UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

José Antonio da Silveira Camargo

O jogo Traverse como ferramenta de ensino sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas

São José do Rio Preto
2019

José Antonio da Silveira Camargo

O jogo Traverse como ferramenta de ensino sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco

São José do Rio Preto
2019

C172j

Camargo, José Antonio da Silveira

O jogo Traverse como ferramenta de ensino sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas / José Antonio da Silveira Camargo. -- , 2019

78 f. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Évelin Meneguesso Barbaresco

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Aprendizagem baseada em problemas. 3. Jogos em educação matemática. 4. Geometria plana. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

José Antonio da Silveira Camargo

O jogo Traverse como ferramenta de ensino sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Rita de Cássia Pavan Lamas
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi
UFU – Universidade Federal de Uberlândia

São José do Rio Preto
03 de maio de 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me proporcionaram essa oportunidade de crescimento e a todos que estiveram ao meu lado nos momentos dessa caminhada.

Agradeço ao PROFMAT por esses três anos de aprendizado e a todos os professores do programa, que me auxiliaram direta ou indiretamente. Em especial, agradeço à minha orientadora Profª Drª Évelin Meneguesso Barbaresco, que me aceitou como orientando e, durante a elaboração deste projeto, me deu importantes conselhos, me ajudando na elaboração do tema, formulação da atividade e na construção deste trabalho. Muito obrigado por toda ajuda e pela confiança depositada neste trabalho.

Agradeço aos amigos que fiz durante todo o período do curso. Desde o começo, passamos por todos os momentos juntos, sempre um auxiliando o outro.

Agradeço à direção, coordenação e ao professor Rui Carlos da Escola Estadual Pio X por terem aberto suas portas para a aplicação da atividade. Também agradeço aos alunos por terem participado e se interessado pelo Traverse.

Agradeço à minha família, que me estimulou a concluir este objetivo. Em especial, agradeço à minha namorada Tainan, que a cada dia me deu seus conselhos, ajudando sempre com a palavra certa para o momento certo. Sem você, minha formação, tanto pessoal quanto profissional, não seria a mesma.

“O fato de que se você pegar um círculo de qualquer tamanho — até mesmo um círculo do tamanho do universo —, e dividi-lo por seu raio você chegará ao número π (3,141592…) é maravilhoso [...]”

Neil deGrasse Tyson.

(VAIANO, 2016).

RESUMO

Este trabalho tem como finalidade apresentar a Metodologia da Resolução de Problemas associada à utilização de jogos como uma estratégia para o ensino de Matemática. Apresentamos a fundamentação teórica da metodologia, partindo dos fatos históricos que permitiram sua criação, mostrando sua importância para o desenvolvimento do raciocínio e do senso crítico do aluno, onde o mesmo tem a possibilidade de adquirir e ampliar seu conhecimento, em particular, o conhecimento de novos conceitos matemáticos. Também apresentamos o jogo Traverse, que foi utilizado como uma ferramenta auxiliadora do aprendizado. Através dele, sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas, desenvolvemos uma atividade voltada para a revisão de conceitos básicos de Geometria e apresentamos o desenvolvimento desta atividade em sala de aula, além dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Ensino de Matemática. Jogo Traverse. Geometria.

ABSTRACT

The purpose of this work is to present the Problem Solving Methodology associated with the use of games as a strategy for teaching Mathematics. We present the entire theoretical basis of the methodology, starting from the historical facts that allowed its creation, showing its importance for the development of reasoning and critical sense of the student, where the student has the possibility of acquiring and expanding its knowledge, in particular, knowledge of new mathematical concepts. We also present the game Traverse, which we use as an aid tool of learning. Through it, from the perspective of the Problem Solving Methodology, we developed an activity focused on a review of basics concepts of Geometry and presented the development of this activity in the classroom and the results obtained.

Keywords: *Problem Solving. Math Teaching. Game Traverse. Geometry.*

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A disciplina de Matemática, quando observamos dizeres provenientes de alunos, é sempre taxada como difícil de ser compreendida. Em todas as séries, não apenas em avaliações da disciplina formuladas pelos professores, mas em avaliações estaduais (SARESP), nacionais (Prova Brasil) e internacionais (PISA), podemos observar que, em média, as notas dos alunos são consideradas baixas, e isso acaba acarretando um problema maior, que os alunos levarão para sua vida, tanto escolar quanto no mercado de trabalho. Mas isso também vem de uma questão de cunho cultural, onde desde a infância todos nós escutamos que a Matemática é difícil, que é impossível de ser compreendida.

Como dito por Stoica apud Baumgartel, na tradução que fez dele:

> Aprender matemática é considerado difícil pela maioria dos estudantes. Uma das razões é que em classes tradicionais de matemática os estudantes são ensinados pela primeira vez a teoria e, em seguida, eles são convidados a resolver alguns exercícios e problemas que têm mais ou menos soluções algorítmicas usando mais ou menos o mesmo raciocínio e que raramente são conectados com as atividades do mundo real. (BAUMGARTEL, 2016, p.1)

Além disso, nos tempos atuais, o professor precisa lidar com os desafios que aparecem a cada dia quanto ao interesse dos alunos com os estudos, em particular com a disciplina de Matemática. Podemos pontuar diversos fatores que causam um desinteresse do aluno em tal disciplina. Assim como a citação acima é um problema que dificulta o aprendizado do aluno, podemos também pontuar a falta de aplicabilidade de diversos conteúdos matemáticos na vida cotidiana dos alunos e a forma, na maioria das vezes maçante, como as aulas são conduzidas em sala.

O professor precisa disputar espaço com a tecnologia e a velocidade com que a informação chega aos alunos através da Internet, acessada pelos computadores e smartphones. Com isso, é necessário que sejam desenvolvidas algumas estratégias de ensino que se tornem mais efetivas. E cabe aos educadores o desenvolvimento de tais estratégias.

Uma alternativa que tem se mostrado efetiva é a abordagem sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas. Como Onuchic (1999) diz, a resolução de problemas é o “coração” da Matemática. Desde as antigas civilizações, o desenvolvimento da Matemática se deu através de problemas que foram surgindo. E, a partir da abordagem inicial através de problemas, podemos construir a Matemática e a habilidade do aluno em resolver os problemas de forma simultânea, não fazendo cada um de forma separada.

Além do mais, a utilização de jogos se mostra também como uma ferramenta para auxiliar o professor no ensino da Matemática.

> Das situações acadêmicas, provavelmente a mais produtiva é a que envolve o *jogo*, quer na aprendizagem de noções, quer como meios de favorecer os processos que intervêm no ato de aprender e não se ignora o aspecto afetivo que, por sua vez, se encontra implícito no próprio ato de jogar, uma vez que o elemento mais importante é o envolvimento do indivíduo que brinca. (SILVA, KODAMA, 2004, p. 3)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), o ensino da Matemática para alunos do nível médio tem o seguinte propósito:

a) Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas,
b) Aplicar conhecimentos matemáticos a diversas situações, tanto científicas quanto do cotidiano;
c) Desenvolver o senso de pesquisador, buscando informações, fontes de notícias, de forma a criar opinião própria, desenvolvendo seu pensamento crítico, seu raciocínio lógico, comunicação e a habilidade de resolver problemas;
d) Desenvolver e valorizar a linguagem e a habilidade de comunicação oral, escrita e gráfica para as diversas situações que podem surgir;
e) Estabelecer conexões entre as áreas matemáticas e as outras áreas do conhecimento;
f) Promover a realização pessoal de cada aluno através da segurança com relação às capacidades matemáticas, ao desenvolvimento da autonomia e à cooperação.

Além disso, quando olhamos para a Proposta Curricular disponibilizada pela Secretária de Educação do Estado de São Paulo, vemos a importância de se aprender Matemática, além da língua materna.

> A Matemática nos currículos deve constituir, em parceria com a língua materna, um recurso imprescindível para uma expressão rica, uma compreensão abrangente, uma argumentação correta, um enfrentamento assertivo de situações-problema, uma contextualização significativa dos temas estudados. Quando os contextos são deixados de lado, os conteúdos

> estudados deslocam-se sutilmente da condição de meios para a de fins das ações docentes. (SÃO PAULO, 2011, p.30)

Ao trabalhar com jogos sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas, o professor tem a oportunidade de trabalhar com o aluno o pensamento lógico de como agir em situações em que é exigida a elaboração de estratégias para a resolução de problemas. Além disso, pelo caráter lúdico que o jogo tem, as aulas tornam-se mais dinâmicas, onde o professor pode atuar de forma a dar liberdade para os alunos discutirem suas ideias e pensarem em grupo em busca de uma solução.

De modo a atingir todas as nossas expectativas, para realizar este trabalho, escolhemos o jogo Traverse. Neste jogo, observamos a possibilidade de trabalhar, sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas (MRP), a fim de consolidar nos alunos o raciocínio estratégico e alguns conceitos básicos de Geometria, como classificação de polígonos e o conceito de simetria.

Este trabalho está dividido em três capítulos, onde cada um aborda uma parte específica do caminho percorrido.

No capítulo 1, é feita uma explicação sobre a Metodologia da Resolução de Problemas, notas históricas e toda a linha de pesquisa iniciada por George Polya – autor que trata da Metodologia aqui investigada. Também é feita a discussão sobre a utilização de jogo matemático como ferramenta de ensino e qual o motivo de relacionarmos o trabalho com jogos com a Metodologia da Resolução de Problemas, pontuando suas semelhanças e seus pontos positivos. E, para concluir, buscamos referências em documentos oficiais que norteiam o ensino no Brasil.

No capítulo 2, tratamos da apresentação do jogo “Traverse”, explicando suas regras, sua história, algumas jogadas possíveis e a motivação pela qual escolhemos este jogo para trabalharmos em uma turma do Ensino Médio. Também tratamos neste capítulo de alguns conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados com os alunos, utilizando o jogo Traverse.

No capítulo 3, tratamos da parte prática do trabalho. Apresentamos uma atividade elaborada para a aplicação do jogo, expondo os objetivos e a metodologia de aplicação. Também apresentamos a aplicação dessa atividade com duas salas do 1º ano do Ensino Médio em uma escola estadual de São José do Rio Preto, onde descrevemos nossa experiência, as avaliações e os resultados obtidos.

1 – METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando se pensa em Matemática, em geral, a primeira coisa que nossa mente busca são os problemas matemáticos que costumam surgir durante a vida escolar de estudante. Contudo, não é apenas na vida escolar de qualquer pessoa que os problemas surgem, mas também no cotidiano. Além disso, cada problema deverá ser pensado de maneira diferente, sendo necessário que se desenvolvam estratégias distintas para cada um.

Partindo disso, uma maneira de se ensinar Matemática na escola é através da resolução de problemas, onde o aluno se torna um resolvedor de problemas, sendo instigado a pensar sobre a situação apresentada e a descobrir caminhos que o levem à resolução. Assim, a Metodologia da Resolução de Problemas (MRP) se apresenta como uma alternativa para o professor.

1.1 Resolução de problemas

A resolução de problemas teve como primeiro incentivador o educador George Polya, com seu livro "A arte de resolver problemas", publicado pela primeira vez em 1945, onde ele defende que o principal objetivo da Matemática é o de ensinar o aluno a resolver problemas. Como diz Onuchic (1999, p.210) sobre o pensamento do educador, "'resolver problemas' era o tema mais importante para se fazer matemática, e 'ensinar o aluno a pensar' era sua importância primeira".

Segundo a definição do dicionário Michaelis da língua portuguesa, um dos significados da palavra problema é: "dificuldade ou obstáculo que requer grande esforço para ser solucionado ou vencido". Tal significado pode levar a uma má impressão do que um problema será para o aluno em sala de aula.

Porém, quando tratamos de analisar o que é o problema sob a perspectiva da educação matemática, como dito por Miranda (2016, p.18), "o uso de problemas em educação matemática deve significar para o educando possibilidades de descobertas, novos desafios, novos caminhos e manifestações de criatividade".

Logo, precisamos desconstruir o mito de que o problema é apenas uma situação de difícil solução, transformando o pensamento do aluno, tornando o problema uma situação agradável que estimule o aluno a buscar a solução do mesmo.

Segundo Polya apud Romanatto (2012, p.301), um problema pode ser definido como "buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível".

Já segundo Onuich (1999, p.215), um problema pode ser dito como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver".

Segundo Pozo apud Miranda (2016, p.18), "só existe problema quando o sujeito que está resolvendo encontra alguma dificuldade que o obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta".

De uma perspectiva filosófica, Saviani apud Romanatto (2012, p. 301) define problema como "uma questão cuja resposta não conhecemos, porém necessitamos conhecê-la".

Também podemos destacar, segundo Pozo (1998) apud Miranda (2016) e Dante (2002), que há uma diferença ao se falar de problema e exercício. Um problema é uma situação em que a solução é desconhecida, onde é preciso que o sujeito desenvolva uma estratégia para que o objetivo seja atingido. Já em um exercício é diferente, pois, nesse caso, dispomos de uma série de passos/mecanismos pelo qual conseguimos atingir a solução.

Assim, segundo Romanatto (2012 p.301), "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado".

Podemos destacar algumas características que os problemas matemáticos apresentam:

> - O caminho da resolução é desconhecido;
> - Precisam ser analisados de várias formas diferentes, ou seja, esgotar todas as suas possibilidades;
> - Exigem paciência, pois devemos analisar até descobrirmos padrões, regularidades que permitam traçar estratégias de resolução;
> - Podem conter informações ocultas, que só percebemos se analisarmos corretamente as informações dadas;
> - Não têm resposta única: podemos nos deparar com situações em que existam várias maneiras de resolver o problema, outras em que não exista uma melhor solução ou até mesmo encontrar problemas sem solução, pois resolver um problema não é a mesma coisa que identificar somente a resposta. (TOLEDO, 2010 apud MIRANDA, 2016, p. 20)

Ao se falar sobre objetivos pelo qual se ensinar a resolver problemas, Dante (1991) nos apresenta alguns considerados importantes:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se desenvolver com as aplicações Matemáticas;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas e
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

Para este trabalho, tomaremos como referência a definição de problema dada por Polya (1978) e a de problema matemático dada por Romanatto (2012).

Como Dante (2002) sugere, podemos classificar os problemas em alguns tipos:

i) Exercícios de reconhecimento: exercícios que têm como objetivo fazer com que o aluno trabalhe algum conteúdo ou definição específica. Ou seja, aquele exercício que auxilia o aluno a identificar o conteúdo necessário para aquele tipo de exercício.

ii) Exercícios de algoritmo: exercícios cuja finalidade é o treino de algum algoritmo. Ou seja, aquele exercício mecânico, cuja prática de determinado método é o objetivo. Por exemplo, exercícios onde se trabalham as quatro operações com números.

iii) Problemas-padrão: problemas que têm como objetivo recordar e fixar os conceitos básicos através de algoritmos das operações básicas, além de reforçar o vínculo que as operações têm com o dia a dia dos alunos. Tais problemas são os tradicionais problemas que estão no final dos capítulos dos livros didáticos.

iv) Problemas-processo ou heurísticos: são aqueles problemas que o aluno precisa desprender um tempo para pensar em um plano, alguma forma para solucionar o problema, pois não são diretamente traduzidos para a linguagem matemática. Problemas heurísticos são os problemas que despertam a curiosidade e estimulam o aluno a pensar.

v) Problemas de aplicação: também conhecidos como situações-problema, são os problemas que retratam situações do cotidiano e a forma como aplicar a Matemática na resolução.

vi) Problemas quebra-cabeça: problemas que não dependem de um trabalho teórico do aluno. São problemas que dependem de um golpe de sorte ou um truque,

que pode estar escondido ou não no problema. São os problemas que mais despertam a curiosidade dos alunos.

Polya estrutura toda a resolução de problemas em quatro fases, que ele define como a melhor forma de se resolver quaisquer problemas. Começando com a fase de compreensão do problema, que é a fase de entendimento e assimilação do problema. A segunda fase é a de estabelecer um plano ou estratégia de como se atacar o problema dado. Já a terceira fase é a execução do plano traçado anteriormente. E a última fase é a de recapitulação do problema, onde o aluno revê toda sua resolução analisando ponto a ponto seu trabalho, corrigindo os erros, caso tenha.

Resumidamente,

1- **Compreender o problema**: Entender o que o problema está pedindo; buscar as condições e hipóteses que são dadas; buscar entender melhor o problema através de alternativas, como desenhos, esquemas e tabelas.
2- **Elaborar uma estratégia**: buscar uma maneira de resolver o problema em questão buscando alternativas, como começar dividindo-o em partes ou começar através de um problema que já tenha sido resolvido.
3- **Desenvolver a estratégia**: pôr em prática o que foi pensado no passo anterior realizando todos os passos que foram propostos, efetuando todos os cálculos que forem necessários.
4- **Retrospecto**: avaliar o que foi feito em cada passo da estratégia, verificando se a solução foi realizada corretamente, buscando compreender o que foi feito e se é possível aplicar o mesmo raciocínio a outros problemas semelhantes.

1.1.1 Compreensão do problema

Na fase de compreensão do problema, o aluno deve ter um bom entendimento do que está sendo pedido no enunciado dado. Ter bem claro o que está sendo pedido, qual seu objetivo ao resolver o problema, considerando todos os dados e todas as condicionantes e variáveis que estão descritas no enunciado.

