2019: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Voos de Lévy: Uma breve discussão sobre movimento não gaussiano

José Eduardo Barbosa de Oliveira[1]
Ricardo de Carvalho Falcão[2]

Resumo: Este trabalho tem por objetivo apresentar uma visão geral da teoria da probabilidade passando pela distribuição normal ou gaussiana seguido pelo Teorema Central do Limite e suas aplicações até apresentar a Distribuição de Lévy e por fim os Voos de Lévy. O trabalho também propõe uma atividade voltada para o ensino médio que consiste em um jogo onde os estudantes irão construir dois modelos de caminhadas (Browniana e Lévy) em que uma delas segue uma distribuição normal enquanto outra segue a distribuição de Lévy.

Palavras-chave: Probabilidade, Distribuição Normal, Teorema Central do Limite, Distribuição de Lévy.

Abstract: This work aims to present an overview of the probability theory passing through the normal or Gaussian distribution followed by the Central Limit Theorem and its applications until presenting the Lévy Distribution and finally the Lévy Flights. The work also proposes an activity aimed at high school that consists of a game where students will build two models of walks (Browniana and Lévy) in which one follows a normal distribution while another follows the distribution of Lévy.

Keywords: Probability, Normal Distribution, Central Limit Theorem, Lévy Distribution.

1 Introdução

Existe uma grande diferença entre aquilo que se espera que aconteça e o que realmente tem chances de acontecer, em termos práticos acreditar que um time irá ganhar um campeonato motivado apenas pelo amor de torcedor e apostar valiosos recursos, não garante que o mesmo sairá vencedor, da mesma forma, acreditar que irá chover apenas baseado no senso comum, pode levar à perdas de plantios inteiros devido exatamente à falta de chuva.

Assim sendo, tentar prever o futuro sempre esteve entre as grandes aspirações do homem, prever eventos naturais, períodos de cultivos, vitórias ou derrotas em campeonatos, sucesso

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Turma 2017
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
E-mail: josebdo@gmail.com
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Estatística, Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ
E-mail: rfalcao@ufsj.edu.br

ou fracasso em lançamento de produtos, etc. Na maioria dessas situações não somos capazes de prever com exatidão o que irá acontecer, o melhor que podemos fazer é quantificar com qual probabilidade um dado resultado pode ocorrer.

Logo, o presente trabalho tem o objetivo de apresentar ao leitor o uso da probabilidade e da estatística, e seu caráter aleatório e imprevisível. Será discutido o uso da Distribuição Normal e a tendência que distribuições quaisquer tendem a assumir quando se toma amostras aleatórias e independentes em um número suficientemente grande e por fim a limitação que elas tendem a apresentar quando se deseja prever a ocorrência de eventos raros.

Esse trabalho está estruturado da seguinte forma, na seção 1 é feita uma introdução a fim de contextualizar o tema e apresentar o leitor ao fundamento proposto na seção 2, para trazer maior clareza ao trabalho, são apresentadas as principais definições de probabilidade e estatística passando pelos caminhantes aleatórios; ao passo que na seção 3 é destinada a apresentação da distribuição normal ou gaussiana com suas características e propriedades; a seção 4 será destinada a apresentação do Teorema Central do Limite e a sua aplicação. Seção 5, a apresentação do Voo de Lévy iniciando pelas características das distribuições de Lévy e em tempo, será apresentado uma comparação com a Distribuição normal. Na seção 6, será apresentada uma proposta para o uso nos anos finais do ensino médio e por fim na seção 7 a conclusão do trabalho com a relevância do estudo como alternativa para a normal.

2 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

"A Humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos não-casuais" por M. G. Kendall.

Imagine um indivíduo que participe de um jogo de moeda (cara ou coroa) honesta em que para cada cara obtida ele dê um passo para a direita e para cada coroa obtida ele dê uma passo para esquerda. Após algumas jogadas sucessivas, qual será a posição esperada desse indivíduo? Ou então, imagine um outro jogo entre dois indivíduos (A e B) em que a cada rodada, apenas um dos dois marca um ponto. Suponha que o jogador A precise de dois pontos para vencer enquanto o jogador B precise de 3 pontos para a vitóra. Devendo o jogo ser interrompido nesse exato momento, qual a divisão mais justa da premiação?

Situações como as apresentadas acima que levaram o desenvolvimento da probabilidade e da estatística aos dias atuais. Em situações como essas é impossível acertar antecipadamente o que irá acontecer, porém é possível prever o que poderá acontecer e com que frequência poderá acontecer. A teoria da probabilidade trata de analisar os fenômenos aleatórios e dar a eles um significado menos abstrato, o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é a estrutura matemática capaz de modelar um processo real que consiste de estados que ocorrem de forma aleatória. O espaço de probabilidade consiste do seguinte tripleto

- Ω: O espaço amostral que é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento. Por exemplo, no experimento de jogar uma vez uma moeda teremos:

$$\Omega = \{K, C\}$$

  onde K é cara e C é Coroa. Há nesse caso, 2 possibilidades para as faces da moeda.

- A σ-algebra $\mathcal{F}$ é uma coleção de todos os eventos que queremos considerar. No experimento de jogar uma vez uma moeda temos: $\mathcal{F} = \{\{\}, \{K\}, \{C\}, \{K, C\}\}$

- P é medida de probabilidade que retorna a probabilidade de um evento acontecer.

A probabilidade de um envento pode ser definida de acordo com três visões, a clássica, a frequentista e a axiomática.

A visão clássica, é dada intuitivamente [8] como a chance de um evento desejado acontecer sob determinadas situações. Para isso, consideremos um espaço amostral Ω com ω eventos simples, equiprovável e seja E um evento de Ω composto de $n(E)$ eventos simples. A probabilidade de E, que denotaremos por $P(E)$, é um valor obtido para a relação entre o número de casos favoráveis $n(E)$ e o número de casos possíveis ω.

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} \text{ ou } P(E) = \frac{n(E)}{\omega}$$

Na definição clássica, há duas restrições para o seu funcionamento:

1ª) todos os casos possíveis devem ter a mesma probabilidade ou seja, devem ser equiprováveis;

2ª) número finito de casos possíveis.

E possui as seguintes propriedades:

1ª) $\forall\ E \subseteq \Omega$, temos $0 \leq P(E) \leq 1$;

2ª) $P(\Omega) = 1$;

3ª) Se $E \subseteq \Omega$, $K \subseteq \Omega$ e $E \cap K = \emptyset$ então $P(E \cup K) = P(E) + P(K)$.

Uma outra forma de definir a probabilidade com que um evento acontece é segundo a visão frequentista. Nessa visão, um experimento é repetido nas mesmas condições um número n grande de vezes. Consideraremos um espaço amostral Ω com ω eventos simples e E um evento de Ω composto de $n(E)$ eventos simples. O experimento será repetido várias vezes, estimando-se a probabilidade de E, pela sua frequência relativa de ocorrência, ou seja, probabilidade do evento E é dada como:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n} \tag{1}$$

A visão frequentista possui as seguintes propriedades:

1ª) $\forall\ E \subseteq \Omega$, vale que $0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n} \leq 1$;

2ª) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(\Omega)}{n} = 1$;

3ª) Se $E \subseteq \Omega$, $K \subseteq \Omega$ e $E \cap K = \emptyset$ então $\lim_{n\to\infty} \frac{n(E\cup K)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n(K)}{n}$.

E por fim, temos a visão axiomática, em que as propriedades comuns das visões de probabilidade clássica e frequentista são colocadas como axiomas. Assim, $P(\omega)$ é definida como a frequência limite de ω, tomando um experimento cujo espaço amostral seja Ω. Para cada evento ω do espaço amostral Ω, assumimos que a probabilidade do evento ω, $P(\omega)$, satisfaça os três axiomas:

Axiomas 2.1

$$0 \leq P(\omega) \leq 1$$

Axiomas 2.2

$$P(\Omega) = 1$$

Axiomas 2.3

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i)$$

Para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, para os quais $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$,

Baseados nos axiomas 1, 2 e 3, podemos concluir que:

- Dados dois eventos E_1 e E_2:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

- $P(E^c)$= 1 - $P(E)$ em que E^c é o evento complementar de E.
- Se $E_2 \subset E_1$ então $P(E_2) \leq P(E_1)$
- $P(E_1) \leq 1$

2.1 Variável Aleatória

Imagine o experimento, um indivíduo lança uma moeda (honesta), caso a moeda dê cara ele dá um passo para a direita, se a moeda der coroa ele dá um passo para esquerda ou seja ele tem duas opções de descolamento, mover aleatoriamente para a esquerda e ou para a direita d com igual probabilidade entre elas. O espaço amostral do experimento que consiste em dar um único passo é: $\Omega = \{e, d\}$. O espaço amostral do experimento que consiste em dar dois passos é: $\Omega = \{ee, ed, de, dd\}$. Nesse caso, como em vários outros casos, o espaço amostral associado ao experimento não está associado a um número, portanto para quantificarmos o resultado desse experimento é necessário introduzir o conceito de variável aleatória.

Definição 2.1 *Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é uma função real definida no espaço Ω tal que $[X \leq x]$ é um evento aleatório para todo $x \in \mathbb{R}$*

No caso do experimento que consiste em dar dois passos podemos definir a variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{R}$ como:

- $X(d, d) = 2$, associou ao evento de dar 2 passos para a direita o número 2
- $X(d, e) = X(e, d) = 1$, associou ao evento de dar 1 passo para a direita o número 1
- $X(e, e) = 0$, associou ao evento de não dar passos para a direita o número 0

Uma variável aleatória é discreta, como no caso acima, se assume um número finito ou enumerável de valores ou seja se existe um conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$, tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \cdots\}, \forall \omega \in \Omega$. A função $p(x_i)$ que tem a característica $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \cdots$, é chamada função de probabilidade de X.

A probabilidade de X assumir cada um dos valores $0, 1$ e 2 é dada abaixo:

- $P(X=2)$= $P(d,d)=\frac{1}{4}$
- $P(X=1)$= $P(d,e)+P(e,d)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
- $P(X=0)$= $P(e,e)=\frac{1}{4}$

A média ou esperança de uma variável aleatória X que assume valores no conjunto $\{x_1, x_2, ...\}$ com probabilidades $p(x_i)=p_i$ é denotada por $E(X)$ ou μ e é dada por:

$$E(X)=\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{2}$$

Por sua vez, chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X-\mu)^2$, e seu cálculo é dado por:

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i$$

Um modo alternativo de expressar a variância de uma variável aleatória discreta pode ser dada por:

$$\sigma^2=E(X^2)-E(X)^2$$

E o desvio padrão, é dado por:

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$$

2.2 Caminhante Aleatório

Agora vamos analisar com mais detalhes o experimento proposto acima, i.e, analisar a evolução de um caminhante aleatório. O passeio aleatório mais simples é um caminho unidimensional construído de acordo com as seguintes regras:

- Há um ponto de partida, vamos supor, o ponto 0.
- A distância de um ponto no caminho até o próximo é constante.
- A direção de um ponto no caminho para o próximo é escolhido aleatoriamente, e nenhuma direção é mais provável do que outra.
- Não há memória entre os passos.

Supondo que o caminhante esteja inicialmente na origem, no instante seguinte, ele pode se deslocar para a posição 1, por convenção, para a direita ou para a posição -1, também por convenção, para a esquerda e com a mesma probabilidade. Com um único movimento, temos duas trajetórias possíveis de $0 \to 1$ e $0 \to -1$. Com dois movimentos temos quatro trajetórias possíveis e com três movimentos, teremos oito o trajetórias possíveis. O número de trajetórias possíveis é dado por 2^n onde n é o número de passos e como cada movimento é equiprovável, cada trajetória final possui uma mesma chance de acontecer, dado por $\frac{1}{2^n}$. A pergunta que queremos responder é: Qual é a probalilidade P de um caminhante atingir uma posição x após ter dado n passos?

