UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Larissa Katharine de Oliveira

Inclusão de deficientes visuais no ensino de Geometria Plana

São José do Rio Preto
2019

Larissa Katharine de Oliveira

Inclusão de deficientes visuais no ensino de Geometria Plana

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto
2019

O48i

Oliveira, Larissa Katharine de
Inclusão de deficientes visuais no ensino de Geometria Plana / Larissa Katharine de Oliveira. -- São José do Rio Preto, 2019
62 f. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientadora: Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

1. Geometria Plana. 2. Deficiência Visual. 3. Material Concreto. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Larissa Katharine de Oliveira

Inclusão de deficientes visuais no ensino de Geometria Plana

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi
UFU – Uberlândia

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
12 de abril de 2019

Aos meus pais, Natal e Zilmara,
por sempre me apoiarem e
incentivarem.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus pelas oportunidades concedidas e por abençoar sempre meus passos.

À minha orientadora Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado pelos ensinamentos passados durante as aulas e orientações em cada reunião.

Aos meus pais, por priorizarem meus estudos e acreditarem em mim mais do que eu mesma, incentivando-me quando mais precisei. A vocês, todo o meu amor.

Às minhas irmãs, Natália e Vanessa, por sempre estarem ao meu lado e serem exemplos em minha vida.

Às minhas sobrinhas, Manuela e Rafaela, por me lembrarem como é bom ser criança e me mostrarem o mais puro e ingênuo amor.

Ao meu noivo, Felipe, por me dividir com os estudos e me encorajar todos os dias ao longo desta trajetória. Obrigada por cuidar do restante enquanto eu estive ausente. “Você foi o melhor presente que tão gentilmente a vida me deu...”

Aos colegas de curso pelos estudos em conjunto, risadas dadas e preocupações compartilhadas.

Ao Profmat, pela oportunidade e aprendizado.

Por último, mas não menos importante, à escola que me proporcionou essa experiência única e a todos que fazem parte dela, em especial, minha aluna inspiração. Agradeço profundamente por terem me ensinado muito mais do que eu podia imaginar.

“O que conta na vida não é o simples fato de vivê-la,
é a diferença que fazemos na vida dos outros que
determina o significado da vida que levamos.”
(Nelson Mandela)

RESUMO

O intuito deste trabalho é a inclusão de alunos com deficiência visual no aprendizado de Matemática. Assim, buscamos elaborar um material com os conceitos referentes ao ensino de Geometria Plana para o 8º ano do Ensino Fundamental, segundo os materiais do FTD Sistema de Ensino, voltados a alunos com este tipo de deficiência. Entretanto, o trabalho também aborda, de maneira concisa, conceitos aprendidos em anos escolares anteriores essenciais para o aprendizado dos conteúdos propostos, concomitantemente com os embasamentos matemáticos fundamentais para o desenvolvimento do professor. Através de atividades e algumas demonstrações práticas com material concreto, mostra-se possível o ensino de Geometria Plana a um aluno com deficiência visual de modo prazeroso e eficaz.

Palavras-chave: Geometria Plana. Deficiência Visual. Material Concreto.

ABSTRACT

The purpose of this study is the inclusion of students with visual impairment in learning of Mathematics. Thus, we seek to elaborate a material with the concepts related to the teaching of Plane Geometry for the 8th grade of Elementary School, according to the materials of the FTD Teaching System, aimed at students with this type of disability. However, the work also concisely addresses concepts learned in previous school years essential for the learning of the proposed contents, simultaneously with the fundamental mathematical foundations for teacher's development. Through activities and some practical demonstrations with concrete material, it is shown to be possible to teach Plane Geometry to a student with visual impairment in a pleasant and effective way.

Keywords: Plane Geometry. Visual impairment. Concrete Material.

Sumário

Introdução **10**

1 Inclusão Social: abordagem histórica **12**

2 Ângulos **16**
2.1 Objetos Primitivos 16
2.2 Ângulos 19
2.3 Situação Problema 27

3 Polígonos **32**
3.1 Triângulos 34
3.2 Quadriláteros 41
3.3 Situação Problema 46

4 Áreas **49**
4.1 Situação Problema 57

Considerações Finais **59**

Referências Bibliográficas **61**

Introdução

De acordo com a Constituição Federal, todos têm direito à educação. Além disso, todos os alunos devem ser matriculados em classes comuns e nenhuma escola pode negar-se a receber um aluno com deficiência. Infelizmente, nem sempre as escolas - públicas ou particulares - estão preparadas e adaptadas para tal feito, seja na questão estrutural ou instrumental. A inclusão deve estar presente no ambiente escolar. Desse modo, cabe ao professor ensinar utilizando-se de mecanismos alternativos e específicos para cada aluno. A deficiência visual é comum nas escolas e o ensino de Matemática para cegos requer de técnicas e materiais concretos e/ou manipuláveis, além de muito empenho por parte do professor.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como principal objetivo oferecer formação profissional sólida em Matemática, que contemple as necessidades do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola, assim como suas necessidades de desenvolvimento e de valorização profissional. Além disso, uma de suas diretrizes é incentivar a pesquisa e a produção de materiais e práticas pedagógicas inovadoras para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, softwares, simulações, práticas pedagógicas inovadoras e diferenciadas em ambientes de aprendizagem etc.). Com essa finalidade, o trabalho a seguir fornece o conteúdo de Geometria Plana presente no currículo escolar do 8º ano do Ensino Fundamental, segundo os materiais do FTD Sistema de Ensino (ver em [3]), e o apresenta visando o ensinamento a alunos com necessidades especiais de cegueira. Vale ressaltar que existe um trabalho, também do PROFMAT, na mesma direção deste cuja referência é [12].

A escolha do material FTD deve-se à escola onde ocorreram as atividades e desenvolvimento deste trabalho, vez que utiliza-se do material citado em todos os seus segmentos educacionais. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), disponível em [1], é um documento de caráter normativo que define o conjunto progressivo de aprendizagens essenciais em que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas da Educação Básica, além disso, estabelece conhecimentos, competências e habilidades as quais se esperam que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Nem todos os materiais apostilados seguem à risca a relação conteúdo/ano escolar propostos pela BNCC, embora todos cumpram o conjunto de aprendizagens presentes no documento considerando-se o ensino fundamental completo.

Os conceitos previstos para o ano escolar e objetos deste trabalho, segundo os materiais do FTD Sistema de Ensino, são:

- Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais;

- Relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal;

- Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados;
- Congruência de triângulos e propriedades de quadriláteros;
- Área de figuras planas.

A apresentação de alguns desses conceitos e demonstração de alguns desses resultados, oportunos ao ensino para alunos cegos em turma de 8º ano, possuem uma abordagem especial com a utilização de material concreto e atividades adaptadas, o qual chamamos ao longo dos capítulos de *"praticando o conceito"* e *"demonstração na prática"*, respectivamente.

A escolha do ano escolar deve-se à uma experiência pessoal da autora obtida ao lecionar pela primeira vez o conteúdo do 8º ano do Ensino Fundamental para uma aluna cega. É nesse ano escolar que a Geometria Plana torna-se recorrente nas páginas do material didático, independente de qual seja, e faz-se essencial o aprendizado de certos tópicos para o preparo do aluno aos anos subsequentes de sua vida escolar.

Com este intuito, o trabalho está dividido como segue: no Capítulo 1, apresentamos uma abordagem histórica sobre inclusão social e educação inclusiva, bem como as leis que vigoram atualmente, principalmente, voltado para o acesso e permanência de todos os alunos na escola.

Nos Capítulos 2, 3 e 4, apresentamos atividades dirigidas e adaptadas para alunos com cegueira de acordo com a seguinte ordem: ângulos, polígonos e áreas. Essas atividades devem ser realizadas ao longo das aulas regulares e simultaneamente com as explicações para os demais alunos, sem a necessidade de aulas extras ou específicas. Ao final de cada um desses capítulos sugerimos uma situação problema para contextualização dos conceitos trabalhados. Aconselhamos que esta situação problema seja feita em aula extra e enfatizamos que ela pode ser realizada tanto com o aluno com deficiência visual quanto com os demais alunos da sala.

No Capítulo 5, fazemos uma consideração final sobre o trabalho e relatamos a experiência vivida ao longo das aulas, assim como as dificuldades e aprendizados de ambos os lados dessa relação professor-aluno.

O material contempla assuntos de geometria essenciais para o desenvolvimento dos tópicos matemáticos do 8º ano do Ensino Fundamental e assim, fez-se necessário apresentar conceitos aprendidos em anos escolares anteriores, o que foi feito de maneira concisa. Em relação ao conteúdo do ano referido, exibimos alguns conceitos mais aprofundados do que, de fato, ensinamos em sala de aula.

É de suma importância a compreensão de que o ensino da geometria serve de instrumento da formação humana e facilitador da aprendizagem de Matemática, principalmente, nos anos finais do Ensino Fundamental. Sendo assim, torna-se caminho para que os educandos desenvolvam pensamentos críticos e autônomos, uma vez que contribui para a análise de fatos e relações existentes.

Capítulo 1

Inclusão Social: abordagem histórica

No decorrer da história da humanidade modificaram-se a visão e compreensão que a sociedade tinha a respeito da deficiência. Isso ocorreu gradativamente ao longo do tempo e das condições sócio-históricas pelas quais a sociedade foi passando, condições caracterizadas pela luta constante de diferentes minorias em busca da garantia de seus direitos.

Na Antiguidade não consta dados significativos da relação entre sociedade e deficiência na vida cotidiana, o pouco que se sabe pode ser encontrado na literatura da época e na Bíblia. Em algumas sociedades, as pessoas com limitações funcionais e necessidades diferenciadas eram propositalmente exterminadas por meio do abandono, o que não representava, na época, um problema ético ou moral.

Na Idade Média, com o advento do cristianismo e fortalecimento da igreja Católica, todos os seres passaram a ser igualmente considerados filhos de Deus e, portanto, merecedores do direito à vida. Contudo, aparentemente eram deixados à própria sorte dependendo, para sua sobrevivência, da caridade humana sendo alguns utilizados como bobo da corte, material de exposição e diversão para outras pessoas.

A partir do século XVI, novas ideias surgiram acerca da deficiência referentes à sua natureza biológica, manifestou-se então a concepção de que os indivíduos não são naturalmente iguais e com isso, deveria-se respeitar as diferenças. O século XVII foi marcado por avanços na área da Medicina, o que fortaleceu a tese de que as deficiências são causadas por fatores naturais e biológicos.

No século XX houve a reformulação de ideias e a busca de novas práticas quanto à conduta com a deficiência. A década de 60 foi marcada pelas mudanças na relação sociedade/deficiente, como a ideologia da normalização. Essa ideologia tinha por objetivo introduzir o indivíduo com deficiência na sociedade, auxiliando-o na obtenção de condições para uma vida cotidiana mais próxima do normal possível.

Alguns paradigmas - conjuntos de ideias, valores e ações que contextualizam as relações sociais - foram característicos desse processo de compreensão acerca da deficiência, podendo citar os Paradigmas da Institucionalização, de Serviços e de Suporte.

Paradigma da Institucionalização: Foi caracterizado pela retirada das pessoas com deficiência de suas casas e pela presença delas em instituições e escolas especiais. Dessa forma, conventos, asilos e hospitais psiquiátricos tornaram-se ambientes de confinamento ao invés de locais para tratamento de pessoas com deficiência. Demorou um certo tempo para que este paradigma fosse visto como impróprio, dado ao fato de que ele torna a pessoa incapaz de enfrentar a vida em sociedade.

Paradigma de Serviços: Caracterizou-se pela ideologia de Normalização, criando o conceito de integração. Assim, a comunidade assumia uma parcela importante na vida das pessoas com deficiência, era sua a responsabilidade de oferecer os serviços e recursos de que as pessoas com necessidades especiais necessitavam para serem consideradas "normais". Em relação ao setor educacional, o paradigma efetivou-se nas escolas especiais, entidades assistenciais e centros de reabilitação. Não demorou muito para este paradigma enfrentar críticas, pois buscava a "normalização" das pessoas com deficiência sem considerar que as diferenças não devem ser ignoradas, mas administradas no convívio social.

Paradigma de Suporte: Foi caracterizado pelo reconhecimento de que as pessoas com deficiência necessitam, além dos serviços de avaliação e capacitação oferecidos pela sociedade, a reorganização desta para garantir o acesso a tudo que constitui a sociedade e a caracteriza. Desta maneira, houve a disponibilização de suportes e instrumentos que garantam à pessoa com necessidades especiais o alcance de todo e qualquer recurso da comunidade, podendo destacar os suportes social, econômico, físico e instrumental. Assim, efetivava-se o processo de desenvolvimento do sujeito e o de ajuste da realidade social. A essa contextualização denominamos **Inclusão Social**.

Portanto, a Inclusão Social não é um processo que diz respeito apenas às pessoas com deficiência, mas a todos os cidadãos. Não pode haver inclusão do deficiente enquanto a sociedade não for inclusiva, da mesma forma que não adianta dispor de uma igualdade de oportunidades se a sociedade não assegurar o acesso da pessoa com deficiência a essas oportunidades.

Quanto à área da Educação, é preciso providenciar e implementar todos os ajustes necessários para garantir que os alunos com deficiência possam se matricular, frequentar e participar ativamente da escola regular, compartilhando do cotidiano da vida em comunidade.

Atualmente vigora no Brasil algumas declarações que garantem um sistema educacional inclusivo como, por exemplo, a Declaração de Salamanca (1994). Esta declaração alega que as escolas regulares com orientação inclusiva são os meios mais eficazes de combater a discriminação e que os alunos com necessidades educacionais especiais devem ter acesso à escola regular.

A Constituição Federal de 1988 expõe como um de seus objetivos fundamentais "promover o bem de todos, sem preconceitos de origem, raça, sexo, cor, idade e quaisquer outras formas de discriminação" (art. 3º, inciso IV). Além disso, define que "a educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando o pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho" (art. 205) e estabelece a "igualdade de condições para o acesso e permanência na escola" (art. 206, inciso I).

Outras leis e documentos nacionais e internacionais estabelecem os Direitos das pessoas com deficiência no nosso país, como a Lei nº 7.853/89, o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA) e o Decreto nº 3.956 (Convenção da Guatemala), disponíveis em [2].

Lei nº 7.853/89: Dispõe sobre o apoio às pessoas portadoras de deficiência, sua integração social, sobre a Coordenadoria Nacional para Integração da Pessoa Portadora de Deficiência - Corde, institui a tutela jurisdicional de interesses coletivos ou difusos dessas pessoas, disciplina a atuação do Ministério Público, define crimes e concede outras providências.

Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA): Os direitos enunciados nesta lei aplicam-se a todas as crianças e adolescentes, sem discriminação de nascimento, situação familiar, idade, sexo, raça, etnia ou cor, religião ou crença, deficiência, condição pessoal de desenvolvimento e aprendizagem, condição econômica, ambiente social, região e local de moradia ou outra condição que diferencie as pessoas, as famílias ou a comunidade em que vivem. (incluído pela Lei nº 13.257, de 2016)

Decreto nº 3.956 (Convenção da Guatemala): Promulga a Convenção Interamericana para a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação contra as Pessoas Portadoras de Deficiência.

Atualmente existem, no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ver em [4]. Tais parâmetros são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal que têm por objetivo principal orientar os educadores por meio da padronização de alguns fatores fundamentais relativos a cada disciplina. Esses parâmetros abrangem tanto a rede pública quanto a rede privada de ensino.

De acordo com o Ministério da Educação (MEC), os PCN, expedidos em 1998, foram elaborados procurando respeitar as diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, além disso, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Assim, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos jovens o acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania. Conclui-se então que os PCN aparecem para orientar e encaminhar os profissionais da área da Educação acerca da relação professor/aluno e no desenvolvimento de um processo de ensino e aprendizagem efetivo.

> *"Esperamos que os Parâmetros sirvam de apoio às discussões e ao desenvolvimento do projeto educativo de sua escola, à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de suas aulas, à análise e seleção de materiais didáticos e de recursos tecnológicos e, em especial, que possam contribuir para sua formação e atualização profissional." (Paulo Renato Souza, economista e ex-ministro da Educação e do Desporto)*

Diante das mudanças econômicas, políticas, sociais e culturais do mundo contemporâneo, a escola vem sendo indagada acerca do seu papel nesta sociedade, a qual exige um novo tipo de profissional, mais flexível e versátil, capaz de pensar e aprender continuamente, que atenda às necessidades dinâmicas que se diversificam em quantidade e qualidade. É papel da escola também desenvolver conhecimentos, capacidades e qualidades para o exercício independente, consciente e crítico da cidadania. Para isso ela deve sistematizar o saber para o mundo do trabalho e o saber para o mundo das relações sociais.

Segundo as Diretrizes Nacionais para a Educação Especial, instituídas pela Resolução nº 02/2001 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, a política de inclusão de alunos com necessidades educacionais especiais não consiste apenas na permanência desses alunos na escola junto dos demais educandos, mas na reformulação de concepções e paradigmas, assim como no desenvolvimento de seus potenciais para o alcance dos objetivos gerais da educação. Deste modo, não é o aluno que se adapta à escola, mas a escola que se coloca à disposição do aluno com necessidades especiais, para tornar-se assim, um ambiente inclusivo.

Encontram-se, nos dias atuais, estudos baseados em reflexão e experimentação que buscam padrões ativos e eficientes de educação inclusiva para nossa atual sociedade. Na rede pública, o foco desse processo é proporcionar o acesso ao ensino a toda e qualquer criança com necessidades especiais. Já na rede privada, enfatiza-se a compreensão quanto à inclusão e a participação eficaz no processo de um sistema educacional inclusivo.

