UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Métodos de Contagem

por

Luis Rodrigo D'Andrada Bezerra

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB

PROFMAT

Métodos de Contagem †

por

Luis Rodrigo D'Andrada Bezerra

sob orientação da

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013

João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Métodos de Contagem

por

Luis Rodrigo D'Andrada Bezerra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof^a. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes -UFPB
(Orientadora)

Flank D. Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - UnB

Agosto/2013

Agradecimentos

Primeiramente, manifesto todo o meu carinho a minha família: irmãos, avós, tios, primos e principalmente minha mãe e o meu pai, que sempre me concederam estrutura e tranquilidade para que eu pudesse concluir o ensino médio e o superior com sucesso.

Ao bem mais precioso da minha vida, minha filha Clara. A minha esposa, pelo apoio e carinho. Todos os meus amigos e colegas de profissão contribuíram com essa monografia, as idéias e experiências compartilhadas, foram, de forma indireta, colocadas nesse trabalho. Agradeço a minha orientadora Dra. Elisandra, pela paciência em esclarecer diversas dúvidas além da dedicação que teve com esse projeto. Os meus professores e colegas de turma, que com debates e discussões, foram amadurecendo idéias que contribuíram bastante neste trabalho. Um agradecimento especial aos amigos Laércio, Charlesson, Zé e Mignac. À capes pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A todos os meus entes queridos que partiram desse nosso plano, amo a todos.

Resumo

O presente trabalho apresenta uma introdução ao estudo de problemas de contagem, não apenas através dos conceitos tradicionalmente abordados em cursos de Análise Combinatória, tais como os princípios básicos, as permutações, os arranjos, as combinações, as equações lineares com coeficientes unitários e outros, mas também, ferramentas sofisticadas de contagem, tal como o uso de grafos.

Palavras-chave: Problemas de Contagem, Combinatória, Grafos.

Abstract

This paper presents an introduction to the study of counting problems, not just through the concepts traditionally covered in Combinatorial Analysis courses, such as the basic principles, permutations, arrangements, combinations, linear equations with unitary coefficients, among others, but also using sophisticated tools, such as the use of graphs.

Keywords: Counting Problems, Combinatorial, Graphs.

Sumário

Introdução

Este trabalho trata de Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória ou ainda de Métodos de Contagem. Acreditamos que a Análise Combinatória seja uma importante ferramenta que o cidadão inserido no mundo das informações, das novas tecnologias e do dia-a-dia das transações financeiras necessita para resolver problemas reais. Por outro lado, observamos que o ensino da Análise Combinatória não está sendo desenvolvido de forma a possibilitar que os cidadãos a utilizem na resolução de problemas reais. O ensino escolar limita-se quase sempre ao treinamento no uso de fórmulas e algoritmos para encontrar o número de arranjo, combinações ou permutações. Para Morgado [3], embora combinações, arranjos e permutações façam parte de Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver uma classe de problemas: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto trataremos nesse TCC de outras técnicas de contagem, algumas de certa forma bem sofisticadas, como é o caso do uso de grafos na resolução de problemas de contagem.

O objetivo deste TCC é estudar algumas das principais técnicas de contagem, priorizando as aplicações nas mais diversas áreas. Esperamos assim, que o mesmo possa servir como fonte de consulta para professores, estudantes e admiradores da Análise Combinatória. No presente trabalho procuramos apresentar todos os conceitos posteriormente a resolução, ou pelo menos uma enunciação, de problemas contextualizados, que servirão como elementos motivacionais. A seguir, damos uma breve descrição do trabalho.

No Capítulo I, após algumas notações e definições, apresentamos dois princípios: o princípio da inclusão e exclusão e o princípio multiplicativo, introduzidos através de uma sequência de problemas resolvidos. Posteriormente foram construídos os conceitos de permutação simples, permutação circular, combinação simples e permutação com repetição. Em seguida, estudamos algumas aplicações dos conceitos anteriormente listados, tradicionalmente rotuladas de problemas de: Arranjo Simples, Arranjo Completo, Permutação Caóticas, número de soluções de uma equação linear nos inteiros positivos ou nos inteiros não negativos, 1º Lema de Kaplansk, 2º Lema de Kaplansk e termo geral do Binômio de Newton.

No Capítulo II, trataremos de três problemas clássicos da matemática discreta, o de coloração de mapas, o problema das pontes e o problema das ligações de água, luz e telefone. Será dado um embasamento teórico da teoria dos grafos que servirá como subsídio para as resoluções dos três problemas apresentados. No final propomos duas atividades para serem aplicadas no ensino médio.

Capítulo 1

Conceitos Básicos de Combinatória

Estudaremos na primeira parte desse capítulo os princípios básicos de combinatória tais como princípio aditivo, princípio multiplicativo, permutação (simples, circular e com repetição) e combinação simples, que servirão como ferramentas de construção dos demais tópicos da Análise Combinatória que encontraremos em sequência nesse capítulo. Para que cada conceito seja facilmente compreendido, inicialmente resolveremos problemas específicos que funcionarão como facilitadores dos casos gerais, explorando-os por meio de contextualização, valorizando assim o raciocínio e as ideias gerais ao invés do uso excessivo de fórmulas e de casos particulares. Não estamos aqui preocupados em criar uma infinidade de fórmulas, uma para cada modelo de questão, apenas os princípios básicos terão suas expressões generalizadas, os demais conceitos serão tratados como aplicações diretas. Devemos então nesse momento resistir a tentação da generalização dos fatos, tão prazeroso para nós matemáticos mas fatalmente sem o mesmo efeito para boa parte dos alunos de uma sala de aula do ensino médio extremamente heterogênea. Afinal, ainda insisto em dizer que não queremos aqui trocar os princípios básicos da Análise Combinatória por fórmulas associadas aos modelos de questões. Resolveremos a seguir um problema de contagem, fazendo uso de um dos princípios fundamentais da Combinatória. Para esse trabalho, usaremos a notação $|A|$ para indicar a quantidade de elementos que o conjunto finito A possui.

1.1 Princípio Aditivo

Observe o seguinte problema:

Exemplo 1 *Num sorteio de uma promoção da rádio Nova Recife, Bira foi contemplado com um par de convites para o Forró da Capitá, para lhe acompanhar nesse evento ele dispõe de seus 3 irmãos e de 5 colegas de trabalho. De quantas formas diferentes ele pode ir acompanhado?*

Solução: Se Bira irá acompanhado de uma única pessoa, ele pode ir acompanhado do seu 1º irmão ou do seu 2º irmão ou do seu 3º irmão ou ainda, do seu 1º colega ou do seu 2º colega ou do seu 3º colega ou do seu 4º colega ou do seu 5º colega. Temos então 8 companhias distintas para ir ao Forró da Capitá com Bira.

O exemplo acima ilustra bem o que chamamos de Princípio Aditivo para dois conjuntos disjuntos. Note que no enunciado do problema, podemos reescrever a pergunta final por:

“De quantas formas diferentes ele pode ir acompanhado de um colega de trabalho ou de um irmão?”

Nota-se que o conectivo “ou” está intimamente ligado ao Princípio Aditivo, sendo portanto uma ferramenta importante na identificação desses problemas. Podemos agora então enunciar tal princípio.

Princípio Aditivo: Se uma decisão A pode ser tomada de x maneiras, uma decisão B pode ser tomada de y maneiras e as decisões são independentes, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A ou B é $x + y$.

Usando a notação de conjuntos podemos reescrever o Princípio Aditivo como segue:

Princípio Aditivo: Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Agora iremos generalizar o Princípio Aditivo, para tanto observe o problema a seguir.

Exemplo 2 *Mignac ofereceu a Marcos 3 livros de Álgebra, 7 livros de Combinatória e 5 livros de Geometria e pediu-lhe para escolher um único livro. De quantas maneiras Marcos pode realizar essa escolha?*

Solução: Considere os três conjuntos de livros:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$, conjunto dos livros de Álgebra.

$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$, conjunto dos livros de Combinatória.

$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, conjunto dos livros de Geometria.

Marcos deverá escolher apenas um livro dentre os três conjuntos, como temos 3 opções em A, 7 opções em C e 5 opções em G, portanto ao todo obtemos 15 opções de escolha.

Podemos agora enunciar o caso geral do Princípio Aditivo.

Extensão do Princípio Aditivo: Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são conjuntos disjuntos dois a dois (isto é $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), e se A_i possui a_i elementos, $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, então:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

1.2 Teorema da inclusão e exclusão

Na seção anterior, fizemos referência a um princípio elementar de contagem que estabelece que o número de elementos da união de conjuntos disjuntos finitos é a soma do número de elementos de cada conjunto. Queremos agora ampliar para casos onde os conjuntos envolvidos não são necessariamente disjuntos. Admitindo o princípio aditivo podemos provar o Teorema da inclusão e exclusão, apesar de boa parte dos livros denominá-lo Princípio da inclusão e exclusão. Segundo Morgado et. al [3] o Princípio da inclusão e exclusão é uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. Para entendermos melhor do que se trata, observe o exemplo a seguir.

Exemplo 3 *Em uma cooperativa de agricultores do município de Vitória de Santo Antão, 45 dos cooperativados cultivam o sorgo, 60 cultivam o milho e 30 cultivam ambos. Sabendo que todos os cooperativados cultivam pelo menos uma dessas duas culturas, qual é o número de agricultores da cooperativa?*

Solução: Inicialmente percebemos que o princípio aditivo não pode ser aplicado nesse problema, pois os dois conjuntos envolvidos (dos agricultores que plantam milho e dos agricultores que plantam sorgo) não são disjuntos. Resolveremos nosso problema de dois modos distintos.
(i) Consideremos um diagrama, onde representaremos pela letra S o conjunto das pessoas que cultivam o sorgo e pela letra M o conjunto das pessoas que cultivam milho, sabemos que há 30 agricultores que cultivam "milho e sorgo", então primeiramente colocaremos 30 na interseção dos conjuntos,

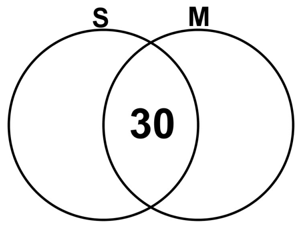

Figura 1.1:

O segundo passo é preenchermos as outras duas regiões. Como temos 60 agricultores que plantam milho, devemos ter essa quantidade dentro da respectiva circunferência, porém já há 30 na interseção dos conjuntos (e portanto dentro do conjunto M) restando apenas 30 para a região correspondente aos agricultores que plantam apenas milho. De forma análoga, já que temos 45 agricultores que plantam sorgo, dos quais 30 também plantam milho concluímos que 15 plantam apenas sorgo. Observe:

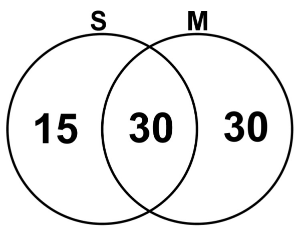

Figura 1.2:

Como todos os cooperativados cultivam pelo menos uma dessas duas culturas, o número de agricultores da cooperativa é

$$15 + 30 + 30 = 75$$

(ii) Considere S o conjunto das pessoas que cultivam o sorgo e M o conjunto das pessoas que cultivam milho. Queremos determinar o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos. Para contar os elementos de $S \cup M$ contamos todos os 45 elementos de S ($|S|$) e todos os 60 elementos de M ($|M|$). Ao fazermos isso os agricultores que plantam sorgo e milhos foram contados duas vezes, uma em $|S|$ e outra em $|M|$, portanto devemos descontar a segunda contagem desses elementos e obtemos

$$|S \cup M| = 45 + 60 - 30 = 105 - 30 = 75.$$

Assim concluímos que há 75 agricultores nessa cooperativa.

O que iremos apresentar agora é um resultado, que pode ser visto como o caso geral do Princípio Aditivo, para dois conjuntos, porém agora não necessariamente disjuntos. Trata-se de um teorema (apenas quando anteriormente é assumido que o princípio aditivo é válido), também conhecido como princípio da inclusão e exclusão, que pode ser facilmente demonstrado utilizando o princípio aditivo.

Teorema 1 *Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos finitos quaisquer. Então:*

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Demonstração: Observe que $A_1 \cup A_2 = (A_1 - A_2) \cup A_2$, onde no segundo membro da igualdade temos uma união de dois conjuntos disjuntos. Pelo princípio aditivo, temos que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 - A_2| + |A_2|. \tag{1.1}$$

Analogamente, aplicando novamente este princípio, temos que

$$|A_1| = |A_1 - A_2| + |A_1 \cap A_2| \Longrightarrow |A_1 - A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|. \tag{1.2}$$

Substituindo (1.2) em (1.1) temos

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2| + |A_2|,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Iremos agora tratar do teorema da inclusão e exclusão para três conjuntos. Inicialmente pensemos no seguinte problema.

Exemplo 4 *Numa enquete sobre as atividades aeróbicas, constatou-se que: 400 pessoas praticam natação; 270 praticam ciclismo; 290 praticam atletismo; 140 praticam natação e ciclismo; 90 praticam natação e atletismo; 100 praticam ciclismo e atletismo; 20 praticam os três esportes pesquisados. Quantas pessoas praticam natação ou ciclismo ou atletismo?*

Solução: Consideremos o diagrama abaixo, onde representamos pela letra N o conjunto das pessoas que praticam natação, a letra C o conjunto das pessoas que praticam ciclismo e a letra A o conjunto das pessoas que praticam atletismo. Consideremos também a seguinte numeração dos subconjuntos de $N \cup C \cup A$:

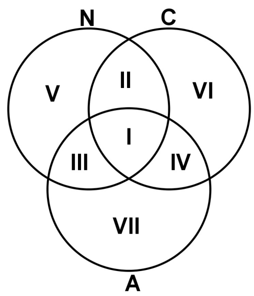

Figura 1.3:

Resolveremos nosso problema de dois modos distintos.

(i) Usando diagrama, sabemos que há 20 pessoas que praticam natação, ciclismo e atletismo, então primeiramente colocaremos 20 na interseção dos três conjuntos (subconjunto I). O segundo passo é preenchermos os subconjuntos II, III e IV da Figura 1.3. Sabemos as pessoas que praticam natação e ciclismo correspondem aos subconjuntos I e II, portanto temos que I e II somam 140, como já há 20 no subconjunto I restam 120 para o subconjunto II (praticam exclusivamente natação e ciclismo). De modo análogo temos que o subconjunto III terá $90 - 20 = 70$ elementos e o subconjunto IV $100 - 20 = 80$ elementos.

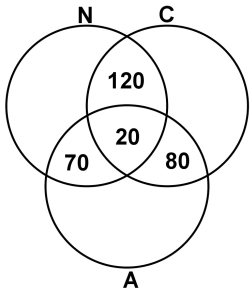

Figura 1.4:

Por fim preencheremos os subconjuntos V, VI e VII. Como 400 pessoas praticam natação, temos que os subconjuntos I, II, III e V somam 400 elementos. Como já há 20 elementos no subconjunto I, 120 no II e 70 no III, restam $400 - 20 - 120 - 70 = 190$ elementos para o subconjunto V (praticam apenas natação). De modo análogo temos que o subconjunto VI terá $270 - 20 - 120 - 80 = 50$ elementos e o subconjunto VII terá exatamente $290 - 20 - 70 - 80 = 120$ elementos. Temos portanto o seguinte diagrama

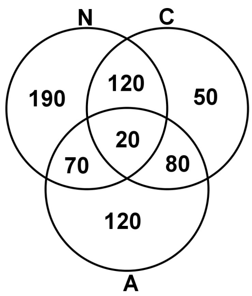

Figura 1.5:

totalizando $190 + 120 + 50 + 70 + 20 + 80 + 120 = 650$ pessoas que praticam natação ou ciclismo ou atletismo.

(ii) Consideremos N o conjunto das pessoas que praticam natação, C o conjunto das pessoas que praticam ciclismo e a letra A o conjunto das pessoas que praticam atletismo. Queremos determinar o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos. Para contar os elementos de $N \cup C \cup A$ contamos todos os elementos de N ($|N|$), todos os elementos de C ($|C|$) e todos os elementos de A ($|C|$). De uma forma equivocada teríamos:

$$|N \cup C \cup A| = |N| + |C| + |A|$$

De fato, essa soma não representa a união, observe na figura o número de contagens de cada subconjunto quando a mesma é realizada.