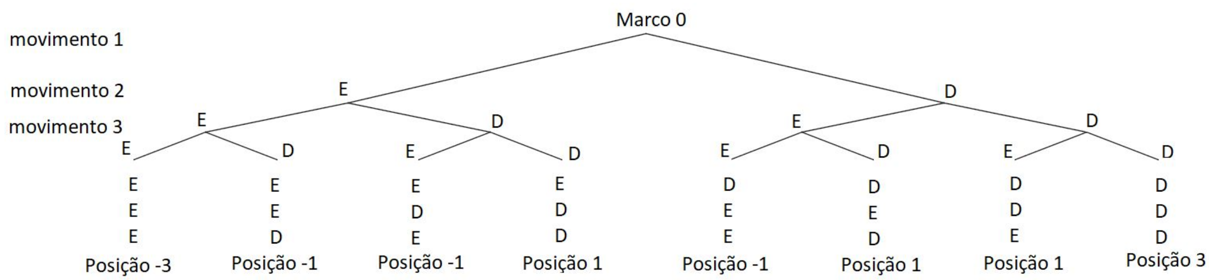

Figura 1: Distribuição do caminhante aleatório com 3 movimentos

Após n passos, sua posição será $x = n_d - n_e$, onde n_d, n_e é o número de passos para direita, esquerda respectivamente. A probabilidade de uma sequência de passos que tenha n_d passos à direita e n_e passos à esquerda é:

$$(\overbrace{p \times p \times \cdots p}^{n_d}) \times (\overbrace{q \times q \times \cdots \times q}^{n_e})) = p^{n_d} q^{n_e}$$

Onde p é a probabilidade de mover para a direita e $q = 1 - p$ a probababilidade de mover para a esquerda.

Observando a figura (1), é possível observar que há várias possibilidades de atingir a posição -1, ou posição 1, ou seja, há diferentes formas de alcançar uma certa posição, no caso da posição -1 temos $\{E, E, D\}$, $\{E, D, E\}$, $\{D, E, E\}$ que corresponde exatamente a uma combinação simples de n. Assim após n passos, o número de sequências possíveis com n_d passos a direita será:

$$\frac{n!}{n_d! n_e!}$$

Após n passos a probabilidade de uma trajetória com n_d passos para a direita e n_e passos para a esquerda é dada por:

$$P_n(n_d) = \frac{n!}{n_d! n_e!} p^{n_d} (1 - p)^{n_e}$$

Como a posição é $x = n_d - n_e$ e o número de passos $n = n_d + n_e$ podemos reescrever a equação anterior em função da posição final x e do número de passos dados. Para n par temos:

$$P_n(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(\frac{n+x}{2})!(\frac{n-x}{2})!} p^{(\frac{n+x}{2})} (1-p)^{(\frac{n-x}{2})}, & \text{se } x \text{ par} \\ 0 & \text{se } x \text{ ímpar} \end{cases} \tag{3}$$

para n ímpar temos uma expressão similar a essa:

$$P_n(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(\frac{n+x}{2})!(\frac{n-x}{2})!} p^{(\frac{n+x}{2})} (1-p)^{(\frac{n-x}{2})}, & \text{se } x \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } x \text{ par} \end{cases} \tag{4}$$

Podemos através das equações acima, calcular a probabilidade do caminhante estar em qualquer posição e usando a expressão (2), tendo em vista que o movimento é equiprovável, i.e. $p = q = \frac{1}{2}$ podemos calcular o valor esperado dado por:

$$E(X) = \mu = \sum_{x=0}^{n} x P(x) = n(p - q)$$

O que resulta em $E(X) = 0$.

Enquanto a variância é dada por:

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=0}^{n} (x-\mu)^2 \times p(x) \quad (5)$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2 \quad (6)$$
$$= 4npq \quad (7)$$

E para o caso do caminhante com movimentos equiprováveis temos $\sigma^2 = 4n\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = n$

Na figura (2), (3) e (4), mostramos o comportamento da distribuição binomial para um caminhante com $p = q = 1/2$, à medida que o número de passos n aumenta. É possível observar que a média é igual a zero (distribuição simétrica) e a forma da distribuição das probabilidades, começa a indicar um padrão característico de uma distribuição Normal ou Gaussiana, como será visto em seção 3.

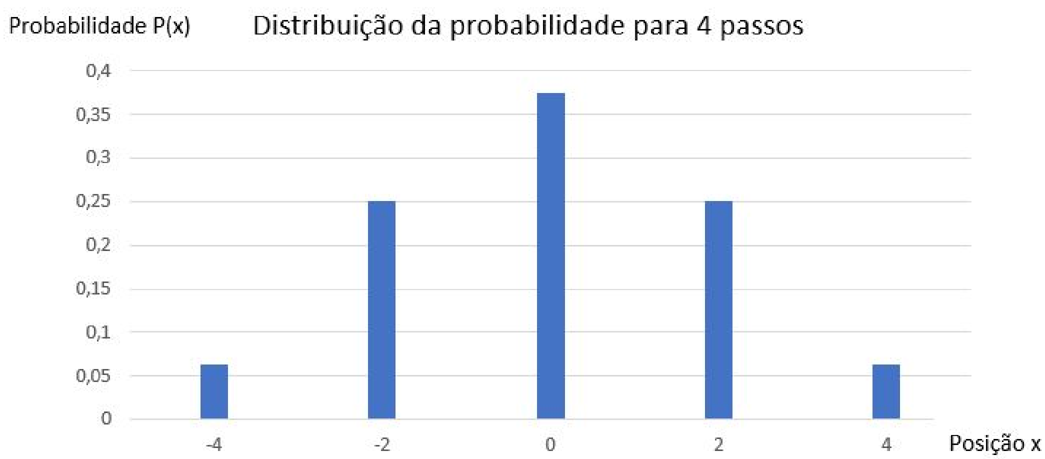

Figura 2: Distribuição de probabilidade para 4 passos

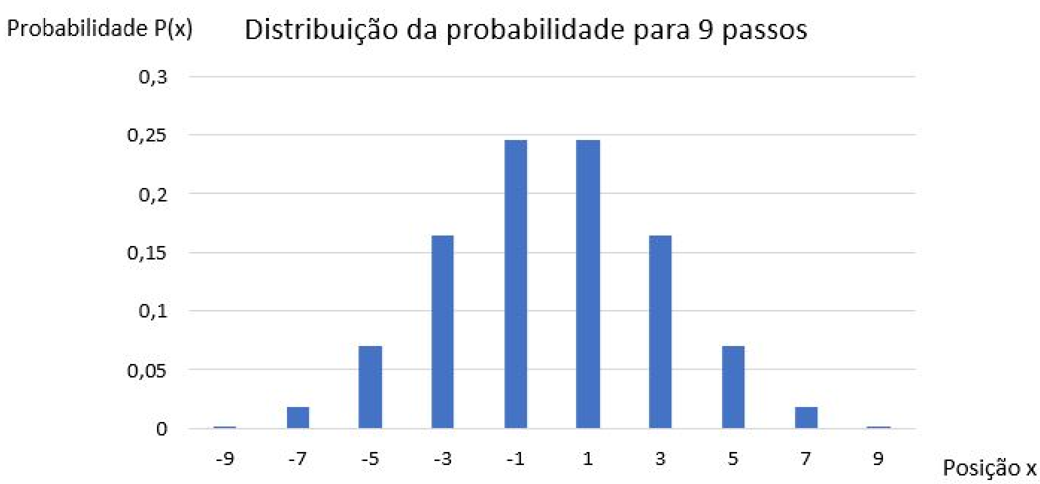

Figura 3: Distribuição de probabilidade para 9 passos

É possível perceber que à medida que n aumenta, a variância também aumenta, consequentemente o desvio padrão também, ou seja, a probabilidade do caminhante estar mais

Figura 4: Distribuição de probabilidade para 100 passos

distante da origem aumenta, o deslocamento médio do caminhante será zero pois é igualmente provável que tenha deslocado para a direita e para a esquerda. No entanto, à medida que n aumenta, existe a probabilidade do caminhante se distanciar cada vez mais da origem, essa tendência é dada pelo desvio padrão, então teremos um deslocamento quadrático médio igual a $\sqrt{n}$ como pode ser visto na figura (5).

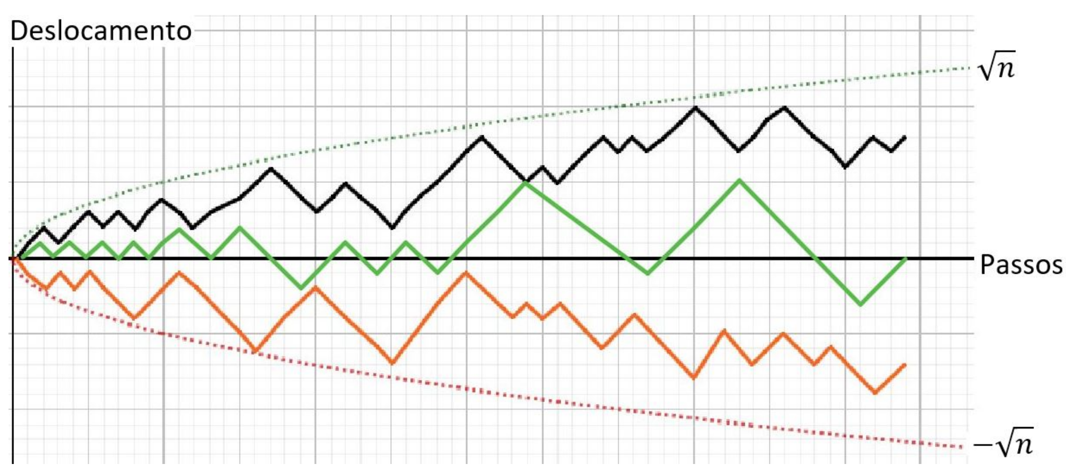

Figura 5: Relação entre posição do caminhante em relação aos passos dados

Vamos analisar de forma intuitiva o que está acontecendo quando o número de passos n aumenta indefinidamente [7]. Considere que o caminhante que no tempo $t = 0$ se encontre na posição $X_0 = 0$ e que a cada tempo Δt move-se uma distância Δx para a direita ou para a esquerda com probabilidade $\frac{1}{2}$. A variância de $< (\Delta x)^2 >$ cresce com a variação Δt, ou seja, o caminhante tem o movimento dado pela raiz quadrada da escala do tempo, então $(\Delta x)^2 = \Delta t$. Chamaremos de X_t a posição do caminhante no instante $t = n\Delta t$. Seja $Y_k = \{+1, -1\}$, $k \in \mathbb{N}$, uma sequência de variáveis aleatórias independentes com

$$f(x) = \begin{cases} P(Y_k = 1) = \frac{1}{2} \text{ para k = 1, 2, } \ldots \\ P(Y_k = -1) = \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

além disso, vamos definir como $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, desse modo, $X_t = S_n \Delta x$.

$$X_t = S_n \Delta x$$

multiplicando numerador e denonimador por $\sqrt{n}$ e assumindo $(\Delta x)^2 = \Delta t$ temos:

$$X_t = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\Delta x = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\sqrt{\Delta t}$$

como $t = n\Delta t$ obtemos:

$$X_t = S_n \Delta x = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{t}$$

Antecipando o Teorema Central do Limite que será visto na seção 4, pode-se deduzir que X_t converge para uma distribuição normal, $X_t \sim N(0,t)$, é possível ainda perceber que se o tamanho dos passos tenderem a zero, quando $n \to \infty$, o processo limite será contínuo como função do tempo t, intuitivamente, ao realizar um salto no intervalo de tempo discreto $\Delta t \simeq \frac{1}{n} \to 0$, o tamanho do salto será de $\Delta X \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, o que ocasionará movimentos passando de discretos para contínuos e este é o princípio do Movimento Browniano.

Assim, pode-se concluir que um caminhante ao realizar sucessivos passos aleatórios, possui a probabilidade de estar em uma determinada posição de acordo com uma distribuição binomial e se o número de passos for suficientemente grande, a distribuição normal.

2.3 Variável Contínua

Nas seções anteriores nos restringimos a variáveis aleatórias discretas, mas em várias situações nos deparamos com variáveis aleatórias contínuas, i.e. uma função X, definida sobre um espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais [5]. Alguns exemplos de variáveis contínuas são: dimensões de peças produzidas por uma máquina, altura de alunos em uma sala, peso de um grupo heterogêneo de indivíduos, entre outros. O valor de uma variável aleatória contínua pode ser pensada como um valor presente em um intervalo ao redor do valor observado, por exemplo, quando dizemos que um valor de peso medido foi de 60kgf, na verdade ele está entre dois valores, por exemplo 59 e 61kgf.

