



**PROFMAT**

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT



**UFPB**

# A Utilização do Cálculo Diferencial e Integral para Estender os Cálculos de Áreas de Figuras Planas e Comprimentos de Curvas no Plano. †

por

**Gleidson José Dumont Oliveira**

sob orientação do

**Prof. Dr. Carlos Bocker Neto**

sob coorientação do

**Prof. Me. Gilmar Otávio Correia**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013

João Pessoa - PB

---

† Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

O48u Oliveira, Gleidson José Dumont.  
A utilização do cálculo diferencial e integral para estender os cálculos de áreas de figuras planas e comprimentos de curvas no plano / Gleidson José Dumont Oliveira.- João Pessoa, 2013.  
95f. : il.  
Orientador: Carlos Bocker Neto  
Coorientador: Gilmar Otávio Correia  
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN  
1. Matemática. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral.  
4. Geometria. 5. Áreas. 6. Comprimentos.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# A Utilização do Cálculo Diferencial e Integral para Estender os Cálculos de Áreas de Figuras Planas e Comprimentos de Curvas no Plano.

por

**Gleudson José Dumont Oliveira**

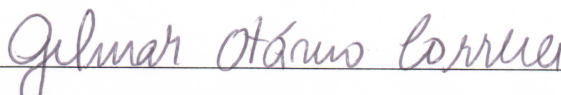
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Cálculo e Geometria.

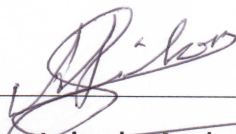
Aprovada por:



Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB (Orientador)



Prof. Me. Gilmar Otávio Correia - UFPB (Coorientador)



Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB



Prof. Dr. José Vicente Moreira - UNIPÊ

Agosto/2013

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS que de maneira concreta me deu força, paciência e saúde diariamente para continuar firme a cada dia, mesmo com inúmeros obstáculos.

A minha esposa Gilvaní Barbosa por todo companheirismo, principalmente nos momentos mais difíceis, onde nesses momentos sua força e apoio foram essenciais.

Aos meus pais, Maria Débora e José Zacarias por terem me ofertado condições de educação para minha formação, pelo amor, dedicação, carinho e compreensão a mim oferecidos.

Aos meus irmãos, Patrícia Vanessa e Sóstenes Dumont, por serem ombros amigos nos momentos difíceis.

A meus amigos que demonstraram amizade, solidariedade e alegria na troca de informações, materiais e horas de estudos, no decorrer do curso. De modo especial a Eduardo Barros, José Cleiton, Joselma Nascimento e Luiz Eduardo.

Um agradecimento especial ao Professor Carlos Bocker e Gilmar Otávio pela orientação, transferência de conhecimentos, ética, profissionalismo e incentivo a pesquisa.

A todos professores pelo profissionalismo, empenho, respeito, dedicação e entusiasmo que nos demonstraram ao longo de todas disciplinas.

Esses agradecimentos se estendem a todos que fizeram e fazem parte da minha vida, aos que aqui estão representados e aos muitos que não figuram nesta escrita, mas, estão presentes nas minhas lembranças.

# Dedicatória

*A meu filho Gleidson Guilherme,  
minha esposa Gilvaní Barbosa e ao  
professor Paulo Câmara.*

# Resumo

Neste trabalho faremos um breve estudo a respeito do cálculo de áreas e comprimentos destacando como esses podem ser apresentados no ensino médio, em seguida faremos uso do cálculo diferencial e integral para estendermos os cálculos de áreas e comprimentos. Para isso, estudaremos um pouco da evolução do cálculo na história e seus conceitos “básicos”, além das definições de áreas, comprimentos, e aplicações do limite, derivada e integral. Ressaltamos que a disposição contida neste material didático não se encontra em um único livro didático adotado nas escolas.

**Palavras-chave:** Cálculo, Integral, Geometria, Áreas, Comprimentos.

# Abstract

In this work we will make a brief study on the calculation of areas and lengths highlighting how these can be presented in high school, then we will use the differential and integral calculus to extend the calculations of areas and lengths. Therefore, this study some of the developments in the history of calculus concepts and their “basic”, beyond the definitions of areas, lengths, and applications of limit, derivative and integral. We emphasize that the provision contained in this learning material is not in a single textbook adopted in schools.

**Keywords:** Calculus, Integral, Geometry, Areas, Lengths.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Um Pouco da História do Cálculo</b>	<b>2</b>
1.1	O Método de Exaustão de Eudoxo . . . . .	2
1.2	O Método de Equilíbrio de Arquimedes . . . . .	3
1.3	Primeiros Passos da Integração na Europa Ocidental . . . . .	5
1.4	O Método dos Indivisíveis de Cavalieri . . . . .	6
1.5	Fermat, Wallis, Barrow, Newton e Leibniz . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Cálculo de Áreas</b>	<b>8</b>
2.1	Área . . . . .	8
2.2	Área do Quadrado . . . . .	9
2.2.1	Área de um quadrado cujo lado é um número inteiro . . . . .	9
2.2.2	Área de um quadrado cujo lado é um número racional . . . . .	9
2.2.3	Área de um quadrado cujo lado é um número irracional . . . . .	10
2.3	Área do Retângulo . . . . .	11
2.4	Área do Paralelogramo . . . . .	13
2.5	Área do Triângulo . . . . .	14
2.6	Área do Trapézio . . . . .	15
2.7	Área do Losango . . . . .	16
2.8	Área de um Polígono Regular . . . . .	17
2.9	Área de um Polígono . . . . .	18
2.10	Cálculo de Áreas Utilizando a Integral . . . . .	18
2.10.1	Área do círculo . . . . .	20
2.10.2	Área da elipse . . . . .	22
2.11	Integração Aproximada . . . . .	24
2.11.1	Regra do ponto médio . . . . .	25



---

2.11.2	Regra do trapézio . . . . .	26
2.11.3	Regra de Simpson . . . . .	27
2.11.4	Aplicação da integração numérica . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Cálculo de Comprimento de Curvas Planas</b>	<b>32</b>
3.1	Medida de um Segmento . . . . .	32
3.2	Comprimento de Gráfico de Função . . . . .	35
3.3	Comprimento de uma Curva dada em Forma Paramétrica . . . . .	37
3.3.1	Comprimento da circunferência . . . . .	38
3.3.2	Comprimento da elipse. . . . .	39
3.4	Comprimento de Curva em Coordenadas Polares . . . . .	39
<b>A</b>	<b>Definições, Lemas e Teoremas do Cálculo Diferencial e Integral</b>	<b>43</b>
A.1	Limite de uma Função . . . . .	43
A.2	Continuidade . . . . .	48
A.3	Derivada de uma Função . . . . .	50
A.4	Primitivas . . . . .	59
A.5	Partição de um Intervalo . . . . .	60
A.6	Soma de Riemann . . . . .	61
A.7	Integral de Riemann . . . . .	62
A.8	Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	65
A.9	Mudança de Variável na Integral . . . . .	69
A.10	Coordenadas Polares . . . . .	70
<b>B</b>	<b>Sugestões de Exercícios para Aplicação no Ensino Básico</b>	<b>75</b>
B.1	Área de uma Região Delimitada por uma Parábola . . . . .	75
B.2	Comprimento de Curva . . . . .	81
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>85</b>

# Introdução

O século XVIII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças, em grande parte, as novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram. Sem dúvidas, a realização na matemática mais marcante do período foi a invenção do cálculo infinitesimal, criado por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, próximo do final do século. A partir dessa invenção, a matemática criativa passou a um plano superior, finalizando a história da matemática elementar.

É relevante citar que o desenvolvimento histórico do cálculo segue a ordem inversa da que encontramos nos livros atuais, onde, historicamente surgiu primeiro o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas, volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas, além dos problemas envolvendo máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão “relacionadas” entre si, podendo ser vistas como operações “inversas”.

Através dos processos utilizados para cálculo de áreas e comprimentos no ensino médio, muitas vezes as fórmulas são apresentadas sem nenhuma justificativa, nesse trabalho procuraremos no Capítulo 1 contar um pouco da história do cálculo, desde o método da exaustão de Eudoxo, até Newton e Leibniz, em seguida, nos Capítulos 2 e 3, realizamos a aplicação da integral no cálculo de áreas e comprimentos, respectivamente. Na parte inicial desses dois capítulos, procuraremos mostrar justificativas matemáticas para cada uma das fórmulas de áreas e comprimentos utilizadas no ensino básico.

Por fim, no Apêndice A, apresentamos um estudo de limites, continuidade, derivadas e integrais, para podermos enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo, uma importante ferramenta presente nos Capítulos 2 e 3. No Apêndice B sugerimos dois

---

exercícios que podem ser aplicados no ensino básico com o intuito de expandir o cálculo de áreas e comprimentos.

# Capítulo 1

## Um Pouco da História do Cálculo

Estudaremos neste capítulo um pouco do desenvolvimento histórico do cálculo, desde Eudoxo, até Newton e Leibniz.

### 1.1 O Método de Exaustão de Eudoxo

Os primeiros problemas da história do cálculo falava a respeito do cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Em suas abordagens encontram-se indícios de duas suposições, onde nelas é válido admitir-se que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente ou que essa é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis.

O método da exaustão é um método utilizado para determinar a área de uma figura inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos em que a soma das áreas converge para a área da figura desejada. Quando a sequência é corretamente construída, a diferença entre o  $n$ -ésimo polígono e a figura que os contém será muito pequena quando  $n$  for muito grande. A medida que essa diferença se torna arbitrariamente pequena, os valores possíveis para a área da figura são sistematicamente “exauridos” pela limitação inferior imposta pelos polígonos cada vez maiores. A teoria foi colocada em termos rigorosos por Eudoxo de Cnido.

Nesse método admite-se que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição abaixo.

**Proposição 1.1** *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também um parte não menor que sua metade,*

*e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

No método da exaustão normalmente requeria-se uma forma de prova por contradição, conhecida atualmente por *redução ao absurdo*, que se resume a encontrar a área de uma região comparando-a primeiro à área de uma outra região (que pode ser “exaurida” de forma que se aproxime da verdadeira área). A prova requer que se assuma que a área verdadeira seja maior que a segunda área e então provar que essa suposição é falsa, e em seguida que se assuma que a verdadeira área é menor que a segunda provando que essa asserção também é falsa, donde por uma dupla redução ao absurdo demonstra-se o que é solicitado.

## 1.2 O Método de Equilíbrio de Arquimedes

Um dos maiores matemáticos do período helenístico e de toda a antiguidade foi Arquimedes (287–212 a.C.). Suas mais importantes contribuições à Matemática foram feitas no domínio daquilo a que agora chamamos *Cálculo Integral*, com teoremas sobre áreas, figuras planas e volumes de corpos sólidos. No livro de Arquimedes sobre *A esfera e O cilindro* encontra-se a expressão para a área da esfera (apresentada como sendo quatro vezes a de um círculo máximo).

Dos antigos, uma das aplicações mais elegantes do método da exaustão foi dada por Arquimedes, onde um dos exemplos mais antigos diz respeito a área de um segmento parabólico, a qual é conhecida como *Quadratura de um Segmento Parabólico* (ou *Quadratura da Parábola*).

A expressão de Arquimedes nos conduz ao seguinte teorema:

**Teorema 1.1** *A área de um segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo inscrito com a mesma base que o segmento da parábola e cujo vértice é o ponto onde a tangente à parábola é paralela à base.*

**Demonstração:** Sejam  $A$  e  $B$  extremidades do segmento parabólico, além disso, sejam  $C$ ,  $D$  e  $E$  os pontos do arco de segmento parabólico obtidos traçando-se  $LC$ ,  $MD$  e  $NE$  paralelos ao eixo da parábola pelos pontos médios  $L$ ,  $M$ , e  $N$  de  $AB$ ,  $CA$  e  $CB$ , respectivamente, conforme a Figura 1.1.

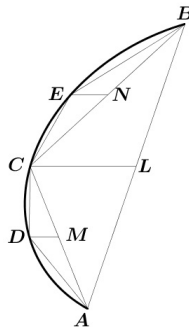


Figura 1.1

Usando a geometria da parábola, Arquimedes mostrou que:

$$\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}$$

Repetindo esse raciocínio sucessivas vezes, obtém-se que a área do segmento parabólico é dada por:

$$\begin{aligned} A_{Seg. Par.} &= \Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \dots \\ &= \Delta ABC \cdot \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right)}_{\text{Soma dos termos de uma P.G. infinita}} \\ &= \Delta ABC \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= \frac{4}{3} \Delta ABC \end{aligned}$$

■

O método da exaustão é visto como maior precursor dos métodos do cálculo, porém o método de exaustão é rigoroso mas estéril, pois uma vez que conhecida uma fórmula, o método da exaustão pode ser uma importante ferramenta para demonstrá-la, porém o método por si só não descobre essa fórmula. Então surge a pergunta: Como Arquimedes descobria as fórmulas que tão elegantemente demonstrava pelo método da exaustão?

A resposta veio em 1906 com a descoberta de um tratado, intitulado *O Método*, enviado por Arquimedes em forma de carta a Eratóstenes, tratado esse que se encontrava perdido desde os primeiros séculos de nossa era. A ideia central de *O*

*Método era a seguinte: Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas, ou de fatias paralelas finas, e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos.*

Em todos seus trabalhos, Arquimedes combinou uma originalidade de raciocínio surpreendente com uma admirável técnica de cálculo e rigor na demonstração. Arquimedes diferia-se da maior parte dos matemáticos gregos pela sua capacidade de cálculo. Nas suas abordagens de áreas, Arquimedes chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que utilizamos nos dias de hoje, onde com os métodos atuais de cálculos de limites podemos verificar que o método de equilíbrio de Arquimedes é perfeitamente rigoroso, e esse confunde-se com a essência da moderna técnica de integração.

### 1.3 Primeiros Passos da Integração na Europa Ocidental

No período que vai das notáveis realizações de Arquimedes até, praticamente, os tempos modernos, a teoria da integração quase não foi utilizada. Só por volta de 1450 os trabalhos de Arquimedes chegaram à Europa Ocidental, através de uma tradução, achada em Constantinopla, de uma cópia (do século IX) de seus manuscritos. Essa tradução foi revisada por Regiomontanus e impressa em 1540. Alguns anos mais tarde apareceu uma outra tradução. Mas só por perto do início do século XVII as ideias de Arquimedes passaram por outros desdobramentos.

Dois dos primeiros matemáticos dos tempos modernos a usarem métodos comparáveis aos de Arquimedes foram o engenheiro Flamengo Simon Stevin (1548-1620) e o matemático italiano Luca Valerio (1552-1618). Ambos tentaram evitar a dupla “*reduction ad absurdum*” do método de exaustão, fazendo uma passagem direta ao limite, de maneira bastante parecida com o procedimento aplicado no cálculo da área de um segmento parabólico visto na Seção 1.2, onde é realizada a soma dos termos de uma Progressão Geométrica (P.G.) infinita. A ideia de Stevin era em dividir figuras em faixas, onde esse é o princípio utilizado nos textos elementares de

cálculo de hoje em dia.

## 1.4 O Método dos Indivisíveis de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598, foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Deixou uma obra vasta abrangendo matemática, óptica e astronomia. Foi um dos grandes divulgadores dos logaritmos pela Europa, e com isso se tornou um matemático muito influente. Das suas obras, a que mais o projetou e contribuiu para matemática, foi o tratado “*Geometria indivisibilibus*”, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Neste trabalho ele apresenta seu *método dos indivisíveis*, cujas raízes remontam a Demócrito (410 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.).

Para muitos autores e estudiosos, o tratado de Cavalieri é demasiado prolixo e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por “indivisível”. Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas.

Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original. Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem os chamados *princípios de Cavalieri*. Os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes, e sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno.

## 1.5 Fermat, Wallis, Barrow, Newton e Leibniz

Para muitos autores, a diferenciação é motivada de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos



e mínimos de funções. Embora essas considerações remontem aos gregos antigos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat, expostas em 1629. Para Kepler, os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo comum. Fermat transformou esse fato num processo para determinar esses pontos de máximo ou de mínimo, porém em seu método ele não distinguia entre valor máximo e valor mínimo.

Os predecessores imediatos de Isaac Newton na Inglaterra foram John Wallis e Isaac Barrow. Wallis foi um dos primeiros a discutir as cônicas como curvas de segundo grau, em vez de considerá-las como secções de um cone. Wallis procurou sistematizar e estender os métodos de Descartes e Cavalieri e induzir muitos resultados notáveis a partir de casos particulares. Assim, há a afirmação de que a fórmula que hoje escreveríamos como  $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ , em que  $m$  é inteiro, também vale quando  $m$  é fracionário ou negativo, mas diferente de  $-1$ . Foi Wallis quem deu argumentos razoáveis para defender que o comprimento de um elemento de arco de uma curva é dado por  $ds = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx$ .

Enquanto as principais contribuições de Wallis ao cálculo situam-se na teoria da integração, as mais importantes de Isaac Barrow talvez sejam aquelas ligadas à teoria da diferenciação. Após 1675, no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral já se tinham feito muitas integrações, muitas cubaturas, quadraturas e retificações já haviam sido efetuadas, já aflorara um processo de diferenciação, muitas tangentes já haviam sido construídas, a ideia de limite já fora concebida e o teorema fundamental reconhecido. Porém se faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Trabalhando de forma independente, Newton e Leibniz procuraram criar um cálculo manipulável e proveitoso, por isso, embora Newton e Leibniz tenham tido muitos precursores, a criação do cálculo em geral é atribuída a eles.

No próximo capítulo discutiremos o cálculo de área de figuras planas fechadas, isto é, capacidade de armazenamento destas figuras.

# Capítulo 2

## Cálculo de Áreas

Este capítulo está voltado ao o cálculo de área. Faremos uso da integral para cálculo de áreas de regiões que não sejam, necessariamente, delimitadas por polígonos, nem por união finita de polígonos. No final do capítulo utilizaremos processos de aproximação da integral através da Regra do Ponto Médio, Regra do Trapézio e Regra de Simpson.

### 2.1 Área

**Definição 2.1** *A área de uma figura plana  $F$  é um número real não negativo, que indicaremos por  $a(F)$  que indica quantas vezes a figura  $F$  contém a unidade de área pré-determinada.*

**Observação 2.1** *Para nossos propósitos tomaremos como unidade de área um quadrado cujo lado tem como comprimento uma unidade de medida. Logo qualquer quadrado, cujo lado tenha uma unidade de comprimento, tem área igual a 1, e esse quadrado será chamado de quadrado unitário.*

**Axioma 2.1** *Tem-se que:*

- i. Figuras congruentes têm áreas iguais.*

**Observação 2.2** *Duas figuras são congruentes se elas possuem a mesma forma e tamanho. Mais formalmente, dois conjuntos de pontos geométricos são ditos “congruentes” se, e somente se, um pode ser transformado no outro por isometria, ou seja, uma combinação de translações, rotações e reflexões.*

- ii. Se  $P$  é um quadrado cuja medida do lado é uma unidade de comprimento, então a área de  $P$  é igual a 1.
- iii. Se  $F$  pode ser decomposta como reunião de  $n$  figuras  $F_1, F_2, \dots, F_n$  tais que duas quaisquer delas tenham em comum no máximo suas fronteiras, então a área de  $F$  é igual a  $\sum_{i=1}^n a(F_i)$  (soma das áreas de  $F_i$ ).