Quando o professor deseja trabalhar com um problema com seus alunos, ele tem como objetivo que os alunos se interessem em encontrar a solução para o mesmo. Porém, se o problema for difícil demais ou de enunciado com escrita muito complicada, onde o que se necessita fazer não está de forma objetiva, provavelmente, ele não obterá sucesso, pois seus alunos, provavelmente, não se interessarão em resolvê-lo, já que não é interessante ter um problema onde não se sabe o que precisa ser feito para conseguir solucioná-lo.

Além disso, se o professor der um problema que seja considerado muito fácil, onde não se exige que os alunos exercitem o pensamento em busca de uma solução, muito menos para a compreensão do mesmo, isso também não será interessante para o professor, já que ele apenas deu um problema que não exige dos alunos um trabalho de pensamento, mas sim apenas uma aplicação de cálculos ou fórmulas.

Cabe ao professor conseguir escolher um problema adequado, que seja bem elaborado, com um enunciado que seja suficiente para que seus alunos consigam resolvê-lo, e também que seja de boa compreensão, interessante e que estimule o aluno a querer encontrar sua solução.

Nessa parte de compreensão do problema, o aluno deve destacar a finalidade do problema, qual o objetivo que deseja alcançar, destacar quais são as incógnitas que aparecem, quais condições são dadas e se com essas condições que ele tem será possível desenvolver uma estratégia de resolução. E, nesse momento, o papel do professor como mediador de ideias é de grande importância, onde algumas indagações feitas auxiliarão o aluno a ter uma melhor compreensão do que pode ser feito. O professor, no papel de mediador, deve criar um ambiente de busca e descoberta para seus alunos, onde o importante é a resolução do problema dado, não o tempo que gastaram para buscar a resolução de seu problema. Como dito por Onuchic (1999), “o professor é o responsável pela criação do ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer”.

Segundo Polya (1944), algumas das indagações que podem ser feitas pelo professor são:

- O que devemos descobrir para solucionar o problema?
- Quais são os dados que o enunciado nos dá?
- Temos que respeitar alguma condição?

1.1.2 Elaboração de uma estratégia

Já a fase de estabelecimento de uma estratégia de resolução, como diz Polya (1944), “pode ser longo e tortuoso”. Pode ser traçada uma estratégia inicial utilizando várias ideias, partindo de caminhos que serão errôneos, porém que servirão como base para uma estratégia que será adequada à resolução. O aluno pode lançar mão do uso de desenhos, cálculos, pensar em problemas que já tenha resolvido e que o ajudem de alguma forma. Neste ponto, cabe ao professor auxiliar o aluno de forma que este chegue a uma estratégia a partir de uma ideia brilhante, que deve ser alcançada através de perguntas para que o aluno alcance “por si mesmo” a tal ideia.

Para tal fase do processo, o professor deve colocar-se também no lugar do aluno, tendo ele sua própria estratégia para a resolução do problema. Quais dificuldades ele teve, se obteve sucesso ao final da primeira estratégia que mobilizou,e, se não obteve, quais mudanças na estratégia inicial precisaram ser feitas.

Muitas vezes, ao se trabalhar com algum problema, provavelmente, os alunos já terão visto algum problema que lhes será familiar, e isso é muito bom, pois eles terão algo em que poderão se apoiar no desenvolvimento de uma estratégia. Este problema, que o aluno poderá utilizar como auxiliar, como Polya diz, é o chamado *problema correlato*, que pode não ser exatamente igual ao que é dado, porém, a estratégia para sua resolução pode ser usada em algum dos processos que serão desenvolvidos na resolução do problema inicial. Para isso, Polya sugere começar a desenvolver o plano através da pergunta “Conhece um problema correlato?”.

A relação entre os problemas pode não ser feita de forma rápida pelos alunos, e, nesse momento, assim como na fase de compreensão, o professor deve atuar como mediador entre o aluno e o plano que será desenvolvido, com algumas questões que podem ser indagadas pelo professor, baseadas nas que foram feitas por Polya:

- Baseando-se nos dados obtidos no problema, existe algum problema que vocês já conheçam que é muito parecido?
- Existe alguma passagem na resolução que pode ser utilizada neste problema proposto?

1.1.3 Desenvolvimento da estratégia

A fase de execução da estratégia é o momento em que o aluno coloca à prova a estratégia por ele planejada. Ele precisa colocar em prática o que pensou como um método para resolver o problema dado, devendo seguir passo-a-passo o que desenvolveu como sua estratégia, observando cada passo realizado no processo que foi desenvolvido em sala, com o "auxílio" do professor.

Ou seja, o aluno vai aplicar todo o processo que foi planejado na fase anterior, fazendo todos os cálculos necessários, seguindo cada um dos passos que ele desenvolveu no seu plano. E, mesmo que o aluno esteja com dificuldades para desenvolvê-lo, é importante que o aluno desenvolva os passos até o final para que ele consiga ver seu plano bem executado, mesmo que não atinja o objetivo final, que é a solução do problema.

1.1.4 Retrospecto

A fase do retrospecto do problema é o momento em que o aluno apara as falhas que podem ter aparecido no problema. Fazendo este passo, o aluno consegue assimilar bem a estratégia usada, sanando as dúvidas que podem ter aparecido durante a resolução, conseguindo ter uma boa base para problemas que podem ser parecidos com o resolvido que, por ventura, possam aparecer durante sua vida.

O aluno, ao fazer todo o retrospecto, além de fazer a verificação do passo-a-passo e da melhor assimilação, também poderá encontrar uma nova forma de resolução. E, para isso, o professor deve estar preparado, pois, em uma sala, podem existir várias estratégias para a resolução do mesmo problema e ele deve estar aberto para tais estratégias, mesmo elas sendo totalmente diferentes da que ele tomou. E esse momento acaba sendo de grande valia para toda a turma, pois, neste momento, pode ser desenvolvido um debate onde o professor pede para os alunos mostrarem suas estratégias, fazendo com que os mesmos vejam que um problema pode ter mais que um caminho para ser resolvido. Além do mais, como mediador, o professor deve mostrar que o caminho pode ser diferente, porém o resultado é o mesmo.

1.2 A resolução de problemas como metodologia de ensino

Precisamos, inicialmente, falar sobre os acontecimentos do período em que a Resolução de Problemas se consolidou como uma metodologia de ensino. E esse período se dá durante o século XX, quando a sociedade passou de uma situação onde era basicamente rural para uma sociedade urbana e industrial, onde se tornou necessário que toda a sociedade soubesse Matemática, justamente pelo fato da sociedade ter se tornado urbana. Neste momento, para melhor desempenho de produção das fábricas e no novo contexto econômico e social, era necessário que a população soubesse uma Matemática mais aplicada para a vida de todos. Esse período não causou mudanças apenas na sociedade, mas na forma de como se aprender e ensinar a Matemática. Várias reformas no ensino foram realizadas, porém podemos destacar que elas foram dadas sob duas perspectivas: o ensino por repetição e o ensino com compreensão.

Segundo Onuchic e Allevato (2011), nas décadas de 1920 – 1930 houve o momento da fase do exercício e prática, onde os estudantes basicamente trabalhavam sob a perspectiva de memorizar dados, fatos e algoritmos, além de se ter como objetivo o cálculo matemático apenas. Dos anos 30 até meados dos anos 60, o foco era a ênfase nas relações matemáticas, na aprendizagem intelectual e na abordagem de atividades orientadas, onde o objetivo era a compreensão das ideias e habilidades aritméticas, além de aplicação de problemas matemáticos relacionados ao cotidiano dos alunos. Já nas décadas de 1960 – 1970, com o advento do movimento da Matemática Moderna, o estudo era caracterizado pela ênfase dada nas estruturas matemáticas, com a aprendizagem sob a abordagem de atividades orientadas, deixando de lado as reformas anteriores.

Na década de 1980, começou a se intensificar as discussões da Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, a partir do insucesso do movimento da Matemática Moderna. Como dito por Miranda, “nesta perspectiva, a Resolução de Problemas é o ponto de partida para a construção do conhecimento pelo próprio estudante”.

Como dissemos anteriormente, George Polya foi o primeiro grande incentivador da Resolução de problemas, com o lançamento do livro “A Arte de Resolver Problemas”. E, na década de 1980, as pesquisas nessa área começaram a se intensificar. Educadores matemáticos enfatizaram o potencial da Resolução de

Problemas, objetivando um ensino que oportunize a aprendizagem com significado e compreensão. (ONUCHIC, 1999).

Segundo os PCN (1998), a metodologia da Resolução de Problemas é o caminho a seguir quando se pensa em ensino de Matemática, porém os problemas não têm sido realmente utilizados no papel que poderiam exercer. Ou seja, acaba não se extraindo todo o potencial de trabalho que um problema pode ter, pois basicamente problemas são utilizados de forma que o aluno apenas aplique o conteúdo que foi ensinado, e não o instigando a pensar, a formular uma linha de raciocínio para que ele atinja o resultado, mas apenas seja uma aplicação do conteúdo que acabou de ser ensinado. O problema acaba sendo apenas um exercício, pois não instiga o aluno a pensar, apenas a fazer algo mecânico.

Ainda, segundo o que é dito pelos PCN, temos que:

> A Resolução de Problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprender a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidade, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente ampliam autonomia e capacidade de comunicação e argumentação. (BRASIL, 1998, p. 52)

A metodologia da resolução de problemas, diferentemente da metodologia de ensino tradicional, pautada no esquema definição/propriedades/exemplos/exercícios, que vem desde a época de Euclides, pois essa é a forma estrutural em que está escrita sua obra “Os Elementos” e é utilizada até os dias atuais, não parte diretamente das definições, mas sim de um problema dado ao aluno, seguindo o esquema problema/definição/propriedades/mais problemas. Como Romanatto diz, “a resolução de problemas permite aos estudantes o fazer matemática”. Partindo do problema, o aluno trabalha seu pensamento investigativo, aguça sua curiosidade e seu senso de criatividade na busca da resolução do problema proposto pelo professor.

Com a metodologia da resolução de problemas, podemos fazer com que os conceitos matemáticos fiquem melhor compreendidos pelos alunos, pela forma como são trabalhados. Não é seguido de uma forma convencional, onde o aluno precisa que alguém lhe transmita o conteúdo, o aluno trabalha a construção do conhecimento do conteúdo. O conceito trabalhado é sedimentado de forma mais sólida, pois os alunos vão construindo os conceitos e princípios matemáticos passo-a-passo, chegando a uma compreensão mais significativa.

> A resolução de problemas, como metodologia de ensino da Matemática, pode fazer com que os conceitos e princípios matemáticos fiquem mais compreensivos para os estudantes uma vez que eles serão elaborados, adquiridos, investigados de maneira ativa e significativa. (ROMANATTO, 2012, p.303)

Como metodologia de ensino, a abordagem através da Resolução de Problemas começa através do problema, "o aluno aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas" (Onuchic, 1999, p. 210). Não se pensa no problema como apenas um elemento de contextualização do conteúdo dado, mas a partir dele começar a se trabalhar o pensamento do aluno para o ensino.

A partir do problema dado, o aluno começa a fazer conexões entre seus conhecimentos preliminares e os conceitos que estão sendo trabalhados com o mesmo. Nesse momento, o trabalho do professor deve ser o de organizar essa conexão entre os conceitos. Ou seja, como dito em Romanatto (2012, p. 303), "é tarefa prioritária do professor organizar, sintetizar, formalizar os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos presentes nos problemas apresentados. "

> Adotar a Resolução de Problemas, como metodologia de ensino da Matemática, requer do professor dedicação, contínua avaliação e planejamento na escolha das situações-problema que gerem a curiosidade dos estudantes para a construção de novos conceitos. (MIRANDA, 2016, p.30)

O professor, no papel do mediador entre o aluno e o conceito, deve trabalhar de forma que o aluno consiga desenvolver seu pensamento de forma organizada, agindo de uma maneira que o aluno consiga chegar às conclusões através de perguntas que o instiguem a pensar. Como Polya (1944) diz:

> Quando o professor tenciona desenvolver nos seus alunos as operações mentais (...) ele as apresenta tantas vezes quanto puder com naturalidade. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e a fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. (POLYA, 1944, p.4)

Além disso, o professor é aquele que instiga o aluno a pensar, não resolvendo diretamente o problema, mas fazendo questionamentos, dando dicas ao aluno de como proceder.

> [...] o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador de aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários. (ONUCHIC, 1999, p.216)

E, para se trabalhar com essa metodologia, o professor deve estar preparado para qualquer situação inesperada como, por exemplo, diferentes estratégias que podem aparecer ou questões que podem surgir para as quais o professor não estava preparado. Como afirmado por Borba e Penteado (2001) apud Romanatto, os professores entram, quase sempre, no que eles denominam zona de risco, na qual impera a imprevisibilidade e a incerteza. Cabe ao professor ser o questionador, não mais o questionado. Como diz Romanatto, “temos assim, o professor como problematizador de conteúdos”.

Para Carvalho e Gil-Perez (2000) apud Romanatto (2012), isso exige do professor um domínio bastante amplo do conteúdo matemático:

> Conhecer os grandes problemas que originaram a construção de determinado assunto; conhecer as orientações metodológicas empregadas na construção de determinada parte da Matemática; conhecer os obstáculos epistemológicos ou didáticos relacionados aos mais diversos conteúdos da Matemática; saber selecionar conteúdos adequados e que sejam acessíveis aos estudantes e suscetíveis de interesse; ter algum conhecimento dos assuntos matemáticos atuais; estar preparado para aprofundar conhecimentos assim como adquirir outros; e ter conhecimento de pesquisas em educação matemática. (ROMANATTO, 2012, p.304)

Porém, para o professor conseguir trabalhar com a resolução de problemas em sala, ele primeiramente deve mudar sua postura em relação à forma como trabalha. Ele não será mais aquele a quem os alunos perguntarão, mas aquele que irá perguntar aos alunos, os instigando a pensar, a buscar a solução para os problemas. E, além disso, o professor também deve ser um resolvedor de problemas, “[...] vivenciar a resolução de problemas para experimentar etapas ou aspectos que envolvem a resolução de um problema” (Romanatto, 2012 p. 305).

Também, segundo Romanatto, é necessário que o professor tenha uma constante reflexão sobre os trabalhos realizados em sala de aula, realizando tais reflexões com especialistas para validar as experiências bem sucedidas assim como discutir caminhos para superar dificuldades que aparecem quando se utiliza tal metodologia. Caso o professor não tenha esses momentos para sua reflexão, ele pode acabar desistindo de continuar a trabalhar com essa metodologia diante das dificuldades apresentadas. Esses momentos são importantes para a continuidade do trabalho, pois nesse momento é que são buscadas as soluções para as dificuldades.

Sem esses momentos, diante das situações que possam surgir, o professor pode se desmotivar, assim, existe a possibilidade da desistência de trabalhar com a metodologia da resolução de problemas, o que não seria benéfico nem para o professor, nem para o aluno.

1.3 O jogo como ferramenta de ensino

É muito difícil encontrarmos uma definição para o que é jogo. Como observamos em Kishimoto (1994), podemos observar as diferenças que esta palavra possui dependendo do contexto em que se está sendo utilizada. Caso pensemos em um jogo de futebol, qual estratégia o time A deve tomar para vencer a partida, ou jogo político, onde se segue a estratégia de negociar vantagens para atingir seus objetivos. O que esses exemplos têm em comum? Quais elementos os caracterizam? Como podemos definir jogo a partir das semelhanças?

Segundo Henriot apud Kishimoto, não se chega ao jogo se não há a conjunção de uma conduta (subjetiva) e uma situação (objetiva/constatável). Ou seja, para o jogo existir é preciso que o sujeito esteja disposto a jogar e que tenha consciência de que está jogando, para manifestar sua conduta de acordo com o que o jogo espera. Além disso, o jogo também é um processo metafórico, onde “é-lhe próprio tomar ausência da matéria, ultrapassar o presente no sentido futuro, transformar o real por meio do possível e lhe dar a dimensão do imaginário”.

Com isso, segundo Henriot, temos uma definição para o que é jogo.

> [...] pode-se chamar de jogo todo processo metafórico resultante da decisão tomada e mantida como um conjunto coordenado de esquemas conscientemente percebidos como aleatórios para a realização de um tema deliberadamente colocado como arbitrário. (HENRIOT, 1989, p. 7)

Seguindo a definição dada por Agranionih e Smaniotto apud Selva e Camargo (2009), temos que o jogo matemático é:

> [...] uma atividade lúdica e educativa, intencionalmente planejada, com objetivos claros, sujeita a regras construídas coletivamente, que oportuniza a interação dos conhecimentos matemático, social e culturalmente produzidos, o estabelecimento de relações lógicas e numéricas e a habilidade de construir estratégias para a resolução de problemas. (SELVA e CAMARGO, 2009, p.2)

Inicialmente, quando o professor tem a intenção de utilizar algum jogo em sala de aula, ele não pode ter em mente apenas a intenção de utilizar o jogo como algo lúdico, gastando todo o tempo da aula somente para os alunos se divertirem com o jogo escolhido. O jogo deve ter a intencionalidade de ser utilizado como uma ferramenta que auxiliará no aprendizado de certo conteúdo matemático. Como dito por Moura:

> O jogo para ensinar matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado. (MOURA, 1992, p. 47)

Com as dificuldades se apresentando aos professores, como a falta de interesse e a indisciplina por parte dos alunos, a falta de tempo hábil ou a falta de estrutura da escola, é necessário que seja adotada uma abordagem que seja mais atrativa aos alunos. Uma abordagem através de uma proposta metodológica alternativa, que auxilie tanto o professor com o trabalho quanto o aluno na forma de aprender. Nesse cenário é que se apresentam os jogos, em especial os jogos matemáticos.