2.4 Função Densidade de Probabilidade - F.D.P.

Imagine que uma pesquisa consista em medir a altura de uma amostra de adultos e registrar as medidas encontradas. Nesse caso, a variável aleatória X será o comprimento encontrado e essa medida, poderá assumir uma grande variedade de valores dentro de um intervalo, portanto será considerada uma variável contínua.

Ao tentar prever a probabilidade de encontrar uma altura específica dentre a infinidade de valores possíveis de comprimentos, retornaremos com a chance nula. Portanto, em casos envolvendo variáveis contínuas, calcula-se a probabilidade para valores em intervalos da reta real que são determinados por uma função $f(x)$ denominada função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X.

A função densidade de probabilidade deve satisfazer as propriedades:

1. $f(x) \geq 0; \forall\, x \in \mathbb{R}$. As probabilidades de um evento qualquer não podem ser negativas.

2. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$. A probabilidade de uma variável aleatória contida em um intervalo é definida como sendo a área sob a curva da f.d.p. naquele intervalo.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x)\;dx\;=\;1$. A probalilidade de todo o espaço amostral é igual a 1.

A função

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

é conhecida com distribuição normal e é um exemplo de uma densidade de probabilidade para uma variável aleatória contínua.

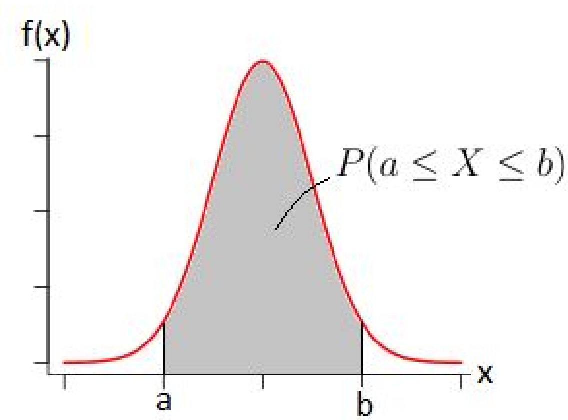

Figura 6: Função densidade de probabilidade

Observe que pela figura acima, a probabilidade de um evento se encontra entre intervalos e não mais em um ponto específico como acontecia com variáveis discretas.

2.5 Função Densidade de Probabilidade Acumulada - F.D.A.

Enquanto a função densidade de probabilidade associa cada intervalo da variável aleatória X à sua probabilidade de ocorrência P(x) a função densidade de probabilidade acumulada é uma função que a cada número real $x \in \mathbb{R}$ associa o valor

$$F(x) = P\,(X \leq x) \in [0, 1]$$

A FDA é dada pela região abaixo da curva integrando de $-\infty$ até x, uma vez que o propósito é acumular todas as probabilidades anteriores até x.

A função densidadede de probabilidade acumulada F(x), possui as seguintes características:

1ª) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,

2ª) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$,

3ª) F(x) é contínua e não descrescente.

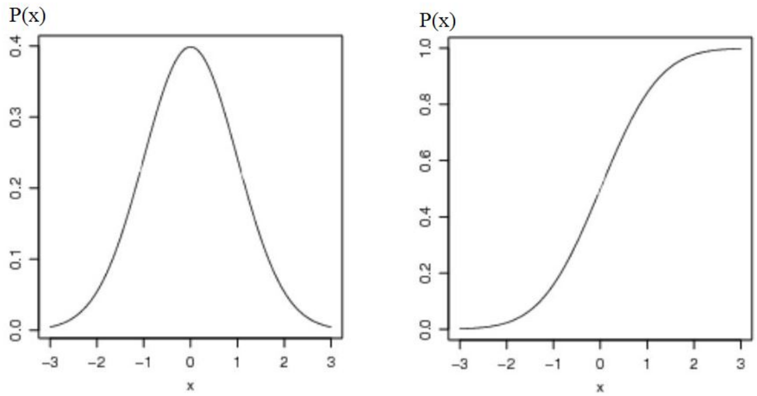

Figura 7: Função densidade de probabilidade à esquerda e a função densidade de probabilidade acumulada à direita, ambas referentes a uma distribuição normal padrão

3 MODELO NORMAL OU GAUSSIANO

A distribuição normal, também conhecida como distribuição de Gauss ou distribuição gaussiana, é uma curva simétrica em torno de um ponto médio que apresenta como característica, um formato de sino. A curva normal representa o comportamento de diversos processos e muitos fenômenos comuns, como por exemplo, altura ou peso de uma população, a pressão sanguínea de um grupo de pessoas, a tendência em lançamentos de dados e moedas entre outros e devido a sua observação tão comum em eventos naturais, nos primórdios de seu estudo, muitos acreditavam que todos os fenêmenos deveriam seguir o mesmo modelo, o que levou a adoção do nome Normal e muito frequentemente, quando alguma observação fugia ao padrão, era comum suspeitar dos dados. Hoje sabe-se que há outras distribuições para variadas aplicações.

Além do fato de representar muitos fenômenos comuns ao cotidiano, uma distribuição normal possui grande campo de estudo pelo fato de que as médias extraídas de qualquer distribuição, mesmo não sendo normal, tendem a apresentar comportamento normal à medida que o tamanho da amostra aumenta, algo que veremos em seção posterior.

Sempre que uma variável aleatória contínua X com os parâmetros média (μ) e desvio padrão (σ) é dada pela função densidade de probalbilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

para -$\infty < x < \infty$, dizemos que ela tem distribuição normal.

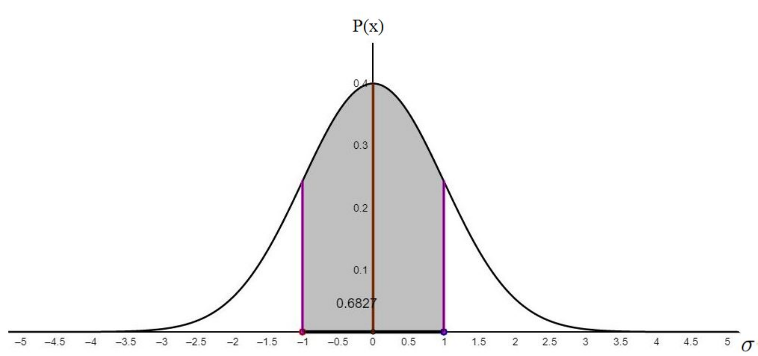

Figura 8: Distribuição normal construída com o auxílio do Software Geogebra $\mu = 0$ e $\sigma = 1$

Características de uma distribuição normal:

- A função $f(x)$ é simétrica em relação à $x = \mu$.
- A função $f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\,\infty$,
- O maior valor de $f(x)$ acontece em $x = \mu$,

É comum usar uma notação reduzida:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

ao se referir a uma distribuição normal.

Outro detalhe importante de ser mencionado é que em relação ao formato de uma distribuição normal, tudo dependerá dos parâmetros μ (média) e σ (desvio padrão). A variação de tais parâmetros, causará um achamatento e/ou translação da curva, porém mesmo com essas variações, o formato continuará assemelhando-se ao formato de um sino e ainda simétrica em relação à média (μ). Veja alguns gráficos com a variações dos parâmetros.

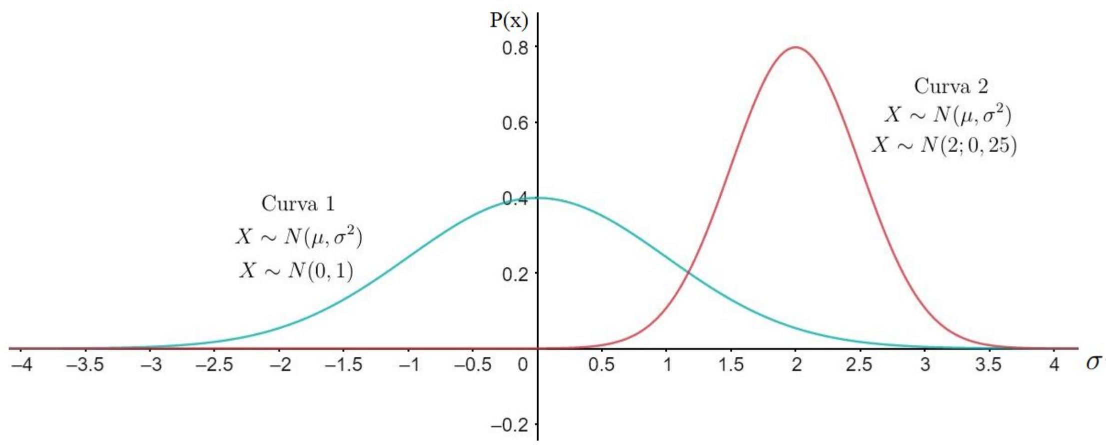

Figura 9: Distribuição normal construida com o auxílio do Software Geogebra Curva 1: $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ e Curva 2: $\mu = 2$ e $\sigma^2 = 0{,}25$

Observando a representação das duas curvas, é possível perceber que a média (μ) indica exatamente o centro de cada distribuição enquando o desvio padrão (σ) indica a dispersão dos valores do conjundo em relação ao centro, ou seja, a curva 1 cujo desvio padrão é $\sigma = 1$ está mais achatada do que a curva 2 cujo desvio padrão é $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ é $\sigma = 0, 5$.

3.1 Cálculo de probabilidade envolvendo distribuição Normal

O cálculo da probabilidade envolvendo uma distribuição normal se baseia em resolver a integral da função densidade de probabilidade no intervalo desejado e é equivalente à área abaixo da curva de $f(x)$.

$$P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Importante observar que no cálculo da probabilidade de um intervalo, não há diferença entre ser aberto ou fechado uma vez que a probabilidade em um ponto específico em uma variável aleatória contínua ser nula.

Uma distribuição normal apresenta algumas particularidades:

Retomando o caminhante aleatório simples cujo movimento é equiprovável, temos $\mu = 0$ e $\sigma^2 = n$, podemos calcular através da f.d.p:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

a probabilidade do caminhante estar em uma posição qualquer dentro de um certo intervalo.

- Aproximadamente 68% da área da curva está localizada entre o valor de $\mu \pm \sigma$,

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx = 0,6826$$

- Aproximadamente 95% da área da curva está localizada entre o valor de $\mu \pm 2\sigma$,

- Aproximadamente 99,7% da área da curva está localizada entre o valor de $\mu \pm 3\sigma$,

O cálculo da integral da função densidade de probabilidade é feita por aproximação usando o métodos numéricos visto que ela não possui uma integral elementar. Porém para efeitos práticos, não é necessário calcular a integral, bastando utilizar valores já listados em tabelas. Uma tabela possui valores das integrais para vários intervalos da variável $z \sim$ N (0,1).