## 2.2 Área do Quadrado

### 2.2.1 Área de um quadrado cujo lado é um número inteiro

Um quadrado  $Q$  no qual o lado tem como medida um número inteiro  $n$  pode ser decomposto, através de paralelas aos seus lados, em  $n^2$  quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e, portanto, com área igual a 1. Com isso a área do quadrado  $Q$  será  $n^2$ . Como exemplo, temos na Figura 2.1 um quadrado de lado 3, decomposto em  $3^2 = 9$  quadrados unitários.

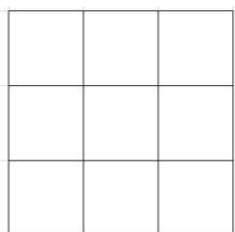


Figura 2.1

### 2.2.2 Área de um quadrado cujo lado é um número racional

Se o lado de um quadrado tem por medida  $\frac{1}{n}$ , em que  $n$  é inteiro, então o quadrado unitário se decompõe por meio de paralelas aos seus lados, em  $n^2$  quadrados justapostos, todos congruentes a  $Q$ . Estes  $n^2$  congruentes a  $Q$  compoem um quadrado de área 1, com isso temos que a área de  $Q$  deve satisfazer a condição  $n^2 \cdot a(Q) = 1$  e, portanto,  $a(Q) = \frac{1}{n^2}$ .

De forma mais geral, se o lado de um quadrado  $Q$  tem por medida um número racional  $\frac{m}{n}$ , então é possível decompor cada lado de  $Q$  em  $m$  segmentos, cada um dos quais tem comprimento  $\frac{1}{n}$ . Traçando paralelas aos lados de  $Q$  a partir dos pontos

de divisão, obtemos uma decomposição de  $Q$  em  $m^2$  quadrados, cada um dos quais tem lado com medida  $\frac{1}{n}$ . Como a área de cada um desses quadrados menores é  $\frac{1}{n^2}$ . Temos que a área de  $Q$  deverá ser:

$$a(Q) = m^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$$

Portanto a área de um quadrado  $Q$  cujo lado tem para medida um número racional  $l = \frac{m}{n}$  é dada por:

$$a(Q) = l^2$$

### 2.2.3 Área de um quadrado cujo lado é um número irracional

Existem quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário. Seja  $Q$  um desses: o lado de  $Q$  terá como medida um número irracional  $l$ . Também podemos mostrar que, mesmo nesse caso,  $a(Q) = l^2$ .

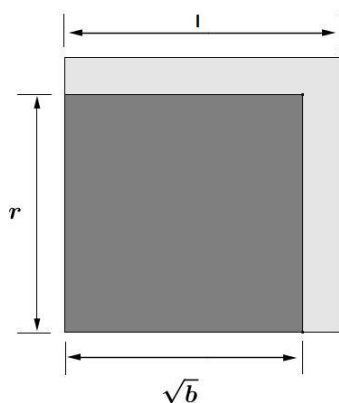


Figura 2.2

Na Figura 2.2, o quadrado de lado  $r$  está contido no quadrado  $Q$ , de lado  $l$ . Logo  $r^2 < \text{área de } Q$ . Como  $\sqrt{b} < r$ , temos  $b < r^2 < \text{área de } Q$ .

Raciocinando de modo indireto. Dado qualquer número  $b < l^2$ , mostraremos que  $b < a(Q)$ . Em seguida, mostraremos que  $l^2 < c$  implicará  $a(Q) < c$ . Com isso mostraremos que  $a(Q)$  não poderá ser um número  $b$  menor que  $l^2$  nem um número  $c$  maior que  $a^2$ , logo concluiremos que  $a(Q) = l^2$ .

Seja  $b$  um número tal que  $b < l^2$ . Seja  $r$  um número racional menor que  $l$ , porém, tão próximo de  $l$  que se tenha  $b < r^2 < l^2$ . (Para isso tomemos um  $r$ , com uma

aproximação por falta de  $l$ , com erro inferior a  $l - \sqrt{b}$ . Então  $\sqrt{b} < r < l$  e com isso  $b < r^2 < l^2$ .)

No interior de  $Q$ , tomamos um quadrado  $Q'$  de lado  $r$ , como  $r$  é racional, a área desse quadrado é  $r^2$ . Como  $Q'$  está contido no interior de  $Q$ , temos que  $a(Q') < a(Q)$ , ou seja,  $r^2 < a(Q)$ , mas  $b < r^2$ , logo  $b < a(Q)$ . Com isso, todo número real  $b$  inferior a  $l^2$  é também menor do que a área de  $Q$ .

De modo análogo, se mostra que todo número real  $c$ , maior do que  $l^2$ , é maior que a área de  $Q$ . Logo, a área de  $Q$  não pode ser menor, nem maior, do que  $l^2$ . Portanto, por exclusão, deve-se então ter

$$a(Q) = l^2.$$

**Observação 2.3** *O método utilizado acima é conhecido como **método da exaustão**, onde através dele demonstramos uma fórmula mostrando que a desigualdade é impossível.*

De modo geral, temos: seja  $l$  um número real que representa a medida do lado de um quadrado  $Q$ , a área desse quadrado será dada por

$$a(Q) = l^2.$$

## 2.3 Área do Retângulo

Para calcularmos a área do retângulo  $R$  faremos essa área recair na área do quadrado, onde procedendo assim estamos mostrando sua validade quando a medida de seu lado é qualquer número real.

Dado o retângulo  $R$ , com medida da base  $b$  e altura  $a$ , podemos construir um quadrado  $Q$  de lado  $a + b$ , o qual contém 2 cópias de  $R$  e mais dois quadrados, um de lado  $a$  e outro de lado  $b$ .

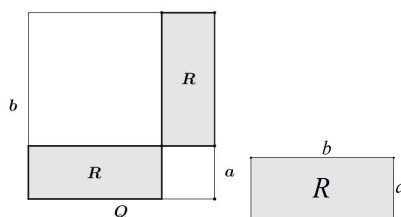


Figura 2.3

Na Figura 2.3, O quadrado  $Q$  contém dois retângulos iguais a  $R$  mais um quadrado de lado  $a$  e outro de lado  $b$ .

Temos:

$$\begin{aligned} a(Q) &= l^2 \\ a(Q) &= (a + b)^2 \Rightarrow a(Q) = a^2 + 2.a.b + b^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Como os quadrados de lados  $a$  e  $b$  tem áreas iguais a  $a^2$  e  $b^2$ , respectivamente, temos:

$$a(Q) = a^2 + b^2 + 2.a(R) \quad (2.2)$$

Comparando as Equações (2.1) e (2.2), obtemos:

$$2a(R) = 2a.b.$$

Logo,

$$a(R) = a.b$$

**Teorema 2.1** *As áreas de dois retângulos que têm alturas iguais estão entre si assim como suas bases.*

**Demonstração:** Faremos apenas uma demonstração geométrica do Teorema 2.1, onde podemos perceber que o retângulo de base  $nx$  e altura  $y$  é a reunião de  $n$  retângulos justapostos, de base  $x$  e altura  $y$ , com isso  $A(nx, y) = n.A(x, y)$ , ou seja,  $\frac{A(nx, y)}{A(x, y)} = \frac{nx}{x} = n$ . Além disso, se  $x < x'$ , então  $A(x, y) < A(x', y)$ , pois quando  $x < x'$  o retângulo de base  $x$  e altura  $y$  está no interior do retângulo de base  $x'$  e altura  $y$ . ■

De posse do Teorema (2.1), indiquemos por  $A(x, y)$  a área de um retângulo cuja base mede  $x$  e a altura mede  $y$ .

O Teorema (2.1) afirma que:

$$\frac{A(x', y)}{A(x, y)} = \frac{x'}{x}.$$

Escrevendo  $x' = c.x$ , vale:

$$A(cx, y) = c.A(x, y).$$

No caso do retângulo, qualquer um dos lados pode ser considerado como base, logo também temos:

$$A(x, d.y) = d.A(x, y).$$

Com isso temos que:

$$A(x, y) = A(x.1, y) = x.A(1, y) = x.A(1, y.1) = x.y.A(1, 1).$$

Mas,  $A(1, 1)$  é a área do retângulo de base e altura iguais a um, ou seja, é a área do quadrado unitário, que tomamos inicialmente como 1, assim:

$$A(x, y) = x.y.1 \Rightarrow A(x, y) = x.y$$

Ou seja, mais uma vez obtemos a fórmula que nos diz que a área do retângulo é igual ao produto da base pela altura.

## 2.4 Área do Paralelogramo

Em um paralelogramo, conforme a Figura 2.4, chama-se *altura* ao segmento que vai de um dos lados e é perpendicular ao outro lado (ou ao prolongamento deste outro lado).

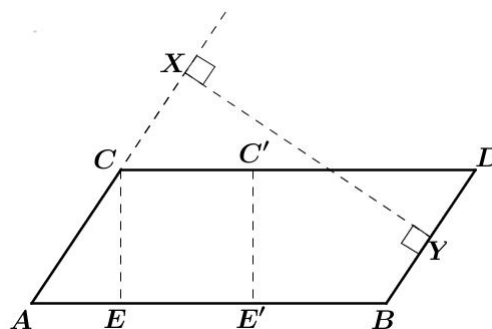


Figura 2.4

No paralelogramo  $ABCD$ , baixamos uma perpendicular do ponto  $C$  à base  $AB$ , sendo  $E$  o ponto de intersecção entre a altura e a base  $AB$ , temos que  $CE$  é a altura do paralelogramo. Se tomássemos outra perpendicular  $C'E'$ , ligando  $C'$  em  $CD$  a  $E'$  em  $AB$  teríamos outra altura, com  $\overline{CE} = \overline{C'E'}$ , pois  $AB \parallel CD$ , e com isso todas as alturas relativas à base  $AB$  possuem o mesmo comprimento.

Considerando  $BD$  como base, então um segmento  $XY$  perpendicular, simultaneamente, a  $AC$  e  $BD$  seria uma altura relativa a base  $BD$ , emm que  $\overline{XY}$  não teria necessariamente o mesmo comprimento que as alturas relativas à base  $AB$ .

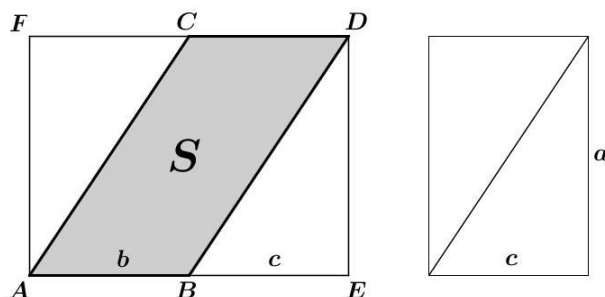


Figura 2.5

O retângulo  $AEDF$ , cuja área vale  $ba + ca$ , é formado pelo paralelogramo, cuja área  $a(P)$  queremos calcular, mais dois triângulos que, colocados juntos à direita, formam um retângulo de base  $c$  e altura  $a$  e conseqüentemente área igual a  $ca$ .

O paralelogramo  $ABDC$  está contido num retângulo  $AEDF$  de base  $b + c$  e altura  $a$ , a área desse retângulo é dada por  $(b + c).a = ba + ca$ , além disso esse retângulo é formado pelo paralelogramo dado, cuja área denotamos por  $a(P)$ , mais dois triângulos que juntos formam um retângulo de área  $ca$ . Daí, a área do retângulo  $AEDF$  é igual a área do paralelogramo  $ABDC$  mais a área do retângulo formado pelos dois triângulos, com isso temos:  $ba + ca = a(P) + ca$ , portanto  $a(P) = b.a$ .

Temos que a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases, pelo comprimento da altura relativa a essa base.

## 2.5 Área do Triângulo

Temos que todo triângulo é metade de um paralelogramo, pois dado um triângulo  $ABC$  podemos traçar pelos vértices  $B$  e  $C$  retas paralelas aos lados  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, as quais se interceptam num ponto  $D$ , e com isso temos um paralelogramo  $ABDC$ , conforme a Figura 2.6.



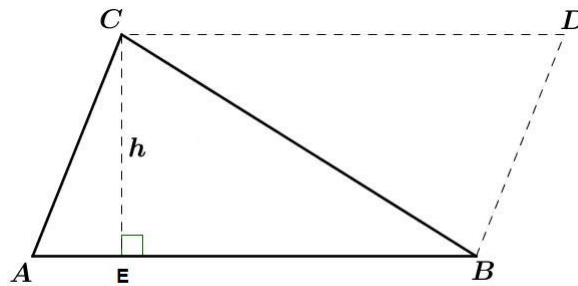


Figura 2.6

Por  $C$  tracemos uma perpendicular, relativa ao lado  $AB$ , e marquemos o ponto  $E$  sobre o lado  $AB$  (ou seu prolongamento), temos que  $CE$  será a altura do paralelogramo  $ABDC$  e também a altura do triângulo  $ABC$ . Seja  $\overline{AB} = b$  e  $\overline{CE} = h$ . Então a área do paralelogramo  $ABDC$  é dada por  $b.h$ . Os triângulos  $ABC$  e  $BCD$  são congruentes (caso ângulo, lado, ângulo). Logo, possuem a mesma área, com isso a área do paralelogramo  $ABDC$  é igual a duas vezes a área do triângulo  $ABC$ , portanto:

$$a(P) = 2.a(T)$$

$$b.h = 2.a(T)$$

daí,

$$a(T) = \frac{b.h}{2}$$

Temos que a área de um triângulo é igual a metade do produto do comprimento da medida de uma base, pelo comprimento de sua altura correspondente.

**Observação 2.4** *Para um polígono qualquer, o processo de calcular sua área consiste em subdividi-lo em triângulos, paralelogramos ou quaisquer figuras que já sabemos calcular sua área e, assim, a área do polígono dado será a soma das áreas das figuras em que o decompusermos.*

## 2.6 Área do Trapézio

Seja  $ABDC$  um trapézio, em que os lados  $AB$  e  $CD$  são paralelos, conforme Figura 2.7. Denotemos  $AB$  por  $b_1$ ,  $CD$  por  $b_2$  e por  $h$  a distância entre  $AB$  e  $CD$ .

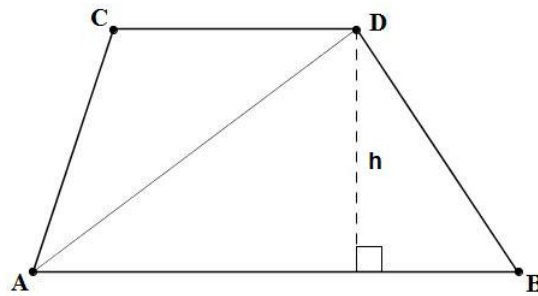


Figura 2.7

Temos que a diagonal  $AD$  divide o trapézio nos triângulos  $ABD$  e  $ACD$ , os quais possuem bases  $b_1$  e  $b_2$ , respectivamente, e altura  $h$ , com isso temos que a área do trapézio  $ABDC$  é igual a soma das áreas dos triângulos  $ABD$  e  $ACD$ , denotando a área do trapézio  $ABDC$  por  $a(T)$  e a área dos triângulos  $ABD$  e  $ACD$  por  $a(T_1)$  e  $a(T_2)$ , respectivamente, temos:

$$a(T) = a(T_1) + a(T_2)$$

$$a(T) = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2}$$

$$a(T) = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

Temos que a área do trapézio é igual à semi-soma do comprimento das bases, vezes o comprimento da altura.

## 2.7 Área do Losango

Seja  $ABCD$  um losango e  $AC$  e  $BD$  suas diagonais, conforme a Figura 2.8. Denotemos  $AC$  por  $d_1$  e  $BD$  por  $d_2$ .

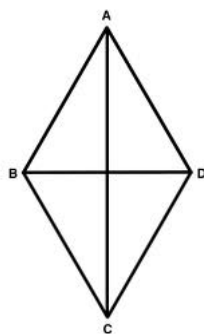


Figura 2.8

Temos que a diagonal  $AC$  divide o losango nos triângulos  $ABC$  e  $ADC$ , os quais possuem bases  $d_1$ , e altura  $\frac{d_2}{2}$ , com isso temos que a área do losango  $ABCD$  é igual a soma das áreas dos triângulos  $ABC$  e  $ADC$ , denotando a área do losango  $ABCD$  por  $a(L)$  e a área dos triângulos  $ABC$  e  $ADC$  por  $a(T_1)$  e  $a(T_2)$  respectivamente, temos:

$$a(L) = a(T_1) + a(T_2)$$

$$a(L) = 2 \cdot \frac{d_1 \cdot \frac{d_2}{2}}{2}$$

$$a(L) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Temos que a área do losango é igual ao semi-produto de suas diagonais.

## 2.8 Área de um Polígono Regular

Seja um polígono regular de  $n$  lados de medidas iguais a  $l$  e de apótema (segmento de reta que parte do centro do polígono e é perpendicular a um dos seus lados) com medida  $m$ . A medida do perímetro desse polígono será  $n \cdot l$  a qual denotaremos por  $2p$ . A partir do centro desse polígono regular, podemos decompor esse polígono em  $n$  triângulos de base de base  $l$  e altura  $m$ , logo a área do polígono regular será  $n$  vezes a área do triângulo. Além disso a área de cada triângulo será  $a(T) = \frac{l \cdot m}{2}$ , com isso a área do polígono regular será:

$$a_{(pol)} = n \cdot a_{(t)}$$

$$a_{(pol)} = n \cdot \frac{l \cdot m}{2}$$

$$a_{(pol)} = \frac{\overbrace{n \cdot l}^{2p} \cdot m}{2}$$

$$a_{(pol)} = \frac{2 \cdot p \cdot m}{2}$$

$$a_{(pol)} = p \cdot m$$

Temos que a área de um polígono regular é igual ao produto do seu semi-perímetro pelo seu apótema.

## 2.9 Área de um Polígono

Para calcularmos a área de um polígono, basta decompor esse polígono em figuras com áreas conhecidas e aplicarmos o item (iii.) do Axioma 2.1.

## 2.10 Cálculo de Áreas Utilizando a Integral

**Observação 2.5** *Salvo menção contrária, em todo o restante de nosso trabalho,  $f$  será uma função definida em um intervalo não degenerado, isto é, que não seja apenas em um ponto, ou em uma união finita de intervalos não degenerados.*

Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ . Queremos determinar a área da região  $A$  do plano, delimitada pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  e  $y = f(x)$ , ilustrada na Figura 2.9.