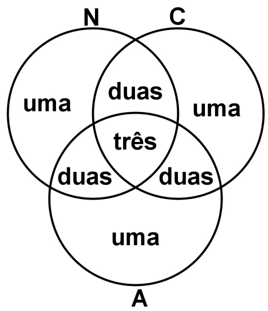

Figura 1.6:

Ao fazermos isso as pessoas que praticam apenas natação e ciclismo, as que praticam apenas natação e atletismo e as que praticam apenas ciclismo e atletismo foram contadas duas vezes. Para corrigir esse excesso devemos descontar uma vez cada uma das intersecções duas a duas dos conjuntos, assim sendo, nossa expressão se torna:

$$|N \cup C \cup A| = |N| + |C| + |A| - |N \cap C| - |N \cap A| - |C \cap A|$$

e o novo número de contagens de cada subconjunto será:

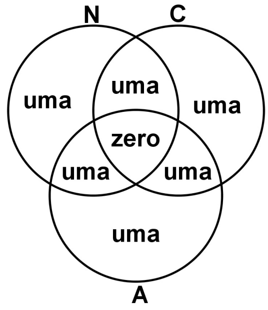

Figura 1.7:

Entretanto geramos um novo problema, a interseção dos três conjuntos não está sendo contada e para corrigir esta ausência, devemos acrescentá-la uma vez. Obtendo:

$$|N \cup C \cup A| = |N| + |C| + |A| - |N \cap C| - |N \cap A| - |C \cap A| + |N \cap C \cap A|.$$

Chegamos então na expressão do número de elementos da união de três conjuntos, substituindo os valores, temos:

$$|N \cup C \cup A| = 400 + 270 + 290 - 140 - 90 - 100 + 20 = 650.$$

Assim concluímos que há 650 pessoas pessoas que praticam natação ou ciclismo ou corrida.

Demonstraremos em seguida o Teorema da inclusão e exclusão para três conjuntos, para isso usaremos o Teorema 1, demonstrado anteriormente, além do Princípio Aditivo.

Teorema 2 *Sejam A_1, A_2 e A_3 três conjuntos finitos quaisquer. Então,*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &\quad -(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|). \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Teorema 1 temos que,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| = |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)|.$$

Lembrando que

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

pelo Teorema 1, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad -|(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \end{aligned} \tag{1.3}$$

e ainda que

$$\begin{aligned} |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - \\ &\quad |(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)|. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Substituindo (1.3) em (1.4), temos que

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - (|A_1 \cap A_2| \\ &\quad +|A_1 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)|). \end{aligned}$$

Já que $(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ concluímos que

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\ &\quad -|A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

como desejado. ■

O próximo passo é encontrar uma regra geral do Teorema da inclusão e exclusão para n conjuntos. Usando a notação de somatório $\sum$ podemos enunciar o Teorema 2 da seguinte maneira:

$$|\cup_{i=1}^{3} A_i| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|.$$

De uma forma geral, dados os conjuntos finitos $A_1, A_2, \cdots, A_n$, as expressões anteriores nos levam a definir os números:

$$S_1^n = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$S_2^n = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$

$$\vdots$$

$$S_k^n = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

$$\vdots$$

$$S_n^n = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Assim, a versão mais geral do Princípio Aditivo, também conhecida como Princípio da Inclusão e Exclusão, é:

Teorema 3 *Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos finitos quaisquer. Então,*

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = S_1^n - S_2^n + S_3^n - S_4^n + \cdots + (-1)^{n-1} S_n^n.$$

Assumindo-se o princípio aditivo, provamos este resultado por indução. Esta demonstração encontra-se no Apêndice.

1.3 Princípio Multiplicativo

Iniciaremos esta seção tratando de uma das mais poderosas ferramentas de resolução de problemas de contagem, o “Princípio Multiplicativo” ou “Princípio Fundamental da Contagem” ou ainda simplesmente o “P.F.C”, como será chamado em diversos momentos do presente trabalho. Para tanto, começaremos com alguns problemas de Contagem. Trataremos a resolução destes exercícios utilizando inicialmente a árvore de possibilidades (uma espécie de listagem das possibilidades) e posteriormente alguma técnica para que evitemos o procedimento anterior, pois o mesmo pode ser muio desgastante ao depender do número de possibilidades. Poderíamos também utilizar tabelas ao invés de árvores, o efeito de listagem seria o mesmo.

Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão.

Um dos objetivos desta seção é habituar o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas. É isto o que procuramos mostrar nos exemplos a seguir.

Exemplo 5 *Para ir à festa do padroeiro de São Lourenço da mata, Chiquinha dispõe de 2 vestidos de chita e de 3 pares de chinela de couro. De quantas maneiras distintas Chiquinha pode escolher um único vestido de chita e um único par de chinela de couro?*

Solução: Inicialmente consideremos as opções de escolha do vestido, que são o primeiro ou o segundo vestido, temos portanto duas possibilidades.

Em seguida, para cada uma das duas opções de vestido temos 3 possibilidades para escolher a chinela. Considere a seguinte árvore, onde V_1 e V_2 representam os dois vestidos e C_1, C_2 e C_3 as três chinelas de Chiquinha. Iremos nesse momento formar todas as possibilidades de combinações do conjunto (vestido e chinela).

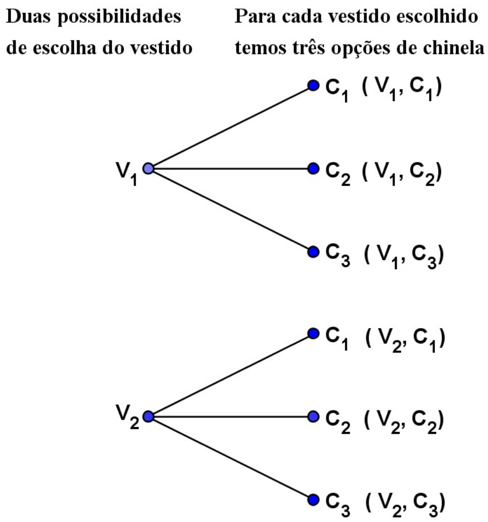

Figura 1.8:

Cada extremidade da árvore representa uma possibilidade de Chiquinha se vestir, portanto temos 6 formas distintas de vestimenta.

Uma outra solução para esse problema seria a seguinte: Para encontrarmos de quantas maneiras distintas Chiquinha pode escolher um único vestido de chita e uma única chinela de couro temos duas decisões a tomar, primeiramente escolher uma entre as duas opções de vestido e uma vez escolhido o vestido escolher uma chinela dentre as três possíveis. Como, uma vez escolhido o vestido, para cada um deles podemos combinar com cada uma das três chinelas, temos portanto $2 \times 3 = 6$ modos distintos de vestimenta.

O método da árvore geralmente é utilizado no início de um primeiro curso de análise combinatória e visa convencer o estudante da veracidade do valor que será encontrado posteriormente pela técnica. Continuemos com o seguinte problema:

Exemplo 6 *Ricardo fará uma viagem cujo trecho será João Pessoa/Recife /João Pessoa de ônibus, avião, navio ou trem. Para curtir diferentes paisagens nessa viagem, ele decide que o meio de transporte da ida não é o mesmo da volta. De quantas maneiras Ricardo pode realizar a viagem?*

Solução: Inicialmente consideremos as opções de meio de transportes de ida, que são ônibus, avião, navio ou trem, temos portanto 4 possibilidades. Em seguida para cada uma das 4 opções de Ricardo ir a recife. Temos 3 opções de escolha do meio de transporte da volta. Podemos construir a seguinte árvore de possibilidades para ilustrar nossa resolução:

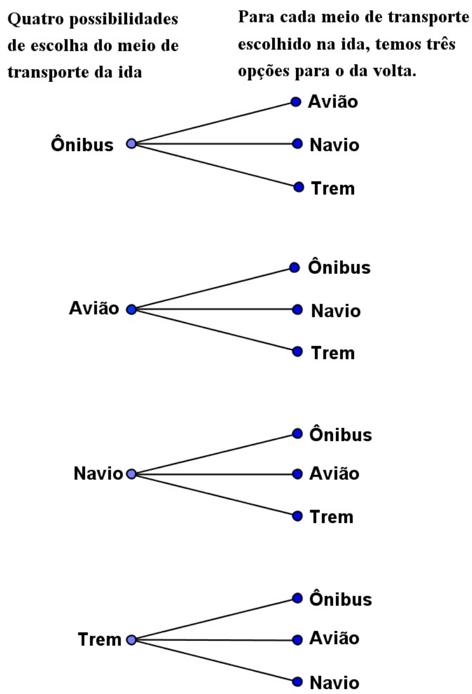

Figura 1.9:

Cada extremidade da árvore representa uma possibilidade de Ricardo realizar a viagem, portanto temos 12 formas distintas do mesmo realizá-la. Uma outra solução para esse problema seria a seguinte: Para encontrarmos de quantas maneiras distintas Ricardo pode escolher um único meio de transporte de ida e um único de volta, temos duas decisões a tomar, primeiramente escolher uma entre as quatro opções de ida e uma vez escolhido o meio de transporte de ida escolher o de volta dentre os três possíveis (uma vez que Ricardo não pode tomar na volta o mesmo meio de transporte da ida). Temos portanto $4 \times 3 = 12$ modos distintos de Ricardo realizar essa viagem.

Podemos agora enunciar o Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, sendo este conceito a ferramenta mais poderosa na resolução da maioria dos problemas de Contagem, além de servir como fundamentação de diversos outros conceitos que serão apresentados adiante.

Princípio Multiplicativo [3]: Se uma decisão d_1 pode ser tomada de n maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de m maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 sucessivamente é $n \times m$.

Iremos agora resolver problemas que envolvem mais de duas decisões.

Exemplo 7 *(UFES - adaptada) Um "Shopping Center" possui 2 portas de entrada para o andar térreo, 4 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?*

Solução: Inicialmente consideremos as opções de escolha de entrada para o andar térreo, que são a primeira ou a segunda porta, temos portanto duas possibilidades. Em seguida para cada uma das duas opções de escolher a porta de entrada temos 4 possibilidades de escolher a escada rolante ligando o térreo ao 1^o pavimento. Dessa forma uma vez estando no 1^o pavimento devemos escolher um dos três elevadores ligando o 1^o com o 2^o pavimento. Considere a seguinte árvore

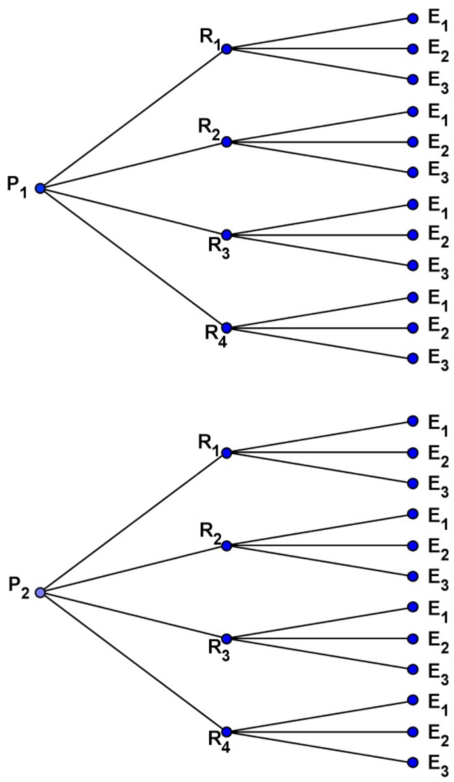

Figura 1.10:

Aqui P_1 e P_2 representam os dois portões de entrada, R_1, R_2 , R_3 e R_4 as quatro escadas rolantes e E_1 , E_2 e E_3 os três elevadores. Iremos agora formar todas as possibilidades de combinações. Cada extremidade da árvore representa uma possibilidade de uma determinada pessoa, partindo de fora do Shopping Center, atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados, portanto temos um total de 24 formas distintas.

"O raciocínio acima indica que o Princípio Multiplicativo pode, na realidade, ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão: desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores, basta multiplicá-los para achar o número total de possibilidades. Para o nosso exemplo temos $2 \times 4 \times 3 = 24$ *possibilidades"*

É importante neste momento, exibir algumas estratégias (técnicas), baseadas em Morgado, et. al [3], Lima, et. al [2], Santos, et. al [7] e Oliveira, et. al [4] que facilitam a resolução de problemas de Contagem. São elas:

Estratégia 1 *Postura*
É primordial que você tente se colocar no lugar de quem está executando a ação do problema, pense sempre que está de posse das opções e ao preencher uma etapa imagine que uma dessas opções já foi utilizada na mesma.

Estratégia 2 *Divisão*
Devemos sempre dividir nosso problema em etapas (ou decisões) mais simples de serem determinadas as suas possibilidades, para que depois pensemos no conjunto de etapas como um todo, podendo ter um olhar simultâneo ou sucessivo das decisões.

Estratégia 3 *O que diferencia uma decisão de outra*
Esse é sem sombra de dúvida, o grande dilema dos problemas de Contagem. Como justificar que um conjunto de decisões escolhido por você tem de fato o número correto de decisões ou podemos ainda subdividir alguma dessas decisões em outras ou até agrupar algumas compondo uma única ou simplesmente o seu conjunto de etapas não é compatível com o problema. Futuramente veremos o clássico problema da pintura de um mapa. E aí se pergunta: porque o correto é escolher a cor do 1º país em seguida a cor do

2^o país e assim sucessivamente e não escolhermos o país que terá a 1^a cor em seguida o outro país que terá a 2^a cor e assim sucessivamente? De fato não há uma receita de bolo para a definição das etapas na qual será dividida o seu problema. Teremos que observar o que faz sentido.

Estratégia 4 *Quando uma decisão deve ser tomada antes de outra (não adiar dificuldades)*
Decisões adiadas por conter alguma dificuldade tornam-se mais complicadas posteriormente, por isso devem ser resolvidas de imediato. Em outras palavras, as etapas que sofrem mais influência em relação as demais devem ser resolvidas prioritariamente.

Estratégia 5 *Métodos de contagem (direto ou indireto)*
Em todo problema de contagem, podemos optar por uma das duas técnicas de resolução:

- *direto: Esse método consiste em considerar inicialmente todas as particularidades do problema chegando assim diretamente à solução procurada.*

- *indireto: Esse método consiste em ignorar uma (ou mais) das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.*

Baseados nessas técnicas, iremos agora resolver o próximo problema sem o auxílio do diagrama de árvore, observe:

Exemplo 8 *Desde de o dia 31 de julho de 2012, com a aceitação da Venezuela como membro pleno do Mercosul, tornando-se o quinto país a fazer parte do bloco, o novo mapa do chamado "Mercado comum do Sul" está representado abaixo:*

Figura 1.11:

Usando apenas 4 cores, de quantas formas distintas podemos colorir os cinco países que compõem o Mercosul, com a condição que países com fronteira em comum não tenham a mesma cor?

Solução: Podemos resolver esse problema facilmente usando o Princípio Fundamental da Contagem. Para tanto, se ponha no lugar da pessoa que irá pintar o mapa dos países do Mercosul. Vamos dividir nossa resolução em 5 etapas, cada uma corresponde a escolha da cor de cada país. Devemos então iniciar pela etapa que, se deixada para depois implicaria em uma série de restrições, que é a escolha da cor do Brasil (já que este país tem fronteiras em comum com todos os outros). Inicialmente para pintar o Brasil temos 4 possibilidades, uma vez pintado o Brasil temos 3 possibilidades para pintarmos a Argentina. Uma vez pintados Brasil e Argentina, temos 2 possibilidades de pintura do Uruguai. Uma vez pintados Brasil, Argentina e Uruguai, temos 2 possibilidades de pintura do Paraguai (visto que podemos pintar Uruguai e Paraguai com a mesma cor) e finalmente uma vez pintados Brasil, Argentina, Uruguai e Paraguai, temos 3 possibilidades de pintura da Venezuela. Pelo P.F.C. temos $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 144$ possibilidades.

1.4 Permutações Simples

Na resolução de muitos problemas de contagem, é comum o aparecimento de expressões que são produtos de uma seqüência de todos os números naturais positivos e consecutivos menores ou igual a um natural n. Por exemplo: $4 \times 3 \times 2 \times 1$ ou $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Esses produtos são chamados fatoriais. A notação usual para eles é:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1;$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1;$$

onde se lê o 4! como "*fatorial de* 4" e 7! como "*fatorial de* 7". De uma maneira geral, se n é um inteiro positivo, $n!$ é lido com "*fatorial de* n" e

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Observe que $1! = 1$ e, por convenção, denotamos $0! = 1$.

