UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
(Mestrado)

GILMAR ALEXANDRE KIELING

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Maringá-PR
2019

GILMAR ALEXANDRE KIELING

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

Maringá-PR
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central – UEM, Maringá, PR, Brasil)

Kieling, Gilmar Alexandre
K47P Uma proposta pedagógica para o ensino de funções através de materiais manipuláveis / Gilmar Alexandre Kieling. -- Maringá, PR, 2019.
188 f.: il. color.

Orientadora: Profª. Drª. Luciene Parron Gimenes Arantes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2019.

1. Matemática - Ensino e aprendizagem. 2. Matemática - Funções. 3. Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná (SAEP). I. Arantes, Luciene Parron Gimenes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 23.ed. 372.7

Márcia Regina Paiva de Brito – CRB-9/1267

GILMAR ALEXANDRE KIELING

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Luciene Parron G. Arantes
Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Profa. Dra. Patrícia Tacuri Cordova
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Manuel Francisco Zuloeta Jimenez
Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Londrina

Aprovado em: 19 de agosto de 2019.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Este trabalho é dedicado as pessoas que estiveram ao meu lado ao longo desta trajetória: minha esposa Hursulla, meus pais Odálcio e Marta. Também dedico ao meu irmão Alexandre e a toda minha família e amigos, que não mediram esforços para me dar apoio e incentivo para concluir mais esta etapa de minha vida.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço imensamente a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, por ter me concedido saúde, força e disposição para vencer os obstáculos deste percurso. Também sou grato ao Senhor por ter dado saúde aos meus familiares e tranquilizado o meu espírito nos momentos mais difíceis da minha trajetória acadêmica até então.

Agradeço, especialmente, a minha esposa Hursulla, que tanto me incentivou e nunca me deixou perder a fé. Obrigado pela compreensão, disposição e paciência que sempre teve comigo. Obrigado por estar sempre ao meu lado em todas as nossas vitórias. Saiba que você torna meus dias melhores.

Agradeço aos meus pais Odálcio Valdemiro Kieling e Marta Mazzarollo Kieling, por acreditarem no meu potencial, pela educação que me deram, por todo o carinho, amor e força.

Sou grato a minha Tia Rozenilda Kich e aos meus primos Lucas Vieira e Samara Kich pelas hospedagens e a receptividade que sempre tiveram comigo nos dias que precisei ficar em Maringá.

Agradeço à Universidade Estadual de Maringá, por me proporcionar um ambiente criativo e amigável para os estudos.

Meus agradecimentos aos amigos Oldemir Brill Junior, Edson da Silva Agusto, Estéfano Altieri, Fernando Zilli Philippi, José Alves de Oliveira, Marcelo Alberti, Maikon Pavei Boff e Wanderlei Verissimo, companheiros de estrada e trabalho, irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Sou grato a todos os professores que contribuíram com a minha trajetória acadêmica, especialmente Prof.ª Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes, responsável pela orientação do meu projeto. Obrigado por esclarecer tantas dúvidas e ser tão atenciosa e paciente.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“Coragem é o que é preciso para se levantar e falar,

a coragem é também o que é preciso para sentar e ouvir.”

Winston Churchill

Índice de notações

Salvo menção explícita, em contrário, as seguintes convenções e notações serão usadas ao longo deste trabalho.

- $\overline{AB}$ representa o comprimento do segmento AB;
- $\in$ representa o pertencimento, por exemplo, $a \in X$, ou seja, a pertence ao conjunto X;
- $\notin$ representa o não pertencimento, por exemplo, $a \notin X$, ou seja, a não pertence ao conjunto X;
- $A \times B$ representa o produto cartesiano entre o conjunto A e o conjunto B;
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ representam, respectivamente, os conjuntos dos números naturais, inteiros, reais e complexos;
- $\mathbb{N}^*, \mathbb{R}^*_+, \mathbb{R}^*_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ denotam, respectivamente, o conjuntos dos números naturais não-nulos, o conjunto dos números reais positivos, negativos, não-negativos e não-positivos;
- $\mathbb{R}^* = \ ]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[$.

Resumo

As funções matemáticas, historicamente, estão presentes no desenvolvimento do homem e, consequentemente, da sociedade. Diante disso, e motivados pelo desempenho dos alunos na avaliação do Sistema de Avaliação Educacional da Educação Básica do Paraná, proporemos abordar as relações matemáticas, assim como, a definição de função através dos conceitos de relações e suas aplicações no cotidiano, além de propor uma forma alternativa para o ensino de funções através de materiais manipuláveis, haja vista que o material concreto tem papel relevante no processo de ensino aprendizagem, principalmente, na matemática. Em face dessa conjuntura, apresentaremos uma alternativa metodológica para o ensino da Matemática, mais especificamente, o conteúdo de funções, de modo que os alunos se deparem com situações cotidianas e que manipulem materiais que facilitem a construção de seu raciocínio lógico-matemático, passando da manipulação para o abstrato, mesmo que a instituição de ensino não disponha de um laboratório para o ensino da matemática.

Palavras chave: Avaliação externa, Relações, Funções, Materiais manipuláveis.

Abstract

Math functions, historically, are present on growth of the man and consequent of the society. Facing this, and motivating for the accomplishment of the students in the System of Educational Evaluation of Basic Education of Paraná, it is proposed to approach math relations, as well as, the definition of function through the concepts of relations and their applications in everyday life, besides proposing an alternative form to teach functions through manipulable materials, considering that concrete material has relevant role in the learning process, especially, in mathematics. Given this situation, it could be observed that presenting a methodological alternative to teach math, more specifically, the content of functions, that students are faced with daily situations and that the manipulation of the manipulative material makes it easier for the student constructs his logical-mathematical reasoning, passing from manipulation to abstract, even if the educational institution does not have a laboratory to teach math.

Keywords: External evaluation, Relations, Functions, Manipulable materials.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Apesar de funções estarem presentes no dia-a-dia do ser humano praticamente de forma intrínseca, é na escola que são apresentados seus conceitos, definições e em geral, o conceito de função consiste em uma regra de correspondência, que associa a cada elemento x de um certo conjunto, chamado domínio da função um único elemento y de outro conjunto chamado de contradomínio da função ([10], 2008).

No cotidiano, é comum relacionar grandezas de medidas através do senso comum, ou seja, coloca-se em prática determinada situação, sendo observada e, a partir dos resultados apresentados, o conhecimento é construído de modo empírico. Contudo, a matemática quanto ciência busca estudar como essas grandezas se relacionam, por exemplo, o valor pago em uma corrida de táxi em razão da distância percorrida, o salário de um vendedor em razão da comissão por ele recebido, o tempo gasto em uma viagem em razão da velocidade do veículo, entre outras.

A matemática mais antiga, aquela derivada dos primeiros esforços do homem, que buscava sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, admite que a espécie humana, desde o primórdio da humanidade, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de distinguir quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos. Logo, é natural a percepção da evolução e a adaptação da matemática ao longo dos anos e que hoje é uma ciência que se permeia por todos os meios culturais, sociais, científicos, etc ([9], 2004).

Ademais, a história da matemática retrata que o conceito de função acompanhou a evolução da sociedade, mediante a necessidade do homem resolver seus problemas, passando por evoluções acentuadas. Entretanto, foi a partir do século XVII, com o surgimento da matemática moderna, que o conceito fundamental de função começou a ser construído.

De acordo com ([7], 2006), Leibinz foi o primeiro matemático a utilizar o termo função, de forma geral, no intuito de caracterizar quantidades associadas às curvas. Entretanto, o uso, em termos matemáticos, surgiu em 1716. Ainda, em 1718, Johan Bernoulli publicou um artigo considerando função como expressão qualquer formada por uma variável e por constantes, pouco tempo depois, um ex-aluno de Bernoulli, Euller aprimorou a definição, considerando uma função como uma equação ou fórmula qualquer, envolvendo variáveis e constantes.

Destaca ainda, ([7], 2006) *apud* Ponte (1990), que a definição de Euller perdurou durante os séculos XVIII e XIX, até que Fourier em 1807, em seus estudos sobre a propagação de calor, considerou que, para qualquer função, seria possível obter um desenvolvimento em série trigonométrica em um intervalo apropriado.

No final do século XIX, com o desenvolvimento da teoria de conjunto de George Cantor (1845-1918), ampliou-se o conceito de função de forma a contemplar relações entre conjuntos de elementos quaisquer, numéricos ou não, e que ([7], 2006) considera uma evolução ainda em desenvolvimento, passando da noção de correspondência para a noção de relação.

No Estado do Paraná, a Diretriz Curricular de Matemática para a Educação Básica fragmenta o conhecimento matemático através dos seguintes conteúdos estruturantes: números e álgebra, grandezas e medidas, geometrias, funções e tratamento da informação. Estes conteúdos são considerados

> conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são legitimados nas relações sociais ([24], 2008).

Ainda, quanto ao conteúdo estruturante de funções, a diretriz curricular prevê, para o ensino fundamental, os conteúdos de funções afim e quadrática e, para o ensino médio, os conteúdos de funções: afim, quadrática, polinomial, exponencial, logarítmica, trigonométrica e modular, também abrange progressão aritmética e progressão geométrica. Além disso, a diretriz curricular aponta que o aluno deve compreender que as funções estão presentes nas diversas áreas do conhecimento e modelam, matematicamente, situações que, pela resolução de problemas, auxiliam o homem em suas atividades ([24], p. 59, 2008).

Desse modo, os professores de matemática dispõem de vasto material metodológico para o ensino da matemática, através da resolução de problemas, da etnomatemática, da modelagem matemática, das mídias tecnológicas, da história da matemática. Porém, raramente esses professores se utilizam de materiais manipuláveis em suas aulas, ou seja, geralmente são aulas expositivas e demonstrativas, utilizando situações que simulam ou retratam o cotidiano.

Entretanto, a educação foi construída historicamente. Nesse sentido, a utilização de materiais manipuláveis como metodologia alternativa no ensino-aprendizagem da matemática teve grande influência desde a publicação da obra *Didactica Magna* de Comenius (1592-1670), que propôs interação e experiência na formação de conhecimento com relações pré-existentes, reaproximando o pensamento à experiência.

Além disso, ([18], 2012) relata que Arquimedes fazia descobertas matemáticas através de imagens e objetos e escreveu a Eratóstenes, aproximadamente em 250 a.C. "é meu dever comunicar-te particularidades de certo método que poderás utilizar para descobrir, mediante a mecânica, determinadas verdades matemáticas [...] as quais eu pude demonstrar, depois, pela Geometria".

Dessa forma, ([18], 2012) em consonância com ([34], 2002), aponta que a utilização de materiais em sala de aula tem atingido resultados positivos e negativos. Contudo, estudos apontam que estes potencializam o ensino e a aprendizagem matemática, uma vez que o ensino da matemática que temos hoje, ainda é influenciada pelas diversas tendências pedagógicas.

Diante da suma importância da disciplina de matemática, faz-se necessário repensar os métodos e instrumentos utilizados em sala de aula, por exemplo, no ensino de funções, de modo que incentive o aprendizado matemático dos alunos, efetivando o ensino dessa disciplina fundamental.

No dia a dia da sala de aula, o professor, ao desenvolver o processo de ensino-aprendizagem recorre a diversos recursos, desde a voz, o quadro negro, o giz e o livro didático. Entre tantos materiais a sua disposição, estão os materiais manipuláveis, que são recursos didáticos que enriquecem as aulas, além de torná-las dinâmicas e de fácil compreensão, pois propiciam a inteiração da teoria matemática por meio da constatação prática e desenvolvem o raciocínio lógico-matemático.

De acordo com ([18], 2012), caracteriza-se "material didático como qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem". Além disso, ([18], 2012) destaca o material didático concreto em duas interpretações, sendo a primeira referência ao material palpável, manipulável e, outra, em um sentido amplo, incluindo imagens gráficas, inclusive conceitua o material didático concreto manipulável como:

> 1. O material manipulável estático: material concreto que não permite a transformação por continuidade, ou seja, alteração da sua estrutura física a partir da sua manipulação. Durante a atividade experimental, o sujeito apenas manuseia e observa o objeto na tentativa de abstrair dele algumas propriedades. Ao restringir o contato com o material didático apenas para o campo visual (observação), corre-se o risco de obter apenas um conhecimento superficial desse objeto.
> 2. material manipulável dinâmico: material concreto que permite a transformação por continuidade, ou seja, a estrutura física do material vai mudando à medida em que ele vai sofrendo transformações, por meio de operações impostas pelo sujeito que o manipula. A vantagem desse material em relação ao primeiro, na visão do autor, está no fato de que este facilita melhor a percepção de propriedades, bem como a realização de redescobertas que podem garantir uma aprendizagem mais significativa.

Cabe destacar que ([34], 2002), cita algumas definições de material didático conforme alguns pesquisadores,

> para Gagné (1971), os materiais didáticos fazem parte do ambiente de aprendizagem e são eles que estimulam a aprendizagem no aluno. Para Hole (1977) são todos os meios de aprendizagem e ensino. Para Mansutti (1993) são recursos a ser utilizados na ação combinada de aprendizagem e formação. Para Ribeiro (1995) é qualquer recurso a ser utilizado na sala de aula com o objetivo de promover a aprendizagem. Estas perspectivas são convergentes quando afirmam que os materiais didáticos são todos os materiais a que recorremos durante o processo de ensino-aprendizagem.

Portanto, os materiais didáticos manipuláveis, além de apresentarem uma abordagem diferente a um determinado assunto, têm potencial de motivar, auxiliar na memorização de resultados, facilitam a observação e a análise, desenvolvendo o raciocínio lógico e crítico ([30], 2012).

É consenso entre professores que os materiais didáticos como os materiais manipuláveis, têm papel relevante no processo de ensino aprendizagem. Entretanto é comum professores não os utilizarem, pelo fato de que os materiais comercializados serem caros ou se a confecção do material for do próprio professor, demanda muito tempo, tanto na confecção quanto na organização das aulas.

Por outro lado, ([34], 2002) *apud* Worth (1986) cita que

> uma razão para não serem utilizados na prática é a atenção que se deu à resolução de problemas como sendo o foco do ensino da matemática em todos os níveis a partir dos anos 80 e por outro lado a ênfase sobre o ensino e aprendizagem da matemática recorrendo aos computadores.

Em ([24], 2008), é apontado que

> No processo avaliativo, é necessário que o professor faça uso da observação sistemática para diagnosticar as dificuldades dos alunos e criar oportunidades diversificadas para que possam expressar seu conhecimento. Tais oportunidades devem incluir manifestação escritas, orais e de demonstração, inclusive por meio de ferramentas e equipamentos, tais como materiais manipuláveis, computador e calculadora.

Diante disso, ([16], 2008), diz que os professores de matemática estão preocupados com uma aprendizagem significativa e que buscam metodologia para facilitar o ensino e, de modo consequente, a aprendizagem.

Outrossim, ([34], 2002) e ([16], 2008), convergem quando apontam que o ensino da matemática deve ir além de ensinar cálculos e procedimentos matemáticos, pois deve promover autonomia e reflexão, preparando-os para uma sociedade complexa e que sejam confiantes de suas capacidades, fazendo conexões matemáticas, resolvendo problemas, raciocinando e comunicando-se matematicamente.

Para ([30], 2012) *apud* Lorenzato (2006), o material manipulável é útil no processo de ensino e aprendizagem, contudo pode desempenhar diversas funções, dependendo do objetivo almejado, pois podem apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados e facilitar a redescoberta ou, ainda, como cita ([34], 2008), que quando se usam materiais manipuláveis, há o perigo de que os alunos fiquem apenas pela manipulação.

Complementa ainda, ([28], 2012) *apud* Matos e Serrazina (1996), que o "uso de materiais manipuláveis favorecem a aprendizagem e desenvolvem nos alunos atitudes mais positivas", desde que em sua utilização exista uma proximidade entre o material manipulável utilizado e as relações matemáticas que se tem a intenção de apresentar.

Também, neste sentido, ([16], 2008) *apud* Lellis e Imenes (1994), dizem que os recursos didáticos podem ser uma possibilidade para trabalhar a matemática, colocando o aluno como protagonista da aprendizagem, promovendo reflexão e autoestima, propiciando aulas participativas e, enquanto manipulam, realizam descobertas.

Logo, quando o professor preparar sua aula e prever a utilização de materiais manipuláveis, deve ter atenção de quando fazer o uso desse recurso, pois tem papel fundamental neste processo, ([28], (2012) *apud* Serrazina (1990)), pois deve ter em mente quais os objetivos que quer alcançar com a utilização dos materiais manipuláveis, de modo que estes auxiliem numa aprendizagem mais significativa.

Neste sentido, esperamos que o presente trabalho além de trazer uma abordagem distinta para o conteúdo de funções também auxilie a explorar e introduzir independência para o raciocínio pertinente as situações que requerem a aplicação de funções.

Apresentamos o trabalho dividido em cinco capítulos.