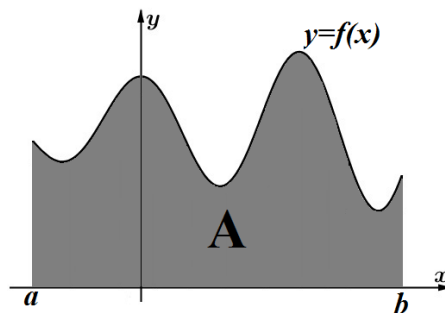


Figura 2.9

Seja  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e sejam  $\bar{c}_i$  e  $\bar{\bar{c}}_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$  tais que  $f(\bar{c}_i)$  é o valor mínimo e  $f(\bar{\bar{c}}_i)$  o valor máximo de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Temos que a área de  $A$  está dada entre as somas de Riemann por falta, que é dada por  $\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$  e por excesso, que é dada por  $\sum_{i=1}^n f(\bar{\bar{c}}_i) \Delta x_i$ , ou seja,

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{\bar{c}}_i) \Delta x_i$$

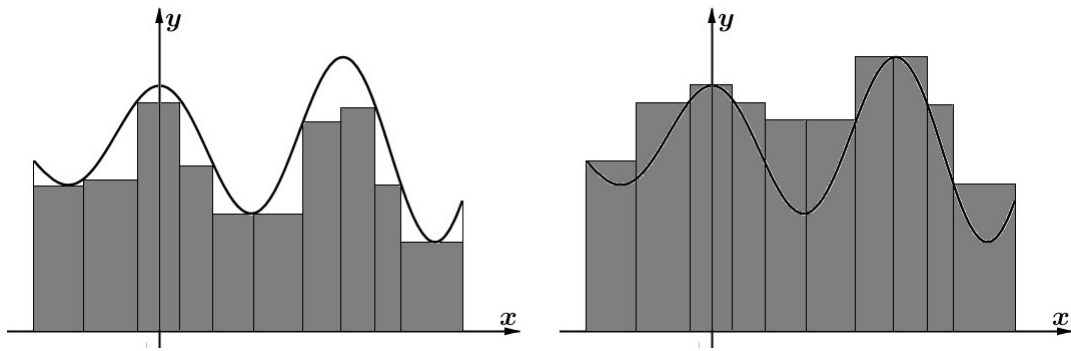


Figura 2.10

Como as somas de Riemann da Figura 2.10 tendem a  $\int_a^b f(x)dx$  quando  $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ , temos:

$$\int_a^b f(x)dx \leq A \leq \int_a^b f(x)dx$$

**Definição 2.2** Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ . A área da região  $A$  do plano, delimitada pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  e  $y = f(x)$  é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Sendo  $f(x) \leq 0$  em  $[a, b]$ , obtemos a Figura 2.11,

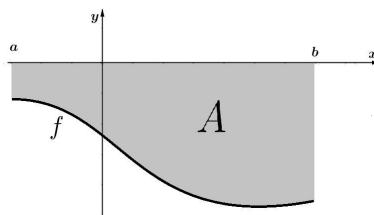
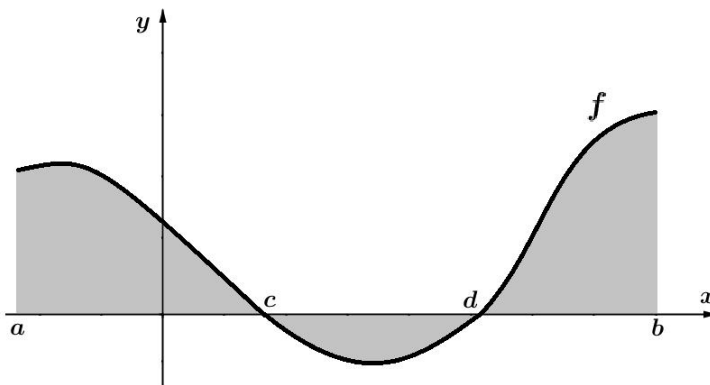


Figura 2.11

temos que  $-f(x)$  será positiva, definimos, nesse caso

$$A = - \int_a^b f(x)dx.$$

De modo geral: Seja  $A$  o conjunto hachurado da Figura 2.12,



**Figura 2.12**

temos que:

$$A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

Sejam  $f$  e  $g$  contínuas em  $[a, b]$ , tais que  $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ , temos que a área da região  $A$  limitada por  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  é dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

**Exemplo 2.1** Determinar a área do conjunto do plano limitado pelas retas  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  e pelo gráfico de  $f(x) = x^2$

**Solução:** A área procurada é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x^2 dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

■

### 2.10.1 Área do círculo

A equação da circunferência que limita um círculo, com centro na origem e raio  $r$  é dada por  $x^2 + y^2 = r^2$ , resolvendo essa equação para  $y$ , temos:  $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$  com  $0 \leq x \leq r$ .

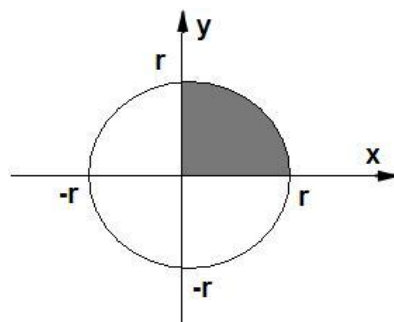


Figura 2.13

Através da Figura 2.13, podemos observar que a área do círculo ( $A_{\bullet}$ ) é quatro vezes a área hachurada. Com isso:

$$A_{\bullet} = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Fazendo a substituição:

$$x = r \cdot \sin \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = r \cdot \cos \theta \Rightarrow dx = r \cdot \cos \theta d\theta$$

Além disso:

$$\text{Quando } x = 0 \text{ temos } \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0.$$

$$\text{Quando } x = r \text{ temos } \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Como

$$A_{\bullet} = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Então,

$$A_{\bullet} = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot r \cdot \cos \theta d\theta$$

$$A_{\bullet} = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 \theta)} \cdot r \cdot \cos \theta d\theta$$

$$A_{\bullet} = 4 \cdot r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta$$

$$A_{\bullet} = 4 \cdot r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

Mas,

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Pela Relação Fundamental da Trigonometria

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

Assim,

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad (2.3)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} A_{\bullet} &= 4.r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ A_{\bullet} &= 4.r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ A_{\bullet} &= 4.r^2 \cdot \left[ \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \overbrace{\sin \pi}^0 \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \overbrace{\sin 0}^0 \right) \right] \\ A_{\bullet} &= \pi.r^2 \end{aligned}$$

■

### 2.10.2 Área da elipse

Dados dois pontos  $F$  e  $F_1$  e um número  $r > d(F_1, F)$ , o conjunto dos pontos  $P$  do plano tais que

$$d(P, F) + d(P, F_1) = r$$

é chamado de *elipse* de focos  $F_1$  e  $F$  e eixo maior  $r$ .

Consideremos uma elipse cujos focos estão sobre o eixo x, seu eixo maior tenha medida  $2a$ , seu eixo menor com medida  $2b$  e seu centro esteja na origem conforme a Figura 2.14.

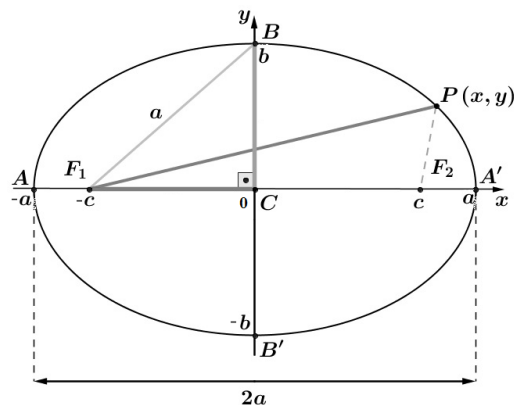
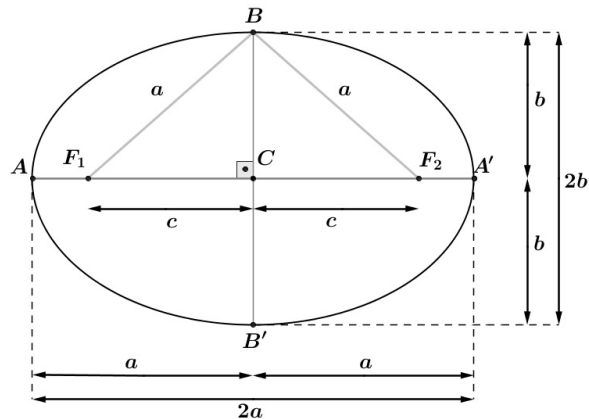


Figura 2.14



Seus elementos podem ser observados na Figura 2.15:



**Figura 2.15**

Aplicando a definição, obtém-se facilmente a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Resolvendo a equação da elipse para  $y$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ \frac{y^2}{b^2} &= \frac{a^2 - x^2}{a^2} \end{aligned}$$

daí,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Através da Figura (2.14) podemos observar que a elipse é simétrica em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , logo a área total  $A$  da elipse é quatro vezes a área da região delimitada pelos eixos (abscissas e ordenadas) e a elipse.

A parte da elipse no primeiro quadrante é dada pela função

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ com } 0 \leq x \leq a.$$

Como  $\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$  nos fornece a área do primeiro quadrante, a área da elipse será dada por:

$$A = 4 \cdot \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Para avaliarmos essa integral, podemos fazer a substituição  $x = a \cdot \sin \theta$ , assim,  $dx = a \cdot \cos \theta d\theta$ .

Quanto aos limites de integração, notemos que:

Quando  $x = 0$ ,  $\text{sen } \theta = 0$ , daí  $\theta = 0$ .

Quando  $x = a$ ,  $\text{sen } \theta = 1$ , daí  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Além disso:  $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \text{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2 \cdot \text{cos}^2 \theta} = a \cdot |\text{cos } \theta| = a \cdot \text{cos } \theta$ , pois  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Portanto:

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ A &= 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \text{cos } \theta \cdot a \cdot \text{cos } \theta \cdot d\theta \\ A &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{cos}^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Utilizando a equação (2.3) temos,

$$\begin{aligned} A &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \text{cos } 2\theta) \\ A &= 2ab \left[ \theta + \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ A &= 2ab \left[ \frac{\pi}{2} + 0 - 0 \right] \\ A &= \pi ab \end{aligned}$$

Com isso temos que a área de uma elipse com semi-eixos  $a$  e  $b$  é  $\pi ab$ .

**Observação 2.6** Tomando  $a = b = r$ , obtemos a fórmula da área de um círculo de raio  $r$  que é:

$$A = \pi r^2.$$

## 2.11 Integração Aproximada

Vimos anteriormente que vários problemas podem ser resolvidos pelo cálculo de integrais definidas. Além disso, observamos que para calcularmos uma integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  por meio do Teorema Fundamental do Cálculo é necessário encontrarmos uma antiderivada de  $f$ . Quando não conseguimos encontrar essa antiderivada, podemos recorrer a métodos numéricos para, ao menos, aproximarmos a integral com uma precisão desejada. Já conhecemos um método para aproximação da integral, vimos que a integral definida é estabelecida como o limite das somas de

Riemann, assim, qualquer soma de Riemann pode ser usada como uma aproximação para a integral.

Como estamos interessados em avaliar o valor numérico de  $\int_a^b f(x)dx$ , podemos proceder da seguinte maneira: dividimos  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de comprimentos iguais a  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , então temos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$$

onde  $c_i$  é um número arbitrário no  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Claramente percebemos que a precisão da aproximação depende da natureza de  $f$  e da magnitude de  $\Delta x$ . Pode ser necessário fazer  $\Delta x$  muito pequeno para obter o grau desejado de precisão, isto, por sua vez, significa que  $n$  é grande e que a soma precedente contém um número grande de termos.

Se  $c_i$  é escolhido como o extremo esquerdo do intervalo, então  $c_i = x_{i-1}$ , e temos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \quad (2.4)$$

De modo análogo, se  $c_i$  é escolhido como o extremo direito do intervalo, então  $c_i = x_i$ , e temos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \quad (2.5)$$

**Observação 2.7** *As aproximações obtidas em (2.4) e (2.5), são denominadas aproximação por extremo esquerdo e aproximação por extremo direito, respectivamente.*

### 2.11.1 Regra do ponto médio

Podemos considerar o caso onde  $c_i$  pode ser tomado como ponto médio  $\bar{c}_i$  do subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , onde essa aproximação, normalmente, será melhor que as aproximações obtidas em (2.4) e (2.5), e com isso

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x [f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)], \quad (2.6)$$

onde  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e  $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$  ponto médio de  $[x_{i-1}, x_i]$ .

### 2.11.2 Regra do trapézio

Pode-se obter outra aproximação, em geral, mais precisa utilizando-se a média das aproximações obtidas nas equações (2.4) e (2.5), isto é:

$$\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \right] \quad (2.7)$$

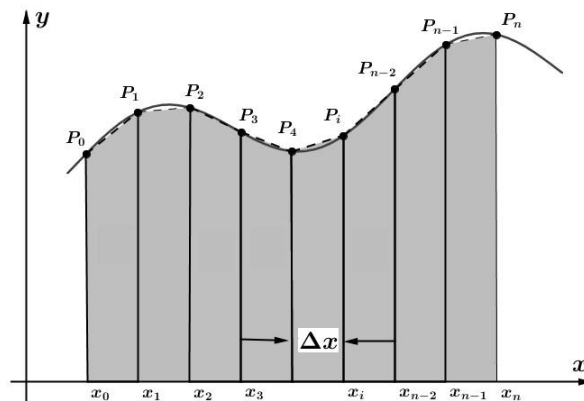
Com exceção de  $f(x_0)$  e  $f(x_n)$ , cada valor funcional de  $f(x_i)$  aparece duas vezes, assim podemos escrever a última expressão como

$$\frac{\Delta x}{2} \left[ f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} 2f(x_k) + f(x_n) \right] \quad (2.8)$$

Como  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e sendo  $f$  contínua em  $[a, b]$ . Definindo-se uma partição regular de  $[a, b]$ , por  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ , então

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (2.9)$$

A razão para o nome Regra do Trapézio pode ser vista na Figura 2.16 abaixo, pois cada quadrilátero obtido por  $x_{i-1}x_i f(x_i)f(x_{i-1})$  é um trapézio cuja altura é  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Além disso podemos observar que  $f(x)$  é não-negativa em  $[a, b]$ .



**Figura 2.16**

A área do trapézio que está acima do  $i$ -ésimo subintervalo é

$$\Delta x \left( \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) = \frac{\Delta x}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \quad (2.10)$$

e se adicionarmos as áreas de todos os trapézios teremos o lado direito da aproximação obtida em (2.9).

**Exemplo 2.2** Aproxime a integral  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ , utilizando a:

a. Regra do Trapézio, com  $n = 5$ .

b. Regra do Ponto Médio, com  $n = 5$ .

**Solução:**

a. Com  $n = 5$ ,  $a = 1$  e  $b = 2$ , temos  $\Delta x = \frac{2-1}{5} = 0,2$ , utilizando a Regra do Trapézio, temos:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\ &\approx 0,1 \left( \frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx 0,695635 \end{aligned}$$

b. Os pontos médios dos cinco subintervalos são 1,1; 1,3; 1,5; 1,7 e 1,9; assim, utilizando a Regra do Ponto Médio, temos:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx \Delta x [f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9)] \\ &\approx \frac{1}{5} \left( \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9} \right) \\ &\approx 0,691908 \end{aligned}$$

■

### 2.11.3 Regra de Simpson

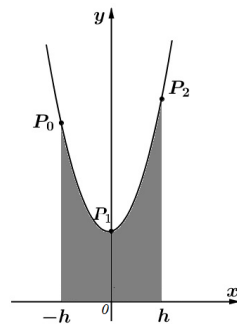
Sejam  $f$  contínua em  $[a, b]$  e  $n$  um número inteiro par. Definida uma partição regular por  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ , então

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (2.11)$$

A ideia por trás da prova da regra de Simpson é que, em lugar de utilizarmos trapézios para aproximarmos o gráfico de  $f$ , utilizamos porções de gráficos de equações da forma  $y = Ax^2 + Bx + C$ , com  $A$ ,  $B$  e  $C$  constantes, ou seja, utilizamos porções de parábolas ou retas.

Como anteriormente, dividamos  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de iguais comprimentos, e seja  $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ , mas dessa vez assumindo que  $n$  é um número *par*. Então, em cada par consecutivo de intervalos podemos aproximar a curva  $y = f(x) \geq 0$  por uma parábola. Se  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  são pontos da parábola tais que  $x_0 < x_1 < x_2$ , então podemos substituir as coordenadas de  $P_0, P_1$  e  $P_2$  na equação  $y = Ax^2 + Bx + C$  e obtermos três equações, que podem ser resolvidas com relação a  $A, B$  e  $C$ .

Como caso especial, suponhamos  $h, y_0, y_1$  e  $y_2$  positivos, e consideremos os pontos  $P_0(-h, y_0)$ ,  $P_1(0, y_1)$  e  $P_2(h, y_2)$ , conforme ilustrado na Figura 2.17 abaixo.



**Figura 2.17**

A área ( $S$ ) da região sob a parábola  $y = Ax^2 + Bx + C$ , de  $x = -h$  até  $x = h$  é dada por

$$\begin{aligned} S &= \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx \\ S &= \left[ \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h \\ S &= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) \end{aligned}$$

Mas, como a parábola  $y = Ax^2 + Bx + C$  passa por  $P_0(-h, y_0)$ ,  $P_1(0, y_1)$  e  $P_2(h, y_2)$ , temos que:

$$\begin{aligned} y_0 &= A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

Assim,  $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$ , por isso, podemos reescrever a área sob a parábola como

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Transladando horizontalmente os pontos  $P_0, P_1$  e  $P_2$ , a área sob o gráfico permanece a mesma. Consequentemente, a fórmula precedente para área  $S$  é verdade para quaisquer pontos  $P_0, P_1$  e  $P_2$ , desde que  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ .

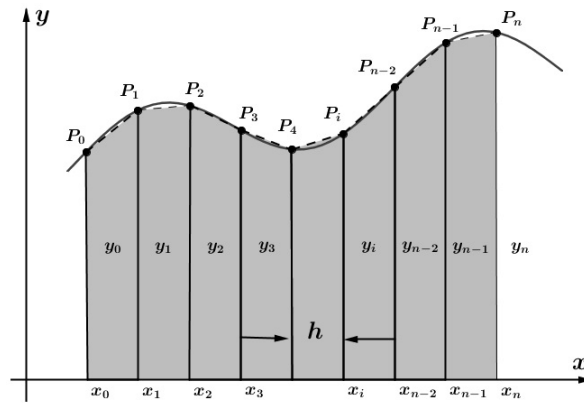


Figura 2.18

Similarmente, a área sob a parábola através de  $P_2, P_3$  e  $P_4$ , de  $x = x_2$  a  $x = x_4$  é

$$S = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Continuando o processo até atingirmos o último terço de pontos  $P_{n-2}, P_{n-1}, P_n$ , a aproximação correspondente da área sob o gráfico seria

$$S = \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Somando estas aproximações, que podem ser obtidas na Figura 2.18, vem

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

Como,  $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$  e  $y_i = f(x_i)$ , temos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

**Observação 2.8** Embora tenhamos obtido essa aproximação para o caso no qual  $f(x) \geq 0$ , essa é uma aproximação razoável para qualquer função contínua  $f$ .

**Observação 2.9** Esse processo é chamado Regra de Simpson, por causa do matemático inglês Thomas Simpson (1710-1761).

**Exemplo 2.3** Use a Regra de Simpson com  $n = 10$  para aproximar  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ .

