dificuldades para identificar o conteúdo sobre volume no problema dado. Embora não tenham escrito muita coisa, sempre que pediam orientações tinham argumentos e mostravam compreensão do contexto do problema. Não usaram muitas estimativas já que pesquisaram a espessura e o diâmetro da moeda de um real na internet, mas foram capazes de determinar a quantidade de moedas como sendo o quociente entre o volume da garrafa de coca- cola e o volume da moeda de R$1,00. Os alunos G2A e G2C, foram os que mais opinaram, e foram orientando os outros colegas. Os alunos G2D e G2E, mesmo com dificuldades participaram bastante da resolução. O integrante G2B tem muita dificuldade e no 1º dia não participou muito, porém ficou observando o que os outros colegas diziam, mas no segundo dia da atividade já participou mais, inclusive na elaboração da conclusão sobre o número de moedas. Segundo o próprio relato desse integrante "quando a atividade é feita na prática, consigo entender e acompanhar melhor as explicações e pensar junto com meus colegas e descobrir as fórmulas". Penso que quando G2B diz descobrir a fórmula, significa relacionar qual fórmula deve ser usada.

Descrição, solução e análise de desempenho do Problema 3

Problema 3 - O futebol é uma paixão nacional. Essa paixão, a cada quatro anos, faz com que todos se unam num só coração para torcer pelo nosso país em uma competição internacional: A Copa do Mundo. Este evento esportivo é um dos maiores do mundo e faz com que bilhões de pessoas assistam aos jogos realizados. O Brasil já chegou à final 7 vezes e é o segundo maior finalista em Copas do Mundo perdendo apenas para a Alemanha (8 vezes), porém somente nós somos pentacampeões. O Brasil foi campeão em copas nos anos de 1958, 1962, 1970, 1994 e 2002. O técnico do time brasileiro em 1994, Zagallo, é uma das três pessoas que se tornou campeã em Copa do Mundo como jogador e também como técnico de futebol. Mas sabemos que para ser campeão é necessário muita garra e disposição durante o jogo. E é necessário também muito fôlego para se movimentar no campo enquanto joga. Mas afinal, quantos quilômetros um jogador de futebol percorre durante um jogo?

Organização e tempo de aplicação: Este problema será apresentado ao grupo nomeado por G3, composto por 5 discentes identificados por G3A, G3B, G3C, G3D, G3E. Será observada a participação de cada discente e sua contribuição para as respostas apresentadas. O tempo de aplicação é de 2 horas-aula.

Temas matemáticos abordados: razão entre duas grandezas (velocidade média), média aritmética, unidades de medida de tempo, unidades de medida de comprimento, operações básicas

Objetivo: espera-se que o grupo saiba resolver problema relacionando a razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto para percorrer certa distância como velocidade média. O aluno deverá também relacionar diferentes unidades de medida de comprimento e de tempo (múltiplos e submúltiplos).

Materiais disponíveis: lápis, folha de resposta, caderno de anotações diárias, livros de matemática, consulta a internet móvel.

Desenvolvimento: Inicialmente, serão repassadas aos alunos algumas instruções e sugestões para incentivar a solução, como: todas as pessoas caminham ou correm a uma mesma velocidade? Quantas vezes o jogador corre de um lado para outro no campo de futebol? Os jogadores correm o tempo todo? À medida que seja necessário, serei mediadora com perguntas que os levem a descrever como deve ser calculado a número de pessoas que podem ocupar tal espaço. Os alunos poderão pesquisar pela internet de modo a obter informações secundárias como a velocidade do campeão velocista Usain Bolt ou outro velocista, caso eles considerem necessário.

Solução do Problema 3

O grupo G3 foi o que mais apresentou dificuldades na resolução. Entretanto, em relação a entrosamento entre os integrantes foi possível observar que eles estavam bem à vontade. Inicialmente, foram feitos alguns questionamentos ao grupo para que eles conseguissem se situar no problema proposto.

Professora: "Os jogadores se movimentam durante quanto tempo? Como se movimentam?"

G3B: "correndo, andando, o goleiro fica parado... mas o jogo dura 90 minutos ou mais por causa do acréscimo"

Professora: "vamos considerar quanto tempo então?"

G3A: "pode ser o tempo mínimo que é 90 minutos? "

Professora: "sim."

G3B: "mas quantos minutos cada jogador passa correndo ou andando? Como vou saber isso?"

Professora: "O problema não nos trouxe essa informação, mas você consegue estimar esse tempo?"

G3B: "acho que sim, mas cada jogador tem um tempo diferente. "

Professora : "quando temos vários valores para uma grandeza o que podemos fazer?"

G3D: "podemos usar um tempo para representar o tempo de todos os jogadores?"

Professora: "Claro!"

As estimativas feitas pelo grupo, relacionadas ao tempo e ao tipo de movimento foram:

tempo que um jogador passa correndo: 40 minutos = 2400 segundos

tempo que um jogador passa andando: 40 minutos =2400 segundos

tempo que um jogador passa parado: 10 minutos = 600 segundos

Outro questionamento surgiu após anotarem essas informações.

G3B: "qual a velocidade do jogador de futebol?"

Professora: "vocês acham que a velocidade é a mesma para todos?"

G3A: "Não. E a velocidade de quem caminha é diferente de quem corre."

G3D: "É verdade, Usain Bolt é a pessoa mais veloz que eu sei..."

Professora: "E você sabe qual a velocidade dele?"

G3D: "Acho que é $48km/h$ Posso ver na internet?."

Professora: "Pode. Mas todas as pessoas têm a mesma velocidade que Usain Bolt?"

G3E: "Não. Mas como vou saber a velocidade de uma pessoa mais devagar?"

Professora: "Será que dá certo considerar uma estimativa? Qual a velocidade de uma pessoa caminhando?"

G3D: "Uai, acho que funciona. Uma pessoa andando caminha $1,5m/s$, eu acho."

Após esse diálogo, a resposta dada pelo grupo foi:

Solução:

Com base na pesquisa na internet sabe-se que o maior corredor tem uma velocidade de $10m/s$.(velocidade de Usain Bolt) e a velocidade de uma pessoa normal correndo é $1,5m/s$.

Para calcular a distância percorrida pelo jogador, primeiro transformaram o tempo de 40 minutos para segundos usando regra de três simples.

$$\begin{array}{cc} Minutos & Segundos \\ 60 & 3600 \\ 40 & x \end{array}$$

$$60(x) = (40)(3600)$$

$$x = \frac{144000}{60} = 2400s$$

Para o cálculo da distância:
distância percorrida correndo: $(10m/s)(2400s) = 24000m$
distância percorrida andando: $(1,5m/s)(2400s) = 3600m$.

Consideraram a fórmula,

$$DT = d_1 + d_2$$

sendo:
DT = distância total
d_1 = distância percorrida por um jogador correndo
d_2 = distância percorrida por um jogador andando.

$$DT = (24000) + (3600) = 27600m = 27,6km$$

Ao apresentarem a resposta de 27,6 km para a distância percorrida por um jogador, questionei o raciocínio usado por eles, devido a terem usado duas velocidades diferentes, e que da maneira como calcularam estavam considerando que todos os jogadores têm a velocidade de 10m/s correndo e 1,5 m/s andando. Pedi a eles que consultassem a internet para ver a distância percorrida por um jogador em campo para analisar a resposta encontrada por eles. Eles encontraram várias respostas: 11,9 km; 12,8 km e outras. Sugeri que consultassem no site Terra. Pela resposta dada pelo grupo verificou-se que a resposta não era viável. Foi feita então uma nova tentativa para determinar a distância percorrida pelo jogador. Para esta nova tentativa fui fazendo comentários como: "Como podemos fazer para utilizar uma velocidade que represente a velocidade de todos os jogadores?" "Neste semestre estudamos sobre situações em que usamos um valor que represente todos os valores apresentados em um conjunto com vários valores diferentes"Após esses comentários G3B sugeriu que fosse feita então uma média aritmética entre as velocidades.

Para facilitar o cálculo G3B perguntou se podia usar um número inteiro para representar a velocidade de uma pessoa andando. Ao responder que sim, G3A sugeriu para a turma que usassem então o valor aproximado a 2m/s.

Entre os integrantes do grupo, o aluno G3A tem um raciocínio muito rápido, e é sempre muito questionador. Essas características do aluno G3A fizeram com que houvesse mais discussões entre eles, e por isso, necessitaram mais da minha intervenção pelo fato de que ele às vezes discordava das ideias dos colegas e eu tinha que ajudar a chegarem em um acordo.

Solução reformulada

A velocidade mínima estimada em 1,5m/s foi arredondada para o inteiro superior para facilitar os cálculos:

$$Vm = \frac{(v_1 + v_2)}{2} = \frac{(10 + 2)}{2} = 6m/s$$

Vm = velocidade média
v_1 = velocidade máxima de um atleta (de acordo com a velocidade de Usain Bolt)
v_2 = velocidade mínima estimada, de um atleta ao caminhar.