No Capítulo 1 apresentamos o Sistema de Avaliação da Educação Básica do Estado do Paraná que é uma avaliação externa e foi nossa motivação para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos o conceito de Relação e seus desmembramentos, apesar de não ser um tema abordado no ensino médio é de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 3 apresentamos a definição de função, suas propriedades, ou seja, o foco principal de nosso trabalho.

No Capítulo 4 apresentamos atividades práticas para que o professor utilize como uma ferramenta alternativa ao ensino tradicionalista de funções.

No Capítulo 5 apresentamos nossas considerações finais.

Capítulo 1

Avaliação externa

De acordo com ([22], 2019), avaliação é o ato ou efeito de avaliar(-se), ou ainda, a apreciação, cômputo ou estimação da qualidade de algo ou da competência de alguém. Atualmente, a avaliação faz parte do cotidiano de todos nós, por exemplo, avalia-se se a economia do país está crescendo ou decrescendo ou ainda se o número de empregos com carteira assinada cresce ou decresce.

Quando nos referimos ao ambiente escolar, temos diversas formas de avaliação: provas discursivas, descritivas, orais e outras. O tema é amplamente discutido no ambiente escolar, pois perpassa desde a construção desta no Projeto Político Pedagógico (PPP) no qual cada instituição de ensino aponta suas concepções e seus referenciais de avaliação no Plano de Trabalho Docente (PTD) e o professor aponta seus critérios de avaliação em consonância com o PPP, sendo finalizada com sua aplicação junto aos discentes.

Comumente, a avaliação aplicada pelo professor em sala de aula tem como intuito quantificar, aferir e até mesmo classificar o aprendizado, através da atribuição de uma pontuação para os acertos dos alunos. Contudo as avaliações no âmbito escolar não buscam evidenciar a defasagem do aprendizado do aluno, segundo ([19], 2006), a prática docente está direcionada à "pedagogia do exame", pois os alunos estão sendo preparados para "resolver provas"a partir de determinado conteúdo, principalmente no ensino médio devido aos vestibulares e ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Neste sentido, ([31], 2012) diz que "a avaliação na escola desde os primórdios, tem assumido uma função classificatória, de verificação e quantificação de conhecimentos, objetivando apenas notas finais e vestibulares, e muitas vezes assumindo uma prática discriminatória, de aprovação ou reprovação."

Nesta perspectiva, ([14], 1994) diz que o professor supervaloriza as informações transmitidas ao aluno e exige que ele permaneça alerta às tais informações, passando de aprendiz a objeto de estudo do professor, que apenas capta atributos palpáveis, mensuráveis, observações, e que dessa forma, o professor não assume a responsabilidade pelo fracasso do aluno, já que isto representaria sua incompetência na organização do trabalho pedagógico.

Historicamente, a educação brasileira, passou pelo período colonial (1500-1822), com uma educação voltada para a catequização com a chegada dos primeiros jesuítas em 1549. Em 1599, é elaborada uma diretriz curricular baseada no *Ratio Studiorum* [1] cuja base do conteúdo era fundamentada pela Igreja e, com isso, passou-se a formar no país uma sociedade hierarquizada devido ao acesso à alfabetização.

Com a expulsão dos jesuítas por Sebastião José de Carvalho, Marquês do Pombal, em 1759, pôs-se fim à escola jesuíta. Entretanto, os professores da reforma promovida pelo Marquês do Pombal eram frutos da educação jesuítica, ou seja, deram continuidade ao modelo de educação, já que com a expulsão dos jesuítas do Brasil ficou sem um sistema de ensino.

Ainda neste sentido, ([3], 2018) diz que os livros e manuscritos deixados pelos jesuítas foram destruídos e, diante disso, tentou-se a implementação de disciplinas mais práticas no dia a dia escolar. Entretanto, houve um hiato de aproximadamente dez anos sem um sistema estruturado.

No Período Imperial (1822-1889), houve um salto cultural considerável com a chegada da Família Real. Entretanto, o acesso à educação era restrito, pois o objetivo era a formação de classes dirigentes, uma vez que o maior foco era o ensino superior.

Mesmo com a independência do Brasil, em 1822, a educação, durante o período Imperial, não contabilizou muitos avanços práticos. A gratuidade do ensino, estabelecida por determinação da corte portuguesa, não representou, de fato, investimentos em construção de escolas com espaços físicos adequados, muito menos contratação de professores bem formados e uso de métodos e materiais didáticos aprofundados. A falta de prioridade do investimento em educação prejudicou de forma mais significativa as classes populares do país. Os filhos das famílias mais ricas, por outro lado, tinham acesso facilitado ao

[1] *Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Iesu* (Plano e Organização de Estudos da Companhia de Jesus), normalmente abreviada como *Ratio Studiorum*, é uma espécie de coletânea, fundamentada em experiências vivenciadas no Colégio Romano, a que foram adicionadas observações pedagógicas de diversos outros colégios, cujo objetivo era instruir rapidamente todo o jesuíta docente sobre a natureza, a extensão e as obrigações do seu cargo.

colégio, e poderiam cursar universidades em Portugal, ([3], 2018).

Com a primeira Constituição Brasileira, outorgada em 1824, garantiu-se no Art. 179, apenas, "a instrução primária e gratuita a todos os cidadãos"e, no ano de 1827, uma lei determinou a criação de escolas de primeiras letras em todas as cidades, vilas e lugares mais populosos, além de escolas para meninas. Os professores deveriam ensinar a leitura, a escrita, a matemática, a história do Brasil e os princípios da moral cristã da religião católica.

De acordo com ([33], 2018),

> O Ato Adicional de 1834 e a Constituição de 1891 descentralizaram o ensino, mas não ofereceram condições às províncias de criar uma rede organizada de escolas, o que acabou contribuindo para o descaso com o ensino público e para que ele ficasse nas mãos da iniciativa privada, acentuando ainda mais o caráter classista e acadêmico, gerando assim um sistema dual de ensino: de um lado, uma educação voltada para a formação das elites, com os cursos secundários e superiores; de outro, o ensino primário e profissional, de forma bastante precária, para as classes populares.

Em 1920, uma nova tentativa de alavancar a educação brasileira se deu com o movimento Escola Nova, com reformas estaduais inspiradas nas ideias escolanovistas, sendo que a Escola Nova marcou pela tentativa de tornar a educação mais inclusiva além de um modelo mais moderno de educação. Entretanto, mesmo com os esforços para avançar na implantação de um sistema educacional consistente, o analfabetismo entre jovens, a partir de quinze anos, e adultos era de 65%, de acordo com o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

Durante a Revolução de 1930 houve uma efervescência ideológica que fomentou importantes discussões e transformação no campo educacional. O decreto n.º 19.850/1931 criou o Ministério da Educação e as secretarias de Educação nos estados.

Durante os primeiros anos da década de 1930, surgiram vários projetos e discussões que deram origem à Constituição de 1934, com vistas à organização do ensino brasileiro e incluía um capítulo sobre educação, através do qual o Governo Federal passou a ter a função de integrar e planejar a educação para todos os níveis educacionais.

Em 1961, a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), Lei n.º 4.024/61 é promulgada. Entretanto, é apenas na segunda versão da LDB, Lei n.º 5.692/71, que se têm a instituição de disciplinas comuns a todos os ramos, a obrigatoriedade da conclusão do primário, 1.º grau, fixado em oito anos, e o 2.º grau, obrigatoriamente, profissionalizante.

Esse modelo de educação prevaleceu até 1982, quando procurou-se imprimir um caráter mais técnico, por preferência dos militares que comandavam o país.

Grandes modificações foram promovidas na educação brasileira, até a promulgação da Constituição de 1988 e, a partir desta, é criada uma nova LDB, a Lei n.º 9.391/96, através do qual é dado o suporte legal para o direito a uma educação de qualidade, com formação integral e inserção consciente, crítica e cidadã na sociedade.

Em busca da democratização da educação no Brasil, são ensaiadas, a partir de 1988, experiências de avaliação em larga escala, tendo o Ministério da Educação (MEC) realizado a aplicação piloto do Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Público (SAEP) no 1.º grau, atualmente o ensino fundamental, nos estados do Paraná e Rio Grande do Norte, pois haviam interesses de duas forças que impeliam o fortalecimento dos procedimentos de avaliação. De um lado, o Banco Mundial que demandava análise do impacto do Projeto Nordeste, realizado através de parceria do MEC e Banco Internacional para Reconstrução de Desenvolvimento (BIRD) e, do outro lado, o MEC que buscava realizar uma avaliação mais ampla do ensino público, ([35], 2011).

Em 1990, de acordo com ([32], 2014) e ([35], 2011), verifica-se o aumento e o desenvolvimento dos sistemas de avaliação de desempenho, de forma descentralizada, pelos estados e municípios com a participação de professores e técnicos das Secretarias de Educação.

A partir de 1992, a avaliação em larga escala passa a ser de responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Entretanto, em 1995, o sistema assumiu novo perfil motivado por empréstimos junto ao Banco Mundial (BM) e pela terceirização de operações técnicas, passando a ser chamado de Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Com essa nova organização, a avaliação passou a ocorrer de dois em dois anos, focando dois componentes curriculares: Português (leitura) e Matemática (solução de problemas). Neste momento, o SAEB teve como característica ser uma avaliação amostral de 4.ª e 8.ª séries, atualmente 5.º e 8.º anos, do ensino fundamental e 3.ª séries do ensino médio, envolvendo alunos das redes públicas e privadas, das zonas urbanas e rurais.

A fim de reafirmar a avaliação externa e o processo de avaliação universal, de acordo com ([6], 1996),

> Art. 87. É instituída a Década da Educação, a iniciar-se um ano a partir da publicação desta Lei. [...] § 3º Cada Município e, supletivamente, o Estado e a União, deverá: [...] IV - integrar todos os estabelecimentos de ensino fundamental do seu território ao sistema nacional de avaliação do rendimento escolar.

Maria Helena Guimarães ([12], 2005), presidente do INEP, em 1995, em entrevista a Revista Nova Escola, quando questionada se o SAEB seria uma maneira de detectar problemas na educação brasileira, disse:

> Mesmo sendo por amostragem, a avaliação nacional indica os pontos que mais precisam de atenção. Seu grande objetivo deve ser o de orientar políticas públicas. Com ela é possível detectar os entraves no ensino e os fatores que, associados à aprendizagem, podem ajudar a melhorar a escola, a prática do professor e a educação em geral. Exemplos: o tamanho das turmas, o material didático, os equipamentos escolares...

Ainda, em 1998, a avaliação em larga escala, passa a contar, com o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), com o objetivo de verificar o comportamento de saída do ensino médio, o qual passou por diversas mudanças no decorrer dos anos até chegar ao formato atual.

Desta forma, os alunos passaram a ser avaliados em duas dimensões como aponta ([36], 2012),

> A avaliação educacional passou a ser identificada a partir de duas dimensões: uma interna, avaliação da aprendizagem realizada pelo professor como parte do seu fazer pedagógico, e a outra externa, avaliação do desempenho escolar, em larga escala, de natureza sistêmica, realizada por agente externo à escola. Tanto a avaliação interna como a externa precisam estar na pauta das discussões das escolas, para que de fato possam cumprir com o seu papel, para obtenção de resultados efetivos de melhoria da aprendizagem dos alunos.

Ao reforçar a importância das avaliações internas e externas como alternativas na reflexão da prática educativa e na necessidade de informar resultados para todos, ([36],

2012) *apud* Penin (2009, p. 23-24), aponta que

> [...] no âmbito interno, possibilita a avaliação como instrumento de ação formativa, levando instituições e os professores a refletirem a respeito de suas práticas e de seus objetivos e, assim, a melhorar sua ação docente e sua identidade profissional. Por outro, em âmbito externo, oferece informações para que tanto os pais quanto a sociedade, especialmente os sistemas de ensino, possam efetivar um relacionamento produtivo com a instituição escolar. Apurar os usos da avaliação, comparar resultados e comportamento de entrada dos alunos em cada situação e contexto social e institucional é da maior importância para não homogenizar processos que são de fato diferentes.

Acrescenta, ainda ([32], 2014), que

> adoção de avaliações externas que tenham como ponto forte o emprego de testes padronizados em larga escala, baseadas em censo ou população de alunos vai muito além da aplicação de provas, divulgação ou mesmo da análise dos resultados aferidos.

Neste sentido, ([12], 2005) diz que com os resultados do SAEB, percebeu-se que os professores não ensinavam corretamente por não ter material de qualidade, além de que o número de alunos por turma reflete no rendimento dos mesmos, e complementou que os dados do SAEB não conseguem avaliar escola por escola, devido a heterogeneidade da população em cada unidade da federação. Por outro lado, disse que os sistemas estaduais e municipais, de forma descentralizada, conseguem analisar cada uma das escolas e saber o que cada uma precisa para melhorar o desempenho dos alunos, considerando a identidade de cada uma. Maria Helena Guimarães, quando questionada se todas as escolas da rede pública deveriam ter o próprio sistema de avaliação, disse que seria o ideal, porém os sistemas devem adotar alguns critérios do SAEB, para que os resultados possam ser comparados.

Portanto, as avaliações em larga escala, apontam fatores dos quais necessitam-se a criação de ações de forma a influenciar os caminhos possíveis de serem seguidos por todas as escolas em busca de uma educação de qualidade e igualitária.

1.1 Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná

Seguindo a ideia lançada por Maria Helena Guimarães, presidente do INEP, em 1995, o estado do Paraná, através da Secretaria de Estado da Educação (SEED), em parceria com o Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora, criou em 2012 o Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná (SAEP) com o propósito de criar um sistema de ensino mais justo e inclusivo, com chances de aprendizado iguais para todos os estudantes.

Através dos dados gerados pelas avaliações do SAEP, a SEED proporciona um diagnóstico mais preciso da educação ofertada nas instituições estaduais. Além disso, os dados fornecem subsídios para a implementação, a (re)formulação e o monitoramento de políticas educacionais.

De acordo com ([25], 2012), "os testes aplicados aos alunos trazem uma medida de seu desempenho nos conhecimentos avaliados, denominado proficiência." Os resultados de proficiência obtidos foram agrupados em quatro padrões de desempenho, conforme Tabela 1.1, além disso, ([25], 2012) diz que

> esses padrões proporcionam uma interpretação pedagógica dos conhecimentos desenvolvidos pelos alunos e oferecem à escola o entendimento a respeito do nível em que eles se encontram. Por meio deles é possível analisar a distância de aprendizagem entre os alunos que se encontram em diferentes níveis de desempenho, do mais baixo ao mais elevado. É importante atentar-se para os alunos que estão nos padrões mais baixos, pois são eles os mais vulneráveis à evasão e ao insucesso escolar.
> Os níveis de proficiência compreendidos em cada um dos padrões de desempenho, para as diferentes etapas de escolaridade avaliadas, correspondem a determinados intervalos de pontuação alcançada nos testes.

Padrões de Desempenho	
Abaixo do básico	O aluno demonstra defasagem de aprendizagem do que é previsto para a sua etapa de escolaridade. Ele fica abaixo do esperado, na maioria das vezes, tanto no que diz respeito à compreensão do que

Continua

Padrões de Desempenho	
Abaixo do básico	é abordado, quanto na execução de tarefas e avaliações. Por isso, é necessária uma intervenção focada para que possa progredir em seu processo de aprendizagem.
Básico	O aluno demonstra ter aprendido o mínimo do que é proposto para o seu ano escolar. Neste nível ele já iniciou um processo de sistematização e domínio dos conhecimentos considerados básicos e essenciais ao período de escolarização em que se encontra.
Adequado	O aluno demonstra ter adquirido um conhecimento apropriado e substancial ao que é previsto para a sua etapa de escolaridade. Neste nível, ele domina um maior leque de conhecimentos, tanto no que diz respeito à quantidade, quanto à complexidade, os quais exigem um refinamento dos processos cognitivos neles envolvidos.
Avançado	O aluno revela ter desenvolvido conhecimentos mais sofisticados e demonstra ter um aprendizado superior ao que é previsto para o seu ano escolar. O desempenho desse aluno nas tarefas e avaliações propostas supera o esperado e, ao ser estimulado, pode ir além das expectativas traçadas.

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.1: Proficiência - SAEP

O SAEP é aplicado aos alunos dos 6.º e 9.º anos do ensino fundamental e aos alunos das 1.ª e 3.ª séries do ensino médio, respectivamente, entrada e saída de cada nível de escolaridade na rede estadual de ensino do Paraná, sendo ainda aplicado aos alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) do Ensino Fundamental - Fase II e Ensino Médio (EM). Os resultados dos Padrões de Desempenho possuem intervalos de proficiência, conforme Tabela 1.2.

	Padrão de desempenho			
Etapa de Escolaridade	Abaixo do básico	Básico	Adequado	Avançado
6.º ano - EF	até 200	200 a 250	250 a 300	acima de 300
9.º ano - EF	até 225	225 a 300	300 a 350	acima de 350
1.ª série - EM	até 225	225 a 300	300 a 350	acima de 350
3.ª série - EM	até 275	275 a 350	350 a 375	acima de 375
EJA - Fase II	até 200	200 a 250	250 a 300	acima de 300
EJA - EM	até 275	275 a 350	350 a 375	acima de 375

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.2: Intervalo de Proficiência

Para a associação das tabelas 1.1 e 1.2, deve-se considerar que os padrões de desempenho são os intervalos característicos da escala de proficiência, cujos valores identificam o desenvolvimento dos conhecimentos e das capacidades avaliados, e a proficiência é a média aritmética da medida de desempenho dos estudantes na avaliação.