**Solução:** Colocando  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $n = 10$  e  $\Delta x = 0,1$  na Regra de Simpson, temos:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx \frac{\Delta x}{3} [f(1) + 4f(1,1) + 2f(1,2) + \cdots + 2f(1,8) + 4f(1,9) + f(2)] \\ &\approx \frac{0,1}{3} \left[ 1 + \frac{4}{1,1} + \frac{2}{1,2} + \frac{4}{1,3} + \frac{2}{1,4} + \frac{4}{1,5} + \frac{2}{1,6} + \frac{4}{1,7} + \frac{2}{1,8} + \frac{4}{1,9} + \frac{1}{2} \right] \\ &\approx 0,693150 \end{aligned}$$

■

**Observação 2.10** Nos exemplos 2.2 e 2.3 fizemos aproximações para  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ , utilizando a regra do Ponto Médio, do Trapézio e de Simpson, mas essa aproximação também poderia ser obtida utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, uma vez que podemos encontrar, “facilmente”, uma antiderivada da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, teríamos:  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$ , com o auxílio do computador, obtemos,  $\ln 2 = 0,69314718$ , ou seja, os resultados obtidos nos fornecem uma “boa” aproximação para  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ .

### 2.11.4 Aplicação da integração numérica

Um aspecto importante da integração numérica é que ela pode ser usada para aproximar a integral definida de uma função descrita por meio de uma tabela, gráfico ou determinada por um experimento científico por meio de leituras de instrumentos ou dados coletados (pode não haver fórmula para a função).

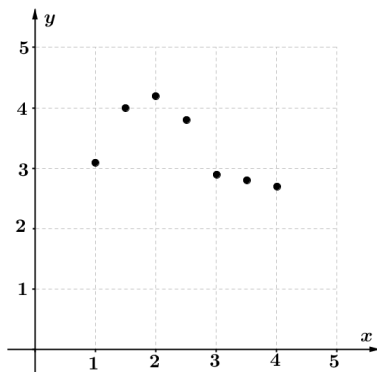
**Exemplo 2.4** Determinado aluno se deparou com uma parede, a qual tinha um formato um pouco exótico, e ficou interessado em determinar a área da superfície dessa parede, para isso ele utilizou um instrumento de medida de comprimento, e coletou os seguintes dados:

$x$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$y$	3,1	4,0	4,2	3,8	2,9	2,8	2,7

Onde  $x$  representa a abscissa da parede, e  $y$  representa sua, respectiva, altura. Com base nas informações obtidas, qual a área (aproximada) da superfície da parede?



**Solução:** A Figura 2.19 é o gráfico dos pontos  $(x, y)$ .



**Figura 2.19**

Considerando  $y$  como função de  $x$ , digamos  $y = f(x)$  com  $f$  contínua, então a área da superfície  $A$  pode ser obtida por:

$$A = \int_1^4 f(x) dx$$

Utilizando a regra do trapézio vista em (2.9), com  $n = 6$  e  $\frac{b-a}{2n} = \frac{4-1}{12} = 0,5$ , temos:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 f(x) dx \\ &\approx 0,25[3,1 + 2 \cdot (4,0) + 2 \cdot (4,2) + 2 \cdot (3,8) + 2 \cdot (2,9) + 2 \cdot (2,8) + 2,7] \\ &\approx 10,3 \end{aligned}$$

■

No que segue-se passamos a discussão do comprimento de curvas planas.

# Capítulo 3

## Cálculo de Comprimento de Curvas

### Planas

Neste capítulo faremos um estudo a respeito da medida de um segmento e em seguida utilizaremos conhecimentos de cálculo diferencial e integral para calcularmos comprimentos de curvas.

#### 3.1 Medida de um Segmento

Inicialmente fixemos um segmento de reta  $u$ , o qual chamaremos de *segmento unitário* (ou unidade de comprimento). Por definição, o comprimento de  $u$  será igual a 1. Ainda por definição, todos os segmentos de reta congruentes a  $u$  terão comprimento 1.

Dado um segmento de reta  $AB$ , se existir um ponto intermediário  $C$  (situado em  $AB$ ) tal que os segmentos  $AC$  e  $CB$  sejam congruentes a  $u$ , então o comprimento de  $AB$  será 2, e escrevemos  $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2$ .

De modo mais geral, dado um número inteiro positivo  $n$ , se for possível obter  $n - 1$  pontos intermediários  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  no segmento  $AB$ , de tal modo que os  $n$  segmentos  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$  sejam todos congruentes ao segmento unitário  $u$ , então o comprimento de  $AB$  será  $n$ , e escrevemos:

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{n-1}B} = n$$

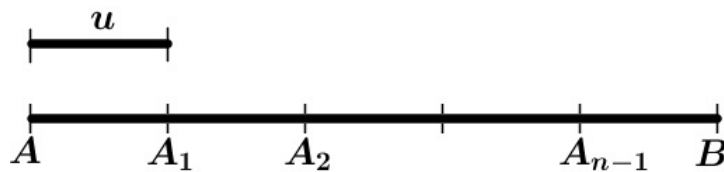


Figura 3.1

Diremos que  $\overline{AB} = n$ , porque  $AB$  se decompõe em  $n$  segmentos de retas justapostos, todos de comprimento 1. Estes são os segmentos de reta cujos comprimentos são números inteiros.

**Observação 3.1** Quando  $\overline{AB} = n$  ( $n$  inteiro), é natural dizer que  $AB$  contém  $n$  vezes o segmento unitário  $u$ .

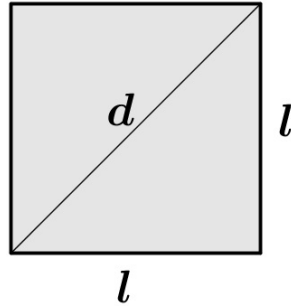
Podemos conseguir um segmento  $AB$  que não contém o segmento unitário  $u$  um número inteiro de vezes. Por exemplo, o segmento  $AB$  pode ser menor do que o segmento unitário  $u$ , neste caso, a medida de  $\overline{AB}$  não pode ser um número inteiro. Para definirmos o comprimento de  $AB$ , façamos inicialmente uma hipótese. Suponhamos que, embora  $AB$  não contenha  $u$  um número inteiro de vezes, exista entretanto um segmento menor,  $w$ , tal que  $w$  esteja  $n$  vezes contido em  $u$  e  $m$  vezes contido em  $AB$ , sendo  $m$  e  $n$  números inteiros.

O segmento  $w$  é chamado, por definição, de submúltiplo comum de  $AB$  e  $u$ . Neste caso, dizemos que os segmentos  $AB$  e  $u$  são *comensuráveis*. Como  $w$  está  $n$  vezes contido em  $u$ , é natural dizer que a medida de  $w$  é  $\frac{1}{n}$  e, portanto, que o comprimento de  $AB$  é  $m$  vezes  $\frac{1}{n}$ , ou seja,  $\overline{AB} = \frac{m}{n}$ .

Muitos segmentos não são comensuráveis, ou seja, fixado o segmento unitário  $u$ , não existem inteiros  $m$  e  $n$ , tal que um segmento  $w$  esteja contido  $n$  vezes em  $u$  e  $m$  vezes em  $AB$ .

**Exemplo 3.1** Mostre que se tomarmos o lado de um quadrado como segmento unitário, a diagonal desse quadrado não pode ter comprimento racional, ou seja, o lado e a diagonal de um quadrado unitário são grandezas incomensuráveis.

**Solução:**



**Figura 3.2**

Se o lado e a diagonal de um quadrado unitário fossem comensuráveis, tomando o lado como unidade, obteríamos para comprimento da diagonal um número racional  $\frac{p}{q}$ . Aplicando o “Teorema de Pitágoras” ao triângulo formado pelos lados e a diagonal do quadrado, conforme Figura 3.2 temos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2, \text{ com } p \text{ e } q \text{ inteiros.}$$

Que é uma contradição, pois os fatores primos dos inteiros  $p^2$  e  $q^2$  aparecem um número par de vezes, pois estão elevados ao quadrado, e com isso,  $2q^2$  contém um número ímpar de fatores iguais a 2, assim  $2q^2$  não pode ser igual a  $p^2$ , com isso o lado e a diagonal de um quadrado unitário não são comensuráveis.

■

**Observação 3.2** *A medida de um segmento incomensurável com o segmento unitário  $u$  é um número irracional.*

Para encontrarmos os valores aproximados (por falta e por excesso) de um segmento não comensurável, procedemos da seguinte maneira:

Seja dado um número inteiro positivo  $n$  (por exemplo,  $n = 1000$  ou  $n =$  um milhão). Dividimos o segmento unitário  $u$  em  $n$  partes iguais. Cada uma dessas partes é um segmento de comprimento  $\frac{1}{n}$ . Seja  $w$  uma dessas partes, existe um inteiro positivo  $m$  tal que  $AB$  contém  $m$  segmentos congruentes a  $w$  e ainda sobra alguma coisa, porém  $m + 1$  segmentos congruentes a  $w$ , justapostos, formam um segmento maior do que  $AB$ . Quando isso ocorre, tem-se:

$$\frac{m}{n} < \overline{AB} < \frac{m+1}{n}$$

Ou seja, o número racional  $\frac{m}{n}$  é uma aproximação por falta para o comprimento de  $AB$ , com erro inferior a  $\frac{1}{n}$ , da mesma forma  $\frac{m+1}{n}$  é uma aproximação por excesso do número irracional que expressa a medida do segmento  $\overline{AB}$ , com erro inferior a  $\frac{1}{n}$ .

### 3.2 Comprimento de Gráfico de Função

Sejam  $y = f(x)$  com derivada contínua em  $[a, b]$  e  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ . Indicaremos por  $L(P)$  o comprimento da poligonal de vértices  $P_i = (x_i, f(x_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

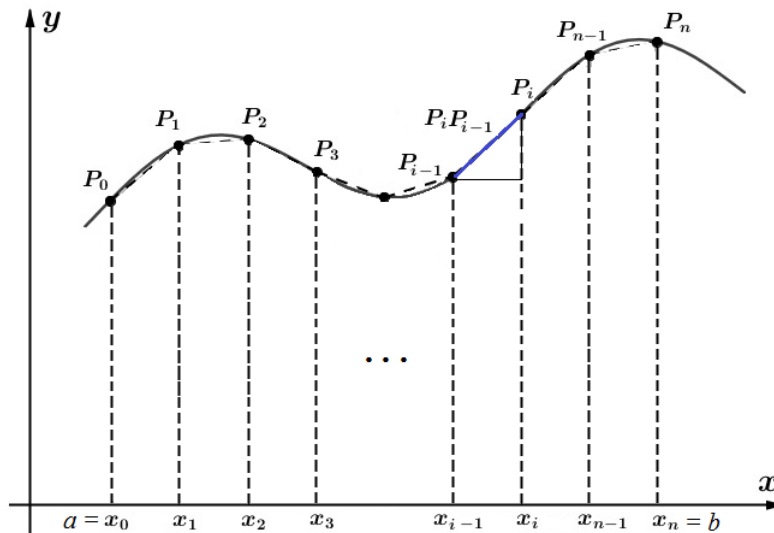


Figura 3.3

Aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento de cada segmento  $P_iP_{i-1}$ , conforme Figura 3.3, temos:

$$P_iP_{i-1} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Assim,

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Pelo Teorema A.9, para cada  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , existe  $c_i \in (x_i, x_{i-1})$  tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i, \text{ em que } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Com isso,

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2}$$

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 [1 + (f'(c_i))^2]}$$

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x$$

Para  $\max\{\Delta x_i\}$  tendendo a zero,  $L(P)$  tenderá para  $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

**Definição 3.1** Seja  $f$  suave em  $[a, b]$ , definimos o comprimento  $L$  do gráfico de  $f$ , ou da curva  $y = f(x)$ , de  $A(a, f(a))$  até  $B(b, f(b))$  é dado por:

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.1)$$

**Definição 3.2** Seja  $x = g(y)$  com  $g$  suave no intervalo  $[c, d]$ . O comprimento do  $L$  do gráfico de  $g$ , ou da curva  $x = g(y)$ , de  $(g(c), c)$  até  $(g(d), d)$  é dado por:

$$L_c^d = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.2** Encontrar o comprimento do arco da curva  $y = x^{\frac{2}{3}}$  do ponto  $(1, 1)$  a  $(8, 4)$ .

**Solução:** Como  $y = f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ,  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ . Aplicando a equação (3.1), temos

$$L = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}} dx = \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$$

Utilizando a substituição  $u = 9x^{\frac{2}{3}} + 4$ , temos  $du = 6x^{-\frac{1}{3}} dx$ .

Para  $x = 1 \Rightarrow u = 13$  e  $x = 8 \Rightarrow u = 40$ . Com isso

$$L = \frac{1}{18} \int_{13}^{40} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$L = \frac{1}{18} \left[ \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{13}^{40}$$

$$L = \frac{1}{27} \left( 40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$L \approx 7,6$$

De modo análogo poderíamos ter feito  $x = g(y) = y^{\frac{3}{2}}$ ,  $\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$ .

Aplicando a equação (3.2), teríamos:

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4 + 9y} dy \\ &= \frac{1}{18} \left[ \frac{2}{3} (4 + 9y)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{27} \left( 40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$L \approx 7,6$$

■

**Observação 3.3 (Interpretação Geométrica da Diferencial  $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ )**  
 Seja  $s = s(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , o comprimento do trecho do gráfico de extremidades  $(a, f(a))$  e  $(x, f(x))$ , conforme Figura 3.4. Sejam  $\Delta s$  e  $\Delta y$  as variações em  $s$  e  $y$  correspondentes à variação  $dx$  em  $x$ , com  $dx > 0$ . Para  $dx$  suficientemente pequeno,  $\Delta y \approx dy$  e  $\Delta^2 s \approx d^2 s + \Delta^2 y$ , ou seja,  $\Delta s \approx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ .

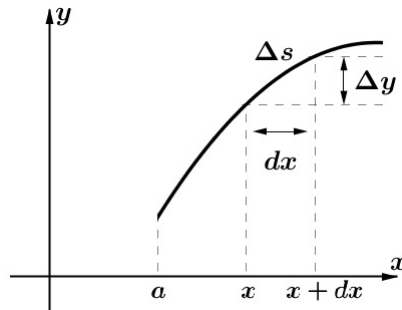


Figura 3.4

### 3.3 Comprimento de uma Curva dada em Forma Paramétrica

**Definição 3.3** Por uma curva em  $\mathbb{R}^2$  entendemos uma função que a cada  $t$  pertencente a um intervalo  $I$  associa um ponto  $(x(t), y(t))$  em  $\mathbb{R}^2$ , em que  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções definidas em  $I$ . Dizemos que  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ ,  $t \in I$  são as equações paramétricas da curva.

$$C = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$$

Suponhamos que  $s = s(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , seja o comprimento do trecho da curva de extremidades  $A = (x(a), y(a))$  e  $P(t) = (x(t), y(t))$ . Sejam  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta s$  as variações em  $x$ ,  $y$  e  $s$  correspondentes à variação  $\Delta t$  em  $t$ , com  $\Delta t > 0$ . Através da Figura 3.5, podemos observar que para  $\Delta t$  suficientemente pequeno,

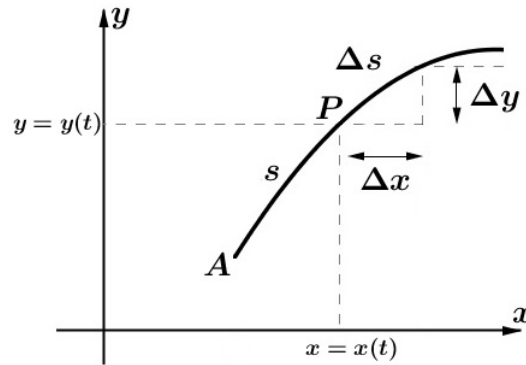


Figura 3.5

Temos que  $(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$  e, portanto,  $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , multiplicando e dividindo por  $\Delta t$ , obtemos:  $\Delta s \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$ , com isso, é razoável esperar que a diferencial da função  $s = s(t)$  seja:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

**Definição 3.4** O comprimento da curva  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , por:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (3.3)$$

**Observação 3.4** O gráfico da função  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , pode ser dado em forma paramétrica por  $x = t$  e  $y = f(t)$ , com isso a fórmula para o comprimento do gráfico de uma função é um caso particular da Equação (3.3).

### 3.3.1 Comprimento da circunferência

Uma parametrização para a circunferência de raio  $R$  e com centro na origem é:  $x = R \cos t$  e  $y = R \sin t$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ .



Temos que:  $\frac{dx}{dt} = -R\text{sen } t$  e  $\frac{dy}{dt} = R\text{cos } t$ , segue da Equação (3.3) que:

$$\begin{aligned} L_{\bullet} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ L_{\bullet} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\text{sen } t)^2 + (R\text{cos } t)^2} dt \\ L_{\bullet} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\underbrace{\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t}_1)} dt \\ L_{\bullet} &= R[t]_0^{2\pi} \\ L_{\bullet} &= 2\pi R \end{aligned}$$

■

### 3.3.2 Comprimento da elipse.

Uma parametrização para a elipse com centro na origem é:  $x = a\text{cos } t$  e  $y = b\text{sen } t$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ . Temos que:  $\frac{dx}{dt} = -a\text{sen } t$  e  $\frac{dy}{dt} = b\text{cos } t$ , segue da equação (3.3) que:

$$\begin{aligned} L_{elipse} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ L_{elipse} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\text{sen } t)^2 + (b\text{cos } t)^2} dt \\ L_{elipse} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\text{sen}^2 t + b^2\text{cos}^2 t} dt \end{aligned}$$

Onde a última integral não pode ser representada usando funções elementares, pois  $a^2 \neq b^2$ . Com isso não conseguimos calcular, de modo análogo ao feito no cálculo do comprimento da circunferência, o comprimento da elipse.

No entanto é possível realizarmos uma estimativa para o comprimento de uma elipse através do método de aproximação numérica de integrais.