Segundo Selva e Camargo, os jogos matemáticos despenham um papel no ambiente escolar como um recurso didático, onde promove o processo de ensino-aprendizagem de uma forma mais dinâmica, permitindo que o professor trabalhe a Matemática e todo seu formalismo de uma maneira mais atrativa, objetivando mostrar a relação entre a Matemática e as relações sociais e culturais.

Moura classifica os jogos em dois grandes blocos:

i) Jogos desencadeadores de aprendizagem: jogos que não permitem a solução espontânea imediata, isto é, que exigem do aluno o estabelecimento de um plano de ação com a busca de conhecimentos anteriores, através da comparação com situações semelhantes à proposta ou da síntese de conhecimento anteriores, de modo que haja uma ruptura no conhecimento anterior.

ii) Jogos de aplicação: problemas cuja solução deve ser buscada no emprego das definições e algoritmos discutidos em sala.

Os jogos matemáticos se apresentam como uma alternativa para o professor de como conseguir prender a atenção de seus alunos para a aula e para o conteúdo que está sendo trabalhado. De forma mais lúdica e mais interessante que a forma tradicional, o professor consegue trabalhar o conteúdo pretendido de maneira mais desafiadora, colocando o aluno diante de um desafio instigante, onde ele precisa trabalhar/desenvolver alguma estratégia e seguir uma linha de raciocínio, que são aspectos necessários durante uma partida de qualquer jogo.

Ao se trabalhar com jogos, os alunos também trabalham a interação social e cultural, pois eles precisam formular uma linguagem bem estruturada para uma argumentação plausível, que expresse bem e que defenda o motivo pelo qual ele está tomando essa decisão de jogada.

Além disso, o professor, ao trabalhar com jogos, proporciona aos alunos que eles pensem de forma crítica, trabalhem o pensamento de forma a desenvolverem conjecturas, tracem uma estratégia que pode ou não ser a vencedora. Sendo a estratégia traçada a vencedora, o aluno sente instintivamente que as suas conjecturas formuladas são verdadeiras. Mas será que realmente são verdadeiras? Para que isso seja realmente concluído o aluno precisa testar mais algumas vezes através da experimentação em outras rodadas, com outros jogadores, com outras estratégias.

Porém, se a estratégia que o jogador desenvolveu não foi a estratégia vencedora, ele já percebe que suas hipóteses têm alguma falha, algum erro que as tornam não-vencedoras. Assim, ele precisa retomar o pensamento desde o início, reformulando suas conjecturas, formulando novas estratégias que possam ser as estratégias vencedoras. Isso só será realmente comprovado através de novas partidas contra outros jogadores.

Ou seja, como observado por Borin (1998), verificamos que a postura do jogador é a mesma que a postura de um cientista em busca de solução para um problema. O pensamento do jogador está voltado à solução de um problema, que é a vitória sobre seus oponentes. Através de experimentações, que são as partidas, o jogador vai observando sua estratégia, se ela está sendo vitoriosa ou não. Se não está sendo, ele busca aprimorá-la, seguindo novas hipóteses até que ele tenha uma estratégia que seja boa para que ele vença.

Contanto, quando tomamos o jogo como uma ferramenta de ensino, ele toma novas dimensões e isso obriga o professor a analisar sua aplicação e considerar o seu papel desenvolvido no processo de aprendizagem.

Como dito por Moura,

> O jogo pode, ou não, ser jogo no ensino. Ele pode ser tão maçante quanto à resolução de uma lista de expressões numéricas: perde a ludicidade. No entanto, resolver uma expressão numérica também pode ser lúdico, dependendo da forma como é conduzido o trabalho. O jogo deve ser jogo do conhecimento, e isto é sinônimo de movimento do conceito e de desenvolvimento. (MOURA, 1992, 49)

1.3.2 O jogo sob a perspectiva da Metodologia da Resolução de Problemas

Ao se falar em jogos e em resolver problemas, conseguimos encontrar semelhanças entre a forma de se resolver um problema e a forma de jogar.

> Na definição de jogo e problema podemos detectar a primeira semelhança, encontrada no sujeito que executa a ação. Para ele, só haverá jogo se nele se instalar a vontade de jogar, se ele entrar na brincadeira. Da mesma forma, o problema só é problema se o indivíduo sentir-se desestruturado (psicologicamente); o problema só é problema se ele é do indivíduo. (MOURA, 1992, p.50)

Porém, como é dito pelo mesmo autor, tanto o jogo quanto o problema são motivados por algum agente externo, ou seja, que não parte do indivíduo.

> [...] o jogo e o problema não estão só no indivíduo – eles são gerados por uma ação externa, são consequências de ações desencadeadoras no meio externo e que causam um conflito cognitivo: no jogo, o conflito é “competir”; no problema, o conflito é resolvê-lo. (MOURA, 1992, p.50)

Além disso, como já dissemos no início deste capítulo, ao trabalhar com os jogos em sala de aula podemos observar que o aluno (i) primeiramente busca compreender o funcionamento do jogo e suas regras, (ii) em seguida, ele busca desenvolver uma estratégia de raciocínio, (iii) desenvolvida a estratégia, ele aplica e verifica seu funcionamento e, a partir disso, (iv) ele precisa analisar se sua estratégia tem erros e tentar aprimorá-la.

Nestes quatros pontos que listamos, temos uma semelhança com os quatros passos da Metodologia da Resolução de Problemas, que mostramos no capítulo 2. Um esquema bem interessante que mostra essa semelhança é dada por Moura (1992):

Tabela 1. Comparação entre a MRP e o jogo

Etapas da Resolução de Problemas	Etapas do Jogo
Compreensão do problema	Compreensão do jogo
Elaboração de uma estratégia	Estabelecimento de uma estratégia
Desenvolvimento da estratégia	Execução das jogadas
Retrospecto	Avaliação do jogo

Fonte: Elaboração própria.

O jogo também pode ser trabalhado sob a perspectiva de Onuchic (1999), onde o problema apresentado é o jogo em si, e através de questionamentos pode levar o aluno a construir o próprio conhecimento dos conceitos matemáticos envolvidos no jogo.

Este é o motivo pelo qual escolhemos trabalhar com os jogos matemáticos sob a perspectiva da resolução de problemas, pois o jogo auxilia o professor ao atrair a atenção do aluno para uma aula mais interessante. A estratégia de se utilizar jogos é uma facilitadora de aprendizagem do aluno para aquele conteúdo.

1.4 A Metodologia da Resolução de Problemas nos documentos oficiais

1.4.1 Base Nacional Comum Curricular

Ao se falar em documentos oficiais de ensino onde é baseado todo o programa do Ensino Médio, temos, atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017 para o Ensino Infantil e Ensino Fundamental e, em 2018, para o Ensino Médio. Segundo o próprio documento, a BNCC é definida como:

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens

> essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. (BRASIL, 2017, p.7)

Este documento tem como objetivo ser o guia de todo o Ensino Básico (Ensinos Infantil, Fundamental e Médio) do país, além de também nortear a elaboração das propostas pedagógicas de todas as escolas, tanto na rede pública quanto na rede privada de ensino. Ele estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se esperam que os estudantes desenvolvam em toda sua trajetória escolar, tendo como objetivo a criação de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Olhando apenas para o ensino de matemática, é proposto pela BNCC que o currículo do Ensino Médio seja uma ampliação e um aprofundamento de todo conteúdo aprendido até o 9º ano do Ensino Fundamental com foco na vida do aluno, estabelecendo relações com a vida cotidiana de uma forma integrada com a Matemática aprendida.

Segundo a própria BNCC:

> [...] a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. (BRASIL, 2017, p.518)

Para isso, uma alternativa que se mostra viável é o trabalho com a Metodologia da Resolução de Problemas, pelo fato de que essa metodologia leva em consideração todo o conhecimento prévio do aluno e, através de problemas, constrói os conteúdos que o aluno necessitará em sua vida, sabendo discernir sobre qual estratégia utilizar e como agir, caso a estratégia utilizada inicialmente não seja a mais acertada.

Uma das orientações específicas que a BNCC dá para o ensino de Matemática e suas tecnologias é a seguinte:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2017, p. 523)

Podemos observar que a resolução de situações-problemas é uma forma de desenvolvimento de tal competência específica. Os problemas que o professor pode fazer uso em aula devem ser um elo entre a Matemática com a vida cotidiana do estudante, de forma que ele consiga enxergar uma aplicabilidade prática da Matemática no seu dia-a-dia.

> [...] os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p.527)

Relacionando com a MRP, o que foi citado pode ser visto como os quatro passos que foram descritos por Polya. Para cada problema que aparecer, o estudante deve saber interpretar o que lhe é apresentado em cada situação, compreender e desenvolver uma estratégia. Para isso, ele deve ter conhecimento de uma série de problemas que ele já tenha resolvido, com a finalidade de utilizá-los como forma de relação com o problema dado. E, caso não seja resolvido, ele ter ferramentas para desenvolver uma nova estratégia.

Além do mais, após o problema estar resolvido, cabe à recapitulação do problema, observando todos os passos da resolução. E, segundo a BNCC, os alunos podem comunicar aos demais a sua resolução, de forma que surja o debate e quem esteja apresentando saiba defender sua resolução através de uma argumentação consistente.

1.4.2 Parâmetros Curriculares Nacionais

Também temos como referência de documento oficial de ensino, a nível nacional, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Analisando o PCN da área de Matemática e Ciências da Natureza, podemos encontrar que: “a resolução de problemas é a peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios.” (BRASIL, 2006, p.112). Ou seja, como já vimos anteriormente, o objetivo central do ensino de Matemática é o aluno ter capacidade de resolver problemas. A MRP se mostra novamente como uma boa estratégia de ensino, pois seu enfoque principal é desenvolver no aluno tal capacidade. E, quando se fala em problemas, como já dito, cabe ao professor observar a diferença entre um problema e um exercício de fixação, que é extremamente um processo mecânico.

Também é sugerido que o professor faça uso de situações-problemas que façam sentido ao estudante, ou seja, situações que possam envolver momentos que se aplique à realidade do aluno, à sua vida cotidiana.

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. (BRASIL, 2006, p.113)

Os PCN têm as seguintes competências na área de Matemática, que são as metas que deverão ser atingidas nesse nível de escolaridade:

1) Representação e comunicação;
2) Investigação e compreensão;
3) Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural.

Olhando para a competência de investigação e compreensão, o PCN (2006) diz que ela é “marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema”. Ou seja, o estudante, ao se deparar com um problema, deve ter noção de como encará-lo, de forma que ele tenha capacidade de interpretar e identificar todas as condições que o problema lhe impõe.

Além disso, o aluno deve elaborar uma, ou talvez mais que uma estratégia para a resolução do mesmo. E, para isso, ele deve ter ferramentas que possa empregar com este objetivo.

Essas condições citadas são os passos 1, 2 e 3 que a MRP sugere, (compreensão, elaboração da estratégia e aplicação da estratégia elaborada). Logo, a MRP seria indicada como uma excelente estratégia para essa competência da área.

Para concluir, fazendo uma breve comparação entre os dois documentos que apresentamos (BNCC e PCN), podemos observar que a MRP se apresenta em ambos como uma ferramenta de grande valia. Cabe ao professor, caso ele a escolha como sua metodologia de ensino, elaborar atividades para cada um dos conteúdos a serem trabalhados e desenvolver seu papel como o mediador do conhecimento, fazendo com que os alunos construam seu próprio aprendizado.

> Nessa perspectiva, não só a seleção de temas e conteúdos, como a forma de tratá-los no ensino são decisivas. A maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências. (BRASIL, 2006, p.113)

1.4.3 Currículo do Estado de São Paulo

Criado em 2009 e atualizado em 2011, o Currículo do Estado de São Paulo destaca três pares complementares de referências como eixos principais para o ensino de Matemática:

1) *Expressão e compreensão:* capacidade de expressar suas ideias e de compreender as ideias dos outros;
2) *Argumentação e decisão*: capacidade de argumentar através da análise dos dados e informações dadas, objetivando a tomada de decisões fundadas em resultados concretos;
3) *Contextualização e abstração*: capacidade de contextualizar as situações aprendidas na escola com seu cotidiano e de, através da abstração, desenvolver a solução de situações que possam surgir.

Diferentemente dos outros documentos analisados anteriormente, o Currículo do Estado de São Paulo não cita de forma clara os quatro passos da MRP, porém é possível identificar os passos para que a metodologia seja aplicada.

Particularmente, no eixo *Argumentação e decisão*, onde o foco é o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento analítico, o documento cita, em suas palavras, que primeiro deve-se aprender a resolver problemas em Matemática, para em seguida, se resolver os problemas de outras disciplinas, pelo fato de que o objetivo de se aprender Matemática seja resolver problemas:

> [...] no tocante a capacidade de sintetizar, de tomar decisões a partir dos elementos disponíveis, a Matemática assume um papel preponderante. Suas situações-problema são mais nítidas do que as de outras matérias, favorecendo o exercício do movimento argumentar/decidir ou diagnosticar/propor. (SÃO PAULO, 2011, p. 32.)

Ou seja, o documento tem como intenção cumprir o objetivo destacado, que é o aluno saber resolver problemas, e isso não se aplicará apenas à vida escolar, mas à sua vida cotidiana.

Além disso, a proposta, quando fala de se trabalhar com determinados conteúdos, afirma ser interessante dar um significado para aquele conteúdo, uma aplicação prática para a vida de quem está aprendendo. Esse ato é uma tentativa de tornar a Matemática próxima à vida do estudante. E é sugerido que o professor busque formas de conseguir ganhar a atenção dos alunos para sua aula. Como a proposta diz, o professor deve ser um “contador de histórias”.

Para isso, a MRP se mostra como uma alternativa para o professor. Trabalhar a partir de problemas interessantes é uma estratégia que o professor pode seguir, levando em consideração todo o conhecimento que seus alunos têm. E as histórias do professor podem ser os problemas de onde partirão todos os conteúdos que serão ensinados.

Fazendo uma comparação com os outros documentos citados, no Currículo do Estado de São Paulo não encontramos diretamente os passos da MRP. Porém, quando se aprofunda a leitura, é possível verificar que os passos estão na descrição dos objetivos e indicações do documento. Cabe ao professor que queira trabalhar com a MRP saber encaixar essa metodologia no que o documento sugere.

2 - O JOGO TRAVERSE E CONTEÚDOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS

2.1 O jogo Traverse

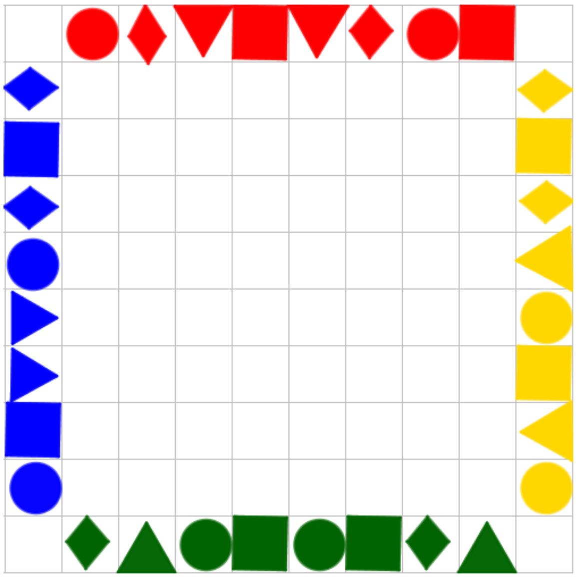
O jogo Traverse foi criado por Michael Kuby e John Miller, no ano de 1987, porém há indícios de que ele seja ainda mais antigo. Na Suécia, é conhecido por Taifho e é apresentado como um antigo jogo japonês. O nome Traverse remete ao sentido, em inglês, da palavra "traverse", que em português significa "atravessar, passar para o outro lado, transpor". Baseando em Silva e Kodama (2004, p.6), o jogo remete a atravessar uma avenida, lembrando o que deve ser observado quando preciso chegar ao outro lado da rua com segurança, onde é necessário levar em consideração para onde devo ir, ou para qual lado devo olhar, se é necessário andar rápido para chegar ao outro lado. Tal análise também deve ser feita ao jogar o Traverse, onde as decisões para as próximas rodadas devem ser tomadas baseando-se em cada momento, já que as relações entre as peças vão mudando a cada jogada.

O jogo é constituído de um tabuleiro quadriculado 10x10, com um total de 100 casas, onde 64 casas são destinadas aos movimentos que serão desenvolvidos pelos jogadores. Das 36 casas restantes, 32 são destinadas ao posicionamento inicial das peças pelos jogadores e as 4 casas dos cantos não são utilizadas. Além do tabuleiro, o jogo é constituído por 32 peças de diferentes formatos.