Na avaliação educacional externa em larga escala do Paraná, os dados são produzidos por metodologia específica - utilizando-se a Teoria Clássica dos Testes (TCT) e a Teoria de Resposta ao Item (TRI). Os resultados baseados na Teoria Clássica dos Testes (TCT) apresentam o percentual de acertos em relação ao total de itens do teste, bem como a relação de acerto para cada descritor avaliado.

A Teoria de Resposta ao Item (TRI), por sua vez, atribui ao desempenho dos estudantes uma proficiência (e não uma nota). Essa metodologia leva em consideração uma modelagem estatística capaz de determinar um valor/peso diferenciado para cada item que o estudante respondeu no teste de proficiência; desse modo, é possível estimar o que o estudante é capaz de fazer, de acordo com os itens respondidos corretamente.

A proficiência é determinada considerando o padrão de respostas dos estudantes, de acordo com o grau de dificuldade e demais parâmetros dos itens. Cada item possui um grau de dificuldade próprio e parâmetros diferenciados, atribuídos por meio do processo de calibração dos itens, o que permite a comparabilidade ao longo do tempo.

Os itens que compõem os testes da avaliação educacional em larga escala são elaborados a partir das matrizes de referência. Cabe destacar que as matrizes não englobam todo o currículo. A partir de um recorte das Diretrizes Curriculares e dos Cadernos de Expectativas são definidos os conhecimentos passíveis de serem avaliados em testes padronizados de desempenho, constituindo as referidas matrizes de referência para a avaliação.

1.2 Matriz de referência

Uma matriz de referência é composta por um conjunto de descritores que explicitam dois pontos básicos do que se pretende avaliar: o conteúdo programático a ser avaliado em cada período de escolarização e o nível de operação mental necessário para a realização de determinadas tarefas. Tais descritores são selecionados para compor a matriz, considerando-se aquilo que pode ser avaliado por meio de um teste de múltipla escolha, cujos itens implicam a seleção de uma resposta em um conjunto dado de respostas possíveis.

Como cada ano/série avaliado tem uma matriz de referência, fizemos um recorte do conteúdo de funções nas matrizes de referência em todos os níveis de aplicação do SAEP por se tratar do tema central do nosso trabalho.

Matriz de Referência - Funções		
Ano/Série	Descritor	Habilidade
9.º	25	Identificar a representação algébrica de uma função do 1.º grau a partir dos dados de uma tabela.

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.3: Matriz Referência - 9.º Ano do Ensino Fundamental

Matriz de Referência - Funções		
Ano/Série	Descritor	Habilidade
EJA - Fase II	25	Identificar a representação algébrica de uma função do 1.º grau a partir dos dados de uma tabela.

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.4: Matriz Referência - EJA - Fase II

Matriz de Referência - Funções		
Ano/Série	Descritor	Habilidade
1.ª	23	Reconhecer intervalos de crescimento/decrescimento, ponto(s) de máximo/mínimo, e/ ou zeros de funções reais representadas em um gráfico.
	24	Identificar a representação gráfica que modela uma situação descrita em um texto
	25	Identificar a representação algébrica de uma função do 1.º grau a partir dos dados de uma tabela
	29	Resolver problemas que envolvam função do 1.º grau.

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.5: Matriz Referência - 1.ª Série do Ensino Médio

Matriz de Referência - Funções		
Ano/Série	Descritor	Habilidade
3.ª	23	Reconhecer intervalos de crescimento/decrescimento, ponto(s) de máximo/mínimo, e/ou zeros de funções reais representadas em um gráfico.
	24	Identificar a representação gráfica que modela uma situação descrita em um texto.
	28	Associar o gráfico de uma função exponencial à sua representação algébrica ou vice-versa.
	30	Resolver problemas reconhecendo a progressão aritmética como uma função do 1.º grau definida no conjunto dos números inteiros positivos.
	32	Resolver problemas envolvendo função exponencial.
	33	Associar o gráfico de uma função logaritmica à sua representação algébrica ou vice-versa.
	34	Associar o gráfico de uma função modular à sua representação

Continua

Matriz de Referência - Funções		
Ano/Série	Descritor	Habilidade
3.ª	34	algébrica ou vice-versa.
	35	Resolver problemas que envolvam progressões aritméticas ou geométricas.

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.6: Matriz Referência - 3.ª Série do Ensino Médio

Matriz de Referência - Funções		
Ano/Série	Descritor	Habilidade
EJA - EM	23	Reconhecer intervalos de crescimento/decrescimento, ponto(s) de máximo/mínimo, e/ou zeros de funções reais representadas em um gráfico.
	24	Identificar a representação gráfica que modela uma situação descrita em um texto.
	30	Resolver problemas reconhecendo a progressão aritmética como uma função do 1.º grau definida no conjunto dos números inteiros positivos.
	35	Resolver problemas que envolvam progressões aritméticas ou geométricas.

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.7: Matriz Referência - EJA - Ensino Médio

1.3 Diretrizes curriculares

As diretrizes curriculares orientadoras da educação básica para a rede pública estadual do Paraná e os referenciais curriculares básicos da Secretaria de Estado da Educação são amplos e espelham as diretrizes de ensino cujo desenvolvimento deve ser obrigatório para todos os alunos.

Essa é a diferença principal entre uma matriz de referência para avaliação, que é utilizada como fonte para os testes de avaliação em larga escala, e a Matriz Curricular de Ensino, que é muito mais ampla e retrata as diretrizes de ensino.

A matriz de referência para avaliação, utilizada para elaborar os testes de larga escala, surge das diretrizes curriculares da educação básica e do caderno de expectativas de aprendizagem, e contempla apenas aquelas habilidades consideradas fundamentais e possíveis de serem avaliadas, sobretudo em testes de múltipla escolha.

1.4 Resultados do SAEP

Os resultados do SAEP apontam que na média geral os alunos paranaenses estão no nível proficiência básico, ou seja, demonstram ter aprendido o mínimo do que é proposto para o seu ano escolar, veja Tabela 1.8.

Nível de proficiência e padrão de desempenho (%)						
Edição	Série/Ano	Proficiência Média	Abaixo do básico	Básico	Adequado	Avançado
2013	1.ª	243,6	35,2	54,4	9,6	0,8
2018	1.ª	261,4	20,5	60,4	16,6	2,5
2012	3.ª	271,3	52,8	41,8	3,6	1,7
2013	3.ª	270,6	54,7	40,0	3,6	1,8
2017	3.ª	260,9	64,3	31,5	2,5	1,7
2013	6.º	212,2	25,0	45,0	24,8	5,1
2018	6.º	226,4	26,1	45,4	24,4	4,1
2012	9.º	248,9	28,3	60,9	9,9	0,8
2013	9.º	249,0	28,8	59,6	10,7	1,0
2017	9.º	257,6	24,0	58,3	15,5	2,2

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.8: Nível de proficiência e Padrão de desempenho

Podemos observar ainda, na Tabela 1.8, que os resultados apontam uma ligeira melhora para os 6.º e 9.º anos do ensino fundamental e 1.ª série do ensino médio, já para a 3.ª série do ensino médio, os resultados mostram que os alunos não obtiveram avanços.

Em particular analisemos os resultados da 1.ª série do ensino médio. Observamos um decrescimento considerável de, aproximadamente, 58% no desempenho abaixo do básico, crescimento de, aproximadamente, 11% no nível básico, crescimento de, aproximadamente, 73% no nível adequado e crescimento de 212,5% no nível avançado. Entretanto, apesar de bons percentuais, levando-se em consideração que no ano de 2013 foram avaliados 133.254 alunos e 112.674 alunos no ano de 2018, podemos dizer que houve melhora nos resultados do SAEP. Contudo a migração entre os padrões de desempenho não é tão satisfatória, veja Figura 1.1.

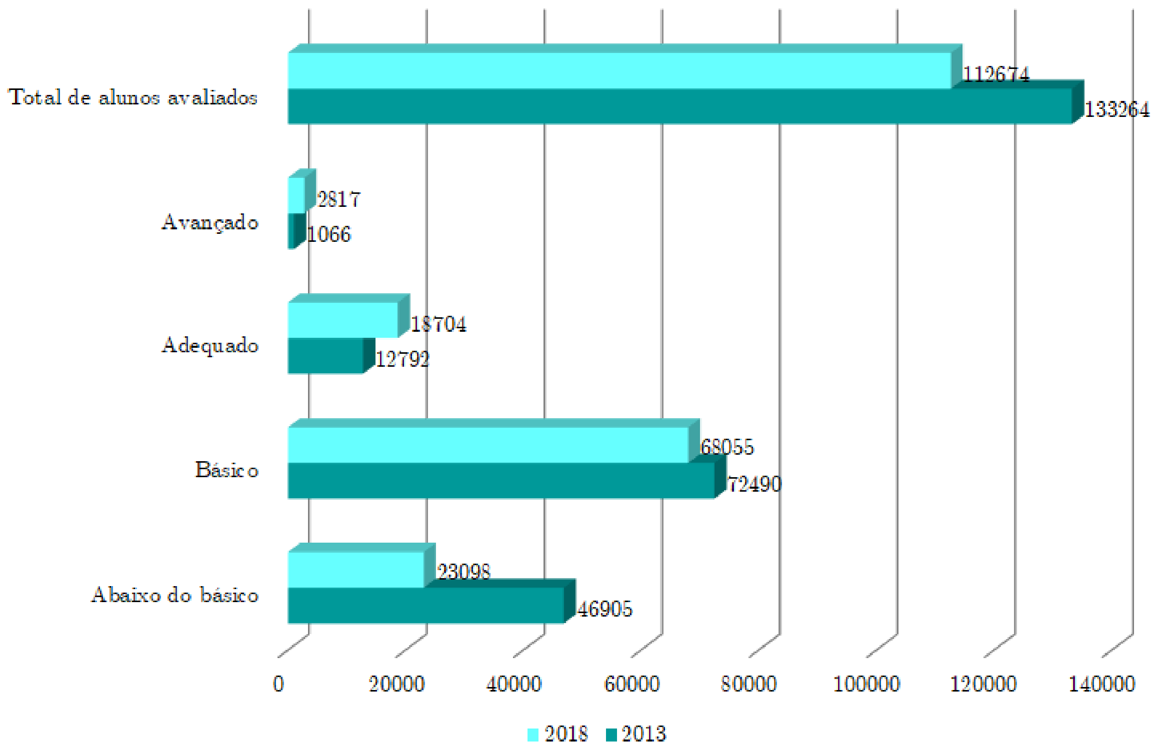


Figura 1.1: Gráfico do padrão desempenho da 1.ª série do ensino médio

Fonte: SAEP/CAEDUFJF - compilação do autor.

O SAEP possui uma escala de enquadramento de acordo com os percentuais de acertos por descritores, chamada de categoria de desempenho, veja Tabela 1.9.

Padrão de desempenho	Categoria de desempenho
Abaixo do básico	acima de 25% até 50%
Básico	acima de 50% até 75%
Adequado	acima de 50% até 75%
Avançado	acima de 75%

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.9: Categoria de desempenho

Ao compararmos as Tabelas 1.9 e 1.10, os resultados não são satisfatórios, pois o aluno quando avaliado no conteúdo de funções, tema central do nosso trabalho, fica enquadrado no padrão de desempenho abaixo do básico, ou seja, demonstram defasagem de aprendizagem do que é previsto para a sua etapa de escolaridade.

Acertos por descritor (%)			
Etapa	9.º	1.ª	3.ª
Ano	2017	2018	2017
D23	-	28,4	31,6
D24	-	42,4	41,3
D25	29,9	27,6	-
D28	-	-	22,8
D29	-	31,0	-
D30	-	-	27,0
D32	-	-	38,4
D33	-	-	18,9
D34	-	-	17,1
D35	-	-	46,9

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Tabela 1.10: Desempenho por descritor

Vejamos dois exemplos de questões aplicadas no SAEP, sendo o primeiro exemplo de uma questão que fora aplicada ao 9.º ano do ensino fundamental, em que o descritor 25 está sendo avaliado e uma questão aplicada a 3.ª série do ensino médio, em que o descritor 23 está sendo avaliado, em ambos o gabarito é a alternativa (a).

Exemplo 1.1. A tabela abaixo mostra o valor cobrado por uma copiadora, de acordo com o número de cópias.

Número de cópias	1	5	10	20	30	$\cdots$	p
Valor em reais	0,1	0,5	1,00	2,00	3,00	$\cdots$	V

Qual é a fórmula que relaciona o número de cópias (p) com o valor a ser pago (V)?

(a) $V = 0,10p$;

b) $V = 1 + 5p$;

(c) $V = 0,10 + 0,5p$;

(d) $V = 5p$.

Observemos que a habilidade avaliada neste item é a de identificar a função do primeiro grau que corresponde aos dados de uma tabela. No presente caso, a função do primeiro grau pode ser obtida diretamente a partir do preço de uma cópia. Como o preço por cópia é de R$ 0,10, o valor V, em reais, a ser pago por p cópias é $V = 0,10p$, onde p denota o número de cópias.

De acordo com o SAEP/CAEDUJF,

- A alternativa (a), que é a correta, foi a mais procurada, sendo escolhida por 32,6% dos estudantes.
- A alternativa (b) foi escolhida por 17% dos estudantes e a (c) por 28,2% dos estudantes. Eles usaram os dois primeiros valores que aparecem na primeira ou na segunda linha para dar como resposta, respectivamente, $V = 1 + 5p$ e $V = 0,10 + 0,50p$.
- A alternativa (d) foi escolhida por 21,7% dos estudantes. Parece que eles usaram o segundo número da primeira linha da tabela para escrever a função $V = 5p$.

As respostas dadas nas alternativas (b), (c) e (d) não satisfazem nenhum valor de p dado na tabela. Notemos ainda que 67,4% dos estudantes assinalaram como resposta as alternativas (b), (c) e (d), ou seja, a sensação é de que os estudantes que escolheram essas alternativas não compreenderam o que estava sendo pedido.

Exemplo 1.2. O gráfico abaixo apresenta uma função real definida no intervalo [-3, 5].

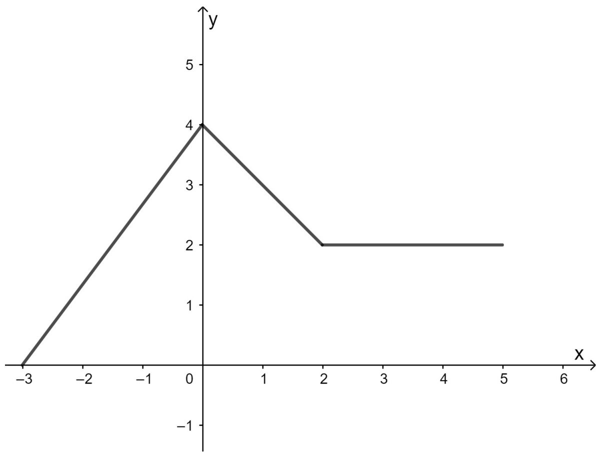


Figura 1.2: Função real definida no intervalo [-3, 5].

Fonte: SAEP/CAEDUFJF

Essa função é crescente no intervalo

(a) $[-3, 0]$;

(b) $[-3, 4]$;

(c) $[0, 2]$;

(d) $[2, 5]$;

(e) $[0, 4]$.

De acordo com o SAEP/CAEDUJF, o item avalia a capacidade de reconhecer o intervalo de crescimento de uma função representada em um gráfico e para resolver esse problema o aluno precisa identificar que a função é crescente no intervalo [-3, 0].

- A alternativa correta, (a), foi assinalada por apenas 10,9% dos alunos.
- A alternativa (b) foi escolhida por 60,4% dos alunos que consideraram como extremos do intervalo os pontos de interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

- Os alunos que assinalaram a alternativa (c), 12,8%, consideraram o intervalo em que a função é decrescente e os que assinalaram a alternativa (d), (8,2%, escolheram o intervalo em que a função é constante.

- A alternativa (e) foi assinalada por 7,3% dos alunos que consideraram os valores do intervalo de crescimento no eixo das ordenadas.

Portanto, fica evidente que os alunos da rede pública de educação do estado do Paraná possuem defasagem de aprendizagem, entre elas no ensino de funções, e que ações de cunho pedagógico são imprescindíveis para a melhoria do ensino e da aprendizagem.

Nesta direção, pretendemos neste trabalho resgatar a definição de relação, suas representações e propriedades, o conceito de função, suas representações e propriedades, assim como, as definições das funções afim, quadrática e polinomial apresentando aplicações práticas através de atividades com materiais manipuláveis.