## 3.4 Comprimento de Curva em Coordenadas Polares

Consideremos a curva dada em coordenadas polares por

$$\rho = \rho(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

como sendo o gráfico de uma função  $f$  no intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Reescrevendo a curva em coordenadas paramétricas, teremos

$$x = \rho(\theta) \cos \theta \quad e \quad y = \rho(\theta) \sin \theta, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

Utilizando a equação (3.3), e substituindo o parâmetro  $t$  por  $\theta$ , temos:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Utilizando o Teorema A.5, temos que:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta \quad e \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta,$$

Assim:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta\right)^2 - 2 \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta \cdot \rho \sin \theta + (\rho \sin \theta)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta\right)^2 + \\ &\quad + 2 \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta \cdot \rho \cos \theta + (\rho \cos \theta)^2 \\ &= \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 + \rho^2 \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 \\ &= \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2, \quad em \quad que \quad \rho = \rho(\theta). \end{aligned}$$

Com isso, o comprimento da curva  $\rho = \rho(\theta)$  com  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , dada em coordenadas polares, é:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (3.4)$$

**Observação 3.5 (Interpretação Geométrica da Diferencial  $\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$ )**

Seja  $s = s(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$ , o comprimento da curva de extremidades  $(\alpha, \rho(\alpha))$  e  $P = (\theta, \rho(\theta))$ , além disso, sejam  $\Delta s$  e  $\Delta \rho$  as variações em  $s$  e  $\rho$  correspondentes à variação  $d\theta$ , em  $\theta$ , com  $d\theta \geq 0$ . Temos que o comprimento do arco de circunferência PM de abertura  $d\theta$  e raio  $\rho = \rho(\theta)$  é  $\rho d\theta$ , além disso, o comprimento do segmento MN é  $\Delta \rho$ . Na Figura 3.6, Tomando-se  $d\theta$  suficientemente pequeno, temos  $\Delta \rho \approx d\rho$  e PMN é bem próximo de um triângulo retângulo, com isso, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

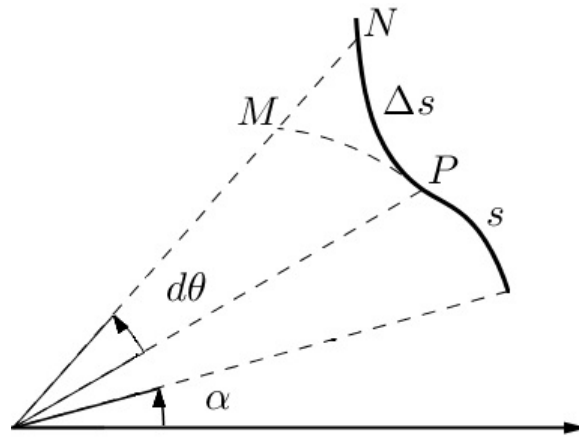


Figura 3.6

$$(\Delta s)^2 \approx (\rho d\theta)^2 + (\Delta \rho)^2, \text{ ou seja, } \Delta s \approx \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

**Exemplo 3.3** Calcular o comprimento curva de equação polar  $\rho = 2 \cos \theta$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

**Solução:** Temos que o comprimento  $L$  de uma curva em coordenada polar pode ser calculado pela equação (3.4), e como  $\frac{d\rho}{d\theta} = -2 \operatorname{sen} \theta$  temos:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{(2 \cos \theta)^2 + (-2 \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4 \underbrace{(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi d\theta \\ &= 2 [\theta]_0^\pi \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

■

**Observação 3.6** Vimos no Exemplo A.14 que a representação gráfica de  $\rho = 2 \cos \theta$ , é uma circunferência, com isso, se tomarmos curva dada por  $\rho = 2r \cos \theta$  também temos uma circunferência, porém com raio  $r$ . Aplicando a equação (3.4), mais uma

vez, temos que o comprimento da circunferência de raio  $r$  será:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{(2r \cos \theta)^2 + (-2r \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4r \underbrace{(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1} d\theta \\ &= 2r \int_0^\pi d\theta \\ &= 2r [\theta]_0^\pi \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

■

Para encerrar, apresentaremos os apêndices descritos no sumário, apresentamos as noções básicas utilizadas no desenvolvimento do nosso trabalho.

# Apêndice A

## Definições, Lemas e Teoremas do Cálculo Diferencial e Integral

Neste apêndice faremos um estudo de limites, continuidade, derivadas e integrais, onde ao término dele, enunciaremos o teorema fundamental do cálculo e faremos uma breve demonstração do mesmo.

### A.1 Limite de uma Função

Intuitivamente, dizemos que o limite de uma função  $f(x)$ , quando  $x$  tende a um número  $a$  é  $L$ , se quanto mais aproximarmos  $x$  de  $a$ , mais próximo  $f(x)$  estará de  $L$ .

Notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Que significa:  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a$  (Lê-se:  $f(x)$  tende a  $L$  quando  $x$  tende a  $a$ )

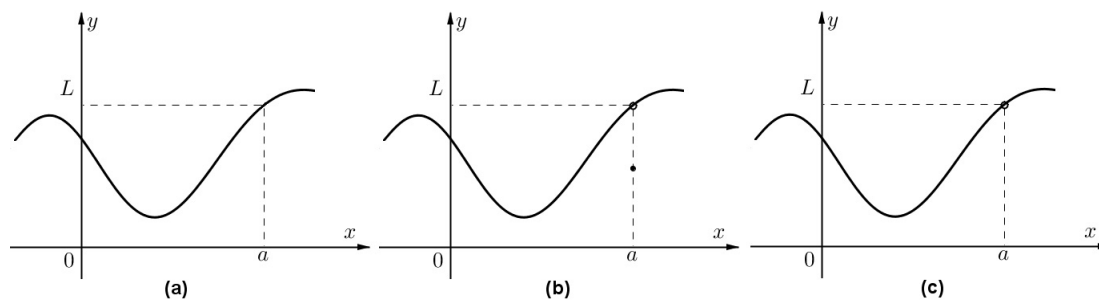


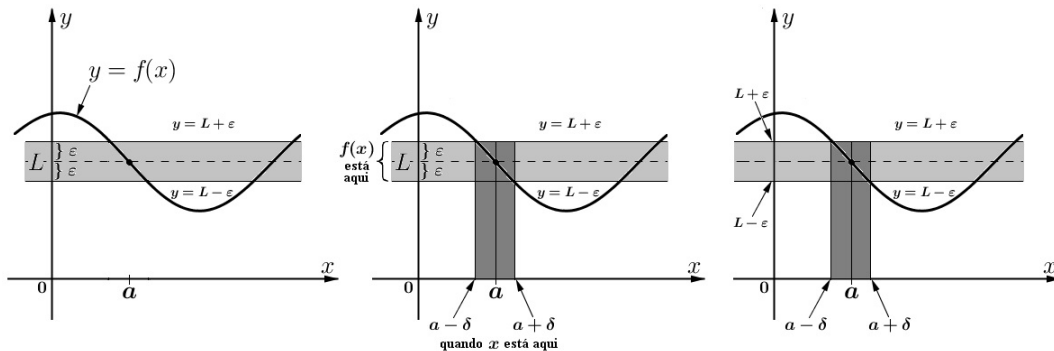
Figura A.1

Na Figura A.1, temos o gráfico de três funções, onde em (c),  $f(a)$  não está definida e, em (b),  $f(a) \neq L$ . Mas em cada caso, não importando o que acontece em  $a$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

**Definição A.1** *Sejam  $f$  uma função e  $a$  um ponto do domínio de  $f$ , ou extremidade de um dos intervalos que compõe o domínio de  $f$ . Dizemos que  $f$  tem limite  $L$ , em  $a$ , se, dado  $\epsilon > 0$ , existir um  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in D_f$ ,*

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \tag{A.1}$$

Uma interpretação geométrica de limite pode ser dada em termos do gráfico de uma função, conforme a Figura A.2. Se dado  $\epsilon > 0$ , então traçamos as retas horizontais  $y = L + \epsilon$  e  $y = L - \epsilon$ , além do gráfico de  $f$ , conforme a figura abaixo. Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então podemos achar um número  $\delta > 0$  tal que, se limitarmos  $x$  ao intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  e tomarmos  $x \neq a$ , a curva  $y = f(x)$  ficará entre as retas  $y = L - \epsilon$  e  $y = L + \epsilon$ . Podemos perceber que se  $\delta$  tiver sido encontrado, então para qualquer  $\delta$  menor também funcionará, independentemente de quão pequeno ele for.



**Figura A.2**

**Observação A.1** *O número  $L$  quando existe é único.*

**Exemplo A.1** *Sejam  $f(x) = c$ , em que  $c$  é uma constante, e  $g(x) = x$  (função identidade), mostre que:*

i.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

ii.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$

**Solução:**

- i.  $|f(x) - c| = |c - c| = 0$ , com isso dado  $\epsilon > 0$ , e tomando-se um  $\delta > 0$  qualquer, temos  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| = |c - c| < \epsilon$ , portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ .
- ii.  $|g(x) - a| = |x - a|$ , tomando-se  $\delta = \epsilon$  temos  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - a| = |x - a| < \epsilon$ , portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$ .

■

**Teorema A.1 (Propriedades Operatórias do Limite)** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , então:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x) \pm g(x)] = c \cdot L \pm M$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$ , desde que  $M \neq 0$ .

**Demonstração:**

1. Mostremos inicialmente que  $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot L$ .

De fato: se  $c = 0$  então  $c \cdot f(x) = 0$ ,  $\forall x$  e, daí,  $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0 = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L$ . Se  $c \neq 0$ , como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - a| < \delta$  então  $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$ , ou seja,  $|c f(x) - cL| < \epsilon$ .  
Mostrando, assim, que  $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = cL$ .

Agora mostremos que  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$ , logo dado  $\epsilon > 0$  devemos encontrar um  $\delta > 0$  tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon, \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Utilizando a desigualdade triangular temos:

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |(f(x) - L)| + |(g(x) - M)|$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , existem  $\delta_1$  e  $\delta_2$  tais que,

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_1$$

e

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , como  $|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \leq |(f(x) - L)| + |(g(x) - M)|$  então,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Logo  $|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ , com isso,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} c.f(x) = c.L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} [c.f(x) \pm g(x)] = c.L \pm M.$$

2. Notemos que:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - LM &= f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM \\ &= f(x)[g(x) - M] + [f(x) - L]M \end{aligned}$$

Além disso,  $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) - M] = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] = 0$ .

Utilizando o item anterior temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x) - LM] &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x)[g(x) - M] + [f(x) - L]M] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x)[g(x) - M]] + \lim_{x \rightarrow a} [[f(x) - L]M] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \overbrace{[g(x) - M]}^{0, \text{ quando } x \rightarrow a}] + M \overbrace{\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L]}^0 \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] - \lim_{x \rightarrow a} [LM] &= 0 \end{aligned}$$

daí,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [LM]$$

portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = L.M$$



3. Mostremos inicialmente que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ , com  $g(x) \neq 0$  e  $M \neq 0$ . Para isso, consideremos que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{g(x) \cdot M} \right| = \frac{1}{|M| \cdot |g(x)|} \cdot |g(x) - M|$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , existe um  $\delta_1 > 0$  tal que se  $0 < |x - a| < \delta_1$ , então

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2},$$

e portanto

$$|M| = |M - g(x) + g(x)| \leq |M - g(x)| + |g(x)| < \frac{|M|}{2} + |g(x)|$$

Isso mostra que  $|g(x)| > \frac{|M|}{2}$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_1$ .

Daí, para esses valores de  $x$ ,

$$\frac{1}{|M \cdot g(x)|} = \frac{1}{|M| \cdot |g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$$

Também existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $|g(x) - M| < \frac{M^2}{2} \cdot \epsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_2$ .

Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Logo, para  $0 < |x - a| < \delta$ , temos

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|M \cdot g(x)|} < \frac{2}{M^2} \cdot \frac{M^2}{2} \cdot \epsilon = \epsilon,$$

Isso mostra que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ .

Aplicando a propriedade anterior, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

■

**Exemplo A.2** Sendo  $m, b$  e  $a$  números reais, mostre que:  $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$ .

**Solução:** Pelo Teorema A.1  $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = \lim_{x \rightarrow a} (mx) + \lim_{x \rightarrow a} b$ , e pelo exemplo (A.1) temos que  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  e  $\lim_{x \rightarrow a} b = b$ , portanto  $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$ .

■

## A.2 Continuidade

Dizemos que uma função  $f$  é contínua em um número  $a$ , se:

1.  $f(a)$  é definida.
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe.
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Estas condições podem ser resumida apenas no item (3.), pois se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , então  $f(a)$  é definida e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, ou seja, as duas primeiras condições estão satisfeitas. Assim, podemos também definir:

**Definição A.2** *Sejam  $f$  uma função, e  $a$  um ponto de seu domínio. Então  $f$  é contínua em  $a$  se, e somente se,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta; \forall x \in D_f, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

**Observação A.2** *Se ao menos uma das três condições não forem satisfeitas, dizemos que a função é descontínua em  $a$ , ou que, a função tem uma **descontinuidade** em  $a$ .*

**Exemplo A.3** *Mostre que a função constante  $f(x) = c$ , é contínua qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$ .*

**Solução:** Temos que:  $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0, \forall x$  e  $\forall a$ , com isso, dado  $\epsilon > 0$  e tomando-se um  $\delta > 0$  qualquer, temos:  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |c - c| < \epsilon$ , portanto a função constante é contínua.

■

**Exemplo A.4** *Mostre que a função afim  $f(x) = bx + c$ , ( $b$  e  $c$  constantes) é contínua qualquer que sejam  $b, c \in \mathbb{R}$ .*

**Solução:** Temos que: se  $b = 0$ ,  $f(x)$  é constante. Logo, pelo Exemplo A.3,  $f(x)$  é contínua.

Se  $b \neq 0$ , temos  $|f(x) - f(a)| = |bx + c - ba - c| = |b(x - a)| = |b| \cdot |x - a|$ . Com isso,  $\forall \epsilon > 0, |f(x) - f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\epsilon}{|a|}$ .

Tomando-se  $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$ , temos:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

logo a função afim é contínua. ■

**Teorema A.2** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $a$ , e  $c$  uma constante. Então as seguintes funções também são contínuas em  $a$ :*

1.  $c.f \pm g$
2.  $f.g$
3.  $\frac{f}{g}$ , desde que  $g(a) \neq 0$ .

**Demonstração:**  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $a$ , logo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ , utilizando as propriedades do limite, temos:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (c.f \pm g) = \lim_{x \rightarrow a} [c.f(x) \pm g(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = (c.f \pm g)(a)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f.g) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = (f.g)(a)$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \left[ \frac{f}{g} \right] (a)$ .

**Exemplo A.5** *Mostre que qualquer polinômio é contínuo em todo seu domínio, ou seja, é contínuo em  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .*

**Solução:** Uma vez que um polinômio é uma função da forma  $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ , onde  $c_0, c_1, \dots, c_n$  são constantes e pelo Exemplo (A.1), temos que:  $\lim_{x \rightarrow a} c_0 = c_0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} x^m = a^m$  (fazendo  $g(x) = f(x)$  no Teorema A.1, item 2. ), com isso  $f(x) = x^m$  é contínua e  $g(x) = c.x^m$  também é contínua, como  $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$  é uma soma de funções contínuas, logo qualquer polinômio é contínuo em todo seu domínio. ■

### A.3 Derivada de uma Função

**Definição A.3** *Sejam  $f$  uma função e  $a$  um ponto de seu domínio, a função  $f$  é derivável em  $a$  se o limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$ .*

*Quando existe o limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  esse é chamado de a derivada da função  $f$  no ponto  $a$ , e é denotado pelo símbolo  $f'(a)$ .*

*Se  $f$  admite derivada em  $a$ , então dizemos que  $f$  é derivável ou diferenciável em  $a$ .*

Utilizamos a seguinte notação  $f'(a)$  (lê-se:  $f$  linha de  $a$ ).

Dizemos que  $f$  é derivável ou diferenciável em  $A \subset D_f$  se  $f$  for derivável em cada  $a \in A$ .

Na Definição A.3 temos que:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Fazendo:  $x - a = h$ , temos que se  $x \rightarrow a \Rightarrow x - a \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 0$ , daí,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Se substituirmos  $a$  por uma variável  $x$ , obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

**Observação A.3** *A função  $f'$  é denominada derivada de  $f$ . O domínio de  $f'$  é o conjunto  $\{x : f'(x) \text{ existe}\}$ , note que esse domínio pode ser menor que o domínio de  $f$ .*

**Observação A.4 (Notações Usadas para Derivada)** *Utilizando a notação  $y = f(x)$  para indicar que a variável  $x$  é independente, algumas notações usadas para denotar a derivada são:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

**Exemplo A.6** *Calcular a derivada da função afim  $f(x) = kx + b$ , com  $k, b \in \mathbb{R}$ , em um ponto  $a$  qualquer do domínio de  $f$ .*

**Solução:** Temos que:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[k \cdot (a+h) + b] - (ka + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ka + kh + b - ka - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k \\ f'(a) &= k, \forall a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

**Teorema A.3** *Se  $f$  for diferenciável em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .*

**Demonstração:** Para provarmos que  $f$  é contínua em  $a$ , devemos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Por hipótese,  $f$  é diferenciável em  $a$ , logo  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe e é igual a  $f'(a)$ . Sendo  $x \neq a$ , temos que:  $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$ , aplicando limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right] \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) &= f'(a) \cdot 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) &= 0 \end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

■

**Observação A.5** *Pelo Teorema A.3 temos que: Se  $f$  não for contínua em  $a$ , então  $f$  não poderá ser derivável em  $a$ .*

**Observação A.6** *A recíproca do Teorema A.3 é falsa, ou seja, se uma função é contínua em um ponto  $a$  não está garantido que ela seja diferenciável em  $a$ . Por exemplo, a função  $f(x) = |x|$ , que é contínua em  $0$ , não é diferenciável em  $0$ .*

**Teorema A.4** *Seja  $n$  um número natural, então  $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ .*

**Demonstração:** Por definição, temos que  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , fazendo  $x+h = t$ , quando  $h \rightarrow 0$  temos que  $t \rightarrow x$ . Daí,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-x)}{(t-x)} \cdot (t^{n-1} + t^{n-2} \cdot x + t^{n-3} \cdot x^2 + \dots + t \cdot x^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

■

**Teorema A.5 (Propriedades Operatórias da Derivada)** *Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis e  $c$  uma constante. Então:*

1.  $\frac{d}{dx} [c \cdot f(x) \pm g(x)] = c \cdot \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$
2.  $\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$
3.  $\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$

**Demonstração:**

1. Seja  $F(x) = c \cdot f(x) \pm g(x)$ , temos que:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[c \cdot f(x+h) \pm g(x+h)] - [c \cdot f(x) \pm g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= c \cdot f'(x) \pm g'(x). \end{aligned}$$

2. Seja  $G(x) = f(x).g(x)$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x+h) + f(x).g(x+h) - f(x).g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)].g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)].f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
 &= f'(x).g(x) + f(x).g'(x).
 \end{aligned}$$

3. Seja  $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 H'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h).g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x) + f(x).g(x) - f(x).g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h).g(x)} \\
 &= \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)].g(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)].f(x)}{h} \right\} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h).g(x)} \\
 &= [f'(x).g(x) - g'(x).f(x)] \cdot \frac{1}{g(x).g(x)} \\
 &= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}.
 \end{aligned}$$

■

**Exemplo A.7** Determinar  $f'(x)$ , sendo  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ .

**Solução:** Utilizando o Teorema A.5 e o Teorema A.4, temos que:

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x^2 + 4) - x \cdot (x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 + 4) - x \cdot (2x + 0)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

■

**Teorema A.6 (Limites Trigonômétricos Fundamentais)** *Temos que:*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1 \text{ e } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0$$

A demonstração do Teorema A.6 pode ser encontrada em Swokowski [18], pg. 151.