Nos problemas de Contagem surgem com frequência problemas que tratam do número de Anagramas de uma determinada palavra de n letras, que é na verdade qualquer arrumação das n letras criando uma nova palavra (que pode ter sentido ou não). Também o número de maneiras de se organizar filas indianas, organizar livros em prateleiras, enfim, uma vez tendo n elementos desejamos encontrar o número de formas de ordená-los como em sequência. Para introduzirmos o conceito de Permutações simples, observe o seguinte problema:

Exemplo 9 *Quantos são os anagramas da palavra LIDER?*

Solução: Usando o P.F.C, dividiremos nosso problema em cinco etapas. Se coloque no lugar da pessoa que irá construir um anagrama. Para isso, basta escolhermos sucessivamente as letras que serão colocadas em cada posição do Anagrama. Para escolhermos a letra que ocupará o primeiro lugar, temos 5 possibilidades; para a segundo lugar podemos preenchê-lo com qualquer uma das quatro letras restantes; para o terceiro lugar temos três possibilidades; para o quarto, temos duas possibilidades e finalmente para o quinto e último lugar do anagrama, temos uma única possibilidade. Logo, pelo P.F.C, o número total de Anagramas é $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Agora, veja outra situação que envolve a "ordem" dos elementos de um determinado conjunto.

Exemplo 10 *De quantos modos distintos 6 pessoas podem formar uma fila indiana?*

Solução: Este é um problema clássico de contagem, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolhermos sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Podemos agora, apresentar uma importante definição.

Definição 1 *Permutação Simples: Uma permutação de n objetos distintos é qualquer coleção ordenada desses n objetos.*

Existem quantas permutações num conjunto de n objetos? Usando o P.F.C, dividiremos nosso problema em n etapas. Como uma permutação é coleção ordenada desses n objetos, para a primeira posição da ordem desses elementos temos n possibilidades. Uma vez escolhido o primeiro dessa ordem, para a escolha do segundo, temos $n - 1$ possibilidades. Uma vez escolhido o segundo elemento da ordem, para a escolha do terceiro, temos

$n-2$ possibilidades, e, assim por diante. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações de n objetos é igual a:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

1.5 Permutações Circulares

A permutação simples, estudada no ítem anterior, permite calcular o número de maneiras de organizar sequências com elementos distintos ao longo de uma linha. Entretanto, em determinadas situações estamos interessados em colocar elementos distintos ao longo de uma circunferência. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 11 *Uma reunião de presidentes de países da América do Sul será realizada em uma mesa redonda. Participarão dessa reunião os presidentes da Argentina (A), do Brasil (B), do Chile (C), do Paraguai (P) e do Equador (E). Uma preocupação do Itamarati é com a disposição dos presidentes em tomo da mesa. Em quantas ordens diferentes podem ser dispostos os presidentes em volta da mesa?*

Solução: Considere a seguinte disposição dos elementos em torno da mesa:

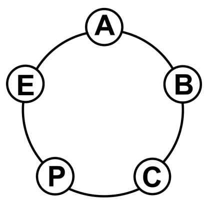

Figura 1.12:

I - Partindo de A, obteremos a permutação em linha ABCPE.

Note que, se realizarmos qualquer giro da Figura 1.12

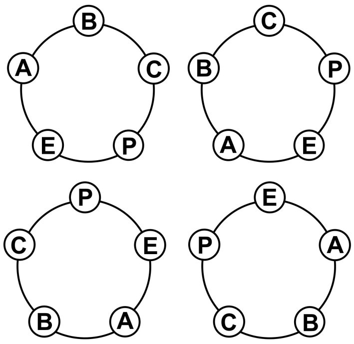

Figura 1.13:

II - partindo de B, obteremos a permutação em linha BCPEA;

III - partindo de C, obteremos a permutação em linha CPEAB;

IV - partindo de P, obteremos a permutação em linha PEABC;

V - partindo de E, obteremos a permutação em linha EABCP.

Observe as cinco disposições da mesa representadas nas Figuras 1.12 e 1.13. Parecem diferentes não é mesmo?

Mas, para nós que estamos "olhando" de cima (vista aérea) perceba que em todas as cinco permutações o presidente que se encontra a esquerda do brasileiro é o chileno e a sua direita temos sempre o presidente argentino. Se olharmos para os outros presidentes nota-se que as pessoas que se encontram na sua vizinhança (à direita ou à esquerda) e a sua frente (à direita ou à esquerda) permanecem as mesmas em todas as cinco disposições.

Nessa mesa, sempre que **não** houver influência de alguma referência externa ou interna a ela (pode ser um lugar da mesa que está próximo a porta de saída ou o lugar da mesa que está servido com a xícara amarela, etc...), ou seja não houver qualquer fator que realize uma espécie de enumeração das cadeiras, o que irá importar, de fato, é a posição relativa dos presidentes entre si, portanto temos que as cinco configurações de mesa exibida acima representam a mesma permutação circular.

Isto é, as cinco permutações em linha, ABCPE, BCPEA, CPEAB, PEABC e EABCP, correspondem a uma única permutação circular. Se considerarmos que são $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ permutações simples e que cada grupo de 5 permutações em linha corresponde a uma única permutação circular, temos então $\frac{5!}{5} = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutações circulares.

Exemplo 12 *Quantas rodas de crianças podemos formar com 12 crianças?*

Solução: Inicialmente, pense que você não pode fazer a roda girar, ou seja, os lugares fossem enumerados. Nesse sentido, é claro que podemos dispor as crianças em roda de 12! maneiras distintas. Agora, observe que qualquer disposição das 12 crianças em rodas pode ser considerada a mesma se fizermos 12 giros. Assim, o número de rodas de crianças que podemos formar com 12 crianças é $\frac{12!}{12} = 11!$.

Definição 2 *Uma permutação circular de n objetos distintos é qualquer modo de colocar esses n objetos em círculo.*

Existem quantas permutações circulares num conjunto de n objetos distintos? Iremos encontrar a resposta para essa pergunta de dois modos distintos:

(1º modo) Considere que se uma permutação em círculo pode ser obtida a partir de outra por rotação dos elementos, então estas duas permutações são consideradas iguais. Portanto, cada uma das $n!$ permutações simples distintas dos n elementos, analisando como se elas estivessem em linha, é contada n vezes, pois existe exatamente n possibilidades de se rotacionar n elementos em torno de um círculo até voltar a situação inicial, ou seja a cada grupo de n permutações em linha corresponde a uma única permutação circular. Desta forma, concluímos que o número de permutações circulares de n objetos distintos, representa-se por P_n^c é dado por:

$$P_n^c = \frac{n!}{n} = \frac{n \times (n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

(2º modo) Como inicialmente não há lugares vagos, não existe referencial de direita ou esquerda, perto ou longe, etc... . Temos que para o 1º objeto a ser inserido na roda há uma única opção. Já para inserir o 2º objeto, após termos colocado o primeiro, os $n-1$ lugares restantes passaram a ter uma espécie de enumeração (graças ao referencial dado pelo 1º objeto), temos então $n-1$ maneiras distintas de colocarmos o 2º objeto. Para inserir o 3º objeto, após termos colocado o segundo, temos $n-2$ maneiras distintas de colocarmos o 2º objeto, e assim sucessivamente. Portanto, pelo princípio Fundamental da Contagem temos

$$P_n^c = 1 \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = (n-1)!$$

1.6 Combinação Simples

Trataremos agora de problemas onde a ordem dos elementos não é relevante. Vejamos um exemplo:

Exemplo 13 *Quantos segmentos de reta podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano?*

Solução: O problema basicamente trata de dados 14 pontos, de quantos modos distintos podemos escolher dois para traçarmos um segmento de reta. Inicialmente, pensando no P.F.C., podemos dividir a resolução do nosso problema em duas etapas.

1ª etapa: Escolher a primeira extremidade do segmento.

2ª etapa: Uma vez escolhida a 1ª extremidade, escolher a segunda extremidade do segmento.

Temos para a 1ª decisão 14 possibilidades já para a 2ª decisão temos 13 possibilidades. Pelo P.F.C teríamos: $14 \times 13 = 182$ segmentos distintos.

Entretanto, numerando os pontos por P_i com $1 \leq i \leq 14$, observe que dentre essas 182 possibilidades, encontra-se os casos (P_1, P_2) e (P_2, P_1) que representam o mesmo segmento, entretanto estão sendo contados como se fossem distintos. Observe a figura:

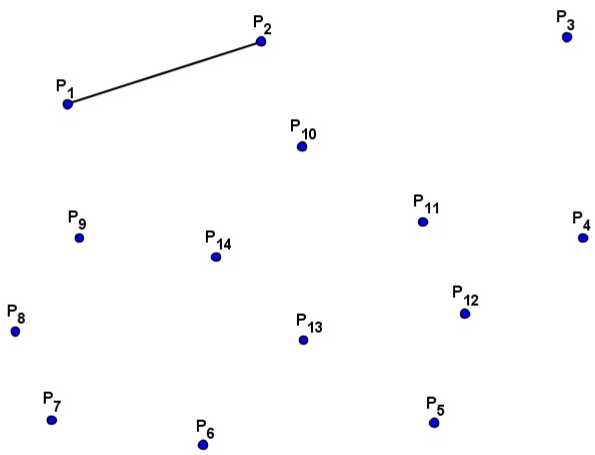

Figura 1.14:

Percebe-se então que todo segmento está sendo contado duas vezes (2!). Para corrigir esse excesso, basta dividirmos o resultado encontrado por 2.

Temos portanto:

$$\frac{14 \times 13}{2} = 91$$

segmentos distintos.

Exemplo 14 *(FUVEST - adaptada) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos onde cada caractere é formado por uma matriz de 6 pontos dos quais pelo menos um se destaca em relação aos outros. Assim por exemplo, representamos as letras M e Z da seguinte forma:*

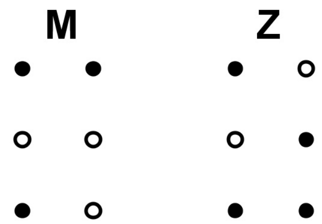

Figura 1.15:

Qual o número máximo de caracteres distintos, usando três pontos em auto-relevo, que podem ser representados neste sistema de escrita?

Solução: O problema basicamente trata de dados seis objetos (pontos) escolher três para ficar em alto-relevo. Usaremos o método indireto da Estratégia 5. Inicialmente, pensando no P.F.C., podemos dividir a resolução do nosso problema em três etapas. Primeiramente temos 6 possibilidades de definir o primeiro ponto que ficará em alto relevo, uma vez escolhido o primeiro, temos 5 possibilidades de escolher o 2º ponto a ficar em auto-relevo. Uma vez escolhido o segundo ponto, temos 4 possibilidades de escolha do 3º ponto a ficar em auto-relevo. Pelo P.F.C teríamos

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

caracteres distintos usando três pontos em auto-relevo. Agora observe que enumerando os pontos por P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 conforme figura abaixo:

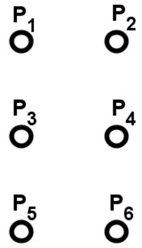

Figura 1.16:

temos que dentre as 120 possibilidades há por exemplo (P_1, P_2, P_3),(P_1, P_3, P_2), (P_2, P_1, P_3), (P_2, P_3, P_1), (P_3, P_1, P_2) e (P_3, P_2, P_1) que representam o mesmo caractere no Braille.

Percebe-se então que todo caractere da escrita Braille com três pontos em auto-relevo, está sendo contado seis vezes (3!). Para corrigir esse excesso basta dividir o resultado encontrado por 6. Temos portanto:

$$\frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

caracteres distintos com três pontos em auto-relevo.

Exemplo 15 *Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?*

Solução: O problema basicamente trata de dados 10 frutas, de quantos modos distintos podemos escolher quatro dessas para compor uma salada de fruta. Usaremos novamente o método indireto para resolver este problema.

Inicialmente, pensando no P.F.C., podemos dividir a resolução do nosso problema em quatro etapas. Primeiramente temos 10 possibilidades de definir a primeira fruta que irá compor a salada, uma vez escolhido a primeira, temos 9 possibilidades de escolher a segunda fruta. Uma vez escolhido a segunda, temos 8 possibilidades de escolha da terceira, e finalmente uma vez escolhida a terceira, temos 7 possibilidades de escolha da quarta fruta para compor a salada. Pelo P.F.C teríamos

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

saladas diferentes. Agora observe que para cada escolha de 4 frutas, podemos mudar a ordem dessas de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas distintas, conforme vimos em permutações simples. E todas essas 24 permutações das quatro frutas representam a mesma salada e foram computadas no resultado encontrado. Percebe-se então que cada salada está sendo contada 24 (4!) vezes. Para corrigir esse excesso devemos então dividir o resultado encontrado por 24. Temos portanto:

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{24} = 210$$

saladas diferentes.

Definição 3 *Chama-se Combinações simples de n elementos tomados p a p, com $p, n \in \mathbb{Z}$ onde $n \geq 1$ e $0 \leq p \leq n$, todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Em outras palavras, os subconjuntos de p elementos entre os n elementos dados. Representa-se o número de combinações simples por $C_{n,p}$. Já que estamos tratando de subconjuntos, vale a pena lembrar que os mesmos não admitem repetições de elementos.*

Vamos deduzir uma expressão matemática para $C_{n,p}$. Inicialmente, pensando no P.F.C., podemos dividir a resolução do nosso problema em p etapas. Primeiramente temos n possibilidades de definir a primeiro elemento que irá compor o subconjunto, uma vez escolhido o primeiro, temos $n-1$

possibilidades de escolher o segundo elemento. Uma vez escolhido o segundo, temos $n-2$ possibilidades de escolha do terceiro, e assim sucessivamente até que uma vez escolhido o $(p-1)$-ésimo elemento (penúltimo) da sequência, temos $n-p$ possibilidades de escolha do p-ésimo elemento (último) para compor o subconjunto. Pelo P.F.C teríamos

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p)$$

subconjuntos distintos.

Agora observe que para cada escolha de p elementos, podemos mudar a ordem desses de $p \times (p-1) \times (p-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = p!$ formas distintas, conforme vimos em permutações simples. E todas essas $p!$ permutações dos p elementos representam o mesmo subconjunto e foram computadas no resultado encontrado. Percebe-se então que cada subconjunto está sendo contado $(p!)$ vezes. Para corrigir esse excesso devemos então dividir o resultado anteriormente encontrado por $p!$. Temos portanto:

$$\begin{aligned} C_{n,p} &= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p)}{p!} \\ &= \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.7 Permutações com Repetição

Em algumas situações nos deparamos com permutação de elementos nem todos distintos, nesse caso, devemos ter uma maior atenção no cálculo da mesma. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 16 *Quantos são os anagramas da palavra BANANA?*

Solução: Iremos solucionar esse problema de dois modos distintos:

(1º modo) Para formar um anagrama de "BANANA" temos que arrumar as 3 letras A, as duas letras N e a letra B em 6 lugares, —,—,—,—,—,—. O número de modos de escolher os três lugares onde serão colocados as letras A, veja Equação 1.5, é $C_{6,3}$. Em seguida temos $C_{3,2}$ de escolher os lugares onde serão colocadas as duas letras N e, por fim temos um único modo de colocar a letra B ($C_{1,1}$). Assim, temos que existem,

$$C_{6,3} \times C_{3,2} \times C_{1,1} = 20 \times 3 \times 1 = 60$$

anagramas distintos.

(2º modo) Engana-se quem acha que basta tomarmos a permutação simples de 6 elementos, dessa forma só estaria correto se todas as letras que compõem BANANA fossem distintas, o que não é o caso. Imagine que as três letras A, bem como as duas letras N, sejam distinguíveis entre si, chamando-as de A_1, A_2, A_3, N_1 e N_2. Vamos considerar por exemplo o anagrama BANANA, permutando primeiramente as letras A, teremos as formas:

BA_1NA_2NA_3, BA_1NA_3NA_2, BA_2NA_1NA_3, BA_2NA_3NA_1, BA_3NA_1NA_2 e BA_3NA_2NA_1. Que representam o mesmo anagrama. Vale a pena lembrar que já sabíamos que haveriam $3! = 6$ maneiras de se permutar 3 elementos supostamente distintos, como visto em permutações simples. Agora tomando por exemplo BA_1NA_2NA_3, e permutando as letras N, teremos as formas:

B$A_1N_1A_2N_2A_3$ e B$A_1N_2A_2N_1A_3$.