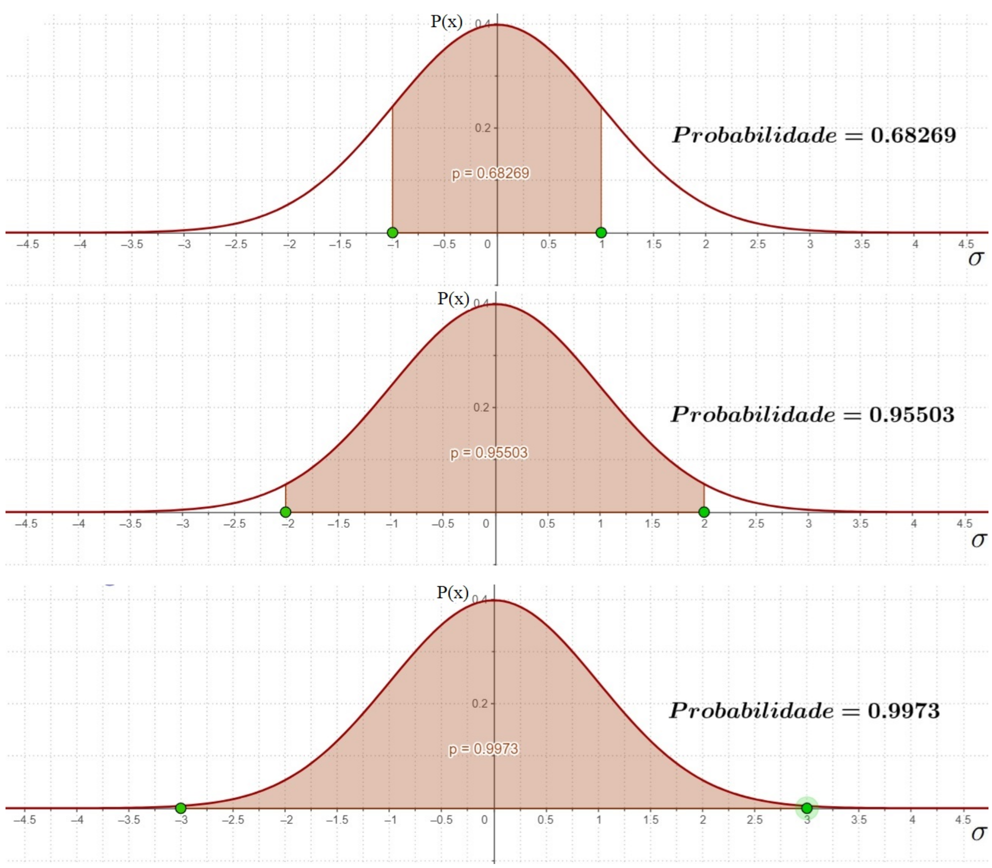

Figura 10: Distribuição normal X$\sim$ N (0,1), área sob os intervalos $\pm\ \sigma$, $\pm\ 2\sigma$ e $\pm\ 3\sigma$

É fácil perceber pelos gráficos acima, que a maior parte da área sob a curva (68%) está compreendida entre o intervalo de $\pm\ \sigma$ em torno da média μ. E da mesma forma, também é possível verificar que praticamente toda a área está no intervalo $\mu \pm 3\sigma$. E com a ajuda da tabela, também é possível perceber o quão raro é a probaliliade de ocorrência de eventos raros em uma distribuição normal quando a variável x se encontra muito afastada da proximidade da média, como por exemplo, a ocorrência de um evento afastado $\pm\ 3,62\sigma$ da média, teria cerca de 0,02% de chance de ocorrer.

4 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE - TCL

Na seção destinada ao Caminhante aleatório, nas figuras (2), (3) e (4) é possível perceber o comportamento da distribuição binomial quando o número de passos n aumenta, o histograma gerado se aproxima cada vez mais da curva normal. Se o número de passos do caminhante fosse ainda maior o histograma seria ainda mais aproximado da curva normal e isso se deve ao Teorema Central do Limite.

O Teorema Central do Limite descreve como a distribuição das médias de uma amostra aleatória de uma população com variância finita se comportam quando o tamanho amostral é suficientemente grande. O teorema aplica-se independentemente da forma da distribuição da população.

Em sua forma mais conhecida, o TCL é anunciado como:

Teorema 4.1 (Teorema Central do Limite [8]) *Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, cada uma com média μ e variância σ^2 finita e positiva. Então, a distribuição de:*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to Z_n \sim N(0,1) \text{ quando } n \to \infty$$

Isto é, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \text{ quando } n \to \infty \tag{8}$$

A utilidade do uso do Teorema do Limite Central reside no fato de que se tomarmos repetidamente amostras aleatórias e independentes em uma distribuição qualquer, com n amostras, se n for suficientemente grande, a distribuição das médias amostrais se aproximará de uma distribuição normal. Assim, é possível prever comportamentos de fenômenos do cotidiano conhecendo apenas os parâmetros μ, σ e n.

Esse teorema é a explicação por trás das figuras (2), (3) e (4) que mostram a distribuição da probabilidade da posição do caminhante aleatório. No primeiro instante, a probabilidade de ir para posição $+1$ ou -1 é quase certamente a mesma e após 4, 9 e 100 passos percebemos que a distribuição se aproxima de uma normal, como previsto pelo teorema do Limite Central.

4.1 Aplicações do Teorema Central do Limite

O Teorema Central do Limite se refere ao comportamento da distribuição das médias amostrais dada por $\bar{X}_n$ à medida que o tamanho n da amostra cresce, independentemente de qual seja a distribuição inicial dos X_i. O principal objetivo agora é mostrar que, através do Teorema Central do Limite, podemos aproximar essa média por uma distribuição normal.

Na seção (2.2) foi apresentado o conceito de caminhante aleatório simples em uma dimensão. Vimos que a probabilidade do caminhante estar em uma posição qualquer $x = n_d - n_e$, sabendo que número de passos $n = n_d + n_e$ é dada pela equação:

$$P_n(x) = \frac{n!}{(\frac{n+x}{2})!(\frac{n-x}{2})!} p^{(\frac{n+x}{2})} q^{(\frac{n-x}{2})}$$

Agora suponha que se queira calcular a probabilidade da posição do caminhante estar entre a posição 12 e 16 após 30 passos dados para $p = q = 1/2$:

$$P_{30}(12 \leq x \leq 16) = P(x = 12) + P(x = 14) + P(x = 16)$$

Para realizar essa conta temos que calcular diversos fatoriais para encontrar $P_{30}(12) = 0,01332$, $P_{30}(14) = 0,00545$ e $P_{30}(16) = 0,00189$

Assim a probabilidade do caminhante estar entre a posição 12 e 16 em 30 passos será:

$$P_{30}(12 < x < 16) = 0,02066$$

Observe que para valores pequenos de n, o cálculo da probabilidade é relativamente simples, porém a medida que o valor n aumenta, o cálculo do valor de $n!$ e a potência de p e q se tornam bastante trabalhosos sem o auxílio de métodos computacionais.

Com o auxílio do Teorema Central do Limite, basta que tenhamos a média μ e a variância σ^2 para determinar uma estimativa de probabilidade.

$$E(X) = \mu = n(p - q) = 0$$

e

$$Var(X) = \sigma^2 = 4npq = 30$$

Como queremos descobrir a probabilidade do caminhante estar

$$P_{30}(12 \leq x \leq 16)$$

Então pelo TCL temos:

$$P_{30}(12 < x < 16) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{12/\sqrt{30}}^{16/\sqrt{30}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

E ao calcular por métodos numéricos ou através de consulta de tabelas normal padronizadas, encontramos:

$$P_{30}(12 < x < 16) = 0,017$$

Que é um valor bastante razoável, visto que a dificuldade de tabalhar com binomiais é eliminada.

5 VOOS DE LÉVY

Apesar do modelo normal estudado a partir da seção 3 possuir uma grande aplicação em situações do cotidiano, pode se mostrar insuficiente para descrição mais precisa de eventos físicos cuja chance e ocorrência sejam raras, uma vez que em uma distribuição normal tais eventos assumirão valor que tenderão a zero, enquanto na verdade poderão apresentar uma probabilidade diferente de zero. Estudos empíricos nos mostram que os processos de Lévy descrevem de forma mais realística alguns tipos de eventos por permitir caudas pesadas e apresentar assimetria quando comparadas com uma distribuição normal.

5.1 Processo Estocástico

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que evolui no tempo: preço de uma ação, cotação de moedas, temperatura em uma região. Formalmente, pode ser definido por uma lei de probabilidade para a evolução da variável X ao longo de um período de tempo t. De modo que $t_1 < t_2 < t_3$ e assim, sucessivamente, obtendo a probabilidade de que os correspondentes X_1, X_2, X_3... ou seja, no tempo t_1 observa-se o valor X_1, no tempo t_2 observa-se o valor X_2 e assim sucessivamente, portanto:

$$X = \{X_t | t \in T\}$$

é definido como uma coleção de variáveis aleatórias { X_t } indexadas por um parâmetro t pertencente a um conjunto T. X_t representa uma característica mensurável de interesse no tempo t, por exemplo, posição de um caminhante aleatório no tempo t_i.

Exemplo 1: Seja X = { X_t | t $\geq$ 0 }, onde X_t = Preço de uma ação no instante t. No caso, $t \in [0,\infty)$, $X_t \in [0,\infty)$.

Exemplo 2: Seja X = { X_n | n $\geq$ 0} onde X_n = Número de ligações atendidas no dia n, em um escritório. Aqui, n = 0, 1, 2, ... e $X_n \in \mathbb{N}$.

Na figura a seguir, temos a simulação de 5 trajetórias do movimento Browniano no intervalo $[0, 1]$. Todos as 5 trajetórias são formuladas de acordo com as mesmas regras, porém cada uma delas, apresentou um trajeto diferente.

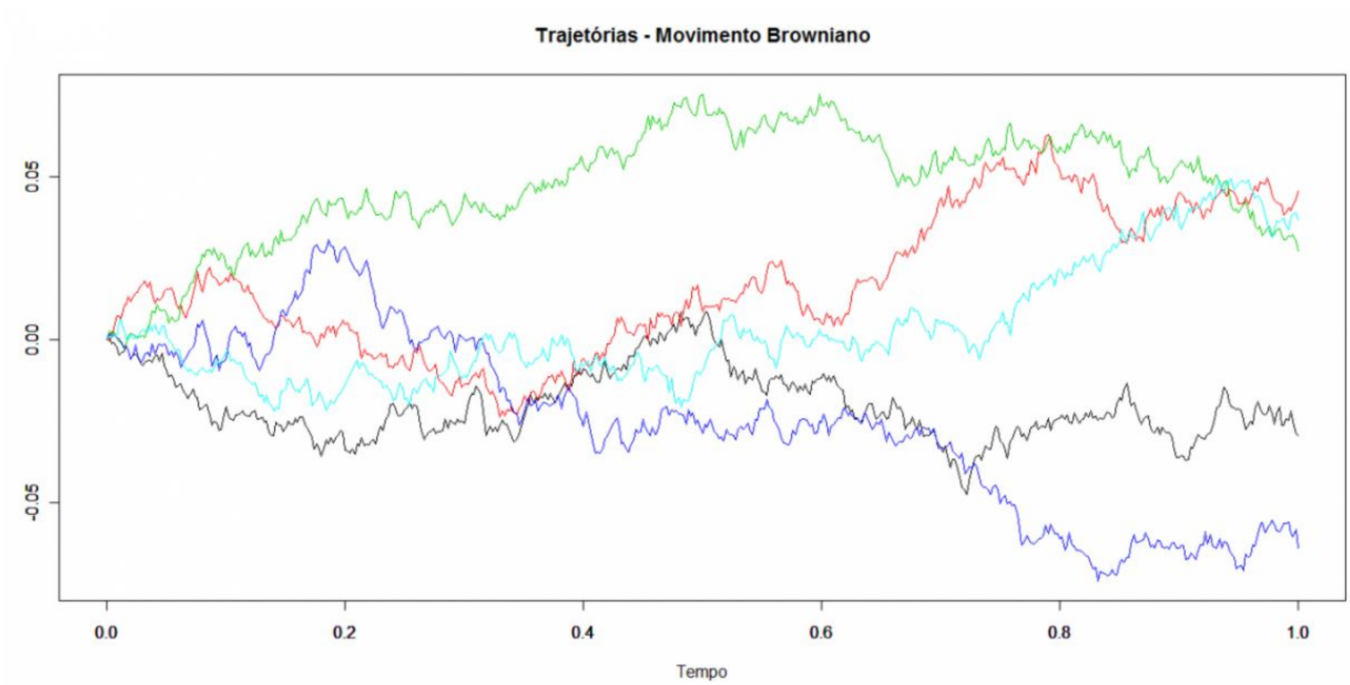

Figura 11: Trajetória de um movimento Browniano ao longo do tempo

O processo estocástico pode ser classificado em 4 categorias: Tempo discreto e espaço de estado discreto, se ambos t e $X_t \in \mathbb{N}$, podemos citar como exemplo o número de atendimento de telefonemas a cada hora. Tempo contínuo e espaço de estado contínuo,se ambos t e $X_t \in \mathbb{R}$, visto no estudo do Movimento Browniano que é o limite de uma distribuição binomial com tempo e passos contínuos. Tempo discreto e espaço de estado contínuo, se o $t \in \mathbb{N}$ e a imagem $X_t \in \mathbb{R}$, encontrado no estudo de séries temporais e por último, Tempo contínuo e espaço de estado discreto, se $t \in \mathbb{R}$ e $X_t \in \mathbb{N}$, como exemplo no estudo de população de bactérias a cada instante t do tempo.

5.2 Processo de Lévy

O Processo de Lévy, é um processo estocástico que contém incrementos independentes e estacionários, ou seja, ele representa o movimento de um ponto cujos deslocamentos sucessivos são intervalos aleatórios e independentes, e estatisticamente idênticos em diferentes horários do mesmo comprimento.