**Teorema A.7 (Derivada de Funções Trigonômétricas)** *Para as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, são válidas as seguintes regras de derivação:*

1.  $D_x \text{sen } x = \cos x$
2.  $D_x \cos x = -\text{sen } x$
3.  $D_x \text{tg } x = \sec^2 x$
4.  $D_x \text{cotg } x = -\text{csc}^2 x$
5.  $D_x \text{sec } x = \text{sec } x \cdot \text{tg } x$
6.  $D_x \text{csc } x = -\text{csc } x \cdot \text{cotg } x$

**Demonstração:** Demonstraremos (1.) e (2.), os demais itens podem ser obtidos facilmente utilizando o Teorema A.5.

1.

$$\begin{aligned} D_x \text{sen } x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot \cos h + \cos x \cdot \text{sen } h - \text{sen } x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot (\cos h - 1) + \cos x \cdot \text{sen } h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \text{sen } x \cdot \left( \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \cdot \left( \frac{\text{sen } h}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

Pelo Teorema A.6  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1$  e  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$ ,

Logo,

$$D_x \text{sen } x = (\text{sen } x) \cdot (0) + \cos(x) \cdot 1$$

$$D_x \text{sen } x = \cos x.$$



2. De modo análogo, mostremos que:

$$\begin{aligned}
 D_x \cos x &= -\operatorname{sen} x \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \cos x \cdot \left( \frac{\cos h - 1}{h} \right) - \operatorname{sen} x \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Mais uma vez, utilizando o Teorema A.6, temos:

$$D_x \cos x = (\cos x) \cdot (0) - (\operatorname{sen} x) \cdot (1)$$

$$D_x \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

■

**Teorema A.8 (Regra da Cadeia)** *Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos e  $a \in I$ . Suponha que  $g : I \rightarrow J$  e  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  são funções deriváveis em  $a$  e  $g(a)$ , respectivamente. Então a função composta  $f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $a$  e vale*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

**Demonstração:** Vamos, primeiramente, dividir a demonstração em dois casos:

1.  $g'(a) \neq 0$ .

Neste caso, existe  $\delta > 0$  tal que  $g(x) \neq g(a)$  para todo  $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ . Além disso, como  $g$  é contínua em  $a$ , pois é derivável em  $a$ , segue que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{u \rightarrow g(a)} \frac{f(u) - f(g(a))}{u - g(a)} = f'(g(a)).$$

E, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a))g'(a)$$

Note que na segunda igualdade usamos que o limite do produto é o produto dos limites. O que mostra que  $(f \circ g)'(a)$  existe e coincide com  $f'(g(a))g'(a)$ .

2.  $g'(a) = 0$ .

Agora, temos que mostrar que  $(f \circ g)'(a) = 0$ . Vamos dividir novamente a prova em 3 subcasos, o que concluirá a prova do teorema:

2.1. Existe  $\delta > 0$  tal que  $g(x) = g(a)$  para todo  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ .

Neste caso,  $(f \circ g)$  é constante em  $(a - \delta, a + \delta)$  e, portanto,  $(f \circ g)'(a) = 0$ .

2.2. Existe  $\delta > 0$  tal que  $g(x) \neq g(a)$  para todo  $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ .

Análogo ao *Caso 1*.

2.3. Para todo  $\delta > 0$ , existem  $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$  tais que  $g(x_1) = g(a)$  e  $g(x_2) \neq g(a)$ .

Defina  $A = \{x \in I : g(x) = g(a)\}$  e  $B = \{x \in I : g(x) \neq g(a)\}$ .

Como, por hipótese,  $a$  é ponto de acumulação tanto de  $A$  quanto de  $B$  e  $I$  é a união disjunta de  $A$  e  $B$ , para mostrar que  $(f \circ g)'(a)$  é igual a 0, é suficiente mostrar que  $\lim_{x \in A, x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = 0$  e que

$$\lim_{x \in B, x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = 0.$$

O primeiro limite é obviamente igual a 0, pois  $f \circ g$  é constante igual a  $f(g(a))$  em  $A$  e o segundo mostra-se da mesma forma que no *Caso 1* que ele coincide com  $f'(g(a))g'(a) = 0$ .

■

**Observação A.7** Esta regra é conhecida como regra da cadeia.

**Lema A.8.1** Se uma função  $f$  é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e toma seu máximo ou mínimo em um ponto  $c$  do intervalo aberto  $(a, b)$ , então ou  $f'(c) = 0$  ou  $f'(c)$  não existe.

**Demonstração:** Suponhamos que  $f$  tem um extremo local em  $c$ . Se  $f'(c)$  não existe, não há mais nada a demonstrar. Se  $f'(c)$  existe, então ocorrerá um dos três casos:

i.  $f'(c) > 0$

ii.  $f'(c) < 0$

iii.  $f'(c) = 0$

Se (i) e (ii) não ocorrem, logo pela tricotomia, provamos a validade de (iii).

Suponhamos que  $f'(c) > 0$ , daí  $f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$ , e portanto existe um intervalo aberto  $(a, b)$  contendo  $c$  tal que  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$ , para todo  $x$  em  $(a, b)$  diferente de  $c$ . Esta última desigualdade implica que se  $a < x < b$  e  $x \neq c$ , então  $[f(x) - f(c)]$  e  $(x - c)$  são ambos positivos ou ambos negativos, daí  $f(x) < f(c)$  sempre que  $x < c$  ou  $f(x) > f(c)$  sempre que  $x > c$ , segue-se que  $f(c)$  não é nem máximo, nem mínimo, contrariando nossa hipótese. De modo análogo, mostramos a contradição para (ii.). Como (i.) e (ii.) não ocorrem, temos  $f'(c) = 0$ .

■

**Lema A.8.2 (Teorema de Rolle)** *Se  $f$  é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$  e se  $f(a) = f(b)$ , então  $f'(c) = 0$  para ao menos um número  $c$  em  $(a, b)$ .*

**Demonstração:** Existem três casos para  $f$ :

- i.  $f(x) = f(a)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . Neste caso,  $f$  é uma função constante e, consequentemente,  $f'(x) = 0, \forall x$ . Daí  $f'(c) = 0$ .
- ii.  $f(x) > f(a)$  para algum  $x$  em  $(a, b)$ . Neste caso, o valor máximo de  $f$  em  $[a, b]$  é maior do que  $f(a)$  ou  $f(b)$ , logo deve ocorrer em algum número  $c$  no intervalo  $(a, b)$ . Como a derivada existe em todo  $(a, b)$ , pelo Lema A.8.1, concluímos que  $f'(c) = 0$ .
- iii.  $f(x) < f(a)$  para algum  $x$  em  $(a, b)$ . Neste caso, o valor mínimo de  $f$  em  $[a, b]$  é menor que  $f(a)$  ou  $f(b)$ , de modo análogo a (ii) mostramos que deve ocorrer algum número  $c$  em  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

■

**Teorema A.9 (Teorema do Valor Médio)** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Então existe um número  $c$  em  $(a, b)$  tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ou, equivalentemente, } f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

**Demonstração:** De posse do Lema A.8.1 e do Lema A.8.2, consideremos inicialmente a reta  $s$  que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , isto é:  $s : y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$ .

Esta reta é o gráfico da função

$$s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

Seja  $g$  a função que é a diferenciação entre  $f$  e  $s$ , isto é,  $g(x) = f(x) - s(x)$ .

Assim,

$$g(x) = f(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) \right]$$

Quando  $x = a$ ,

$$g(a) = f(a) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) + f(a) \right] = f(a) - f(a) = 0$$

e quando  $x = b$

$$g(b) = f(b) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) + f(a) \right] = f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0$$

Como  $g$  é diferença entre duas funções contínuas em  $[a, b]$  e deriváveis em  $(a, b)$ ,  $g$  é contínua e derivável em  $(a, b)$ .

Aplicando o Lema A.8.2 (Teorema de Rolle) em  $g$ , concluímos que existe um número  $c$  no intervalo  $(a, b)$ , tal que  $g'(c) = 0$ , mas  $g'(x) = f'(x) - s'(x)$ , e  $s'(x) = \left[ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right]$ , com isso  $g'(x) = f'(x) - \left[ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right]$ , portanto,

$$g'(c) = f'(c) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou seja,

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

■

**Observação A.8** A interpretação geométrica do Teorema (A.9) é que se  $s$  é uma reta passando pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , então existirá pelo menos um ponto  $(c, f(c))$ , com  $a < c < b$ , tal que a reta tangente ao gráfico de  $f$ , neste ponto, é paralela à reta  $s$ , conforme Figura A.3. Como  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  é o coeficiente angular de  $s$  e  $f'(c)$  é o de  $T$  (em que  $T$  é tangente a  $f$  em  $(c, f(c))$ ), então  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ .

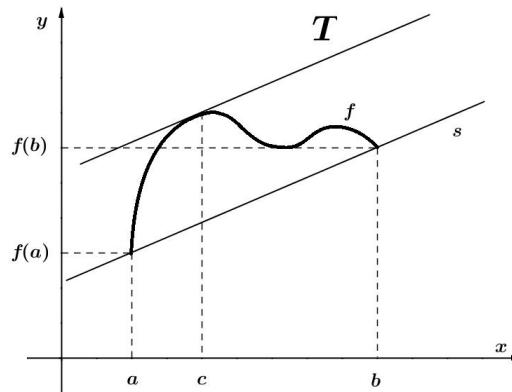


Figura A.3

## A.4 Primitivas

**Definição A.4** Uma função  $F$  é uma antiderivada (ou primitiva) de  $f$  em um intervalo  $I$  se  $F'(x) = f(x)$ , para todo  $x$  em  $I$ .

**Observação A.9** Veremos mais adiante que toda função contínua em um intervalo  $I$  admite, neste intervalo, uma primitiva.

**Teorema A.10** Sejam  $F$  e  $G$  antiderivadas de uma função  $f$  em um intervalo  $I$ , então  $G(x) = F(x) + C$ , para todo  $x$  em  $I$  e alguma constante  $C$ .

**Demonstração:** Sejam  $F$  e  $G$  antiderivadas de  $f$ , e  $H$  a função definida por

$$H(x) = G(x) - F(x)$$

para todo  $x$  em  $I$ . Devemos mostrar que  $G(x) - F(x) = C$ , para alguma constante  $C$ , ou seja,  $H(x)$  é uma função constante, de modo que:  $G(x) = F(x) + C$ .

Sem perda de generalidade, sejam  $a$  e  $b$  números em  $I$ , tais que  $a < b$ . Para mostrar que  $H$  é constante em  $I$ , basta provar que  $H(a) = H(b)$ .

Como  $F$  e  $G$  são antiderivadas de  $f$ , temos que,  $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ , para todo  $x$  em  $I$ . Como  $H$  é derivável em  $I$  segue que  $H$  é contínua em  $I$ . Em particular  $H$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Logo, pelo Teorema A.9, existe um número  $c$  em  $(a, b)$  tal que

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}$$

Como  $c$  está em  $I$ ,  $H'(c) = 0$ , com isso,  $0 = \frac{H(b)-H(a)}{b-a} \Rightarrow H(b) - H(a) = 0$ , sendo assim

$$H(b) = H(a)$$

■

**Definição A.5** A notação

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

em que  $F'(X) = f(x)$  e  $C$  é uma constante arbitrária, denota a família de todas antiderivadas de  $f(x)$  em um intervalo  $I$ .

**Observação A.10** O símbolo  $\int$  é o *signal de integral*. Chamamos  $\int f(x)dx$  a *integral indefinida* de  $f(x)$ . A expressão  $f(x)$  é o *integrand* e  $C$  é a *constante de integração*. O processo de determinação de  $F(x) + C$ , quando  $\int f(x)dx$  é dada, é designado como *integração indefinida*, ou *integrar*  $f$ . Usa-se o adjetivo indefinida porque  $\int f(x)dx$  representa uma família de antiderivadas, e não uma função específica.

**Teorema A.11** Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções que possuem antiderivadas em um intervalo  $I$ , e  $c$  uma constante, temos que:

$$\int [cf(x) \pm g(x)]dx = c \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

**Demonstração:** Sejam  $F$  e  $G$  antiderivadas de  $f$  e  $g$ , respectivamente, a demonstração é imediata utilizando as Definições A.4 e A.5 e o Teorema A.5.

■

## A.5 Partição de um Intervalo

Uma *partição*  $P$  de um intervalo  $[a, b]$  é um conjunto finito  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  em que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

Uma partição  $P$  de  $[a, b]$  divide este intervalo em  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , conforme a Figura A.4 .

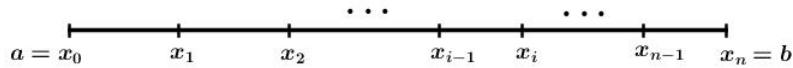


Figura A.4

A amplitude do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , será indicada por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Assim,

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

Os números  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  não são necessariamente iguais; o maior deles denomina-se *amplitude* da partição  $P$  e indica-se por  $\max\{\Delta x_i\}, 1 \leq i \leq n$ .

Uma partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  será indicada por

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

## A.6 Soma de Riemann

Sejam  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ . Para cada índice  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) seja  $c_i$  um número em  $[x_{i-1}, x_i]$ , conforme a Figura A.5, escolhido aleatoriamente.

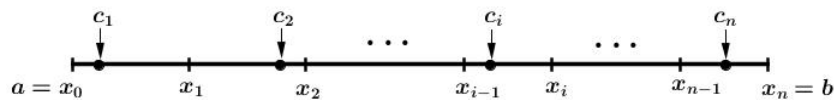


Figura A.5

Ao número

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n$$

denomina-se *soma de Riemann de  $f$*  relativa à partição  $P$  e aos números  $c_i$ .

Temos que, se  $f(c_i) > 0$ ,  $f(c_i) \Delta x_i$  será a área do retângulo  $R_i$  determinado pelas retas  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$  e  $y = f(c_i)$ , conforme a Figura A.6, enquanto que se  $f(c_i) < 0$ , a área do retângulo será  $-f(c_i) \Delta x_i$ , conforme Figura A.7.

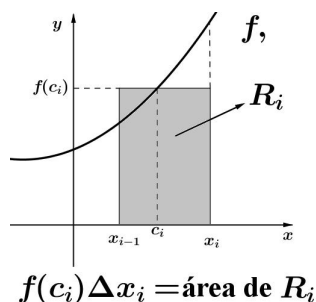


Figura A.6

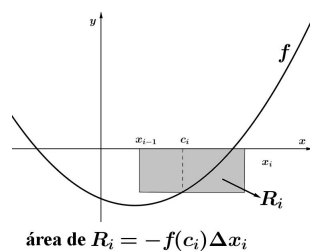


Figura A.7

Geometricamente podemos interpretar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

como a *diferença* entre a soma das áreas dos retângulos  $R_i$  que estão acima do eixo  $x$  e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo  $x$ .

## A.7 Integral de Riemann

Sejam  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e  $L$  um número real. Dizemos que  $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$  tende a  $L$ , quando  $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ , e escrevemos

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = L$$

se, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existir um  $\delta > 0$  que só dependa de  $\epsilon$  mas não da particular escolha de  $c_i$ , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , com  $\max\{\Delta x_i\} < \delta$ .



Tal número  $L$ , quando existe, é único, e denomina-se *integral (de Riemann)* de  $f$  em  $[a, b]$  e indica-se por  $\int_a^b f(x)dx$ .

Então, por definição, temos:

**Definição A.6**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

**Observação A.11** Temos, ainda por definição que:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

e

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx \quad (a < b).$$

**Teorema A.12** Sejam  $f, g$  integráveis em  $[a, b]$  e  $c$  uma constante. Então:

1. Se  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , então  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .
2. Se  $c \in ]a, b[$ , e  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$  então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Demonstração:**

1. Como  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  e qualquer que seja a escolha dos  $c_i$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \geq 0$$

Supondo, por absurdo, que  $\int_a^b f(x)dx < 0$ , tomando-se  $\epsilon > 0$  de modo que  $\int_a^b f(x)dx + \epsilon < 0$ , existiria um  $\delta > 0$ , tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \epsilon < \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i < \int_a^b f(x)dx + \epsilon$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com  $\max\{\Delta x_i\} < \delta$ . Assim, para alguma partição  $P$  teríamos

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i < 0,$$

que é uma contradição, pois

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \geq 0,$$

logo,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2. Para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , com  $c \in P$ ,

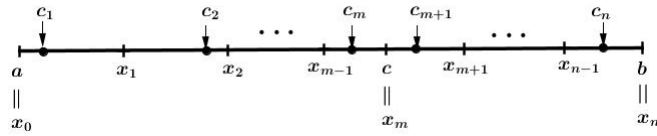


Figura A.8

Temos:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \left[ \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right] \right| \leq \left| \sum_{i=1}^m f(c_i)\Delta x_i - \int_a^c f(x)dx \right| + \left| \sum_{i=m+1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_c^b f(x)dx \right|$$

Como, por hipótese,  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , com  $c \in P$ , e  $\max\{\Delta x_i\} < \delta$

$$\left| \sum_{i=1}^m f(c_i)\Delta x_i - \int_a^c f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left| \sum_{i=m+1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_c^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e, portanto,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \left[ \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right] \right| < \epsilon$$

Da integrabilidade de  $f$  em  $a, b$ , temos que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

■

## A.8 Teorema Fundamental do Cálculo

Temos que se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , o valor do limite

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

será sempre o mesmo, independentemente da escolha dos  $c_i$ , e é igual a  $\int_a^b f(x) dx$ .

Assim, se para uma particular escolha dos  $c_i$ , tivermos

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$$

então teremos  $L = \int_a^b f(x) dx$ .

**Teorema A.13 (1º Teorema Fundamental do Cálculo)** *Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$  e se  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Demonstração:** Supondo que  $f$  seja integrável em  $[a, b]$  e que admita uma primitiva  $F(x)$  em  $[a, b]$ , isto é,  $F'(x) = f(x)$  em  $[a, b]$ . Seja  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  de  $[a, b]$ , uma partição qualquer de  $[a, b]$ , podemos escolher, pelo Teorema A.9,  $\bar{c}_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$  tal que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\bar{c}_i) \Delta x_i \Rightarrow F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$$

Se, para cada partição  $P$  de  $[a, b]$  escolhermos convenientemente os  $\bar{c}_i$ , teremos

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i = F(b) - F(a)$$

portanto,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

■

Demonstra-se que toda função contínua em  $[a, b]$  é integrável em  $[a, b]$ , com isso, segue do 1º teorema fundamental do cálculo que se  $f$  for *contínua* em  $[a, b]$  e  $F$  uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$  então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

A diferença  $F(b) - F(a)$  será indicada por  $[F(x)]_a^b$ , com isso

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Exemplo A.8** Determinar  $\int_{-5}^2 3dx$ .

**Solução:** Consideremos a função  $F(x) = 3x$  que é uma primitiva de  $f(x) = 3$ , aplicando o 1º teorema fundamental do cálculo, temos que  $\int_{-5}^2 3dx = [3x]_{-5}^2 = (3 \cdot 2) - (3 \cdot (-5)) = 6 + 15 = 21$

■

**Exemplo A.9** Sendo  $c$  uma constante, determinar  $\int_a^b cdx$ .

**Solução:** Através do 1º teorema fundamental do cálculo, como  $F(x) = cx$  é uma primitiva de  $f(x) = c$ , e  $f$  é contínua  $[a, b]$ , temos:  $\int_a^b cdx = [cx]_a^b = cb - ca = c(b - a)$ .

■

**Exemplo A.10** Sendo  $f(x) = x^2$ , determinar  $\int_0^2 f(x)dx$ .

**Solução:** Temos que  $\int_0^2 f(x)dx$  pode ser obtida através do 1º teorema fundamental do cálculo, onde consideramos  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$  que é uma primitiva de  $f(x) = x^2$  e  $f$  é contínua em  $[0, 2]$ , com isso  $\int_0^2 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$

■

**Teorema A.14** Seja  $f$  uma função **contínua** em um intervalo fechado  $[a, b]$ , se definirmos a função  $G$  por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a, b]$$

então  $G$  é uma antiderivada de  $f$  em  $[a, b]$ .