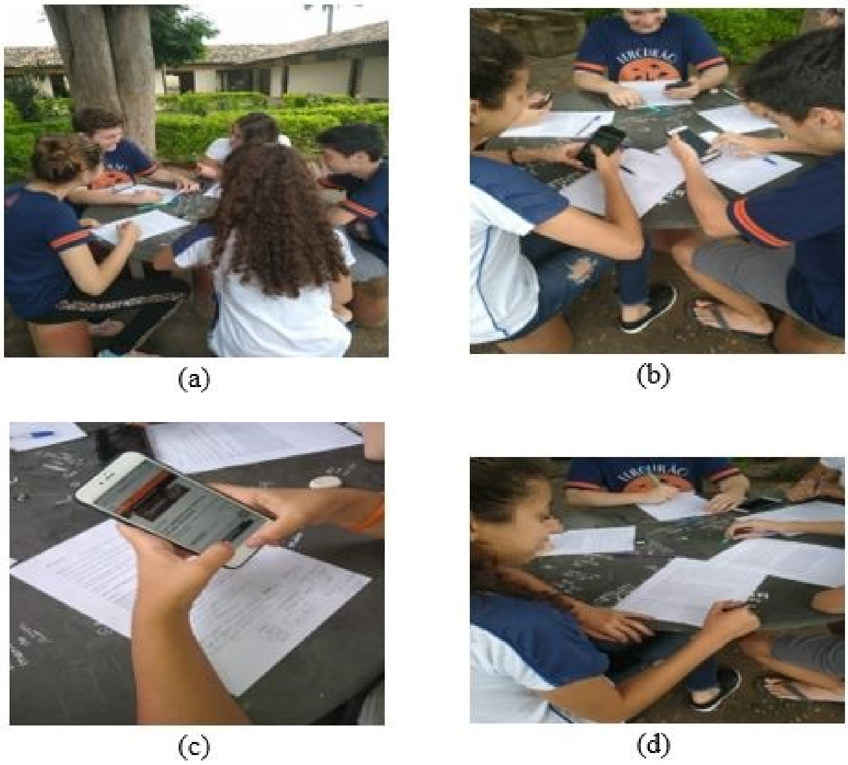
Como já haviam feito a transformação do tempo em minutos para segundos, foram utilizados estes valores para o cálculo abaixo.
distância percorrida correndo: $(6m/s)(2400s) = 14400m$
distância percorrida andando: $(2m/s)(2400s) = 4800m$.

$$DT = d_1 + d_2$$

$$DT = (14400) + (4800) = 19200m = 19,2km$$

Este novo resultado foi considerado razoável, uma vez que o site Terra traz como curiosidade e sem apresentar cálculos, distância percorrida por um volante (são os que mais se movimentam durante o jogo), que jogam tanto na defesa como no ataque, o equivalente a aproximadamente 16 km, como mencionado no capítulo 3. Na figura 4.3 são mostrados alguns momentos da resolução da atividade.

Figura 4.3: (a)discussão do problema, (b)resolução do problema, (c)conferindo a resposta pela internet, (d)resposta antes da validação.



(a) (b) (c) (d)

Fonte: arquivo pessoal

Análise de desempenho do Problema 3

Analisando o desempenho deste grupo, foi observado que os integrantes tiveram mais dificuldade para interpretar o problema, usando cálculo o tempo todo, sem descrever o processo de resolução, mas isso não atrapalhou a interpretação e construção da resolução. Após intervenções da mediadora, eles conseguiram relacionar os conceitos matemáticos de média aritmética, velocidade média, transformação de unidades de medida de tempo ao problema, mas mesmo assim, ainda tiveram dúvidas na primeira resolução do problema, necessitando de novas orientações. O integrante G3A, devido à sua facilidade tanto nos conceitos matemáticos quanto na interpretação de um problema, não concordava muito com as ideias dos colegas gerando discussões. Nesse sentido, a intervenção da mediadora foi fundamental para chegarem a uma conclusão. Esse grupo era formado por alunos que não têm muita dificuldade de aprendizagem e acredito que por isso houve tantos questionamentos, já que todos os integrantes opinavam.

De um modo geral, pode-se dizer que os três grupos conseguiram incluir a Modelagem Matemática em sua resolução, pois utilizaram conceitos matemáticos já aprendidos, relacionaram o uso da matemática em situações reais, criaram modelos matemáticos para resolver e aplicaram, em alguns casos, a validação. Foram nítidos o envolvimento e a motivação dos alunos com as resoluções. Acredito que o interesse de solução seja devido à forma em que o problema foi contextualizado, dentro da realidade dos alunos. O fato de estarem trocando ideias também os envolveu na atividade. Mesmo contextualizando os problemas, mostrando que a Matemática está presente em nosso cotidiano é necessário que os alunos tenham conhecimentos sólidos de Matemática, pois sem esta qualidade a solução ficaria apenas intencional. Um exemplo disso é o problema 1, no qual os alunos necessitaram calcular área, e se não conhecerem a fórmula da área, não chegariam a uma solução. O mesmo acontece com o problema 2, em que foi necessário conhecer a fórmula do volume de um cilindro, bem como figuras volumétricas que se assemelham a esse objeto.

Outro fator importante, na prática das atividades, foi a interação entre os alunos. A seguir são apresentados relatos de três desses alunos:

G2D: "fazer as atividades em grupo, com um aluno ajudando o outro tornou a resolução mais fácil. Se fosse individual, as dúvidas seriam bem mais e a maioria não conseguiria resolver"

G1A: "o problema nos exigiu bastante atenção e muita noção de espaço. Pensando juntos conseguimos chegar a um valor quase igual ao valor real. Uma proposta de exercício que ajuda bastante na interação e no trabalho em equipe"

G2B: "poderia ter mais atividades assim, porque têm alunos que conseguem aprender mais rápido que o outro e trabalhando em grupo um ajuda e tira a dúvida do outro."

4.2 Aulas de avaliação de conteúdo matemático

4.2.1 Metodologia das aulas de avaliação de conteúdo matemático.

As aulas de avaliação de conteúdos matemáticos têm por objetivo avaliar a aprendizagem dos alunos em relação aos tópicos matemáticos trabalhados após serem apresentados a eles os problemas de Fermi. É Uma particularidade dos exercícios a sua contextualização dentro da realidade dos alunos.

Estas aulas também foram realizadas em grupo (os mesmos grupos já formados), pois foi considerada positiva a participação e interação entre os integrantes do grupo para a resolução dos problemas de Fermi e também em atendimento a sugestão dos alunos que têm mais dificuldade, os quais afirmaram que, em grupo, eles se sentem mais motivados e aprendem melhor com os outros colegas. O tempo de aplicação destas aulas é de duas horas-aula.

Observar-se-á a participação e sugestões de todos os alunos, principalmente daqueles que têm mais dificuldade em resolver exercícios de Matemática em sala.

Espera-se que os integrantes dos grupos consigam atingir as seguintes habilidades:

- capacidade de interpretar problemas contextualizados.
- capacidade de relacionar cada problema aos conceitos matemáticos já estudados e abordados nos problemas de Fermi, de maneira a utilizar adequadamente as fórmulas de área de figuras planas, volume de cilindro, média aritmética e velocidade média.
- identificar e aplicar corretamente as operações básicas na solução dos exercícios.

Devido à falta de organização nas respostas registradas e apresentadas pelos grupos, suas resoluções foram digitadas de maneira mais organizada.

4.2.2 Desenvolvimento das aulas de avaliação de conteúdo matemático

A seguir apresentam-se os exercícios de verificação de aprendizagem, a solução e análise de aprendizagem que serão trabalhados nestas aulas.

A seguir serão listados os exercícios que serão aplicados aos três grupos bem como a descrição dos temas matemáticos abordados, objetivo, matérias disponíveis e desenvolvimento. Estes exercícios podem ser encontrados nos Apêndices D, E e F.

Exercícios, solução e análise de aprendizagem correspondente ao grupo G1

Temas matemáticos abordados: área de figuras regulares e irregulares, densidade populacional (densidade demográfica).

Objetivo: Espera-se que o aluno saiba interpretar o problema contextualizado e o relacionar ao cálculo de área de um retângulo, utilizar as operações básicas e o conceito de densidade demográfica.

Materiais disponíveis: lápis, caderno de anotações diárias, livros de matemática, calculadora.

Desenvolvimento: os alunos farão a avaliação de aprendizagem, em grupo, podendo consultar seu material escolar e/ou internet. Todos os cálculos deverão estar registrados na folha. Se necessário, o professor poderá orientá-los ,quando houver algum questionamento, levando-os a interpretar o problema de maneira adequada.

Para o grupo G1, que trabalharam com problemas envolvendo os temas sobre área de retângulo, densidade populacional, operações básicas, o teste apresentou imagens das barracas utilizadas na festa junina da escola, bem como suas dimensões, como podem ser vistos no Apêndice D.

Dados das medidas das barracas:
altura da barraca: 2m
altura da chapa da frente até o chão: 1,20m
comprimento lateral: 2m
comprimento da frente: 3,10m

Estas barracas são colocadas em uma quadra descoberta, conhecida por todos como "quadra de fora", uma vez que a escola possui duas quadras, sendo uma coberta.

A seguir, apresentaremos a solução realizada pelos integrantes do grupo e faremos a análise de desempenho para cada exercício aplicado.

Exercício 1 - Sabendo que a área da "quadra de fora" que deverá ser ocupada é de $30m^2$, quantas barracas poderão ser colocadas nessa área?

Solução:

Área total ocupada pelas barracas: $30m^2$
Para determinar a área de cada barraca foi utilizada a fórmula:

$$A = (c)(l),$$

onde:
A = área
c = comprimento da barraca

l = largura da barraca.

$$A = (2)(3,10)$$
$$A = 6,20m^2$$

Para determinar quantas barracas cabem em $30m^2$ a operação realizada foi a divisão

$$N = \frac{Ao}{AB}$$

onde,

Ao = Área ocupada pelas barracas
AB = área de uma barraca

$$N = \frac{30}{6,20} \cong 4,83 \; barracas$$

Resposta: cabem em uma área de $30m^2$ aproximadamente 4 barracas e uma cabine para venda de fichas.

Para resolver o exercício 1, o grupo usou todos os conceitos esperados, a saber, área da barraca usando a fórmula da área de um retângulo e o conceito de divisão, para saber quantas vezes a área da barraca cabe na área destinada às barracas. Em vista que o resultado foi um decimal, o grupo considerou a parte inteira como sendo o número de barracas que cabem no espaço definido no problema. Como, além das barracas colocadas na quadra no dia festa, também são colocadas duas cabines, onde são vendidas fichas para a barraca de comida e bebida, o grupo estimou que no espaço que sobraria ao serem colocadas as 4 barracas em $30m^2$ caberia ainda uma cabine de ficha. Nesse caso, consideraram que deixar essa área restante como o espaço entre as barracas seria mais viável, já que entre elas não fica ninguém. Para a resolução desse problema o grupo não pediu orientação para o mediador, mas trocaram ideias entre si.

Exercício 2 - Os professores da escola (organizados por grupos) são responsáveis por enfeitar as barraquinhas. Geralmente as barracas são "forradas"com TNT, sendo as partes laterais e do fundo completamente cobertas e na parte da frente, cobre-se a parte de metal até o chão. Qual a quantidade de TNT necessária para enfeitar 4 barracas? Observação: a porta da barraca também é encapada.