Aos professores, independente da rede, cabe agir cooperando e compartilhando o conhecimento que possuem para atender às necessidades educacionais, sejam elas especiais ou não, de todos os alunos e garantir, assim, o acesso e permanência nos sistemas de ensino. Vale ressaltar que só há sistema educacional inclusivo se este conceder o convívio diário de todos na diversidade que compõe o conjunto humano.

Capítulo 2

Ângulos

Vamos, a partir deste capítulo, iniciar o estudo da Geometria Plana com atividades e materiais dirigidos aos alunos com necessidades especiais de cegueira. O estudo de geometria é feito através do método dedutivo, que consiste em iniciar com certas afirmações, chamadas axiomas ou postulados, as quais são aceitas sem justificativas, e deduzir, através de demonstrações, outras afirmações que, dependendo da importância, são chamadas Proposições, Teoremas, Lemas ou Corolários.

A referência básica para este e os dois capítulos seguintes é [11].

Esclarecemos desde já que nem todos os resultados aqui apresentados são demonstrados na prática, utilizando material concreto, porém toda a teoria necessária para suporte do professor e para o ensino aos alunos estão presentes neste e nos próximos capítulos.

Materiais necessários para desenvolvimento das atividades:

Régua de madeira;
Transferidor de madeira;
Folha sulfite ou cartolina;
Palitos de sorvete ou de churrasco;
Canudos;
Cola quente ou colorida;
Tachinhas ou percevejos;
Barbante;
Algodão, grãos de areia, feijão e arroz (materiais de texturas diferentes).

2.1 Objetos Primitivos

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos aprendidos em anos escolares anteriores, porém necessários para o desenvolvimento dos tópicos matemáticos do 8º ano do Ensino Fundamental, segundo os materiais do FTD Sistema de Ensino.

No estudo de geometria no plano, aparecem dois termos indefinidos, ponto e reta, que chamamos de **objetos primitivos**, sendo o plano visto como um conjunto, onde seus elementos são os pontos e as retas são certos subconjuntos do plano.

Notação: Usamos letras maiúsculas para pontos e letras minúsculas para retas.

Para entender estes objetos, introduzimos os seguintes postulados, chamados de **postulados de incidência**.

Postulado 2.1.1 *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*

Postulado 2.1.2 *Em qualquer reta estão, no mínimo, dois pontos distintos.*

Definição 2.1.3 *Pontos de uma mesma reta são chamados **pontos colineares**.*

Postulado 2.1.4 *Existem, no plano, pelo menos três pontos distintos não colineares.*

A introdução da Geometria Plana por estes três postulados é bem abstrata, por isso, no Ensino Fundamental, partimos das correspondências dos próximos resultados.

Postulado 2.1.5 ***(Postulado da Distância)*** *A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem o mesmo.*

Definição 2.1.6 *O número que refere-se acima é chamado **distância entre os dois pontos**, e os pontos são **coincidentes** se forem o mesmo ponto. Vamos denotar por PQ a distância entre os pontos P e Q.*

Postulado 2.1.7 ***(Postulado da Régua)*** *Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que:*
1) cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real,
2) cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta,
3) a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

Praticando o conceito

Para que o aluno entenda e pratique esses conceitos é interessante que ele trabalhe sempre com uma régua em mãos. Com a associação reta/régua ele pode entender uma reta como uma régua que não termina. Enfatizamos que cometeremos um "abuso de linguagem matemático" ao considerar, nas práticas dos conceitos, que réguas representam retas, pois, obviamente, é impossível construir algo infinito.

Assim, adapte uma régua de madeira utilizando cola quente, colorida ou outro material cujo resultado fique em alto relevo nas marcações de centímetros, os quais representam números inteiros. Note que se usada uma régua de outro material como acrílico, por exemplo, a cola poderá desgrudar e prejudicar o andamento das atividades. Vale lembrar ao aluno, neste momento, que entre dois números inteiros existem outros números reais, assim também acontece com a régua considerando os milímetros. Se necessário, faça um pingo de cola - quente ou colorida - em cada milímetro da régua para que ele perceba a relação citada. Faça a correspondência entre a distância de cada marcação com a unidade de medida trabalhada e explore-a de acordo com o que considerar conveniente e proveitoso.

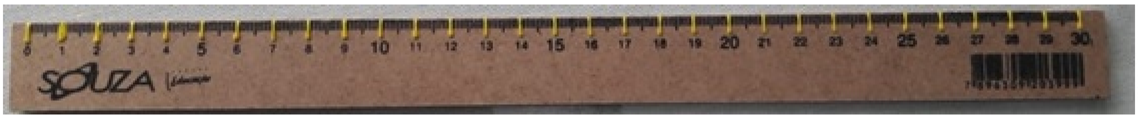


Figura 2.1: Régua adaptada

Definição 2.1.8 *Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se $AB + BC = AC$ então dizemos que B* ***está entre*** *A e C, o que denotamos por $A - B - C$.*

Observação: Se temos $A - B - C$ então temos também $C - B - A$

Definição 2.1.9 *Sejam A e B pontos distintos.*

a) O ***segmento de reta*** *AB, ou simplesmente* ***segmento*** *AB, o qual é denotado por $\overline{AB}$, é definido como sendo o conjunto dos pontos A e B, e dos pontos X tais que $A - X - B$. Os pontos A e B são chamados* ***extremidades*** *do segmento AB.*

Figura 2.2: Segmento de reta $\overline{AB}$

b) A ***medida*** *ou* ***comprimento*** *de um segmento AB é definida como a distância entre os pontos A e B e, como tal, é denotada por AB.*

c) A ***semirreta de origem*** *A* ***contendo o ponto*** *B, a qual é denotada por $\overrightarrow{AB}$, é definida como a união dos pontos do segmento AB com o conjunto dos pontos X tais que $A - B - X$. O ponto A é denominado* ***origem*** *da semirreta.*

Figura 2.3: Semirretas

Se A está entre B e C então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ***semirretas opostas****.*

Praticando o conceito

Utilizando a régua com as marcações feitas em cola, o aluno com deficiência visual pode entender os conceitos definidos, como a relação "estar entre", extremidades e comprimento de um segmento, além de perceber que um segmento de reta é um "pedaço" limitado da régua e que uma semirreta também é um "pedaço" da régua, porém limitado somente em um dos lados, como sugerem as Figuras 2.2 e 2.3.

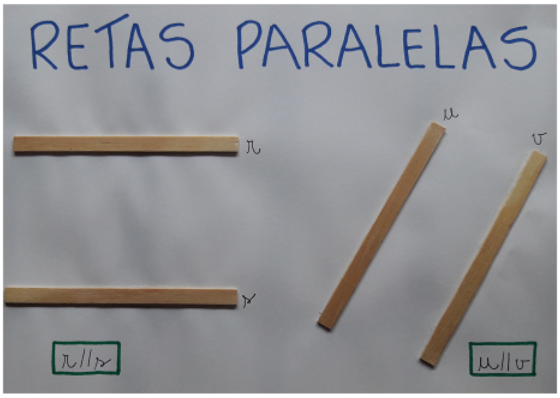
Definição 2.1.10 *Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados* ***segmentos congruentes****.*

Definição 2.1.11 *Duas retas são* ***paralelas*** *se não se interseccionam, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas as retas. Duas retas* distintas *que se interseccionam são chamadas retas* ***concorrentes****.*

Notação: Se uma reta r for paralela a uma reta s então denotamos por $r \parallel s$.

Praticando o conceito

Já foi visto que uma reta pode ser considerada como uma régua que não termina, o qual a partir de agora será representada por palitos de sorvete, churrasco ou canudos. Para entender as posições relativas entre retas, construa utilizando palitos ou canudos colados em folha sulfite alguns exemplos de retas paralelas e concorrentes. Essas construções podem ser feitas em duas folhas cada qual contendo um caso das posições relativas ou ambos os casos em uma única folha, ficando essa decisão a critério do professor. Peça para o aluno analisar cada uma das situações e verifique se ele compreendeu a definição de ambas e a diferença entre elas.



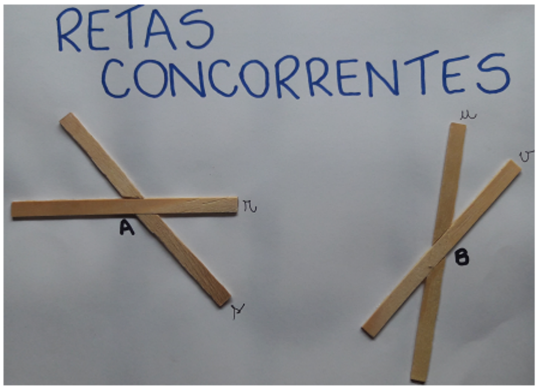


Figura 2.4: Exemplos de construções de retas paralelas e concorrentes

Teorema 2.1.12 *Duas retas concorrentes interseccionam-se em um único ponto.*

Demonstração.

Sejam r e s duas retas concorrentes em um ponto P. Considere Q um outro ponto pertencente a ambas as retas.

Pelo Postulado 2.1.1, conclui-se que a reta r é a reta determinada pelos pontos P e Q, assim como a reta s também é determinada por P e Q. Pela unicidade apresentada no postulado em questão, r e s seriam a mesma reta, o que contradiz o fato de serem concorrentes. Logo, P é único. ■

2.2 Ângulos

O estudo inicial de ângulos é feito em anos escolares antecedentes ao 8º ano, no entanto para um aprendizado contínuo com as devidas demonstrações e embasamento matemático fundamentais para desenvolvimento do professor, apresentamos aqui os resultados relacionados a ângulos necessários para o conteúdo proposto.

Definição 2.2.1 *Um* ***ângulo*** *é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *então essas semirretas são chamadas* ***lados*** *do ângulo e o ponto* A *é chamado* ***vértice*** *do ângulo. Tal ângulo é denominado* ***ângulo*** BAC *ou* ***ângulo*** CAB *e representado por* $\widehat{BAC}$ *ou* $\widehat{CAB}$*, respectivamente.*

Quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice, podemos usar apenas a letra referente ao vértice para representar o ângulo.

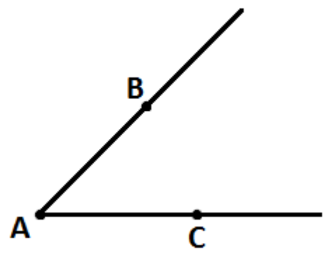


Figura 2.5: Ângulo BAC ou CAB

Definição 2.2.2 *Dois pontos P e Q* ***estão no mesmo lado*** *de uma reta t se o segmento PQ não tem pontos em comum com a reta t. Caso contrário, dizemos que P e Q* ***estão em lados opostos*** *de uma reta t.*

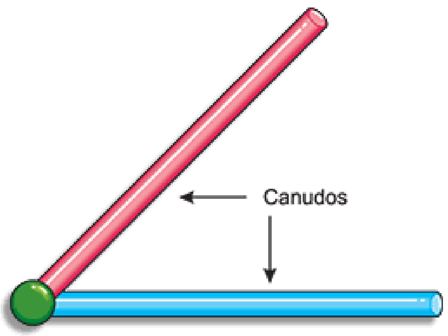
Dada uma reta t, fixe um ponto $P \notin t$. O plano menos a reta é dividido em dois conjuntos: dos pontos que estão do mesmo lado de P e dos pontos que estão em lados opostos com relação a reta t, que são chamados de ***semiplanos*** *determinados por t*

Definição 2.2.3 *Dizemos que o ponto P está no* ***interior*** *do ângulo BAC ou é* ***ponto interior*** *do ângulo BAC se os pontos P e B estão no mesmo lado da reta AC e os pontos P e C estão no mesmo lado da reta AB.*

O ***exterior*** *de $\widehat{BAC}$ é o conjunto dos pontos que não estão no interior e não estão no próprio ângulo BAC. Um ponto desse tipo é chamado* ***ponto exterior*** *do ângulo BAC.*

Praticando o conceito

Junte dois canudos através de uma de suas extremidades utilizando tachinha ou percevejo, de modo que seja possível aumentar/diminuir a "abertura" entre eles. Entregue o material ao aluno, deixe-o analisá-lo e peça para ele representar diferentes aberturas (maiores e menores) utilizando os canudos. Explique que essas aberturas são o que chamamos de ângulos. Feito isso, cole-os em folha sulfite com uma abertura qualquer - menor do que 180 - e discuta os conceitos de interior e exterior com a ajuda do material concreto.



Fonte: sbrecci.com, 2018

Figura 2.6: Exemplo de ângulo formado com canudos

Introduzimos a medição de ângulos na geometria através dos seguintes postulados correspondentes às propriedades da medida de ângulos.

Postulado 2.2.4 ***(Postulado da Medida de Ângulos)*** *A cada ângulo* $\widehat{BAC}$ *corresponde um número real entre 0 e 180.*

Definição 2.2.5 ***i)*** *O número correspondente ao postulado anterior é chamado* ***medida (em graus)*** *do ângulo, o que é denotado por* $m\widehat{BAC}$.

ii) *Ângulos que têm a mesma medida são chamados* ***ângulos congruentes****.*
Se $\widehat{BAC}$ *e* $\widehat{PQR}$ *são congruentes, isto é denotado por* $\widehat{BAC} \cong \widehat{PQR}$.

Efetivamente, os ângulos são medidos com o auxílio de um transferidor. Para isso, devemos seguir algumas "regras":

- O centro **O** do transferidor deve ser colocado sobre o vértice do ângulo;

- A linha horizontal que passa pelo centro do transferidor (**linha de fé**) deve coincidir com um dos lados do ângulo;

  Um transferidor possui duas marcações em seu arco, uma **interna** e outra **externa**, ambas de 0 a 180.

- Se o outro lado do ângulo for obtido "caminhando" no sentido horário do arco (já posicionado), usamos a marcação externa do transferidor e o número que o lado apontar nesta marcação é a medida deste ângulo. Se o sentido for o anti-horário, usa-se a marcação interna.

Postulado 2.2.6 ***(Postulado da Construção do Ângulo)*** *Seja* $\overrightarrow{AB}$ *uma semirreta contida na reta origem de um semiplano* $\mathscr{H}$. *Para cada número* r *entre 0 e 180 existe exatamente uma semirreta* $\overrightarrow{AP}$ *com* P *em* $\mathscr{H}$, *tal que* $m\widehat{PAB} = r$.

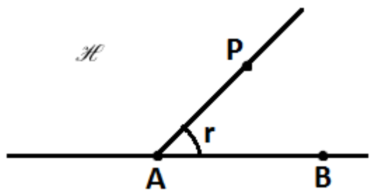


Figura 2.7: Ângulo PAB, tal que $m\widehat{PAB} = r$

Praticando o conceito

Adapte um transferidor para que o aluno consiga medir, entender e praticar os conceitos envolvendo ângulos. Utilize um transferidor de madeira, tachinhas ou pequenos pregos em cada grau (pode ser feito apenas nos graus correspondentes aos múltiplos de 10 para não ficar desconfortável tatear e cola colorida nas demais marcações) e barbante amarrado em uma tachinha no centro do transferidor para auxiliar. Quando o aluno esticar o barbante para medir o ângulo, poderá amarrá-lo na tachinha correspondente à marcação e, seguindo as regras descritas acima, determinar sua medida.

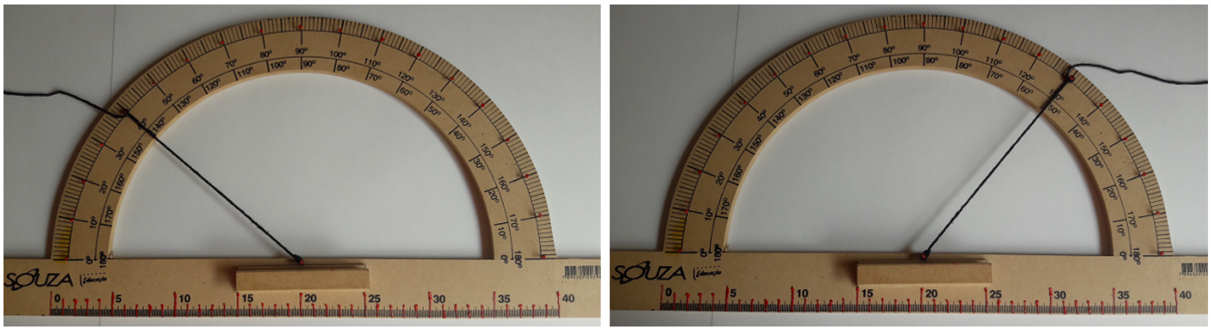


Figura 2.8: Transferidor adaptado

Postulado 2.2.7 ***(Postulado da Adição de Ângulos)*** *Se D é um ponto interior do $\widehat{BAC}$ então $m\widehat{BAC} = m\widehat{BAD} + m\widehat{DAC}$.*

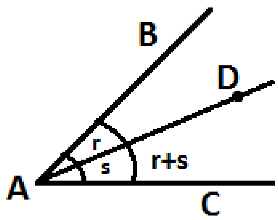


Figura 2.9: Adição de Ângulos

A partir deste ponto do trabalho apresentamos os conceitos referentes ao cronograma do 8º ano, segundo os materiais do FDT Sistema de Ensino.