Podendo ser jogado de duas a quatro pessoas, o jogo disponibiliza quatro cores de peças (amarelo, azul, verde e vermelha), onde cada time é composto de oito peças (dois triângulos, dois losangos, dois quadrados e dois círculos).

Ganha o jogo quem conseguir levar primeiro todas as suas peças para o lado oposto do tabuleiro

Figura 1. Tabuleiro do Traverse



Regras do jogo:

1) Para o início do jogo, os jogadores devem escolher as peças de uma determinada cor e posicioná-las no tabuleiro, da forma que for mais conveniente para sua estratégia. A única restrição é não utilizar as casas dos cantos.

2) Cada jogador deve movimentar uma peça por jogada. E cada jogada escolhida deve respeitar às condições de movimento das peças.

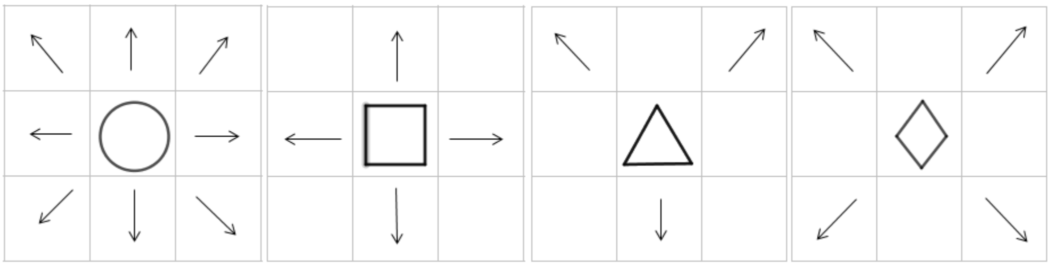
Triângulos: movimentos diagonais para frente e verticais para trás;

Losangos: movimentos diagonais para frente e para trás;

Quadrados: movimentos verticais e horizontais;

Círculos: movimenta-se em qualquer direção.

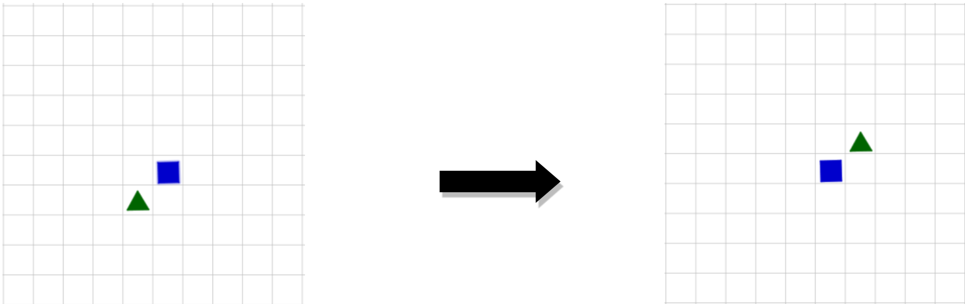
Figura 2. Movimento das peças

.

3) As peças podem ser movimentadas, em geral, uma casa por vez, em direção a um espaço vazio. Além disso, existem os passes curtos e longos (regras 4 e 5)

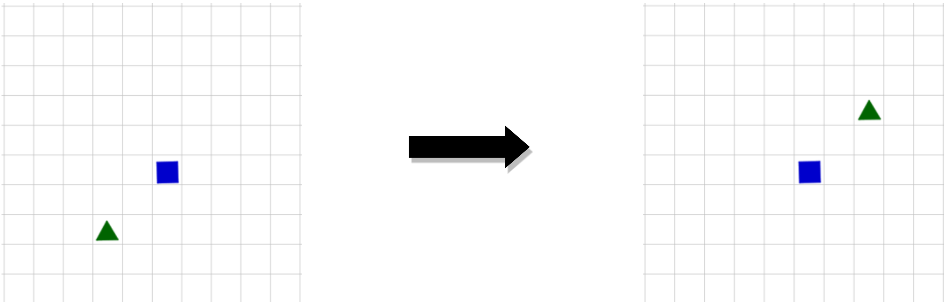
4) Passe curto: pode ser utilizado para “pular” qualquer peça, desde que esta seja vizinha a sua e a casa vizinha esteja livre. Além disso, a peça que foi pulada não precisa voltar à posição inicial do jogo, nem deve ser capturada. Ou seja, essas peças servem como uma espécie de “trampolim” para o pulo. A única exceção é o círculo, que será vista na regra 7.

Figura 3. Exemplo de movimento "passe curto”



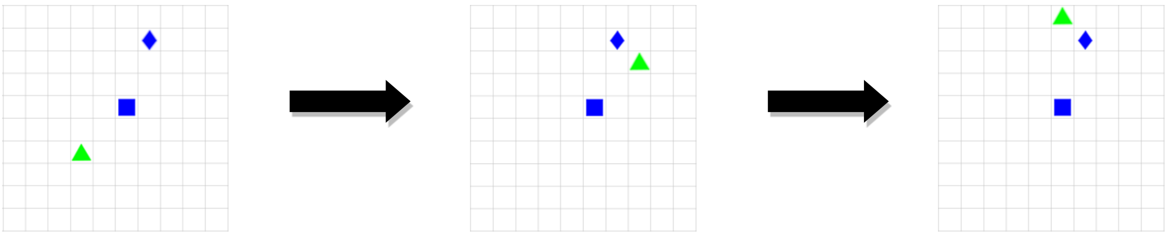
5) Passe longo: pode ser utilizado também para “pular” qualquer peça do jogo, mesmo ela não estando na casa vizinha a sua. Para isso é preciso ver a simetria entre os espaços vazios antes e depois da casa com a peça a ser pulada, mais uma casa, que será o local onde estará a peça após o movimento. E, como na regra 4, as peças puladas não devem voltar a posição inicial do jogo, nem serem capturadas, exceto na jogada com o círculo.

Figura 4. Exemplo de movimento “passe longo”



6) Série de pulos: o jogador pode realizar uma série de pulos consecutivos, desde que as regras 4 e 5 sejam respeitadas.

Figura 5. Exemplo de série de pulos



7) O círculo: caso o jogador use o círculo de um adversário como “trampolim”, este círculo deve retornar à fileira inicial de jogo. E, quando o jogador usar seu próprio círculo como “trampolim”, o círculo deve permanecer no mesmo lugar.

8) Quando a peça atingir a fileira oposta a sua inicial, esta peça não pode retornar mais ao jogo, não podendo ser mais utilizada.

9) O jogo acaba quando um jogador conseguir levar todas as peças para a sua fileira de destino, que é a fileira oposta a sua fileira inicial.

Observação: Se ocorrer o caso de não haver mais jogadas possíveis e sobrarem peças em jogo, convém-se declarar vencedor quem levou mais peças à fileira de destino. Porém, não existe uma regra que defina isso.

Uma estratégia para levar os alunos a ter uma melhor compreensão das regras do jogo é fazer alguns questionamentos, como propostos por Silva e Kodama (2004), Fanti et al. (2015) e Lamas (2015):

- Como são as peças do jogo?
- Quantos são os jogadores que podem participar de uma partida e quantas são as peças de cada um?
- Como cada peça se movimenta no tabuleiro?
- E como cada jogador deve posicionar suas peças no início do jogo?
- Qual a forma do círculo se movimentar no tabuleiro?
- Quem começa o jogo?
- Como o jogador pode fazer sua jogada?

- Um jogador pode pular uma peça?
- E se alguma peça é pulada, o que acontece com ela?
- Em algum momento um jogador pode pular mais que uma casa em uma única jogada? Se sim, explique o motivo.
- O jogador pode pular uma peça sua?
- E se o círculo for pulado, o que acontece com essa peça?

Para se jogar o Traverse, é necessário que a cada jogada o jogador faça uma análise detalhada e coordenada. Além de prever as possibilidades de suas próprias jogadas, o jogador deve também atentar-se às jogadas dos seus oponentes, impedindo que eles avancem suas peças, e tentando usar as peças adversárias como trampolim, possa adiantar a travessia de suas peças.

Por ser um jogo onde o raciocínio lógico é explorado e alguns conceitos de Geometria podem ser bem trabalhados, escolhemos o Traverse como recurso para a atividade que elaboramos. Ele é um jogo onde várias situações podem surgir, e cada uma deve ter uma estratégia diferente para ser resolvida. Logo, trabalhando juntamente com a MRP, ele pode atingir o objetivo de nosso trabalho, que é incentivar o aluno a entender que ele é o agente do seu próprio conhecimento.

2.2 Conteúdos matemáticos relacionados ao jogo

Com o jogo Traverse, podemos trabalhar diversos conceitos matemáticos, particularmente, de Geometria. Vamos nos concentrar nas formas das peças do jogo e algumas propriedades delas e também no conceito de simetria, que aparece nas jogadas em que se faz um “pulo”.

2.2.1 Polígonos

Definição 1: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n,$ com $n > 3$, uma sequência de n pontos distintos tais que os segmentos A_1A_2, $A_2A_{3,} \ldots, A_nA_{n-1}$ tenham as seguintes propriedades:

i) Nenhum par de segmentos se intersecciona, a não ser nas suas extremidades.

ii) Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A união dos segmentos A_1A_2, $A_2A_{3,}$ …, A_nA_{n-1} é chamada **polígono**, o qual denotamos por $A_1A_2 \ldots A_n$. Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados **vértices** do polígono e os segmentos A_1A_2, $A_2A_{3,}$ …, A_nA_{n-1} são seus **lados**.

Figura 6. Exemplos de polígonos

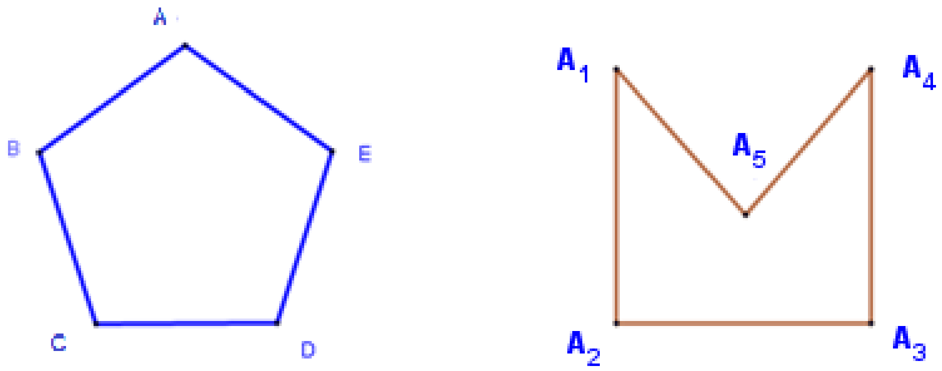
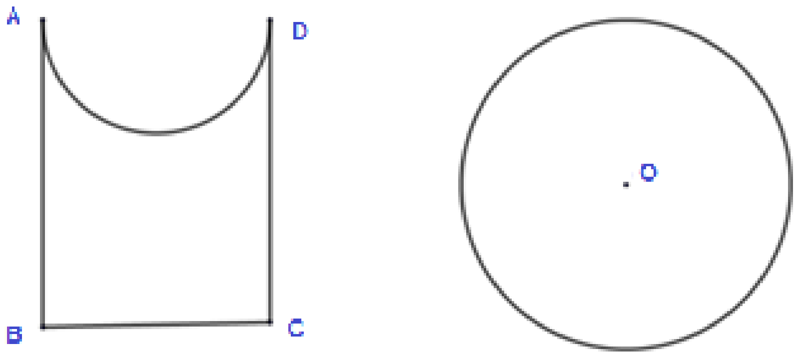


Figura 7. Exemplos de não-polígonos



Observação: De acordo com o número de lados que o polígono possui, ele recebe um nome especial.

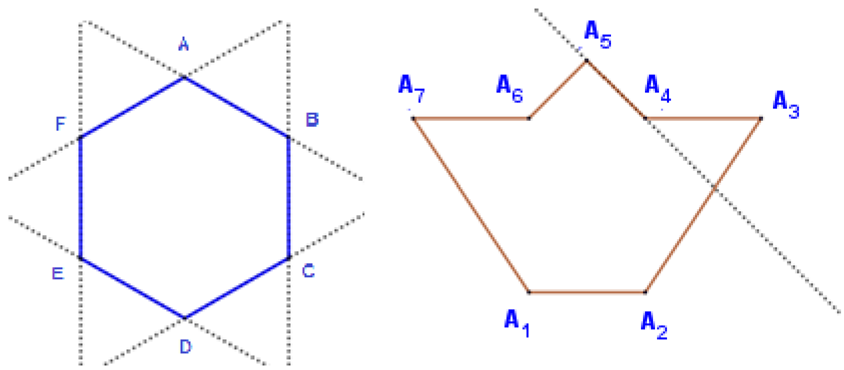
Tabela 2. Classificação dos polígonos com relação ao número de lados

Número de lados do polígono	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
n	n-ágono

Fonte: elaboração própria.

Definição 2: Um polígono é chamado **convexo** se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém cada um dos seus lados.

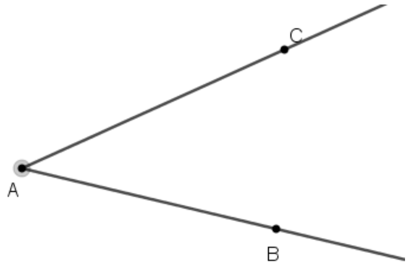
Figura 8. Exemplo de polígono convexo, à esquerda, e não-convexo, à direita



Definição 3: Chamamos de **ângulo** a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se o ângulo é formado pelas semirretas AB e AC então essas semirretas são chamadas **lados** do ângulo, e o ponto A é chamado **vértice** do ângulo.

Notação: Denotaremos por $B\hat{A}C$ o ângulo que tem por lados AB e AC e vértice A.

Figura 9. Exemplo de ângulo



Definição 4: a) A cada ângulo $B\hat{A}C$ corresponde um número real entre 0 e 180. Esse número é chamado **medida** do ângulo, e é denotado por $m(B\hat{A}C)$.

b) Ângulos que têm a mesma medida são chamados **ângulos congruentes**.

c) Um ângulo com medida menor que 90° é chamado **ângulo agudo**, e um ângulo com medida maior que 90° é chamado **ângulo obtuso**.

d) Um **ângulo reto** é um ângulo de medida igual a 90°.

Observação: A notação $m(B\hat{A}C)$ corresponde à medida em graus do ângulo $B\hat{A}C$.

Definição 5: a) Se a soma das medidas de dois ângulos é 180°, então dizemos que os ângulos são **suplementares**.

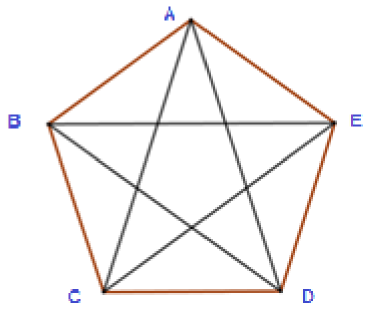
b) Se a soma das medidas de dois ângulos é 90°, então dizemos que os ângulos são **complementares**.

Definição 6: Os **ângulos internos** do polígono convexo são $A_{i-1}\widehat{A_i}A_{i+1}$, $i = 2, \ldots n-1$, e os ângulos $A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$ e $A_n\widehat{A_1}A_2$.

Definição 7: Um **polígono regular** é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois congruentes e seus ângulos dois a dois congruentes.

Definição 8: Chamamos de **diagonal** do polígono o segmento de reta tendo por extremidades dois vértices não consecutivos do polígono.

Figura 10. Exemplo de diagonais de um polígono

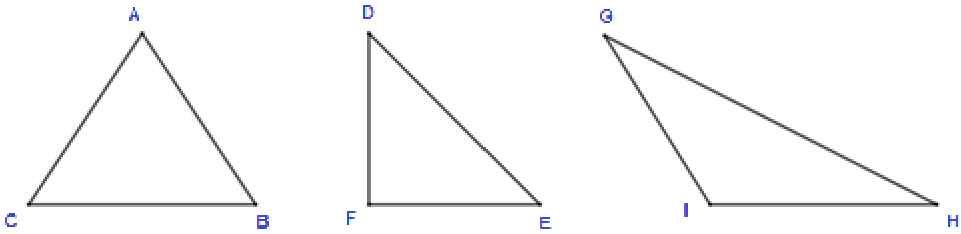


Definição 9: Considere um quadrilátero convexo. Nele**,** dois ângulos são **opostos** se não têm um lado comum; caso contrário, são chamados ângulos **consecutivos**.

Ao observamos os ângulos internos de um triângulo, podemos ter a seguinte classificação:

- Triângulo acutângulo: quando todos os ângulos internos forem agudos, ou seja, tiverem medida menor que 90º.
- Triângulo retângulo: quando o triângulo possuir um ângulo reto, isto é, um ângulo com medida 90º. Nesse caso, atribuímos nomes especiais aos lados. O lado oposto ao ângulo com medida 90º é chamado de *hipotenusa* e os demais lados são chamados de *catetos*.
- Triângulo obtusângulo: quando o triângulo possuir um ângulo interno obtuso, ou seja, um ângulo maior que 90º.