Solução:

Para desenvolver a solução, os integrantes do grupo usaram a fórmula de área do retângulo:

$$A = (c)(l)$$

O grupo calculou:

- a área lateral da barraca, sem esquecer de multiplicar por 2, já que a barraca possui duas laterais;

$$A1 = (2)(c)(l)$$
$$A1 = (2)(2)(4)$$
$$A1 = 8m^2$$

- a área dos fundos da barraca;

$$A2 = (c)(l)$$
$$A2 = (2)(3,10)$$
$$A2 = 6,20m^2$$

- a área da frente da barraca, sem esquecer que a porta é encapada e que o TNT é colocado até o chão.

$$A3 = (c)(l)$$
$$A3 = (1,20)(3,10)$$
$$A3 = 3,72m^2$$

Após calcular individualmente, o grupo somou as três áreas encontradas.

$$AE = A1 + A2 + A3.$$

onde:
AE = área total das partes encapadas das barracas
$A1$ = área das duas laterais da barraca
$A2$ = área dos fundos da barraca
$A3$ = área da frente das barracas.

$$AE = (8 + 6,20 + 3,72)m^2$$
$$AE = 17,92m^2$$

Como são 4 barracas, o grupo multiplicou a área total por 4.

$$TT = (n)(AE),$$

onde:
TT = total de TNT
n = número de barracas
AE = área total das partes encapadas das barracas.

$$TT = (4)(17,92)$$
$$TT = 71,68m^2$$

Resposta: a quantidade de TNT utilizada para encapar as barracas é $71,68m^2$.

Nesta questão não houve mediação do professor. O grupo conseguiu interpretar todo o problema, usando desde o conceito de área até a multiplicação da área total de uma barraca pelo número de barracas. Em outras atividades de Matemática realizadas em turmas diversas tanto do Ensino Médio quanto em turmas de Ensino Fundamental, sempre observei que em problemas em que se pede o valor que representa a medida de algum objeto de estudo, os alunos encontram o valor unitário e esquecem de multiplicar pelo número de objetos, nesse caso, o total de barracas. Porém, nesse exercício eles conseguiram interpretar corretamente.

Exercício 3 - Qual será a área livre para o público quando forem colocadas apenas 6 barracas iguais às das imagens acima na "quadra de fora"?

Solução:

Considerando a área de uma barraca encontrada no primeiro problema da atividade, a saber, $6,20m^2$, esse valor será multiplicado pelo número de barracas, ou seja, por 6, fornecendo uma área de $37,20m^2$ ocupadas por barracas.

Sabe-se também, por cálculos anteriores que a área da quadra é $141,12m^2$

Logo a área livre será dada por

$$AL = (AF) - (6)(AB)$$

onde:
AL = área livre destinada ao público
AF = área total da quadra de fora
AB = área de uma barraca.

$$AL = (141,12) - (6)(6,20)$$
$$AL = (141,12) - (37,20)$$
$$AL = 103,92m^2$$

Resposta: A área livre destinada ao público é de $103,92m^2$.

Embora a interpretação e a associação ao conteúdo matemático estejam corretas, o grupo usou uma informação errada, acredito que mais por falta de atenção. Usaram a área total da quadra como a área estimada por eles no problema de Fermi, aplicado anteriormente e não a área determinada após as medidas oficiais, que equivale a $457,25m^2$. O grupo não pediu orientação, em momento algum, na resolução desse problema.

Exercício 4 - Considerando que em $1m^2$ cabem 4 pessoas, quantas pessoas cabem (aproximadamente) no espaço livre da "quadra de fora" após serem colocadas as 6 barracas na quadra com as dimensões apresentadas no início da atividade?

Solução:

Como a área das 6 barracas é de $37,20m^2$, e que a área livre para o público é de $103,92m^2$, valores já mencionados em questões anteriores, e usando a informação de que em $1m^2$ cabem 4 pessoas, informação obtida na solução do problema de Fermi correspondente, temos que o total de pessoas que cabem na quadra é:

$$TP = 4(AL)$$

onde:
$TP =$ total de pessoas que cabem na área livre da quadra
$AL =$ área livre.

$$TP = 4(103,92)$$
$$TP = 415,68$$

Resposta: A quantidade de pessoas que cabem na área livre da quadra é de 416 pessoas.

Sem pedir orientações ao mediador, o grupo conseguiu interpretar o problema de maneira correta, usaram conceitos matemáticos de acordo com o contexto, a saber, área da quadra livre, já calculado no problema anterior e a operação básica de subtração. Porém, o grupo usou informação errada levando a um resultado incorreto. O valor encontrado pelo grupo foi de 416 pessoas, que é um valor bem menor do que o valor encontrado no problema de Fermi, onde fizeram a estimativa de 890 pessoas. No problema de Fermi eles observaram que 890 pessoas era um valor pequeno já que a escola possui aproximadamente 900 alunos, mas para esta questão esse valor passou despercebido.

Exercício 5 - Comentar as diferenças entre a resposta do problema da primeira atividade e as respostas dos problemas dos exercícios de avaliação de conteúdos de matemática.

Solução:

Na primeira aula não possuímos o número de medidas da quadra, logo foi mais difícil fazer estimativas somente observando. Na segunda aula, já tínhamos as medidas da quadra, pois medimos com a fita métrica e as medidas das barracas, que precisávamos tirar da área da quadra e saber o espaço livre, então foi mais fácil fazer a conta.

Como o grupo não observou que na primeira atividade a resposta é estimada e que na segunda atividade que apresenta os valores exatos das medidas da barraca obtemos uma resposta exata, reforço aqui a necessidade de ressaltar aos alunos, é importante ressaltar aos alunos essa diferença, de modo que eles percebam que ao estimar uma resposta teremos uma ideia da resposta exata, que dependendo da situação, a resposta estimada é suficiente Entretanto, para que a estimativa seja boa, quanto mais dados conhecera, melhor resultado teremos. Percebo em minhas avaliações diárias que, muitas vezes, os alunos não conseguem chegar ao resultado correto por não prestarem atenção à pergunta final e retirar informações de modo incorreto. Essa falta de atenção geralmente ocorre em cálculos mais simples.

Notei que os integrantes do grupo mantiveram uma boa interação trocando ideias para chegar a uma resolução viável. Ressalta-se os comentários de dois integrantes do grupo o qual confirma essa interação.

G1A: "todos nós tivemos várias ideias diferentes do que fazer e no fim juntando todas as sugestões, conseguimos resolver."

G1D : "quando um não entendia direito, os outros explicavam para que todos resolvessem."

Exercícios, solução e análise de aprendizagem correspondente ao grupo G2

Temas matemáticos abordados: volume de figuras regulares e irregulares.

Objetivo: Espera-se que o grupo saiba identificar o conceito de volume e operações básicas em cada problema, calcular o número de moedas conhecendo o volume de uma moeda e o volume total de n moedas agrupadas, usar a fórmula do volume de maneira adequada, saber transformar as medidas de capacidade em medidas de volume e vice-versa, usando as relações

$$1dm^3 = 1l$$
$$1dm^3 = 1000cm^3$$
$$1000cm^3 = 1000ml$$

Materiais disponíveis: lápis, caderno de anotações diárias, livros de matemática, internet móvel, calculadora.

Desenvolvimento: os alunos farão a avaliação de aprendizagem, em grupo, podendo consultar seu material escolar e/ou internet. Todos os cálculos deverão estar registrados na folha. Se necessário, o professor poderá orientá-los, quando houver algum questionamento, levando-os a interpretar o problema de maneira correta.

Para a realização da atividade envolvendo volumes, foi apresentado o Quadro 4.1:

Valor facial (R$)	**Diâmetro (mm)**	**Peso (g)**	**Espessura (mm)**	**Borda**	**Material**
0,10	20,00	4,80	2,23	Serrilhado	Aço revestido de bronze
0,50 (1998 a 2001)	23,0	9,25	2,85	Legenda *ORDEM E PROGRESSO* BRASIL	Cuproníquel
0,50 (2002 até hoje)	23,0	7,81	2,85	Legenda *ORDEM E PROGRESSO* BRASIL	Aço inoxidável

Fonte: Site Banco Central [53]

Quadro 4.1: Dimensões de moedas brasileiras

Exercício 1 - Considerando uma moeda de R$0,50 com as dimensões dadas no Quadro 4.1, quantas moedas de R$0,50 (que começaram a circular a partir de 2002 até os dias atuais) cabem em uma garrafa de coca cola com capacidade para 2 litros?

Solução:

Considerando que a capacidade da garrafa de coca cola é 2l, pela relação volume e capacidade tem-se $2l = 2000cm^3$.

Para o cálculo do volume da moeda de R$0,50, foi usada a fórmula do volume do cilindro:

$$VM = (\pi)(r^2)(a),$$

onde:
VM = volume da moeda de R$0,50
π = 3,14
r = raio da moeda de R$0,50
a = altura (espessura da moeda).

$$VM = (3,14).(1,15)^2(0,285)$$
$$VM = (3,14)(1,32)(0,285)$$
$$VM = 1,181268cm^3$$

Com o volume da moeda de R$0,50, o grupo usou o modelo matemático usado no problema de Fermi.

$$N = \frac{VG}{VM} = \frac{2000cm^3}{1,181268cm^3} \cong 1693$$

onde:
N = quantidades de moedas na garrafa de coca-cola
VG = volume da garrafa de coca-cola
VM = volume da moeda

Resposta: Em uma garrafa de coca-cola de 2 litros cabem aproximadamente 1693 moedas.

O problema proposto estava semelhante ao problema de Fermi, apresentado nas duas aulas anteriores, logo foi de fácil resolução e os alunos apresentaram a resposta aproximada de maneira correta, arredondando o número de moedas para a unidade inteira mais próxima. Não foi solicitada mediação para resolver este problema, mantendo entre eles uma boa interação e participação em conjunto, incluindo o integrante G2B.

Exercício 2 - Quantas moedas de R$1,00 são necessárias empilhar para que o volume obtido seja de, aproximadamente, $26,68cm^3$?