Definição 2.2.8 ***i)*** *Se a soma das medidas de dois ângulos é 90 então os ângulos são chamados* ***complementares*** *e cada um é o* ***complemento*** *do outro.*

ii) *Se a soma das medidas de dois ângulos é 180 então dizemos que os ângulos são* ***suplementares*** *e cada um é o* ***suplemento*** *do outro.*

iii) *Um ângulo com medida menor que 90 é chamado* ***ângulo agudo****, com medida maior que 90 é chamado* ***ângulo obtuso*** *e com medida igual a 90 é chamado* ***ângulo reto****.*

Usamos o termo "**ângulo raso**" a união de dois ângulos suplementares com um lado em comum.

Praticando o conceito

Construa, utilizando palitos de churrasco ou sorvete, situações distintas envolvendo ângulos complementares - faça o mesmo para ângulos suplementares - e peça para o aluno medir, com o transferidor adaptado, cada um deles e identificar a definição proposta. Aproveitando as construções, reforce a ideia de ângulo agudo e obtuso.

É importante ressaltar que, para um primeiro entendimento dos itens i) e ii), utilizamos ângulos com um lado comum, mas, em geral, não é necessário.

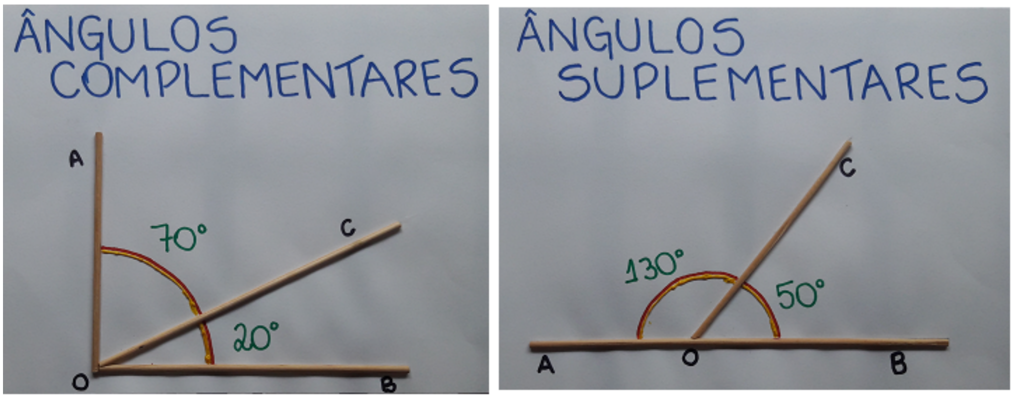


Figura 2.10: Exemplos de ângulos complementares e suplementares

Definição 2.2.9 *Dois conjuntos, cada um deles sendo uma reta, uma semirreta ou um segmento, são* ***perpendiculares*** *se as retas que os contêm determinam um ângulo reto. Se uma reta r é perpendicular a uma reta s então denotaremos por $r \perp s$.*

Definição 2.2.10 *Uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ é* ***bissetriz de um ângulo*** *AOB se C está no interior de $\widehat{AOB}$ e $\widehat{AOC} \cong \widehat{BOC}$. Neste caso, temos $m\widehat{AOC} = m\widehat{BOC} = \frac{1}{2}m\widehat{AOB}$.*

Praticando o conceito

Elabore com canudos, barbante ou palitos ângulos de diferentes medidas. Entregue o material ao aluno e solicite que, utilizando transferidor adaptado, meça cada um dos ângulos. Para cada material peça, a princípio utilizando raciocínio lógico, que o aluno determine o valor dos ângulos congruentes obtidos a partir de sua bissetriz. Em seguida, usando transferidor, faça com que ele identifique a posição da bissetriz de cada ângulo por meio do barbante preso ao centro do transferidor, além de conferir se o valor pensado corresponde à realidade.

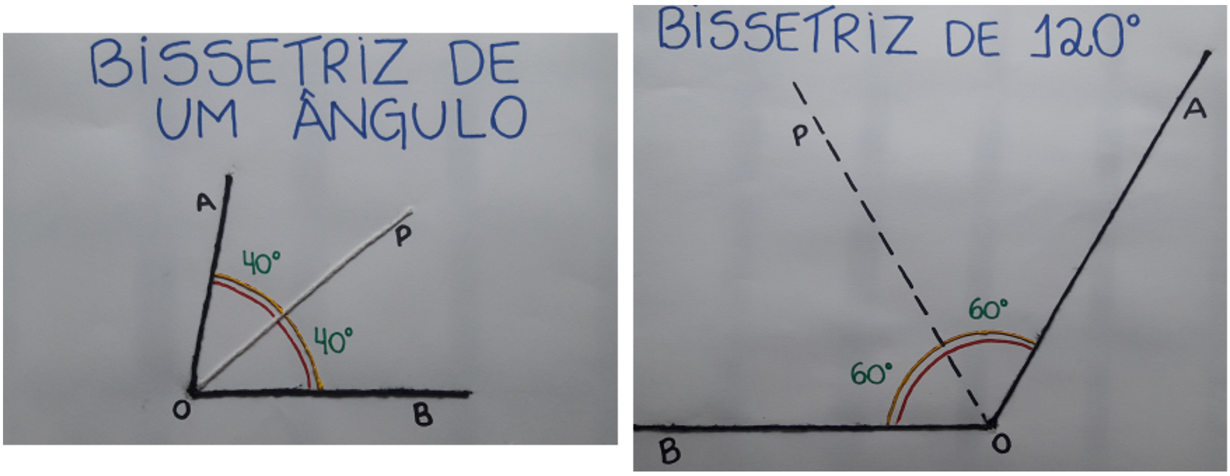


Figura 2.11: Ângulos e suas bissetrizes

Definição 2.2.11 *Dois* ***ângulos*** *são* ***opostos pelo vértice*** *se os lados de um são as semirretas opostas aos lados do outro.*

Teorema 2.2.12 *Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração.
Sejam $\widehat{AOB}$ e $\widehat{DOC}$ ângulos opostos pelo vértice. Logo estes ângulos têm $\widehat{AOD}$ como suplemento. Assim,

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOD}) = 180 \text{ e } m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{AOD}) = 180.$$

Portanto, $m(\widehat{AOB}) = 180 - m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{DOC})$ e, com isso, $\widehat{AOB} \cong \widehat{DOC}$. ■

Praticando o conceito
Crie ângulos opostos pelo vértice através de barbantes esticados e folha sulfite. O aluno poderá tatear e idealizar a definição proposta. Novamente utilizando transferidor adaptado, peça para o aluno medir cada um dos ângulos formados e questione-o quanto aos seus valores. Atente se ele concluiu a congruência dos ângulos.
Sugestão: *Se possível, faça a atividade antes de expor o teorema 2.2.12 a ele.*

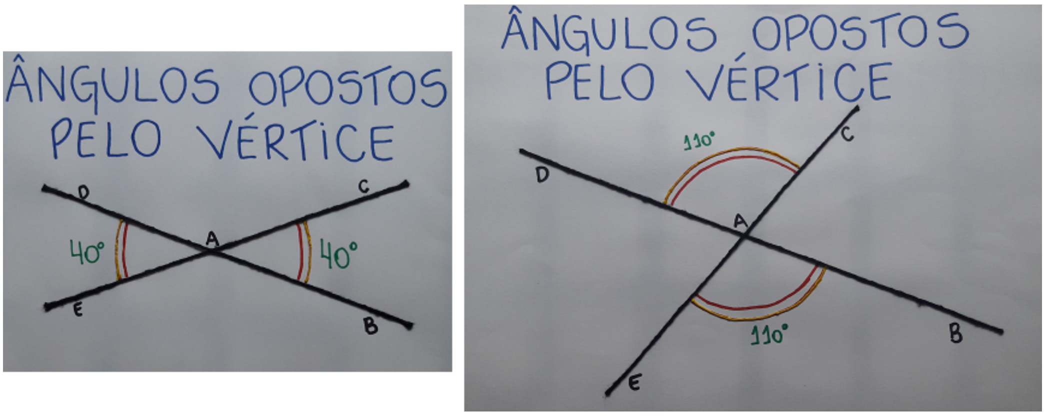


Figura 2.12: Situações contendo ângulos opostos pelo vértice

Relacionamos a seguir os conceitos envolvendo retas, concorrentes ou paralelas, e ângulos.

Definição 2.2.13 *Uma **transversal** a duas retas dadas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Neste caso dizemos que as duas retas são cortadas pela transversal.*

Definição 2.2.14 *Seja r uma transversal às retas s e t, interseccionando-as nos pontos P e Q, respectivamente. Seja A um ponto de s e B um ponto de t, tais que A e B estejam em lados opostos de r. Os ângulos APQ e BQP são chamados **ângulos alternos internos** formados por s, t e a transversal r.*

Definição 2.2.15 *Sejam $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ ângulos alternos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Se $\hat{Z}$ é tal que $\hat{Y}$ e $\hat{Z}$ são ângulos opostos pelo vértice então $\hat{X}$ e $\hat{Z}$ são ditos **ângulos correspondentes**.*

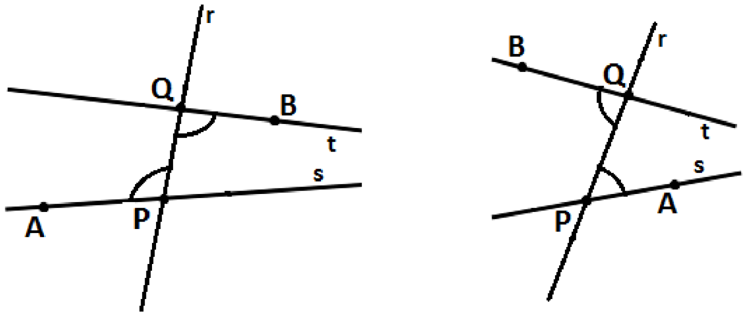


Figura 2.13: Ângulos Alternos Internos

A seguir vamos abordar uma importante caracterização de retas paralelas. Como mencionado, os resultados serão demonstrados para aprofundar o conhecimento do professor no conteúdo proposto. Neste caso, vamos apresentar a demonstração, que será feita neste momento parcialmente, pois é necessário o conteúdo do Capítulo 3. Mantivemos contudo este resultado neste momento para seguir a ordem do material seguido para os alunos do 8º ano, como não se faz a demonstração a eles isso não acarreta prejuízo. Além disso, precisamos do seguinte postulado:

Postulado 2.2.16 ***(Postulado das Paralelas)*** *Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.*

Teorema 2.2.17 *Duas retas cortadas por uma transversal têm ângulos alternos internos congruentes se, e somente se, elas são paralelas.*

Demonstração.

Será provado no Corolário 3.1.5 que *"se duas retas cortadas por uma transversal têm ângulos alternos internos congruentes então elas são paralelas."*

Reciprocamente, considere as retas paralelas r e s, e uma transversal t que as corta nos pontos P e Q respectivamente. Tome A e B pontos em r e s, respectivamente, tais que $\widehat{APQ}$ e $\widehat{BQP}$ sejam ângulos alternos internos de r e s com relação à t.

Suponha que $\widehat{APQ}$ e $\widehat{BQP}$ não sejam congruentes. Seja s' uma reta que passa por Q formando um ângulo $\widehat{CQP}$ congruente a $\widehat{QPA}$, tal que eles são ângulos alternos internos de r e s' com relação à t. Logo s e s' são distintas.

Pela primeira parte (ainda não demonstrada), a reta s' é paralela a reta r. Disso e da hipótese, temos s e s' distintas, ambas paralelas a r e passando por Q, e isso contradiz o Postulado das Paralelas. Portanto, $\widehat{APQ}$ e $\widehat{BQP}$ são congruentes. ■

Corolário 2.2.18 *Duas retas cortadas por uma transversal têm dois ângulos correspondentes congruentes se, e somente se, elas são paralelas.*

Demonstração.

Sejam $\hat{A}$ e $\hat{C}$ ângulos correspondentes de duas retas r e s cortadas pela transversal t.

Considere $\hat{B}$ o ângulo oposto pelo vértice de $\hat{C}$. Logo, $\hat{B}$ e $\hat{A}$ são ângulos alternos internos de r e s com relação à t.

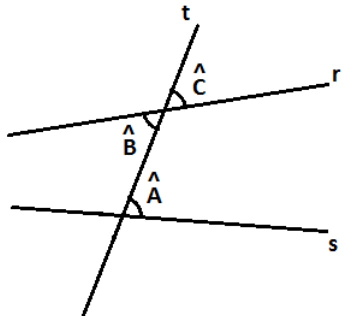


Figura 2.14: Ângulos formados por duas retas r e s cortadas pela transversal t

Note que, pelo Teorema 2.2.12, $\hat{B} \cong \hat{C}$. Logo, $\hat{A} \cong \hat{C}$ se, e somente se, $\hat{B} \cong \hat{A}$. Portanto, pelo Teorema 2.2.17, o resultado segue. ■

Praticando o conceito

Precisamos construir algumas situações distintas neste momento: ângulos alternos internos - congruentes e não congruentes - e ângulos correspondentes - congruentes e não congruentes - formados por duas retas e uma transversal. Faça a construção utilizando palitos ou canudos colados em folha sulfite. O aluno poderá perceber no tato a diferença entre as posições das retas (paralelas ou não), porém será no transferidor que conseguirá conferir a medida dos ângulos. Se necessário, no caso dos ângulos não congruentes, "prolongue" as retas construídas com barbante esticado (ou um palito maior do que o utilizado na folha) para o aluno perceber que elas realmente se interceptam. Dessa maneira, ele perceberá as relações de congruência quando há o paralelismo das retas.

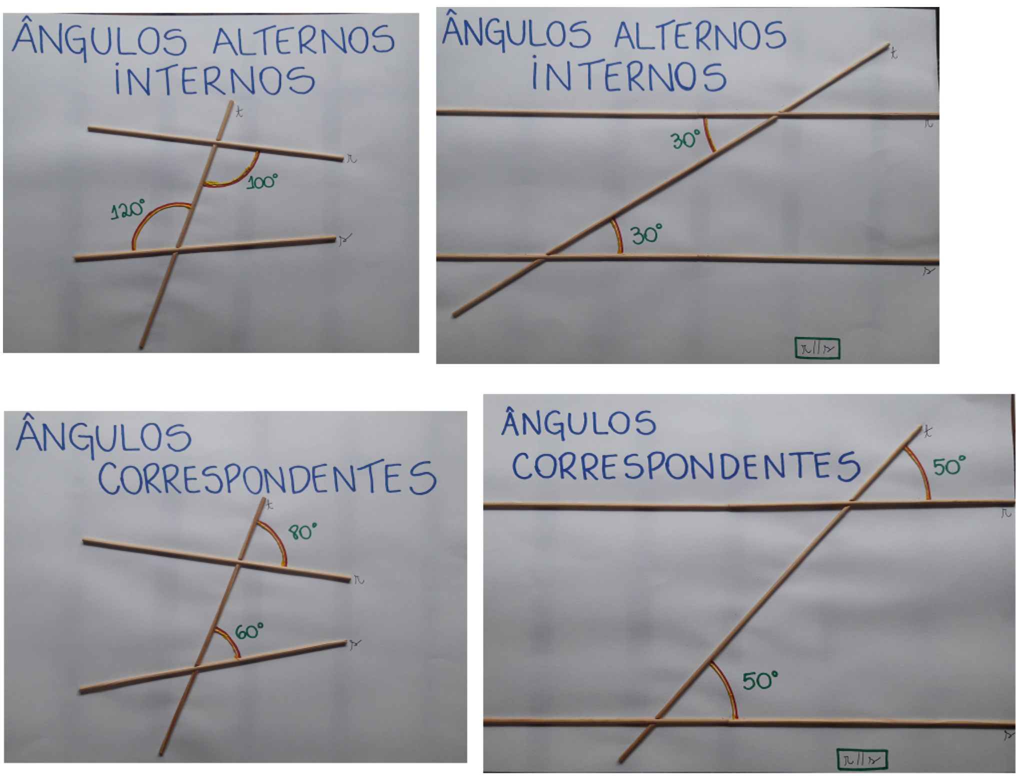


Figura 2.15: Ângulos formados por retas paralelas e retas concorrentes

Fixando o conceito

Após as devidas explicações e conclusões envolvendo duas retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos alternos internos e correspondentes, podemos criar uma única situação resumindo, no tato, todas as congruências obtidas. Faça novamente, utilizando folha sulfite ou cartolina (por ser mais firme) e barbante esticado (pode ser substituído por palitos ou canudos), duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Cole, por exemplo, algodão nos ângulos alternos internos (cole também nos seus respectivos opostos pelo vértice) e, nos demais, algum material de textura distinta, como grãos de arroz, feijão ou areia. Desse modo, ao tatear a construção, o aluno conseguirá identificar mais rapidamente as congruências e a relação entre os ângulos.