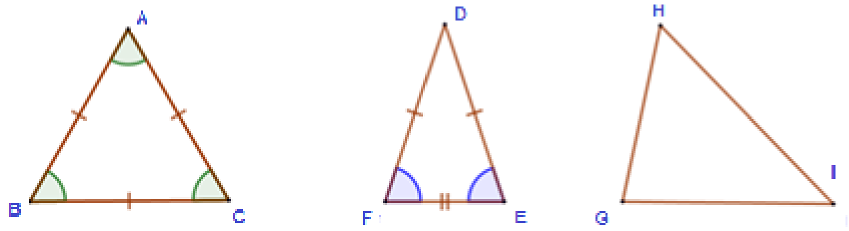
Figura 11. Triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo



Quanto à medida dos lados do triângulo, temos a seguinte classificação:

- Triângulo equilátero: quando todos os lados do triângulo são dois a dois congruentes, isto é, têm mesma medida.
- Triângulo isósceles: quando apenas dois dos lados são congruentes entre si. Ao lado que não é congruente aos outros dois damos o nome de **base** do triângulo isósceles.
- Triângulo escaleno: quando quaisquer dois de seus lados têm medidas diferentes.

Figura 12. Triângulos equilátero, isósceles e escaleno



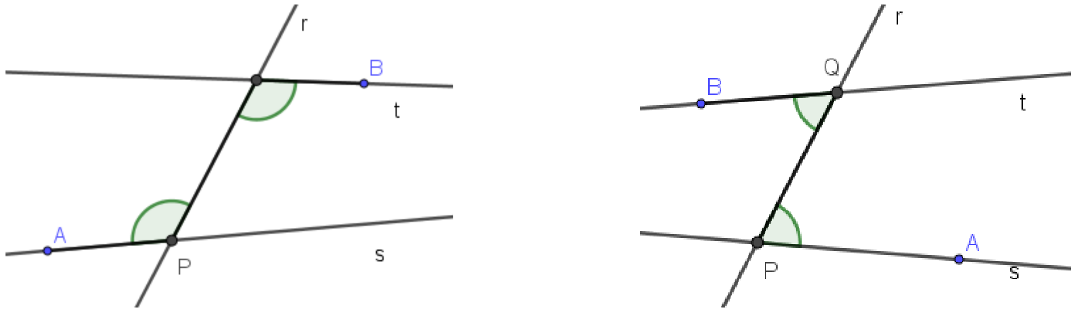
Definição 11: Um **paralelogramo** é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

Figura 13. Exemplo de paralelogramo

Os paralelogramos têm diversas propriedades. Para as demonstrações dessas propriedades, vamos considerar que são conhecidos do leitor os casos de congruência de triângulos. Além disso, vamos precisar da definição de ângulos alternos internos, que veremos a seguir.

Definição 12: Seja r uma reta transversal às retas s e t, interseccionando-as nos pontos P e Q, respectivamente. Seja A um ponto de s e B um ponto de t, tais que A e B estejam em lados opostos de r. Os ângulos $A\hat{P}Q$ e $B\hat{Q}P$ são chamados **ângulos alternos internos** formados por s, t e a transversal r.

Figura 14. Ângulos alternos internos



Observação: É possível mostrar que se tivermos duas retas paralelas cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes (para a demonstração deste resultado vide [Rezende e Queiroz, 2008]).

Teorema 1: Em um paralelogramo valem as seguintes propriedades:

a) Cada diagonal separa o um paralelogramo em dois triângulos congruentes.

b) Dois lados opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

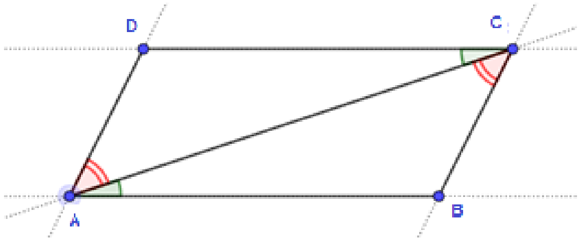
c) Dois ângulos opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

d) Dois ângulos consecutivos quaisquer em um paralelogramo são suplementares, isto é, a soma das suas medidas é 180º.

Demonstração:

a) Considere o paralelogramo $ABCD$ e as retas suportes dos lados AB, BC, CD e AD. Considere também a diagonal do paralelogramo passando pelos pontos A e C.

Figura 15. Paralelogramo com ângulos alternos internos destacados



Como AB e CD são lados paralelos, logo as retas que os contém são paralelas. Assim, a reta que contém a diagonal AC é uma reta transversal a duas retas anteriores. Então, os ângulos $A\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$ são ângulos alternos internos, logo, são congruentes. De modo análogo, como AD e BC são lados paralelos, logo, as retas que os contém também são paralelas e a reta que contém a diagonal AC é uma reta transversal a essas. Assim, os ângulos $A\hat{C}B$ e $C\hat{A}D$ são congruentes, pois são alternos internos.

Considerando os triângulos ABC e ACD temos que o lado AC é comum aos dois. Além disso, $A\hat{C}D$ é congruente a $C\hat{D}A$ e $A\hat{C}B$ é congruente a $C\hat{A}D$. Logo, pelo caso de congruência ALA (ângulo-lado-ângulo) os triângulos ABC e ACD são congruentes.

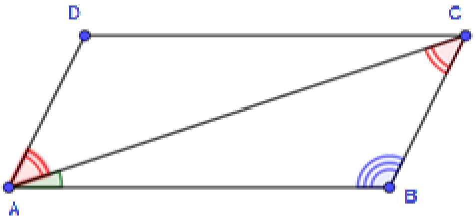
De modo análogo, prova-se que a diagonal BD separa o paralelogramo $ABCD$ em dois triângulos ABD e $CDB,$ que são congruentes.

b) Como os triângulos ABC e ACD são congruentes, logo, tem os lados correspondentes congruentes. Ou seja, a medida do lado AB é igual à medida do lado CD e a medida do lado AD é igual à medida do lado BC. Portanto, os lados opostos do paralelogramo $ABCD$ são congruentes.

c) Novamente, pela congruência dos triângulos formados pelas diagonais, temos que os ângulos opostos do paralelogramo são congruentes.

d) Considere os ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ do paralelogramo. Olhando para o triângulo ABC, sabemos que a soma dos ângulos internos de seus ângulos é igual a 180°. Ou seja, $m(B\hat{A}C) + m(A\hat{C}B) + m(A\hat{B}C) = 180°$.

Figura 16. Paralelogramo com ângulos destacados



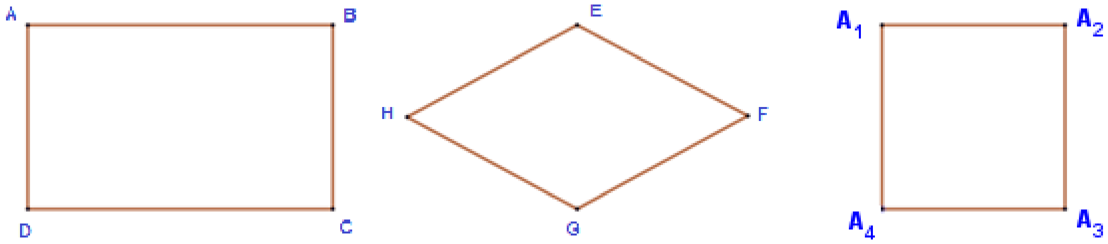
Como $A\hat{C}B$ é congruente a $C\hat{A}D$, então $m(B\hat{A}C) + m(C\hat{A}D) + m(A\hat{B}C) = 180°$. Mas os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ formam o ângulo $B\hat{A}D$ do paralelogramo. Logo, $m(B\hat{A}C) + m(C\hat{A}D) = m(B\hat{A}D)$. Disso, temos que $m(B\hat{A}D) + m(A\hat{B}C) = 180°$. Portanto, $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ são ângulos suplementares.

Definição 13: a) Um **losango** é um paralelogramo cujos lados são todos congruentes.

b) Um **retângulo** é um paralelogramo cujos ângulos são retos.

c) Um **quadrado** é um paralelogramo cujos lados são congruentes e cujos ângulos são retos.

Figura 17. Retângulo, losango e quadrado



Teorema 2: a) Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então tem os quatro ângulos retos. Portanto, esse paralelogramo é um retângulo.

b) Em um losango, as diagonais são perpendiculares e se interseccionam no ponto médio.

c) Se as diagonais de um quadrilátero se interseccionam no ponto médio e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.

Demonstração:

a) Seja $ABCD$ um paralelogramo que possui um ângulo reto em $A\hat{B}C$. Pelo item (b) do teorema anterior, os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes. Logo, o ângulo $A\hat{D}C$ também é reto.

Pelo item (c) do teorema, temos que os ângulos consecutivos $A\hat{B}C$ e $D\hat{A}B$ são congruentes. Como $A\hat{B}C$ é um ângulo reto, então $D\hat{A}B$ também é ângulo reto.

Logo, esse paralelogramo tem os quatro ângulos retos e, portanto, é um retângulo.

Figura 18. Paralelogramo usado na demonstração

b) Seja $ABCD$ um losango. Tracemos as diagonais AC e BD e denotemos por O o ponto de intersecção das diagonais.

Como um losango tem os lados opostos paralelos, o lado AB é paralelo ao lado CD. Assim, considerando a diagonal BD como uma transversal aos lados, podemos afirmar que os ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ são congruentes, pois são ângulos alternos internos. Analogamente, considerando a diagonal AC como uma transversal aos lados, temos que os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$ são congruentes.

Como os lados do losango são congruentes, podemos afirmar que os triângulos AOB e COD são congruentes, pelo caso ALA de congruência de triângulos. Logo, concluímos que $AO = OC$ e $BO = OD$. Portanto, o ponto O é ponto médio das diagonais.

Com uma argumentação análoga, prova-se que os triângulos BOC e AOD também são congruentes.

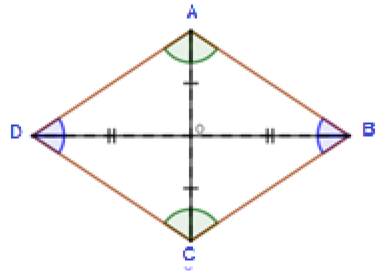
Além disso, os triângulos AOB e AOD também são congruentes, pois têm o lado AO em comum, $BO = OD$ (pois O é ponto médio da diagonal BD) e $AB = AD$ (pois são lados do losango). Desse modo, temos que os ângulos $O\hat{A}D$ e $O\hat{A}B$ são congruentes. Logo, a diagonal AC é bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$. Analogamente, mostra-se que as diagonais do losango são bissetrizes dos seus ângulos.

Agora, mostremos que as diagonais são perpendiculares.

Pelo item (d) do teorema anterior, os ângulos $C\widehat{D}A$ e $D\hat{A}B$ são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é 180°. E como as diagonais são bissetrizes dos ângulos, temos que as somas das medidas dos ângulos $O\hat{A}D$ e $O\widehat{D}A$ é metade de 180°, ou seja, $m(O\hat{A}D) + m(O\widehat{D}A) = 90°$. Logo, esses ângulos são complementares. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é180º, concluímos que o ângulo $A\hat{O}D$= 90º.

Assim, tendo que os triângulos são congruentes, concluímos que $A\hat{O}B$= $A\hat{O}D$= $C\hat{O}B$ = $C\hat{O}D$ = 90º. Portanto, as diagonais do losango são perpendiculares.

Figura 19. Representação do losango



c) Considere o quadrilátero $ABCD$, com as diagonais AC e BD, e seja O o ponto de intersecção das diagonais satisfazendo $AO = OC$ e $BO = OC$. Além disso, por hipótese, temos que essas diagonais são perpendiculares, logo $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = A\hat{O}D = 90°$. Olhando para os triângulos AOB, COB, COD, AOD pelo caso de congruência LAL, concluímos que esses triângulos são congruentes. Logo, $AB = BC = CD = DA$ e, portanto, $ABCD$ é um losango.

2.2.2 Círculo

Definição 14: a) Sejam A um ponto e r um número real positivo. Chamamos de **circunferência** de centro A e raio r o conjunto formado por todos os pontos do plano que estão a uma distância r do ponto A.

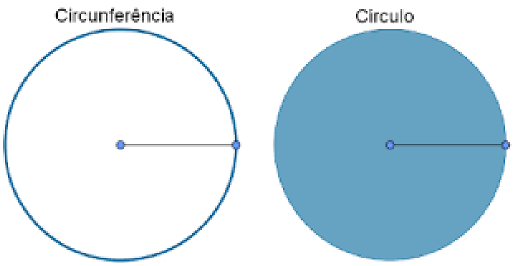
Notação: Denotamos a circunferência de centro A e raio r por $C(A, r)$.

b) O **interior** de $C(A,r)$ é o conjunto de todos os pontos X tais que a medida do segmento AX é menor que r. Um ponto desse tipo é chamado **ponto interior** da circunferência.

c) O **exterior** de $C(A,r)$é o conjunto de todos os pontos X tais que a medida do segmento AX é maior que r. Um ponto assim é dito **ponto exterior** da circunferência.

d) Quando temos a união da circunferência com seu interior temos um **círculo**, ou uma **região circular fechada**.

Figura 20. Exemplo de circunferência e círculo



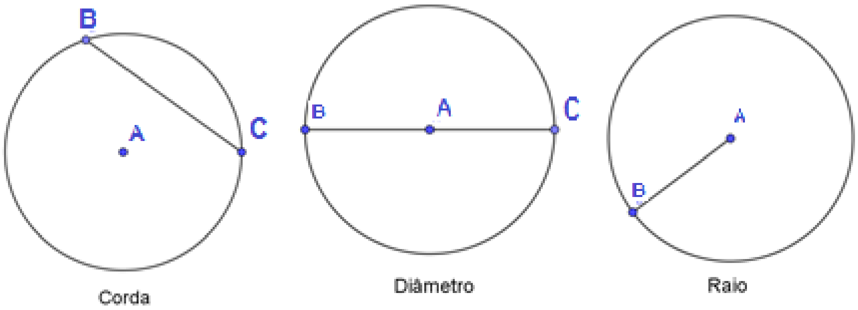
Definição 15: a) Chamamos de **corda** qualquer segmento que liga quaisquer dois pontos pertencentes à circunferência.

b) Uma corda da circunferência que contém seu centro é chamada **diâmetro** da circunferência.

c) Um segmento que tem como extremidade um ponto da circunferência e seu centro é chamado de **raio** da circunferência.

Observação: A medida do diâmetro da circunferência é o dobro da medida do raio da mesma.

Figura 21. Exemplos de corda, diâmetro e raio



2.2.3 Simetria

É comum que as pessoas, quando questionadas sobre simetria, associem esse tema à natureza, às artes ou à arquitetura, mas poucas pessoas pensam em simetria como um conceito matemático. O que é razoável, pois é muito comum encontrarmos objetos simétricos nesses ambientes, que estão presentes na vida de todos.

Na natureza, as asas de uma borboleta, determinadas flores ou o corpo humano são exemplos de objetos simétricos.

Figura 22. Exemplo de simetria na natureza

Já nas artes, podemos observar simetria em desenhos famosos como o Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci, ou as figuras do artista holandês Maurits Cornelius Escher.

Figura 23. Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci

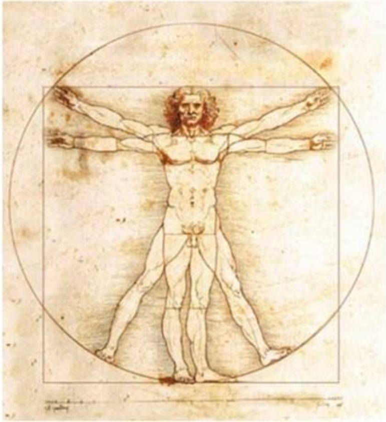


Figura 24. Lizards, nº 56, de M.C. Escher

Também é possível encontrar simetria na arquitetura de grandes edifícios do planeta, como no Taj Mahal ou o Parthenon.

Figura 25. Taj Mahal, localizado em Agra, Índia

Figura 26. Parthenon, localizado em Atenas, Grécia

Para definir matematicamente o que é simetria, precisamos antes de alguns conceitos. Vejamos a seguir:

Definição 16: Uma **transformação** T no plano α é definida como uma função bijetora $T: \alpha \to \alpha$, tal que:

i) a pontos distintos P e Q de α, T associa imagens distintas $T(P)$ e $T(Q)$ de α;

ii) para cada ponto Y de α, existe um único ponto X em α tal que $Y = T(X)$.

Definição 17: Isometrias são transformações no plano que preservam distâncias, ou seja, se $T: \alpha \to \alpha$ é uma isometria, para qualquer par de pontos A e B de α vale que a distância entre $T(A)$ e $T(B)$ é igual à distância entre A e B, isto é, $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$.

Teorema 3: Uma isometria $T: \alpha \to \alpha$ possui as seguintes propriedades:

a) T leva pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se A, B e C são pontos tais que B está entre A e C, então $T(B)$ está entre $T(A)$ e $T(C)$.

b) T preserva medidas de ângulos, ou seja, para qualquer ângulo $\theta,$ tem-se que $m(T(\theta)) = m(\theta).$

c) T preserva paralelismo entre retas, isto é, se r e s são retas paralelas, então $T(r)$ e $T(s)$ também são retas paralelas.