Capítulo 2

O conceito de relação

Neste capítulo, introduzimos o conceito de relação e suas ramificações. Para mais detalhes, recomendamos que o leitor consulte as referências [1] e [10].

Faz parte do nosso cotidiano encontrar em jornais, revistas, informativos, panfletos, dentre outros, gráficos, tabelas e ilustrações, que são utilizados pelas mídias para chamar a atenção do público alvo, pois são de fácil compreensão. Porém, não são apenas nos jornais e nas revistas que nos deparamos com gráficos, estes estão presentes em diversos documentos como os exames laboratoriais, rótulos de produtos, nas informações dos produtos que compõem um cosmético, em bulas de remédio, etc.

Entretanto, para que possamos interpretar corretamente os gráficos, necessitamos de alguns conceitos, tais como par ordenado, plano cartesiano e função.

Definição 2.1. (Par ordenado) Dados dois conjuntos A e B, um par ordenado, denotado por (x, y), é um par de elementos com primeira coordenada x e a segunda coordenada y, onde $x \in A$ e $y \in B$.

Observação 2.2. Quando x é diferente de y, o par (y, x) é diferente do par (x, y), por isso, o nome, "par ordenado", pois a ordem tem importância. Num par ordenado, a primeira coordenada é denominada abscissa e a segunda coordenada é denominada ordenada.

Consideremos dois eixos x e y perpendiculares em O, os quais determinam o plano α, conforme Figura 2.1. Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por ele duas retas, x' paralela a x e y' paralela a y e denominemos P_1 a interseção de x com y' e P_2 a interseção de y com x'. Nestas condições definimos plano cartesiano

Definição 2.3. (Plano cartesiano)

(a) abscissa de P é o comprimento do segmento de reta OP_1, ou seja, $x_P = \overline{OP_1}$;

(b) ordenada de P é comprimento do segmento de reta $y_P = \overline{OP_2}$;

(c) coordenadas de P são números reais x_P e y_P, indicados na forma do par ordenado (x_P, y_P), em que x_P é o primeiro termo;

(d) eixo das abscissas é o eixo x (ou OX);

(e) eixo das ordenadas é o eixo y (ou OY);

(f) sistema de eixos cartesianos ortogonal (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy;

(g) plano cartesiano é o plano α.

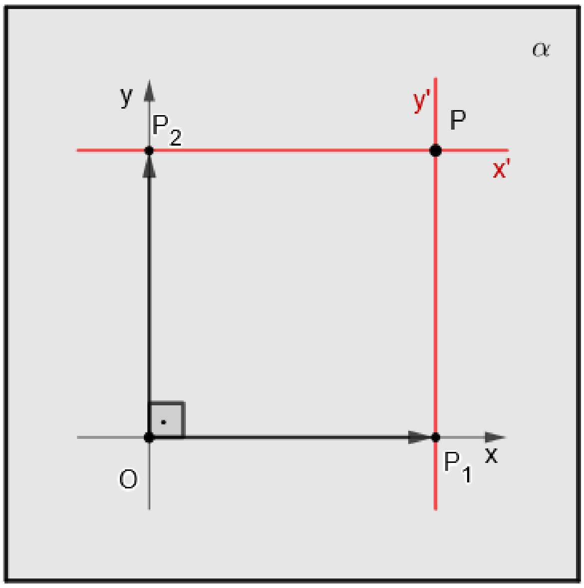


Figura 2.1: Plano Cartesiano

Fonte: O autor.

Definição 2.4. (Produto cartesiano) Dados os conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B, denotado por $A \times B$ (lê-se: A cartesiano B) é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), onde $x \in A$ e $y \in B$, isto é,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

2.1 Definição e exemplos

Podemos definir relações através da linguagem de conjuntos. O conceito de relação envolve uma regra em $A \times B$, que define todos os pares ordenados (x, y) que estão satisfazendo essa regra. A relação, é então, o conjunto desses pares ordenados, e por sua vez um subconjunto de $A \times B$.

Definição 2.5. (Relação) Sejam A e B conjuntos não-vazios, uma relação de A em B ou relação binária de A em B, denotada por $R(A, B)$, é um subconjunto de $A \times B$. Se um par (x, y) pertence a uma relação R, dizemos que x está relacionado com y pela relação R, e denotamos por xRy ou $(x, y) \in R$, ou seja,

$$R(A, B) = \{(x, y); xRy, x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Quando $A = B$, dizemos que R é uma relação sobre o conjunto A ou que R é uma relação em A.

Quando não houver dúvidas quanto ao produto cartesiano $A \times B$ que estamos utilizando, denotamos $R(A, B)$, por simplesmente R, além disso, quando um par (x, y) não pertencer à relação indicamos por $x \not R y$.

Existem distintas formas de apresentar uma relação. Entretanto, apresentamos duas formas, a primeira delas é representar o subconjunto $A \times B$, através de pares ordenados, ou seja, exibimos todos os elementos do produto cartesiano, e quando não for possível apresentar dessa forma a relação, utilizamos a segunda forma que é definir uma regra, na qual escolhemos os pares ordenados que satisfazem essa regra.

Nesse caso, escrevemos uma proposição a qual denotamos por $\mathcal{P}(x, y)$ onde $(x, y) \in A \times B$, que deve ser verdadeira para todos os elementos de $R(A, B)$. Uma notação alternativa para essa segunda maneira de apresentar uma relação é $R(A, B, \mathcal{P})$, onde $\mathcal{P}$ denota uma proposição.

A seguir, listamos alguns exemplos de relações.

Exemplo 2.6. Dado um conjunto qualquer A, a relação $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ é uma relação em A denominada relação identidade.

Exemplo 2.7. Sejam $A = B = \mathbb{N}$ e a proposição $\mathcal{P}(x, y)$: "x divide y". O conjunto

$R(A, B, \mathcal{P}(x, y)) = \{(x, y) \in A \times B \mid \mathcal{P}(x, y) \text{ é verdadeira}\} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ divide } y\}$ é uma relação em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por exemplo, $4\ R\ 28$, pois 4 divide 28, isto é, $28 = 7 \times 4$.

Exemplo 2.8. Seja $R = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathcal{P})$ e a proposição $\mathcal{P}$ é "x é menor que y". Como $x < y$ é verdadeira ou é falsa para qualquer par ordenado (x, y) de números inteiros, R é uma relação em $\mathbb{Z}$. Por exemplo, $\mathcal{P}(1, 3)$ é verdadeira, $\mathcal{P}(5, 3)$ é falsa, $\mathcal{P}(-1, 0)$ é verdadeira e $\mathcal{P}(-1, -3)$ é falsa, podemos escrever:

$$1R3, \qquad 5\not{R}3, \qquad -1R0, \qquad -1\not{R}-3.$$

Exemplo 2.9. Seja $R(A, B, \mathcal{P})$, onde A é o conjunto composto por homens e B é o conjunto composto por mulheres e $\mathcal{P}(x, y)$ é a proposição "x divide y". Nesta situação, exige-se significado, quando x é um homem e y é uma mulher. Logo, R não é uma relação, pois o "divide"pode ter diferentes significados dependendo do contexto, tais como separar, distribuir e repartir.

Exemplo 2.10. Sejam A o conjunto dos compositores e B o conjunto das sinfonias. Sabemos que Ludwig van Bettoven compôs a 9.ª Sinfonia, ou seja, na linguagem de produto cartesiano escrevemos "x compôs y", logo estamos relacionando Ludwig van Beethoven com a 9.ª Sinfonia.

Em uma relação $R(A, B)$, é extremamente importante saber quem são os elementos dos conjuntos A e B envolvidos na relação R.

Definição 2.11. (Domínio e imagem de uma relação) O domínio de uma relação, denotado por $\mathrm{Dom}(R)$, é um subconjunto de A dado por $\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A \mid xRy$ para algum $y \in B\}$. A imagem de uma relação R, denotada por $\mathrm{Im}(R)$, é o subconjunto de B dado por $\mathrm{Im}(R) = \{y \in B \mid xRy$ para algum $x \in A\}$.

Exemplo 2.12. Consideremos a relação R definida no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ dada pela proposição $\mathcal{P} : 4x^2 + 9y^2 = 36$. Temos que

- $\mathrm{Dom}(R) = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$
- $\mathrm{Im}(R) = \{y \mid -2 \leq y \leq 2\} = [-2, 2]$.

Definição 2.13. (Relação inversa) Se $R(A, B)$ é uma relação de A em B, dizemos que $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$ é a relação inversa de R, caso exista.

Observação 2.14. Uma relação $R(A, B)$ não admite relação inversa R^{-1} quando $(y, x) \in R^{-1}$ e $(x, y) \notin R$, para algum $x \in A$ e $y \in B$.

Teorema 2.15. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer e R uma relação de A em B. Então, se existe a relação inversa R^{-1},

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$.

(b) $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$.

(c) $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.

Demonstração.

(a) Suponhamos que exista a relação inversa R^{-1} de B em A, então $(R^{-1})^{-1}$ é uma relação de A em B, assim como R. Afim de verificarmos que $(R^{-1})^{-1} = R$, escolhemos $(x, y) \in A \times B$. Então,

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R.$$

(b) Observemos que $\mathrm{Dom}(R^{-1})$ e $\mathrm{Im}(R)$ são ambos subconjuntos de B. Com efeito, seja $y \in B$ um elemento arbitrário, então

$$y \in \mathrm{Dom}(R^{-1}) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ yR^{-1}x \Leftrightarrow \exists x \in A,\ xRy \Leftrightarrow y \in \mathrm{Im}(R).$$

(c) De forma análoga, ao item (b), temos que $\mathrm{Im}(R^{-1})$ e $\mathrm{Dom}(R)$ são subconjuntos de A. Seja, portanto, $x \in A$ um elemento arbitrário, então

$$x \in \mathrm{Im}(R^{-1}) \Leftrightarrow \exists y \in B,\ yR^{-1}x \Leftrightarrow \exists y \in B,\ xRy \Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom}(R).$$

■

Desta forma, mostramos no Teorema 2.15 que o domínio da relação inversa de uma relação R é a imagem de R e a imagem da relação inversa de R é o domínio de R e como consequência desse fato dada uma relação R de A em B sempre temos R^{-1} de B em A que atende aos critérios da Definição 2.13, desde que R^{-1} exista.

Exemplo 2.16. Consideremos a relação R de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{a, b\}$ dada por

$$R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\},$$

então a relação inversa de R é

$$R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}.$$

Exemplo 2.17. Consideremos a relação R em $\mathbb{R}$ dada pela proposição $\mathcal{P} : x^2 + 9y^2 = 9$. A relação inversa R^{-1} é obtida substituindo x por y e y por x na proposição que define R, de modo que a Definição 2.13 está satisfeita, ou seja,

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid 9x^2 + y^2 = 9\}.$$

Exemplo 2.18. Seja R a relação de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 1)\},$$

então R não admite R^{-1}, pois $(2, 3) \in R$ mas $(3, 2) \notin R$.

Exemplo 2.19. Suponhamos o conjunto $A = \{x \mid x \text{ é uma reta do plano}\}$ e a relação definida por $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ é perpendicular a} y\}$, a relação R não admite R^{-1}, pois toda reta não é perpendicular consigo mesma.

2.2 Representação de relações

Semelhantemente à representação de conjuntos e ao produto cartesiano de dois conjuntos, podemos representar uma relação de forma que seja mais fácil visualizar suas propriedades.

O produto cartesiano de dois conjuntos tem sua representação feita mediante os possíveis elementos, para os quais a relação faz sentido. O mais importante na representação é ter certeza de que ela fornecerá de forma mais simples as informações a respeito da relação.

Em geral, uma relação pode ser representada pelos diagramas cartesianos[1], diagrama de Venn e diagrama sagital.

2.2.1 Diagrama cartesiano

Seja R uma relação não-vazia, ou seja, que possui pelo menos um par ordenado (x, y) em $A \times B$, o diagrama cartesiano da relação R é obtido marcando no plano cartesiano somente os pontos de $A \times B$ que satisfazem a relação R.

Exemplo 2.20. Sejam $R = \{A, B, \mathcal{P}\}$, onde $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$ e a proposição $\mathcal{P} : x$ divide y. A relação R tem como diagrama cartesiano a Figura 2.2.

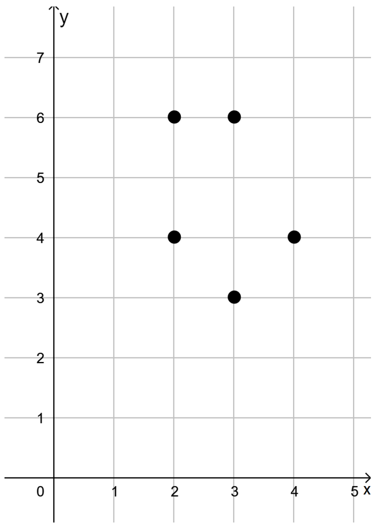


Figura 2.2: $R(A, B, \mathcal{P})$

Fonte: O autor.

Exemplo 2.21. Consideremos a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$. O diagrama cartesiano de R é representado por um esboço, veja Figura 2.3, pois R possui infinitos pares ordenados em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

[1]Também pode ser chamada de representação cartesiana por utilizar o plano cartesiano.

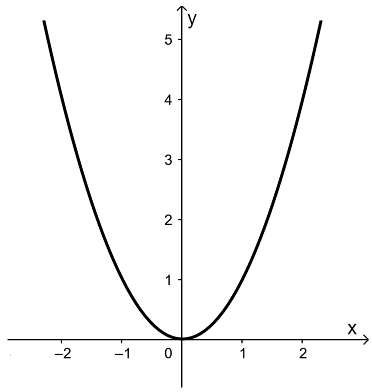


Figura 2.3: $R(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathcal{P}) : y = x^2$

Fonte: O autor.

Exemplo 2.22. Consideremos a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$. A relação inversa R^{-1} tem como elementos os pares de R com ordem trocada, ou seja, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R^{-1}$. Para obter o diagrama cartesiano da relação inversa, basta observar, que pela Definição 2.13, os pontos representantes de cada elemento da relação são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, a reta $y = x$.

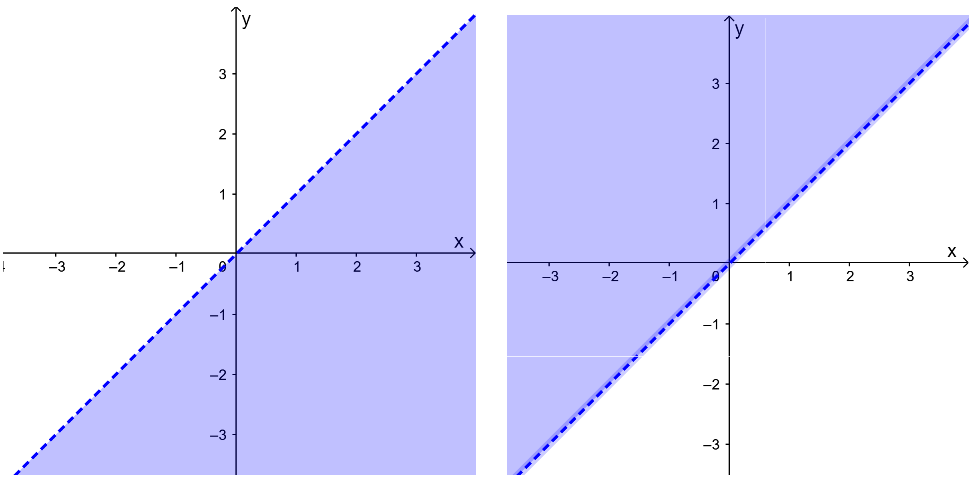


Figura 2.4: R e R^{-1}

Fonte: O autor.

2.2.2 Diagrama sagital

O diagrama sagital, também denominado de diagrama de flechas ou diagrama de setas, é um gráfico para representar relação consistindo de curvas fechadas, ou ainda de diagramas de Venn, que relacionam os elementos do domínio e da imagem. Além disso, segue a mesma representação do produto cartesiano, entretanto, o diagrama sagital somente pode ser utilizado com relações que possuem um número finito de elementos. Distingue-se do diagrama cartesiano, pois somente serão feitas as flechas que representam os pares da relação.

Exemplo 2.23. A relação vazia não possui representação pelo diagrama sagital.

Exemplo 2.24. Quando $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ a relação identidade I_A tem como representação o diagrama sagital (esquerda) ou diagrama de Venn (direita) dados pela Figura 2.5.