Solução:

Primeiramente calcularam o volume da moeda de R$1,00. Considerando: V = volume da moeda de R$1,00, $\pi = 3,14$, $r = raio$ da moeda de R$1,00 e $a = altura$ $(espessuradamoeda)$. Da fórmula do volume do cilindro,

$$V = (3,14)(1,35)^2(1,95)$$
$$V = (3,14)(1,8225)(0,195)$$
$$V = 1,116cm^3$$

Se o volume de 1 moeda é $1,116cm^3$, segue pela regra de três simples direta:

$$\begin{array}{cc} n(uni.) & v(cm^3) \\ 1 & 1,116 \\ x & 26,68 \end{array}$$

Logo,

$$1,116(x) = 26,68$$
$$\frac{26,68cm^3}{1,116cm^3}$$
$$x = 23,90681$$

"Sendo x o número de moedas necessárias para que o volume seja de $26,68cm^3$, nossa resposta é aproximadamente 24 moedas".

Neste exercício o grupo apresentou também a compreensão e interpretação correta do problema, fazendo um arredondamento para o inteiro superior, por ser o inteiro mais próximo. Embora já tivessem calculado o número de moedas que cabem em uma garrafa no problema anterior, e também ao resolver o problema de Fermi, o grupo não usou a fórmula:

$$\frac{VG}{VM}$$

que representaria a maneira mais prática de resolver o exercício. Entretanto, usaram uma regra de três simples direta, chegando, obviamente, ao mesmo resultado. Não houve mediação para esta resolução.

Exercício 3 - Ao empilhar lado a lado 12 moedas de R$1,00 e 15 moedas de R$0,50, qual o volume obtido?

Solução:

Pelo cálculo do exercício 2, o volume da moeda de R$1,00 é aproximadamente $1,116cm^3$, então considerando 12 moedas de R$1,00 teremos:

$$VT1 = (n)(VM1),$$

onde:
$VT1$ = volume das 12 moedas de R$1,00
n = quantidade de moedas de R$1,00
$VM1$ = volume de uma moeda de R$1,00

$$VT1 = (12)(1,116) \cong 13,39cm^3.$$

Sendo o volume da moeda de R\$0,50 aproximadamente $1,81cm^3$ (calculado no exercicio 1), e considerando 15 moedas de R\$0,50 teremos:

$$VT2 = (15).(1,81) \cong 27,15cm^3$$

Ao juntar as moedas de R\$1,00 e as moedas de R\$0,50 o volume final será dado por:

$$VF = (VT1) + (VT2),$$

onde:
VF = volume final das moedas empilhadas
$VT1$ = volume das 12 moedas de R\$1,00
$VT2$ = volume das 15 moedas de R\$0,5

$$VF = (13,39) + (27,15) \cong 40,54cm^3$$

Resposta: O volume das 27 moedas empilhadas é de aproximadamente $40,54cm^3$

Mais uma vez a falta de atenção levou a uma resposta errada. Ao transcrever o volume da moeda de R\$0,50 calculado no exercício 1, foi trocado o algarismo da casa dos décimos com o algarismo das casas dos centésimos, gerando um erro no volume final obtido para as moedas empilhadas. O grupo manteve o resultado positivo no que se refere a interpretação do problema, associação ao tema matemático e o uso adequado das operações básicas. Para esta atividade, os integrantes do grupo não pediram orientações.

Exercício 4 - Uma pessoa irá juntar moedas de R\$0,50 em uma garrafa de coca-cola de 2 litros. Quantos reais ela irá juntar aproximadamente?

Solução:

Para o cálculo do volume da moeda de R\$0,50, foi usada a fórmula do volume do cilindro.

$$VM = (\pi)(r^2)(a),$$

onde:
VM = volume da moeda de R\$0,50
π = 3,14
r = raio da moeda de R\$0,50
a = altura(espessura da moeda).

$$VM = (3,14)(1,15)^2(0,28)$$

$$VM = (3,14)(1,15)(0,28)$$

$$VM \cong 1,01cm^3$$

Com o volume da moeda de R\$0,50, o grupo usou o modelo matemático usado no problema de Fermi:

$$N = \frac{VG}{VM} = \frac{2000cm^3}{1,01cm^3} \cong 1980$$

$N =$ quantidades de moedas na garrafa de coca cola
$VG =$ volume da garrafa de coca cola
$VM =$ volume da moeda.

A solução deste exercício apresenta erros na interpretação do problema. Usaram a fórmula correta, mas se esqueceram de que o raio é elevado ao quadrado chegando a um resultado diferente do encontrado no exercício 1. Sendo assim, a quantidade de moedas sofreu alteração na quantidade final. O grupo não respondeu à pergunta "Quantos reais a pessoa irá juntar, aproximadamente?", terminando o exercício na resposta quantidade de moedas.

Exercício 5 - O que é mais interessante juntar: moedas de R$0,50 em garrafas de coca-cola com capacidade de 3 litros ou moedas de R$1,00 em garrafas de coca- cola com capacidade de 2 litros?

Solução:

Temos: Total de moedas na garrafa de $3l = 2970$ moedas e Total de moedas na garrafa de $2l = 1270$.

Resposta: É mais vantajoso juntar moedas de R$0,50 na garrafa de 3l.

Para este exercício não foi possível fazer uma boa análise porque o grupo não apresentou cálculos, impedindo assim que se tornasse visível onde estão os erros. Acredita-se que tenham feito em um rascunho, não atendendo ao pedido para deixar cálculos registrados. Pelos valores do número de moedas de R$1,00 na garrafa de 2l, já calculados no exercício 2, o resultado está errado, pois o correto é aproximadamente 1790 moedas. Calculei que o número de moedas de R$0,50 que cabem em uma garrafa de 3l é 2540 moedas aproximadamente, diferente da resposta deles também.

Apesar das quantidades apresentadas pelo grupo estarem erradas, a resposta final foi apresentada de maneira correta, mostrando apenas que o grupo entendeu que deveria fazer uma comparação entre as quantidades. Durante todo o tempo de resolução dos exercícios apresentados a eles, não foi solicitada a mediação do professor.

Exercício 6 - Comentar as diferenças entre a resposta do problema da primeira atividade e as respostas dos problemas dos exercícios de avaliação de conteúdos de matemática.

Solução:

O exercício da primeira aula foi um pouco mais difícil de ser resolvido por não conter os valores da espessura e da altura da moeda de um real. Já os exercícios da segunda aula já foram facilmente resolvidos por conterem algumas informações necessárias para o desenvolvimento dos exercícios pedidos.

Com esse comentário é possível observar como o fato de apresentar as informações os deixa mais seguros para resolver um problema. Em vista disso, posso entender que em problemas contextualizados, devemos direcionar e incentivar os estudantes na busca das informações necessárias para resolver os problemas propostos.

O grupo não observou a diferença entre resposta exata e estimada. É importante que eles percebam que não se pode estimar "chutando"um valor, e sim, que devem pesquisar, e que quanto mais rica for sua pesquisa melhor será sua estimativa.

Em relação aos erros encontrados em suas respostas, acredita-se que estes sejam devidos a falta de atenção, situação essa observada por mim em muitas questões resolvidas pelos alunos em todas as turmas em que leciono, sendo que nas turmas de Ensino Fundamental, o número de alunos desatentos aumenta.

Acredito que a interação entre os integrantes do grupo foi muito exitosa, inclusive um dos integrantes que ficou só na observação na primeira aula, interagiu bem a partir da segunda aula, opinando e ajudando a definir maneiras de resolução.

G2B: "... devido à ajuda de um colega consegui fazer e acompanhar super bem o raciocínio deles e juntos conseguimos fazer a atividade."

G2D: "fazer esta atividade em grupo foi bom porque um foi ajudando o outro. Se a atividade fosse individual a maioria teria dificuldade, e não teria sucesso na resolução."

Exercícios, solução e análise de aprendizagem correspondente ao grupo G3

Temas matemáticos abordados: velocidade média, operações básicas.

Objetivo: Espera-se que o grupo consiga identificar o conceito de velocidade média e use corretamente as operações básicas em cada problema, transformar as unidades de medida de comprimento, a saber, quilômetro em metro e vice-versa, transformar unidades de medida de tempo, a saber, horas em minutos, minutos em segundos e vice -versa.

Materiais disponíveis: lápis, caderno de anotações diárias, livros de matemática, internet móvel, calculadora.

Desenvolvimento: os alunos farão a avaliação de aprendizagem, em grupo, podendo consultar seu material escolar e/ou internet. Todos os cálculos deverão estar registrados na folha. Se necessário, o professor poderá orientá-los, quando houver algum questionamento, levando-os a interpretar o problema de maneira correta.

Exercício 1 - Considerando a distância percorrida por um jogador, encontrada e validada por você no problema de Fermi apresentado na aula anterior, responda:

a) qual é a velocidade média obtida por um jogador (em km/min) percorrida por ele durante o jogo?

Solução:

Os integrantes do grupo usaram a fórmula:

$$Vm = \frac{d1}{t}$$

sendo:
Vm = velocidade média
$d1$ = distância percorrida por um móvel
t = tempo para se percorrer uma determinada distância.

$$Vm = \frac{19,2}{90}$$

$$Vm \cong 0,21km/min$$

Resposta: a velocidade média do jogador será $0,21km/min$.

b) represente essa mesma velocidade média usando m/min.

Solução:

$$Vm = \frac{19200}{90}$$

$$Vm \cong 213m/min$$

Obs.: considerar a simbologia de (a)
Resposta: a velocidade média do jogador será aproximadamente 213 m/min

c) qual a distância percorrida por esse jogador durante uma hora?