Também já era do nosso conhecimento que haveria $2! = 2$ maneiras de se permutar 2 elementos supostamente distintos.

Evidente que para as outras cinco composições, também geraríamos duas "novas" formatações, totalizando 12 "novos" anagramas, que na realidade são todos iguais ao anagrama BANANA.

Imaginando que as 6 letras de BANANA fossem distintas, obteríamos 6! anagramas, entretanto acabamos de mostrar que a cada 12 desses anagramas imaginados corresponde um só na realidade. Portanto o número de anagramas pedido é:

$$\frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{12} = 60.$$

Exemplo 17 *Uma urna contém 10 bolas, sendo 3 bolas pretas iguais, 3 bolas brancas iguais, 2 bolas verdes iguais e 2 bolas azuis iguais. Quantas são as maneiras diferentes de se extrair, uma a uma, as 10 bolas da urna?*

Solução: Iremos solucionar esse problema de dois modos distintos:
(1º modo) Para formar uma extração das 10 bolas temos que arrumar as três bolas pretas, as três bolas brancas, as duas bolas verdes e duas bolas azuis em linha, —,—,—,—,—,—,—,—,—,—. O número de modos de escolher os 3 lugares onde serão colocados as três bolas pretas é $C_{10,3}$. Depois disso temos $C_{7,3}$ de escolher os 3 lugares onde serão colocadas as três bolas brancas, após isso temos $C_{4,2}$ modos de colocar as bolas verdes e, por fim, temos um único modo de escolher os 2 lugares onde serão colocadas as duas bolas azuis ($C_{2,2}$). Assim, temos que existem,

$$C_{10,3} \times C_{7,3} \times C_{4,2} \times C_{2,2} = 120 \times 35 \times 6 \times 1 = 25200$$

extrações distintas.
(2º modo) Imagine que as três bolas pretas, as três bolas brancas, as duas bolas verdes, bem como as duas bolas azuis, sejam distinguíveis entre si, chamando-as de P_1, P_2 e P_3 as pretas, B_1, B_2 e B_3 as brancas, V_1 e V_2 as verdes, além de A_1 e A_2 as azuis. Uma possível sequência de extração é "$P_1, P_2, P_3, B_1, B_2, B_3, V_1, V_2, A_1, A_2$", se pensarmos na permutações apenas

das bolas pretas supostamente distintas temos $3! = 6$ modos de arrumá-las, para cada um desses 6 modos, podemos permutar as bolas brancas de $3! = 6$ modos distintos, o que já $3!3! = 6.6 = 36$ formatações distintas apenas permutando as bolas pretas e as bolas brancas. Para cada uma dessas 36 arrumações supostamente distintas, podemos permutar as duas bolas verdes de $2! = 2$ modos distintos, o que totaliza $36.2 = 72$ arrumações. Finalmente, para cada uma dessas 72 arrumações supostamente distintas, podemos permutar as duas bolas azuis de $2! = 2$ modos distintos, o que totaliza $72.2 = 144$ arrumações. Imaginando que as 10 bolas fossem distintas, obteríamos 10! sequências distintas, entretanto acabamos de mostrar que a cada 144(3!3!2!2!) dessas extrações imaginadas corresponde uma só na realidade. Portanto o número de extrações pedido é:

$$\frac{10!}{3!3!2!2!} = 25200$$

extrações distintas.

Definição 4 *Permutação com Repetição: Uma permutação com repetição de n objetos com x_1 deles iguais a a_1, x_2 deles iguais a $a_2, \cdots$, x_r deles iguais a a_r é qualquer coleção ordenada desses n objetos.*

Existem quantas permutações com repetição num conjunto de n objetos com x_1 deles iguais a a_1, x_2 deles iguais a a_2, $\cdots$, x_r deles iguais a a_r e $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$?

Generalizando as ideias presentes nas soluções (modo 1), dos Exemplos 16 e 17, veja em Santos, et. al [7], se desejarmos permutar n elementos, com x_1 deles iguais a a_1, x_2 deles iguais a a_2, $\cdots$, x_r deles iguais a a_r, representa-se por $P_n^{x_1,x_2,\cdots,x_r}$, precisamos escolher x_1 lugares para a colocação dos $a_1's$. Dos $n - x_1$ lugares restantes, escolher x_2 para a colocação dos $a_2's$ e assim por diante, obtendo:

$$\begin{aligned} P_n^{x_1,x_2,\cdots,x_r} &= C_{n,x_1} \times C_{n-x_1,x_2} \times C_{n-x_1-x_2,x_3} \times \cdots \times C_{n-x_1-x_2\cdots-x_{r-1},x_r} \\ &= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)} \times \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \times \frac{(n-x_1-n_2)!}{x_3!(n-x_1-x_2-x_3)!} \\ & \cdots \times \frac{(n-x_1-x_2-\cdots-x_{r-1})!}{x_r!(n-x_1-x_2-\cdots-x_r)!} \end{aligned}$$

Já que $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, temos $(n - x_1 - x_2 - \cdots - x_r)! = 0! = 1$. Daí

$$P_n^{x_1,x_2,\cdots,x_r} = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}. \tag{1.6}$$

1.8 Aplicações dos conceitos fundamentais

Apresentaremos nessa seção tópicos de Análise Combinatória que são tratados pela maioria dos estudantes como aplicação direta de fórmula e são considerados, em sua maioria, conceitos independentes dos fundamentais vistos na seção anterior. Nosso grande desafio nesse momento então é o de resolver os problemas a seguir sem nos preocuparmos em criar fórmula alguma. Um dos nossos objetivos nessa seção, é abordá-los como exercícios (aplicações) dos conceitos fundamentais vistos nas seções anteriores.

1.8.1 Arranjo Simples

Chama-se problema de Arranjo Simples, todo aquele que dados n objetos, queremos montar sequências ordenadas com p destes objetos.

Embora a fórmula apresentada na maioria dos livros do ensino médio seja extremamente simples, é totalmente desnecessário usá-la em resoluções de problemas, visto que situações que envolvem arranjos simples são aplicações muito diretas do P.F.C.. Observe os exemplos a seguir:

Exemplo 18 *(Cesgranrio) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?*

Solução: Usando o P.F.C podemos dividir o nosso problema em três etapas. Para escolhermos o nome do país estará escrito no 1º lugar da tampinha temos 24 possibilidades, uma vez escrito o 1 º lugar, para o 2º lugar restam 23 opções e finalmente, uma vez escrito o 1º e o 2º lugares da tampinha, para o 3º restam 22 possibilidades. Assim pelo P.F.C temos:

$$24 \times 23 \times 22 = 12144$$

tampinhas distintas.

Exemplo 19 *Quantas palavras de duas letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 12 letras?*

Solução: Usando o P.F.C podemos dividir o nosso problema em duas etapas. Para escolhermos a 1º letra temos 12 possibilidades. Uma vez escolhida a 1ª letra, para 2ª letra do anagrama restam 11 opções. Assim pelo P.F.C temos:

$$12 \times 11 = 132$$

palavras distintas.

1.8.2 Arranjo Completo (com repetição)

Alguns problemas onde se deseja montar sequências com p elementos dados n objetos, permitem que exista repetição de elementos na referida sequência. A esses modelos chamamos de problemas de Arranjo Completo ou simplesmente arranjo com repetição. Este conceito assim como o anterior, também pode ser visto como uma aplicação direta do P.F.C..

Exemplo 20 *A senha de um banco é composta por quatro dígitos escolhidos entre dez algarismos (de 0 a 9) podendo haver repetição do mesmo algarismo na senha. Quantas senhas distintas podem ser formadas?*

Solução: Usando o P.F.C podemos dividir a resolução do nosso problema em quatro decisões. Perceba que o dígito zero pode ser utilizado tanto na unidade como na dezena, centena ou milhar, pois se trata de uma senha de banco. Para a casa da unidade temos 10 possibilidades, uma vez preenchida a unidade, para a dezena temos 10 possibilidades, uma vez preenchida a dezena, temos 10 possibilidades de preenchermos a centena e finalmente uma vez preenchida a centena temos 10 possibilidades de preenchermos a milhar. Pelo P.F.C temos

$$10.10.10.10 = 10^4 = 10000$$

senhas distintas.

1.8.3 Permutação Caóticas(desarranjos)

Antes de explicarmos o que são problemas de Permutações Caóticas, observe o exemplo abaixo, onde é de fundamental importância relembrarmos o Princípio da inclusão e exclusão.

Exemplo 21 *Quantos anagramas da palavra Brasil não apresentam as letras B, R e A nas suas posições de origem?*

Solução: Definimos B como sendo o conjunto das permutações simples em que a letra B está em sua posição original. De forma análoga definimos R e A como sendo o conjunto das permutações simples em que as letras R e A estão, respectivamente, em suas posições de origem. O que estamos interessados em determinar é o número de elementos do complementar do conjunto "$B \cup R \cup A$". Notação: $\complement(B \cup R \cup A)$. É fácil ver que $|B| = |R| = |A| = 4!$. Além disso temos que $|B \cap R| = |B \cap A| = |R \cap A| = 3!$ e ainda que $|B \cap R \cap A| = 2!$. Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos:

$$\begin{aligned}
|\complement(B \cup R \cup A)| &= 5! - |(B \cup R \cup A)| \\
&= 5! - |B| + |R| + |A| - |B \cap R| - |B \cap A| \\
&\quad -|R \cap A| + |B \cap R \cap A| \\
&= 5! - (4! + 4! + 4! - 3! - 3! - 3! + 2!) = 64.
\end{aligned}$$

Logo 64 anagramas satisfazem a restrição.

Uma permutação dos elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, é chamada de caótica (ou simplesmente desarranjo) quando nenhum dos a_i's se encontra na posição original, isto é, na *i-ésima* posição. Portanto um problema de permutações Caóticas é todo aquele que se deseja encontrar quantas permutações caóticas distintas podem ser formadas dados $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$.

Exemplo 22 ***Exemplo 22:*** *Quatro alunos de uma turma de Licenciatura em Matemática fizeram uma recuperação final da disciplina Matemática Discreta. A professora coletou as provas resolvidas pelos alunos e imediatamente repassou para eles mesmos corrigirem. De quantos modos distintos é possível realizar esta correção, sem que um aluno receba a própria prova?*

Solução: Se cada aluno não pode receber a sua prova, o que está se pedindo neste problema é o número de permutações caóticas de 4 elementos.

Considere A_1 o conjunto das distribuições onde o primeiro aluno recebe sua prova, A_2 o conjunto das distribuições onde o segundo aluno recebe sua prova, e assim sucessivamente. Considere também $(A_1 \cap A_2)$ como sendo o conjunto das distribuições onde o primeiro e o segundo aluno recebem as suas respectivas provas, $(A_1 \cap A_3)$ como sendo o conjunto das distribuições onde o primeiro e o terceiro aluno recebem as suas respectivas provas, e assim sucessivamente. De forma análoga denotamos as "intersecções três a três" e a "interseção dos quatro conjuntos". Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos

$$\begin{aligned} |\complement(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| &= 4! - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ &\quad -|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ &\quad +|A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} |\complement(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| &= 4! - [3! + 3! + 3! + 3! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! \\ &\quad -2! + 1! + 1! + 1! + 1! - 0!] = 24 - 15 = 9. \end{aligned}$$

Portanto existem 9 modos distintos das provas serem distribuídas sem que algum aluno receba a sua prova.

Existem diversas soluções de problemas em Análise Combinatória onde cada possibilidade de ocorrência de um determinado experimento é associada a uma solução de uma equação de n variáveis com coeficientes unitários. As duas próximas seções abordam esse procedimento.

1.8.4 Equações Lineares nos inteiros positivos

Trataremos aqui de situações onde cada possibilidade de ocorrer um determinado experimento está associada a uma solução de uma equação de n variáveis "inteiras e positivas", com coeficientes unitários.

Exemplo 23 *Qual é o número de maneiras de se obter soma 6, no lançamento sucessivo de 4 dados:*

Solução: Considere $d_i, 1 \leq i \leq 4$, o número que aparece na face superior do dado i. O problema em questão é equivalente a calcular a quantidade de soluções inteiras positivas da equação $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6$. Consideremos o seguinte esquema:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Se selecionarmos três sinais de "+" nessa soma, exemplo:

$$1\underline{+}1 + 1\underline{+}1\underline{+}1 + 1$$

estaremos dividindo-a em quatro partes, que são:

1ª parte: Quantidade de $1's$ antes do 1º sinal selecionado de +. Associaremos essa quantidade a d_1.

2ª parte: Quantidade de $1's$ entre o 1º e o 2º sinal selecionados de +. Associaremos essa quantidade a d_2.

3ª parte: Quantidade de $1's$ entre o 2º e o 3º sinal selecionados de +. Associaremos essa quantidade a d_3.

4ª parte: Quantidade de $1's$ depois do 3º sinal selecionado de +. Associaremos essa quantidade a d_4.

Note que $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6$. Para o nosso exemplo $1\underline{+}1 + 1\underline{+}1\underline{+}1 + 1$ temos $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$ e $d_4 = 2$. Deste modo, cada vez que escolhermos 3 dos 5 sinais de +, obteremos uma solução do nosso problema. Portanto, pela equação (1.5), temos:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

resultados possíveis.

Exemplo 24 *Calcular o número de soluções inteiras positivas da equação $x+y+z=10$.*

Solução: Consideremos o seguinte esquema:

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

Se selecionarmos dois sinais de "+" nessa soma, estaremos dividindo-a em três partes, que são:
1ª parte: Quantidade de $1's$ antes do 1º sinal selecionado de $+$. Associaremos essa quantidade a x
2ª parte: Quantidade de $1's$ entre o 1º e o 2º sinal selecionados de $+$. Associaremos essa quantidade a y
3ª parte: Quantidade de $1's$ depois do 2º sinal selecionado de $+$. Associaremos essa quantidade a z
Por exemplo, escolhendo os dois sinais de adição em destaque na soma conforme abaixo

$$1+1+1+1\underline{+}1+1+1\underline{+}1+1+1$$

temos $x = 4$, $y = 3$ e $z = 3$. Note que $4 + 3 + 3 = 10$.

Deste modo, cada vez que escolhermos 2 dos 9 sinais de "+", obteremos uma solução inteira positiva da equação. Portanto, pela equação (1.5), temos:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

soluções inteiras positivas.

1.8.5 Equações Lineares nos inteiros não negativos

Agora veremos problemas onde cada possibilidade de ocorrer um determinado experimento é associado a uma solução de uma equação de n variáveis "inteiras não negativas", com coeficientes unitários. Esse tipo de problema é chamado em alguns livros de combinação com repetição ou combinações completas.

Exemplo 25 *De quantos modos podemos comprar 3 bolas de sorvete em uma sorveteria que nos oferece 5 sabores?*

Solução: Perceba agora que não podemos utilizar apenas uma combinação simples de 5 tomados 3 a 3, pois nesse caso podemos ter repetição de um mesmo sabor. Representando o número de bolas para cada um dos cinco sabores por s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5, temos que:

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 3$$

com $s_i \geq 0$, para $1 \leq i \leq 5$. Considere o seguinte esquema composto por 4 tracinhos e 3 pontinhos, por exemplo: $|\bullet||\bullet\bullet|$, onde os 4 tracinhos determinam cinco espaços que associaremos aos sabores e os 3 pontinhos representam as 3 bolas de sorvete.

Assim, para o nosso exemplo temos:

- Nenhuma bola do 1º sabor (antes do 1º tracinho).
- Uma bola do 2º sabor (entre o 1º e o 2º tracinho).
- Nenhuma bola do 3º sabor (entre o 2º e o 3º tracinho).
- Duas bolas do 4º sabor (entre o 3º e o 4º tracinho).
- Nenhuma bola do 5º sabor (após o 4º tracinho).

Deste modo, cada permutação de 4 tracinhos e 3 pontinhos, representa uma solução inteira não negativa da equação e consequentemente um modo diferente de comprar as 3 bolas. Portanto temos uma permutação com repetição dos 3 pontinhos e 4 tracinhos e segue da equação (1.6) que:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

formas distintas de comprar 3 bolas de sorvete.