**Demonstração:** Vimos que, sendo  $a > c > b$  e  $f$  integrável em  $[a, b]$  temos  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$  e  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .

Sejam  $x$  e  $x + h$  pertencentes a  $[a, b]$ , então:

$$G(x + h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt$$

logo,

$$G(x + h) - G(x) = \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Consequentemente, se  $h \neq 0$ ,

$$\frac{G(x + h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Sem perda de generalidade, se  $h > 0$ , então, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número  $z$  no intervalo aberto  $(x, x + h)$  tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(z) \cdot h$$

e portanto,

$$\frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(z)$$

Como  $x < z < x + h$ , decorre da continuidade de  $f$  que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(z) = \lim_{z \rightarrow x^+} f(z) = f(x)$$

e daí,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(z) = f(x)$$

De modo análogo para  $h < 0$  temos  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(x)$ . Os dois limites unilaterais acima, implicam que

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(x)$$

com isso, temos que

$$G'(x) = f(x),$$

ou seja,  $G$  é uma antiderivada de  $f$ . ■

Uma outra maneira de demonstrarmos o 1º teorema fundamental do cálculo, seria tomando  $F$  uma antiderivada de  $f$  e sendo  $G$  a antiderivada específica de

$G(x) = \int_a^x f(t)dt$ , como  $F$  e  $G$  são antiderivadas de  $f$ , sabemos que elas diferem apenas por uma constante, ou seja,

$$G(x) = F(x) + C$$

para todo  $x$  em  $[a, b]$ . Logo, como  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  temos que,  $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ , para todo  $x$  em  $[a, b]$ . Fazendo  $x = a$ , e lembrando que  $\int_a^a f(t)dt = 0$ , obtemos que

$$0 = F(a) + C$$

ou seja,

$$C = -F(a),$$

como  $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$  e  $C = -F(a)$ ,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Como essa identidade é válida para todo  $x$  em  $[a, b]$ , podemos substituir  $x$  por  $b$  e a variável  $t$  por uma outra  $x$ , obtemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Com isso podemos enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo da seguinte maneira:**

**Teorema A.15 (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então:*

1.  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$
2.  $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

Na visão de Stewart [16], o teorema fundamental do cálculo é inquestionavelmente o mais importante, e é realmente um dos grandes feitos da mente humana. Antes de sua existência, desde os tempos de Eudócio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas, volumes e comprimentos de curvas eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer. Agora, com essa importante ferramenta em mãos, que Leibniz e Newton configuraram, problemas antes desafiadores tornam-se acessíveis para todos nós.

## A.9 Mudança de Variável na Integral

**Teorema A.16** *Sejam  $f$  contínua num intervalo  $I$ , e  $a$  e  $b$  em  $I$ . Seja  $g : [c, d] \rightarrow I$ , com  $g'$  contínua em  $[c, d]$ , tal que  $g(c) = a$  e  $g(d) = b$ . Nestas condições*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du.$$

**Demonstração:** Temos que  $f$  é contínua em  $I$ , com isso  $f$  admite uma primitiva  $F$  em  $I$ . Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{A.2})$$

A função  $H(u) = F(g(u))$ ,  $u \in [c, d]$ , é uma primitiva de  $f(g(u)).g'(u)$ , pois temos que  $H' = f$  e, pelo Teorema A.8 (Regra da Cadeia)

$$H'(u) = [F(g(u))]' = F'(g(u)).g'(u) = f(g(u)).g'(u)$$

daí,

$$\int_c^d f(g(u)).g'(u)du = [F(g(u))]_c^d = F(g(d)) - F(g(c)).$$

Inicialmente admitimos,  $g(c) = a$  e  $g(d) = b$ , tendo em vista (A.2), temos

$$\int_c^d f(g(u)).g'(u)du = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

■

**Exemplo A.11** *Calcular  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \text{sen}(2x))^3 \cdot \cos(2x)dx$ .*

**Solução:** Podemos fazer  $u = (1 + \text{sen}(2x))^3$ , daí  $\frac{du}{dx} = 2 \cos(2x) \Rightarrow dx = \frac{du}{2 \cdot \cos(2x)}$ , além disso se  $x = 0$ , temos  $u = 1 + \text{sen}(0) = 1 + 0 = 1$  e se  $x = \frac{\pi}{4}$ , temos  $u = 1 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$  com isso temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \text{sen}(2x))^3 \cdot \cos(2x)dx &= \int_1^2 u^3 \cdot \cos(2x) \cdot \frac{du}{2 \cdot \cos(2x)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 u^3 du \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{u^4}{4} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{8} (16 - 1) \\ &= \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

■

## A.10 Coordenadas Polares

Fixando no plano um ponto  $O$  e um semi-eixo  $Ox$ , denominado *eixo polar* e o ponto  $O$  será chamado de *polo*, conforme Figura A.9.

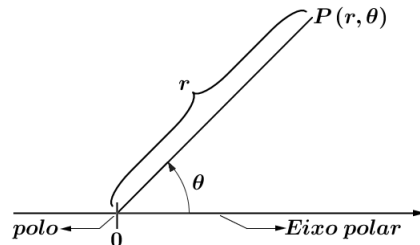


Figura A.9

Cada ponto  $P$  do plano fica determinado por suas *coordenadas polares*  $(\theta, \rho)$ , sendo  $\theta$  é a medida em radianos do ângulo entre os segmento  $OP$  e o eixo polar, em que o ângulo é contado a partir do eixo polar no sentido anti-horário.  $\rho$  é o comprimento de  $OP$ , com isso  $\rho \geq 0$ .

Se considerarmos no plano um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, em que a origem coincide com o polo e o semi-eixo  $Ox$  com o o eixo polar e se  $(\theta, \rho)$  forem as coordenadas polares de  $P$ .

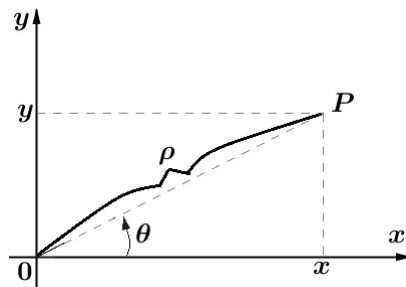


Figura A.10

Aplicando as razões trigonométricas na Figura A.10, então as suas coordenadas cartesianas serão dadas por:

$$x = \rho \cos \theta \text{ e } y = \rho \text{sen } \theta \quad (\text{A.3})$$

Além disso, se  $P$  não coincide com o polo, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras, e obtermos

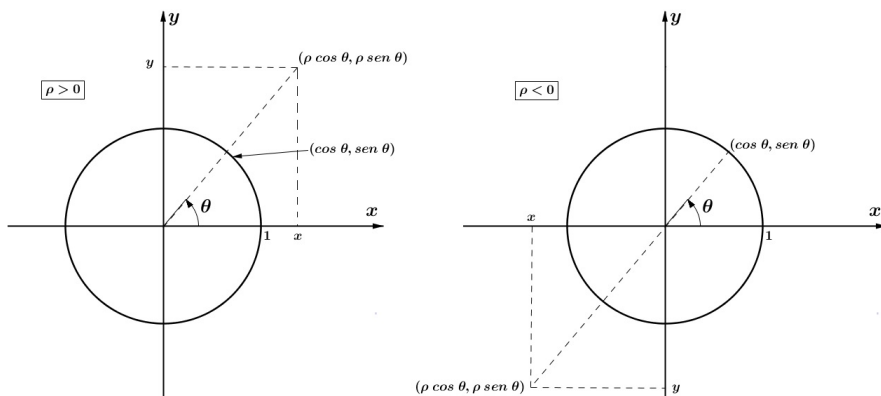
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{A.4})$$



e

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \tag{A.5}$$

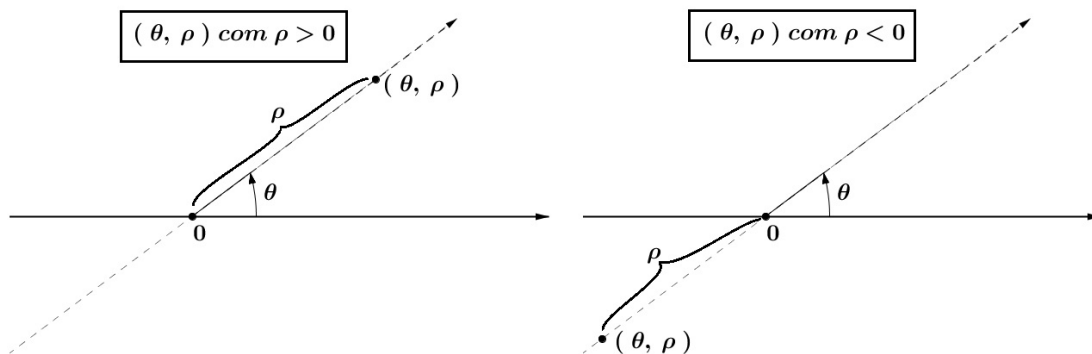
Até o momento, utilizamos apenas  $\rho$  como um número positivo. Porém, para aplicações é importante que  $\rho$  possa assumir, também, valores negativos. Podemos interpretar  $(\theta, \rho)$ , na Figura A.11, da seguinte maneira:



**Figura A.11**

Onde, se  $\rho < 0$ ,  $(\theta, \rho)$ , é o simétrico, em relação ao polo, do ponto  $(\theta, -\rho)$ .

Para podermos trabalhar com  $\rho < 0$ , é mais conveniente olharmos para o eixo polar como uma reta com um sistema de abscissas: sobre tal reta marcam-se dois pontos, um o polo  $O$  representando o zero e outro representando o 1. O *sentido positivo* será o de 0 par 1 e a unidade de comprimento será o segmento de extremidades 0 e 1. Para representar no plano um ponto de *coordenadas polares*  $(\theta, \rho)$  procedemos da seguinte maneira: primeiro giramos o eixo polar, no sentido anti-horário, de um ângulo  $\theta$ , em seguida, sobre este novo eixo, marcamos o ponto que tenha abscissa  $\rho$ , conforme a Figura A.12.



**Figura A.12**

**Observação A.12** *As equações do tipo  $r = a \pm a \operatorname{sen} \theta$  e  $r = b \pm b \cos \theta$  representam curvas polares chamadas cardioides, o nome cardioide, vem da semelhança da representação gráfica dessas curvas com o formato de um coração.*

**Exemplo A.12** *Determinar as coordenadas retangulares do ponto  $P$  cujas coordenadas polares são  $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$ .*

**Solução:** As coordenadas polares são  $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$ , com isso,  $\rho = 6$  e  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , substituindo esses valores em (A.3), temos:

$$x = 6 \cos \frac{2\pi}{3} = 6 \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 \quad e \quad y = 6 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ou

$$x^2 + y^2 = 36 \quad e \quad \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Logo as coordenadas retangulares de  $P$  são  $(-3, 3\sqrt{3})$ .

■

**Exemplo A.13** *Determinar as coordenadas polares do ponto  $P$  cujas coordenadas retangulares são  $(-2, 2\sqrt{3})$ .*

**Solução:** Primeiramente vamos encontrar as coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  de  $P$  que satisfazem as condições  $\rho > 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Temos  $x = -2$  e  $y = 2\sqrt{3}$ , substituindo esses valores em (A.4) e em seguida em (A.5), temos, respectivamente, que:

$$\rho^2 = (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \rho = 4$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

Como  $(-2, 2\sqrt{3})$  está no segundo quadrante e  $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$ , temos  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , com isso as coordenadas polares de  $P$  são  $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ .

Todas as demais coordenadas polares de  $P$  podem ser expressas como

$$\left(4, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad \text{ou} \quad \left(-4, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

■

**Exemplo A.14** *Seja a curva em coordenadas polares dada por  $r = 2 \cos \theta$ :*

- a. *Esboçar a curva.*
- b. *Encontrar a equação cartesiana para essa curva.*

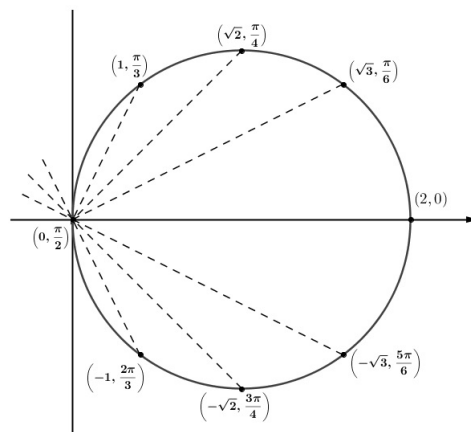
**Solução:**

- a. Podemos atribuir valores convenientes para  $\theta$ , em seguida plotarmos os correspondentes pontos  $(\rho, \theta)$  e depois juntarmos esses pontos para esboçar a curva.

$\theta$	$\rho = 2 \cos \theta$	$(\rho, \theta)$
0	2	(0, 2)
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{3}$	$(\frac{\pi}{4}, \sqrt{3})$
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{2}$	$(\frac{\pi}{3}, \sqrt{2})$
$\frac{\pi}{2}$	1	$(\frac{\pi}{2}, 1)$
$\frac{2\pi}{3}$	-1	$(\frac{2\pi}{3}, -1)$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$	$(\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2})$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$	$(\frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3})$
$\pi$	-2	$(\pi, -2)$

Usamos os valores de  $\theta$  apenas entre 0 e  $\pi$ , já que, se tomarmos valores para  $\theta$  além de  $\pi$ , obtemos os mesmos pontos novamente.

Juntando os pontos para esboçarmos a curva, obtemos uma circunferência, conforme a Figura A.13.



**Figura A.13**

- b. Para converter a equação polar dada em uma equação cartesiana, utilizaremos as Equações (A.3) e (A.4).

Como  $x = r \cos \theta$ , temos  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ , com isso a equação  $r = 2 \cos \theta$  torna-se  $r = \frac{2x}{r}$ , daí

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando quadrados, temos

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 1$$

que é a equação do círculo com centro  $C(1,0)$  e raio  $r = 1$ , confirmando o esboço feito no item *a*.

■

A seguir faremos algumas sugestões de exercício de aplicação no ensino básico.

# Apêndice B

## Sugestões de Exercícios para Aplicação no Ensino Básico

Trazemos aqui alguns exercícios que, após a leitura deste trabalho, podem ser aplicados no ensino básico de forma a expandir a maneira convencional que o cálculo de áreas e comprimentos são realizados.

### B.1 Área de uma Região Delimitada por uma Parábola

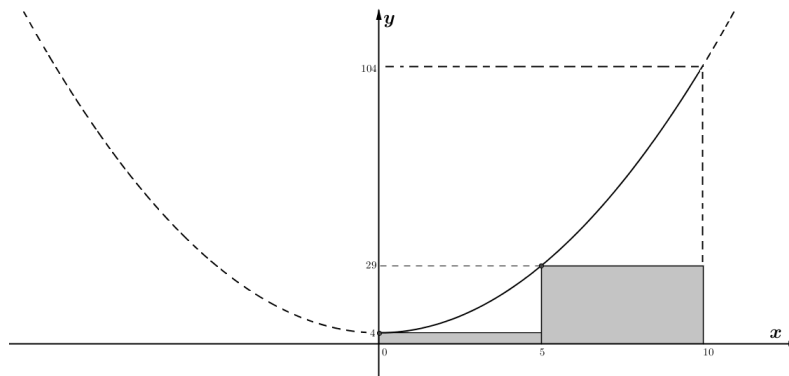
**Exemplo B.1** *Considere a parábola de equação  $y = x^2 + 4$  com  $0 \leq x \leq 10$ , determine a área da região compreendida entre a parábola e o eixo- $x$ , utilizando:*

- a. Uma aproximação, por falta, com 2 retângulos.*
- b. Uma aproximação, por falta, com 5 retângulos.*
- c. Uma aproximação, por falta, com 10 retângulos.*
- d. Uma aproximação, subdividindo o intervalo em 10 partes e utilizando a regra do ponto médio.*
- e. Uma aproximação, subdividindo o intervalo em 10 partes e utilizando a regra do trapézio.*
- f. Uma aproximação, subdividindo o intervalo em 10 partes e utilizando a regra de Simpson.*

*g. Utilizando a integral.*

**Solução:**

a. Temos que a situação pode ser representada pela figura abaixo,



**Figura B.1**

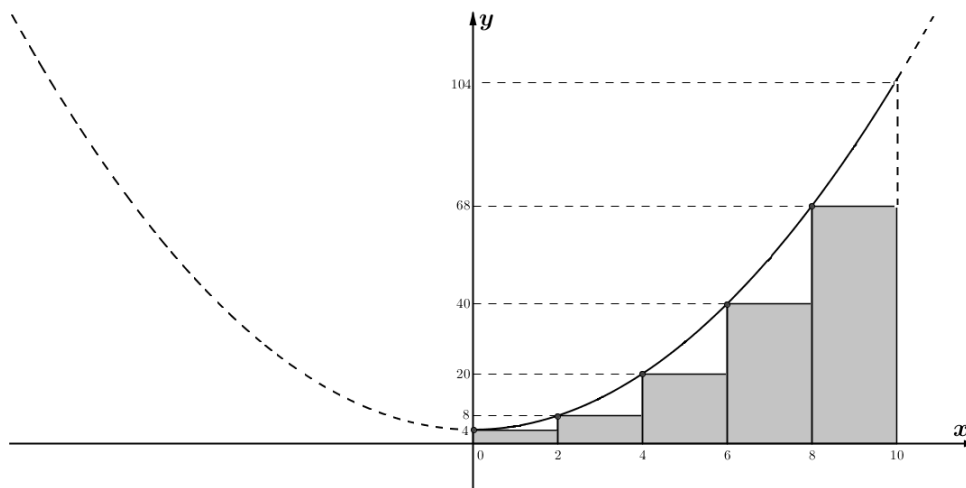
Através da Figura B.1, podemos perceber que temos dois retângulos, abaixo da parábola, cujas áreas representaremos por  $A_1$  e  $A_2$ , e são dadas por:

$$A_1 = 5 \cdot f(0) = 5 \cdot 4 = 20 \quad \text{e} \quad A_2 = 5 \cdot f(5) = 5 \cdot 29 = 145$$