Solução:

Considerando que 1 hora = 60 minutos e usando a regra de três simples direta temos

$$\begin{array}{cc} d(km) & t(min) \\ 19,2 & 90 \\ x & 60 \end{array}$$

sendo:
$d =$ distância
$t =$ tempo

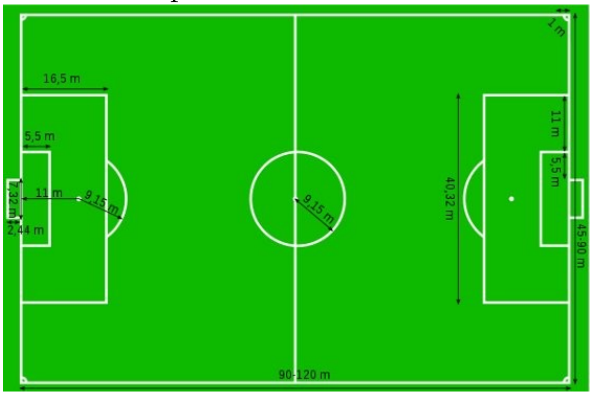
$$90(x) = (19,2)(60)$$
$$x = \frac{1152}{90}$$
$$x = 12,8km$$

Resposta: a velocidade média do jogador será 12,8 km/h

Para o exercício 1, não houve mediação na resolução, os próprios integrantes, em consenso decidiram o melhor caminho para a resolução. O grupo deveria associar o problema à razão entre a distância percorrida e o tempo do percurso, resultando na velocidade média. Nos itens (a) e (b) o grupo usou de forma correta o conceito de velocidade média (razão entre distância e tempo), sendo que no item (b) foi necessário fazer a transformação de km em m, já que o problema pede velocidade média em km/min, transformação esta feita de maneira correta. No item (c), o grupo usou a regra de três simples direta para determinar a distância percorrida por um jogador durante 60 min., já que em 90 min a distância percorrida pelo jogador é de 19,2 km. Para igualar as unidades da grandeza tempo usaram o conceito de transformação de unidades, transformando hora em minuto, chegando a um resultado correto.

Exercício 2 - Sabendo que um campo de futebol tem as dimensões da Figura 4.4, em média, quantas voltas completas um jogador percorre ao redor desse campo de futebol, considerando que a distância total percorrida por ele equivale à distância percorrida por um jogador encontrada no problema de Fermi resolvido na atividade anterior. Sabendo que um campo de futebol tem as dimensões da Figura 4.4, em média, quantas voltas completas um jogador percorre ao redor desse campo de futebol, considerando que a distância total percorrida por ele equivale à distância percorrida por um jogador encontrada no problema de Fermi resolvido na atividade anterior.

Figura 4.4: Campo de futebol com medidas oficiais.



Fonte: Blog Diário de Pernambucano [49]

Solução:

Como a figura apresenta as medidas máximas e mínimas de um campo de futebol, e o exercício pede o valor médio da quantidade de voltas que um jogador percorre com a distância de 19,2km (valor encontrado pelo grupo no problema de Fermi), foi feito o cálculo da média entre as dimensões do comprimento e da largura do campo.

Pela Figura 4.4, foi considerado: comprimento 90-120m e largura 45-90m.

$$Cm = \frac{c1 + c2}{2},$$

onde:
Cm = comprimento médio
$c1$ = comprimento menor
$c2$ = comprimento maior

$$Cm = \frac{90 + 120}{2}$$
$$Cm = 105m$$

De forma análoga foi calculado a largura média

$$Lm = \frac{l_1 + l_2}{2},$$

onde:
Lm = largura médio
l_1 = largura menor
l_2 = largura maior

$$Lm = \frac{45 + 90}{2}$$
$$Lm = 67,5m$$

Para o perímetro, P, do campo o cálculo foi:

$$P = (2)(Cm) + (2)(Lm)$$
$$P = (2)(105) + (2)(67,5)$$
$$P = 210 + 130$$
$$P = 345m$$

O número de voltas foi calculado conforme a fórmula:

$$Nv = \frac{DJ}{P} = \frac{19200}{345} = 55,6$$

sendo:
Nv = número de voltas dadas em torno do campo de futebol
DJ = distância percorrida por um jogador durante os 90 minutos de jogo
P = perímetro médio do campo de futebol.
Resposta: O jogador percorre 55,2 voltas ao redor do campo.

Para a resolução do exercício 2, houve mediação na hora de interpretar o problema com as seguintes perguntas:

Professora: "Tem um valor máximo e um valor mínimo para as medidas dos lados do campo, qual deles oferece a resposta correta?"

G3E: "uai, se têm duas medidas tem que considerar as duas"

G3C: "Mas vai ficar estranho duas respostas"

Professora: 'Como podemos trabalhar só com um valor? Alguém sugere alguma maneira de fazer?"

G3A: "Acho que dá pra fazer a média aritmética do comprimento e da largura. tipo uma medida que fica entre esses dois valores."

Professora: "Acho uma boa ideia. Releiam o que o exercício pede. "

G3B: "...em média, quantas voltas completas um jogador percorre ao redor desse campo de futebol ... "

Professora: "E aí? Acham que é possível usar um valor que seja a média aritmética das dimensões máxima e mínima?"

Deixei que eles decidissem...

Na solução deste exercício, embora tenham conseguido usar os conceitos matemáticos esperados, houve um erro na resposta final, considerando um decimal como o número de voltas completas e não somente sua parte inteira. Esse erro é cometido várias vezes em muitas turmas, acredito que seja mais por falta de atenção, porque quando fazemos uma correção os alunos sempre dizem: "É verdade, esquecemos de analisar a resposta"O uso de média aritmética ainda não estava muito claro para eles, por isso, a dúvida quanto ao uso do valor máximo e mínimo, assim concluo que este conteúdo precisa ser trabalhado mais vezes com situações reais para os alunos. Também é necessário trabalhar mais situações em que os alunos devam identificar que o decimal representa uma parte inteira e outra "incompleta".

Exercício 3 - Um jogador está a uma certa distância do gol e vai cobrar uma falta. A velocidade que ele imprime sobre a bola é de 43,2 km/h. Sabendo que a bola leva 3s para atingir as redes do gol, determine a distância percorrida pela bola.

Solução:

Como o exercício tem um valor para a velocidade média, 43,2km/h, o grupo decidiu transformar esse valor para m/s, considerando que o tempo do movimento da bola está em segundos.

$$Vm = \frac{d2}{t},$$

sendo:
Vm = velocidade média
$d2$ = distância percorrida pela bola
t = tempo para se percorrer uma determinada distância

$$Vm = \frac{43200m}{3600s}$$

$$Vm = 12m/s$$

Já que a bola percorre 12 metros em um segundo, para um tempo de 3 segundos a bola percorre uma distância:

$$Db = (Vm)(t),$$

onde:
Db = distância final percorrida pela bola em 3s
Vm = velocidade média em m/s
t = tempo de percurso da bola

$$Db = (12)(3)$$

$$Db = 36m$$

Resposta: a distância percorrida pela bola foi de 36m em 3s.

Os exercícios (1) e (3) tinham o mesmo raciocínio e o grupo usou resoluções diferentes. Em (1) chegaram direto ao resultado através da regra de três simples direta, já em (3) usaram o conceito de velocidade média, determinando a distância percorrida (em metros) no tempo de 1 segundo, para depois, multiplicar essa distância por 3s, usando a fórmula da velocidade média aplicando a propriedade da igualdade da proporção.

Exercício 4 - Segundo o site Mundo Educação, o passo de um atleta de futebol americano é de aproximadamente 0,91m. Sabe-se também que um jogador percorre em média 16km durante os 90 minutos de jogo. Quantos passos, aproximadamente um jogador americano precisa dar para que atinja a distância de 16 km?

Solução:

$$Np = \frac{DJ}{Mp},$$

onde:
$Np =$ quantidade de passos efetuados por um jogador
$DJ =$ distância percorrida por um jogador em campo durante um jogo de futebol
$Mp =$ medida do passo de um atleta de futebol americano

$$Np = \frac{1600}{0,91}$$

$$Np = 17582$$

Resposta: Um jogador precisa de aproximadamente 17582 passos para atingir 16km.

Este exercício exigia somente o conceito de divisão e o grupo conseguiu resolvê-lo sem dificuldade. Percebo que muitos alunos confundem qual a operação deve ser utilizada em problemas, sendo este o motivo pelo qual foram colocados problemas desse nível para o grupo.

Exercício 5 - Comentar as diferenças entre a resposta do problema da primeira atividade e as respostas dos problemas dos exercícios de avaliação de conteúdos de matemática.

Solução:

Para resolver a primeira atividade eles usaram estimativas e pesquisas e na segunda atividade as informações apresentavam valores numéricos, facilitando a resolução.

O discente G3A disse, em um comentário informal, que para resolver os problemas de Fermi precisava de ter outros conhecimentos que não fosse só os conhecimentos de matemática.

Este grupo percebeu a necessidade da pesquisa para ajudar na determinação de uma estimativa.

Os exercícios apresentados ao grupo G3, que também continha todas as informações necessárias para as resoluções, foi o que mais gerou dúvida e consequentemente, maior discussão entre os integrantes para que pudessem resolver as questões. Um dos integrantes é um dos alunos mais interessados, participativo e com melhor raciocínio da sala. Pude observar que durante as resoluções, ele orientava os colegas , ajudando-os na interpretação e agregando conhecimento a todos.

G3B: "ele (G3A) não tem paciência de esperar, queria fazer tudo antes de nós, daí pedíamos a ele que nos esperasse para discutir, ele nos ajudou algumas vezes. Outra hora eu e G3E, discutíamos e ajudávamos G3C e G3D quando eles precisavam"

Considerando o resultado das atividades onde os grupos chegaram a um raciocínio correto, embora tenham errado o cálculo em algum momento, ou até mesmo usado um dado de forma incorreta, foi possível observar o quanto a interação entre os integrantes de cada grupo foi importante. Considero que a troca de ideias contribuiu para um bom desempenho enquanto aprendizagem dos conceitos matemáticos tratados. Isto, pode-se confirmar pelos seguintes relatos:

G2B: "poderia ter mais atividades assim, porque têm alunos que conseguem aprender mais rápido que o outro e trabalhando em grupo um ajuda e tira a dúvida um do outro."

G2B:"com essa atividade, eu consegui aprender um pouco e entender as explicações que meus colegas me passaram."

Considerando que a metodologia em que foram abordadas as atividades não seja muito comum nas aulas diárias, os grupos precisaram de mediação algumas vezes, e mesmo assim, minha ajuda foi na interpretação de alguns problemas, já que durante as aulas ministradas por mim, observo nos alunos uma grande dificuldade em interpretar um problema e/ou retirar as informações contidas neles, sendo realizada, quase sempre, a resolução dos exercícios de forma mecânica.

Dessa maneira, sugiro que nossas aulas sejam mais dinâmicas, colocando nossos alunos para pesquisarem informações básicas na tentativa de solução de atividades práticas contextualizadas. Com isso, pode-se ampliar a maneira de aprender e ensinar Matemática, "fugindo" da maneira tradicional de explicar conceitos e passar exercícios que mecanizem métodos de resolução. Uma das desvantagens deste método tradicional, é que este tipo de problemas estimulam o aluno a decorar e quando surgem problemas fora do contexto do conteúdo, o aluno não consegue resolvê-lo, pois não consegue aplicar seu conhecimento matemático fora dos exercícios padrão.