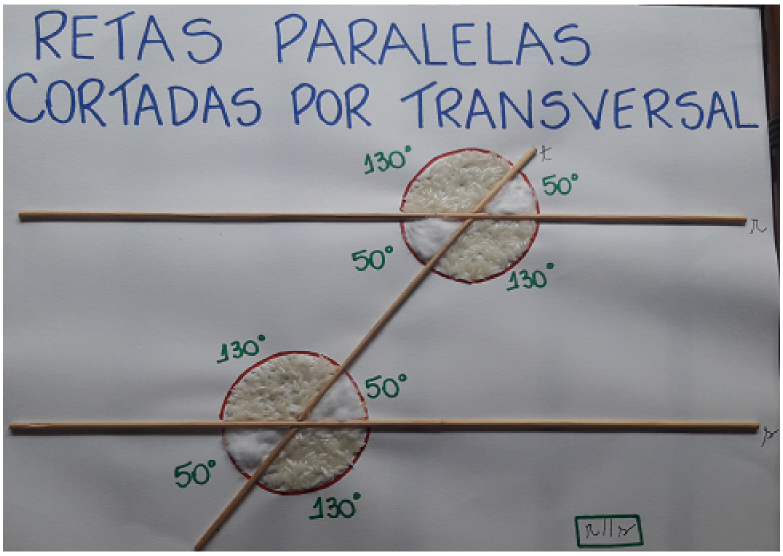


Figura 2.16: Relações angulares no caso de retas paralelas cortadas por uma transversal

2.3 Situação Problema

Apresentamos agora, e ao término dos dois capítulos seguintes, uma situação problema que pode ser utilizada em sala de aula tanto com o aluno com deficiência visual quanto com os demais alunos, para que seja feita uma contextualização dos conceitos trabalhados. Faz-se necessário que essas propostas sejam feitas em aula extra ou subsequente às aulas voltadas para explicação e apresentação dos conceitos relacionados.

Tais situações problemas são enunciadas, de modo geral, contemplando todos os alunos, porém a resolução é voltada para um aluno deficiente visual, com instruções e apontamentos relevantes para a mediação do professor.

Materiais necessários:
Uma folha de papel espelho (dobradura) em formato quadrangular;
Barbante fino;
Materiais de diferentes texturas (grãos de arroz, areia e algodão, por exemplo);
Cola colorida.

Conteúdos abordados:
Retas paralelas cortadas por transversal;
Ângulos suplementares, alternos internos e correspondentes;
Congruência de ângulos.

Considerações adicionais:

Retas paralelas, retas perpendiculares e bissetriz de ângulo são alguns dos elementos geométricos frequentes na arte do *origami*. A seguir, apresentamos um pouco de sua história.

O *origami*, expressão que provém do japonês e significa arte de dobrar o papel, é uma arte muito antiga criada pelos membros da Corte Imperial do Japão.

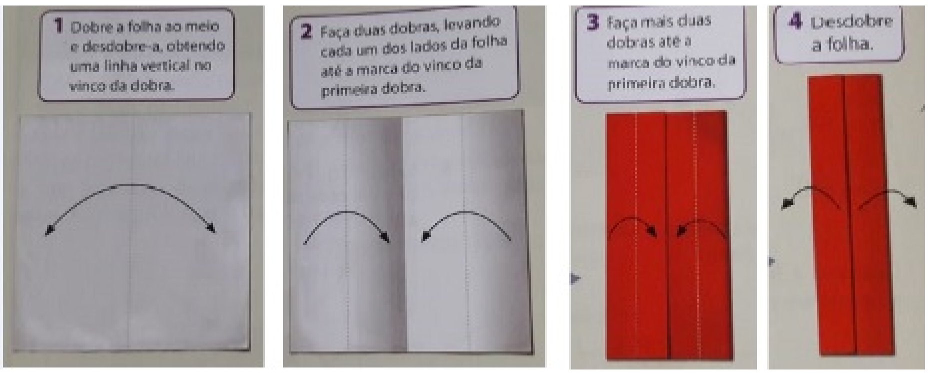
A inspiração dos origamistas (pessoas que se dedicam à arte do Origami) está, principalmente, nos elementos da Natureza e nos objetos do dia-a-dia. Para o origamista, o ato de dobrar o papel representa a transformação da vida e ele tem a consciência de que esse pedaço, um dia, foi a semente de uma planta que germinou, cresceu e se transformou numa árvore.

Nesta técnica é comum utilizar-se de folhas de papel no formato quadrado, nas quais os cortes estão ausentes. Nelas são realizadas algumas poucas dobras no estilo geométrico, que dispostas de formas variadas, compõem imagens complexas. As figuras representadas no origami têm diferentes significados para os japoneses, como, por exemplo, *tsuru* (cegonha) e o sapo. A cegonha simboliza boa sorte e saúde, enquanto que o sapo significa amor e felicidade.

Situação Problema:

Trigonométrico é um aluno muito criativo. Quando o professor de Matemática pediu que todos dessem um exemplo de retas e ângulos, assim como suas aplicações, o menino lembrou-se das tardes de domingo que passou fazendo origami com seu avô e resolveu ensinar à turma como construir uma casinha utilizando essa técnica.

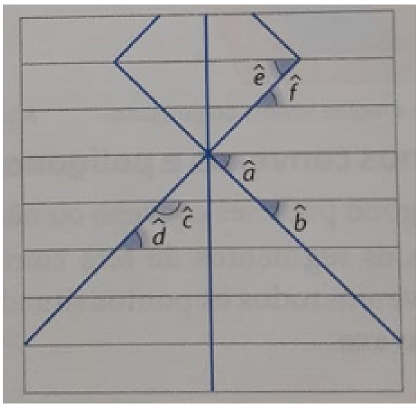
Acompanhe o passo-a-passo da construção ensinada por Trigonométrico:



Fonte: Acervo da Editora FTD

Figura 2.17: Passo-a-passo da construção da situação problema

O professor de Trigonométrico gostou tanto de seu exemplo que resolveu explorar a matemática por trás dele com os alunos. Juntos, analisaram que ao desdobrar toda a folha após o passo 7, obtiveram várias linhas que dão a ideia de retas paralelas e transversais. Na figura a seguir, há a representação da folha com essas retas.



Fonte: Acervo da Editora FTD

Figura 2.18: Retas obtidas após o passo 7

A partir desta obtenção de retas, responda os seguintes questionamentos.

a) Alguns ângulos foram formados no encontro dessas restas. Dentre eles, quais são correspondentes? E quais são os alternos internos?

b) Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes? Por quê?

c) Os ângulos $\hat{e}$ e $\hat{f}$ são suplementares? Por quê?

Resolução da Situação Problema

Para alunos com cegueira, pontilhe com cola colorida todas as dobras a serem obtidas no processo e assim, o aluno poderá sentir as marcações para realizar os passos da construção. Em cada passo, oriente o aluno com deficiência visual em que marcação ele deve ir, por exemplo: a primeira orientação é colocar um lado da folha (a ser indicado pelo professor) até a terceira dobra vertical (serão, ao todo, 6 dobras verticais).

Após a etapa das dobraduras, o professor deve colar barbante nas linhas paralelas e transversais mencionadas e dar para que o aluno sinta o resultado.

Relembre os conceitos de ângulos correspondentes e alternos internos e peça ao aluno para verificar se na folha aparecem tais ângulos. Uma vez identificados, use dois tipos de materiais, cada um para um tipo de ângulo caracterizado anteriormente e cole no seu interior. Assim, ele identificará os ângulos através do tato. Note que não faz-se necessário colar os materiais em todos os ângulos descritos, basta colar naqueles representados na Figura 2.18.

Nesta atividade não será preciso utilizar régua ou transferidor adaptados, pois os questionamentos são teóricos e não numéricos.

Para o *item a*, o aluno possui algumas possíveis respostas para os ângulos correspondentes e alternos internos, pois temos mais do que duas retas paralelas e uma transversal. Oriente-o sobre isso, mostrando que podemos ignorar todas as demais e trabalhar duas a duas. Peça para ele responder este item, a priori, indicando os ângulos com o dedo, vez que não está visualizando as letras dadas e, em seguida, diga a ele a nomenclatura de cada ângulo. Os pares de ângulos $(\hat{a}, \hat{b})$ e $(\hat{d}, \hat{f})$ são possíveis respostas para ângulos correspondentes e os pares $(\hat{d}, \hat{e})$ e $(\hat{e}, \hat{f})$ são exemplos de ângulos alternos internos, segundo o enunciado.

Para os *itens b* e *c*, você poderá agir de duas maneiras, dependendo da abordagem que fizer com o aluno. Se ele souber a nomenclatura dos ângulos, basta continuar nessa linha e perguntar diretamente pelo nome de cada um. Entretanto, se não considerar necessárias as nomenclaturas, indique no papel quais ângulos o enunciado está pedindo.

Como já dito, são questões teóricas e, por isso, não é preciso utilizar instrumentos adaptados. No *item b*, basta verificar que os ângulos são correspondentes e assim, congruentes. Já no *item c*, os ângulos são alternos internos e daí, congruentes. Pela construção do origami, não há retas perpendiculares na atividade. Daí, os ângulos $\hat{e}$ e $\hat{f}$ não são retos e assim, não podem ser suplementares.

Capítulo 3

Polígonos

Apresentamos neste capítulo o conceito de polígonos e enfatizamos alguns polígonos específicos: triângulos e quadriláteros.

Como fizemos no Capítulo 2, nosso objetivo é abordar os conceitos mencionados, tratando a teoria e a explicação de tais conteúdos a um aluno com deficiência visual.

Materiais necessários para desenvolvimento das atividades:

Régua adaptada;
Transferidor adaptado;
Folha sulfite;
Papel cartão ou placa de papelão (material firme);
Palitos de sorvete;
Canudos;
Cola colorida;
Lantejoulas;
Barbante.

Definição 3.0.1 *Seja $A_1, A_2, ..., A_n, n \geq 3$, uma sequência de n pontos distintos tais que $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ têm as seguintes propriedades:*

i) *nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades;*

ii) *nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.*

Chamamos de ***polígono*** *a união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ satisfazendo estas propriedades e denotamos por polígono $A_1A_2 \ldots A_n$, onde os pontos $A_1, ..., A_n$ são chamados* ***vértices*** *do polígono e os segmentos são seus* ***lados****.*

Praticando o conceito

Construa, utilizando barbante para os lados e cola colorida ou lantejoulas para os vértices, figuras planas formadas pela união de segmentos para que o aluno identifique se elas representam polígonos ou não.

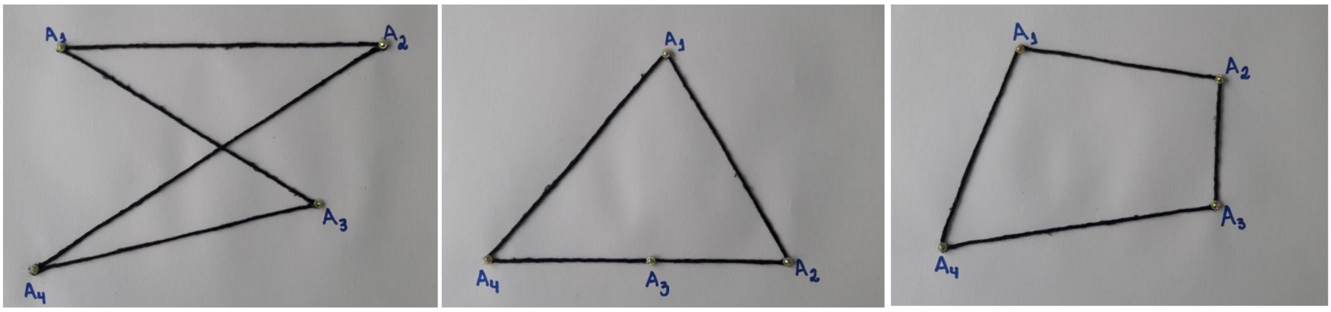


Figura 3.1: Exemplos que são e não são polígonos

O aluno deverá perceber que, na figura acima, a primeira construção não representa polígono, pois não satisfaz o item i) da definição, bem como a segunda construção, pois não satisfaz o item ii) da definição. A terceira construção satisfaz os itens i) e ii) da definição acima e portanto, é polígono.

A nomenclatura dos polígonos será dada em função do número de lados que os compõem, como segue.

número de lados	**nomenclatura**
3 lados	triângulo
4 lados	quadrilátero
5 lados	pentágono
6 lados	hexágono
7 lados	heptágono
8 lados	octógono
9 lados	eneágono
10 lados	decágono
⋮	⋮
n lados	n-ágono

Definição 3.0.2 *Definimos **perímetro** de um polígono pela soma das medidas de seus lados.*

Praticando o conceito
Novamente utilizando barbante e cola colorida, construa polígonos distintos. Peça para o aluno, com o auxílio de uma régua adaptada, medir o comprimento de seus lados, registrar os resultados e determinar o perímetro de cada um deles. Para obter resultados mais precisos, faça as construções com medidas inteiras ou com apenas uma casa decimal. É importante que seja enfatizada a diferença entre cada um dos polígonos construídos em relação à quantidade de lados e vértices, lembrando a nomenclatura de cada um.

Definição 3.0.3 *Um polígono é dito **convexo** se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados.*

Praticando o conceito
Utilizando barbante para os lados, faça a construção de alguns polígonos convexos e outros não convexos. Para que o aluno entenda a definição de polígono convexo, entregue a ele um palito de sorvete (ou canudo) e peça para, cada par de pontos escolhido do polígono

(que deve ser marcado com cola ou lantejoulas), colocar o palito sobre o lado que contém um dos pontos escolhidos e sentir se o polígono se encontra todo de um único lado ou tem partes em um lado e partes do outro lado do palito. Se este último caso ocorrer, o polígono não é convexo, como vemos na segunda figura escolhendo os pontos B e C.

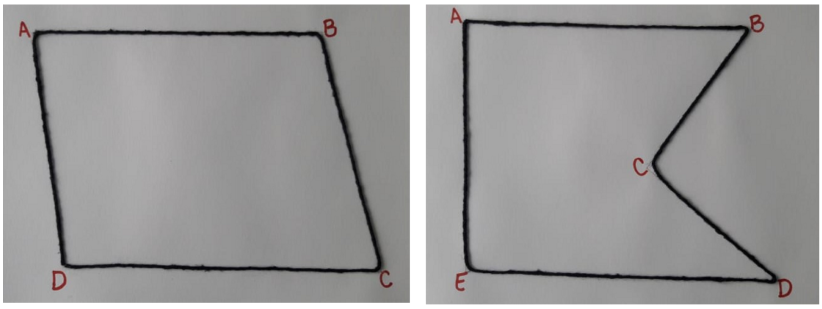


Figura 3.2: Polígono convexo e não convexo

Definição 3.0.4 *Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo. Os* ***ângulos*** *(ou* ***ângulos internos****) deste polígono são $A_{i-1}\widehat{A_i}A_{i+1}, i = 2, ..., n-1$, $A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$ e $A_n\widehat{A_1}A_2$.*

Chamamos de ***ângulos externos*** *deste polígono cada uma dos ângulos $B_i\widehat{A_i}A_{i+1}$, $i = 2, ..., n-1$, $B_n\widehat{A_n}A_1$ e $B_1\widehat{A_1}A_2$ em que B_i, distinto de A_i, é um ponto qualquer da semirreta oposta à $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$; B_n, distinto de A_n, está na semirreta oposta à $\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$; e B_1, distinto de A_1, está na semirreta oposta à $\overrightarrow{A_1A_n}$, ou também os seus correspondentes ângulos opostos pelo vértice.*

Definição 3.0.5 *Um* ***polígono regular*** *é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois congruentes e seus ângulos dois a dois congruentes.*

Os conceitos de ângulos serão praticados nos polígonos específicos que trataremos a seguir, começando com os triângulos.

3.1 Triângulos

Um triângulo ABC pode ser denotado por $\triangle ABC$. Possui três vértices (A, B e C), três lados ($\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CA}$) e três ângulos internos ($\widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ e $\widehat{CAB}$).

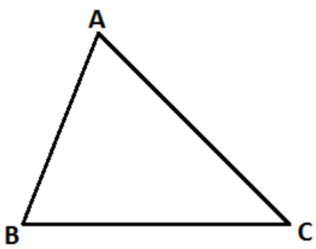


Figura 3.3: Triângulo ABC

Considere D um ponto tal que C está entre B e D. Como definido, $\widehat{ACD}$ é um ângulo externo do triângulo ABC. Neste caso, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ do $\triangle ABC$ são chamados **ângulos internos não adjacentes** ao ângulo externo $\widehat{ACD}$.

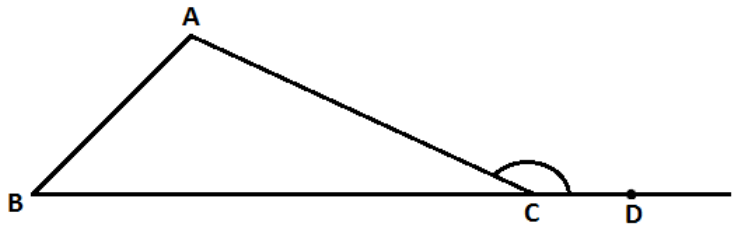


Figura 3.4: Triângulo ABC e ângulo externo $\widehat{ACD}$

Os triângulos podem ser classificados quanto à medida de seus lados e quanto à medida de seus ângulos.

Quanto à medida de seus **lados**:
1) **Triângulo equilátero**, quando possui os três lados dois a dois congruentes.
2) **Triângulo isósceles**, quando possui dois de seus lados congruentes entre si. O terceiro lado é chamado de **base** do triângulo.
3) **Triângulo escaleno**, quando quaisquer dois de seus lados têm medidas diferentes.

Quanto à medida de seus **ângulos**:
1) **Triângulo retângulo**, quando possui um ângulo reto.
2) **Triângulo acutângulo**, quando possui os três ângulos agudos.
3) **Triângulo obtusângulo**, quando possui um ângulo obtuso.

Praticando o conceito
Construa - utilizando barbante, canudo ou palito - triângulos equiláteros, isósceles e escalenos de lados com medidas inteiras ou com apenas uma casa decimal para que o aluno, com auxílio de uma régua adaptada, determine os comprimentos de cada lado do triângulo. Ainda utilizando esses triângulos (ou fazendo novas construções), peça para ele utilizar o transferidor adaptado e medir cada um dos ângulos internos do triângulo. Feito isso, o aluno poderá classificar os triângulos construídos quanto às nomenclaturas apresentadas.