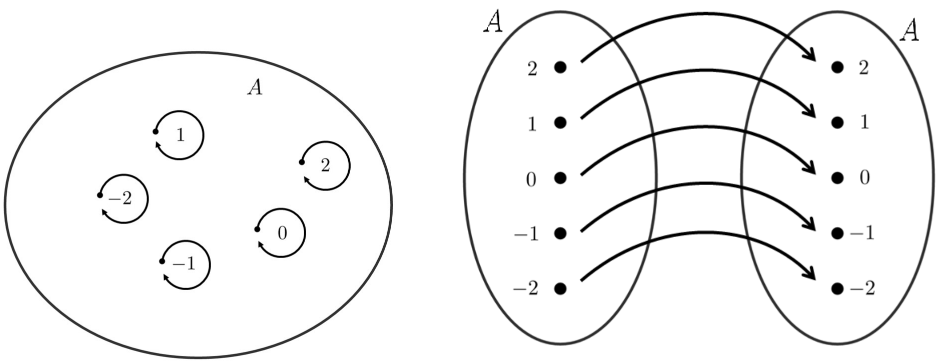


Figura 2.5: Relação Identidade I_A

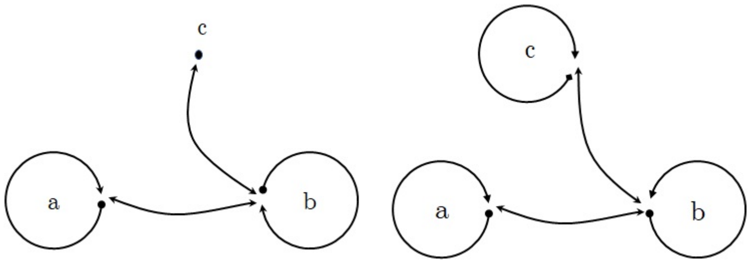
Fonte: O autor.

Exemplo 2.25. Consideremos $A = \{a, b, c\}$ e as seguintes relações sobre A

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)(c, b)\} \text{ e}$$

$$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}.$$

Seus diagramas de flechas são representados conforme Figura 2.6, respectivamente.



Relação R Relação R_1

Figura 2.6: Representação das relações R e R_1

Fonte: O autor.

Percebemos pela Definição 2.13, que as flechas representantes de cada elemento da relação inversa estarão no sentido inverso das flechas do diagrama da relação original. Por exemplo, a Figura 2.7 representa a relação inversa R_1^{-1} da relação R_1 do Exemplo 2.25.

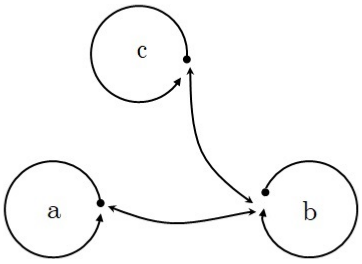


Figura 2.7: Relação R_1^{-1}

Fonte: O autor.

2.3 Propriedades das relações sobre um conjunto

Dentre as propriedades das relações de um conjunto A sobre ele mesmo, alguns tipos de relações são essenciais nas definições de relações de equivalência e ordem. A seguir, apresentamos definições de relações reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva.

2.3.1 Relação reflexiva

Definição 2.26. (Relação reflexiva) Uma relação R em A diz-se reflexiva quando, para todo $x \in A$, tem-se $(x, x) \in R$.

Observação 2.27. Em outros termos, R é reflexiva se, e somente se, todo elemento de A está relacionado com ele mesmo. Simbolicamente,

$$(\forall x \in A)(xRx),$$

ou seja,

$$(\forall x, y \in A)(x = y \Rightarrow xRy).$$

A seguir, listamos algumas propriedades imediatas de uma relação R reflexiva.

(P_1) Se R é uma relação reflexiva em A, a relação identidade em A, ou seja, I_A está contida em R, isto é, $I_A \subset R$, e reciprocamente se $R \subset I_A$, então R é reflexiva.

(P_2) Se R é uma relação reflexiva em A, a relação inversa de R, R^{-1}, também é uma relação reflexiva em A.

(P_3) Se R e S são relações reflexivas em A, $R \cup S$ e $S \cup R$ são também relações reflexivas A.

Exemplo 2.28. Consideremos a relação R em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}.$$

Esta relação não é reflexiva, porque $2 \in A$ e o par ordenado $(2, 2) \notin A$.

Exemplo 2.29. Seja T o conjunto de todos os triângulos do plano euclidiano. A relação R em T definida pela proposição $\mathcal{P}$: "x é semelhante a y"é reflexiva, porque todo triângulo é semelhante a si mesmo.

Exemplo 2.30. Seja R em $\mathbb{R}$ definida pela proposição $\mathcal{P}$: "x é menor que y". Então R não é uma relação reflexiva, porque para qualquer $x \in \mathbb{R}$, x não é menor do que x.

Exemplo 2.31. A relação R em $\mathbb{N}$, definida pela proposição $\mathcal{P}$: "x divide y, é reflexiva, porque $x \mid x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.32. Sejam F uma família de conjuntos e R a relação em F definida por "x é um subconjunto de y". A relação R é reflexiva, porque todo conjunto é um subconjunto de si mesmo.

2.3.2 Relação simétrica

Definição 2.33. (Relação simétrica) Uma relação R em A diz-se simétrica quando $(x, y) \in R$, implica que $(y, x) \in R$. Simbolicamente,

$$(\forall x, y \in R) \qquad (xRy \Rightarrow yRx).$$

Uma relação R em A é simétrica se, e somente se, R coincide com sua inversa R^{-1}, isto é, $R = R^{-1}$.

Exemplo 2.34. Seja R a relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Esta relação não é simétrica, porque $(2, 3) \in R$, mas $(3, 2) \notin R$.

Exemplo 2.35. Seja T o conjunto de todos os triângulos do plano euclidiano. A relação R em T definida pela proposição $\mathcal{P}$: "x é semelhante a y"é simétrica, pois se o triângulo t_1 é semelhante ao triangulo t_2, então o triângulo t_2 também é semelhante ao triângulo t_1.

Exemplo 2.36. A relação R em $\mathbb{N}$ definida pela proposição $\mathcal{P}$: "x divide y"não é simétrica, porque 2 divide 4, mas 4 não divide 2. Em outros termos, $(2, 4) \in R$, mas $(4, 2) \notin R$.

Exemplo 2.37. A relação R em $\mathbb{N}$ definida pela proposição $\mathcal{P}$: "$x + y = 8$"é simétrica, porque se $x + y = 8$, então $y + x = 8$. Em outros termos, $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.

2.3.3 Relação anti-simétrica

Definição 2.38. (Relação anti-simétrica) Uma relação R em A diz-se anti-simétrica quando $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ implicam que $x = y$.

Observação 2.39. Em outras palavras, R é anti-simétrica se, e somente se, sendo $x \neq y$, nunca se tem simultaneamente $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$. Simbolicamente,

$$(\forall x, y \in A)(xRy \text{ e } yRx) \Rightarrow x = y.$$

Evidentemente, uma relação R em A é anti-simétrica se, e somente se, a interseção de R com sua relação inversa R^{-1} está contida em I_A, relação identidade em A, isto é:

$$R \cap R^{-1} \subset I_A.$$

Exemplo 2.40. Consideremos a relação R em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 3), (4, 2), (4, 4), (2, 4)\}.$$

Está relação não é anti-simétrica, porque $(4, 2) \in R$, $(2, 4) \in R$ e $4 \neq 2$.

Exemplo 2.41. A relação R em $\mathbb{N}$ definida pela proposição $\mathcal{P}$: "x divide y"é anti-simétrica, porque se x divide y e y divide x, então, $x = y$.

Exemplo 2.42. Sejam F uma família de conjuntos e R a relação em F definida por "x é um subconjunto de y". Então R é uma relação anti-simétrica, porque $A, B \in F$, $A \subset B$ e $B \subset A$ implicam $B = A$.

2.3.4 Relação transitiva

Definição 2.43. (Relação transitiva) Uma relação R em A diz-se transitiva quando, $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ implicam que $(x, z) \in R$.

Uma relação R transitiva pode ser representada, simbolicamente, por

$$(\forall x, y, z \in A)(xRy \text{ e } yRz) \Rightarrow xRz.$$

Exemplo 2.44. Consideremos a relação R em $A = \{a, b, c\}$ dada por

$$R = \{(a, b), (c, b), (b, a), (a, c)\}.$$

Esta relação não é transitiva, porque $(c, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, mas $(c, a) \notin R$.

Exemplo 2.45. A relação R em $\mathbb{R}$ definida pela proposição $\mathcal{P}$: "x é menor que y"é transitiva, porque $x < y$ e $y < z$ implicam $x < z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.46. A relação R em $\mathbb{N}$ definida pela proposição $\mathcal{P}$: "$x + y = 12$"não é transitiva, porque $7+8=15$ e $8+7=15$, mas $7+7 \neq 12$, isto é, $(7,8) \in R$ e $(8,7) \in R$, mas $(7,7) \notin R$.

Exemplo 2.47. Sejam F uma família de conjuntos e R a relação em F definida por "x é um subconjunto de y". Então R é uma relação transitiva, porque $A \subset B$ e $B \subset C$ implicam que $A \subset C$, para quaisquer conjuntos A, B, C contidos em F.

2.4 Relação de equivalência

Definição 2.48. (Relação de equivalência) Uma relação R em A chama-se relação de equivalência em A quando ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Em outras palavras, uma relação R em A é uma relação de equivalência em A se, e somente se, possui as três propriedades a seguir:

(R) $(\forall x \in A)(xRx)$. (reflexiva)

(S) $(\forall x, y \in A)(xRy \Rightarrow yRx)$. (simétrica)

(T) $(\forall x, y, z \in A)(xRy \text{ e } yRz) \Rightarrow xRy$. (transitiva).

Exemplo 2.49. Seja $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. A relação

$$R = \{(a,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,b), (c,c), (c,d), (d,b), (d,c), (d,d), (e,e), (e,f), (f,e), (f,f)\}$$

cujo diagrama sagital é dado, conforme Figura 2.8, é uma relação de equivalência.

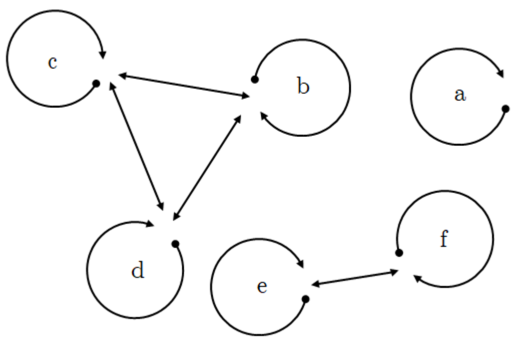


Figura 2.8: Relação de Equivalência

Fonte: O autor.

Exemplo 2.50. Seja A o conjunto de todos os triângulos do plano euclidiano. A relação R em A definida por "x é semelhante a y"é uma relação de equivalência em A, já que

- R é reflexiva, pois um triângulo x é semelhante a um triângulo x, basta escolher a constante de proporcionalidade $k = 1$.
- R é simétrica, pois todo triângulo x é semelhante a um triângulo y, seus ângulos internos são congruentes o que nos permite dizer que y é semelhante a x.
- R é transitiva, pois se os triângulos x e y são semelhantes e y é semelhante a z, os ângulos internos de x e y são congruentes e os ângulos internos de y e z são congruentes, isto é, os ângulos internos de x e z são congruentes, nos permitindo dizer que x é semelhante a z.

Exemplo 2.51. Consideremos a relação R em $\mathbb{Z}$ definida pela proposição $\mathcal{P}$: "$(x - y)$ é divisível por 5", isto é,

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, 5 \mid (x - y)\}.$$

Vamos mostrar que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. Com efeito,

(i) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0$ é divisível por 5, isto é, xRx. Logo, R é reflexiva.

(ii) Seja $(x, y) \in R$. Então, $x-y$ é divisível por 5, e consequentemente $x-y = -(y-x)$ também é divisível por 5, isto é, $(y, x) \in R$. Logo xRy implica yRx. Portanto, R é simétrica.

(iii) Sejam $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$. Então, $x - y$ e $y - z$ são divisíveis por 5 e, portanto,

$$(x - z) = (x - y) + (y - z)$$

também é divisível por 5, isto é, $(x, z) \in R$. Logo, xRy e yRz implicam xRy. Portanto, R é uma relação transitiva.

Proposição 2.52. Seja $\mathfrak{F}$ uma família de relações de equivalência sobre um conjunto A, então $S = \bigcap\limits_{R \in \mathfrak{F}} R$ é uma relação de equivalência sobre A.

Demonstração. Seja $x \in A$, então xRx, para toda $R \in \mathfrak{F}$. Assim xSx, para todo $x \in A$. Pela Definição 2.26, S é uma relação reflexiva. Suponhamos que xSy, então xRy, para toda $R \in \mathfrak{F}$, como R é uma relação simétrica, yRx, para toda $R \in \mathfrak{F}$ e, assim ySx. Portanto, R é uma relação simétrica. Para mostrar a transitividade, suponhamos que xSy e ySz, então xRy e yRz, para toda $R \in \mathfrak{F}$. Como R é uma relação transitiva xRz, para toda $R \in \mathfrak{F}$. Logo, xSz e, assim, S é uma relação transitiva. Portanto, S é uma relação de equivalência sobre A. ■

Exemplo 2.53. Em geral, a união de uma família de relações de equivalência não é uma relação de equivalência. Por exemplo, consideremos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações de equivalência $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$. Seja

$$S = R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

a união de R_1 e R_2. Notemos que S não é uma relação transitiva em A, pois $(1, 2) \in S$ e $(2, 3) \in S$, entretanto, $(1, 3) \notin S$, logo, S não é uma relação de equivalência em A.

Definição 2.54. (Classe de equivalência módulo R) Seja $R = (A, \mathcal{P})$ uma relação de equivalência sobre A. Dado $a \in A$, a classe de equivalência de a módulo R, denotada por C_a, é o subconjunto de A constituído pelos elementos $x \in A$ tais que xRa, ou seja,

$$C_a = \{x \in A \mid xRa\} = \{x \in A \mid a \equiv x(\text{mod } R)\}.$$

A família das classes de equivalência dos elementos de A módulo R é denotada por A/R e é denominada conjunto quociente de A por R.

Exemplo 2.55. Seja A o conjunto de todos os círculos do plano euclidiano. As relações R_1 e R_2 em A, definidas pelas proposições:

$\mathcal{P}_1$: "x e y são concêntricos";

$\mathcal{P}_2$: "x e y tem o mesmo raio";

respectivamente, são relações de equivalência em A, pois as classes de equivalência segundo R_1 são círculos concêntricos e as classes de equivalência segundo R_2 são círculos de mesmo raio.

Exemplo 2.56. Sejam E o espaço euclidiano e O um ponto fixo de E. A relação R em E definida por

$$XRY \Leftrightarrow OX = OY$$

é uma relação de equivalência em E, pois

(R) $(\forall A \in E)(AO = OA)$;

(S) $(\forall A, B \in E)(OA = OB \Rightarrow OB = AO)$;

(T) $(\forall A, B, C \in E)(OA = OB \text{ e } OB = OC) \Rightarrow OA = OC$;

onde as classes de equivalência segundo R são esferas de centro O e raio OX e o conjunto quociente é o conjunto das esferas de centro O.

Teorema 2.57. (Teorema fundamental sobre as relações de equivalência) Seja R uma relação de equivalência sobre A. Então,

(a) para qualquer $a \in A$, a classe C_a é não-vazia;

(b) para quaisquer $a, b \in A$, $C_a \cap C_b = \varnothing$ ou $C_a = C_b$;

(c) a união de todas as classes de equivalência é igual ao conjunto A, ou seja, $\bigcup_{a \in A} C_a = A$.

Demonstração.

(a) Para todo $a \in A$, tem-se $a \in C_a$, pois pela propriedade reflexiva de R, aRa. Logo, C_a não é vazia, ou seja, $C_a \neq \varnothing$.

(b) Consideremos duas classes de equivalência segundo R dos elementos $a, b \in A$, C_a e C_b, respectivamente. Primeiramente, vamos demonstrar que aRb implica que $C_a = C_b$. Seja x um elemento qualquer de C_a. Como R é uma relação simétrica, aRb implica bRa, então

$$(bRa \text{ e } aRx) \Rightarrow bRx$$

e isto significa que $x \in C_b$. Logo

$$C_a \subset C_b. \tag{2.1}$$

Seja, agora, y um elemento qualquer de C_b. Então,

$$(aRb \text{ e } bRy) \Rightarrow aRy$$

e isto significa que $y \in C_a$. Logo

$$C_b \subset C_a. \tag{2.2}$$

Concluímos de (2.1) e (2.2) que $C_a = C_b$.

Agora, vamos verificar que $a \not R b$ implica que $C_a \cap C_b = \varnothing$. Com efeito, se existisse um elemento x tal que

$$x \in C_a \text{ e } x \in C_b,$$

teríamos

$$(aRx \text{ e } xRb) \Rightarrow aRb,$$

contrariando a hipótese, veja item (b).

(c) Obviamente que $\bigcup_{a \in A} C_a \subset A$, pois cada uma das classes de equivalência C_a é um subconjunto de A. Reciprocamente, se $a \in A$, sendo R reflexiva, temos $a \in C_a$, logo $a \in \bigcup_{a \in A} C_a$, pois C_a está contido em $\bigcup_{a \in A} C_a$. Portanto, $\bigcup_{a \in A} C_a = A$.