Exemplo 26 *Qual é o número de soluções inteiras não negativas da equação:* $x + y + z = 7$*?*

Solução: Considere o seguinte esquema composto por 2 tracinhos e 7 pontinhos, por exemplo: $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet||\bullet\bullet$, onde os 2 tracinhos determinam 3 espaços que associaremos às variáveis e os 7 pontinhos representam a soma dessas variáveis.

Assim, para o nosso exemplo temos:

- $x = 5$ (antes do 1º tracinho)
- $y = 0$ (entre o 1º e o 2º tracinho)
- $z = 2$ (entre o 2º e o 3º tracinho)

Deste modo, cada permutação de 2 tracinhos e 7 pontinhos, representa uma solução inteira não negativa da equação. Portanto temos pela equação (1.6):

$$P_9^{2,7} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

soluções inteiras não negativas.

1.8.6 Kaplansk

Em alguns problemas de contagem deseja-se determinar o número de subconjuntos com p elementos de um conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$ nos quais não há números consecutivos. Para resolver problemas desta natureza normalmente se usa um resultado conhecido como Lema de Kaplansk, veja [4] para maiores detalhes. Nosso objetivo aqui neste texto é resolver problemas deste tipo com as técnicas abordadas até o momento, sem introduzir mais nenhuma fórmula. Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 27 *O bloco Papa-Léguas deseja desfilar em dois dias do carnaval 2014, escolhidos do sábado de Zé Pereira a quarta-feira de cinzas. De quantos modos é possível escolher os dias de forma que não haja desfiles em dias consecutivos?*

Solução: O problema trata de "dados cinco elementos (dias) em sequência, determinar de quantas maneiras distintas podemos escolher dois elementos que não sejam consecutivos". Consideremos os seguintes valores:
x: Quantidade de dias antes do 1º dia escolhido.
y: Quantidade de dias entre o 1º e o 2º dias escolhidos.
z: Quantidade de dias depois do 2º dia escolhido.
É fácil ver que $x + y + z = 3$, com $x \geq 0$, $y \geq 1$ e $z \geq 0$. Fazendo $a = y - 1$ temos que $x + a + 1 + z = 3 \Rightarrow x + a + z = 2$, agora com $x \geq 0$, $a \geq 0$ e $z \geq 0$. Como nos Exemplos 25 e 26, associamos uma solução de $x + a + z = 2$ com uma permutação dos objetos $||\bullet\bullet$.

Sabemos que existem $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ soluções inteiras não negativas, que representam 6 formas distintas de se escolher os dois dias não consecutivos de sábado a quarta-feira.

Em algumas situações, queremos determinar de quantos modos podemos formar um subconjunto com p elementos a partir do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$, sem que haja elementos consecutivos e distribuídos ao longo de um círculo. Esse procedimento é comumente colocado nos livros como o "2º Lema de Kaplansk", veja [4] para maiores detalhes. Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 28 *3 pessoas devem se sentar em 8 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?*

Solução: O problema trata basicamente de dados 8 cadeiras escolher 3 que não sejam consecutivas duas a duas. Primeiramente, considere as cadeiras enumeradas, de 1 a 8. O número total de modos será a soma dos números de formatações em que a cadeira de número "1" figura com o número de formatações que a cadeira número "1" não figura.

- Formatações que a cadeira nº "1" figura: Para compor o restante das cadeiras devemos escolher duas da 3ª a 7ª cadeira, não podendo escolher cadeiras consecutivas (a 2ª e a 8ª cadeira estão de fora pois são adjacentes a 1ª). Isto é equivalente ao número de soluções da equação $x + y + z = 3$, com $x \geq 0$, $y \geq 1$ e $z \geq 0$. Como visto no Exemplo 27, sabemos que há 6 possibilidades.

- Formatações que a cadeira nº "1" não figura: Para compor a mesa devemos escolher três da 2ª a 8ª cadeira, não podendo escolher cadeiras consecutivas. Isto é equivalente ao número de soluções da equação $x + y + z + w = 4$, com $x \geq 0$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ e $w \geq 0$. Fazendo $a = y - 1$ e $b = z - 1$ temos que $x + a + 1 + b + 1 + w = 4$ ou seja, $x + a + b + w = 2$, agora com $x \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ $z \geq 0$. Podemos associar uma solução de $x + a + b + w = 2$ com uma permutação dos objetos $|||\bullet\bullet$. Sabemos que existem $P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$ soluções distintas.

Portanto, temos $6 + 10 = 16$ formatações possíveis de escolha de três cadeiras sem que tenhamos cadeiras consecutivas.

A princípio, ao ler o enunciado do exemplo a seguir, alguns colegas podem achar que o problema não está relacionado com a distribuição ao longo de um "círculo". Entretanto é apenas uma falsa aparência, observe

Exemplo 29 *Clarinha deve ter aula de balé três vezes por semana, durante um semestre. Quantos são os modos de escolher os dias de aula, se Clarinha não deseja ter aulas em dias consecutivos?*

Solução: Geralmente consideramos que uma semana tem início no domingo e término no sábado. Perceba que se considerarmos uma semana isolada, o domingo (1º dia) e o sábado (7º e último dia) são os extremos e portanto não são considerados dias consecutivos. Porém ao longo de um semestre, se Clarinha treinar aos sábados e domingos, estes passam a ser dois dias adjacentes e de fato, Clarinha não deseja isso. É como se os dias de uma semana, considerados ao longo de um semestre, formassem um laço, e sábados e domingos passam a ser dias consecutivos. Portanto o problema pretende determinar o número de subconjuntos com 3 elementos a partir do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$, sem que haja elementos consecutivos, e distribuídos ao longo de um "círculo". Temos que escolher 3 dos 7 dias da semana, não podendo escolher dois dias adjacentes e sendo sábado e domingo dias consecutivos. Somaremos o número de formatações em que o domingo figura com o número de formatações em que o domingo não figura.

- ***Formatações que o domingo figura:*** Para compor o restante dos dias da semana devemos escolher dois dias entre os quatro disponíveis, não podendo escolher dias consecutivos (se domingo figura então também não pode ser escolhido nem a segunda nem o sábado). Isto é equivalente ao número de soluções da equação $x + y + z = 2$, com $x \geq 0$, $y \geq 1$ e $z \geq 0$. Fazendo $a = y - 1$ temos que $x + a + 1 + z = 2$ ou seja, $x + a + z = 1$, agora com $x \geq 0$, $a \geq 0$ e $z \geq 0$. Associamos uma solução de $x + a + z = 1$ com uma permutação dos objetos $||\bullet$. Sabemos que existem $P_3^{2,1} = \dfrac{3!}{2!} = 3$ soluções inteiras não negativas, que representam 3 formas distintas de se escolher os dois dias de terça-feira a sexta-feira.

- ***Formatações que o domingo não figura:*** Para compor o restante dos dias da semana devemos escolher três dias entre os seis disponíveis, não podendo escolher dias consecutivos. Isto é equivalente ao número de soluções da equação $x + y + z + w = 3$, com $x \geq 0$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ e $w \geq 0$. Fazendo $a = y - 1$ e $b = z - 1$ temos que $x + a + 1 + b + 1 + w = 3$ ou seja, $x + a + b + w = 1$, agora com $x \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ $z \geq 0$. Podemos associar uma solução de $x + a + b + w = 1$ com uma permutação dos objetos $|||\bullet$. Sabemos que existem $P_4^{3,1} = \dfrac{4!}{3!1!} = 4$ soluções distintas.

Portanto, temos $3 + 4 = 7$ modos distintos de se escolher os três dias.

Capítulo 2

Introdução à teoria dos Grafos

A teoria dos grafos é um campo da matemática que tem muitas aplicações, em especial na área de combinatória. Em muitos casos é muito natural seu uso, por exemplo, quando se representa caminhos que unem cidades, equipes que jogam entre si em um torneio, pessoas que se conhecem ou falam o mesmo idioma, etc. Neste capítulo estudaremos algumas propriedades dos grafos.

2.1 Grafos

Para introduzirmos o conceito de grafo, observe a situação a seguir:

Será que somos capazes de desenhar a figura abaixo sem retirar o lápis do papel começando e terminando no mesmo ponto sem percorrer a mesma linha duas vezes? Caso não seja possível começar e terminar no mesmo ponto, podemos começar por um determinado ponto e terminar em um ponto diferente do que iniciamos?

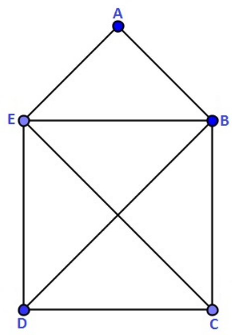

Figura 2.1:

Será esse problema aplicável no nosso cotidiano? Pensemos num povoado com pequeno orçamento. O serviço de recolhimento de lixo é realizado por um pequeno caminhão. Queremos evitar o desperdício; uma boa ideia seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada rua e retornar ao ponto de partida. Na verdade, se considerarmos as ruas desse povoado como sendo os segmentos de reta da Figura 2.1 e os pontos sendo o "encontro" dessas ruas, temos o mesmo problema.

Nesse caso só nos interessa considerarmos um conjunto de pontos e um conjunto de ligações entre eles. A essa estrutura chamamos de grafo. No nosso estudo, a esses pontos chamaremos de vértices e os segmentos que os une de arestas. Apresentamos duas formas de representar esta estrutura.

- Por um desenho, isto é, uma representação gráfica como exibido na Figura 2.1.

- Por duas listas, uma dizendo quais são os vértices e a outra exibindo quais desses vértices se relacionam com quais (as arestas). Por exemplo no grafo da Figura 2.1 podemos representá-lo de forma sucinta como:

  $V = \{A; B; C; D; E\}$ e

$$A = \{(A, B); (A, E); (B, E); (B, C); (B, D); (E, D); (E, C); (C, D)\}.$$

Não queremos aqui aprofundarmos em teoria alguma, trata-se apenas de uma breve introdução, que objetiva o convencimento de todos quanto à utilidade dos conceitos e processos que serão apresentados. Um dos objetivos dessa seção é o de resolver três problemas clássicos, o de coloração de mapas, o problema das pontes e o problema das ligações de água, luz e telefone. No entanto faz-se necessário expor alguns conceitos, notações e teoremas.

Definição 5 *Um grafo é uma tripla ordenada (V, A, g) onde*

- $V=$ *um conjunto não vazios de vértices.*
- $A=$ *um conjunto de arestas (arcos).*
- $g=$ *uma função que associa a cada aresta a um par não ordenado de vértices $\{P_i, P_j\}$, chamados de extremos de a.*

Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os vértices são adjacentes e que a aresta é incidente aos vértices. O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice P é chamado grau do vértice e simbolizado por $d(P)$.

Para demonstrarmos nosso primeiro resultado da teoria de grafo, faz-se necessário algumas notações. Para isso, denotaremos um grafo pela letra G e representaremos por $V(G)$ e $A(G)$ respectivamente, os conjuntos de vértices e das arestas de G.

Teorema 4 *A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas. Isto é:*

$$\sum_{P \epsilon V(G)} d(P) = 2.|A|.$$

Demonstração: Quando efetuamos a soma dos graus de todos os vértices de um grafo, estamos contando as extremidades de cada uma das arestas uma única vez, afinal cada uma dessas extremidades incide (está "plugada") em algum vértice. Como todas as arestas tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes. ■

Corolário 4.1 *Todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração: Considere um grafo G. Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar, pois a paridade dessa soma independe dos vértices de grau par. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas portanto é um número par. Assim não podemos ter um número ímpar de vértices de grau ímpar. ■

Consideremos o problema dos apertos de mão que trata da seguinte situação:

"Se os convidados de uma festa apertarem as mãos quando se encontrarem pela primeira vez, o número de convidados que apertam a mão um número ímpar de vezes é par (independentemente se todos os apertos possíveis foram dados ou não)."

Para verificarmos a veracidade do enunciado acima basta aplicarmos o Corolário 4.1, tomando os convidados como os vértices e os apertos de mão com as arestas de um grafo. A seguir apresentaremos algumas curiosidades. Elas surgem constantemente de representações de situações concretas. São elas:

- Podemos construir um grafo no qual uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo? Podemos sim. É o que chamamos de laço. Observe a figura.

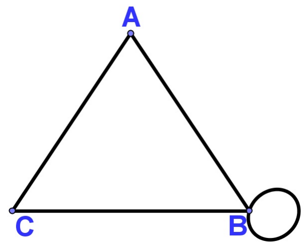

Figura 2.2:

O vértice B tem um laço e portanto devemos considerar $d(B) = 4$. Assim sendo, o Teorema 4 continua valendo.

- Podemos encontrar num Grafo dois vértices ligados por mais de uma aresta? Também podemos. A essas arestas chamamos “arestas Múltiplas” e neste caso chamaremos o grafo de multigrafo. Observe na Figura 2.3 que existem 3 arestas com extremidades nos vértices A e B, além de duas arestas com extremidades em A e D, o que faz dessa figura um “Multigrafo”.

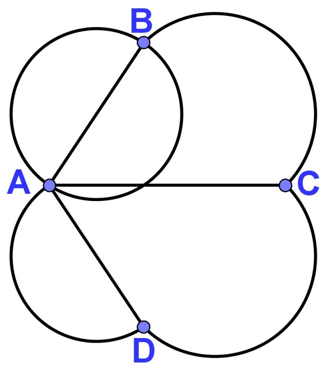

Figura 2.3:

Grafos que não apresentam laços nem arestas múltiplas são ditos ***Grafos simples***. Um conceito fundamental nessa teoria é o de grafos isomorfos.

Definição 6 *Dois grafos* (V_1, A_1, g_1) *e* (V_2, A_2, g_2) *são isomorfos se existirem bijeções* $f_1 : V_1 \to V_2$ *e* $f_2 : A_1 \to A_2$ *tais que para cada aresta* $a \in A_1$, $g_1(a) = \{P_i, P_j\}$ *se, e somente se,* $g_2[f_2(a)] = \{f_1(P_i), f_1(P_j)\}$.

Observe:

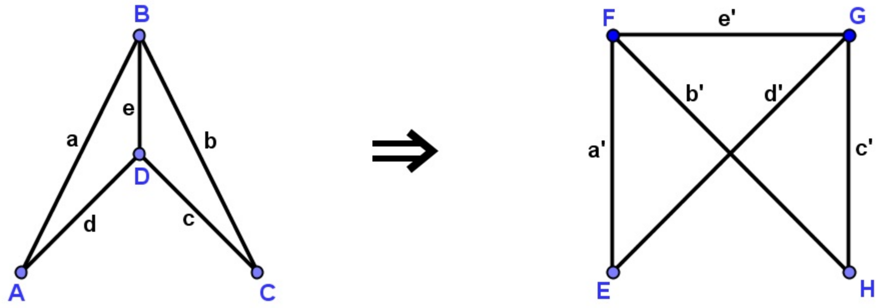

Figura 2.4:

Vamos estabelecer uma correspondência bijetiva entre os conjuntos de vértices e arestas:

$$f_1 : A \to E, B \to F, C \to H, D \to G$$

$$f_2 : a \to a', b \to b', c \to c', d \to d'$$

Estas funções funcionam perfeitamente. Se tomarmos a aresta d no primeiro grafo, que corresponde ao par de vértices $\{A, D\}$ a função f_2 fará a correspondência com d' que é uma aresta que corresponde ao par de vértices $\{E, G\}$ no segundo grafo. Se tomarmos o par de vértices $\{A, C\}$ no primeiro grafo, que não são ligados por uma aresta a função f_1 fará corresponder o par de vértices $\{E, H\}$ no segundo grafo, que também não são ligados. Portanto os dois grafos são isomorfos.

Esse conceito às vezes gera polêmica. É o mesmo grafo ou não? Claramente as características de um e de outro são as mesmas (graus, número de arestas e outras que veremos mais tarde). E na verdade esta não é uma questão realmente importante. O essencial é saber discernir quando dois grafos são isomorfos ou não.