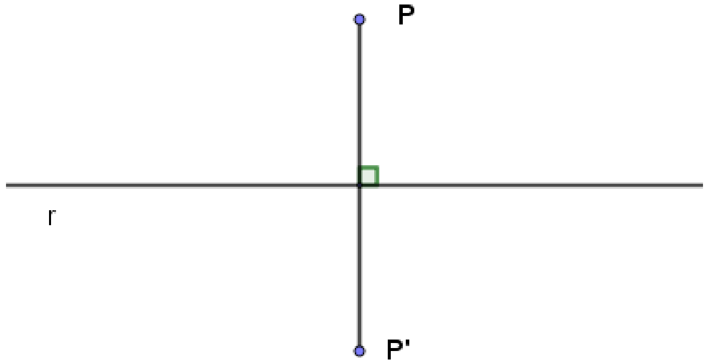
A demonstração desse teorema pode ser vista em [Rezende e Queiroz, 2008].

Um dos exemplos mais importantes de isometria é a reflexão em relação a uma reta, que será definida logo abaixo. Pode-se mostrar que toda isometria pode ser vista como uma composição de reflexões em relação a uma reta. Para uma referência, consulte Lima (1996).

Definição 18: Seja r uma reta no plano. A ***reflexão em reação a reta*** r é a isometria dada pela transformação que a cada ponto P do plano associa o ponto P' do plano, de maneira que o segmento PP' seja perpendicular à reta r e que a distância de P à reta r seja igual à distância de P' à r. Ou seja, a reta r é a mediatriz do segmento PP', se $P \notin r$.

Essa isometria também é chamada de **simetria de reflexão** na reta r, e será indicada por R_r. A reta r é chamada **reta de reflexão** de R_r.

Figura 27. Simetria de reflexão do ponto P em relação à reta r



As propriedades abaixo seguem imediatamente da definição de reflexão em relação a uma reta.

Propriedades:

a) $R_r(P) = P$ se, e somente se, P é ponto de r.

b) Se s é uma reta perpendicular a r, então $R_r(s) = s$.

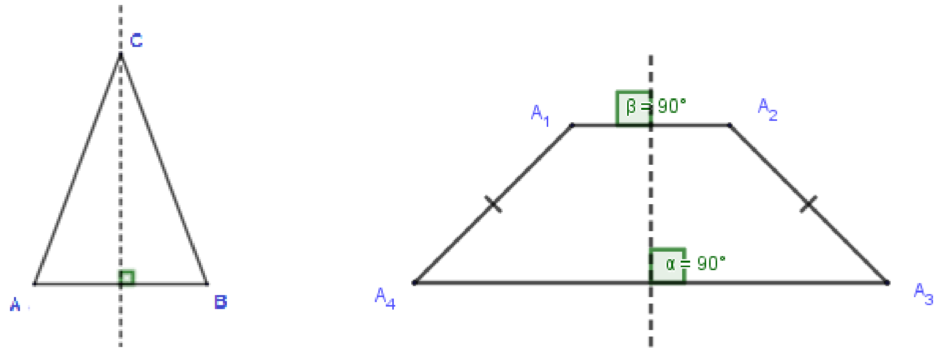
c) $R_r(R_r(P)) = P$, para todo ponto P do plano.

d) A transformação inversa de uma reflexão numa reta é uma reflexão nessa mesma reta.

Observação: Algumas figuras podem ser vistas como sendo a união de uma figura F com sua imagem F', pela reflexão numa reta r que intersecciona essa figura. Assim, dizemos que essa figura $U = FUF'$ é uma figura *simétrica* em relação à reta r ou que U possui *simetria de reflexão* ou *simetria axial*.

Exemplo: Um triângulo isósceles ABC é uma figura simétrica, cuja reta de reflexão é a mediatriz da base AB do triângulo. E o trapézio isósceles também tem como reta de reflexão a mediatriz de suas bases.

Figura 28. Triângulo isósceles e trapézio isósceles são figuras simétricas



3 - APLICAÇÃO DO JOGO TRAVERSE EM SALA DE AULA

Neste capítulo, apresentamos uma proposta de uso do jogo Traverse em sala de aula como recurso didático para o ensino de alguns conteúdos matemáticos.

3.1 Planejamento da atividade

Para a aplicação do jogo Traverse em sala de aula, montamos um plano de atividade dividido em duas partes. Na primeira parte, foi apresentado o jogo aos alunos, onde eles puderam explorar o tabuleiro, as peças e foram explicadas todas as regras. Ao final da leitura das regras foram elaboradas algumas questões sobre elas, para melhor compreensão das mesmas. Em seguida, os alunos jogaram algumas partidas para tomar conhecimento do jogo. Já na segunda parte, foram colocadas algumas situações-problemas do jogo, onde os alunos precisavam interpretar cada situação e escrever o raciocínio empregado na resolução da mesma.

Público-alvo: 1ª série do Ensino Médio.

Justificativa: Trabalhar alguns conceitos de geometria, de forma a consolidar o conhecimento dos alunos sobre tais conceitos através da Metodologia da Resolução de Problemas. Estimular o raciocínio lógico matemático do aluno.

Objetivos: sanar algumas dúvidas que os alunos possam ter sobre as formas geométricas e sobre simetria, trabalhar o raciocínio lógico e mostrar ao aluno que ele é agente do próprio conhecimento.

Conceitos matemáticos envolvidos: Definição de polígonos e algumas propriedades; características de polígonos especiais como triângulos, quadrados e losangos; círculos; conceito de simetria, particularmente, simetria axial.

Recursos necessários: 10 tabuleiros quadriculados de tamanho 10x10 e as peças com as cores propostas nas regras do jogo.

É possível adquirir o jogo em lojas especializadas. No entanto, esse é um jogo de fácil confecção, sendo possível utilizar para sua confecção materiais como E.V.A., madeira, lona, papelão, papel-cartão, etc.

Se houver tempo hábil, é interessante que os próprios alunos confeccionem o jogo, pois, nesse momento, já estarão trabalhando com alguns conceitos de geometria que podem ser explorados no jogo.

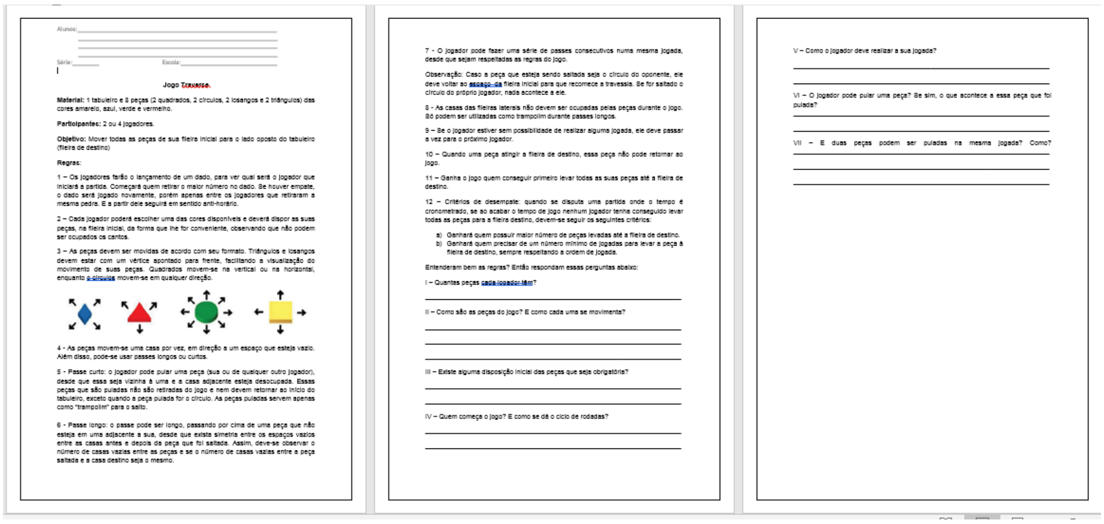
Para a aplicação total da atividade, planejamos de 3 a 4 aulas de 50 minutos para cada turma, e, para cada aula, traçamos um roteiro específico. Na primeira aula, a proposta era que os alunos se dividissem em grupos com quatro integrantes. Sugerimos que os alunos se agrupassem escolhendo os próprios parceiros de jogo. Após a formação dos grupos, planejamos entregar uma atividade (que está anexada ao final deste trabalho) para cada grupo com o objetivo de apresentar o jogo e suas regras. Para essa parte da atividade, também sugerimos alguns questionamentos sobre as regras para melhor compreensão das mesmas por parte dos alunos.

Imaginamos que, nesse momento, surgiriam as dúvidas sobre os conceitos relacionados às formas geométricas ou sobre simetria. Então planejamos resgatar o conhecimento que os alunos já têm sobre tais conceitos, relacionando-os com o cotidiano, através de exemplos, ou pedindo que os alunos explicassem o que eles entendem como sendo as formas geométricas. Nesse momento, o importante é identificar o que cada aluno tem de conhecimento sobre o que foi questionado. E, por fim, cabe ao professor dar uma definição mais formal destes conceitos explorados.

Em seguida, começaríamos efetivamente a trabalhar com o jogo. A cada grupo, seria entregue um tabuleiro com as peças, para os alunos se familiarizarem com o jogo e começarem a partida. Pensamos em destinar uma ou duas aulas para as partidas dos alunos.

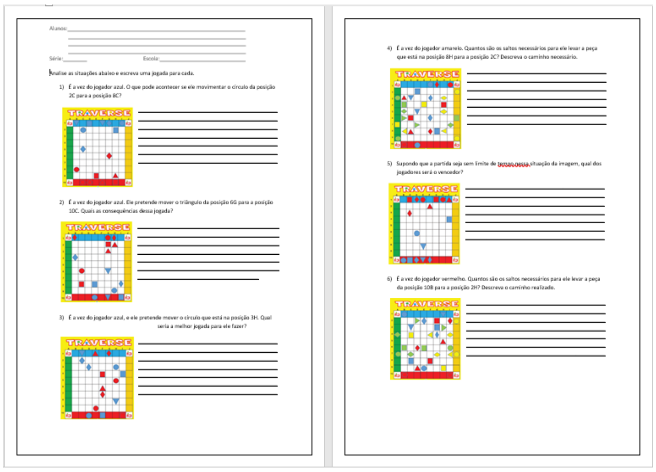
Seguindo nosso planejamento, o nosso papel como professor durante as partidas seria de mediador, auxiliando os alunos na busca da solução para a melhor jogada, através de questionamentos e sugestões, nunca respondendo diretamente ao aluno o que ele deve fazer naquela situação.

Figura 29. Atividade proposta para o primeiro dia



Na última parte do trabalho, que seria aplicada na 3ª ou 4ª aula, já com os alunos sabendo jogar, planejamos aplicar uma atividade com várias situações-problemas do jogo, onde o aluno deveria se colocar no lugar do jogador da situação e resolver aqueles problemas.

Figura 30. Atividade com as situações-problemas



3.2 Descrição da atividade realizada em sala de aula

Nossa atividade foi realizada em dois dias, com duas turmas da 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de São José do Rio Preto. A primeira parte da atividade foi realizada utilizando duas aulas de 50 minutos com cada uma das turmas. Já a segunda parte foi realizada em apenas uma turma, utilizando uma aula de 50 minutos.

3.2.1 Primeiro dia de atividade

Para o início da primeira aula, em cada uma das salas o professor das salas explicou que, naquele dia, seria desenvolvida uma atividade especial e nos apresentou aos alunos.

Feito isso, iniciamos uma conversa com o objetivo de explicar que, naquele dia, seria trabalhado em sala um jogo de tabuleiro. Porém, não seria um jogo de tabuleiro qualquer, e sim um jogo matemático. Perguntando aos alunos se eles gostavam de jogos de tabuleiros, a resposta unânime foi sim. Alguns alunos apresentaram os jogos que costumavam jogar, como o jogo de Damas e o Xadrez. Aproveitando essa deixa, perguntamos se conheciam ou se já haviam jogado algum outro jogo baseado em estratégias, como o War ou o Detetive. Alguns responderam que já haviam ouvido falar, mas que nunca haviam jogado.

Então, expusemos algumas ideias sobre estes jogos, explicando que a base de cada um deles é o raciocínio lógico e a estratégia de resolução e, com isso, perguntamos se eles já tinham ouvido falar do Traverse. Nesse caso, diferentemente da primeira resposta, obtivemos não como resposta unânime. Explicamos que o Traverse era um jogo diferente do que eles conheciam, pois era um jogo de raciocínio lógico matemático, onde eles deveriam recordar alguns conceitos matemáticos, e que tudo estaria interligado com as estratégias que deveriam ser aplicadas para a busca da vitória.

Solicitamos que os alunos se organizassem em grupo de quatro e, caso não fosse possível formar um quarteto, poderiam ser formadas duplas também para que pudéssemos começar o trabalho. Logo em seguida, distribuímos os tabuleiros, as peças e as regras do jogo para cada grupo, e, após cada grupo estar de posse do jogo e das peças, começamos a explicar como seria o funcionamento. Com o auxílio do professor da turma, explicamos sobre o tabuleiro que usaríamos, já que não é um tabuleiro usual, pois o de jogos como Damas e Xadrez possui 64 casas e este tem 100 casas. Também, falando sobre o tabuleiro, explicamos sobre as casas dos cantos, que elas não seriam utilizadas em momento algum.

Agora, sobre as peças do jogo, apresentamos cada uma, explicando como cada uma delas se movimenta no tabuleiro segundo as regras do jogo. Como os alunos já conheciam o Xadrez, fizemos um paralelo com algumas das peças deste para melhor entendimento. Falamos que o losango do Traverse se movimenta da mesma forma como o bispo, pois ele sempre andará nas diagonais; o quadrado seria uma espécie de torre, onde ele só andaria na vertical ou horizontal; e o círculo seria como a rainha, pois ele se movimenta em qualquer direção. Porém, diferentemente do Xadrez, as peças não se movimentariam quantas casas fosse possível, cada peça se movimentaria uma casa por vez.

Neste momento, alguns alunos buscavam entender o porquê do movimento de cada peça, mas não estavam conseguindo observar que cada movimento se dava pela forma da figura geométrica. Quando perceberam isso e notaram que as peças poderiam ser posicionadas na fileira inicial da forma que eles quisessem, começaram a perceber que o jogo era um pouco mais elaborado do que pensavam, já que as estratégias de vitória deveriam ser pensadas desde o posicionamento inicial das peças. E isso ficou ainda mais evidente ao final do jogo, onde alguns alunos não conseguiram vencer, justamente por conta da disposição inicial das suas peças. Em alguns tabuleiros, aconteceu de restar apenas um losango para o jogador vencer e, mesmo tendo ainda uma casa vaga na fileira de destino, o jogador não conseguia posicioná-lo, pois a casa não estava adequada à condição da jogada do losango. Como o losango movimenta-se apenas nas diagonais, era impossível colocá-lo na fileira de destino. E, a partir da segunda rodada de jogos, os alunos passaram a se atentar a este fato, usando o raciocínio correlato do bispo, do jogo de Xadrez.

Alguns alunos questionaram se, como no jogo de Damas, as peças poderiam "comer" outras através de alguns saltos. E, aproveitando este questionamento, explicamos que isso não pode ser feito no jogo Traverse, porém, é possível efetuar pulos, desde que haja uma simetria entre as casa em que a peça está e a casa de destino. Como restavam tabuleiros, fizemos um exemplo de jogada possível, mostrando como seria esse movimento. Isso tornou o jogo mais dinâmico aos olhos dos alunos, ainda mais quando se deram conta que seria possível fazer com que o círculo do adversário voltasse ao início do jogo.

Explicadas as regras, pedi para os alunos começarem uma partida com o objetivo de aprenderem as regras do jogo, como uma espécie de treinamento.

Figura 31. Algumas partidas iniciais do Traverse

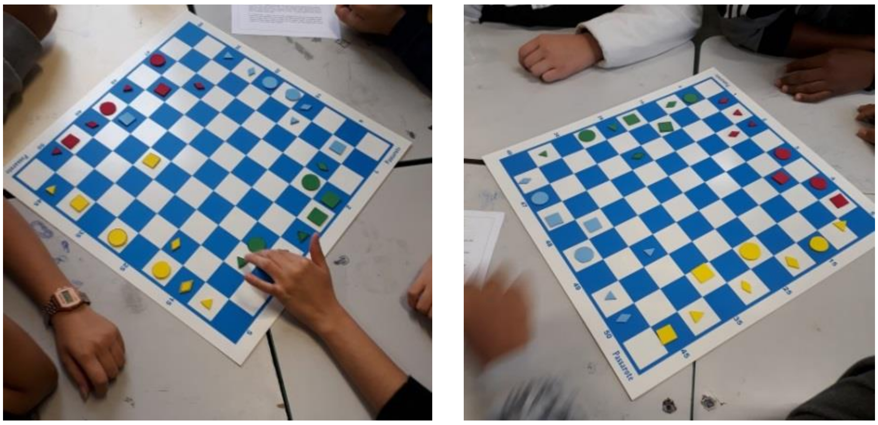
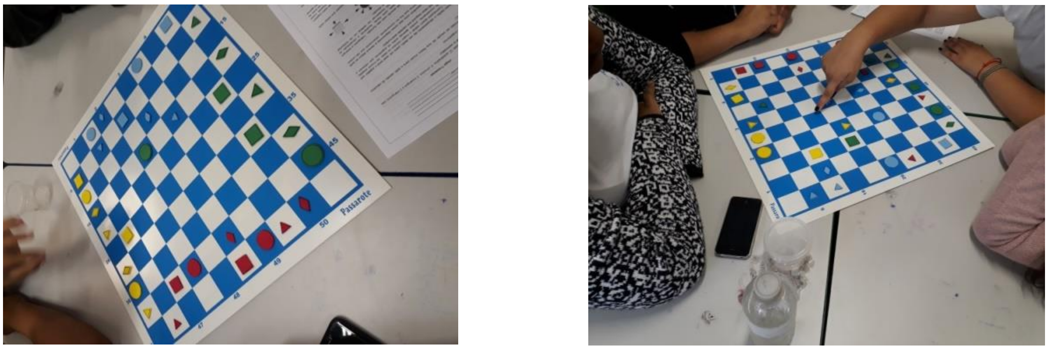


Figura 32. Partidas em andamento



Vendo que os alunos se interessaram bastante pelo jogo, a primeira aula foi de aprendizado do jogo, entendendo cada uma das jogadas e elaborando alguma estratégia que poderia ser a vencedora.