■

Definição 2.58. (Partição de um conjunto) Seja A um conjunto não-vazio. Dizemos que uma família $\mathfrak{F}$ de subconjuntos não-vazios de A é uma partição de A quando

(a) dois membros quaisquer de $\mathfrak{F}$ ou são iguais ou são disjuntos;

(b) a união dos membros de $\mathfrak{F}$ é igual a A.

Definição 2.59. (Conjunto quociente) O conjunto quociente é uma família de elementos formada por todas as classes distintas de uma relação de equivalência. Se a relação de equivalência é R está definida no conjunto A , denotamos A/R e se lê "conjunto quociente de A pela relação R".

De posse da Definição 2.58, podemos ver que o conjunto quociente A/R é uma partição de A. O Teorema 2.57 nos mostra que uma relação de equivalência sobre um conjunto A divide esse conjunto em subconjunto disjuntos de A.

Exemplo 2.60. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, a família de subconjuntos $\mathfrak{F} = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 7\}, \{5\}, \{6, 8\}\}$ é uma partição de A, pois cada um dos subconjuntos de $\mathfrak{F}$ é não-vazio, dois a dois disjuntos e a união deles é o conjunto A.

Exemplo 2.61. Sejam $A = \{\text{números naturais pares}\}$ e $B = \{\text{números naturais ímpares}\}$. Então $\{A, B\}$ é uma partição para o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$.

Exemplo 2.62. Dados o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ e as famílias $\mathfrak{F}_1 = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\mathfrak{F}_2 = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}\}$, $\mathfrak{F}_3 = \{\{a\}, \{c, d\}\}$ e $\mathfrak{F}_4 = \{\{b, c\}, \{c, d\}\}$. Notemos que as famílias de subconjuntos não são partições de A. De fato,

- $\mathfrak{F}_1$ não é partição de A, pois possui o conjunto vazio;
- $\mathfrak{F}_2$ não é partição de A, pois $\{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\} \neq \varnothing$, apesar de os subconjuntos serem não-vazios e a união ser igual a A;
- $\mathfrak{F}_3$ não é partição, pois $\{a\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\} \neq A$;
- $\mathfrak{F}_4$ não é partição, pois $\{b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\} \neq \varnothing$ e $\{b, c\} \cup \{c, d\} \neq A$.

Teorema 2.63. (Relação de equivalência através de uma partição)
Se $\mathfrak{F}$ é uma partição de A, então existe uma relação de equivalência R sobre A de modo que $A/R = \mathfrak{F}$.

Demonstração.
Consideremos $R = \{A, A, \mathcal{P})$ de modo que $x, y \in A$ e a proposição $\mathcal{P}$ dada por "$(\exists C_a \in \mathfrak{F})(x \in C_a \text{ e } y \in C_a)$", ou seja, xRy, se $\mathcal{P}(x, y)$ é verdadeira, ou ainda, x está relacionado com y quando existe um conjunto C_a da partição $\mathfrak{F}$ que contém x e y. Asseguramos que R é uma relação de equivalência sobre A. De fato, R é uma relação reflexiva, pois se $x \in A$, então existe $C_a \in \mathfrak{F}$ tal que $x \in C_a$ e $x \in C_a$, assim xRx. Também R é uma relação simétrica, pois se $x, y \in A$ e xRy, então, por hipótese, existe $C_a \in \mathfrak{F}$ tal que $x \in C_a$ e $y \in C_a$, logo existe $C_a \in \mathfrak{F}$ tal que $y \in C_a$ e $x \in C_a$, ou seja, yRx. Além disso, R é uma relação transitiva, pois se $x, y, z \in A$ tais que xRy e yRz, então existem $C_a \in \mathfrak{F}$ tal que

$x \in C_a$ e $y \in C_a$ e $C_b \in \mathfrak{F}$ tal que $y \in C_b$ e $z \in C_b$. Como $\mathfrak{F}$ é uma partição e $y = C_a \cap C_b$, temos, pelo item (b) da Definição 2.58, que $C_a \cap C_b \neq \varnothing$ e, assim, $C_a = C_b$, logo existe $C_a \in \mathfrak{F}$ tal que $x \in C_a$ e $z \in C_a$ e, portanto, xRz. Pela Definição 2.54, $A/R = \mathfrak{F}$. ■

É possível relacionar relação de equivalência e partição.

Exemplo 2.64. Dada a partição $\mathfrak{F} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$ de $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, a ela podemos associar a relação de equivalência
$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f), (f, d),$
$(d, f)\}$ e $A/R = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\} = \mathfrak{F}$.

2.5 Relação de ordem

Definição 2.65. (Relação de ordem) Uma relação R não-vazia sobre um conjunto A não-vazio é chamada relação de ordem sobre A, se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Um conjunto ordenado é um conjunto sobre o qual se definiu uma relação de ordem. Além disso, se para quaisquer $x, y \in A$, tivermos xRy ou yRx, a relação R é chamada relação de ordem total sobre A. O conjunto A, nesse caso, é chamado conjunto totalmente ordenado.

Em outros termos, uma relação R em A é uma relação de ordem em A, se e somente se, possui as três propriedades

- $(\forall x \in A)(xRx)$ (reflexiva);
- $(\forall x, y \in A)(xRy$ e $yRx) \Rightarrow x = y$ (anti-simétrica);
- $(\forall x, y, z \in A)(xRy$ e $yRz) \Rightarrow xRz$ (transitiva).

Se R é uma relação de ordem em A, ao invés de xRy, escrevemos $x \preccurlyeq y$, e dizemos "x é menor ou igual a y na relação R". Quando xRy e, além disso, x é diferente de y, escrevemos $x \prec y$ e dizemos que "x é menor do que y". Além disso, um conjunto A munido de uma relação de ordem diz-se conjunto ordenado e dizemos, também que o conjunto A possui uma estrutura de ordem.

Exemplo 2.66. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. A relação em A definida por "$x \leqslant y$"é uma relação de ordem em A, denominada de ordem natural em A.

Exemplo 2.67. A relação em $\mathbb{N}$ definida por "x é múltiplo de y"é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$. Podemos, então, escrever $6 \preccurlyeq 2$ e $15 \preccurlyeq 3$, pois $6 = 2 \cdot 3$ e $15 = 3 \cdot 5$.

Exemplo 2.68. A relação de dividibilidade em $\mathbb{N}$ definida por "x divide y"é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $6 \preccurlyeq 42$ e $5 \preccurlyeq 35$.

Observação 2.69. Quando uma relação R em um conjunto A é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, a relação inversa R^{-1} também possui estas três propriedades. Por consequência, se R define uma relação de ordem em A, a relação inversa R^{-1} também define uma relação de ordem em A, denominada relação de ordem oposta de R. Além disso, $yR^{-1}x$ indica-se por $y \succcurlyeq x$, e dizemos que "y é maior ou igual a x", quando xRy e, além disso, x é diferente de y, escrevemos $y \succ x$, e dizemos que "y é maior do que x".

2.5.1 Elementos comparáveis, ordem total e ordem parcial

Definição 2.70. (Elementos comparavéis) Dois elementos x e y de A dizem-se comparáveis quando se tem $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

Definição 2.71. (Relação de ordem total) A relação de ordem $\preccurlyeq$ em A diz-se relação de ordem total em A quando dois elementos de A são comparáveis, ou seja,

$$\forall x, y \in A, \text{ tem-se } x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x.$$

Se $\preccurlyeq$ é uma relação de ordem total em A dizemos também que A é um conjunto totalmente ordenado pela relação $\preccurlyeq$ ou que A possui estrutura de ordem total definida pela relação $\preccurlyeq$.

Definição 2.72. (Relação de ordem parcial) A relação de ordem $\preccurlyeq$ em A diz-se relação de ordem parcial em A quando existe ao menos um par (x, y) de elementos e A não comparáveis, ou seja,

$$\exists x, y \in A, \text{ tais que } x \npreceq y \text{ ou } y \npreceq x.$$

Se $\preccurlyeq$ é uma relação de ordem parcial em A dizemos também que A é um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\preccurlyeq$ ou que A possui uma estrutura de ordem parcial definida pela relação$\preccurlyeq$.

Exemplo 2.73. A relação de ordem natural em $\mathbb{N}$ definida por $x \leq y$ é uma relação de ordem total em $\mathbb{N}$, pois dados dois elementos quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, eles são comparáveis, ou seja, tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemplo 2.74. Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$. O diagrama sagital de A dado pela Figura 2.9

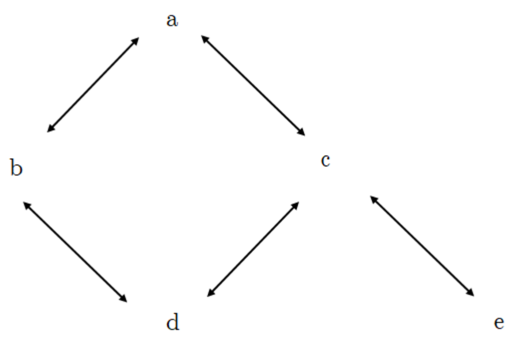


Figura 2.9: Relação de ordem parcial

Fonte: O autor.

define uma relação de ordem parcial em A mediante o seguinte critério: $x \preccurlyeq y$ se $x = y$ ou se existe um percurso ascendente de x até y segundo a direção indicada pela flechas. Assim,

$b \preccurlyeq a, \qquad d \preccurlyeq a, \qquad e \preccurlyeq c;$

$b \npreceq c$ e $c \npreceq b$ (b e c não comparáveis);

$d \npreceq e$ e $e \npreceq d$ (d e e não comparáveis).

Exemplo 2.75. O conjunto das partes de um conjunto E é parcialmente ordenado pela relação de ordem definida por "X é um subconjunto de Y", isto é, $X \subset Y$. Realmente, se A e B são partes disjuntas de $E(A \cap B = \varnothing)$ e $A, B \subset E$, então A e B não são comparáveis, porque $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.

2.5.2 Relação de ordem estrita

Definição 2.76. (Relação de ordem estrita) Uma relação R em um conjunto A chama-se relação de ordem estrita em A, quando possui as seguintes propriedades:

(1) xRy e $yRz \Rightarrow xRz,$ para todos $x, y, z \in A$ (Transitiva)

(2) $x \not{R} x,$ para todo $x \in A$.

O conjunto A diz-se, então, estritamente ordenado pela relação R.

Observação 2.77. A relação de ordem estrita R não é reflexiva em virtude da propriedade (2) da Definição 2.76 e também é não simétrica, isto é, xRy e yRx nunca são simultaneamente verdadeiras. Assim, uma relação de ordem estrita em um conjunto é não reflexiva e não simétrica, mas é transitiva.

Uma relação de ordem estrita R sobre um conjunto A é uma relação de ordem estrita total quando, dados dois elementos quaisquer de A, eles são comparáveis mediante R, ou seja, ou xRy ou yRx para todos $x \neq y$ em A . Neste caso, dizemos que A é um conjunto estrita e totalmente ordenado pela ordem R.

Exemplo 2.78. A relação em $\mathbb{N}$ definida por $x < y$ é uma relação de ordem estrita total em $\mathbb{N}$, pois, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{N}$, valem

(1) $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$

(2) $x < y \Rightarrow x \neq y$

(3) $x < y$ ou $y < x$.

2.5.3 Elementos notáveis em um conjunto ordenado

Definição 2.79. (Limites de um conjunto) Sejam A um conjunto ordenado segundo a relação $\preccurlyeq$ e $B \subset A$ um subconjunto não-vazio. Dizemos que $\mathcal{L} \in A$ é um limitante superior para B se, para todo $x \in B$, tivermos $x \preccurlyeq \mathcal{L}$. Denotamos o conjunto dos limitantes superiores por $\mathcal{M}_A(B)$. Quando $\mathcal{M}_A(B) \neq \varnothing$, dizemos que B é um conjunto limitado superiormente. Também dizemos que $\ell \in A$ é um limitante inferior para B se, para todo $x \in B$, tivermos $\ell \preccurlyeq x$. Denotamos o conjunto dos limitantes inferiores por $\mathfrak{m}_A(B)$. Quando $\mathfrak{m}_A(B) \neq \varnothing$, dizemos que o conjunto é limitado inferiormente. Um conjunto B que é limitado superior e inferiormente é dito limitado.

Quando dizemos que $\mathcal{L}$ é um limitante superior de B garantimos que qualquer elemento de B é menor ou igual a $\mathcal{L}$. Do mesmo modo se ℓ é um limitante inferior de B, ℓ é menor ou igual a qualquer elemento de B. É importante notar que os limitantes superiores e inferiores não necessariamente pertencem ao conjunto B, ou seja, $\mathcal{M}_A(B)$ e $\mathfrak{m}_A(B)$ não são necessariamente subconjuntos de B.

Exemplo 2.80. Em $\mathbb{N}$, consideremos $A = \{3, 5, 7\}$ e a relação R dada por "$x \leq y$", então $\mathfrak{m}_A(A) = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{M}_A(A) = \{7, 8, 9, \cdots\}$. Portanto, o conjunto A é limitado.

Exemplo 2.81. Consideremos $\mathbb{R}$ com a relação de ordem usual. Se $B = [0, 1]$, então $\mathfrak{m}_A(B) =]-\infty, 0]$, pois para todos $x \in [0, 1]$ e $y \in]-\infty, 0]$, temos $y \leq x$. Do mesmo modo, $\mathcal{M}_A(B) = [1, +\infty[$. Portanto, o intervalo $[0, 1]$ é limitado superior e inferiormente. Consequentemente, $[0, 1]$ é limitado.

Exemplo 2.82. Sejam $A = \{-3, -6, -9, \cdots, -3n, \cdots\}$ e a relação de ordem usual, com $n \in \mathbb{N}$, então $\ell = -3$, é o limitante inferior de A. Notemos que não temos $\mathcal{L}$, ou seja, A não possui um limitante superior. Logo, A não é limitado.

Proposição 2.83. (Inclusão de conjuntos com limitantes) Sejam $B_1 \subset B_2$ e B_2 subconjunto de um conjunto ordenado A, então

(a) $\mathcal{M}_A(B_2) \subset \mathcal{M}_A(B_1)$;

(b) $\mathfrak{m}_A(B_2) \subset \mathfrak{m}_A(B_1)$.

Demonstração.

(a) Seja $\mathcal{L} \in \mathcal{M}_A(B_2)$. Pela Definição 2.79, $\mathcal{L} \in A$ e $x \preccurlyeq \mathcal{L}$, para todo $x \in B_2$. Como $B_1 \subset B_2$, qualquer que seja $x \in B_1$, temos $x \preccurlyeq \mathcal{L}$. Logo, $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(B_1)$.

(b) Seja $\ell \in \mathfrak{m}_A(B_2)$. Pela Definição 2.79, $\ell \in A$ e $\ell \preccurlyeq x$, para todo $x \in B_2$. Como $B_1 \subset B_2$, qualquer que seja $x \in B_2$, temos $\ell \preccurlyeq x$. Logo, $\ell \in \mathfrak{m}_A(B_1)$.

Observação 2.84. A recíproca da Proposição 2.83 nem sempre é verdadeira. Consideremos a relação de ordem dada pela Figura 2.10.

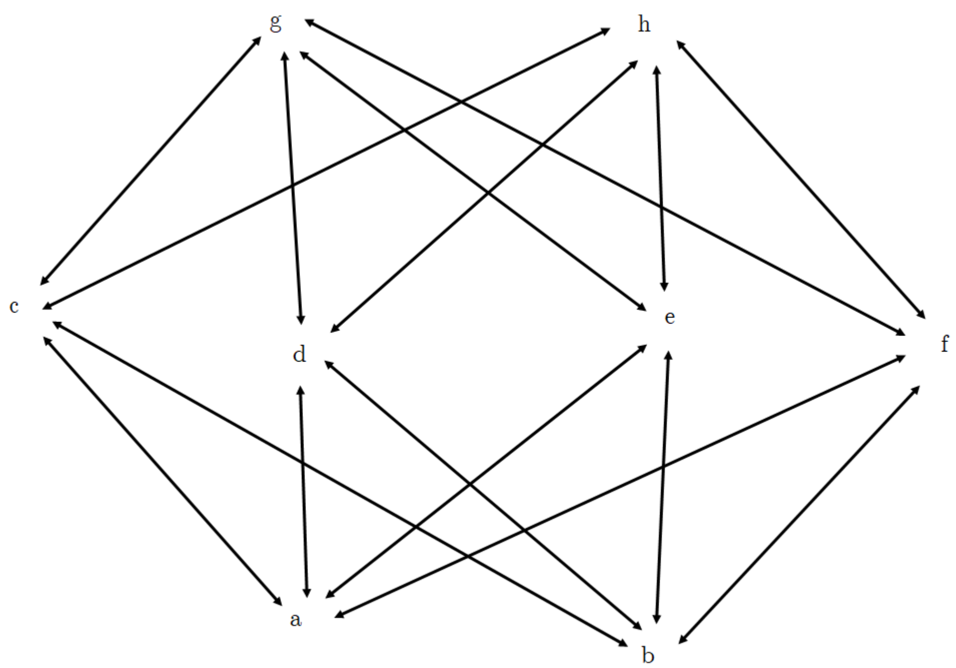


Figura 2.10: Recíproca da Proposição 2.83

Fonte: O autor.