Com isso, a aproximação, por falta, para área abaixo da parábola, é dada por:

$$A \approx A_1 + A_2 = 20 + 145 = 169$$

b. Temos que a situação pode ser representada pela figura abaixo,



**Figura B.2**

Através da Figura B.2, podemos perceber que temos cinco retângulos, abaixo da parábola, cujas áreas representaremos por  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  e  $A_5$ , e são dadas por:

$$A_1 = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$A_2 = 2 \cdot f(2) = 2 \cdot 8 = 16$$

$$A_3 = 2 \cdot f(4) = 2 \cdot 18 = 36$$

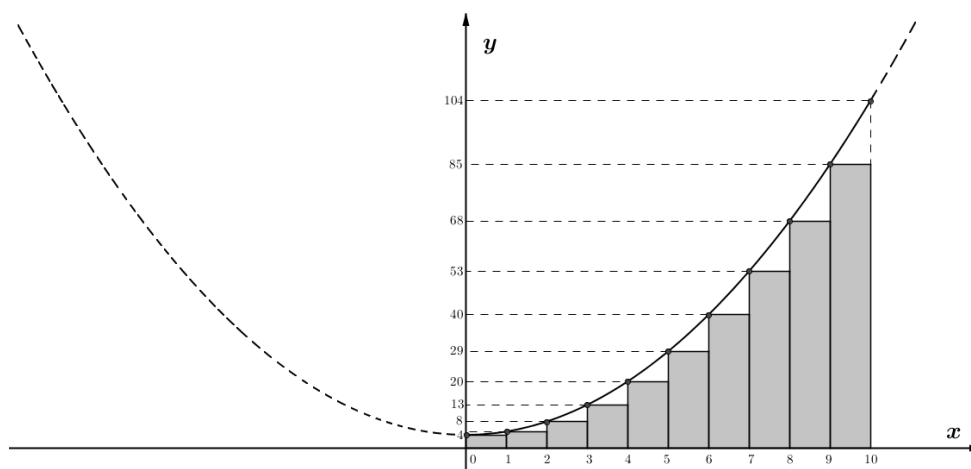
$$A_4 = 2 \cdot f(6) = 2 \cdot 40 = 80$$

$$A_5 = 2 \cdot f(8) = 2 \cdot 68 = 136$$

Com isso, a aproximação, por falta, para área abaixo da parábola, é dada por:

$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 8 + 16 + 36 + 80 + 136 = 276$$

c. Temos que a situação pode ser representada pela figura abaixo,



**Figura B.3**

Através da Figura B.3, podemos perceber que temos dez retângulos, abaixo da parábola, cujas áreas representaremos por  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $A_7$ ,  $A_8$ ,  $A_9$  e  $A_{10}$ , e são dadas por:

$$A_1 = 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 4 = 4$$

$$A_2 = 1 \cdot f(1) = 1 \cdot 5 = 5$$

$$A_3 = 1.f(2) = 1.8 = 8$$

$$A_4 = 1.f(3) = 1.13 = 13$$

$$A_5 = 1.f(4) = 1.20 = 20$$

$$A_6 = 1.f(5) = 1.29 = 29$$

$$A_7 = 1.f(6) = 1.40 = 40$$

$$A_8 = 1.f(7) = 1.53 = 53$$

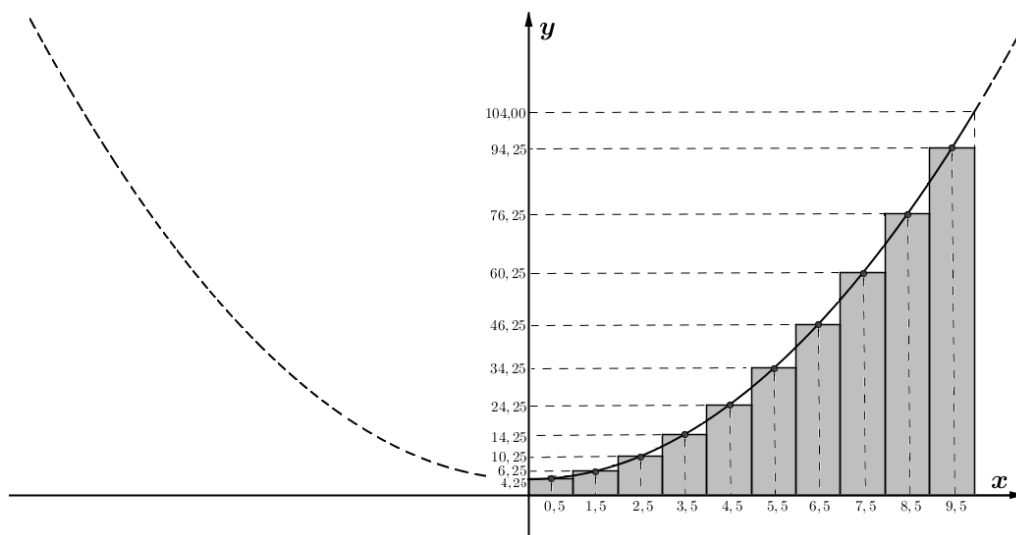
$$A_9 = 1.f(8) = 1.68 = 68$$

$$A_{10} = 1.f(9) = 1.85 = 85$$

Com isso, a aproximação, por falta, para área abaixo da parábola, é dada por:

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} \\ &\approx 4 + 5 + 8 + 13 + 20 + 29 + 40 + 53 + 68 + 85 \\ &\approx 325 \end{aligned}$$

d. Temos que a situação pode ser representada pela figura abaixo,



**Figura B.4**

Através da Figura B.4, podemos perceber que temos dez retângulos, abaixo da parábola, cujas áreas representaremos por  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $A_7$ ,  $A_8$ ,  $A_9$  e  $A_{10}$ , e são dadas por:

$$A_1 = 1.f(0,5) = 1.4,25 = 4,25$$



$$A_2 = 1.f(1,5) = 1.6,25 = 6,25$$

$$A_3 = 1.f(2,5) = 1.10,25 = 10,25$$

$$A_4 = 1.f(3,5) = 1.14,25 = 14,25$$

$$A_5 = 1.f(4,5) = 1.24,25 = 24,25$$

$$A_6 = 1.f(5,5) = 1.34,25 = 34,25$$

$$A_7 = 1.f(6,5) = 1.46,25 = 46,25$$

$$A_8 = 1.f(7,5) = 1.60,25 = 60,25$$

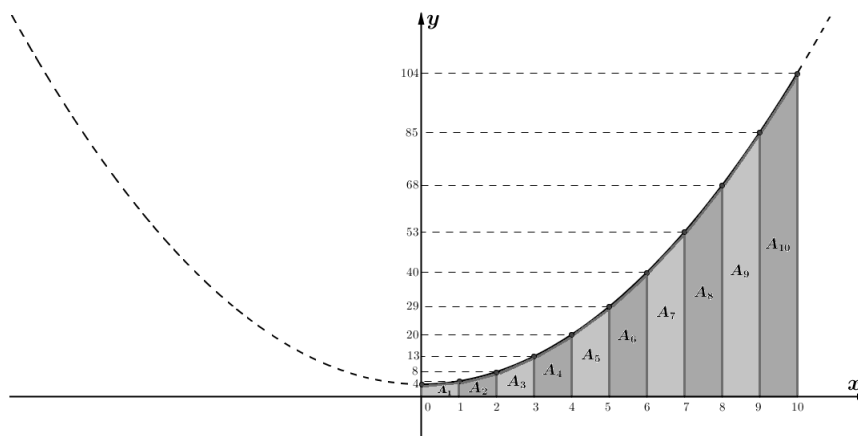
$$A_9 = 1.f(8,5) = 1.76,25 = 76,25$$

$$A_{10} = 1.f(9,5) = 1.94,25 = 94,25$$

Com isso, a aproximação para área abaixo da parábola, é dada por:

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} \\ &\approx 4,25 + 6,25 + 10,25 + 14,25 + 24,25 + 34,25 + 46,25 + 60,25 + 76,25 + \\ &\quad + 94,25 \\ &\approx 372,5 \end{aligned}$$

e. Temos que a situação pode ser representada pela figura abaixo,



**Figura B.5**

Através da Figura B.5, podemos perceber que temos dez trapézios, cujas áreas representaremos por  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $A_7$ ,  $A_8$ ,  $A_9$  e  $A_{10}$ , e são dadas por:

$$A_1 = \frac{(f_0+f_1) \cdot 1}{2}, A_2 = \frac{(f_1+f_2) \cdot 1}{2}, \dots, A_{10} = \frac{(f_9+f_{10}) \cdot 1}{2},$$

ou seja,

$$A_i = \frac{(f_{i-1}+f_i) \cdot 1}{2}, 1 \leq i \leq 10$$

Com isso, a aproximação, para área da superfície abaixo da parábola, é dada por:

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} \\ &\approx \frac{1}{2} \{ (f(0) + 2 \cdot [f(1) + f(2) + \dots + f(9)] + f(10)) \} \\ &\approx \frac{1}{2} (4 + 10 + 16 + 26 + 40 + 58 + 80 + 106 + 136 + 170 + 104) \\ &\approx 375 \end{aligned}$$

f. A regra de Simpson, nos diz que uma boa aproximação pode ser obtida através da fórmula

$$A \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde  $a$  e  $b$  são os extremos do nosso intervalo, e  $n$  indica o número de partes que nosso intervalo foi subdividido.

No nosso exemplo, temos  $a = 0$ ,  $b = 10$  e  $n = 10$ , com isso, temos:

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{10-0}{3 \cdot 10} [f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + \dots + 2f(8) + 4f(9) + f(10)] \\ &\approx \frac{1}{3} \cdot [4 + 4.5 + 2.8 + 4.13 + 2.20 + 4.29 + 2.40 + 4.53 + 2.68 + 4.85 + 104] \\ &\approx \frac{1}{3} (4 + 20 + 16 + 52 + 40 + 116 + 80 + 212 + 136 + 340 + 104) \\ &\approx 373,33 \end{aligned}$$

g. Podemos observar a área abaixo da parábola através da Figura B.6.

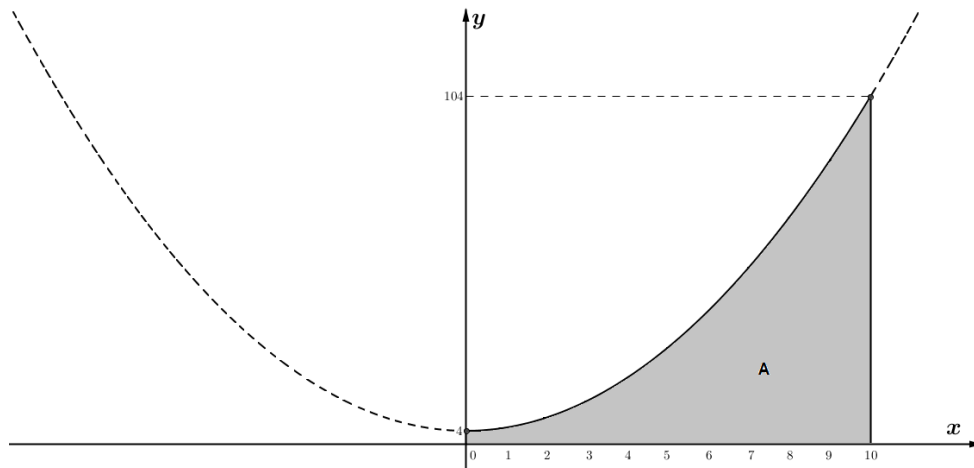


Figura B.6

Utilizando a integral, temos que a área é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

no nosso caso,  $a = 0$ ,  $b = 10$  e  $f(x) = x^2 + 4$ , com isso:

$$A = \int_0^{10} (x^2 + 4)dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^{10} = \frac{10^3}{3} + 4 \cdot 10 \approx 373,3$$

■

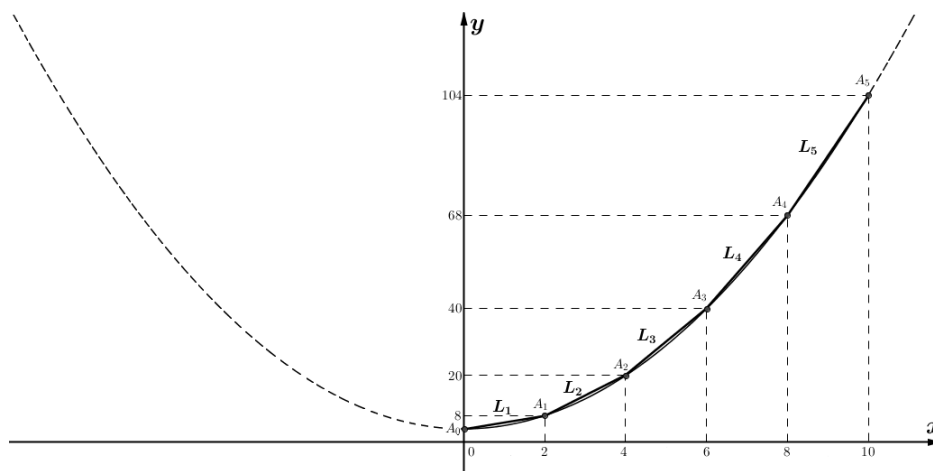
## B.2 Comprimento de Curva

**Exemplo B.2** Considere a parábola de equação  $y = x^2 + 4$  com  $0 \leq x \leq 10$ :

- Dê uma aproximação para o comprimento do arco da parábola de  $A(0, 4)$  a  $B(10, 104)$ , subdividindo o intervalo em 5 partes.
- Estabeleça uma integral para achar o comprimento do arco da parábola de  $A(0, 4)$  a  $B(10, 104)$ .
- Aproxime a integral obtida em (B.), utilizando a Regra de Simpson, com  $n = 10$ , e arredonde a resposta para duas casas decimais.

**Solução:**

- a. Através da Figura B.7, podemos perceber que os comprimentos  $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_5$ , são hipotenusas de triângulos retângulos, cujos catetos são  $x_i - x_{i-2}$  e  $f(x_i) - f(x_{i-2})$ , com  $i \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .



**Figura B.7**

Com isso, temos que uma aproximação para o valor de comprimento da parábola, é dada por

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras para calcularmos cada um dos  $L_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , temos:

$$L_k^2 = (x_i - x_{i-2})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-2})]^2$$

$$L_k = \sqrt{(x_i - x_{i-2})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-2})]^2}$$

Com isso:  $L_1 = 4,4721$ ,  $L_2 = 12,1655$ ,  $L_3 = 20,0998$ ,  $L_4 = 28,0713$  e  $L_5 = 36,0555$

Daí,

$$L \approx 4,4721 + 12,1655 + 20,0998 + 28,0713 + 36,0555 \approx 100,8642$$

- b. Podemos observar o comprimento da parábola está representado por  $L$  na Figura B.8.

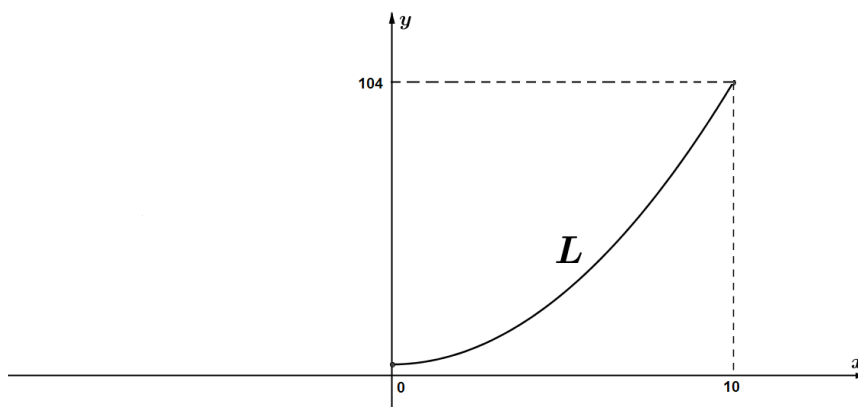


Figura B.8

Considerando a função  $f(x) = x^2 + 4$  e aplicando a equação (3.1), temos que o comprimento do arco da parábola pode ser dado por:

$$L = \int_0^{10} \sqrt{1 + \left[ \frac{d(x^2 + 4)}{dx} \right]^2} dx = \int_0^{10} \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

c. Podemos aplicar a Regra de Simpson, fazendo  $g(x) = \sqrt{1 + (2x)^2}$ ,  $n = 10$ ,  $a = 0$  e  $b = 10$ . Para facilitar os cálculos, consideremos a seguinte tabela:

$k$	$x_k$	$g(x_k)$	$m$	$mg(x_k)$
0	0	1,0000	1	1,0000
1	1	2,2361	4	8,9444
2	2	4,1231	2	8,2462
3	3	6,0828	4	24,3312
4	4	8,0623	2	16,1246
5	5	10,0499	4	40,1996
6	6	12,0416	2	24,0832
7	7	14,0357	4	56,1428
8	8	16,0312	2	32,0624
9	9	18,0278	4	72,1112
10	10	20,0250	1	20,0250

Tabela B.1

Temos que a soma dos números da última coluna é igual a 303,2706, como  $\frac{b-a}{3n} = \frac{10-0}{30} = \frac{1}{3}$ , temos:

$$\int_0^{10} \sqrt{1+(2x)^2} = \int_0^{10} g(x)dx = \frac{1}{3}303,2706 \approx 101,090 \approx 101,09$$

■

# Referências Bibliográficas

- [1] Anton, H., *Cálculo, um novo horizonte - Volume 1*, Tradução: Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6. ed. Bookman. Porto Alegre, 2000.
- [2] Anton, H., *Cálculo, um novo horizonte - Volume 2*, Tradução: Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6. ed. Bookman. Porto Alegre, 2000.
- [3] Anton, H., Bivens, I., Davis, S. *Cálculo - Volume 2*, Tradução: Claus Ivo Doering. 8. ed. Bookman. Porto Alegre, 2007.
- [4] Ávila, G., *Cálculo das Funções de Uma Variável - Volume 1*, 7. ed. LTC. Rio de Janeiro, 2003.
- [5] Ávila, G., *Cálculo das Funções de Uma Variável - Volume 2*, 7. ed. LTC. Rio de Janeiro, 2004.
- [6] Boyer, C. B. *História da Matemática*, 2. ed. Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo: 1996.
- [7] Contador, P. R. M. *Matemática, uma Breve História - Vol. 1, 2 e 3*, 2. ed. Editora Livraria da Física. São Paulo: 2006.
- [8] Filho, D. C., *Um Convite à Matemática*, Edição do Autor. Campina Grande, 2010.
- [9] Dolce, O., Pompeo, J. N., *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana - Vol. 9*, 8. ed. Atual. São Paulo, 2005.
- [10] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*, Tradução: Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp. Campinas, 2004.

- [11] Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo - Vol. 1*, 5. ed. LTC. Rio de Janeiro, 2001.
- [12] Leithold, L. *O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1*, Tradução: Antonio Paques, Otilia T. W. Paques. Sebastião A. J. Filho. 2. ed. Harbra. São Paulo, 1982.
- [13] Lima, E. L., *Análise Real - Vol. 1*, Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 2007.
- [14] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*, Coleção do Professor de Matemática. 6. ed. SBM. Rio de Janeiro, 2006.
- [15] Lima, E. L., *Medida e Forma em Geometria - Comprimento, Área, Volume e Semelhança*, Coleção Matemática Universitária. SBM. Rio de Janeiro, 1991.
- [16] Stewart, J., *Cálculo - Volume 1*, Tradução: Antonio C. Moretti e Antonio C. G. Martins. 5. ed. Pioneira Thomson Learning. São Paulo, 2006.
- [17] Stewart, J., *Cálculo - Volume 2*, Tradução: Antonio C. Moretti e Antonio C. G. Martins. 5. ed. Pioneira Thomson Learning. São Paulo, 2006.
- [18] Swokowski, E. W., *Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1*, Tradução: Alfredo A. de Farias, com a colaboração de Vera R. L. Flores e Marcio Q. Moreno. 2. ed. Makron Books. São Paulo, 1994.