Definição 3.1.1 *Dois triângulos são* ***congruentes*** *se for possível definir uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes.*

Em outras palavras, se definirmos a correspondência $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$ entre os triângulos ABC e DEF, e tivermos $\widehat{A} \cong \widehat{D}, \widehat{B} \cong \widehat{E}, \widehat{C} \cong \widehat{F}, \overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ então diremos que os dois triângulos são congruentes e denotaremos por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Observação 3.1.2 *Podemos trabalhar, mais geralmente, com congruência de polígonos. Basta que dois polígonos tenham o mesmo números de lados e exista uma correspondência entre seus vértices de modo que tenham seus lados e ângulos correspondentes congruentes.*

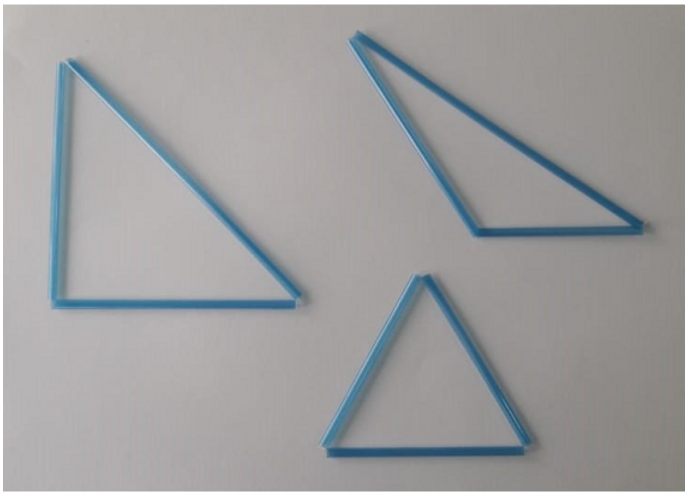


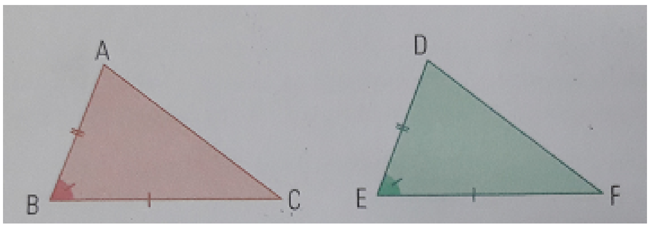
Figura 3.5: Triângulos de diferentes classificações, construídos com canudos

Para verificar a congruência entre dois triângulos não é necessário analisar as seis correspondências acima. Existem alguns resultados, denominados **Casos de Congruência de Triângulos**, que diminuem a quantidade de congruências a serem analisadas.

Enunciamos, a seguir, os casos de congruência de triângulos. Na construção da teoria, o primeiro caso é dado como postulado e os demais são obtidos sequencialmente através de construções que recaem no caso anterior. Estes foram os únicos resultados que optamos em não apresentar as justificativas teóricas, vez que tais justificativas não se enquadram na programação de 8º ano do Ensino Fundamental, entretanto o professor que tiver interesse pode encontrar tais justificativas em [11].

Caso Lado, Ângulo, Lado (LAL)

Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

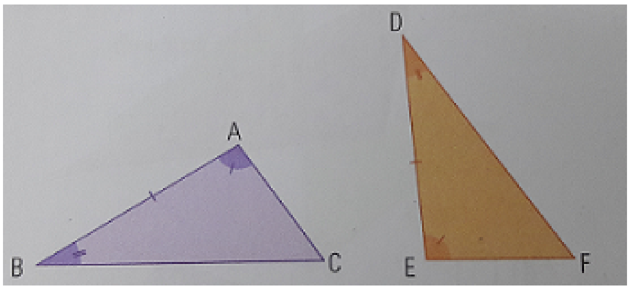


Fonte: Acervo da Editora FTD

Figura 3.6: Triângulos congruentes pelo caso LAL

Caso Ângulo, Lado, Ângulo (ALA)

Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ então os triângulos são congruentes.

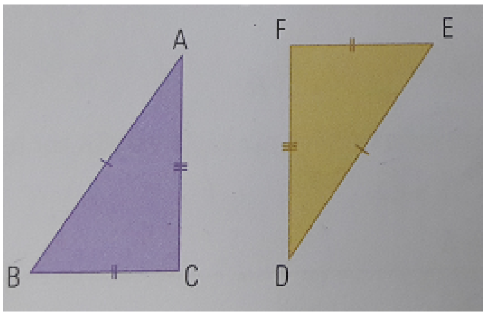


Fonte: Acervo da Editora FTD

Figura 3.7: Triângulos congruentes pelo caso ALA

Caso Lado, Lado, Lado (LLL)

Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes congruentes então são triângulos congruentes.

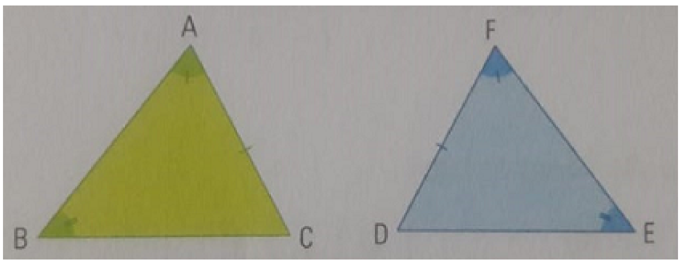


Fonte: Acervo da Editora FTD

Figura 3.8: Triângulos congruentes pelo caso LLL

Caso Lado, Ângulo, Ângulo Oposto (LAA$_o$)

Sejam ABC e FED dois triângulos, se $\overline{AC} \cong \overline{FD}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{A} \cong \hat{F}$ então os triângulos são congruentes.



Fonte: Acervo da Editora FTD

Figura 3.9: Triângulos congruentes pelo caso LAA$_o$

Praticando o conceito

Para que o aluno entenda a ideia de congruência de triângulos, construa pares de triângulos congruentes de diferentes tamanhos e classificações quanto às medidas de lados e ângulos. Deixe claro que ele pode usar tanto a régua quanto o transferidor adaptados para determinar tais medidas. Como, nesta atividade, a construção precisa ser firme, opte por utilizar palitos e canudos. Faça construções cujas dimensões possam ser obtidas através *das marcações presentes na régua e no transferidor adaptados. Peça para ele identificar os triângulos congruentes levando em consideração todas essas informações conquistadas.*

É provável e natural que, a princípio, o aluno queira determinar as congruências sobrepondo um recorte ao outro. Explique que a ideia é justamente essa, porém nem sempre será possível deslocar os objetos e daí, a importância dos Casos de Congruência.

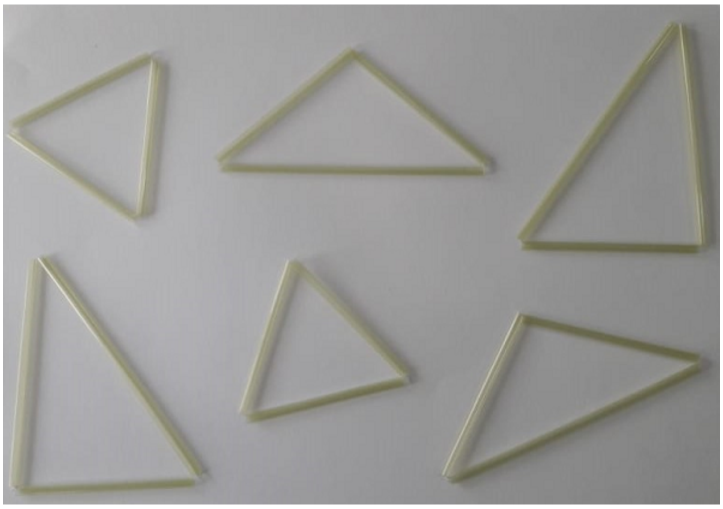


Figura 3.10: Pares de triângulos congruentes, dispostos aleatoriamente

A seguir, apresentamos resultados relacionados aos ângulos de um triângulo.

Proposição 3.1.3 *Em um triângulo isósceles, os ângulos que têm um dos lados contendo a base são congruentes.*

Demonstração.
Considere o triângulo ABC com $AB = AC$.

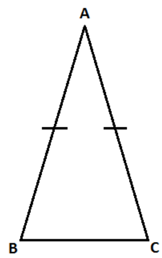


Figura 3.11: Triângulo isósceles ABC

Logo, os triângulos ABC e ACB são congruentes pelo caso LAL. Assim, $\hat{B} \cong \hat{C}$. ■

Teorema 3.1.4 ***(Teorema do Ângulo Externo)*** *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração.
Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overrightarrow{BC}$ marque um ponto D tal que C esteja entre B e D.

Devemos provar que $m\widehat{ACD} > m\hat{A}$ e $m\widehat{ACD} > m\hat{B}$. Para isto, considere o ponto médio E do segmento AC.

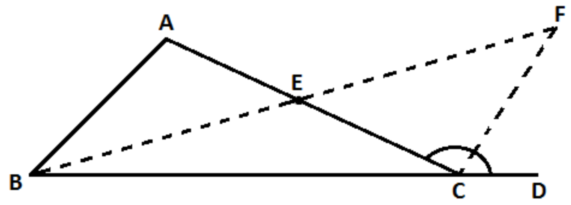


Figura 3.12: Triângulo ABC com pontos D, E e F explícitos

Na semirreta $\overrightarrow{BE}$, marque um ponto F tal que $BE = EF$. Trace $\overline{CF}$. Compare os triângulos BEA e FEC. Como $AE = CE$ (E é ponto médio de $\overline{AB}$), $BE = FE$ (por construção) e $\widehat{BEA} \cong \widehat{FEC}$ (ângulos opostos pelo vértice), segue que $\triangle BEA \cong \triangle FEC$ (Caso LAL). Logo, $\hat{A} \cong E\hat{C}F$.

Como $\overrightarrow{CF}$ divide o ângulo $\widehat{ACD}$ então $m\widehat{ECF} < m\widehat{ACD}$. Portanto, $m\widehat{ACD} > m\hat{A}$.

Analogamente mostramos que $m\widehat{ACD} > m\hat{B}$. ■

Corolário 3.1.5 *Se duas retas cortadas por uma transversal têm ângulos alternos internos congruentes então elas são paralelas.*

Demonstração.

Sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal nos pontos P e Q, respectivamente. Considere $\hat{a}$ e $\hat{b}$ os ângulos alternos internos congruentes.

Suponhamos que r e s se interseccionam em algum ponto T.

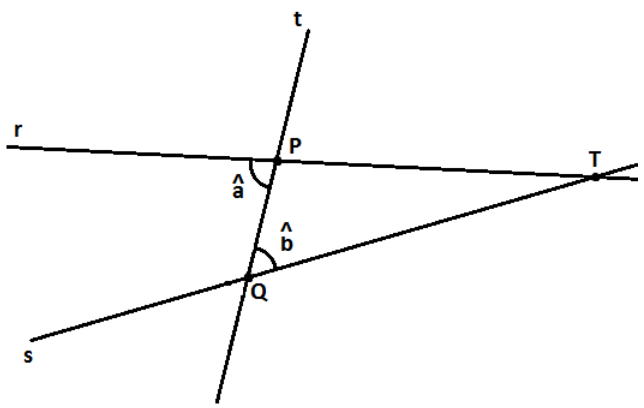


Figura 3.13: Retas r e s cortadas por transversal

Logo, elas formam um triângulo TQP do qual $\hat{a}$ representa um ângulo externo e $\hat{b}$ um ângulo interno não adjacente a ele. Pelo Teorema do Ângulo Externo temos que $m\hat{a} > m\hat{b}$, o que contradiz a hipótese.

Portanto, r e s são paralelas. ■

Teorema 3.1.6 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180.*

Demonstração.

Dado o $\triangle ABC$, seja r a reta paralela ao lado $\overline{BC}$ e passando pelo vértice A. Considere os pontos D e E em r com A entre D e E. Note que $\widehat{DAB}$ e $\widehat{EAB}$ formam um ângulo raso.

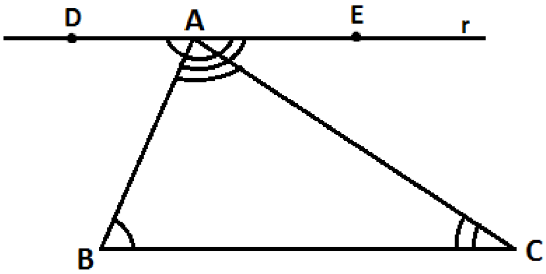


Figura 3.14: Triângulo ABC e reta r

Utilizando o Postulado da Adição de Ângulos temos $m\widehat{DAB} + m\hat{A} + m\widehat{EAC} = 180$.

Como a reta AB é transversal à reta BC e à reta r, pelo corolário anterior, temos que $\hat{B} \cong \widehat{DAB}$. Analogamente mostramos que $\hat{C} \cong \widehat{EAC}$.

Logo, $m\widehat{B} + m\widehat{A} + m\widehat{C} = m\widehat{DAB} + m\widehat{A} + m\widehat{EAC} = 180$.$\blacksquare$

A seguir, faremos a primeira demonstração na prática de um resultado do conteúdo. Como queremos adaptada a um deficiente visual, a primeira dificuldade é obter a reta paralela r a um dos lados. Neste momento, fazemos uma construção e só mencionamos o resultado matemático que a justifica, que é o Teorema da Base Média, que usa conceitos ainda não vistos no 8º ano.

Demonstração na prática:

Nesta atividade, será essencial a mediação do professor para que o aluno desenvolva alguns dos procedimentos da demonstração.

Construa, utilizando folha sulfite, um triângulo qualquer e entregue-o ao aluno. Cole um material de textura distinta em cada vértice (pegando, um pouco, o interior deste triângulo). Escolha dois lados do triângulo e peça para o aluno, com o auxílio da régua adaptada, determinar suas medidas, para obter o ponto médio de cada um destes lados. Feito isso, o professor vai traçar o segmento passando por estes dois pontos usando cola colorida, para que o aluno possa sentir.

É possível mostrar que a reta que contém o segmento construído é paralela a reta que contém o terceiro lado do triângulo, que não foi utilizado (Teorema da Base Média) e dobrando o triângulo neste segmento obtem-se a reta r desejada.

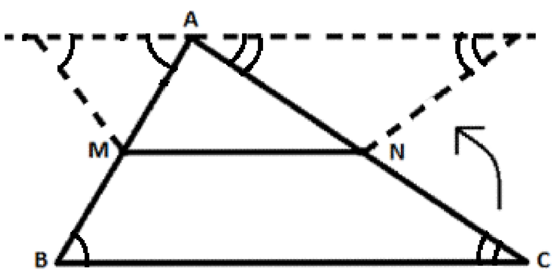


Figura 3.15: Dobradura da demonstração prática

Com a dobradura, o aluno poderá sentir que formaram-se dois triângulos isósceles, cada um deles com os ângulos do triângulo original. Pela Proposição 3.1.3, os ângulos referentes *a base de cada triângulo isósceles são congruentes e com isso o professor pode colar neste ângulo o mesmo material utilizado no seu ângulo congruente.*

Desdobre o papel e faça o aluno sentir que estes ângulos que acabamos de colar o material formam com os originais, ângulos alternos internos das retas mencionadas.

Para finalizar, o aluno poderá sentir que as três colagens com texturas distintas, associadas às medidas dos ângulos do triângulo original, formam um ângulo raso, como era desejado.

Sugestão: *Se possível, faça a atividade antes de expor o Teorema 3.1.6 ao aluno.*

3.2 Quadriláteros

Um quadrilátero $ABCD$ possui quatro vértices (A, B, C e D), quatro lados ($\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$) e quatro ângulos ($\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ e $\widehat{DAB}$).

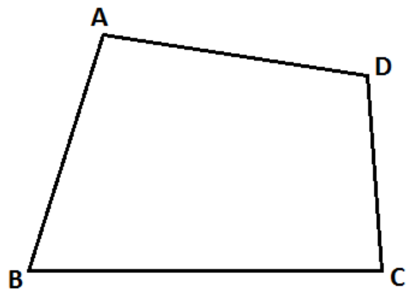


Figura 3.16: Quadrilátero $ABCD$

Nomenclatura: Em um quadrilátero, dois lados que não se interseccionam são chamados de **lados opostos** e dois ângulos que não possuam lado em comum são chamados de **ângulos opostos**. Caso contrário serão chamados **lados** e **ângulos consecutivos**, respectivamente.

Chamamos de **diagonal** o segmento que une dois vértices não consecutivos em um polígono qualquer. Note que um quadrilátero possui duas diagonais.

Vamos estudar, a partir de agora, quadriláteros especiais.

Definição 3.2.1 ***Paralelogramo*** *é um quadrilátero em que os pares de lados opostos são paralelos, ou seja, as retas que os contém são paralelas.*

Praticando o conceito

Construa, utilizando palitos de sorvete fixados em folha sulfite, alguns quadriláteros, entre eles paralelogramos de diferentes tamanhos e formas. Entregue-os ao aluno e peça para identificar os lados opostos em cada um deles. Questione se estes lados opostos são paralelos ou não, podendo assim concluir se são paralelogramos ou não. Aqui pode ser usado canudos (ou junção deles) para sobrepor ao lados significando as retas que contém os lados opostos, para a verificação se ocorre ou não a interseção.