Ressalta-se também o relato de um aluno, o qual foi apresentado no capítulo 2, sobre a prática para calcular volume de troncos, onde ele diz: "é uma prática que deveria ser feita com mais frequência, mas que tenha mais ajuda", reforçando que este tipo de atividade é de agrado de alunos, sobretudo, daqueles que estão desestimulados com a Matemática, pois os coloca na condição de construtores de conhecimento. Porém, isto deve ser alinhado com uma base sólida de conhecimentos básicos de Matemática, com o qual a solução deste tipo de atividades se tornará mais prazeroso e com objetivo.

A motivação dos alunos em resolver as atividades e a facilitação da aprendizagem através de grupos (comprovada através dos relatos de alunos) são dois pontos positivos observados por mim. Por outro lado, a solução dos problemas de Fermi e de problemas contextualizados, trazem consigo a prática de resolver problemas em outras áreas do conhecimento, promovendo assim a interdisciplinaridade e desenvolve habilidades como trabalho em equipe, construir acordos, análise de resposta, entre outras.

Propor problemas contextualizados requer do professor habilidades para esta construção e/ou adaptação de problemas, muitos dos quais estão apresentados em livros didáticos num contexto geral, em atividades retiradas na internet, entre outros. Esta contextualização deve tornar o problema acessível ao aluno, aproximando a matemática da sua própria realidade e levando em consideração os conhecimentos já adquiridos ou que se quer dar reforço. Ao propor estas atividades contextualizadas é importante também levar em consideração a própria realidade escolar em relação a estrutura física, laboratorial, tecnológica bem como o tipo de ensino praticado. Por exemplo, caso a escola tenha um ensino mais técnico ou experimental os problemas de Fermi e as possíveis contextualizações dos exercícios deverão focar nessas características de ensino.

5 Conclusão

Pensando em contribuir para o Ensino de Matemática através de uma metodologia que desperte em nossos alunos o interesse e o gosto pela disciplina, foi realizado um estudo sobre os problemas de Fermi. Embora pouco conhecidos e consequentemente pouco utilizados, os problemas de Fermi não têm uma definição única, conforme o estudo apresentado no capítulo 3, mas que podem ser direcionados conforme o tipo de ensino tradicional ou técnico, adaptados de maneira a atender seus objetivos e conforme a própria estrutura educacional das escolas.

Procurando estabelecer uma relação entre os problemas de Fermi e a aprendizagem de matemática, estudei o trabalho de Ärlebäck e Albarracin [4] que apresentam as definições de problemas de Fermi dentro das perspectivas de Modelagem Matemática, sendo a Modelagem Contextual e Modelagem Educacional as que mais estão adequadas para a inserção dos problemas de Fermi como uma abordagem metodológica. A metodologia escolhida neste trabalho foi a que envolve a Modelagem Contextual, que tem por objetivo aproximar o conteúdo matemático à realidade do aluno, oferecendo a ele a oportunidade de utilizar conhecimentos já adquiridos por eles.

A escolha de aplicar os problemas e exercícios em grupo, propiciou a interação e a sinergia entre os alunos, levando os integrantes dos grupos a criarem juntos estratégias, ideias e caminhos de resolução, tornando a aula prazerosa e descontraída, promovendo também a aprendizagem através de trocas de informações e conhecimentos. Os comentários, a seguir, de dois alunos, reforçam essa observação.

G2B "quando podemos trabalhar em grupo, um colega ajuda o outro na interpretação, como resolver..."

G3E "a atividade em grupo me ajudou a resolver as questões porque trocamos ideias e levantamos hipóteses para resolver."

A avaliação da aprendizagem também foi realizada em grupo, atendendo o pedido de alunos com mais dificuldades, já que na resolução dos problemas de Fermi eles se sentiram mais motivados e disseram conseguir aprender melhor com os colegas. Mas, deixo como sugestão para os colegas que queiram trabalhar este tipo de problemas, que após serem trabalhadas atividades em grupo, também seja realizada uma avaliação individual para melhor análise da aprendizagem dos alunos, principalmente daqueles que têm mais dificuldade na aprendizagem de Matemática.

Pude observar que os integrantes dos grupos trocaram muitas ideias e se manteve uma colaboração de aprendizagem. Notei uma maior participação daqueles alunos que possuem maior dificuldades de aprendizagem de Matemática, em que geralmente nota-se a inibição deles em sala de aula. Na resolução dos problemas, estes apresentaram maior interesse e motivação e estavam sempre atentos às explicações de outros colegas. Assim, acredito que houve um acréscimo de conhecimento. Entretanto, como sugestão de trabalhos futuros sugiro uma metodologia que consiga mensurar o acréscimo individual de conhecimentos.

As atividades propostas me deram um retorno positivo, pois além da observação sobre o crescimento na participação dos alunos com mais dificuldade, observei também que o momento de resolução dos problemas matemáticos foi agradável e descontraído, atitude pouco observada nas aulas tradicionais de Matemática.

Ainda que as atividades tenham apresentado um bom resultado, trabalhar os problemas de Fermi pode não ser tão simples nem para o aplicador e nem para os alunos, isso porque, geralmente, os problemas de Fermi não possuem informações numéricas para sua resolução, tornando estes problemas desafiadores desde a sua concepção. Por outro lado, a resolução deste tipo de problemas envolve a necessidade de construir modelos matemáticos para sua resolução e a resposta final não é exata e sim um valor estimado. Em vista disso, é importante que o aplicador resolva os problemas de Fermi antecipadamente para fazer intervenções objetivas e verificar se os alunos possuem todos os materiais necessários para sua resolução.

Embora os alunos que participaram dessa atividade avaliaram os problemas de Fermi como sendo atividades de resolução mais difícil em relação aqueles onde há substituição de valores já dados no próprio problema, os mesmos também afirmaram que se sentiram mais instigados a pensar e também desafiados, já que muitas vezes tiveram que propor outro modelo matemático ou buscar novas informações e análise quando a estimativa não era razoável. Acredito que essa preferência ocorra pelo fato dos alunos estarem habituados a resolver exercícios repetitivos envolvendo cálculos, mas que com a prática, os problemas de Fermi podem se converter em um ótimo aliado na aprendizagem dos alunos.

Proponho aos colegas professores do Ensino Médio que acrescentem às suas metodologias os problemas de Fermi como uma ferramenta metodológica na busca de melhorar a aprendizagem de conceitos matemáticos. A contextualização dos problemas e o trabalho em equipes contribuem para uma aprendizagem colaborativa e desperta o interesse em chegar ao resultado. Avalio que este tipo de problemas tem um potencial enorme de contribuir significativamente com a aprendizagem da disciplina de Matemática e deixo assim a minha contribuição para as mudanças e melhorias no ensino de Matemática na escola.

Referências

[1] ABRAMS, L. (2011). Fermi questions a guide for teachers, students, and event supervisors, Fermi questions guide, DuPont Company CR & D/CCAS, Experimental Station, Wilmington, 2011. Disponível em: `https://www.soinc.org/sites/default/files/FermiQuestionsHandout.doc` Acesso em: 30 out. 2019.

[2] ALBARRACÍN, L ; GORGORIÓ, N. *Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto.* RELIME, México, v.16. n.3, p. 289-315, novembro 2013. Disponível em : `http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-16/numero-16-3/443-201301c` Acesso em: 15 out. 2019

[3] ÄRLEBÄCK, J. B. *On the use of Realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school.* The Montana Mathematics Enthusiast, v.6. n.3, p.331-364, 2009. Disponível em: `https://scholarworks.umt.edu/tme/vol6/iss3/4` Acesso em: 27 set. 2019

[4] ÄRLEBÄCK, J. B; ALBARRACÍN, L. *Developing a classification scheme of definitions of Fermi problems in education from a modelling perspective.* 2017. Disponível em: `https://www.researchgate.net/publication/312452927_Developing_a_classification_scheme_of_definitions_of_Fermi_problems_in_education_from_a_modelling_perspective`. Acesso em 26 de ago 2019

[5] ALVES, G. A. Modelagem Matemática no ensino da Trigonometria. 2017. 73f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017. Disponível em: `http://tedebc.ufma.br:8080/jspui/bitstream/tede/1297/2/Gleyciane\%20Araujo.pdf` Acesso em: 29 jun. 2019.7

[6] DALSASSO, A. A. P; BASSOI, S. T. A utilização do cálculo mental no ensino fundamental. In: BRANDT, C.F.; MORETTI, M. T. (orgs.). Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa. Ponta Grossa: UEPG. 2016. cap. 6, p.133-143. Disponível em `https://doi.org/10.7476/9788577982158` Acesso em: 17 jul. 2019

[7] BRAGANÇA, K. F. et. al. Um palpite inteligente: incentivando a estimativa em sala de aula. In. Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 7, 2017, Canoas. Relato de Experiência. Disponível em: `http://www.conferencias.`

ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/7720/3813 Acesso em: 26 ago. 2019

[8] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM). 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf . Acesso em: 23 jan. 2019.

[9] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[10] BRUMANO, C. E. P. A Modelagem Matemática como metodologia para o estudo de Análise Combinatória. 2014. 153f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014. Disponível em: http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/DISSERTA\%C3\%87\%C3\%83O-CLEUZA.pdf Acesso em: 10 jan. 2019

[11] BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de Aula.Revista de Modelagem na educação Matemática, Blumenau,v.1,n.1,p.10-27, 2010. Disponível em: https://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/article/view/2012/1360 Acesso em: 12 fev. 2019

[12] BURAK, D. Modelagem Matemática e a sala de aula. In:Encontro Paranaense De Modelagem Matemática em Educação Matemática, 1, 2004, Londrina, Anais [...] Londrina, 2004. Disponível em: https://www.yumpu.com/pt/document/read/12823736/modelagem-matematica-e-a-sala-de-aula-dionisio-burak- Acesso em: 01 set. 2019

[13] BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: : Reunião Anual da ANPED,24, out.2001, Caxambu,MG. Anais [...] Rio de Janeiro:ANPED, 2001, CD-Room. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf Acesso em: 07 set. 2019

[14] BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática na sala de aula. Perspectiva.Erechim RS. v.27, n.98, jun. 2003, p. 65-74.