Nesse momento da aula, já haviam surgido várias situações interessantes, onde os alunos puderam ver que alguns conceitos que eles tinham sobre formas geométricas estavam equivocados. Em ambas as turmas, durante a atividade, os alunos sempre estavam se perguntando sobre “a bolinha do jogo”. Eles haviam compreendido sobre sua movimentação e função, porém, eles ainda discutiam sobre a peça. Aproveitando a oportunidade, em cada mesa do jogo fizemos o questionamento sobre o nome dela, e a resposta era sempre a mesma: “bola”.

Os alunos estavam associando o círculo com uma bola por causa do formato redondo dessas formas. Na sequência, perguntei se realmente aquela peça seria uma bola e alguns disseram que sim, justamente por ser redonda.

Solicitei, então, que imaginassem uma bola de futebol e perguntei se ela era realmente um círculo. Pedi para comparar essa bola com o círculo do jogo. Alguns alunos acabaram concluindo que não era a mesma coisa, pois a bola de futebol é bem volumosa, e o círculo do jogo Traverse é uma “forma achatada”.

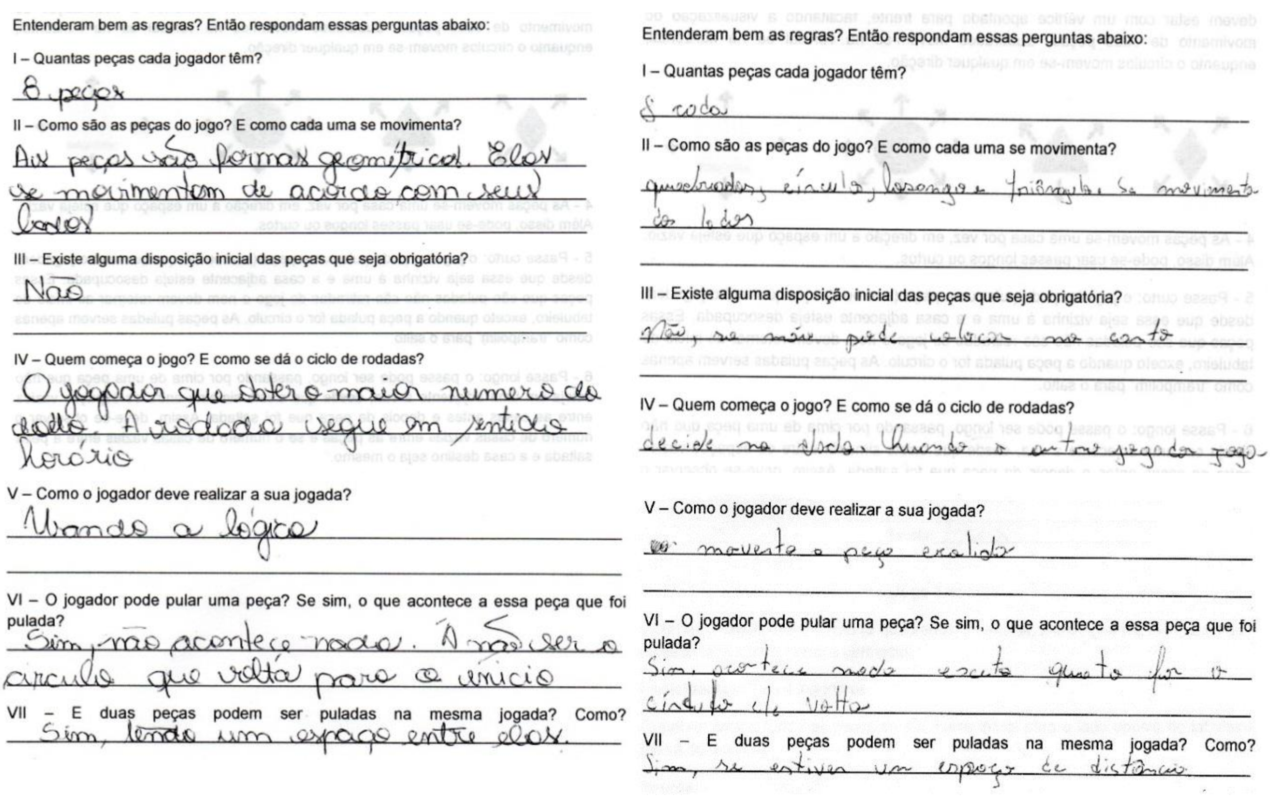
Nesse momento, foi possível observar que o próprio aluno, através de um problema que lhe foi apresentado, conseguiu fazer um paralelo entre a forma plana e a forma espacial, que é a da esfera (bola de futebol). Através dessa comparação, foi possível chegar à sua própria conclusão, mesmo sem o rigor matemático, de que elas eram formas distintas.

Inicialmente, imaginamos que o quadrado e o losango seriam as peças que causariam mais dúvidas pelo fato dos alunos terem em mente que o quadrado tem quatro lados congruentes e o losango também tem quatro lados congruentes. Muitas vezes, os alunos não se atentam às medidas dos ângulos desses polígonos, que é o que os diferencia. Na hora da explicação do jogo ou mesmo durante as partidas, os alunos não perguntaram nada sobre essas duas formas. Então, passamos nas mesas e, despretensiosamente, lhes perguntamos sobre o quadrado e suas características. A resposta inicial era “o quadrado tem quatro lados iguais”. Na sequência, perguntamos sobre o losango, e eles deram a mesma resposta. Porém, os próprios alunos respondiam que eles não eram a mesma coisa, já que o quadrado era todo “reto” e o losango “achatado”.

Mesmo sem o formalismo matemático, eles conseguiam observar que algumas características entre as figuras eram comuns, porém, as formas não seriam as mesmas. Então, aproveitamos para explicar a diferença entre um quadrado e um losango, segundo o conceito formal.

No início da segunda aula, pedimos para que os alunos se agrupassem novamente para que pudessem jogar. E, após a sala estar organizada para a atividade, antes que os alunos começassem a jogar novamente, entregamos aos alunos um questionário sobre o jogo para verificar se as regras foram compreendidas e solicitamos que cada grupo o respondesse. Foi interessante que, rapidamente, se puseram a responder e, na maioria dos grupos, houve grande envolvimento dos participantes. Em caso de dúvidas, os alunos nos chamavam para consultas. E, sob a perspectiva da Resolução de Problemas, não dávamos a resposta diretamente, mas os fazíamos pensar até que eles mesmos chegassem às próprias respostas.

Figura 33. Algumas respostas obtidas na atividade


Entenderam bem as regras? Então respondam essas perguntas abaixo:

I – Quantas peças cada jogador têm?

8 peças

II – Como são as peças do jogo? E como cada uma se movimenta?

As peças são formas geométricas. Elas se movimentam de acordo com seus lados

III – Existe alguma disposição inicial das peças que seja obrigatória?

Não

IV – Quem começa o jogo? E como se dá o ciclo de rodadas?

O jogador que obter o maior numero do dado. A rodada segue em sentido horário

V – Como o jogador deve realizar a sua jogada?

Usando a lógica

VI – O jogador pode pular uma peça? Se sim, o que acontece a essa peça que foi pulada?

Sim, não acontece nada. A não ser o circulo que volta para o inicio

VII – E duas peças podem ser puladas na mesma jogada? Como?

Sim, tendo um espaço entre elas.

Entenderam bem as regras? Então respondam essas perguntas abaixo:

I – Quantas peças cada jogador têm?

8 cada

II – Como são as peças do jogo? E como cada uma se movimenta?

quadrados, círculos, losango e triângulos. Se movimenta dos lados

III – Existe alguma disposição inicial das peças que seja obrigatória?

Não, se não pode colocar no canto

IV – Quem começa o jogo? E como se dá o ciclo de rodadas?

decide no dado. Quando o outro jogador jogo-

V – Como o jogador deve realizar a sua jogada?

movente a peça escolhida

VI – O jogador pode pular uma peça? Se sim, o que acontece a essa peça que foi pulada?

Sim, acontece nada exceto quando for o círculo ele volta

VII – E duas peças podem ser puladas na mesma jogada? Como?

Sim, se estiver um espaço de distância

Falando sobre algumas partidas que foram bem interessantes, em cada uma das salas, acabaram ocorrendo duas partidas que foram bem disputadas. Na sala do 1ª série A, uma partida disputada entre dois alunos acabou bem acirrada, pois os alunos, analisando as peças que cada um tinha em jogo, acabaram desenvolvendo estratégias bem similares. Ambos tinham apenas os círculos disponíveis e isso dificultou a finalização do jogo.

Figura 34. Partida citada acima

Esta partida, mesmo com os alunos mudando as estratégias, acabou não tendo um vencedor. E o mais curioso foi o comentário destes jogadores, eles estavam tão interessados em concluir a partida que disseram que iriam fazer uma cópia do tabuleiro em papel e tentar encerrá-la na hora do intervalo.

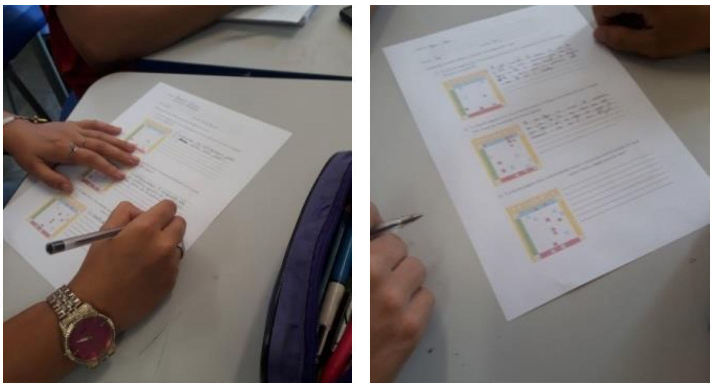
Uma situação parecida ocorreu na turma da 1ª série B. Em uma das mesas, com quatro jogadores, um dos jogadores estava próximo de obter a vitória, faltando apenas duas peças. O adversário que estava na fileira de destino, vendo que ele era o único que poderia impedir a vitória do outro, teve como estratégia segurar uma peça em cada uma das casas que serviriam para o êxito do adversário. Ao fazer essa jogada, ele obteve êxito ao articular o jogo a seu favor.

3.2.2 Segundo dia de atividade

Por estar no final do ano letivo e os alunos estarem se concentrando nas provas bimestrais, foi sugerido pelo professor das turmas que o segundo dia de atividades fosse realizado em apenas uma das salas. E a sala que optamos por realizar essa atividade foi a da 1ª série B.

Como o jogo já era conhecido pelos alunos, pudemos trabalhar de uma forma mais rápida, principalmente, pelo fato de eles terem se interessado pela fase anterior. Inicialmente, solicitamos que a turma se organizasse em grupos de dois ou três e, com a sala já organizada, distribuímos as atividades (disponível em anexo) a cada grupo para que eles pudessem responder às questões, seguindo seus raciocínios.

Figura 35. Alunos realizando a 2ª parte da atividade



Foi possível observar que, durante a realização da atividade, a maioria dos alunos não precisou de muita ajuda, mostrando que eles ainda estavam com o jogo em mente, pensando algumas estratégias interessantes. Porém, quando algum grupo solicitava alguma explicação, pudemos notar que eram dúvidas bem interessantes. Por exemplo, na situação-problema 4, os alunos conseguiam chegar na casa destino, porém, sempre com mais saltos que o mínimo necessário. Isso parecia causar-lhes muitas dúvidas, pois eles imaginavam ser possível encontrar um caminho mais curto. Assim, sugeríamos que, a partir do que haviam feito, tentassem encontrar um caminho alternativo, questionando se seria possível encontrar alguma espécie de atalho, como saltos. E isso lhes despertava ainda mais a curiosidade.

Além disso, no segundo dia, foi nítido o interesse daqueles alunos que, em geral, não se interessam pela aula. Nos dois dias de aplicação das atividades, um grupo foi formado apenas por esses alunos. No primeiro dia, jogaram várias vezes, realizando toda a atividade, e no segundo dia, onde não teriam que jogar, mas descrever alguma estratégia de resolução, os alunos trabalharam buscando uma solução para cada situação que a atividade propunha. Eles foram os que mais perguntaram, pois cada um da dupla pensava numa estratégia e, na hora de escrever, eles não conseguiam juntar as duas ideias como uma resposta única.

Abaixo, temos alguns exemplos das respostas obtidas para cada uma das situações apresentadas. Vale ressaltar o empenho dos grupos em resolver a atividade. Algumas das questões propostas geraram um maior nível de dificuldade nos alunos, mas isso não foi um empecilho para eles, pois tais dificuldades serviram como um motivador para a resolução.

Figura 36. Exemplo de resposta de um grupo na situação 1

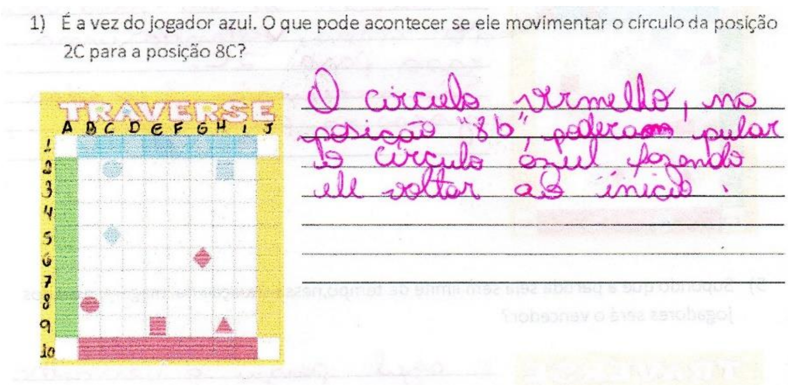


Figura 37**.** Exemplo de resposta de um grupo na situação 2

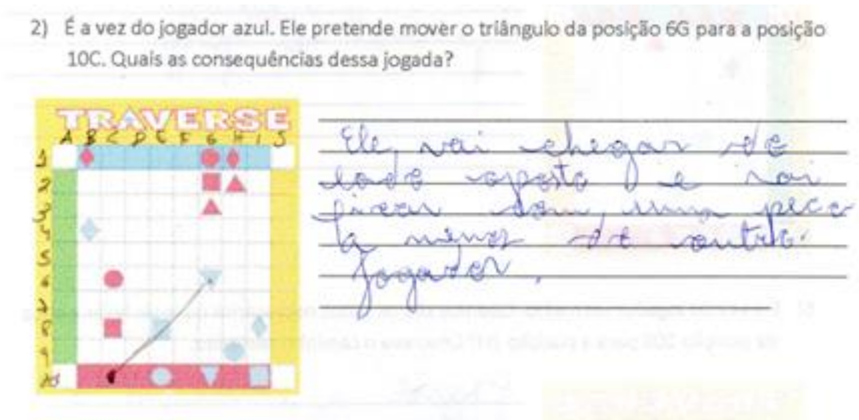
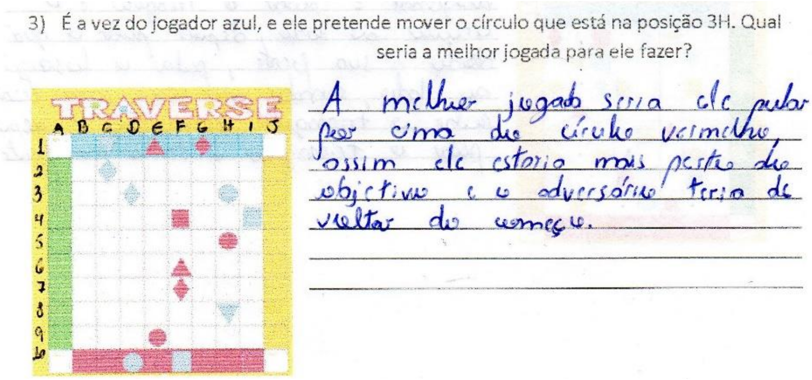
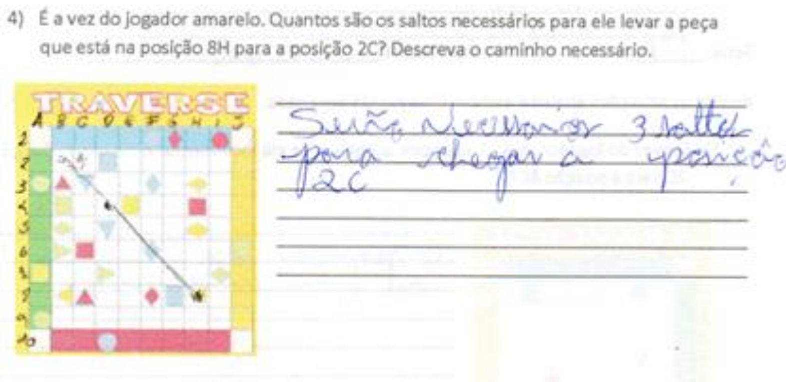


Figura 38. Exemplo de resposta de um grupo na situação 3



Podemos observar na situação acima que a jogada poderia ser ainda melhor. O aluno sugere que o círculo vermelho da posição 5H seja pulado, de modo que o mesmo retorne ao início do jogo para o jogador vemelho. Contudo, podemos notar que seria possível continuar através do salto no triângulo da posição 8H, caindo ainda mais próximo da fileira de destino do jogador azul.