Incentive o uso da régua e do transferidor adaptado para determinar as medidas dos lados e dos ângulos. Com estes dados, faça a comparação entre quadriláteros quaisquer e paralelogramos, assim como entre os próprios tipos de paralelogramos. Espera-se que *ele perceba que os paralelogramos possuem lados e ângulos opostos congruentes, o que não ocorre com quadriláteros quaisquer.*

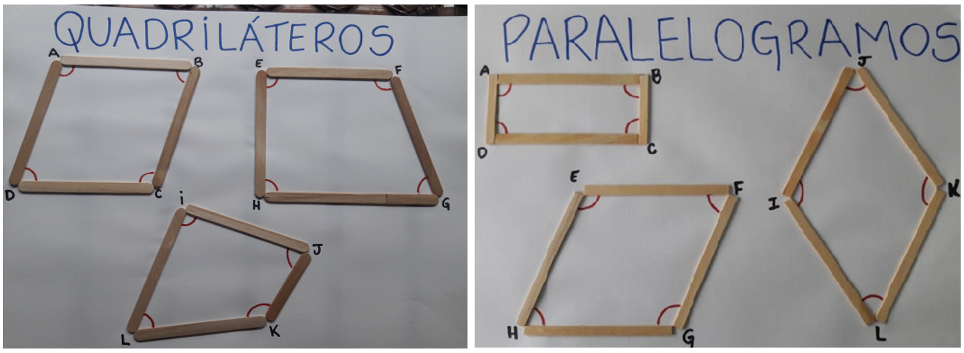


Figura 3.17: Exemplos de quadriláteros quaisquer e paralelogramos

Teorema 3.2.2 *Cada diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes.*

Demonstração.
Seja $ABCD$ um paralelogramo. Considerando a diagonal $\overline{AC}$, mostremos que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

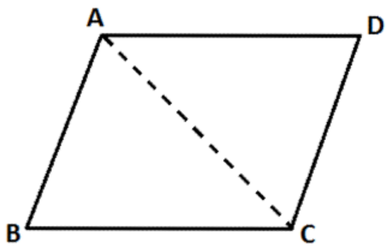


Figura 3.18: Paralelogramo $ABCD$

Por definição, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Pelo Teorema 2.2.17, $\widehat{BAC} \cong \widehat{ACD}$, pois são alternos internos de $\overline{AC}$ em relação a $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$.

Analogamente, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ e daí, $\widehat{CAD} \cong \widehat{ACB}$.

Como, além disso, $\overline{AC}$ é comum aos triângulos ABC e CDA então, pelo caso ALA, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

De maneira análoga, considerando a diagonal $\overline{BD}$ mostra-se que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.■

Teorema 3.2.3 *Em um paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes.*

Demonstração.
Seja $ABCD$ um paralelogramo. Queremos provar que:
(I) $\widehat{ABC} \cong \widehat{CDA}$ e $\widehat{DAB} \cong \widehat{BCD}$;
(II) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

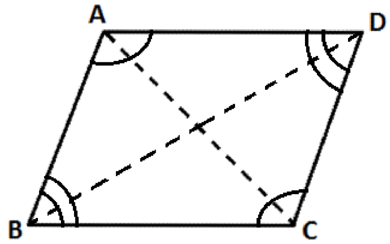


Figura 3.19: Paralelogramo $ABCD$ com diagonais e ângulos explícitos

Pelo teorema anterior, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ e, com isso, $\widehat{ABC} \cong \widehat{CDA}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Novamente pelo teorema anterior, $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ e, assim, $\widehat{DAB} \cong \widehat{BCD}$.$\blacksquare$

Observação 3.2.4 *Sejam r e s retas paralelas e considere $P, P' \in r$ e $Q, Q' \in s$ tais que $\overline{PQ} \perp r$ (e também $\overline{PQ} \perp s$) e $\overline{P'Q'} \perp r$ (e também $\overline{P'Q'} \perp s$). Logo, $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$, pois $PP'Q'Q$ é um paralelogramo e basta usar o Teorema 3.2.3.*

Definição 3.2.5 *Fixando um lado do paralelogramo, que chamaremos de* ***base****, definimos a* ***altura*** *de um paralelogramo (relativa à base fixada) como a medida de qualquer segmento com extremidades na base e em seu lado oposto, sendo perpendicular a eles.*

Definição 3.2.6 ***i)*** *Um* ***losango*** *é um paralelogramo cujos lados são congruentes.*

ii) *Um* ***retângulo*** *é um paralelogramo cujos ângulos são retos.*

iii) *Um* ***quadrado*** *é um paralelogramo cujos lados são congruentes e cujos ângulos são retos.*

Praticando o conceito

Faça, utilizando palito de sorvete, os paralelogramos: losangos, retângulos e quadrados. Eles já podem ter sido feitos para serem usados no "Praticando o Conceito" anterior. Caso não, peça para o aluno fazer as medições de lados e ângulos opostos. O aluno neste momento só ficará com paralelogramos deste tipo. Agora o aluno deverá analisar mais minuciosamente cada um deles e verificar que se há outras características interessantes entre eles, chegando às definições anteriores. Questione o aluno, principalmente, a respeito da definição de quadrado, verificando se ele percebeu que o quadrado é um caso particular de losango e retângulo.

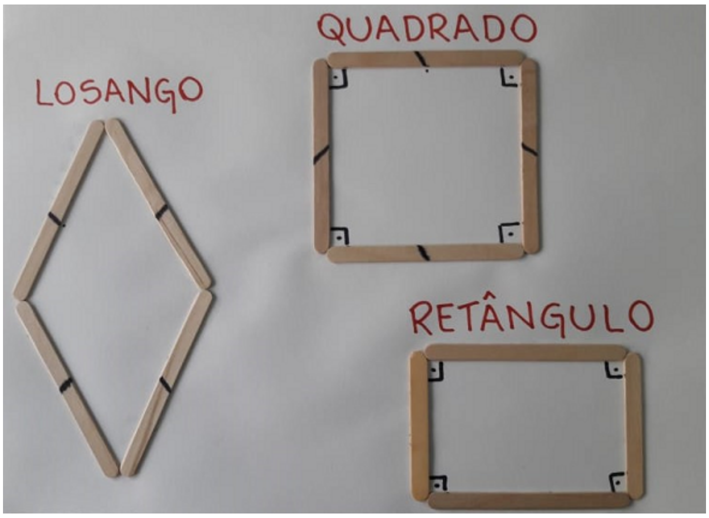


Figura 3.20: Casos particulares de paralelogramos

Teorema 3.2.7 *Num losango, cada diagonal é bissetriz de seus ângulos opostos.*

Demonstração.

Consideremos o losango $ABCD$. Vamos mostrar que a diagonal $\overline{AC}$ é a bissetriz dos ângulos $\widehat{DAB}$ e $\widehat{BCD}$.

De fato, como num losango todos os lados são congruentes, os triângulos ABC e ADC são congruentes (caso LLL). Logo, os ângulos $\widehat{DAC}$ e $\widehat{CAB}$ são congruentes, assim como os ângulos $\widehat{BCA}$ e $\widehat{ACD}$.

Logo, $\overline{AC}$ é bissetriz dos ângulos $\widehat{DAB}$ e $\widehat{BCD}$.

O argumento é análogo para a diagonal $\overline{BD}$.■

Teorema 3.2.8 *Em um losango, as diagonais são perpendiculares entre si e se bisseccionam.*

Demonstração.

Consideremos o losango $ABCD$. Seja M o ponto onde as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam.

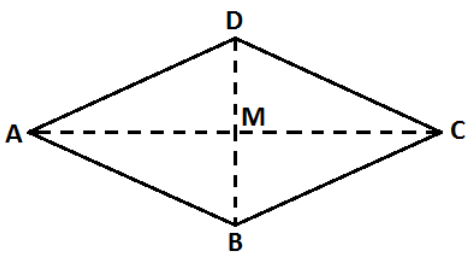


Figura 3.21: Losango $ABCD$

Examinemos os triângulos DMA e DMC.

Como, pelo teorema anterior, $\overline{BD}$ é bissetriz do ângulo de vértice em D, temos que $\widehat{MDA}$ e $\widehat{MDC}$ são congruentes.

Por outro lado, $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ são congruentes, pois são lados do losango. Além disso, $\overline{DM}$ é lado comum. Logo, pelo caso LAL, $\triangle DMA \cong \triangle DMC$. Portanto, $\overline{AM}$ e $\overline{MC}$ são congruentes, ou seja, M é o ponto médio de $\overline{AC}$ e $\widehat{DMA} \cong \widehat{DMC}$.

Como os ângulos $\widehat{DMA}$ e $\widehat{DMC}$ são suplementares, concluímos que ambos são retos. Assim, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Analisando os triângulos BMC e DMC e, utilizando raciocínio análogo, concluímos que os dois triângulos são congruentes e M também é ponto médio de $\overline{BD}$, o que completa a demonstração.■

Definição 3.2.9 ***Trapézio*** *é um quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos.*

Utilizando a Observação 3.2.4, como para paralelogramo, podemos definir o conceito de base e altura de um trapézio.

Definição 3.2.10 *Chamamos de* **bases** *de um trapézio os seus lados opostos paralelos e sua* **altura** *como sendo a medida de qualquer segmento com extremidades nas bases e que seja perpendicular a elas.*

De acordo com algumas características, um trapézio pode ser classificado em:
i) Retângulo: Trapézio que possui um dos lados não paralelos perpendicular às bases.
ii) Escaleno: Trapézio que tem os lados não paralelos com medidas diferentes.
iii) Isósceles: Trapézio que tem os lados não paralelos com medidas iguais.

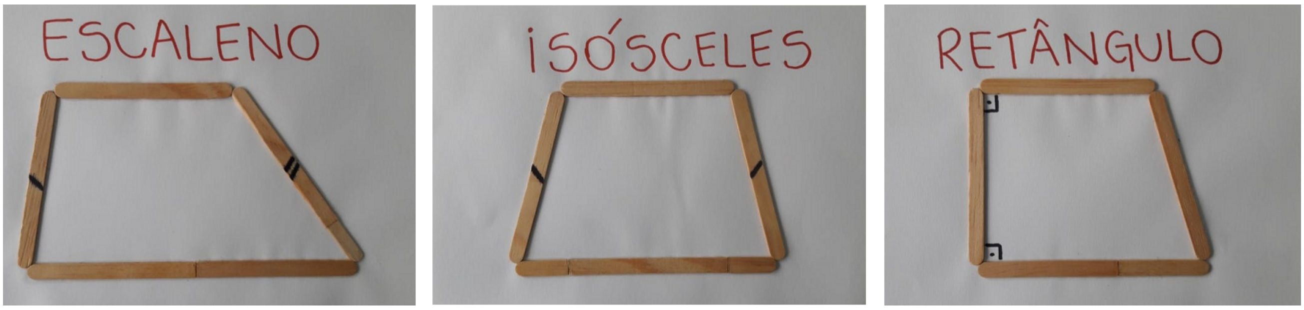


Figura 3.22: Classificação dos trapézios

Praticando o conceito
Construa, novamente com palitos de sorvete, trapézios distintos (que não sejam paralelogramos) e entregue-os ao aluno. Estes também podem ter sido construídos no primeiro "Praticando o Conceito". Se isso acontecer, ele já vai ter percebido que não são paralelogramos e que só um par de lados opostos são paralelos. Somente utilizando o tato, veja se o aluno consegue identificar as bases e classificar os trapézios. Em seguida, com o auxílio de régua e transferidor adaptados, peça para ele determinar as medidas de lados e ângulos de cada um dos trapézios para verificar a classificação obtida.

Corolário 3.2.11 *No trapézio isósceles $ABCD$, com bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tem-se $\hat{A} \cong \hat{B}$ e $\hat{C} \cong \hat{D}$.*

Demonstração.
Por definição de trapézio isósceles temos que $AD = BC$.
Trace os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ de modo que sejam perpendiculares à base $\overline{CD}$.

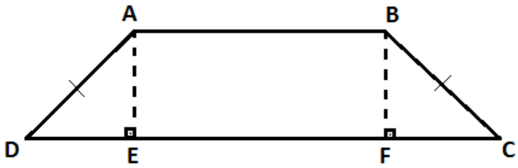


Figura 3.23: Trapézio isósceles $ABCD$

Como AE e BF representam a altura do trapézio então $AE = BF$.

Note que os triângulos ADE e BCF são triângulos retângulos e, pelo Teorema de Pitágoras, $DE = CF$. Logo, pelo Caso LLL, $\triangle ADE \cong \triangle BCF$. Daí, $\hat{C} \cong \hat{D}$.

Observe que $m\hat{A} = m\widehat{DAE} + 90$ e $m\hat{B} = m\widehat{CBF} + 90$.

Pela congruência dos triângulos anterior temos também que $\widehat{DAE} \cong \widehat{CBF}$. Logo, $\hat{A} \cong \hat{B}$. ■

3.3 Situação Problema

Para finalizar o capítulo vamos propor uma situação problema que contextualiza os conteúdos apresentados.

Materiais necessários:

Placa de papelão;
Barbante;
Cola colorida;
Régua adaptada.

Conteúdos abordados:
Nomenclatura de Polígonos;
Escala;
Perímetro.

Considerações adicionais:
A situação problema utiliza uma planta baixa (também chamada de projeto) do quarto de uma casa, ou seja, um desenho técnico que pode ser considerado uma espécie de diagrama. Colocaremos móveis neste projeto que, por ser plano, serão representados por polígonos.

As medidas do projeto obedecem a uma certa escala de redução que denotamos por $1 : a$, significando que cada 1 unidade da planta baixa corresponde "a" unidades do tamanho real. Quando a escala não possuir a medida indicada (cm, m, km) em sua notação, significa, por convenção, que ela está em centímetros. Caso contrário, essa unidade de medida precisa ser apontada.

Situação Problema:
Euclidiana é arquiteta e irá redecorar sua casa, começando pelo quarto de sua filha Analítica. A figura seguinte ilustra o projeto desse novo quarto.

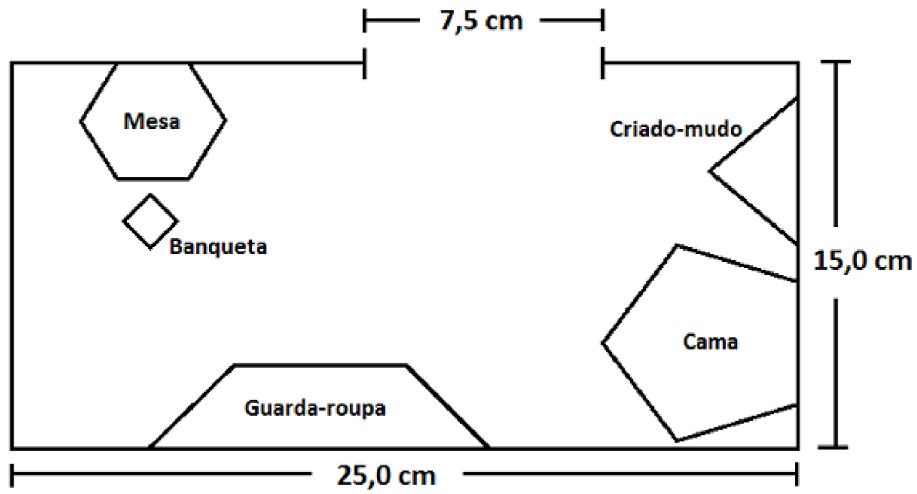


Figura 3.24: Projeto do novo quarto de Analítica

a) Determine qual o polígono da face superior de cada um dos móveis do novo quarto.
b) Sabendo que as dimensões do projeto estão em centímetros e que este foi construído na proporção 1 : 20, determine as dimensões reais da face superior de cada móvel do quarto, em metros.
c) Analítica gostaria de decorar seu quarto novo com uma faixa de papel de parede colorida. Sua mãe, Euclidiana, atendeu ao seu pedido e comprou um rolo deste papel contendo 10m de faixa. Sabendo que será colocado apenas uma faixa em cada parede do quarto, o rolo comprado por Euclidiana será suficiente? Justifique.

Resolução da Situação Problema

Construa o projeto com as informações contidas no enunciado. Para o ambiente do quarto, utilize uma placa de papelão e, para o contorno dos móveis, barbante. Para indicar a abertura da porta, passe cola colorida em toda a extensão da placa de papelão, exceto na parte que representa a porta. Explique ao aluno o significado de cada um desses detalhes ao entregar o projeto a ele.

Lembramos que a escolha dos polígonos, assim como a medida dos móveis fica a critério do professor ao montar a atividade. Use, para as medidas, números inteiros ou com uma casa decimal, assim o aluno poderá determinar esses valores mais facilmente.

Peça ao aluno que, usando o tato, sinta cada detalhe do projeto como, por exemplo, o contorno dos móveis. Relembre, durante a atividade, as definições que envolvem polígonos em geral e específicos, como triângulos e quadriláteros, assim como as características de cada um deles, se já encontrou essas formas no cotidiano, etc.

Para o *item a* utilizamos, como sugere a Figura 3.24, triângulo (criado-mudo), pentágono (cama), trapézio (guarda-roupa), losango (banqueta) e hexágono (mesa). Peça ao aluno que analise a placa de papelão representando o projeto com calma, atentando-se às particularidades de cada contorno (polígono) e o número de lados que formam cada um deles para que, assim, consiga responder o item a.