Temos que

$$\mathcal{M}(\{c,d\}) = \{g,h\} = \mathcal{M}(\{e,f\})$$
$$\mathfrak{m}(\{c,d\}) = \{a,b\} = \mathfrak{m}(\{e,f\})$$

e, no entanto, $\{c,d\} \not\subset \{e,f\}$. ■

Definição 2.85. (Elemento minimal e maximal) Sejam A um conjunto ordenado segundo a relação $\preccurlyeq$ e B um subconjunto não-vazio de A. Dizemos que E é uma elemento maximal de A se, para $x \in A$, $x = \mathrm{E}$ sempre que $\mathrm{E} \preccurlyeq x$. Se $x = \mathrm{E}$ sempre que $x \preccurlyeq \mathrm{E}$, então E é um elemento minimal de A. Denotamos o conjunto dos elementos maximais e minimais por $\mathrm{EMax}(A)$ e $\mathrm{EMin}(A)$, respectivamente. Se, para todo $x \in B$, tivermos $x \preccurlyeq \mathrm{M}$, então $\mathrm{M} \in B$ é um máximo de B. Dizemos que $m \in B$ é um mínimo de B, se, para todo $x \in B$, tivermos $m \preccurlyeq x$.

Observemos a diferença entre um elemento maximal de B e outro que é limitante superior de B. Para um elemento ser máximo ele deverá pertencer ao conjunto B. Pela Definição 2.79, se M é máximo de B, então ele é limitante superior de B e, se m é mínimo de B, então ele é limitante inferior de B. Logo, para verificar os candidatos a máximo e mínimo, devemos buscar os limitantes superiores e inferiores de B e, dentre eles, escolher os que são elementos de B. Assim, todo elemento de $\mathcal{M}_A(B) \cap B$ é máximo e todo elemento $\mathfrak{m}_A(B) \cap B$ é mínimo.

Além disso, se existir máximo (respectivamente, mínimo) em A, ele será o único elemento maximal de A (respectivamente, minimal de A).

Exemplo 2.86. Consideremos a relação de ordem dada pelo diagrama sagital da Figura 2.11 e conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$.

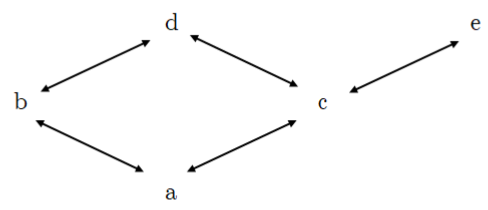


Figura 2.11: Relação de ordem com elemento mínimo e sem elemento máximo

Fonte: O autor.

Temos que $\text{EMax}(A) = \{d, e\}$ e $\text{EMin}(A) = \{a\}$. Notemos ainda que o elemento a é tanto elemento minimal, como o mínimo de A, porém o conjunto A não possui máximo, pois $\mathcal{M}_A(B) \cap B = \{d, e\}$, ou seja, não é um conjunto unitário.

Exemplo 2.87. Em $A = \{a, b, c, d, e\}$, consideremos a ordem dada pela Figura 2.12. Então, A possui elementos maximais a e b, e elementos minimais, c e d.

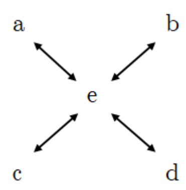


Figura 2.12: Relação de ordem sem elementos de mínimo e de máximo

Fonte: O autor.

Pelo fato de que $\text{EMax}(A) = \{a, b\}$ e $\text{EMin}(A) = \{c, d\}$, A não possui o elemento máximo e nem mínimo, pois $\text{EMax}(A)$ e $\text{EMin}(A)$ não são conjuntos unitários.

Exemplo 2.88. O conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, \cdots\}$ ordenado pela relação "x divide y"possui como elementos minimais todos os números que são primos, porque se $p \in A$ é um número primo, então somente p divide p (visto que $1 \notin A$). Além disso, se $a \in A$ não é primo, então há um número $b \in A$ tal que b divide a, isto é, $b \preccurlyeq a$ e $b \neq a$. Notemos ainda que o conjunto A não possui elementos maximais, porque, qualquer que seja $a \in A$, a divide, em particular, $2a$.

Evidentemente, nem sempre existem máximo e mínimo de um conjunto, mesmo quando o conjunto é limitado superior ou inferiormente, ou até mesmo quando a ordem é total, mas se o máximo e o mínimo de um conjunto existem, são únicos.

Teorema 2.89. (Unicidade de mínimo e máximo) Se B é um subconjunto de um conjunto ordenado $(A, \preccurlyeq)$ e existem elementos máximo e mínimo de B, então eles são únicos.

Demonstração.

(i) Suponhamos que M e M' são máximos de B. Então,

- M é máximo de B e $\mathrm{M}' \in B \Rightarrow \mathrm{M}' \preccurlyeq \mathrm{M}$;
- M' é máximo de B e $\mathrm{M} \in B \Rightarrow \mathrm{M} \preccurlyeq \mathrm{M}'$.

Logo, pela propriedade anti-simétrica, $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$.

(ii) Suponhamos que m e m' são mínimos de B. Então,

- m é mínimo de B e $\mathrm{m}' \in B \Rightarrow \mathrm{m} \preccurlyeq \mathrm{m}'$;
- m' é mínimo de B e $\mathrm{M} \in B \Rightarrow \mathrm{m}' \preccurlyeq \mathrm{m}$.

Logo, pela propriedade anti-simétrica, $\mathrm{m} = \mathrm{m}'$. Portanto, quando um conjunto possui mínimo ou máximo, ele é único. ■

Denotamos, em um conjunto ordenado A, o máximo de um subconjunto B por $\max_A(B)$ e o mínimo de um subconjunto B por $\min_A(B)$.

Proposição 2.90. Sejam B_1 e B_2 subconjuntos de um conjunto ordenado A tais que $B_1 \subset B_2$, onde o máximo e o mínimo de cada subconjunto existem, então $\min_A(B_2) \leq \min_A(B_1) \leq \max_A(B_1) \leq \max_A(B_2)$.

Demonstração. Pela Proposiçao 2.83.(b), $\mathfrak{m}_A(B_2) \subset \mathfrak{m}_A(B_1)$, assim $\min_A(B_2) \leq \min_A(B_1)$. Pela Definição 2.79, $\min_A(B_1) \leq \max_A(B_1)$ e, outra vez, pela Proposição 2.83.(a), $\max_A(B_1) \leq \max_A(B_2)$. Portanto, $\min_A(B_2) \leq \min_A(B_1) \leq \max_A(B_1) \leq \max_A(B_2)$. ■

Se um subconjunto B de A é limitado superior e inferiormente, os conjuntos $\mathcal{M}_A(B)$ e $\mathrm{m}_A(B)$ são subconjuntos não vazios de A. Logo, podemos pensar na existência de mínimo e máximo de B.

Definição 2.91. Sejam A um conjunto ordenado segundo a relação $\preccurlyeq$ e $B \subset A$ um subconjunto não-vazio. Chamamos de supremo de B, denotado por $\sup_A B$, o mínimo do conjunto dos limitantes superiores de B, caso exista, ou seja,

$$\sup_A(B) = \min_A(\mathcal{M}_A(B)).$$

Chamamos de ínfimo de B, denotado por $\inf_A(B)$, o máximo do conjunto dos limitantes inferiores de B, caso exista, ou seja,

$$\inf_A(B) = \max_A(\mathfrak{m}_A(B)).$$

Exemplo 2.92. Consideremos $\mathbb{N}$ com a ordem usual. Todo subconjunto, A não vazio e limitado superiormente (respectivamente, inferiormente) de $\mathbb{N}$, possui elemento mínimo (respectivamente, máximo), que também é supremo (respectivamente, ínfimo), isto é, $\sup_{\mathbb{N}}(A) = \min_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(A))$ (respectivamente, $\inf_{\mathbb{N}}(A) = \max_{\mathbb{N}}(\mathfrak{m}_{\mathbb{N}}(A))$).

Exemplo 2.93. Seja A uma parte do conjunto $\mathbb{N}$ constituída de dois números naturais distintos c e d, isto é, $A = \{c, d\}$. Para a relação de divisibilidade $(x \mid y)$, os limitantes superiores de A são os múltiplos comuns de c e d, e como todos os múltiplos comuns de c e d são múltiplos do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de c e d, segue que o conjunto $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(A)$ dos limitantes superiores de A admite como elemento mínimo o m.m.c.(c, d), isto é,

$$\sup_{\mathbb{N}}\{c, d\} = \text{ m.m.c}(c, d).$$

Analogamente, os limitantes inferiores de A são os divisores comuns de c e d, e como todos os divisores comuns de c e d são divisores do máximo divisor comum (m.d.c.) de c e d, segue que o conjunto $\mathfrak{m}_{\mathbb{N}}(A)$ dos limitantes inferiores de A admite como elemento máximo o m.d.c.(c,d), isto é,

$$\inf_{\mathbb{N}}\{c,d\} = \text{ m.d.c}(c,d).$$

Teorema 2.94. Sejam $(A,\preccurlyeq)$ um conjunto ordenado e B um subconjunto não-vazio de A. Temos $s=\sup_A(B)$ se, e somente se, as seguintes condições ocorrem

(a) para todo $x\in B$, temos $x\preccurlyeq s$;

(b) se existe $y\in A$ tal que $x\preccurlyeq y$, para todo $x\in B$, então $s\preccurlyeq y$.

Demonstração. Suponhamos que $s=\sup_A(B)$, então $s=\sup_A(\mathcal{M}_A(B))$. Assim, s é um elemento de $\mathcal{M}_A(B)$, veja Definição 2.85. Logo, para todo $x\in B$, $x\preccurlyeq s$. Além disso, $s=\mathcal{M}_A(B)\cap\mathfrak{m}_A(\mathcal{M}_A(B))$, assim, se existe $y\in A$ tal que $x\preccurlyeq y$, para todo $x\in B$, pela Definição 2.79, $s\preccurlyeq y$.

Reciprocamente, sejam B um subconjunto não-vazio de A e $s\in A$ satisfazendo as condições (a) e (b). Pelo item (a), temos que $s\in\mathcal{M}_A(B)$. O item (b) nos garante que se $y\in\mathcal{M}_A(B)$ então $s\preccurlyeq y$, ou seja, $s\in\mathfrak{m}_A(\mathcal{M}_A(B))$. Portanto, $s=\sup_A(B)$. ■

Teorema 2.95. Sejam $(A,\preccurlyeq)$ um conjunto ordenado e B um subconjunto não-vazio de A. Temos $t=\inf_A(B)$ se, e somente se, as seguintes condições ocorrem

(a) para todo $x\in B$, temos $t\preccurlyeq x$;

(b) se existe $y\in A$ tal que $y\preccurlyeq x$, para todo $x\in B$, então $y\preccurlyeq t$.

Demonstração. Suponhamos que $t=\inf_A(B)$, temos que $t=\max_A(\mathfrak{m}_A(B))$. Assim, antes de mais nada, s é um elemento de $\mathfrak{m}_A(B)$, veja Definição 2.85. Logo, para todo $x\in B$, $t\preccurlyeq x$. Além disso, se existe $y\in A$ tal que $y\preccurlyeq x$, para todo $x\in B$, pela Definição 2.79, $y\preccurlyeq t$.

Reciprocamente, sejam B um subconjunto não vazio de A e $t\in A$ satisfazendo as condições (a) e (b). Pelo item (a), $t\in\mathfrak{m}_A(B)$. O item (b) nos garante que se $y\in\mathfrak{m}_A(B)$, então $y\preccurlyeq t$, ou seja, $t\in\mathcal{M}_A(\mathfrak{m}_A(B))$. Portanto, $t=\inf_A(B)$. ■

Definição 2.96. Um conjunto A é dito bem ordenado se for um conjunto ordenado $(A,\preccurlyeq)$ e todo subconjunto não-vazio de A possuir mínimo. Nesse caso, a ordem $\preccurlyeq$ é denominada boa ordem sobre A.

Exemplo 2.97. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com a ordem usual $\leq$ é bem ordenado, mas não é bem ordenado com a ordem dada pela divisão, pois existem naturais quaisquer x e y que não são comparáveis, por exemplo 5 e 12, 5 não divide 12 e 12 não divide 5.

Exemplo 2.98. Todo subconjunto de um conjunto bem ordenado é bem ordenado, pois dados um conjunto bem ordenado A e B um subconjunto de A, então todo subconjunto de B é subconjunto de A e, portanto, possui mínimo.

Proposição 2.99. Todo conjunto bem ordenado é totalmente ordenado.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$, então o subconjunto $\{a, b\}$ de A contém, pela Definição 2.85, um elemento que é mínimo. Desse modo, um dos elementos de A precisa ser menor ou igual ao outro. Portanto, A é totalmente ordenado. ■

Observemos que a recíproca da Proposição 2.99 nem sempre é verdadeira, pois $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são totalmente ordenados segundo a ordem usual, mas não são bem ordenados.

Quando um conjunto X for totalmente ordenado, podemos definir de maneira natural em A, subconjunto de X, uma ordem parcial induzida pela ordem de X, então X sendo totalmente ordenado A também será. Um subconjunto $A \subset X$ é uma cadeia[2] se, na ordem induzida, for totalmente ordenado.

Pelo fato de A ser bem ordenado podemos determinar o elemento maximal através do Lema 2.100 que é um princípio de maximalidade em conjuntos parcialmente ordenados.

Lema 2.100. (Lema de Zorn) Seja X um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia tenha pelo menos uma cota superior, então X tem um elemento maximal.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [13] página 105. ■

[2] A é uma cadeia em X se quaisquer dois elementos de A são comparáveis, isto é, dados $a_1, a_2 \in A$ vale que $a_1 \leq a_2$ ou $a_2 \leq a_1$.

Capítulo 3

Função

Neste capítulo, introduzimos o conceito de função e seus desdobramentos. Para mais detalhes, recomendamos que o leitor consulte as referências [1], [7] e [10].

O conceito de função existe desde os primórdios da humanidade. Porém, foi a partir do século XVII, com o surgimento da matemática moderna, que seu conceito fundamental começou a ser construído. Ao filósofo, cientista, matemático e diplomata alemão, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) foi atribuída a criação do vocábulo função.

Além de Leibniz, vários matemáticos apresentaram definições de funções, tais como Daniel Bernoulli (1700-1782), Jacob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

De acordo com ([5], 2007), algumas das definições dadas por estes matemáticos são:

> Johann Bernoulli (1718): Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes. Euler (1748): uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes. Euler (1755): se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x ou são determinadas por ele são chamadas suas funções. Lagrange (1797): Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, envolvidas ou não com outras quantidades que consideramos como sendo dadas e valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. [...] Designaremos

> em geral pela letra f ou F, colocada antes da variável, toda função desta variável, isto é, toda quantidade que depende desta variável e que varia com ela segundo uma lei dada.

Além disso, este capítulo tem como proposta resgatar a formalidade das definições de relação e função e aplicá-la através de atividades práticas, conforme expomos no Cápitulo 4.

3.1 Definição de função e exemplos

Definição 3.1. (Função) Sejam A e B dois conjuntos quaisquer não-vazios. Uma função f de A em B denotada por $f : A \to B$ é uma terna (f, A, B), onde f é uma relação de A em B satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\text{Dom}(f) = A$, ou seja, para qualquer x em A, existe y em B tal que (x, y) está em f.

(b) se xfy e xfz, então $y = z$.

O conjunto A é denominado domínio da função $f : A \to B$ e denotado por $\text{Dom}(f)$. O conjunto B é denominado contradomínio de $f : A \to B$ e denotado por $\text{Cdom}(f)$. Estas definição são motivadas pelas Definições 2.5 e 2.11.

Em outros termos, uma função $f : A \to B$ é um conjunto de pares ordenados (x, y) tais que a cada elemento $x \in A$ corresponde um, e somente um, elemento $y \in B$. Portanto, uma função f é um tipo especial de relação de A em B.

Além disso, a condição de ser único elemento $y \in B$ correspondente a qualquer elemento $x \in A$ significa que, se dois pares ordenados (x, y) e (x, z) do mesmo conjunto f têm o mesmo primeiro elemento, então, devem ter também o mesmo segundo elemento conforme Definição 3.1.(b), ou seja,

$$(x, y) \in f \quad \text{e} \quad (x, z) \in f \Rightarrow y = z.$$

Dessa forma, utilizamos a notação $y = f(x)$ ao invés de xfy, visto que y é univocamente determinado por x.

Importante notar que todo elemento de B não é, necessariamente, imagem de um elemento de A e, também, que elementos distintos de A podem ter a mesma imagem.

Em muitos casos, ao invés de escrever $f : A \to B$, adotamos apenas f, quando estiverem implícitos os conjuntos A e B. Além disso, a representação cartesiana da relação f é denominada gráfico da relação f e motivados pela Seção 2.2 denotamos por $\text{Gr}(f)$. Deste modo, $\text{Gr}(f)=\{(x, f(x)) \in A \times B \mid x \in A\}$.