Figura 39. Exemplo de resposta de um grupo na situação 4



Ao analisar a resposta acima, observa-se que seria possível realizar apenas dois saltos. O grupo considerou sendo um salto o triângulo amarelo sair da posição 2B para 2C, já que, ao fazer dois saltos sobre as peças das posições 6F e 3C, ele saiu da posição 8H para a posição 2B, não conseguindo ainda chegar à casa pedida.

Figura 40. Exemplo de resposta de um grupo na situação 5

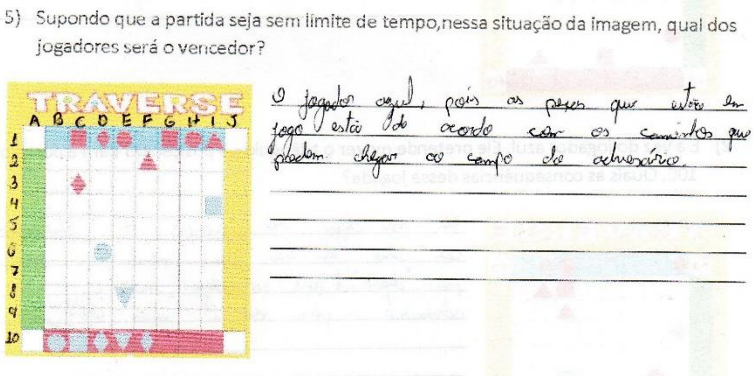
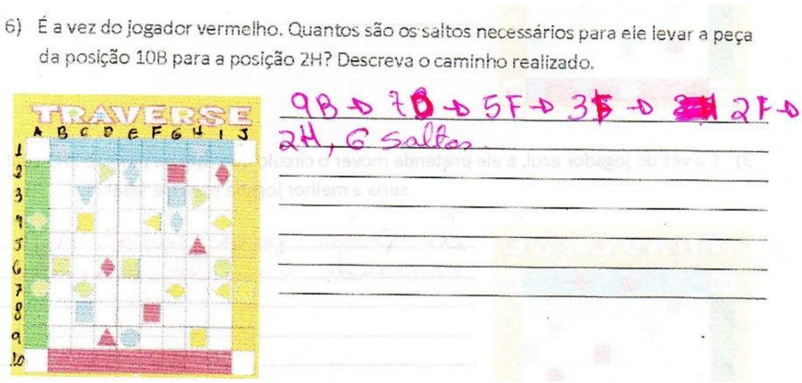


Figura 41. Exemplo de resposta de um grupo na situação 6.



O grupo da atividade acima considerou como sendo um salto o movimento de andar uma casa apenas. Então, neste problema, é válido ressaltar que, ao total, o jogador utilizaria 6 movimentos. Mas isso não seria possível em uma jogada apenas, já que, deslocada a peça uma casa, ele encerra a jogada e passa a vez ao próximo jogador.

4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos a Metodologia da Resolução de Problemas, mostrando desde os fatos históricos até sua forma de aplicação, fazendo uso dos quatro passos (Compreensão, Elaboração de uma estratégia, Desenvolvimento da Estratégia e Retrospecto). Também fizemos um paralelo entre a MRP e o trabalho com jogos matemáticos, usando como comparativo a maneira como se joga uma partida de qualquer jogo e os passos da MRP.

Trabalhando com a MRP, podemos observar como é o desenvolvimento desta metodologia, onde o começo de tudo é o problema que está sendo proposto. E, para que tudo caminhe bem, é indispensável que o professor atue como sendo o mediador do conhecimento, não sendo ele o único detentor do mesmo. Cabe ao professor selecionar problemas interessantes, que atraiam a atenção dos alunos, e também dar liberdade ao aluno para que cada um consiga chegar à solução, sem uma forma padronizada, que não exija o pensamento crítico dos estudantes.

Apresentamos o jogo com o qual realizamos a atividade, que é o Traverse, e exploramos todo o seu potencial lúdico. Trabalhamos com salas do 1º ano do Ensino Médio, onde os alunos chegam para um novo ciclo e, em geral, apresentam muita dificuldade nos conceitos básicos de Geometria. Infelizmente, estes conceitos não costumam ser trabalhados com tanto enfoque, já que, na maioria das vezes, o professor não consegue atingir esta matéria, pois não há tempo hábil para trabalhar essa parte do conteúdo durante o ano letivo.

Em sala de aula, durante a aplicação das atividades, podemos ver que a participação dos alunos foi muito satisfatória. Era muito interessante ver que o jogo foi um estímulo a usarem seus conceitos geométricos em sintonia com a vontade de ganhar aquela partida. E, durante as partidas, podemos fazer um estudo mais aprofundado sobre os conceitos geométricos que eles tinham, de modo que algumas correções puderam ser feitas. Além do mais, várias situações que surgiram durante as partidas serviram para discussões dos grupos para sugestões de novas jogadas possíveis.

Também podemos fazer uma análise dos documentos oficiais e observamos que, tanto na BNCC, quanto nos PCN o objetivo do ensino é desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas. E, para isso, uma ferramenta que se apresenta como uma grande articuladora é a Metodologia da Resolução de Problemas.

Como a Matemática precisa ser compreendida pelos alunos como sendo uma ferramenta do desenvolvimento do pensamento crítico e do raciocínio lógico - aspectos que serão indispensáveis para sua vida - é necessário que se trabalhe com eles de uma forma que essas habilidades sejam compreendidas. Situações que se relacionem com sua vida cotidiana, que lhes sejam de aplicação prática são interessantes para que seja desmistificada a ideia de que a Matemática não tem aplicabilidade nenhuma com sua vida. E, com essa finalidade, a Metodologia da Resolução de Problemas se apresenta como sendo uma estratégia de ensino que o professor pode utilizar, de modo a tornar suas aulas momentos desafiadores, que levem ao aluno a utilizar todo seu raciocínio, levando em consideração todo o conhecimento que ele já possui. Além disso, o aluno não só irá aprender conteúdos novos, mas também irá conseguir solidificar todo seu conhecimento prévio, ajustando qualquer conceito que não esteja totalmente adequado na sua concepção.

REFERÊNCIAS

BAUMGARTEL, P. O uso de jogos como metodologia de ensino da Matemática. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EBRAPEM), 20., 2016, Curitiba. *Anais* [...]. Curitiba: UFPR, 2016. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_priscila_baumgartel.pdf. Acesso em: 10/06/2018.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas*: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME/USP, CAEM, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 05/08/2018.

BRASIL. Ministério da Educação. *Orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)*: Ensino médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 05/08/2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática, primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, DF, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, DF, 1998.

COSTA, L. M. F. *O movimento da matemática moderna no Brasil*: o caso do colégio de São Bento do Rio de Janeiro. 2014. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: *www.pg.im.ufrj.br/pemat/61%20Leticia%20Costa.pdf.* Acesso em: 05/09/2018.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 7. ed. Campinas: Papirus, 2012.

DANTE, L. R. *A didática da resolução de problemas.* São Paulo: Ática, 1989.

FANTI, E. L. C. *et al.* Trabalhando com os Jogos Traverse e Mancala. *In*: SEMANA DE MATEMÁTICA (SEMAT), 27., 2015, São José do Rio Preto. [*Anais* ...]. São José do Rio Preto: UNESP, IBILCE, 2015. p. 1-26. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/.../Matematica/mc4d_erminia_flavia.pdf. Acesso em: 20/03/2018.

KISHIMOTO, T. M. O jogo e a educação infantil. *Revista Perspectiva*, Florianópolis, v. 12, n. 22, p. 105-128, 1994. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/download/10745/10260. Acesso em: 10/06/2018.

LAMAS, R. C. P. Jogos e materiais didáticos para o ensino de matemática. *In*: SEMANA DE MATEMÁTICA (SEMAT), 27., 2015, São José do Rio Preto. [*Anais* ...]. São José do Rio Preto: UNESP, IBILCE, 2015. p. 1-20.

LIMA, E. L. *Isometrias*. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática).

MIRANDA, A. S. *Resolução de problemas como metodologia de ensino*: uma análise das repercussões de uma formação continuada. 2015. 116 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

MOURA, M. O. *O jogo e a construção do conhecimento matemático*. São Paulo: FDE, 1992. *In: O Jogo e a construção do conhecimento na pré-escola.* p. 45 - 53. (Série Idéias, n. 10).

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

ONUCHIC, L. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Ed. da Unesp, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.; NOGUTI, F. C.; JUSTULIN, A. M. *Resolução de problemas*: teoria e prática. São Paulo: Paco, 2014.

POLYA, G. *A arte de resolver problema.* Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PUPIO, S. A.; CARVALHO, A. M. A aprendizagem de geometria por meio de jogos matemáticos. *In:* PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. *O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense*. v. 1. Curitiba, 2010., p. 1-26.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas. 2.* ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2008.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de matemática. *Revista Eletrônica de Educação*, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413. Acesso em: 20/03/2018.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo:* Matemática e suas Tecnologias: ensino fundamental: ciclo II e ensino médio. São Paulo, 2010.

SELVA, K. R.; CAMARGO, M. O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento. *In*: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. *Educação Matemática: diálogos entre a universidade e a escola.* Ijuí: UNIJUÍ, DeFEM, 2009. Disponível em: www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_4.pdf. Acesso em: 22/03/2018.

SILVA, A. F.; KODAMA, H. M. Jogos no ensino da matemática. *In*: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., 2004, Salvador. [*Anais* ...]. Salvador: UFBa, 2004. p. 1-19.

VAIANO, B.; 9 reflexões que vão te introduzir ao pensamento de Neil deGrasse Tyson. Revista Galileu. 2016. Disponível em: https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2016/09/9-reflexoes-que-vao-te-introduzir-ao-pensamento-de-neil-degrasse-tyson.html. Acesso em 15/08/2018.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e os processos cognitivos superiores. *Union*: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, [*s. l*], n. 11, p. 79-97, oct. 2007. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_009.pdf. Acesso em: 02/04/2018.

ANEXO A - Atividade desenvolvida no primeiro dia

Jogo Traverse

Material: 1 tabuleiro e 8 peças (2 quadrados, 2 círculos, 2 losangos e 2 triângulos) das cores amarelo, azul, verde e vermelho.

Participantes: 2 ou 4 jogadores.

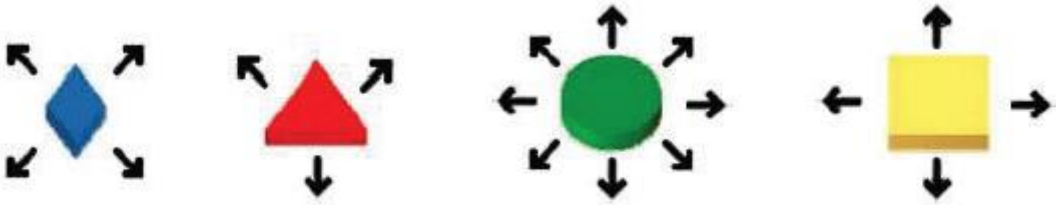
Objetivo: Mover todas as peças de sua fileira inicial para o lado oposto do tabuleiro (fileira de destino).

Regras:

1 – Os jogadores farão o lançamento de um dado, para ver qual será o jogador que iniciará a partida. Começará quem retirar o maior número no dado. Se houver empate, o dado será jogado novamente, porém apenas entre os jogadores que retiraram a mesma pedra. E a partir dele seguirá em sentido anti-horário.

2 – Cada jogador poderá escolher uma das cores disponíveis e deverá dispor as suas peças, na fileira inicial, da forma que lhe for conveniente, observando que não podem ser ocupados os cantos.

3 – As peças devem ser movidas de acordo com seu formato. Triângulos e losangos devem estar com um vértice apontado para frente, facilitando a visualização do movimento de suas peças. Quadrados movem-se na vertical ou na horizontal, enquanto o círculos movem-se em qualquer direção.



4 - As peças movem-se uma casa por vez, em direção a um espaço que esteja vazio. Além disso, pode-se usar passes longos ou curtos.

5 - Passe curto: o jogador pode pular uma peça (sua ou de qualquer outro jogador), desde que essa seja vizinha à uma e a casa adjacente esteja desocupada. Essas peças que são puladas não são retiradas do jogo e nem devem retornar ao início do tabuleiro, exceto quando a peça pulada for o círculo. As peças puladas servem apenas como “trampolim” para o salto.

6 - Passe longo: o passe pode ser longo, passando por cima de uma peça que não esteja em uma adjacente a sua, desde que exista simetria entre os espaços vazios entre as casas antes e depois da peça que foi saltada. Assim, deve-se observar o número de casas vazias entre as peças e se o número de casas vazias entre a peça saltada e a casa destino seja o mesmo.

7 - O jogador pode fazer uma série de passes consecutivos numa mesma jogada, desde que sejam respeitadas as regras do jogo.
Observação: Caso a peça que esteja sendo saltada seja o círculo do oponente, ele deve voltar ao espaço da fileira inicial para que recomece a travessia. Se for saltado o círculo do próprio jogador, nada acontece a ele.

8 - As casas das fileiras laterais não devem ser ocupadas pelas peças durante o jogo. Só podem ser utilizadas como trampolim durante passes longos.

9 – Se o jogador estiver sem possibilidade de realizar alguma jogada, ele deve passar a vez para o próximo jogador.

10 – Quando uma peça atingir a fileira de destino, essa peça não pode retornar ao jogo.

11 – Ganha o jogo quem conseguir primeiro levar todas as suas peças até a fileira de destino.

12 – Critérios de desempate: quando se disputa uma partida onde o tempo é cronometrado, se ao acabar o tempo de jogo nenhum jogador tenha conseguido levar todas as peças para a fileira destino, devem-se seguir os seguintes critérios:

a) Ganhará quem possuir maior número de peças levadas até a fileira de destino.
b) Ganhará quem precisar de um número mínimo de jogadas para levar a peça à fileira de destino, sempre respeitando a ordem de jogada.

Entenderam bem as regras? Então respondam essas perguntas abaixo:

I – Quantas peças cada jogador têm?

____

____

II – Como são as peças do jogo? E como cada uma se movimenta?

____

____

____

____

III – Existe alguma disposição inicial das peças que seja obrigatória?

____

____

____

IV – Quem começa o jogo? E como se dá o ciclo de rodadas?

V – Como o jogador deve realizar a sua jogada?

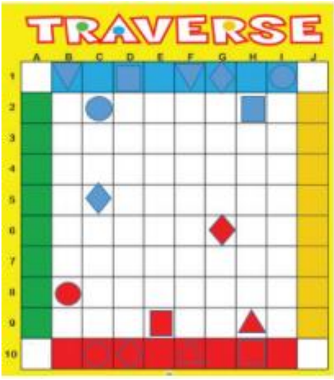
VI – O jogador pode pular uma peça? Se sim, o que acontece a essa peça que foi pulada?

VII – E duas peças podem ser puladas na mesma jogada? Como?

ANEXO B – Atividade desenvolvida no segundo dia

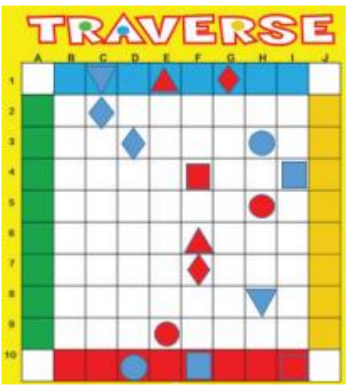
Analise as situações abaixo e escreva uma jogada para cada.

1) É a vez do jogador azul. O que pode acontecer se ele movimentar o círculo da posição 2C para a posição 8C?



2) É a vez do jogador azul. Ele pretende mover o triângulo da posição 6G para a posição 10C. Quais as consequências dessa jogada?

3) É a vez do jogador azul, e ele pretende mover o círculo que está na posição 3H. Qual seria a melhor jogada para ele fazer?



4) É a vez do jogador amarelo. Quantos são os saltos necessários para ele levar a peça que está na posição 8H para a posição 2B? Descreva o caminho necessário.

5) Supondo que a partida seja sem limite de tempo,nessa situação da imagem, qual dos jogadores será o vencedor?

6) É a vez do jogador vermelho. Quantos são os saltos necessários para ele levar a peça da posição 10B para a posição 2H? Descreva o caminho realizado.