O isomorfismo de grafos é fácil de estabelecer no caso de examinarmos grafos simples. Se pudermos encontrar uma função f_1 apropriada que leve vértices em vértices, então uma função f_2 que leve arestas em arestas é trivial porque existe no máximo uma aresta entre cada par de vértices. Portanto, os argumentos aqui colocados, nos levam ao seguinte teorema:

Teorema 5 *Dois grafos simples (V_1, A_1, g_1) e (V_2, A_2, g_2) são isomorfos se houver uma bijeção $f : V_1 \to V_2$ tal que para quaisquer vértices P_i e P_j de V_1, P_i e P_j são adjacentes se, e somente se, $f(P_i)$ e $f(P_j)$ são adjacentes. (A função f é chamada de isormofismo do grafo 1 no grafo 2).*

Definição 7 *G' é dito um subgrafo de G se $V(G') \subset V(G)$ e $A(G') \subset A(G)$.*

Por exemplo, na Figura 2.5 os grafos G' e G'' são subgrafos de G.

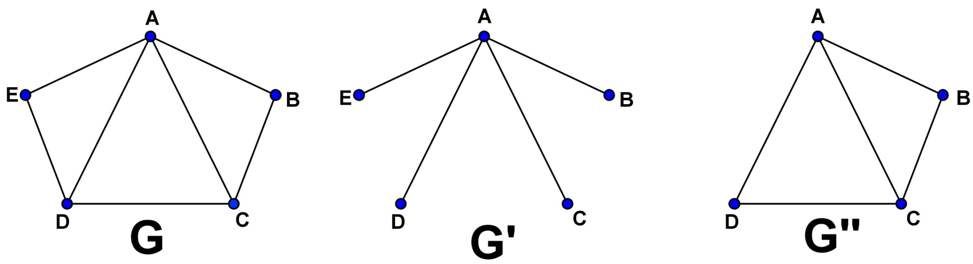

Figura 2.5:

2.2 Colorindo mapas

Trataremos agora do problema onde se deseja encontrar o menor número de cores necessárias para pintar um mapa sem que duas regiões adjacentes tenham a mesma cor.

Em 1852, como ninguém conseguiu desenhar um mapa que precisasse mais do que quatro cores para ser colorido, foi formulado a conjectura que deu origem ao Teorema das quatro cores, veja em Santos, et. al[7], demonstrado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken com o auxílio de três supercomputadores durante mais de 1000 horas. Na realidade Appel e Haken demonstraram que todos os mapas possíveis eram variações de 1500 tipos fundamentais, e os computadores conseguiram pintá-los com um máximo de quatro cores. Há quem acredite ainda que este teorema pode ser demonstrado com papel, lápis e umas poucas folhas.

Todo mapa pode ser identificado como um grafo, onde os países serão representados pelos vértices e as fronteiras que unem dois países serão representadas pelas arestas.

O ***número cromático*** de um mapa, ou de um grafo, é o menor número de cores necessário para pintá-lo, respeitando sempre a ideia que dois países vizinhos no mapa, ou dois pontos interligados no grafo, não podem ter a mesma cor. Notação: NC(G), lê-se "Número Cromático do grafo G".

Por exemplo, observe os seguintes grafos tipo polígono:

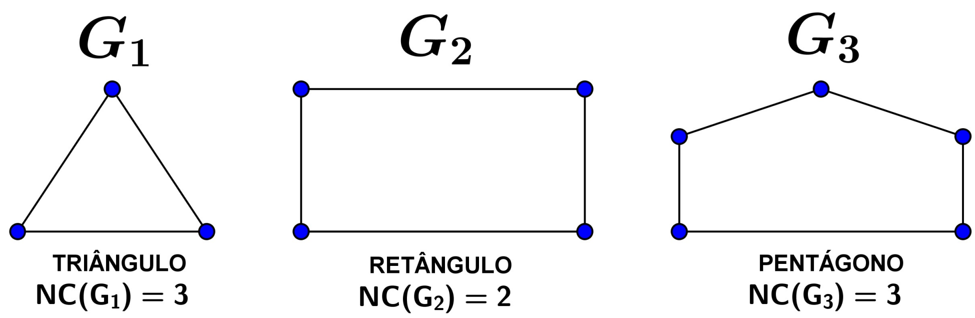

Figura 2.6:

Generalizando, quando um grafo G for do tipo polígono, com n vértices, temos: $NC(G) = 3$, se n for ímpar e $NC(G) = 2$, se n for par.

Encontrar o número cromático de um grafo é uma tarefa bastante difícil e não é conhecido algoritmo eficiente para realizar esta tarefa. Entretanto uma conclusão que podemos enunciar é a que se em um dado grafo há um subgrafo "triângulo", nesse caso garantimos que o seu número cromático é no mínimo 3.

Exemplo 30 *Observe o mapa das regiões do Brasil:*

Figura 2.7:

Qual é o menor número de cores necessário para pintar o mapa sabendo que regiões adjacentes não devem ser pintadas com a mesma cor?

Solução: Podemos representar o nosso mapa pela figura:

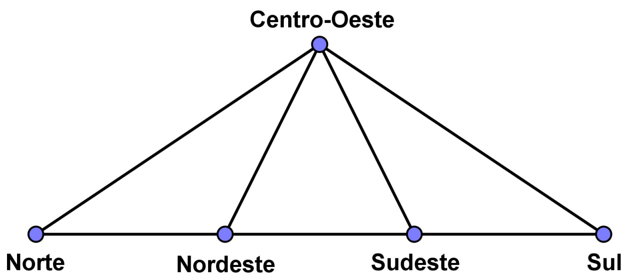

Figura 2.8:

Analisando o grafo, vemos que 2 cores não são suficientes para colori-lo, pois temos subgrafos triângulos. Nesse caso o número cromático é no mínimo 3. Para mostrar que apenas três cores bastam para pintá-lo, suponha que as três sejam vermelho, azul e amarelo. Inicialmente escolhemos um vértice, pode ser o Centro-Oeste por exemplo, e o colorimos de vermelho, em seguida colorimos todos os seus vizinhos de azul, nesse caso teremos regiões adjacentes pintadas com a mesma cor. Agora, escolhemos uma dessas regiões (pintadas de azul), pode ser o Nordeste por exemplo, e colorimos todos os seus vizinhos, com exceção do Centro-Oeste, de amarelo. Dessa forma temos:

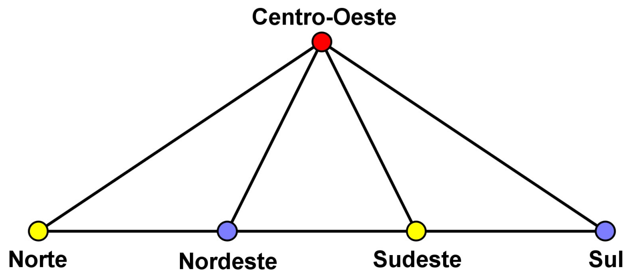

Figura 2.9:

A coloração de mapas é apenas um entre muitos problemas que podem ser explorados com o uso de grafos. A seguir trataremos de outras aplicações, que são o Problema das pontes e o Problema das ligações de água, luz e telefone.

2.3 Problema das pontes

Vamos retornar à figura do pequeno lugarejo tratado no início dessa seção. Na ocasião, perguntamos se você conseguiria desenhar a casinha abaixo sem tirar o lápis do papel. A Figura 2.10 mostra uma solução partindo do vértice A e, na verdade, o problema é bastante fácil.

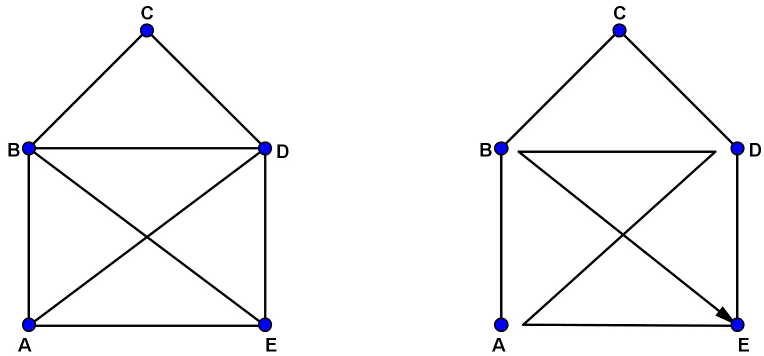

Figura 2.10:

Mas se quisermos começar pelo vértice B? Você pode tentar o tempo que quiser. O fato é que esse outro problema é impossível. Como veremos mais adiante, todas as soluções começam pelo vértice A e terminam pelo vértice E, ou vice-versa. Se começam em A terminam em E, e vice-versa. O problema tem origem no famoso problema das pontes de Köenisberg, considerado o marco fundador da Teoria dos Grafos. Os habitantes de Köenisberg (hoje Kaliningrado) se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes do Rio Prega, sem passar duas vezes na mesma ponte.

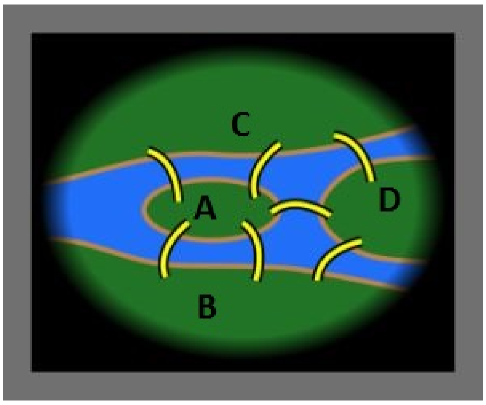

Figura 2.11:

Observamos que este problema dá origem a um grafo com arestas múltiplas. Leonard Euler mostrou que a resposta era negativa (veja Exemplo 31) estabelecendo uma condição necessária para a existência da solução, embora se acredite que a suficiência não lhe fosse desconhecida. Esta segunda parte foi publicada por Hierholzer em 1873, muito mais tarde.

Para entendermos melhor nosso problema, faz-se necessário conhecermos alguns conceitos, como o de grafo Euleriano além de alguns resultados que serão mostrados a seguir:

Um passeio de um vértice P_0 a um vértice P_s é uma sequência P_0 ,a_0, $P_1, a_1, P_2, a_2, \cdots ,P_{s-1}, a_{s-1}, P_s$ de vértices e arestas onde, para cada i, os extremos de a_i é o par $\{P_i, P_{i+1}\}$. O comprimento s do passeio é o número de arestas que ele contém; se uma aresta for usada mais de uma vez, ela deve ser contadas tantas vezes quantas for usadas. Se todas as arestas do passeio são distintas, o passeio é chamado trilha; se $P_0 = P_s$ o passeio é uma trilha fechada. Se todos os vértices são distintos (e automaticamente as arestas também serão) então temos um caminho e se $P_0 = P_s$ temos um ciclo.

Definição 8 *Um grafo com m arestas é dito euleriano se existe uma trilha fechada de comprimento m em G; em outras palavras, se podemos percorrer cada aresta uma e só uma vez partindo de um vértice e a ele retornando.*

Se o grafo, com m arestas não é euleriano mas tem uma trilha (não fechada) de comprimento m, ele é dito ***semieuleriano***.

Definição 9 *Um grafo G é dito conexo se existe um passeio entre quaisquer dois vértices de G.*

Observe alguns exemplos de grafos conexos e não conexos:

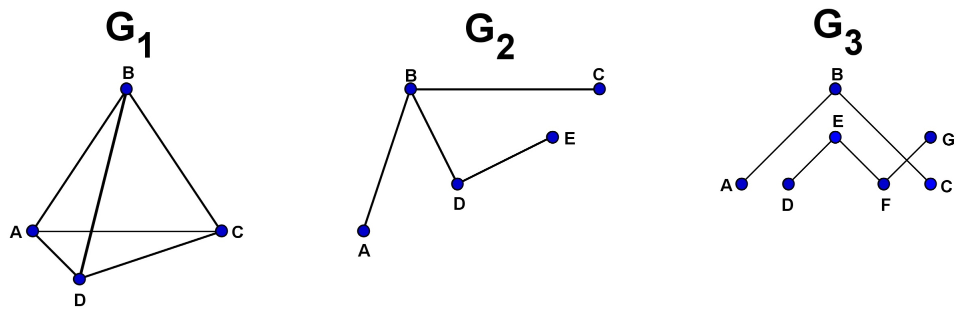

Figura 2.12:

Os Grafos G_1 e G_2 são conexos, enquanto o grafo G_3 não é conexo.

Definição 10 *Os componentes conexos de um grafo são os subgrafos conexos maximais deste grafo, ou seja, são os subgrafos conexos deste grafo que não estão estritamente contidos em outros subgrafos conexos.*

Lema 1 *Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples) G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração: Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. À partir de um vértice qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice v_0 qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar (pois cada vértice tem grau maior ou igual a 2), ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, em algum momento chegaremos num vértice já visitado, eo lema está provado. ■

A seguir apresentaremos o teorema de Euler, segundo Santos, et. al [7], o teorema de Euler é interessante sob dois pontos de vista: Caracteriza uma classe de grafos e ao mesmo tempo (sua demonstração) mostra como construir uma trilha fechada.

Teorema 6 *Teorema de Euler (Euler - 1736) Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.*

Demonstração:

($\rightarrow$) Suponhamos que G é euleriano de m arestas, ou seja, tenha uma trilha fechada de comprimento m. Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice da trilha deve ser obrigatoriamente par. Como todos os vértices de G estão na trilha, já que este é conexo, segue que todos os vértices de G tem grau par.

($\leftarrow$) Usaremos indução sobre o número de arestas m do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Seja G um grafo conexo com m arestas, $m \geq 1$, tal que todos os seus vértices tem grau par, como não há vértices isolados, concluímos que todos os seus vértices tem grau maior ou igual a dois, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m, o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T, e todos os vértices do grafo G tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H, que chamaremos de H', tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, esta componente conexa H' tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H', e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando (conectando) T com a trilha em H'. Mas isto contraria a maximalidade do comprimento de T. Portanto o comprimento de T é m e o grafo G é euleriano. ■

Definição 11 *Num grafo G, uma aresta $a \in A$ é denominada aresta de corte de G se $G_1 = G - \{a\}$ tiver mais componentes conexas do que G.*

Em particular, se G é um grafo conexo, uma **aresta de corte** a é uma aresta de modo que $G_1 = G - \{a\}$ seja desconexo. Da mesma forma um vértice $P_1 \in V$ é denominado **vértice de corte** de G desde que $G - \{P_1\}$ tenha mais componentes do que G.

Lema 2 *Seja G um grafo e sejam P_1 e $P_2 \in V$. Se existe um passeio de P_1 a P_2 em G, então existe um caminho de P_1 a P_2 em G.*

Demonstração: Se existe um passeio de P_1 a P_2 em G e, se esse passeio contém um vértice repetido, podemos encurtá-lo, removendo-lhe a parte compreendida entre o vértice e sua repetição. Naturalmente, o subgrafo resultante pode não ser um caminho, de modo que poderemos ter de repetir a mesma operação, até que obtenhamos um caminho de P_1 a P_2 em G. ■

Observe que o Lema 2 nos permite usar tanto passeio quanto caminho na Definição 9, que trata de grafo conexo.

Lema 3 *Seja G um grafo conexo e suponhamos que a seja uma aresta de corte de G. Então $G - \{a\}$ tem exatamente duas componentes conexas.*

Demonstração: Seja G um grafo conexo e seja a uma aresta de corte de G. Como G é conexo, tem exatamente uma componente. E, como a é uma aresta de corte, $G - \{a\}$ tem mais componentes do que G (isto é, $G - \{a\}$ tem ao menos duas componentes). Nosso propósito é mostrar que $G - \{a\}$ não tem mais de duas componentes.

Suponhamos, por contradição, que $G - \{a\}$ tenha três (ou mais) componentes. Sejam P_1, P_2 e P_3 três vértices de $G - \{a\}$, cada um em uma componente separada. Isso implica que não há um caminho unindo qualquer par deles em $G - \{a\}$.

Seja C um caminho que tem início em P_1 e final em P_2 em G. Como não há qualquer caminho que tem início em P_1 e final em P_2 em $G - \{a\}$, sabemos que C deve conter a aresta a. Suponhamos que P_i e P_j sejam os pontos extremos da aresta a e, sem perda de generalidade, que P intercepte a na ordem P_i e, em seguida, P_j; isto é, $C = P_1, ..., P_i, a, P_j, a_j, ..., P_2$.

Analogamente, como G é conexo, existe um caminho Q de P_3 a P_1, que deve utilizar a aresta a associada ao par $\{P_i, P_j\}$. Observe que podemos ter P_i ou P_j aparecendo primeiro em Q quando vamos de P_3 para P_1.