Um exemplo elementar de processo de Lévy, é o movimento Browniano visto na subseção sobre Caminhantes Aleatórios.

Mais precisamente um processo estocástico X = $\{ X_t \mid \text{t} \geq 0 \}$ é denominado processo de Lévy se satisfaz as seguintes condições:

- $X_0 = 0$ quase certamente.
- Independência dos incrementos: Para qualquer $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, X_{t_n} - $X_{t_{n-1}}$ são independentes.

  Um processo estocástico de tempo contínuo atribui uma variável aleatória X_t para cada ponto t ≥ 0 no tempo. Os incrementos de tal processo são as diferenças X_{t_n} - $X_{t_{n-1}}$ entre os seus valores em momentos diferentes $t_{n-1} < t_n$. Um processo é independente quando os incrementos X_{t_n} - $X_{t_{n-1}}$ e $X_u - X_{u-1}$ são variáveis aleatórias independentes sempre que os dois intervalos de tempo não se sobrepõem.
- Incrementos estacionários: Para qualquer $t_{n-1} < t_n$, X_{t_n} - $X_{t_{n-1}}$ é igual em distribuição de $X_{t_{n-2}}$ - $X_{t_{n-3}}$.

  Considerar um incremento como estacionário significa que a distribuição de probabilidade de qualquer incremento X_{t_n} - $X_{t_{n-1}}$ depende apenas do comprimento $t_n - t_{n-1}$ do intervalo de tempo, incrementos em intervalos de tempo longos são igualmente distribuídos de forma idêntica.
- Continuidade em probabilidade: Para qualquer $\epsilon > 0$ e $t \geq$ que considera que $\lim_{h \to 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0$.

Já foi mencionado anteriormente que uma distribuição qualquer com média bem definida e variância finita, tende a uma distribuição normal, e esta, devido à sua natureza, apresenta valores concentrados em torno da sua média, ou seja, os valores de $|x| < \sigma$, da parte central da distribuição, possuem maior probabilidade de ocorrência em detrimento da probalilidade de ocorrência nas suas caudas, e esse fato, apresenta uma limitação para a determinação de informações relativas aos valores extremos.

A tabela abaixo apresenta a probabilidade de um evento esperado ocorrer fora do intervado $\mu \pm n\sigma$. Por exemplo, sabe-se que a probabilidade de um evento esperado ocorrer dentro do intervalo de $\mu \pm 1\sigma$ é de 0,68269, assim, a chance de ocorrência fora desse intervalo é de cerca de 0,317, ou seja, há uma chance ocorrência de um evento esperada de 1 vez a cada 3 eventos, supondo cada evento como 1 dia, podemos dizer que a ocorrência aproximada é de 1 vez a cada 3 dias. O mesmo ocorre quando n e igual a 2, ou seja $\mu \pm 2\sigma$, a probabilidade de ocorrência fora desse intervalo é de 0,045 e ocorrerá 1 vez a cada 22 eventos ou aproximadamente 22 dias.

Tabela 1: Probabilidade P(|X| ≥ n), ser maior ou igual a n vezes o desvio padrão

n	P(|X| ≥ n)	Eventos
1	0,317	1 vez a cada 3 eventos
2	0,045	1 vez a cada 22 eventos
3	0,0027	1 vez a cada 370 eventos
4	$6,3 \times 10^{-5}$	1 vez a cada 15.787 eventos

Porém, em certo momento, quando os valores se afastam muito da média, a probabilidade se torna cada vez menor como por exemplo, valores fora do intervalo de $\mu \pm 4\sigma$, cuja chance de ocorrência seria de apenas 1 vez a cada 15.787 eventos.

E o que aconteceria se uma distribuição tivesse grandes valores para a variância ou até mesmo uma variância infinita?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \to \infty$$

Esse foi o questionamento levantado por Paul Lévy em 1925 quando generalizou o Teorema Central do Limite desconsiderando a necessidade da variância ser finita. Em seus trabalhos ele mostrou que uma distribuição normal ou gaussiana é um caso especial e uma categoria mais geral chamada de distribuição Estáveis de Lévy .

Uma expressão em termos de funções elementares para a densidade de probabilidade, também conhecida como Alfa-Estável (AE), só é encontrada em três tipos especiais:

$$X \sim AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, 1)$$

- Distribuição normal: para $\alpha = 2$ e $\beta = 0$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = AE(2, 0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \mu, 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

- Distribuição de Cauchy: para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$

$$X \sim Cauchy(\delta, \gamma) = AE(1, 0, \gamma, \delta, 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi.(1 + x^2)}$$

- Distribuição de Lévy: para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\delta = 1$

$$X \sim Levy(\delta, \gamma) = AE(\frac{1}{2}, 1, \gamma, \delta, 1)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \delta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-\gamma}{2(x-\delta)}}, \delta < x < \infty$$

No caso geral uma distribuição estável descrita por sua função característica:

$$ln\phi(t) = lnE(e^{itx}) = \begin{cases} \left(i\delta t - \gamma|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta tan\frac{\pi\alpha}{2}sign(t)\right]\right) & se \;\; \alpha \neq 1 \\ \left(i\delta t - \gamma|t|^{\alpha}\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}\ln|t|sign(t)\right]\right) & se \;\; \alpha = 1 \end{cases}$$

e

$$sign(t) = \begin{cases} -1 \ se \ t < 0 \\ 0 \ se \ t = 0 \\ 1 \ se \ t > 0 \end{cases}$$

E como visto um pouco acima, a partir da função característica, e possível formular uma forma fechada para as três distribuições: Normal, Cauchy e Lévy.

Os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, e \ \delta$ tem suas definições a seguir:

- $\alpha \in (0, 2]$, chamado de expoente característico ou índice de estabilidade. Expoente característico, $0 < \alpha \leq 2$, no caso da distribuição de Lévy, α=$\frac{1}{2}$, é um número que determina o índice de cauda, quanto menor o valor de α, mais pesada será a cauda com picos maiores. Comparada com a distribuição normal a massa de probabilidade nas abas é tanto maior quanto menor for o valor de α . A variância de uma distribuição será finita quando o caso limite de α for 2 . Quando $\alpha < 2$, os momentos absolutos de ordem inferior a α existem, enquanto que os momentos de ordem superior ou igual a α não existem. Portanto, a média existe sempre desde que $\alpha > 1$.

- $\beta \in [-1, 1]$ O parâmetro β é um índice de assimetria, em distribuição simétrica $\beta = 0$, é assimétrica positiva quando $\beta > 0$ e é assimétrica negativa quando $\beta < 0$ (o grau de assimetria é tanto maior quanto menor for o valor de β).

- $\gamma \in (0, +\infty)$ O parâmetro de escala, é positivo e mede a dispersão ou a escala da distribuição. É análogo à variância de uma distribuição normal.

- $\delta \in \mathbb{R}$ é um número real qualquer e pode ser visto como uma medida de posição. É análogo á média de uma distribuição. A medida que δ aumenta, a distribuição se desloca para a direita.

Uma distribuição de Lévy, ao contrário de uma distribuição normal em que apresenta simetria e um formato característico de um sino, possui um grau de curtose maior, possui uma forma leptocúrtica, o que faz com que apresente um volume de dados muito maior ao longo da cauda. Além disso, podem permitir assimetria dependendo das variáveis que sejam tomadas. Outra característica que a difere de uma normal é o fato de possuir uma variância infinita. O formato das caudas exibe um comportamento de uma Lei de Potência [4], aproximadamente do tipo

$$P(x) \sim C|x|^{-(1+\alpha)},$$

quando

$$x \longmapsto \infty, 0 < \alpha < 2,$$

se $\alpha < 2$, terá uma cauda mais pesada e mais precisamente no caso da distribuição de Lévy, terá $\alpha = \frac{1}{2}$.

A tabela a seguir [6], traz um comparativo entre a probabilidade de um evento estar acima de n desvios padrão ou n parâmetros de escala em uma distribuição normal e uma distibuição Lévy respectivamente.

Tabela 2: Probabilidade de ocorrência de um evento acima de n desvios padrão ou n parâmetros de escala

n	Normal	Lévy
0	0,5	aprox. 1
1	0,1587	0,6827
2	0,0228	0,5205
3	0,001347	0,4363
4	0,00003167	0,3829
5	0,0000002866	0,3453

- Distribuição normal: para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$$

- Distribuição de Lévy: para $\delta = 0$ e $\gamma = 1$.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2(x)}}$$

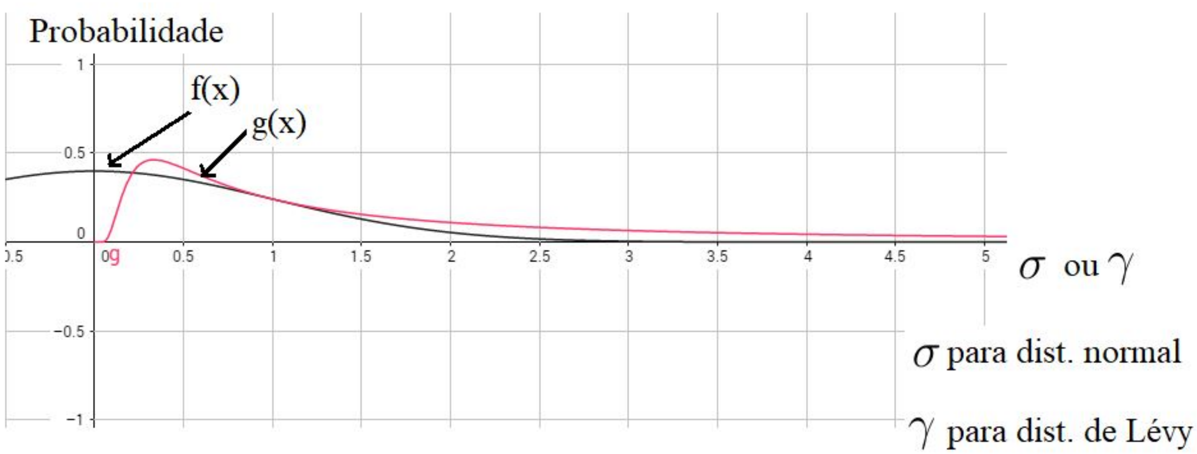

Figura 12: FDP da Normal com média 0 e desvio padrão 1 e FDP da distribuição de Lévy com parâmetro de escala 1 e medida de posição igual a 0

Na tabela (2) temos n representando desvios padrão (σ) no caso da distribuição normal ou parâmetros de escala (γ) no caso da distribuição de Lévy, em ambos os casos, μ e δ são iguais a 0. Quando $n = 0$ (acima de 0 desvios padrão), significa que a chance de um evento ocorrer exatamente acima da média na distribuição normal é de $0,5$, enquanto na distribuição de Lévy é de aproximadamente 1, quando $n = 1$, temos a chance do evento ocorrer acima de 1 desvio padrão em relação à média na distribuição normal igual à $0,1587$, enquanto na distribuição de Lévy a chance de ocorrência igual à $0,6827$, da mesma forma, ao tomar $n = 4$, significa que a chance do evento ocorrer acima de 4 desvios padrão em relação à média na distribuição normal é extremamente reduzida, apenas $0,00003167$ enquanto na distribuição de Lévy é relativamente fácil $0,3829$.