No *item b* temos uma escala reduzida, isto é, quando o tamanho real é maior do que a região representada. Faça uma pausa neste momento para explicar e conversar com o aluno sobre escala, aproveite para relacionar Matemática com Geografia, afinal ele já deve ter se deparado com esse assunto no estudo de mapas. Observamos que estas dimensões devem ser tomadas na mesma unidade de medida e para isto, talvez seja necessário fazer algumas conversões, certifique-se de que o aluno possua esse conhecimento prévio, caso contrário, retome com ele. A resposta deste item depende das dimensões tomadas pelo professor em relação a cada objeto, mas, de forma geral, deverá ser calculada através do produto entre o valor das dimensões do projeto e a proporção da escala (fator escalar), lembrando que o resultado será dado na mesma unidade de medida do projeto (centímetros).

Visando o *item c*, entregue ao aluno a régua adaptada. Leia a questão para ele, questione-o sobre como resolver o item e pergunte se há algum conceito matemático por trás disso. Verifique se o aluno conseguiu associar a situação e o questionamento do exercício com o conceito de perímetro. Tomando as medidas apresentadas na Figura 3.24, deseja-se que a conclusão seja de que não será possível decorar o quarto de Analítica com 10m de faixa, pois o perímetro do ambiente em questão é maior do que o comprimento da faixa. Se houver alterações quanto às medidas do projeto, o exercício pode conter uma resposta diferente da apresentada aqui, aproveite para instigar o aluno com essas novas situações dando outros exemplos de polígonos para os móveis e medidas para seus lados, mesmo que seja sem o material concreto modificado.

Capítulo 4

Áreas

Neste capítulo estudamos e obtemos as fórmulas para o cálculo de áreas das regiões determinadas pelos polígonos vistos no capítulo anterior. Usamos material concreto e uma situação problema para melhor entendimento e aprendizado dos alunos em questão.

Materiais necessários para desenvolvimento das atividades:

Placa de papelão (material firme);
Folha em E.V.A.;
Velcro.

Vamos iniciar apresentando o conceito de área associado a polígonos convexos em geral e depois, para a obtenção das fórmulas, consideramos os casos específicos. Lembrando que a construção da teoria é axiomática e dedutiva.

Definição 4.0.1 *Seja $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono convexo. Dizemos que P é um **ponto interior** de $A_1A_2\ldots A_n$ se ele é ponto interior de todo ângulo $\hat{A}_i$ deste polígono. O conjunto formado por todos os pontos interiores do polígono é chamado de **interior** do polígono. A união do polígono e seu interior é chamado de **região poligonal** associada a ele.*

Postulado 4.0.2 *A cada região poligonal corresponde um único número real positivo.*

Definição 4.0.3 *A **área** de uma região poligonal é o número real que lhe corresponde pelo postulado anterior.*

Notação: $Area(S)$ ou A_S, onde S é uma região poligonal (ou o polígono associado).

Postulado 4.0.4 *Se R e S são duas regiões poligonais, com $R \subset S$ então a área de R será menor do que a área de S.*

Postulado 4.0.5 *Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que, duas a duas, não tenham pontos interiores em comum então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.*

Postulado 4.0.6 *Se dois polígonos são congruentes então suas regiões poligonais têm a mesma área.*

Postulado 4.0.7 *A área de uma região determinada por um quadrado de lado medindo a é a^2.*

A partir de agora, vamos obter fórmulas para áreas de regiões poligonais específicas. Por simplicidade, o que é usual, vamos nos referir à área de um polígono significando a área da região poligonal determinada por ele.

Proposição 4.0.8 *Um retângulo de lados com medidas a e b tem área ab.*

Demonstração.
Consideremos um retângulo $ABCD$ com $AB = a$ e $BC = b$.

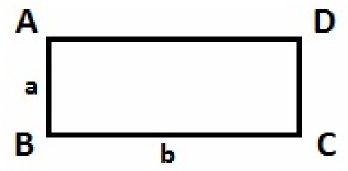


Figura 4.1: Retângulo $ABCD$

A partir deste retângulo construiremos um quadrado $AEFG$ de lados medindo $a + b$, como sugere a figura a seguir.

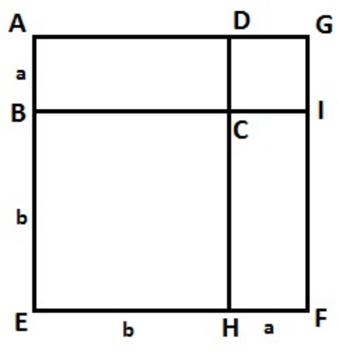


Figura 4.2: Quadrado $AEFG$

Note que, com essa construção, obtemos dois retângulos de lados medindo a e b, um quadrado de lados medindo b e outro quadrado de lados medindo a.

Claramente $ABCD \cong CHFI$, pois ambos são retângulos de lados medindo a e b. Assim, pelo Postulado 4.0.6, eles têm a mesma área, ou seja, $A_{ABCD} = A_{CHFI}$.

Observe que $AEFG$ é formado pela união de $ABCD$, $BEHC$, $CHFI$ e $DCIG$. Logo, pelo Postulado 4.0.5,

$$A_{AEFG} = A_{ABCD} + A_{BEHC} + A_{CHFI} + A_{DCIG}.$$

Utilizando o Postulado 4.0.7, temos

$$(a+b)^2 = A_{ABCD} + b^2 + A_{ABCD} + a^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2A_{ABCD} + a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab = 2A_{ABCD}.$$

Portanto, $A_{ABCD} = ab$. ■

Demonstração na prática: *Faça, em E.V.A, a construção de duas regiões retangulares obtidas de dois retângulos congruentes. A partir disso, também em E.V.A., faça a construção de dois quadrados (considerando o seu interior), usando, em cada um, uma das medidas distintas dos lados do retângulo já construído. Fixe uma das regiões retangulares na placa de papelão e cole uma das partes do velcro em cada uma das regiões poligonais restantes. Cole as outras partes do velcro na placa. Fique atento quanto à posição do velcro ao colar tanto no papelão quanto nas regiões poligonais, pois ao juntar cada parte do velcro, os polígonos precisam formar o quadrado da demonstração. Entregue a placa de papelão para o aluno e peça para ele identificar a região poligonal colada. Explique que o objetivo da atividade é calcular a área da região identificada através da área de regiões quadrangulares, já conhecida do aluno. Ajude-o a encaixar as regiões poligonais nos seus devidos lugares, baseando-se pelas medidas dos lados. Ao finalizar, questione-o sobre o que foi feito, trabalhando com o fato de que a área da região maior é a soma das áreas das regiões menores, quando bem encaixadas. Para fixar o conceito, dê exemplos (numéricos ou com material concreto) de regiões retangulares e peça para ele calcular as respectivas áreas.*

Figura 4.3: Material concreto para demonstração da área de retângulo

Proposição 4.0.9 *A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah.*

Demonstração.

Considere o paralelogramo $ABCD$ a seguir.

Traçando a altura relativa ao vértice C obtemos o ponto F (interseção com a reta AB) e, assim, o $\triangle BCF$. Do mesmo modo, traçando a altura relativa ao vértice D obtemos o ponto E (interseção com a reta AB) e, assim, o $\triangle ADE$.

Note que $DCFE$ é um paralelogramo e, pelo Teorema 3.2.3, $DE = CF$. Pelo mesmo teorema, como $ABCD$ é um paralelogramo, $AD = BC$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, $AE = BF$.

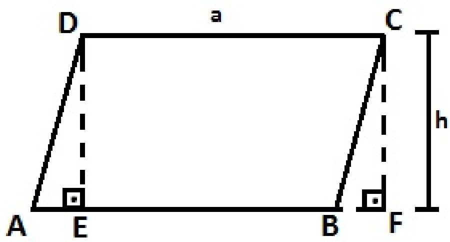


Figura 4.4: Paralelogramo $ABCD$

Assim, pelo caso LLL, $\triangle ADE \cong \triangle BCF$. Daí, pelo Postulado 4.0.6, $A_{ADE} = A_{BCF}$.
Assim, pelo Postulado 4.0.5,

$$A_{ABCD} = A_{ADE} + A_{EBCD} = A_{BCF} + A_{EBCD} = A_{EFCD}.$$

Como $EFCD$ é um retângulo de altura h e base EF, pela Proposição 4.0.8, $A_{EFCD} = EF \cdot h$.

Note que $EF = EB + BF = EB + AE = AB = a$.

Logo, $A_{ABCD} = A_{EFCD} = EF \cdot h = ah$. ■

Demonstração na prática: *Faça a construção, em E.V.A., de um paralelogramo $ABCD$ (considerando seu interior) qualquer. Recorte a região triangular de vértices A, D e E, sendo E o ponto de encontro do segmento $\overline{CD}$ com a perpendicular passando por D. Cole uma das partes do velcro atrás da região triangular. Fixe, com cola, na placa de papelão a outra parte do velcro e a região do quadrilátero restante. Cole um pedaço de velcro igual ao descrito acima no papelão ao lado de $\overline{BC}$, de modo que seja possível encaixar o triângulo ADE formando o retângulo da demonstração. Entregue a placa de papelão para o aluno, com a região do paralelogramo completo, e peça para ele identificar a região poligonal colada. Explique que o objetivo da atividade é calcular a área da região identificada através da área de uma região retangular. Ajude-o a desencaixar e encaixar a região triangular "móvel" nas posições possíveis. Ao finalizar, questione-o sobre o que foi feito, trabalhando com o fato de que a área do paralelogramo (incluindo seu interior) é a mesma área de uma região retangular, se mantidas as medidas de base e altura. Para fixar o conceito, dê exemplos (numéricos ou com material concreto) de regiões com formato de paralelogramo e peça para o aluno calcular as respectivas áreas.*

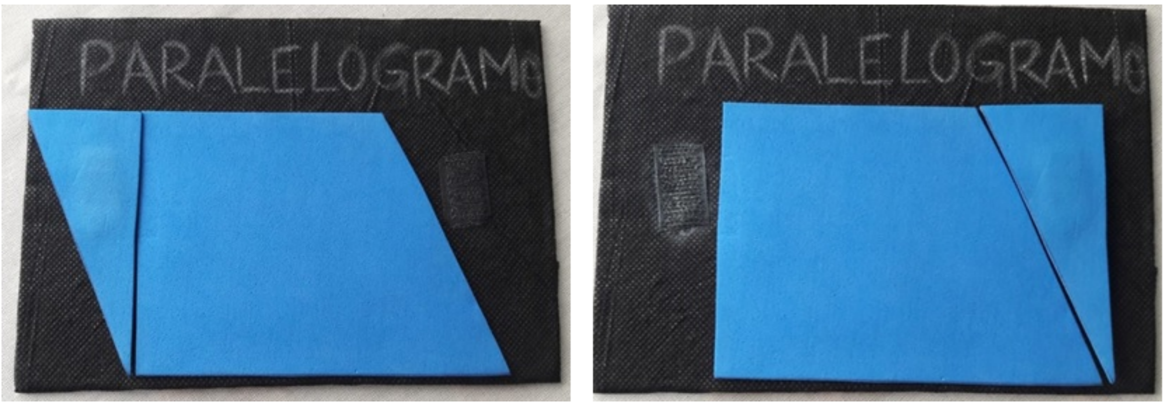


Figura 4.5: Material concreto para demonstração da área de paralelogramo

Proposição 4.0.10 *Seja ABC um triângulo com $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ e alturas h_a, h_b e h_c respectivamente relativas aos lados medindo a, b e c. Então,*

$$A_{ABC} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Demonstração.

Mostraremos que $A_{ABC} = \dfrac{ah_a}{2}$. As demonstrações das demais igualdades são análogas.

Trace por C uma reta paralela a $\overline{AB}$ e, por A, uma reta paralela a $\overline{BC}$. Denote por D o ponto de interseção entre essas duas retas traçadas.

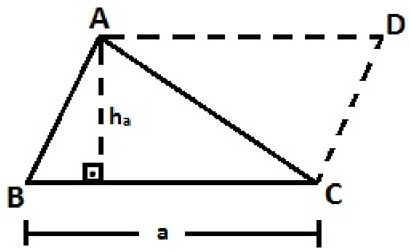


Figura 4.6: Construção do paralelogramo $ABCD$ a partir do $\triangle ABC$

Note que $ABCD$ é um paralelogramo de base a e altura h_a. Pela Proposição 3.2.2, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

Assim, pelo Postulado 4.0.6, $A_{ABC} = A_{CDA}$.

Daí, pelo Postulado 4.0.5, $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{CDA} = 2A_{ABC}$

Pela Proposição 4.0.9, $A_{ABCD} = ah_a$ e, portanto, $A_{ABC} = \frac{ah_a}{2}$. ■

Demonstração na prática: *Faça a construção de duas regiões triangulares congruentes em E.V.A.. Fixe uma dessas regiões na placa de papelão. Cole na região triangular solta uma parte do velcro e faça o mesmo com a outra região, porém colando no papelão. Fique atento, pois ao juntar as regiões triangulares, conforme a demonstração acima, será preciso formar um paralelogramo (considerando seu interior). Entregue a placa de papelão para o aluno e peça para ele identificar a região poligonal colada. Explique que o objetivo da atividade é calcular a área da região identificada através da área de um paralelogramo (contendo seu interior). Ajude-o a desencaixar e encaixar a região triangular "móvel",* *formando o paralelogramo (e seu interior). Ao finalizar, questione-o sobre o que foi feito, trabalhando com o fato de que a área da região triangular é a metade da área da região de um paralelogramo com as mesmas medidas de base e altura. Para fixar o conceito, dê exemplos (numéricos ou com material concreto) de regiões com formato triangular e peça para o aluno calcular as respectivas áreas.*

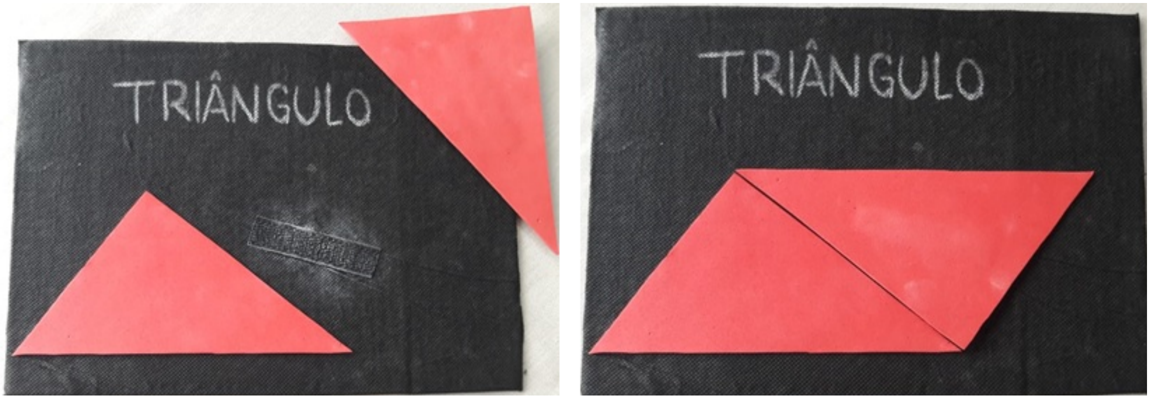


Figura 4.7: Material concreto para demonstração da área de triângulo

Proposição 4.0.11 *Se $ABCD$ é um trapézio de bases $AB = a$, $CD = b$ e altura h então*

$$A_{ABCD} = \frac{(a+b)h}{2}.$$

Demonstração.
No trapézio $ABCD$, prolongue, por B, o lado $\overline{AB}$ até um ponto E de modo que $BE = b$. Trace por E uma reta paralela a $\overline{AD}$ e, por C, uma reta paralela a $\overline{BE}$. Denote por F o ponto de interseção entre essas duas retas traçadas.

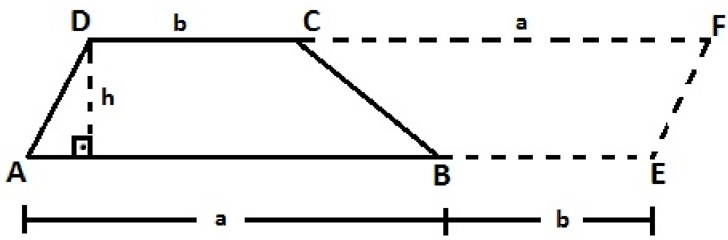


Figura 4.8: Construção do paralelogramo $AEFD$ a partir do trapézio $ABCD$

Como $AEFD$ é um paralelogramo, pelo Teorema 3.2.3, $AE = DF$ e, deste modo, $CF = a$. Além disso, pela Proposição 3.2.2, $ABCD \cong EBCF$. Assim, pelo Postulado 4.0.6, $A_{ABCD} = A_{EBCF}$ e, pelo Postulado 4.0.5,

$$A_{AEFD} = A_{ABCD} + A_{EBCF} = 2A_{ABCD}.$$

Pela Proposição 4.0.9, $A_{AEFD} = (a+b)h$ e, com isso, $A_{ABCD} = \dfrac{(a+b)h}{2}$. ■

Demonstração na prática: *Faça a construção de duas regiões trapezoidais congruentes em E.V.A.. Fixe uma dessas regiões na placa de papelão. Cole na região trapezoidal solta uma parte do velcro e faça o mesmo com a outra região, porém colando no papelão. Fique atento, pois ao juntar as regiões trapezoidais, conforme a demonstração acima, será preciso formar um paralelogramo (considerando seu interior). Entregue a placa de papelão para o aluno e peça para ele identificar a região poligonal colada. Explique que o objetivo da atividade é calcular a área da região identificada através da área de um paralelogramo (contendo seu interior). Ajude-o a desencaixar e encaixar a região trapezoidal "móvel". Ao finalizar, questione-o sobre o que foi feito, trabalhando com a relação entre as áreas das regiões de trapézio e paralelogramo. Para fixar o conceito, dê exemplos (numéricos ou com material concreto) de regiões com formato trapezoidal e peça para o aluno calcular as respectivas áreas.*

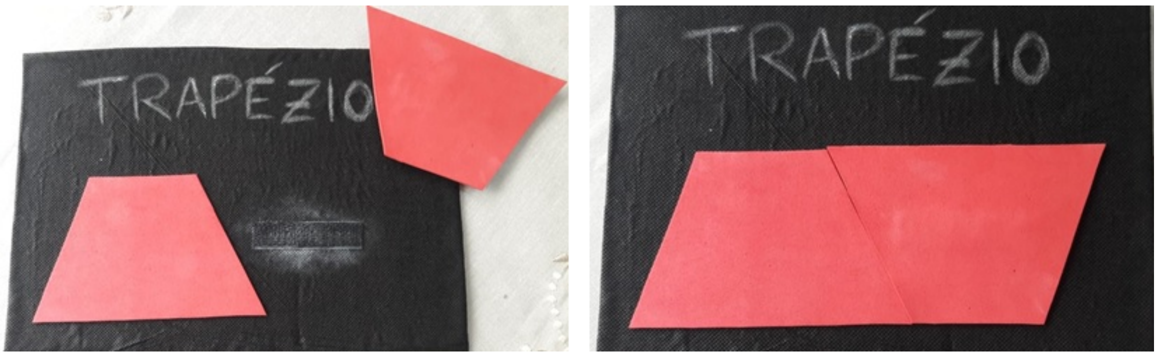


Figura 4.9: Material concreto para demonstração da área de trapézio

Proposição 4.0.12 *Se $ABCD$ é um losango então* $A_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$.