- Se P_i aparecer antes de P_j no caminho Q, vê-se que temos em $G-\{a\}$, um passeio de P_3 para P_1. Utilize a parte de P_3 a P_i de Q concatenada (conectada) com a parte de P_i a P_1 de C, o que dá um passeio de P_3 a P_1 em $G - \{a\}$ e, daí, um caminho de P_3 a P_1 em $G - \{a\}$. Isso, entretanto é uma contradição, porque P_1 e P_3 estão em componentes separadas de $G - \{a\}$.

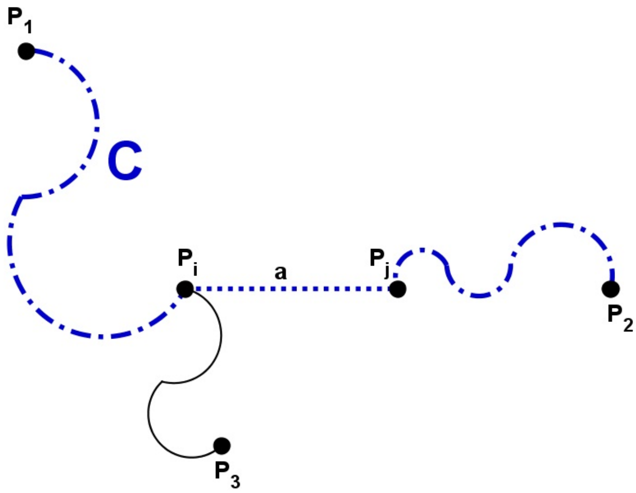

Figura 2.13:

- Se P_j aparecer antes de P_i no caminho Q, temos, então, em $G - \{a\}$, um passeio de P_3 para P_2. Utilize a parte de P_3 a P_j de Q concatenada (conectada) com a parte de P_j a P_2 de C. Esse passeio não utiliza a aresta a. Portanto, existe um passeio de P_3 a P_2 em $G - \{a\}$ e, daí, um caminho de P_3 a P_2 em $G - \{a\}$. Isso contradiz o fato de que, em $G - \{a\}$, temos P_3 e P_2 em componentes separadas.

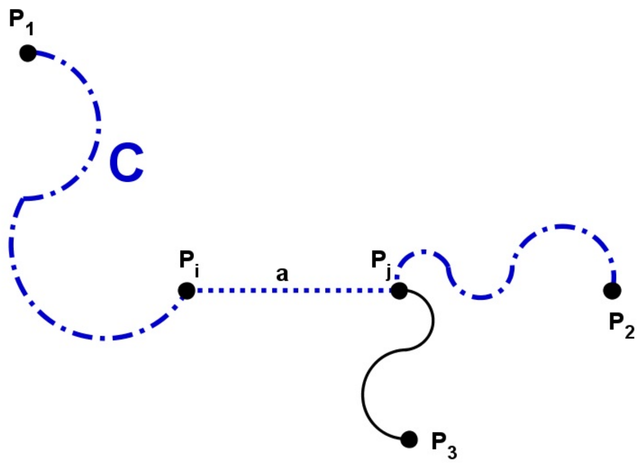

Figura 2.14:

Esta contradição prova o resultado do lema. ■

Lema 4 *Seja G um grafo conexo com exatamente dois vértices de grau ímpar. Seja P um vértice de grau ímpar e suponhamos $d(P) \neq 1$. Então, ao menos uma das arestas incidentes a P não é uma aresta de corte.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que todas as arestas incidentes a P fossem arestas de corte. Seja P' o outro vértice de grau ímpar em G. Como G é conexo, existe um caminho C de P a P' em G. Exatamente uma aresta a incidente a P é interceptada pelo caminho C. Seja a' qualquer outra aresta incidente a P.

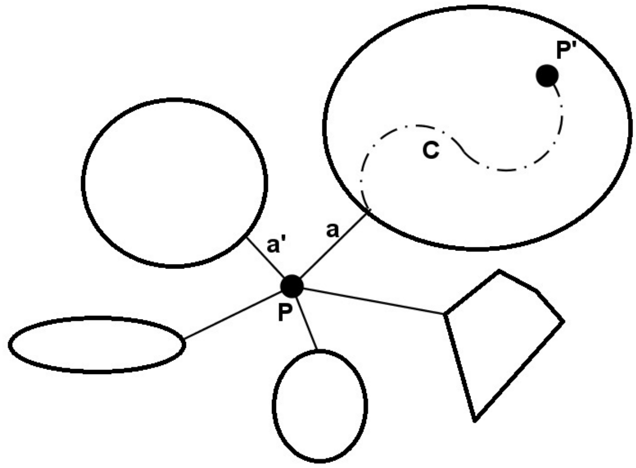

Figura 2.15:

Consideremos agora o grafo $G' = G - \{a'\}$. Esse grafo tem exatamente duas componentes conexas pelo Lema 3. Como o caminho C não utiliza a aresta a', os vértices P e P' estão na mesma componente. Note ainda que, em G', o vértice P tem grau par, e nenhum dos outros vértices em sua componente mudou de grau. Isso significa que, em G', a componente que contém o vértice P tem exatamente um vértice de grau ímpar, contradição com o Corolário 4.1. ■

Corolário 6.1 *Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é semieuleriano se, e somente se, exatamente, dois vértices têm grau ímpar.*

Demonstração:

($\rightarrow$) Suponha que G é semieuleriano de m arestas, então existe uma trilha de comprimento m em G. Em relação ao primeiro vértice da trilha temos uma aresta plugada a esse vértice quando a trilha começa. Então, cada vez que visitamos o primeiro vértice, uma aresta que entra é emparelhada com uma aresta que sai. Portanto seu grau deve ser ímpar. O mesmo vale para o último vértice da trilha; seu grau deve ser ímpar. Para todos os outros vértices da trilha, teremos grau par.

($\leftarrow$) Vamos provar por indução sobre o número de arestas em G

Observe que não podemos supor o caso $m = 0$, visto que sendo G conexo, então G consistiria em apenas um vértice isolado, o que contradiz a nossa hipótese de termos exatamente dois vértices de grau ímpar.

i)Suponhamos então que G tenha uma aresta. Como G é conexo, e não poderíamos ter um único vértice e um único ou mais laços, pois nesse caso, não haveriam exatamente dois vértices de grau ímpar, o que contradiz a nossa hipótese, o grafo deve consistir em apenas dois vértices, P_1 e P_2, e de uma aresta unindo-os. Nesse caso G tem exatamente dois vértices de grau ímpar, e claramente existe uma trilha que começa em um e termina no outro.

ii) Hipótese de indução: Suponhamos que um grafo conexo tenha m arestas. Se exatamente dois de seus vértices tem grau ímpar, então existe uma trilha que começa em um desses vértices e termina no outro.

Seja G um grafo conexo com $m + 1$ arestas e suponha que exatamente dois dos vértices de G, P_1 e P_2, tem grau ímpar. Devemos mostrar que existe uma trilha de comprimento $m + 1$ que começa em P_1 e termina em P_2.

- Suponhamos $d(P_1) = 1$. Nesse caso P_1 tem apenas um vizinho, P_i. É possível que tenhamos tanto $P_i = P_2$ como $P_i \neq P_2$. Inicialmente para ambas as possibilidades temos: Seja $G_1 = G - \{P_1\}$, isto é eliminamos de G o vértice P_1 (e a única aresta incidente a P_1), observe que $d(P_i)$ sofre uma redução de 1, enquanto todos os outros vértices tem o mesmo grau que anteriormente . Note também que G_1 tem m arestas e é conexo. Podemos agora dividir em dois casos:

  1)Se $P_i = P_2$, então todos os vértices em G_1 tem grau par (pois P_1 saiu e P_2 sofreu uma redução de 1). Portanto, pelo Teorema 6 , G_1 tem uma trilha fechada que começa e termina no vértice P_2. Se inserirmos a aresta correspondente ao par $\{P_1, P_2\}$ no início da trilha fechada (em P_2) teremos construído uma trilha em G que começa em P_1 e termina em P_2, com comprimento $m + 1$.

2) Se $P_i \neq P_2$, então G_1 tem exatamente dois vértices de grau ímpar (o grau de P_i em G_1 é agora ímpar, e P_2 ainda tem grau ímpar). Portanto, como G_1 tem m arestas e é conexo, pela hipótese de indução, existe uma trilha em G_1 que começa em P_i e termina em P_2. Se anexarmos a esta trilha, a aresta correspondente ao par $\{P_1, P_i\}$, temos uma trilha em G que começa em P_1 e termina em P_2.

- Suponhamos $d(P_1) > 1$. Como $d(P_1)$ é ímpar, temos $d(P_1) \geq 3$. Afirmamos, pelo Lema 4, que ao menos uma das arestas incidentes a P_1 não é uma aresta de corte. Seja a uma aresta correspondente ao par de vértices $\{P_1, P_i\}$ incidente a P_1 que não é uma aresta de corte de G. Seja $G_1 = G - \{a\}$. Note que podemos ter:

  1) $P_i = P_2$: Nesse caso todos os vértices de G_1 tem grau par, e podemos formar, pelo Teorema 6, uma trilha fechada em G_1 que começa e termina em P_2, e então anexar a aresta a para formar uma trilha em G que começa em P_1 e termina em P_2.

  2) $P_i \neq P_2$: Nesse caso temos exatamente dois vértices de grau ímpar em G_1, a saber, P_i e P_2. Pela hipótese de indução, formamos em G_1 uma trilha que começa em P_i e termina em P_2. Anexamos a aresta a para formar uma trilha em G que começa em P_1 e termina em P_2. Portanto, se G é conexo e possui exatamente dois vértices com grau ímpar, temos G semieuleriano.

■

Observação 1 *Se G é um grafo semieuleriano conexo, de m arestas, sendo P_1 e P_2 os vértices de grau ímpar, então qualquer trilha de comprimento m que podemos determinar em G começa em um dos vértices de grau ímpar e termina no outro.*

Com base no Teorema 6 e no Colorário 6.1, finalmente podemos resolver o problema a seguir:

Exemplo 31 ***O problema das pontes de Köenisberg:*** *A cidade de Königsberg é banhada pelo rio Pregel que, ao atravessar a cidade se ramifica formando uma ilha (Kneiphof) que está ligada à restante parte da cidade por sete pontes, conforme a figura abaixo.*

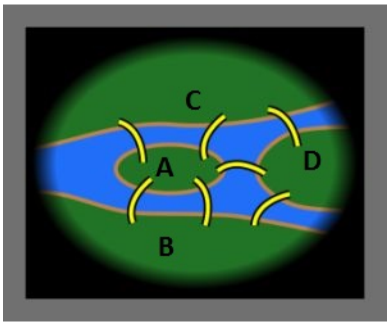

Figura 2.16:

Dizia-se que os habitantes da cidade, nos dias soalheiros de lazer, tentavam efetuar um percurso que os obrigasse a passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma, retornando ao ponto inicial. Será que poderiam realizar tal trajeto? E se não fosse necessário retornar ao ponto inicial, seria possível?

Solução: Podemos associar a figura da cidade de Köenisberg o seguinte grafo

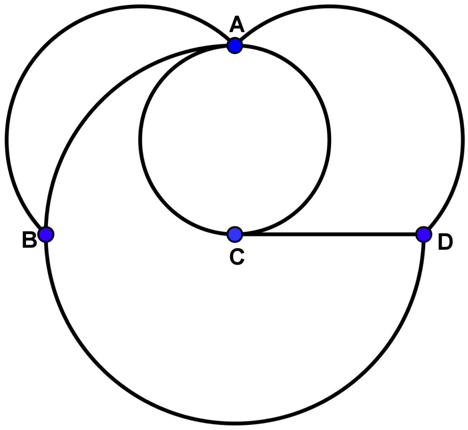

Figura 2.17:

Verificamos facilmente que há três (na verdade são exatamente quatro) vértices com grau ímpar, o que pelos Teorema 6 e Corolário 6.1 garantimos que não se trata de um grafo semieuleriano (muito menos euleriano), portanto **não** podemos estabelecer um percurso passando por todas as pontes apenas uma vez em cada uma.

De maneira concisa, para Penha [5], em grafos que representam uma determinada região e suas pontes, uma trilha é possível, se e somente se, o número de áreas servidas por um número ímpar de pontes é 0 (nesse caso, a jornada requerida pode ser realizada iniciando-a a partir de qualquer região e retornará para a mesma) ou 2 (nesse caso, a jornada só é possível se começar em qualquer uma dessas duas regiões). É importante lembrar que não podemos ter apenas uma região com um número ímpar de pontes para não contrariarmos o Teorema 4.

2.4 O problema das ligações

Quase todas as pessoas que gostam de desafios matemáticos já se depararam algum dia com a seguinte questão: "É possível ligar água, luz e telefone a três casas, sem que as ligações se cortem (supondo que todas as ligações, fios e canos estejam situados em um mesmo plano)?" Nesta seção, vamos estudar desenhos ou traçados de grafos.

Observação 2 *Um grafo e seu traçado são objetos muito diferentes. Um grafo é, conforme Definição 5, uma tripla ordenada* (V, A, g) *que satisfaz certas condições. Já o seu traçado se faz à tinta em papel; é uma abreviatura notacional que, em geral, é mais fácil de assimilar do que a representação escrita completa da tripla ordenada* (V, A, g).

Nesta seção, vamos adotar uma abordagem diferente. Estudamos não somente grafos, mas também seus traçados. Um traçado se faz com tinta e papel e não é um objeto matemático. Lembre-se: Uma figura de um circulo não é um circulo. Assim nós precisamos de uma definição rigorosa matemática de traçado de um grafo. Infelizmente isso é bastante complicado. A dificuldade consiste principalmente em definir o que queremos dizer com uma curva no plano. A definição precisa de curva exigem conceitos de matemática contínua que não desenvolvemos e que ultrapassa o nível desse trabalho. Procederemos então, com o nosso entendimento intuitivo do que é um traçado de um grafo.

Boa parte das ideias presentes nessa seção são baseadas em Pitombeira [6]. Com o intuito de facilitar a compreensão desse problema, faz-se necessário mostrar alguns resultados e definições.

Definição 12 *Um grafo se diz planar quando for isomorfo a um grafo plano cujo o traçado é livre de cruzamentos.*

Exemplos clássicos de grafos planares são dados pelos grafos que representam os poliedros.

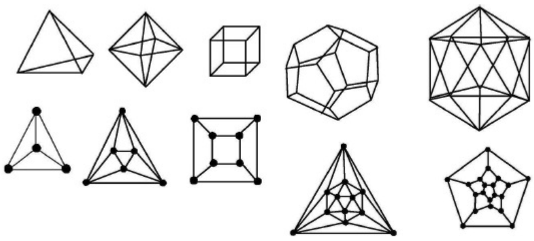

Figura 2.18:

Voltaremos agora a tratar da conexidade de grafos, perceba que todo grafo conexo divide o plano em um certo número de regiões, veja alguns exemplos.

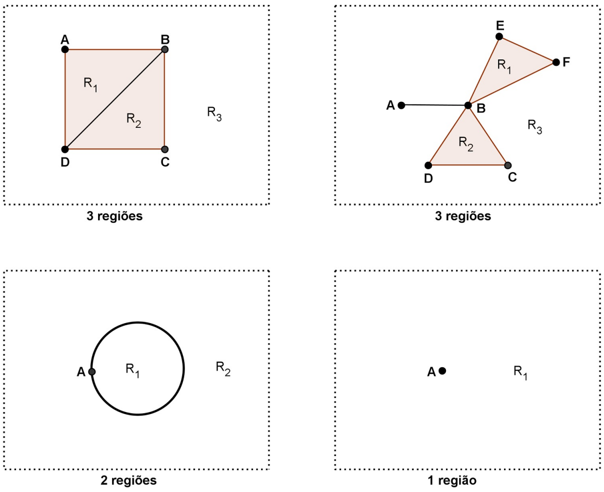

Figura 2.19:

Observe que das regiões determinadas no plano pelas arestas de um grafo planar, uma é "ilimitada" e as restantes são "limitadas".

Teorema 7 ***(Teorema de Euler)***: *Em todo grafo plano conexo livre de cruzamentos, tem-se* $|V| - |A| + R = 2$*, onde* R *representa o número de regiões determinadas no plano pelo grafo.*

Demonstração: Observe inicialmente, que qualquer grafo conexo pode ser obtido a partir do grafo mais simples, o que consiste somente em um vértice e nenhuma aresta, por meio de uma sequência das seguintes operações:

- Adicionar uma aresta e um vértice a um vértice já existente.