Vejamos algumas representações do formato das distribuições ao variar os parâmetros γ e δ na Distribuição de Lévy $X \sim Levy(\delta, \gamma)$

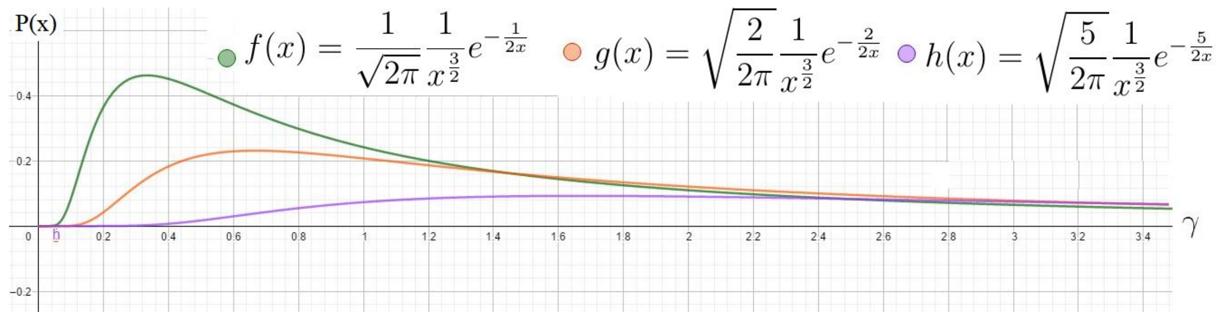

Figura 13: Densidade de probalibidade: FDP de Lévy mantendo $\delta = 0$ e $f(x)$ com $\gamma = 1$, $g(x)$ com $\gamma = 2$ e $h(x)$ com $\gamma = 5$

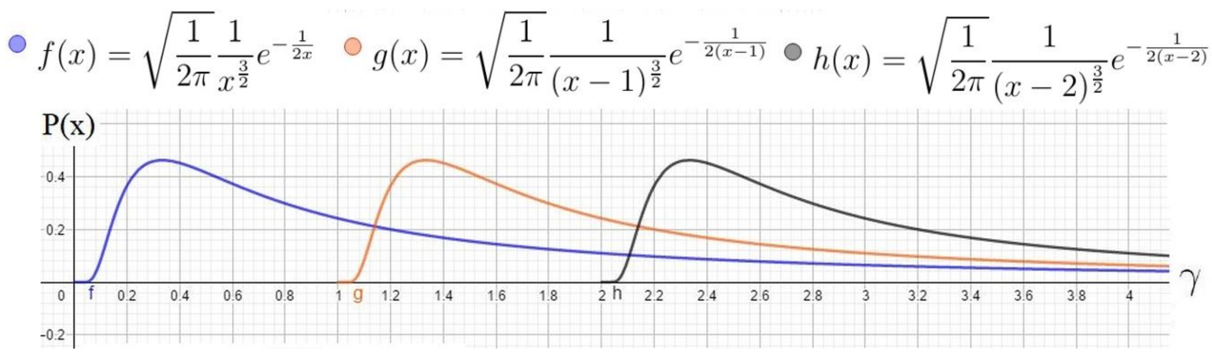

Figura 14: Densidade de probalibidade: FDP de Lévy mantendo $\gamma = 1$, $f(x)$ com $\delta = 0$, $g(x)$ com $\delta = 1$ e $h(x)$ com $\delta = 2$

É possível perceber claramente nos dois gráficos acima, o quanto a cauda é mais longa quando comparada com uma distribuição gaussiana.

5.3 Voos de Lévy

Os voos de Lévy, representam uma classe de processos aleatórios não gaussianos cujos incrementos estacionários são distribuídos de acordo com uma distribuição estável de Lévy. Os voos de Lévy são processos estocásticos cujos passos individuais têm comprimentos distribuídos com a função de densidade de probabilidade $P(x)$ decaindo em uma cauda pesada de acordo com

$$P(x) \sim C|x|^{-(1+\alpha)},$$

Devido à divergência de sua variância, passos extremamente longos podem ocorrer, e trajetórias típicas são auto-similares, em todas as escalas mostrando grupos de passos mais curtos, intercalados por longos trajetos.

Na imagem seguinte (15) é mostrado um comparativo entre o movimento Browniano e um voo de Lévy, ambos com o mesmo número de movimentos, $n = 7000$. De forma similar à figura, na sessão (6) será apresentado um jogo em que serão comparados movimentos de 2 tipos de caminhantes, um caminhante simples, em que a cada instante pode se movimentar em 4 direções distintas em igual probabilidade e com o mesmo tamanho de passo, enquanto o outro caminhante adaptado que simula um movimento com características dos Voos de Lévy, podendo se movimentar em 4 direções porém, o tamanho dos passos obedecerá uma regra diferente em que na maior parte das vezes, serão curtos e em algumas raras ocasiões, poderão ocorrer passos muito grandes, algo impossível no caminhante simples.

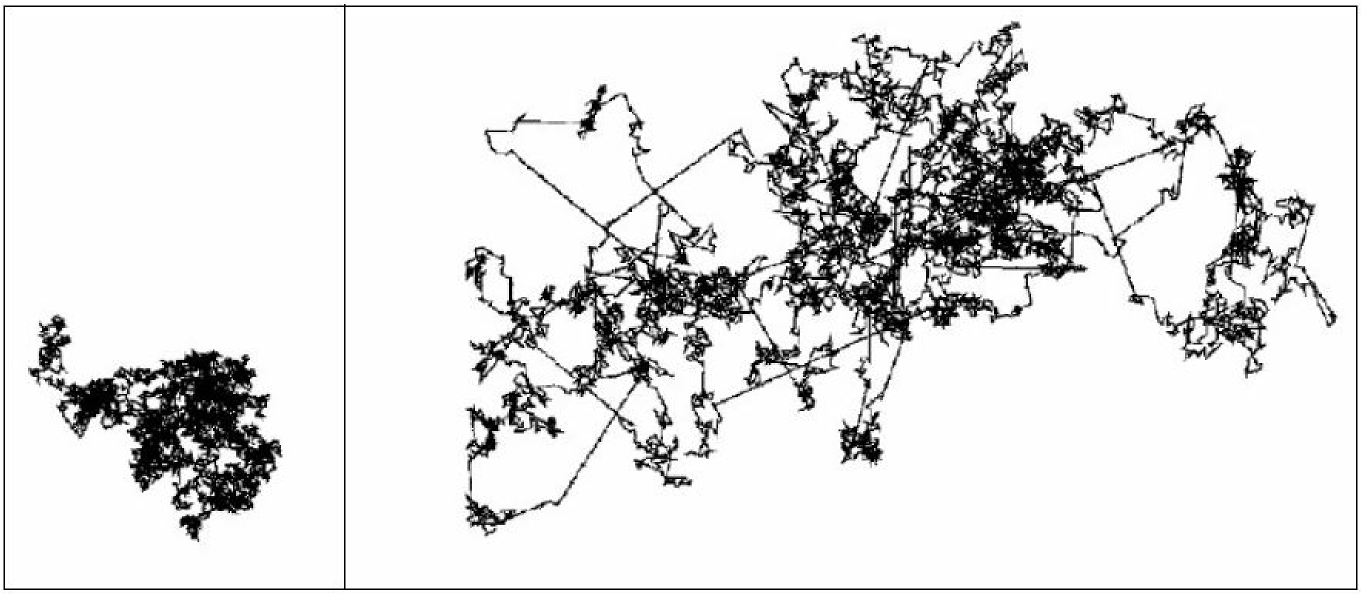

Figura 15: Comparativo entre trajetória Gaussiana à esquerda e uma trajetória de Lévy à direita, ambas com 7000 movimentos [2]

A construção de um voo de Lévy pode ser executada seguindo a seguinte estratégia:

- O caminhante dá saltos ou passos onde o tamanho é retirado de uma distribuição cuja variância é infinita. No caso de um Voo de Lévy, o tamanho do salto é retirado da distribuição de Lévy

$$X \sim Levy(\delta, \gamma) = AE(\frac{1}{2}, 1, \gamma, \delta, 1)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2.\pi}}.\frac{1}{(x-\delta)^{\frac{3}{2}}}.e^{\frac{-\gamma}{2(x-\delta)}}, \delta < x < \infty,$$

- O tempo de espera para realização do salto seguinte é retirado de uma distribuição cuja variância seja finita, podendo ser utilizado qualquer tipo de distribuição, desde que a condição de ter variância finita seja cumprida, por exemplo, um salto a cada 1 seg.

6 VOOS DE LÉVY E UMA PROPOSTA PARA O USO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO MÉDIO

Esta seção destina-se a apresentar algumas propostas de atividades a serem aplicadas no Ensino Médio. Estas atividades vão buscar o conceito intuitivo que os alunos possuem acerca de probabilidade e estatística, o principal objetivo desta seção é mostrar que esses dois conceitos não estão apenas nos estudantes ou profissionais das áreas afins como matemática e estatística, encontra-se nas pessoas, independentemente de seu grau de escolaridade ou área de atuação, isso porque estes conceitos estão no mundo em que vivemos. Infelizmente, muitas pessoas não se deparam ou não são estimuladas a refletir nestas situações que exigem tal compreensão e por isso julgam como dispensáveis.

Segundo a proposta curricular da Secretaria de Educação para o Ensino Médio, em conjunto com o PCNEM (BRASIL, 1999), o aluno, no dever de suas atribuições, deve ser capaz de utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação com o intuito de avaliar propostas de intervenção na realidade que o cerca. Vamos apresentar duas atividades em sala de aula onde os alunos colocarão em prática seus conhecimentos, mostrando o quanto aprenderam acerca do conteúdo que estão estudando agora ou que já estudaram. A primeira atividade relaciona conceitos de probabilidade. A segunda atividade relaciona o conceito de média ou valor esperado enquanto a terceira, se destina a construir dois trajetos, um seguindo movimento gaussiano através do caminhante aleatório e outro na tentativa de apresentar um movimento não gaussiano em que passos mais longos do que o esperado podem acontecer.

Atividade 01:

Separar a sala em 2 grupos os quais chamaremos de grupo A e grupo B. Ao grupo A será dado um dado de 4 faces numerado de 1 a 4 e uma folha A3 quadriculada e ao grupo B, será entregue 1 dado de 4 faces numerado de 1 a 4, uma roleta identificada como tamanho de passo e uma folha A3 quadriculada.

Nesta atividade o professor questionará aos alunos:

- Ω: Espaço amostral no lançamento dos dados de 4 faces.
- E: Cada evento do espaço amostral (Ω). Questionar alguns eventos possíveis em cada grupo.
- $P(E)$: Probabilidade de um evento acontecer.
- $n(E)$: número de vezes que um evento E ocorre nas primeiras n repetições do experimento.

Algumas perguntas pertinentes para o grupo A:

- Qual é o espaço amostral para uma única jogada de dados?
- Qual a probabilidade de sair cada face em uma jogada?
- Qual a probabilidade de sair par e ímpar em uma única jogada?
- E se o dado for jogado 2, 3 ou mais vezes, qual seria o espaço amostral em cada caso?
- Qual seria a probabilidade de ocorrer digamos, face 1, 2, e 3, nesta ordem, no lançamento do dado 3 vezes seguidas?

Algumas perguntas pertinentes para o grupo B:

- Qual é o espaço amostral para uma única jogada de dados?
- Qual a probabilidade de sair cada face em uma jogada?
- Qual a probabilidade de sair par e ímpar em uma única jogada?
- E se o dado for jogado 2, 3 ou mais vezes, qual seria o espaço amostral em cada caso?
- Qual seria a probabilidade de ocorrer digamos, face 1, 2, e 3, nesta ordem, no lançamento do dado 3 vezes seguidas?

- Observando a roleta referente ao tamanho dos passos, qual tamanho tem maior probabilidade de ocorrer?

- Sabendo que cada cor destacada, equivale a um tamanho de salto, qual seria o tamanho do salto com menor probabilidade de ocorrer?

Após a realização desta atividade, o professor trocará os dados e roleta entre os grupos para que todos tenham as mesmas experiências.

Atividade 02:

Com os grupos já devidamente separados vamos construir os caminhantes.
O grupo A seguirá as seguintes regras:

- Em posse da folha A3 quadriculada, marcar no centro dela, a origem do plano cartesiano.

- Partindo da origem, marcar um ponto em uma coordenada qualquer para servir de alvo do caminhante aleatório, digamos que o alvo esteja em A(6,5).

- Jogar o dado de 4 faces para cada passo do caminhante sendo que cada número indica o sentido e a direção do movimento como a seguir:
  - Face 1 - mover 1 unidade para a direita.
  - Face 2 - mover 1 unidade para cima.
  - Face 3 - mover 1 unidade para a esquerda.
  - Face 4 - mover 1 unidade para baixo.

- Jogar o dado simulando 50 passos ligando cada ponto atingido pelo caminhante e observar a posição em relação ao alvo.

- Continuar os movimentos até atingir 100 passos e observar a posição em relação ao alvo.

- Continuar os movimentos até atingir 200 passos e observar a posição em relação ao alvo.

Resultados possíveis:
Um exemplo possível de movimento construído com 50 passos, completado até 100 passos e na sequência 200 passos.