Demonstração.

Denote por M o ponto de interseção entre as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Pelo Teorema 3.2.7, M é ponto médio das diagonais.

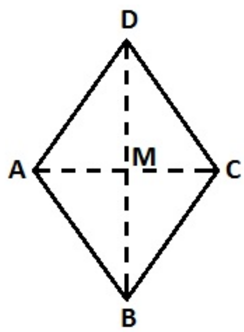


Figura 4.10: Losango $ABCD$

Note que o losango $ABCD$ é formado por dois triângulos: $\triangle ACD$ e $\triangle ACB$. Pelo caso LLL, $\triangle ACD \cong \triangle ACB$. Assim, pelo Postulado 4.0.6, $A_{ACD} = A_{ACB}$.

Como $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ representam as diagonais do losango, pelo Teorema 3.2.7, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Daí, pelo Postulado 4.0.5,

$$A_{ABCD} = A_{ACD} + A_{ACB} = 2A_{ACD}.$$

Utilizando a Proposição 4.0.10 temos que

$$A_{ABCD} = 2\frac{AC \cdot DM}{2} = AC \cdot DM.$$

Como M é ponto médio de $\overline{BD}$ temos $DM = \frac{BD}{2}$ e, com isso, $A_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$. ■

Demonstração na prática: *Faça a construção de duas regiões triangulares isósceles e congruentes em E.V.A.. Fixe uma dessas regiões na placa de papelão. Cole na região triangular solta uma parte do velcro e faça o mesmo com a outra região, porém colando no papelão. Fique atento, pois ao juntar as regiões triangulares, conforme a demonstração acima, será preciso formar um losango (considerando seu interior). Entregue a placa de papelão para o aluno, com a região do losango completo, e peça para ele identificar a região poligonal colada. Explique que o objetivo da atividade é calcular a área da região identificada através da área de regiões triangulares, já conhecida do aluno. Ajude-o a encaixar a região triangular destacável para formar o losango. Ao finalizar, questione-o sobre o que foi feito trabalhando com a área da região de um losango relacionada à área de regiões triangulares. Para fixar o conceito, dê exemplos (numéricos ou com material concreto) de regiões com formato de losango e peça para ele calcular as respectivas áreas.*

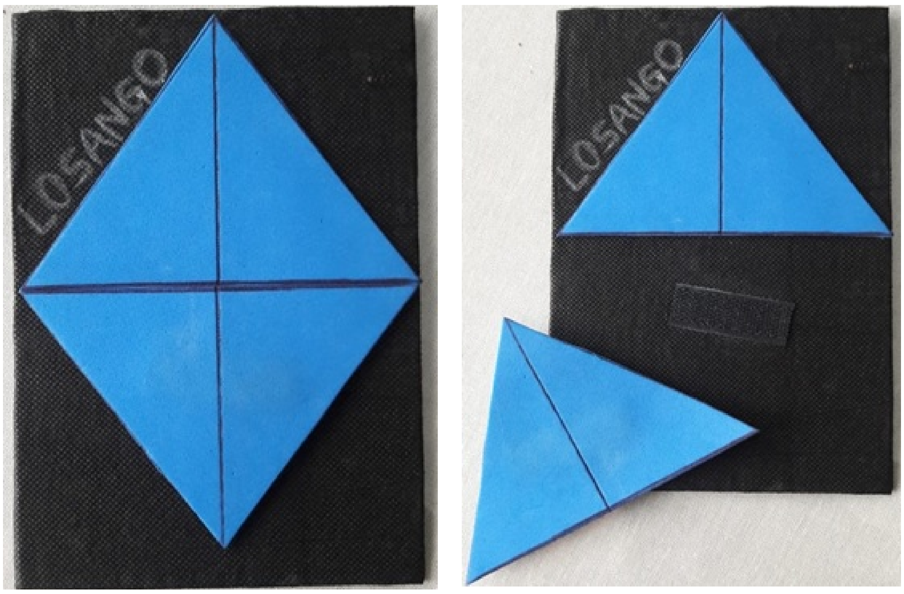


Figura 4.11: Material concreto para demonstração da área de losango

Para auxiliar na fixação do conteúdo é possível fazer e recortar em E.V.A. paralelogramos, triângulos, trapézios, losangos e pedir para que o aluno, com o auxílio de uma régua adaptada, meça os lados e altura de cada polígono em questão e, assim, possa calcular sua área. Também é possível contextualizar esses polígonos com situações do cotidiano para deixar a aula mais dinâmica, interessante e desafiadora.

4.1 Situação Problema

Materiais necessários:

Travessa para bolo em formato poligonal (poderá ser substituído, caso não encontre a travessa, por um suporte no formato desejado em E.V.A., isopor ou placa de papelão);

Tesoura;

Régua adaptada.

Conteúdos abordados:

Nomenclatura de Polígonos;

Área de Polígonos;

Raciocínio Lógico.

Considerações adicionais:

Se considerar conveniente - e quiser deixar a atividade ainda mais interessante - prepare o bolo em questão e leve à sala de aula para que os alunos trabalhem a situação problema na prática.

Situação Problema:

Aritmética é professora do 8º ano de uma escola e, certo dia, fez um bolo para a turma em uma travessa especial. Ela deseja reparti-lo entre seus alunos de modo que cada um receba uma fatia de mesma área, independente de seu formato. Quantos alunos, no máximo, poderiam haver na sala desse 8º ano se cada pedaço de bolo tivesse $30cm^2$?

Resolução da Situação Problema

Para realizar a atividade, o professor precisará providenciar uma travessa ou um suporte para bolo em formato especial, preferencialmente de algum polígono estudado no capítulo.

Faremos a proposta com uma travessa em formato de TRAPÉZIO ISÓSCELES com as seguintes medidas:

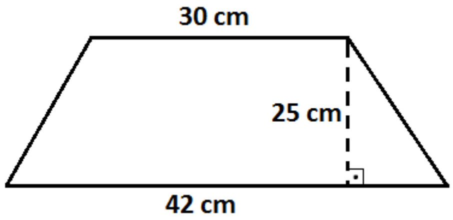


Figura 4.12: Formato e dimensões da travessa do bolo

Ao propor a situação problema para o aluno com cegueira entregue a travessa em suas mãos para que ele analise seu formato e identifique o polígono em questão.

Com o auxílio de uma régua adaptada, peça ao aluno para medir as dimensões e anotar os resultados da maneira que estiver habituado. O professor poderá auxiliar durante a medição e registro dos dados obtidos ao longo da atividade.

Se necessário, prossiga na mesma linha de raciocínio das demonstrações práticas do capítulo e represente a travessa em E.V.A. para poder particioná-la em polígonos conhecidos e, assim, auxiliar na resolução do problema.

É provável que o aluno queira, a princípio, repartir o bolo seguindo o mesmo formato em todas as fatias, lembre-o de que não há essa exigência e, desse modo, poderá ficar livre para seguir outros padrões em cada pedaço.

Esta atividade exige raciocínio lógico do aluno. Debata com ele sobre as possibilidades e questione-o sobre algumas opções para o corte do bolo, deixe claro que o interessante - e foco do exercício - é dividi-lo no maior número possível de fatias. Se a atividade for feita em E.V.A., leve mais do que um exemplar no formato da travessa para que seja possível fazer os recortes que o aluno sugerir e entregar a ele as partes restantes para que consiga dar sequência no raciocínio.

Considerando que o bolo possua formato de trapézio podemos fazer, a priori, dois cortes perpendiculares às bases passando pelas extremidades da base menor. Desse modo o trapézio ficará dividido em três regiões: uma retangular e duas triangulares. Como o trapézio é isósceles, esses triângulos serão congruentes (Caso LLL).

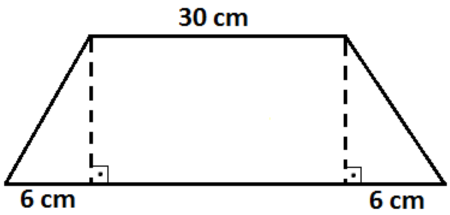


Figura 4.13: Trapézio particionado

Note que o retângulo possuirá comprimento medindo $30cm$ e largura, $25cm$. Assim, poderá ser repartido, por exemplo, em **25 fatias** de $30cm$ por $1cm$, resultando em pedaços de $30cm^2$.

Já os triângulos possuirão, cada um, comprimento de $6cm$ e altura igual a $25cm$. Como são congruentes, podemos juntá-los para que formem um novo retângulo, agora com medidas $6cm$ por $25cm$.

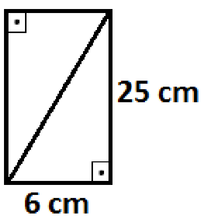


Figura 4.14: Triângulos formando um retângulo

Este novo retângulo poderá ser repartido, por exemplo, em **5 fatias** de $6cm$ por $5cm$, resultando em pedaços de $30cm^2$.

Logo, obteremos $25 + 5 = 30$ fatias de bolo e, assim, a sala poderá ter, no máximo, **30 alunos**.

Considerações Finais

A Geometria está presente em nosso universo nas mais variadas formas e situações, sejam elas na natureza, construções, artes, etc. Por fazer parte de nossa vida (desde a antiguidade) é considerada um dos ramos mais antigos da Matemática que estuda o espaço e as formas que o ocupam.

Existem muitas possibilidades para fazer com que o aluno explore, represente e construa os resultados geométricos, porém isso depende de como o professor trabalha a Geometria em sala de aula.

A avaliação educacional da rede estadual de São Paulo (SARESP) revelou que alguns tópicos matemáticos, principalmente os geométricos, não são aprendidos pelos alunos. Infelizmente, a Geometria é o ramo da Matemática mais deixado ao relento, seja porque o professor não consegue concluir o conteúdo ou por seu despreparo referente a esse ramo. Sendo assim, fica inviável que seja exigido do aluno certos conceitos geométricos (a partir de conhecimentos obtidos por experimentação), tal como recomendam os PCN.

Estas e outras observações motivaram os questionamentos da autora e despertaram seu interesse pelo estudo dos problemas enfrentados quanto ao ensino e aprendizagem de Geometria em sala regular. A preocupação aumenta quando o foco são alunos inclusivos, principalmente os que apresentam cegueira.

Este material pode ser utilizado no ensino de Geometria Plana em sala de aula durante o 8º ano do Ensino Fundamental como material base, caso exista um aluno com deficiência visual na turma. Ele contém os conceitos essenciais que o aluno necessita e aborda alguns resultados extras, ocultos nos materiais didáticos em geral.

Para o desenvolvimento das atividades propostas ao final dos Capítulos 2, 3 e 4 é imprescindível a disponibilização de, pelo menos, uma aula para que assim, possam ser atendidas as necessidades do aluno com deficiência visual sem desamparar o restante da turma e vice-versa.

A inspiração para esse trabalho tem nome e sobrenome. Ao ser contratada para lecionar em uma escola com característica inclusiva, a autora soube que teria como aluna, na época 6º ano, uma criança cega. As dúvidas e incertezas eram muitas, mas a curiosidade e vontade de conhecê-la era maior.

A relação professora/aluna fluiu muito bem durante as aulas (na época, 6º ano), pois a aluna em questão possuía um raciocínio e memória invejáveis e isso facilitou o processo de ensino-aprendizagem. A Geometria não era algo corriqueiro no material didático e, quando aparecia, era algo simples, fácil de obter material concreto pronto. A priori, vivenciou-se mais momentos de conhecimento pessoal do que, de fato, conhecimento aprofundado de Matemática.

Professora e aluna voltaram a se encontrar anos depois, quando a aluna já estava no

8º ano, e foi então que a autora percebeu que podia, devia e queria fazer mais pela aluna, por si mesma e para ambas. Foi percebido, logo no início do ano, que a aluna continuava com seu raciocínio e memória apurados, o que facilitou e encorajou a autora a tentar algo novo: ensinar Geometria Plana para uma aluna cega. Muitas ideias apareceram e, com elas, tentativas, nem todas bem sucedidas, mas a vontade de fazer a diferença na vida dela e transformar o 8º ano no melhor que poderia ser, motivou a professora

e, assim, não se deixou abalar ou desistir.

A turma na qual a aluna fazia parte demonstrou-se sempre colaborativa com ela e com os professores, o que acabou sendo essencial para o desempenho das atividades e andamento do ano letivo.

As atividades foram realizadas durante as aulas, não em todas, pois era preciso ensinar para toda a turma e o trabalho feito com a aluna precisava ser individual. Muitas vezes, as adaptações eram feitas de dois ou três conceitos por vez, visto que a aluna acompanhava e aprendia em ritmo satisfatório. Ressalta-se que todos os conceitos apresentados aqui são adaptáveis e maleáveis a mudanças e aprimoramentos, basta que o professor conheça seu aluno e sua turma. Infelizmente, as situações problemas propostas neste trabalho não puderam ser aplicadas com a aluna, visto que atualmente ela cursa a 2ª série do Ensino Médio e, embora ainda haja encontros entre professora e aluna pelos corredores da escola, não existe mais aquela rotina de sala de aula, além disso, seu foco e objetos de estudo atuais são outros.

Gratificante é ouvir de alguém que você fez diferença em sua vida, que o ensino e aprendizado foram muito maiores do que aquele cujas páginas de um livro didático podem propor. Sabemos que o “diferente” pode, a princípio, causar medo, angústia e apreensão, porém os professores não podem se abalar ou desestabilizar com essas situações. É preciso que estejam preparados e, principalmente, dispostos a enfrentar o “novo”. Somente assim, conseguirão mudar o mundo, mesmo que seja o mundo da sala de aula em que atuam.

Referências Bibliográficas

[1] *Educação é a base*. Base Nacional Comum Curricular, 2019. Disponível em < http : //basenacionalcomum.mec.gov.br/ > . Acesso em: 20 de fev. de 2019.

[2] *Portal da Legislação*. Planalto, 2019. Disponível em < http : //www4.planalto.gov.br/legislacao/ > Acesso em: 26 de fev. de 2019.

[3] *Ensino Fundamental II*. FTD Sistema de Ensino, 2019. Disponível em < http : //www.ftdsistemadeensino.com.br/ensino − fundamental − 2 > Acesso em: 20 de fev. de 2019.

[4] *Parâmetros Curriculares Nacionais 5ª a 8ª Séries*. Ministério da Educação, 2018. Disponível em < http : //portal.mec.gov.br/pnaes/195 − secretarias − 112877938/seb − educacao − basica − 2007048997/12657 − parametros − curriculares − nacionais − 5o − a − 8o − series > Acesso em: 26 de fev. de 2019.

[5] *Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica*. Ministério da Educação, 2018. Disponível em < http : //portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/diretrizes.pdf > Acesso em: 18 de mar. de 2019.

[6] *Projeto Escola Viva*. Ministério da Educação, 2018. Disponível em < http : //portal.mec.gov.br/busca − geral/192 − secretarias − 112877938/seesp − esducacao − especial − 2091755988/12658 − projeto − escola − viva > Acesso em: 21 de jan. de 2019.

[7] *As leis sobre diversidade*. Disponível em < https : //novaescola.org.br/conteudo/189/leis − diversidade − legislacao > Acesso em: 21 de jan. de 2019.

[8] *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Ministério da Educação, 2018. Disponível em < http : //portal.mec.gov.br/index.php?option = com_docman&view = download&alias = 16690 − politica − nacional − de − educacao − especial − na − perspectiva − da − educacao − inclusiva − 05122014&Itemid = 30192 > Acesso em: 21 de jan. de 2019.

[9] *Paradigmas da relação da sociedade com as pessoas com deficiência*. Adiron Consultores, 2019. Disponível em < http : //www.adiron.com.br/arquivos/paradigmas.pdf > Acesso em: 21 de jan. de 2019.

[10] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

[11] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas.* 2ª ed. Campinas, SP: Unicamp, 2008.

[12] SILVA, D. C. N. *Sobre o Ensino de Geometria para Deficientes Visuais.* 2015. 95f. Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília, Brasília, 2015.