[15] BASSANEZI, R. C. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. Editora Contexto, São Paulo, 2002.

[16] BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

[17] BASSANEZI, Rodney C. Temas e modelos. **São Paulo: Unicamp**, 2012.

[18] BIEMBENGUT, M. S. Modelagem Matemática & implicações no ensino e na aprendizagem de matemática. 2.ed. Blumenau: Edfurb, 2004.

[19] BEAN, D. O que é Modelagem Matemática? Educação Matemática em Revista. São Paulo, n.9/10, p. 49-57. Abr. 2001.

[20] BEAN, D. Modelagem Matemática: uma mudança de base conceitual. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 5., 2007, Ouro Preto. Anais [...] Ouro Preto: CNMEM, 2007. p. 35-58.

[21] BRESSAN,A. M. de; BOGISIC, B.C. de, La estimación, uma forma importante d e pensar matemática. Desarrolo Curricular n.1, EGB1y2, Matemática. Consejoprovincial de educación, Província de Rio Negro, 29 f, 1996. Disponível em: `http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL000516.pdf` Acesso em: 15 set. 2019.

[22] CHAVES, R.; LORENZONI, L. L. Modelagem Matemática: concepções e tutores do multicurso matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática,10,2010, Salvador. Anais [...]. Salvador. 2010.

[23] CHAVES, R. Caminhos percorridos para a implantação do grupo de pesquisa-ação em educação matemática junto ao núcleo de ensino integrado de ciências e matemática da Universidade Federal de Viçosa. 2000, 296 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro,2000.

[24] CHAVES, R. Por que anarquizar com o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais? 2004, 233 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

[25] CHUQUIPOMA, J. A. D. Modelagem Matemática. São João del Rei-MG. UFSJ, 2012. 139f. 2012.

[26] DANTE, L. R. Matemática: Contexto e Aplicações. 3.ed. São Paulo: Ática, 2017

[27] D'AMBROSIO, U .. A matemática nas escolas. Educação Matemática em Revista, a.9, n.11, ed.esp., p.29-33, abr. 2002.

[28] FIGUEIREDO, H. A. de; SOARES, F. S. Utilizando problemas de Fermi para estimar. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. 12. XII ENEM. São Paulo.Relato de experiência Sao Paulo.2016. Disponível em: `http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/relatos-1.html`. Acesso em 15 de jun. de 2019

[29] FONSECA, J. A.; LUTZ, M. R. Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem por meio da atividade experimental. II Congresso nacional de Educação Matemática, IX Encontro regional de Educação Matemática. jun.2011. Relato de experiencia..2011.Disponível em: `www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/pdf/re69.pdf`. Acesso em : 08 jan. 2019

[30] MUEHLHAUSER, L. Fermi Estimates. 11 abr. 2013. Disponíevel em: https://www.lesswrong.com/posts/PsEppdvgRisz5xAHG/fermi-estimates. Acesso em: 01 de set. de 2019

[31] REHFELDT, M. J. H; PUHL, N. M.; NEIDE, I. G. Modelagem Matemática: descobrindo o volume em uma forma de bolo. Revista Kiri-Kerê-Pesquisa e ensino, São Matheus, ES, a.2, n.3, p.19-33, nov.2017. Disponível em: http://periodicos.ufes.br/kirikere/article/view/16693. 25/06/2017. Acesso em: 17 de jul. de 2019

[32] REYS, R. E. Estimación. In: *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundária*. Lecturas. SEP: México, D. F. 1995. cap.2, p.35-46. Disponível em: http://www.mat.uson.mx/depto/diplomado/secundaria/lecturas.pdf Acesso em: 09 set. 2019

[33] SILVA, A. S. Uma proposta de motivação visando despertar o interesse pela matematica. 2018. 93f, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rey, 2018.

[34] SOUZA, J. R. Novo olhar matemática. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013.

[35] SOUZA ,N.; REVÔREDO, J. R.; ANDRADE, T. T . Aplicando a técnica de estimação de Fermi para resolver problemas de negócios. set. 2017. Disponível em: http://www.contabilidademq.com.br/2017/09/aplicando-tecnica-de-estimacao-de-fermi.html Acesso em: 07 dez. 2019.

[36] TORTOLA, E.; SILVA, H. C. da ; ALMEIDA, L. M. W. Um olhar sobre os trabalhos do IV EPMEM à luz das perspectivas de Kaiser e Sriraman para a Modelagem Matemática. In: EPREM-Encontro Paranaense de Educação matemática, 11, set.2011, Apucarana. Paraná. 2011.

[37] Fermi Questions - Disponível em: https://www.mathcircles.org/wp-content/uploads/2017/10/Fermi_Estimates_Lesson_Plan_0-1.pdf Acesso em: 08 set. 2019.

[38] KAISER, G.; SRIRAMAN, B. *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. ZDM. v.38, n.3, p.302-310, jun. 2006. Disponivel em: http://www.emis.ams.org/journals/ZDM/zdm063i.html Acesso em: 12 set. 2019

[39] NAVARRO, J. M. G. *Problemas de Fermi, suposición, estimación y aproximación*. Revista Épsilon, v.30(2),n.8,p.57-68,nov.2013. Disponível em: https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon84.pdf Acesso em: 10 ago. 2019

[40] Uma coleção de problemas de estimativa no site Fermi Problems da Universidade de Maryland, Disponível em: http://www.physics.umd.edu/perg/fermi.html. Acesso em: 06 set. 2019

[41] Perguntas clássicas sobre Fermi com soluções anotadas no site do Collin Country Community CollegeDistrict, Disponível em: `http//iws.ccccd.edu/mbrooks/demos/Fermi.questions.html`. Acesso em: 08 set. 2019

[42] Perguntas de Fermi-Coleção geral no espaço Sheila Talamo no Fórum de Matemática, Disponível em: `http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/fermicollect.html`. Acesso em: 08 set. 2019

[43] Peter-Koop, A. Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils'; interactive modelling processes. In I. Putt, R. Faragher, M. McLean (Eds.), Presented at the Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia), Townsville, QLD: MERGA. 2004, p. 454-461.

[44] SRIRAMAN, B. E KNOTT, L. *The Mathematics of Estimation: Possibilities for Interdisciplinary Pedagogy and Social Consciousness*. Interchange, v.40, n. 2., p. 205-223. 2009.

[45] Sriraman, B. & Lesh, RA (2006). *Modeling conceptions revisited*. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. ZDM. v.38, n.3, p. 247-254, jun. 2006. Disponivel em: `http://www.emis.ams.org/journals/ZDM/zdm063i.html` Acesso em: 12 set. 2019

[46] WEINSTEIN, L. & ADAM, J. A. Guesstimation: solving the world's problems on the back of a cocktail napkin. Princeton, 2008.

[47] 8 motivos que fazem do Rio uma cidade maravilhosa. Disponível em: `https://rederiohoteis.com/rio-cidade-maravilhosa/` Acesso em : 29 set. 2019.

[48] 35 incríveis curiosidades sobre os aviões. Disponível em: `https://acrediteounao.com/curiosidades-sobre-os-avioes/` Acesso em : 29 set. 2019.

[49] ZIRPOLLI, C. As medidas dos campos do Brasileirão, com ou sem padrao FIFA. In: Diário de Pernambucano. 19 de maio 2015. Disponivel em: `http://blogs.diariodepernambuco.com.br/esportes/2015/05/19/as-medidas-dos-campos-do-brasileirao-com-ou-sem-padrao-fifa/`. Acesso em: 09 out. 2019

[50] Copa do Mundo. Disponivel em: `https://brasilescola.uol.com.br/educacao-fisica/copa-mundo.htm` Acesso em: 27 set. 2019.

[51] Como surgiu o aviao? Disponível em: `https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/como-surgiu-aviao.htm` Acesso em: 29 set. 2019

[52] Curiosidades da copa do mundo de futebol. Disponível em: `https://www.suapesquisa.com/futebol/curiosidades_copa.htm` Acesso em: 27 set. 2019.

[53] Site Banco Central do Brasil. Segunda família das moedas brasileiras. Disponivel em: `https://www.bcb.gov.br/dinheirobrasileiro/segunda-familia-moedas.html` Acesso em: 09 out. 2019.

[54] Mundo Educação. Unidades de medida ao longo da história. Disponível em: `https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/unidades-medida-ao-longo-historia.htm` Acesso em: 10 out. 2019

[55] Mapas Blog - Mapas do estado do Rio de Janeiro. Disponível em: `https://mapasblog.blogspot.com/2011/11/mapas-do-estado-do-rio-de-janeiro.html` Acesso em: 10 out. 2019.

[56] GOODCHILD, S.; FUGLESTAD, A. B. *Affordances of inquiry: The case of one teacher*. In J. L. Cortina, S. Alarorre, O. Figueras, T. Rojano, A. Sepúlveda (Eds.), Proceedings of the joint meeting of PME and PME-NA XXX Mexico: Cinvestav - UMSNH: Proceedings of the joint meeting of PME and PME-NA XXX, 20048, cap.3, p. 39–56.

[57] Terra Esportes. Copa: jogadores correm até 15 km por jogo. Disponível em: `https://www.terra.com.br/esportes/futebol/copa-2014/copa-jogadores-correm-ate-15-km-por-jogo-veja-numeros,f2d5b0ec3bfa6410VgnVCM3000009af154d0RCRD.html` Acesso em: 09 out. 2019.

6 Apêndices

Apêndice A

Problemas da Primeira Aula – Grupo G1

Mestranda: Natércia Feliciana Silva
Orientador: Professor Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Instituição: Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues Turma: 3ºA
Cidade: Carmo da Mata\MG Data: ____________
Cada aluno participante será mencionado de acordo com a descrição abaixo para preservar a identidade de cada um.
Você deverá descrever sua resolução e deixar registrado algum cálculo que você julgar necessário.