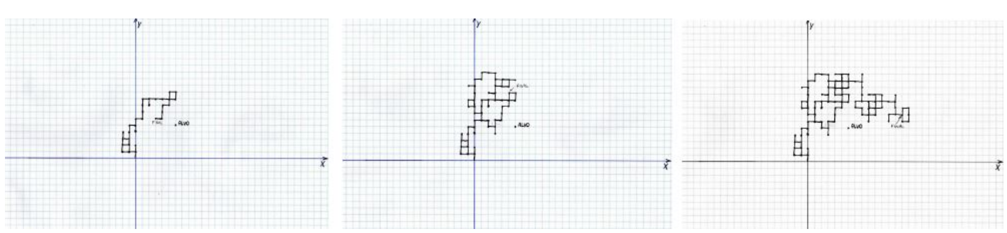

Figura 16: Exemplos de trajeto realizado (Movimento Browniano) - Elaborado pelo autor

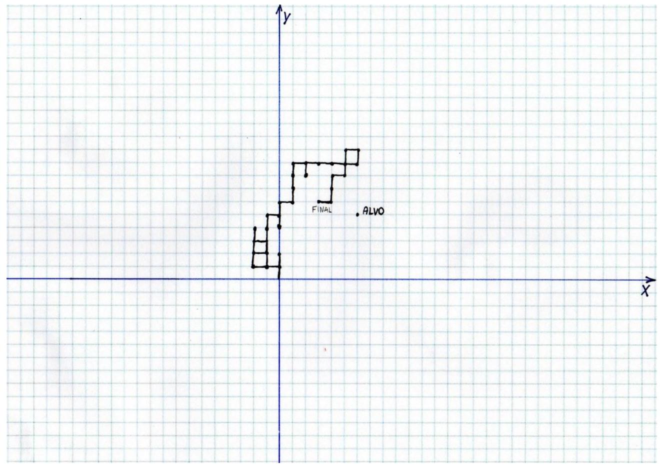

Figura 17: Trajeto realizado pelo caminhante aleatório após 50 passos (Movimento Browniano) - Elaborado pelo autor

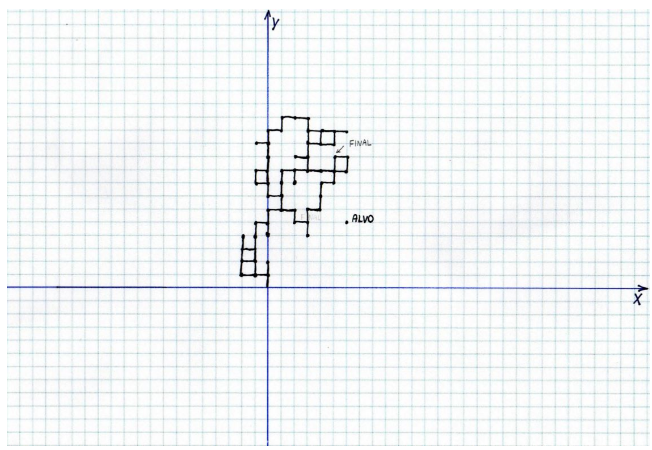

Figura 18: Trajeto realizado pelo caminhante aleatório após 100 passos (Movimento Browniano) - Elaborado pelo autor

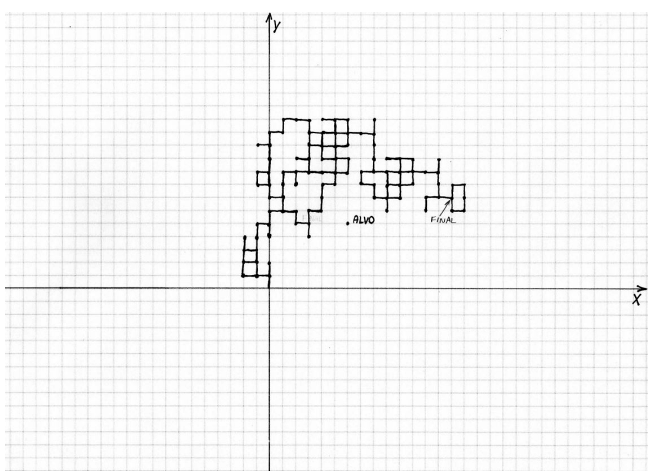

Figura 19: Trajeto realizado pelo caminhante aleatório após 200 passos (Movimento Browniano) - Elaborado pelo autor

Observe que as figuras acima seguem o movimento Browniano.

O grupo B seguirá as seguintes regras:

- Em posse da folha A3 quadriculada, marcar no centro dela, a origem do plano cartesiano.
- Partindo da origem, marcar um ponto em uma coordenada qualquer para servir de alvo do caminhante aleatório, digamos que o alvo esteja em A(6,5).
- Jogar o dado de 4 faces para cada passo do caminhante sendo que cada número indica o sentido e a direção do movimento como a seguir:
  - Face 1 - para a direita.
  - Face 2 - para cima.
  - Face 3 - para a esquerda.
  - Face 4 - para baixo.

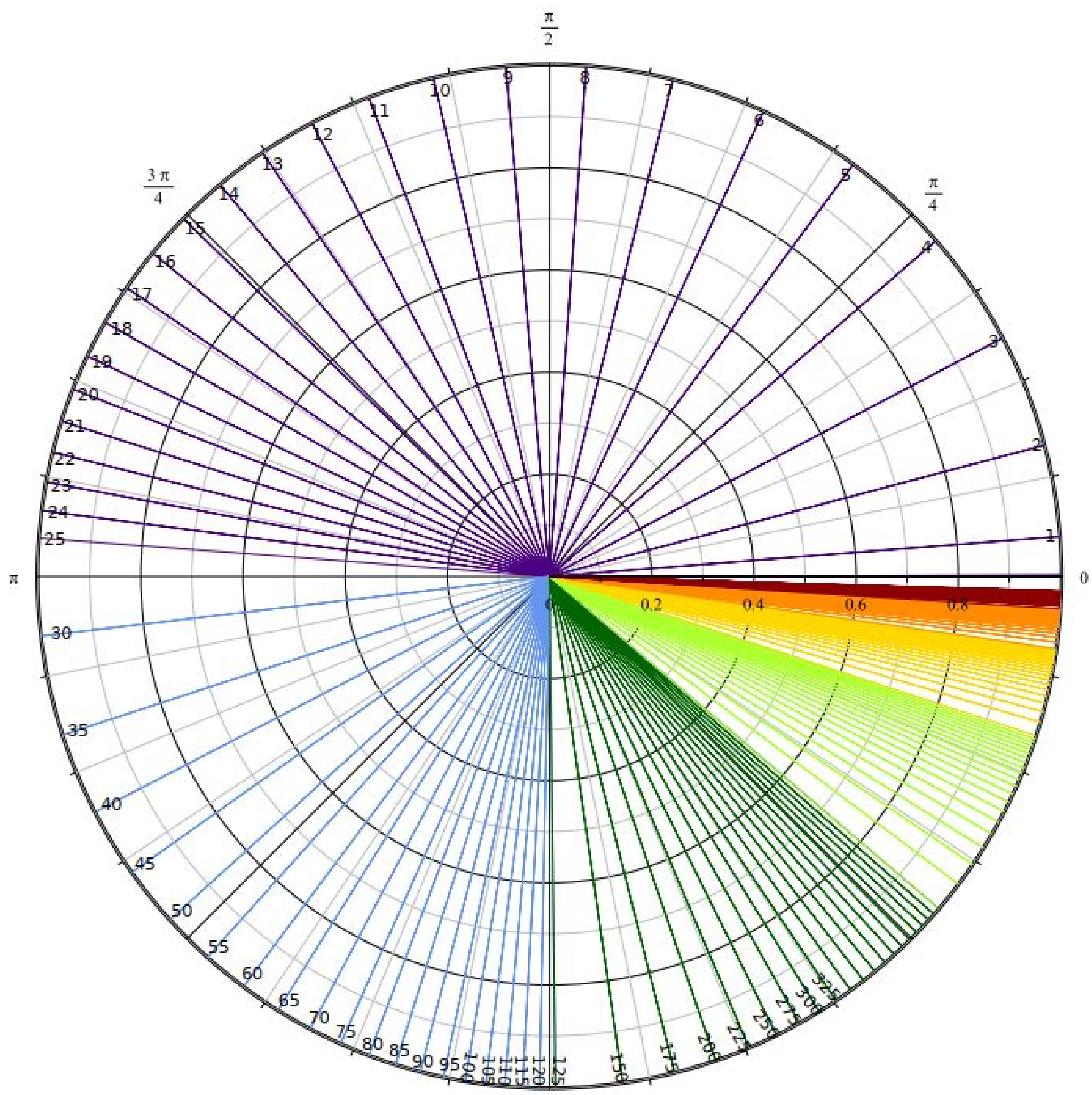

Figura 20: Roleta com tamanho dos passos dos Voos de Lévy

Tabela 3: Construção dos intervalos e distância entre traços na roleta

Cor	Intervalo	Distância entre traços
Roxa	0 a 25	1
Azul	25 a 125	5
Verde Escuro	125 a 600	25
Verde Claro	600 a 1600	50
Amarelo	1600 a 3000	100
Laranja	3000 a 6000	500
Vermelho	6000	2500

Tabela 4: Função densidade acumulada de cada intervalo

Cor	FDA	Intervalo (valor de x)
Roxa	$\int_0^{\frac{x}{250}} f(x)dx$	$0 \leq$ x ≤ 25
Azul	$\int_0^{\frac{x}{250}} f(x)dx$	$25 <$ x < 125
Verde Escuro	$\int_0^{\frac{x}{250}} f(x)dx$	$125 <$ x < 600
Verde Claro	$\int_0^{\frac{x}{250}} f(x)dx$	$600 <$ x < 1600
Amarelo	$\int_0^{\frac{x}{250}} f(x)dx$	$1600 <$ x < 3000
Laranja	$\int_0^{\frac{x}{250}} f(x)dx$	$3000 <$ x < 6000
Vermelho	$\int_0^{\frac{x}{250}} f(x)dx$	x ≥ 6000

- Rodar a roleta para determinar o tamanho do passo. Aqui é exigido um pouco de cuidado pois ela foi construída na tentativa de simular um voo de Lévy. O local de parada da roleta indica o tamanho do passo de acordo com a regra.
  Para a sua construção, foi levado em consideração o fato de que, em geral os passos dados pelo caminhante são pequenos em sua grande maioria, porém eventualmente e não muito raro, grandes saltos podem acontecer. Diversas tentativas foram testadas utilizando a distribuição de Lévy, mantendo $\delta = 0$ e variando o parâmentro γ e após diversas construções, o parâmetro $\gamma = 0,1$ foi o que apresentou os melhores resultados.

- O ângulo formado entre cada intervalo da roleta é calculado da seguinte forma:

  - 1º) Para cada intervalo, calcular a FDP acumulada e em seguida multiplicar por 360°. Assim, dada a distribuição de Lévy.

  $$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2.\pi}}.\frac{1}{(x-\delta)^{\frac{3}{2}}}.e^{\frac{-\gamma}{2(x-\delta)}} \text{ com } \gamma = 0{,}1 \text{ e } \delta = 0$$

  basta calcular por algum recurso computacional a FDA para cada intervalo:

- O tamanho do passo é calculado por:

  $$p = \frac{\text{valor de cada traço}}{10}$$

  Assim, caso o ponteiro da roleta pare em 325, o deslocamento será igua a 32,5 quadrados.

- Jogar o dado e a roleta, simulando 50 passos ligando cada ponto atingido pelo caminhante e observar a posição em relação ao alvo.

- Continuar os movimentos até atingir 100 passos e observar a posição em relação ao alvo.
- Continuar os movimentos até atingir 200 passos e observar a posição em relação ao alvo.

Resultados possíveis:
Um exemplo possível de movimento construído com 50 passos, completado até 100 passos e na sequência 200 passos.