Figura 2.20:

- Adicionar uma aresta a dois vértices já existentes.

Figura 2.21:

- Adicionar a um vértice uma aresta que volta a um mesmo vértice (adicionar um laço a um vértice)

Figura 2.22:

Observe que no caso do grafo mais simples, o que tem apenas um vértice e nenhuma aresta, temos que $|V| = 1$, $|A| = 0$ e $R = 1$. Nesse caso temos, $|V| - |A| + R = 1 - 0 + 1 = 2$. Verificaremos, nesse momento, que cada uma das três operações descritas acima não altera o valor de $|V| - |A| + R$. Para isso, denotaremos por $\Delta|V|, \Delta|A|, \Delta R$ e $\Delta(|V| - |A| + R)$ as variações causadas, respectivamente, no número de vértices, arestas, regiões e em $|V| - |A| + R$.

Na tabela a seguir descreveremos os efeitos causados por cada uma das três operações.

Operação	Δ|V|	Δ|A|	ΔR	Δ (V – A + R)
1	+1	+1	0	0
2	0	+1	+1	0
3	0	+1	+1	0

Figura 2.23: Tabela 1

Assim o valor de $|V| - |A| + R$ permanece constante e igual a 2, sob qualquer sequência de operações (operações estas escolhidas entre as três descritas acima) e ainda, após efetuada qualquer sequência de operações em um grafo conexo, o mesmo mantém sua conexidade. Como qualquer grafo plano conexo pode ser obtido a partir do grafo mais simples por uma sequência finita de tais operações, vemos que, para qualquer grafo conexo plano,

$$|V| - |A| + R = 2$$

como desejado. ■

Voltaremos agora ao Problema das ligações de água, luz e telefone, observe:

Exemplo 32 *É possível ligar água, luz e telefone a três casas, sem que as ligações se cortem (supondo que todas as ligações, fios e canos estejam* *situados em um mesmo plano)*

Figura 2.24:

Solução: Podemos geometricamente representar os vértices do grafo pelo esquema:

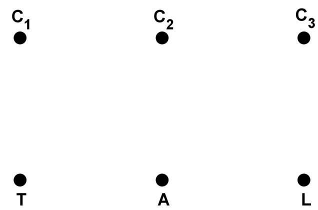

Figura 2.25:

O problema é verificar se o grafo de vértices C_1, C_2, C_3, A, T, L admite que as arestas AC_1, AC_2, AC_3, TC_1,TC_2, TC_3, LC_1, LC_2 e LC_3 sejam traçadas sem que haja cruzamentos. Este grafo é obviamente conexo, pois dados P_1 e P_2 dois vértices quaisquer de G, temos:

- Um dos vértices representa uma casa e o outro representa um serviço, nesse caso a verificação da conexidade é direta pela natureza do problema.

- Os dois vértices representam duas casas, nesse caso, considere S_i com $i = \{1, 2, 3\}$ um dos serviços prestados, então, existe um caminho de P_1 a P_2 passando por S_i, pois P_1 e P_2 se conectam com S_i, $\forall i$.

- Os dois vértices representam dois serviços prestados, nesse caso, considere C_i com $i = \{1, 2, 3\}$ como sendo uma das casas, então, existe um caminho de P_1 a P_2 passando por C_i, pois P_1 e P_2 se conectam com C_i, $\forall i$.

Concluímos então que o desejado grafo é conexo e, além disso, temos $|V| = 6$ e $|A| = 9$. Suponhamos que este grafo seja livra de cruzamentos. Pela fórmula de Euler, devemos ter $|V| - |A| + R = 2$ donde $R = 2 - |V| + |A| = 2 - 6 + 9 = 5$, ou seja, devemos ter 5 regiões do plano determinadas pelo grafo. Assim, como uma destas regiões é ilimitada, devemos ter exatamente 4 regiões limitadas por arestas do grafo. Sabemos que os serviços prestados, dois a dois, devem estar ligados as três casas atendendo as seguintes situações:

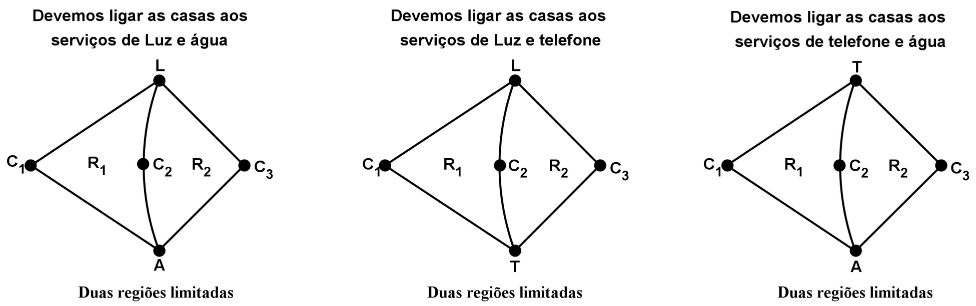

Figura 2.26:

Como temos que satisfazer as três condições no possível grafo, devemos ter no mínimo 6 regiões limitadas por arestas do grafo, o que viola a fórmula de Euler. Logo, o grafo plano não pode ser livre de cruzamentos. E assim, o problema não tem solução.

2.5 Atividades sugeridas para o ensino médio

A seguir trataremos de algumas atividades que podem ser desenvolvidas no ensino médio, não estamos aqui preocupados em desenvolver teoria alguma. Apenas desejamos que o aluno conjecture, através da observação de casos, propriedades relevantes da teoria dos grafos. Na primeira atividade, estamos interessados em desenhar figuras sem retirar o lápis do papel e estabelecer, por meio de observações de casos, uma condição para que figuras possam ser desenhadas dessa forma. Na segunda atividade, o objetivo é trabalhar a ideia da coloração de mapas, estabelecendo, por meio de observações de casos, um número mínimo de cores para que se possa colorir qualquer mapa.

Atividade 1: Encontre um caminho, partindo de uma bolinha, que percorra todos os traços da figura abaixo sem retirar o lápis do papel. Não podendo passar pelo mesmo traço duas vezes. Regra: Cada movimento deve ser realizado indo de bolinha a bolinha.

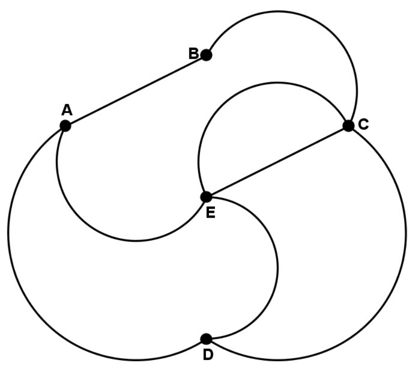

Figura 2.27:

a) Qual o caminho encontrado?

b) É possivel começar por qualquer ponto da figura?

Observe as figuras que seguem e conclua se em cada uma delas é possível encontrar um caminho, partindo de uma bolinha, passando por todos os traços, utilizando cada traço uma única vez.

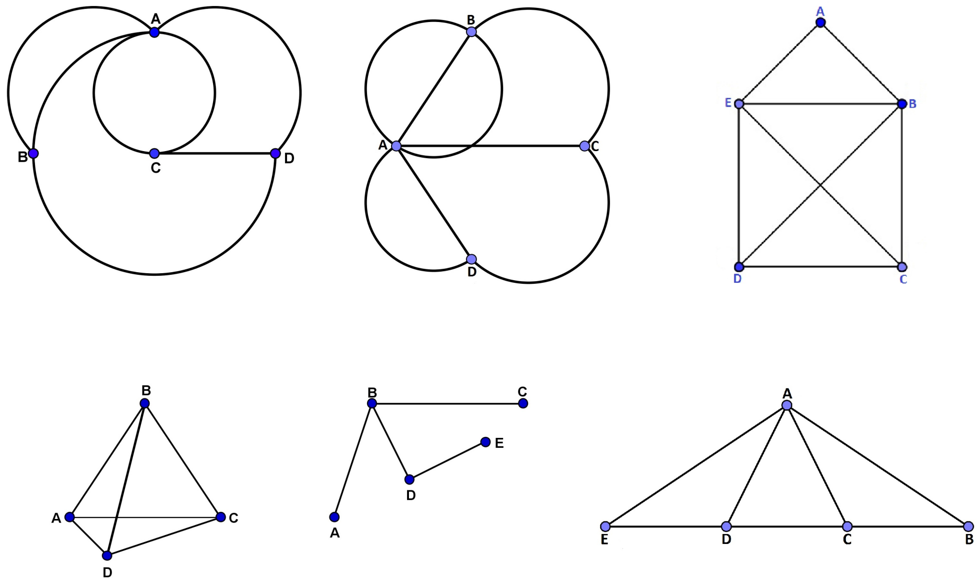

Figura 2.28:

c) Em quais figuras você encontrou um caminho?

d) Tente agora, sem ficar passando o lápis por cima dos traços, discutir com os colegas possíveis argumentos para que se conclua quando em uma determinada figura podemos realizar um caminho.

e) Nas figuras em que tivemos êxito na busca do caminho, será possível começar e terminar por quaisquer pontos da figura? Você observa alguma regularidade nesses pontos?

Atividade 2: Colorir o mapa abaixo com o menor número de cores possíveis respeitando a condição que regiões com fronteiras comum não podem ter a mesma cor. Se uma região só tiver em comum com outra um ponto podem ter a mesma cor.

Figura 2.29:

Agora tente colorir os mapas abaixo com o menor número de cores e respeitando as mesmas condições.

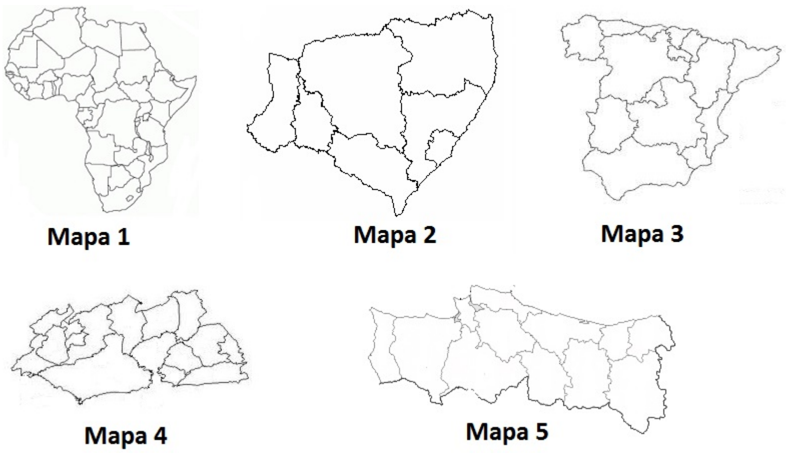

Figura 2.30:

a) Quantas cores no mínimo foram necessárias para pintá-los? Em algum mapa, você precisou utilizar cinco cores?

b) Discuta com os colegas, o número mínimo de cores para pintarmos qualquer mapa.

Apêndice A

Apêndice

Trazemos aqui a prova do Teorema 3, como complementação dos resultados do texto. Enunciaremos novamente para facilitar a leitura. **Princípio Aditivo (Versão Geral):** Sejam conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ finitos quaisquer. Então,

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = S_1^n - S_2^n + S_3^n - S_4^n + \cdots + (-1)^{n-1} S_n^n.$$

Demonstração: Usando o Princípio Aditivo provaremos esta extensão através do Princípio da Indução finita. Temos que: i) A afirmação é verdadeira para $n = 2$, graças ao Teorema 1. ii) Supondo válida a afirmação para $n = k$, isto é:

$$|\cup_{i=1}^{k} A_i| = S_1^k - S_2^k + S_3^k - S_4^k + \cdots + (-1)^{k-1} S_k^k,$$

devemos mostrar que ela é válida também para $n = k+1$. Uma vez que $\cup_{i=1}^{k+1} A_i = (\cup_{i=1}^{k} A_i) \cup A_{k+1}$, pelo Teorema 1 temos

$$|\cup_{i=1}^{k+1} A_i| = |(\cup_{i=1}^{k} A_i) \cup A_{k+1}| = |\cup_{i=1}^{k} A_i| + |A_{k+1}| - |(\cup_{i=1}^{k} A_i) \cap A_{k+1}|. \quad \text{(A.1)}$$

Pela Hipótese de indução podemos escrever:

$$|\cup_{i=1}^{k} A_i| = S_1^k - S_2^k + S_3^k - S_4^k + \cdots + (-1)^{k-1} S_k^k. \quad \text{(A.2)}$$

Observe que $(\cup_{i=1}^{k} A_i) \cap A_{k+1} = \cup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})$. Novamente, pela hipótese de indução(já que se trata da união de k conjuntos da forma $(A_i \cap A_{k+1})$) podemos escrever:

$$\begin{aligned}|\cup_{i=1}^{k}(A_i \cap A_{k+1})| = &\sum_{i=1}^{k}|A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq k}|(A_{i_1} \cap A_{k+1}) \cap (A_{i_2} \cap A_{k+1})| \\ &+ \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq k}|(A_{i_1} \cap A_{k+1}) \cap (A_{i_2} \cap A_{k+1}) \cap (A_{i_3} \cap A_{k+1})| \\ &+ \cdots + (-1)^{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k+1}|\end{aligned}$$

Note que:

$$(A_{i_1} \cap A_{k+1}) \cap (A_{i_2} \cap A_{k+1}) = (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{k+1});$$

$$(A_{i_1} \cap A_{k+1}) \cap (A_{i_2} \cap A_{k+1}) \cap (A_{i_3} \cap A_{k+1}) = (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{k+1});$$

e assim sucessivamente. Logo

$$\begin{aligned}|\cup_{i=1}^{k}(A_i \cap A_{k+1})| = &\sum_{i=1}^{k}|A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq k}|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{k+1}| \\ &+ \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq k}|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{k+1}| \\ &+ \cdots + (-1)^{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k+1}|.\end{aligned} \tag{A.3}$$

Substituindo (A.2) e (A.3) em (A.1) e organizando os termos da expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}|\cup_{i=1}^{k+1} A_i| = &\ S_1^k - S_2^k + S_3^k - S_4^k + \cdots + (-1)^{k-1}S_k^k + |A_{k+1}| \\ &-(|A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + \cdots + |A_k \cap A_{k+1}|) \\ &+(|A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}| + \cdots + |A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}|) \\ &-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_{k+1}| + \cdots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}|) \\ &- \cdots - (-1)^{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}|.\end{aligned}$$

Observe que $S_1^k + |A_{k+1}| = S_1^{k+1}$, de modo análogo podemos afirmar que $S_2^k + (|A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + \cdots + |A_k \cap A_{k+1}|) = S_2^{k+1}$, e assim sucessivamente. Organizando as parcelas de forma apropriada, chegamos a

$$|\cup_{i=1}^{k+1} A_i| = S_1^{k+1} - S_2^{k+1} + S_3^{k+1} - S_4^{k+1} + \cdots + (-1)^k S_{k+1}^{k+1}$$

como queríamos demonstrar. ■

Referências Bibliográficas

[1] Carneiro, Vera Clotilde, *Colorindo mapas: Revista do professor de Matemática*, nº29, São Paulo: SBM, pg 31-35. (1995).

[2] Lima, Elon Lages, Carvalho, Paulo C. C., Wagner, E. e Morgado, Augusto C., *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 2, 6.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 308 p. (2006).

[3] Morgado, Augusto C., *Análise Combinatória e Probabilidade.* Coleção do Professor de Matemática, 9.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 343 p. (2006).

[4] Oliveira, Marcelo Rufino de, Pinheiro, Márcio Rodrigues da R., *Coleção Elementos da Matemática, 3*, 3.ed. - Fortaleza: VestSeller, 353 p. (2010).

[5] Penha, G.M. de la, *Euler e a topologia: Revista do professor de Matemática*, nº03, São Paulo: SBM, pg 12-17. (1983).

[6] Pitombeira, João B., *O problema das ligações de água, luz e telefone: Revista do professor de Matemática*, nº11, São Paulo: SBM, pg 09-16. (1987).

[7] Santos, José Plínio O., Melo, Margarida P. e Murari, Idani T. C., *Introdução à Análise Combinatória*, 4.ed. - Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 390 p. (2007).

[8] Scheinerman, Edward R., *Matemática Discreta: uma introdução*, 2.ed. - São Paulo: Cengage Learning, 573 p. (2011).