Alunos: G1A, G1B, G1C, G1D, G1E

Grupo 1

Problema 1 - Todo ano nossa escola realiza a tradicional festa junina, com participação de toda a comunidade escolar, onde são apresentadas por nossos alunos:danças, o famoso quadrilhão e o casamento do jeca. Toda a escola se mobiliza para fazer uma bonita apresentação e encantar a todos que nos prestigiam. Para assistir à apresentação são vendidos ingressos para a população.Quantos ingressos poderíamos vender se quiséssemos encher a "quadra de fora"da escola no dia da festa

Apêndice B

Problemas da Primeira Aula – Grupo G2

Mestranda: Natércia Feliciana Silva
Orientador: Professor Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Instituição: Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues Turma: 3ºA
Cidade: Carmo da Mata\MG Data: ____________
Cada aluno participante será mencionado de acordo com a descrição abaixo para preservar a identidade de cada um.
Você deverá descrever sua resolução e deixar registrado algum cálculo que você julgar necessário.

Alunos: G2A, G2B, G2C, G2D, G2E

Grupo 2

Problema 2 - Muitos comerciantes reclamam da falta de dinheiro trocado em caixa, o que dificulta o troco na hora da venda.Isso ocorre porque muitas pessoas gostam de juntar moedas em um cofre "personalizado". (este cofre geralmente é um pote de creme,lata de leite em pó, garrafa de refrigerante, etc).Considerando que uma pessoa utilize uma garrafa pet de coca cola de 2 litros como cofre, quantas moedas de R$1,00 ela consegue guardar nesse cofre?

Apêndice C

Problemas da Primeira Aula – Grupo G3

Mestranda: Natércia Feliciana Silva
Orientador: Professor Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Instituição: Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues   Turma: 3ºA
Cidade: Carmo da Mata\MG   Data: ____________
Cada aluno participante será mencionado de acordo com a descrição abaixo para preservar a identidade de cada um.
Você deverá descrever sua resolução e deixar registrado algum cálculo que você julgar necessário.

Alunos: G2A, G2B, G2C, G2D, G2E

Grupo 3

Problema 3 - O futebol é uma paixão nacional. Essa paixão, a cada quatro anos, faz com que todos se unam num só coração para torcer pelo nosso país em uma competição internacional: A Copa do Mundo. Este evento esportivo é um dos maiores do mundo e faz com que bilhões de pessoas assistam aos jogos realizados. Brasil já chegou à final 7 vezes e é o segundo maior finalista em Copas do Mundo perdendo apenas para aAlemanha (8 vezes), porém somente nós somos pentacampeões. O Brasil foi campeão em copas nos anos de 1958, 1962, 1970, 1994 e 2002.O técnico do time brasileiro em 1994, Zagallo, é uma das três pessoas que se tornou campeã em Copa do Mundo como jogador e também como técnico de futebol. Mas sabemos que para ser campeão é necessário muita garra e disposição durante o jogo. E é necessário também muito fôlego para se movimentar no campo enquanto joga. Mas afinal, quantos quilômetros um jogador de futebol percorre durante um jogo?

Apêndice D

Exercícios de avaliação de conteúdos matemáticos – Grupo G1
Mestranda: Natércia Feliciana Silva
Orientador: Professor Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Instituição: Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues Turma: 3ºA
Cidade: Carmo da Mata\MG Data: ____________
Responda às seguintes questões e entregue a folha com as respostas, incluindo a descrição e os cálculos.

As figuras a seguir são imagens de barracas cedidas à Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues pela Prefeitura Municipal de Carmo da Mata - MG quando ocorre a festa Junina da escola. Suas dimensões estão apresentadas abaixo.

Dados das medidas das barracas:

altura da barraca: 2 m altura da chapa da frente até o chão: 1,20m comprimento lateral: 2 m comprimento da frente: 3,10m

Estas barracas são colocadas em uma quadra descoberta, conhecida por todos como"quadra de fora", uma vez que a escola possui duas quadras, sendo uma coberta.

Na Figura 6.1 é mostrado as barracas colocadas na escola no dia da festa sob duas posições e após ornamentada.

Figura 6.1: (a)Lateral da barraca utilizada na festa da escola. (b)Frente da barraca usada na festa da escola.(c) Barraca utilizada na festa após ornamentação feita por funcionários.

(a) (b) (c)

Fonte: arquivo pessoal

Exercício1 - Sabendo que a área da “quadra de fora” que deverá ser ocupada é de $30m^2$, quantas barracas poderão ser colocadas nessa área?

Exercício2 - Os professores da escola (organizados por grupos) são responsáveis por enfeitar as barraquinhas. Geralmente as barracas são “forradas”com TNT, sendo as partes laterais e do fundo completamente cobertas e na parte da frente, cobre-se a parte de metal até o chão. Qual a quantidade de TNT necessária para enfeitar 4 barracas?

Observação: a porta da barraca também é encapada.

Exercício3 - Qual será a área livre para o público quando forem colocadas apenas 6 barracas iguais às das imagens acima na “quadra de fora”?

Exercício4 - Considerando que em $1m^2$ cabem 4 pessoas, quantas pessoas cabem (aproximadamente) no espaço livre da “quadra de fora”após serem colocadas as 6 barracas na quadra com as dimensões apresentadas no início da atividade?

Exercício5 - Comentar as diferenças entre a resposta do problema da primeira atividade e as respostas dos problemas dos exercícios de avaliação de conteúdos de matemática.

Apêndice E

Exercícios de avaliação de conteúdos matemáticos – Grupo G2
Mestranda: Natércia Feliciana Silva
Orientador: Professor Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Instituição: Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues Turma: 3ºA
Cidade: Carmo da Mata\MG Data: ____________
Responda às seguintes questões e entregue a folha com as respostas, incluindo a descrição e os cálculos.

O Quadro 6.1 traz informações sobre as moedas de R$0,50 de real e R$1,00. Estas informações serão necessárias para resolver as questões de 1 a 5.

Valor facial (R$)	**Diâmetro (mm)**	**Peso (g)**	**Espessura (mm)**	**Borda**	**Material**
0,50(1998 a 2001)	23,00	9,25	2,23	Legenda *ORDEM E PROGRESSO* BRASIL	Cuproníquel
0,50(2002 até hoje)	23,0	7,81	2,85	Legenda *ORDEM E PROGRESSO* BRASIL	Aço inoxidável
1,00 (1998 a 2001)	27,0	7,94	2,85	Serrilha intermitente	Cuproníquel (núcleo) e Alpaca (anel)
1,00 (2002 em diante))	27,0	7,00	2,85	Serrilha intermitente	Aço inoxidável (núcleo) e aço revestido de bronze (anel)

Fonte: Site Banco Central do Brasil [53]

Quadro 6.1: Dimensões de moedas brasileiras

Exercício 1 - Considerando uma moeda de R$0,50 com as dimensões dadas no Quadro 6.1, quantas moedas de R$0,50 (que começaram a circular a partir de 2002 até os dias atuais) cabem em uma garrafa de coca cola com capacidade para 2 litros?

Exercício 2 - Quantas moedas de R$1,00 são necessárias empilhar para que o volume obtido seja de, aproximadamente, $26,68cm^3$?

Exercício 3 - Ao empilhar lado a lado 12 moedas de R$1,00 e 15 moedas de R$0,50, qual o volume obtido?

Exercício 4 - Uma pessoa irá juntar moedas de R$0,50 em uma garrafa de coca cola de 2 litros. Quantos reais ela irá juntar aproximadamente?

Exercício 5 - O que é mais interessante juntar: moedas de R$0,50 em garrafas de coca cola com capacidade de 3 litros ou moedas de R$1,00 em garrafas de coca cola com capacidade de 2 litros?

Exercício 6 - Comentar as diferenças entre a resposta do problema da primeira atividade e as respostas dos problemas dos exercícios de avaliação de conteúdos de matemática.

Apêndice F

Exercícios de avaliação de conteúdos matemáticos – Grupo G2
Mestranda: Natércia Feliciana Silva
Orientador: Professor Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Instituição: Escola Estadual Joaquim Afonso Rodrigues Turma: 3ºA
Cidade: Carmo da Mata\MG Data: ____________
Responda às seguintes questões e entregue a folha com as respostas, incluindo a descrição e os cálculos.

Exercício 1 - Considerando a distância percorrida por um jogador, encontrada e validada por você no problema de Fermi apresentado na aula anterior, responda:

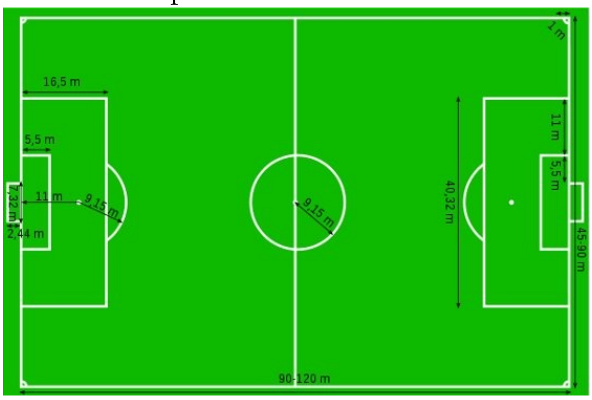
a) qual é a velocidade média obtida por um jogador (em km/min) percorrida por ele durante o jogo?

b) represente essa mesma velocidade média usando m/min

c) qual a distância percorrida por esse jogador durante uma hora?

Exercício 2 - Sabendo que um campo de futebol tem as dimensões da Figura 6.2, em média, quantas voltas completas um jogador percorre ao redor desse campo de futebol, considerando que a distância total percorrida por ele equivale à distância percorrida por um jogador encontrada no problema de Fermi, resolvido na atividade anterior.

Figura 6.2: Campo de futebol com medidas oficiais.



Fonte: Blog Diário de pernambucano [49]

Exercício 3 - Um jogador está a uma certa distância do gol e vai cobrar uma falta. A velocidade que ele imprime sobre a bola é de43,2 km/h. Sabendo que a bola leva 3s para atingir as redes do gol, determine a distância percorrida pela bola.

Exercício 4 - Segundo o site Mundo Educação, o passo de um atleta de futebol americano é de aproximadamente 0,91m. Sabe-se também que um jogador percorre em média 16km durante os 90 minutos de jogo. Quantos passos, aproximadamente um jogador americano precisa dar para que atinja a distância de 16 km?

Exercício 5 - Comentar as diferenças entre a resposta do problema da primeira atividade e as respostas dos problemas dos exercícios de avaliação de conteúdos de matemática.