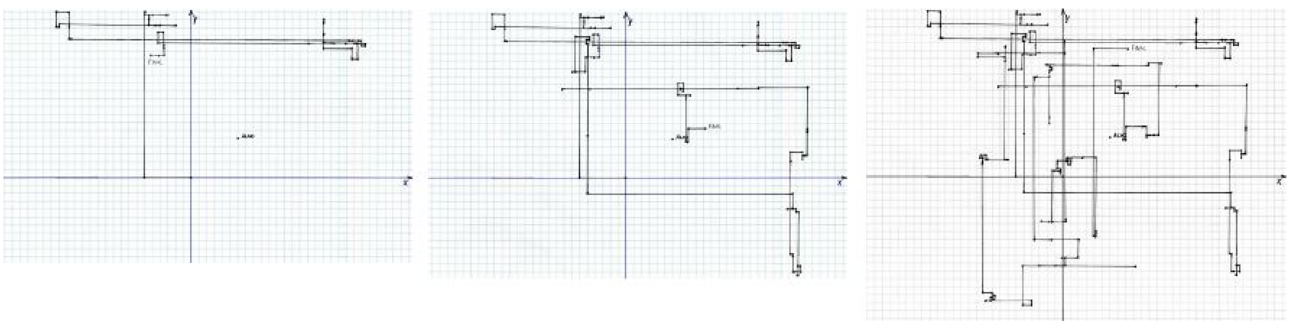

Figura 21: Exemplos de trajeto realizado (Movimento Browniano) - Elaborado pelo autor

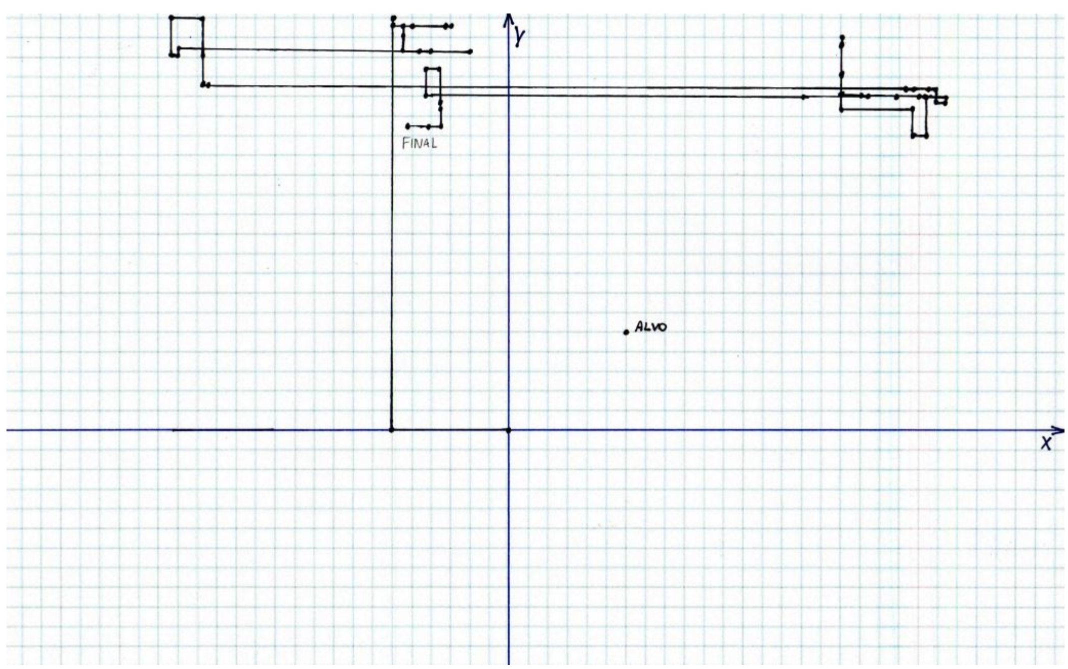

Figura 22: Trajeto realizado pelo caminhante aleatório utilizando voos de Lévy após 50 passos - Elaborado pelo autor

Os alunos perceberão que a probabilidade de dar saltos com tamanho entre 0 e 1 é bastante grande, porém os saltos raros, quando acontecem, extrapolam muito um movimento habitual o que faz com que a varredura do campo seja bem mais eficiente do que um caminhante aleatório anterior.

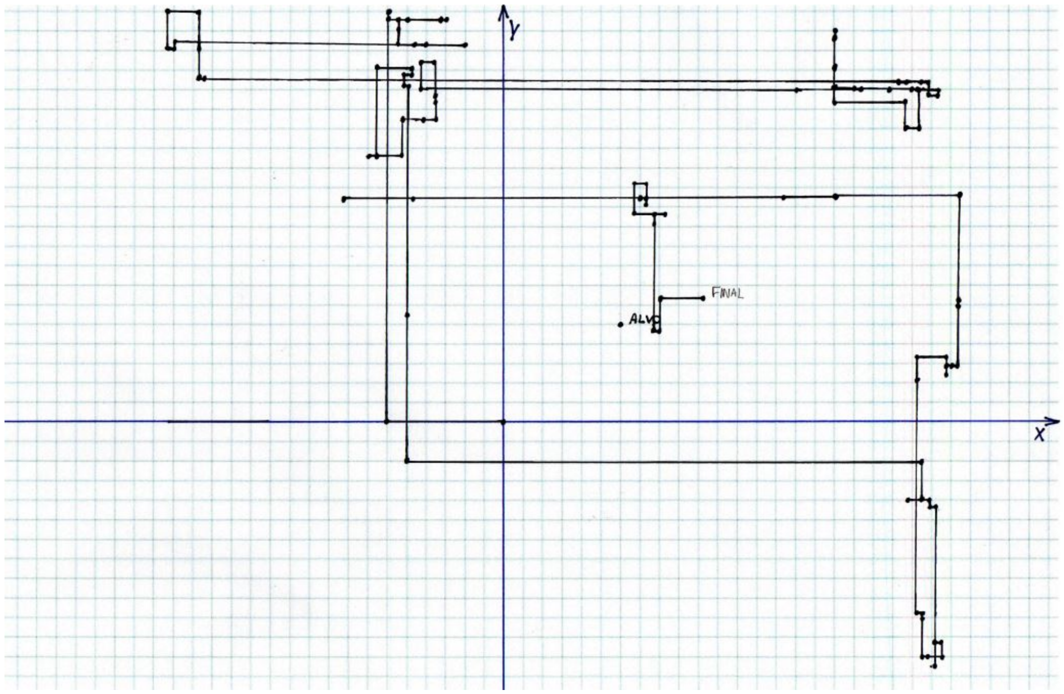

Figura 23: Trajeto realizado pelo caminhante aleatório utilizando voos de Lévy após 100 passos - Elaborado pelo autor

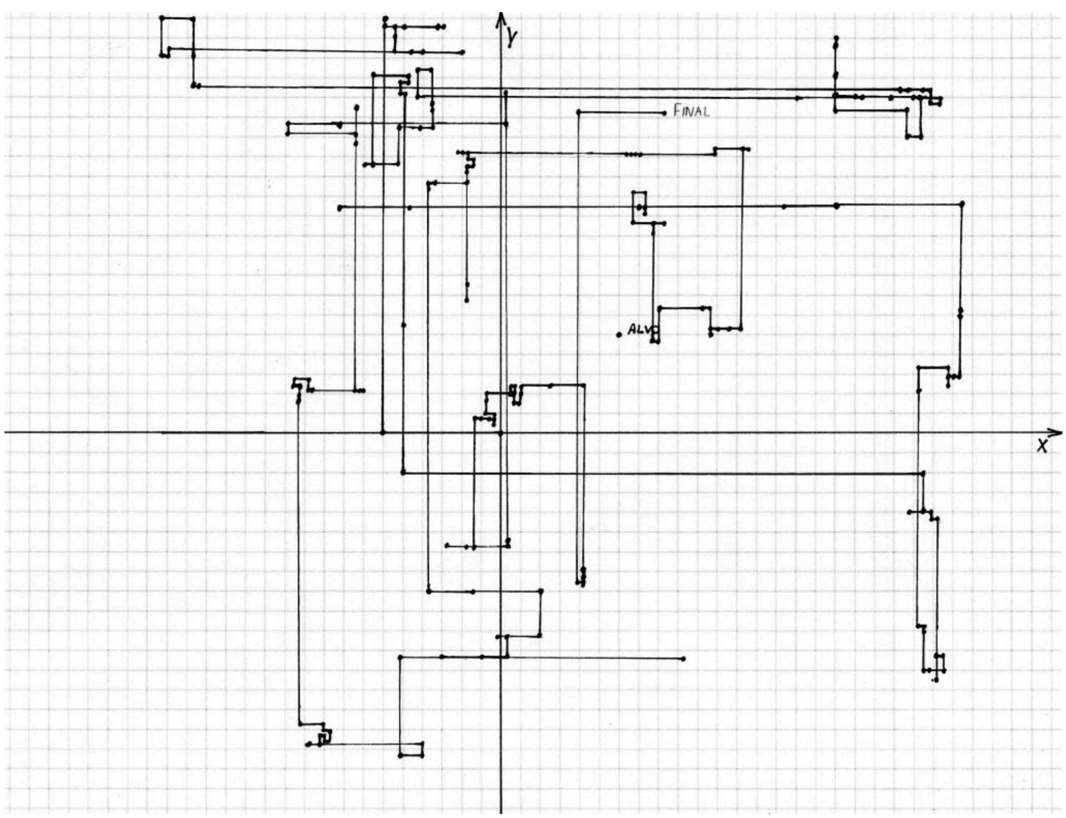

Figura 24: Trajeto realizado pelo caminhante aleatório utilizando voos de Lévy após 200 passos - Elaborado pelo autor

Após a realização desta atividade, o professor trocará, os dados e roleta entre os grupos para que todos tenham as mesmas experiências.

Professor poderá estimular os alunos questionando sobre:

- Qual dos dois caminhantes possuem deslocamentos mais concentrados e quais estão mais dispersos?
- Qual dos dois tipos de movimentos possuem maior chance de atingir o alvo?
- Se um animal segue um dos dois movimentos para busca de alimentos, qual seria o mais interessante em locais com fartura de alimento?
- E qual seria mais interessante para locais com pouca fartura?
- Imagine que um alvo esteja próximo do ponto de partida do caminhante (origem) qual dos dois tipos de movimento seria mais iteressante para atingir aquele alvo? Por que?
- Observe o desenho formado pelos dois tipos de movimentos e tente caracterizá-los: Varredura minuciosa em uma área menor e varredura superficial em um área maior.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feito de forma objetiva, uma introdução aos princípios básicos da teoria da probabilidade e da estatística. Foram abordados os tipos de variáveis estatísticas, discretas e contínuas, as características de uma caminhante aleatório unidimensional e o comportamento que assume ao serem realizados um número suficientemente grande de movimentos. Foram abordados também as distribuições normais e o Teorema Central do Limite e sua importância para aplicações práticas.

Por fim, foi apresentado a Teoria dos voos de Lévy, e suas principais diferenças quando comparada com uma distribuição normal. Como uma proposta de apresentação do tema a alunos do ensino médio, foi criada uma aplicação didática através de um jogo que simula um caminhante aleatório simples e um caminhante Lévy, em busca de um alvo.

Com a aplicação do jogo do caminhante, é esperado que os alunos sejam capazes de compreender o fator aleatoriedade e perceber a diferença entre um caminhante Browniano e um caminhante que simula um Voo de Lévy. Por fim, refletirem sobre qual o melhor tipo de movimento quando um alvo está próximo do ponto de partida (busca local) e qual o melhor quando o alvo está longe do ponto de partida (busca global).

Referências

[1] Alves, José Eduardo Costa *Teorema central do limite: compreendendo e aplicando* Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

[2] A.V, Chechkin [et al.]. *Introdution to the Theory of Lévy Flights.* Institute for Theoretical Physics NSC KIPT, Akademicheskaya st.1, 61108 Kharkov, Ukraine, Physics Department, Technical University of Munich, James Franck Straße, 85747 Garching, Germany and School of Chemistry, Tel Aviv University, 69978 Tel Aviv, Israel.

[3] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. [S.l.]: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

[4] Gabaix, X. *Power Laws in Economics and Finance.* NBER Working Papers, v. 14299, p. 01-48, 2008.

[5] Morettin, Pedro Alberto [et al.]. *Estatística Básica.* 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[6] Nolan, J. *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*, Disponível em: http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/chap1.pdf.

[7] Rosental, J. A *First Look at Rigorous Probability Theory* . World Scientifc, 2000. ISBN 9789810243036.

[8] Ross, Sheldon. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações I.* 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010. 608 p.

[9] Silva, Andréa A. Costa. *Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição Normal: uma abordagem no ensino de distribuição normal de probabilidade.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de São João Del Rei, Campus Ouro Branco, MG, 2015. Orientador: Prof. Dr. Alexandre Celestino Leite Almeida.