A seguir, vejamos um exemplo das taxas que uma empresa de transporte de cargas utiliza no dia-a-dia, sem levar em consideração as alíquotas de impostos que são cobradas dependendo do tipo de carga e que variam de um Estado para outro.

Exemplo 3.2. Para levar uma carga de caminhão de um Estado para outro, uma transportadora cobra R$ 10,00 fixos e um adicional R$ 0,50 por quilo de carga. O preço do frete y é uma função da massa em quilogramas x da carga. A lei de formação dessa função é $f(x) = 10 + 0,5 \cdot x$, onde $x \in R_+$.

Exemplo 3.3. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Consideremos a relação de A em B dada por

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}.$$

Assim, f é uma função de A em B, porque, para todo elemento de A valem (a) e (b) da Definição 3.1.

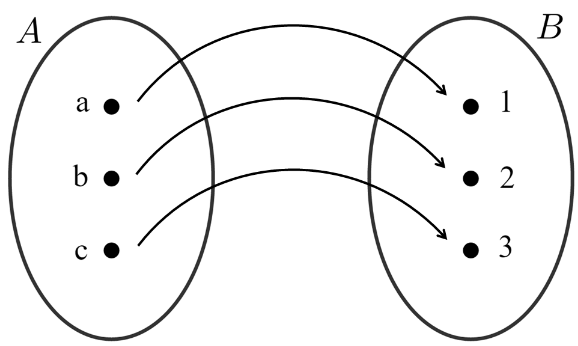


Figura 3.1: Diagrama sagital da função f

Fonte: O autor.

A representação da Figura 3.1 é o diagrama sagital da relação f, vista na Seção 2.2

Exemplo 3.4. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$. A relação de A em B dada por

$$f = \{(1, a), (2, i), (3, e), (2, u)\}$$

não é uma função de A em B, porque $2fi$, $2fu$ e $i \neq u$.

Exemplo 3.5. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. A relação f de A em B dada por

$$f = \{(1, 1), (2, 5), (4, 3)\}$$

não é uma função de A em B, porque o elemento $3 \in A$ e não existe $y \in B$, tal que $3fy$.

3.2 Igualdade de funções

Como uma relação de A em B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, então, para estabelecermos igualdade entre funções, é necessário que as relações e os conjuntos A e B sejam iguais. Sendo assim, conforme Definição 2.5, segue a definição de igualdade de funções.

Definição 3.6. Dizemos que duas funções f e g são iguais, e denotamos por $f = g$, quando

(a) $\mathrm{Gr}(f) = \mathrm{Gr}(g)$;

(b) $\mathrm{Cdom}(f) = \mathrm{Cdom}(g)$.

Observação 3.7. Vimos no Cápitulo 2 que uma relação pode ser expressa através dos pares ordenados do subconjunto $A \times B$ ou, ainda, através da definição de uma regra, que pode ser uma sentença aberta ou uma expressão algébrica e, da mesma forma, podemos expressar as funções. Veja os Exemplos 3.8 e 3.9.

Exemplo 3.8. A função $f : A \to B$, onde $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ dada pela relação

$$f = \{(1, 1), (2, 4)\}$$

e a função g, cujo domínio é o conjunto $\{1, 2\}$ definida pela expressão $g(x) = x^2$, são iguais ($f = g$), pois $\mathrm{Gr}(f) = \mathrm{Gr}(g)$ e o $\mathrm{Cdom}(f) = \mathrm{Cdom}(g)$.

Exemplo 3.9. São iguais as funções $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ e $g(x) = x - 1$? A resposta é não, pois as relações f e g não são iguais, ou seja, não satisfazem o item (a) da Definição 3.6, mesmo a condição do item (b) sendo satisfeita. Notemos que $\mathrm{Dom}(f) \neq \mathrm{Dom}(g)$.

Teorema 3.10. Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ funções. Então, $f = g$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

Demonstração. Suponhamos que $f = g$ e consideremos $x \in A$. Pelo item (a) da Definição 3.1, existe $y \in B$ tal que $y = f(x)$, ou seja, $(x, y) \in \mathrm{Gr}(f)$. Como, por hipótese, $f = g$, temos $\mathrm{Gr}(f) = \mathrm{Gr}(g)$. Assim, $(x, y) \in \mathrm{Gr}(g)$, ou seja, $y = g(x)$. Portanto $f(x) = g(x)$. Reciprocamente, suponhamos $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$, temos

$$(x, y) \in \mathrm{Gr}(f) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{Gr}(g).$$

Logo, $\mathrm{Gr}(f)=$ $\mathrm{Gr}(g)$ e, portanto, $f = g$. ■

3.3 Conjunto imagem

Definição 3.11. (Conjunto imagem) Sejam $f : A \to B$, X e Y subconjuntos de A e B, respectivamente. A imagem de X sob f, denotada por $f(X)$, é o conjunto de todas as imagens dos elementos de X, ou seja,

$$f(X) = \{y \in B \mid y = f(x), x \in X\}.$$

A imagem inversa de Y sob f, denotada por $f^{-1}(Y)$, é o conjunto formado por todos os $x \in A$ tais que $f(x) \in Y$, ou seja,

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

Exemplo 3.12. Dada a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ com $f(x) = \sqrt{x}$ e $Y =]1, 2[$. Temos que a imagem inversa do conjunto Y pela função f é

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(Y) &= \{x \in \mathbb{R}_+ \mid f(x) \in Y\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 < f(x) < 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 < \sqrt{x} < 2\} \\
&=]1, 4[\,.
\end{aligned}
$$

Notemos que o gráfico da função f é uma interpretação visual dos conjuntos Y e $f^{-1}(Y)$, conforme apresentado na Figura 3.2.

Exemplo 3.13. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ em que $f(x) = x^2$ e o conjunto $Y = [1, 4]$ como mostra a Figura 3.3, a imagem inversa de Y pela função f é o conjunto $[-2, -1] \cup [1, 2]$ formado pela união de dois intervalos, ou seja,

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(Y) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in Y\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1 \text{ e } |x| \leq 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1) \text{ e } (-2 \leq x \leq 2)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid (-2 \leq x \leq -1) \text{ ou } (1 \leq x \leq 2\} \\
&= [-2, -1] \cup [1, 2].
\end{aligned}
$$

Teorema 3.14. Seja $f : A \to B$ uma função. Então:

(a) $f(\varnothing) = \varnothing$.

(b) $f(\{x\}) = \{f(x)\}, \forall x \in A$.

(c) Se $X_1 \subset X_2 \subset A$ então $f(X_1) \subset f(X_2)$.

(d) Se $Y_1 \subset Y_2 \subset B$ então $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.

(e) Sejam X_1 e X_2 subconjuntos de A, então $f(X_1 \setminus X_2) \supset f(X_1) \setminus f(X_2)$.

(f) Sejam Y_1 e Y_2 subconjuntos de B, então

  (i) $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$,

  (ii) $f^{-1}(\complement_B Y_1) = \complement_A(f^{-1}(Y_1))$.

(g) Se $\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ é uma família de subconjuntos de A, então

(i) $f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$,

(ii) $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$.

(h) Se $\{Y_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ é uma família de subconjuntos de B, então

(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma)$

(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma\right) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma$

Demonstração.

(a) Como $\varnothing \subset f(\varnothing)$, pois $\varnothing$ está contido em qualquer conjunto, basta mostrar que $f(\varnothing) \subset \varnothing$. Suponhamos, por absurdo, que $f(\varnothing) \not\subset \varnothing$, então existe $y \in f(\varnothing)$. Logo, pela Definiação 3.11, existe $x \in \varnothing$ tal que $y = f(x)$, o que é um absurdo. Portanto, $f(\varnothing) = \varnothing$.

(b) De fato, seja $y \in f(\{x\})$, então existe $b \in \{x\}$ tal que $y = f(b)$, assim $b = x$ e $y = f(x)$. Portanto, $y \in \{f(x)\}$.

(c) Seja $y \in f(X_1)$, então existe $x \in X_1$ tal que $y = f(x)$. Como $X_1 \subset X_2$, temos que $x \in X_2$ tal que $y = f(x)$, ou seja, $y \in f(X_2)$. Portanto, $f(X_1) \subset f(X_2)$.

(d) Seja $x \in f^{-1}(Y_1)$, então existe $y \in Y_1$ tal que $y = f(x)$. Como $Y_1 \subset Y_2$, temos que $y \in Y_2$ tal que $y = f(x)$, ou seja, $x \in f^{-1}(Y_2)$. Portanto, $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.

(e) Seja $y \in f(X_1)\setminus f(X_2)$, então $y \in f(X_1)$ e $y \notin f(X_2)$. Deste modo, existe $x \in X_1$ tal que $f(x) = y$ e, para todo $x' \in X_2$, $f(x') \neq y$. Logo, $x \notin X_2$, portanto, $x \in X_1 \setminus X_2$ e $f(x) = y$. Assim, $y \in f(X_1 \setminus X_2)$.

(f) (i) Primeiramente, vamos mostrar que $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$. Seja $x \in f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2)$. Pela Definição 3.11, concluímos que $f(x) \in Y_1 \setminus Y_2$,ou seja, $f(x) \in Y_1$ e $f(x) \notin Y_2$. Como consequência deduzimos que $x \in f^{-1}(Y_1)$ e $x \notin f^{-1}(Y_2)$. Portanto, $x \in f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$, e deste modo vale a inclusão $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$.

Reciprocamente, vamos mostrar que $f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2)$. Seja $x \in f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$. Então $x \in f^{-1}(Y_1)$ e $x \notin f^{-1}(Y_2)$. Pela pela Definição 3.11, concluímos que $f(x) \in Y_1$ e $f(x) \notin Y_2$. Sendo assim, $f(x) \in Y_1 \setminus Y_2$, ou seja, $x \in f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2)$.

Portanto, podemos concluir que $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$.

(ii) Mostremos, primeiramente, que $f^{-1}(\complement_B Y_1) \subseteq \complement_A(f^{-1}(Y_1))$. Suponhamos que $x \in f^{-1}(\complement_B Y_1)$, assim, pela Definição 3.11, concluímos que $f(x) \in \complement_B Y_1$. Deste modo, $f(x) \notin Y_1$. Segue, novamente, da pela Definição 3.11 que $x \notin f^{-1}(Y_1)$. Portanto, uma vez que $f^{-1}(Y_1) \subseteq A$ e $x \in A$, concluímos que $x \in \complement_A(f^{-1}(Y_1))$. Logo, $f^{-1}(\complement_B Y_1) \subseteq \complement_A(f^{-1}(Y_1))$.

Reciprocamente, mostremos que $\complement_A(f^{-1}(Y_1)) \subseteq f^{-1}(\complement_B Y_1)$. Suponhamos que $x \in \complement_A(f^{-1}(Y_1))$. Então, $x \in A$ e $x \notin f^{-1}(Y_1)$. Deste modo, $f(x) \notin Y_1$. Como $Y_1 \subseteq B$ e $f(x) \in B$, segue que $f(x) \in \complement_B(Y_1)$. Logo, $x \in f^{-1}(\complement_B(Y_1))$. Como $x \in \complement_A(f^{-1}(Y_1)$ implica que $x \in f^{-1}(\complement_B(Y))$, concluímos que $\complement_A(f^{-1}(Y_1)) \subseteq f^{-1}(\complement_B Y_1)$.

Portanto, $f^{-1}(\complement_B Y_1) = \complement_A(f^{-1}(Y_1))$.

(g) (i) Primeiramente, vamos mostrar que $f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$. Seja $y \in f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)$, então existe $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ tal que $f(x) = y$. Logo, $x \in X_\gamma$ para pelo menos um $\gamma \in \Gamma$. Assim, $y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$ e, portanto, $f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$.

Reciprocamente, mostremos que $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma) \subseteq f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)$. Consideremos $y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$, então $y \in f(X_{\gamma_0})$ para, pelo menos, um $\gamma_0 \in \Gamma$. Logo, existe $x \in X_{\gamma_0}$ com $f(x) = y$. Como $x \in X_{\gamma_0}$, $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ e, assim $y \in f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)$.

(ii) Seja $y \in f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)$, então existe $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, tal que $f(x) = y$. Como $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, $x \in X_\gamma$, $\forall\gamma \in \Gamma$, $f(x) = y$, com $x \in X_\gamma, \forall\gamma \in \Gamma$. Logo, $y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$.

(h) (i) Mostremos, inicialmente, que $f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma\right) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma)$. De fato, seja $x \in$

$f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma\right)$, então existe $y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ tal que $f(x) = y$. Logo, para algum $\gamma \in \Gamma$, existe $y \in Y_\gamma$ tal que $f(x) = y$. Assim, $x \in f^{-1}(Y_\gamma)$, para algum $\gamma \in \Gamma$. Portanto, $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma)$.

Reciprocamente, mostremos que $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma\right)$. De fato, seja $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma)$, então existe $x \in f^{-1}(Y_\gamma)$, para algum $\gamma \in \Gamma$. Logo, para algum $\gamma \in \Gamma$, existe $y \in Y_\gamma$ tal que $f(x) = y$. Assim, $f(x) = y$, para $y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma)$ e portanto, $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma\right)$.

Consequentemente, $f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma)$.

(ii) Seja $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma\right)$, então existe $f(x) \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$, tal que $f(x) \in Y_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma$.
Como $x \in f^{-1}(Y_\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$, concluímos que $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(Y_\gamma)$.

■

Exemplo 3.15. Sejam (g, A, B), onde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $\mathrm{Gr}(g) = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$. Então $g(\{a, b\}) = \{1, 2\}$, $g(A) = \{1, 2\}$ e $g(A \setminus \{a, b\}) = g(\{c\}) = \{2\}$, porém $g(A) \setminus g(\{a, b\}) = \varnothing$. Portanto, a igualdade do item (e) do Teorema 3.14 nem sempre ocorre.

Exemplo 3.16. Consideremos a função (f, A, B), onde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $\mathrm{Gr}(g) = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$, e os seguintes subconjuntos de A: $A_1 = \{b\}$, $A_2 = \{a, c\}$ e $A_3 = \{a, b\}$. Temos que $f(A_1) = \{2\}$, $f(A_2) = \{1, 2\}$ e $f(A_3) = \{1, 2\}$. Como $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$ segue que $f(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \varnothing$ e $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) = \{2\}$. Portanto, nem sempre é verdade que $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma) \subset f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)$.

3.4 Representação geométrica

Podemos representar funções através dos diagramas cartesiano e sagital, assim como nas representações de relações, veja Seção 2.2. Entretanto, a representação das relações depende das propriedades que esta possui. Desta forma, quando queremos representar uma função, devemos nos atentar quanto à natureza dos conjuntos envolvidos e às propriedades da função.

Não apenas os diagramas cartesiano e sagital podem ser utilizados para representação de função, podemos utilizar ainda o diagrama de barras e o diagrama de pizza.

O diagrama cartesiano de uma função $f : A \to B$, $\mathrm{Gr}(f)$, está fundamentado na Definição 2.3, veja Figura 2.1, onde a cada elemento do conjunto A, associamos um ponto na reta horizontal e, a cada elemento da imagem de f, associamos um ponto da reta vertical, sendo a representação dada pelos pontos de interseção das retas perpendiculares traçadas por cada um desses pontos.

Exemplo 3.17. No Exemplo 3.12, o diagrama cartesiano é dado pela figura a seguir.

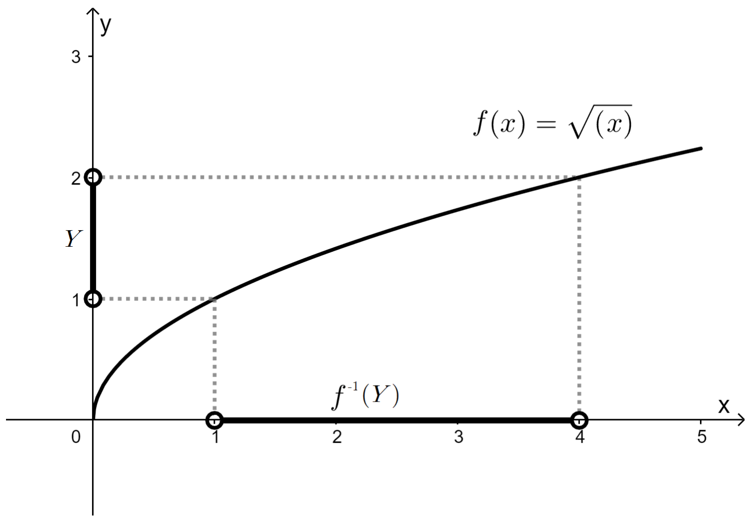


Figura 3.2: Representação gráfica dos conjuntos Y e $f^{-1}(Y)$

Fonte: O autor.

Exemplo 3.18. No Exemplo 3.13, o diagrama cartesiano é dado pela figura a seguir.

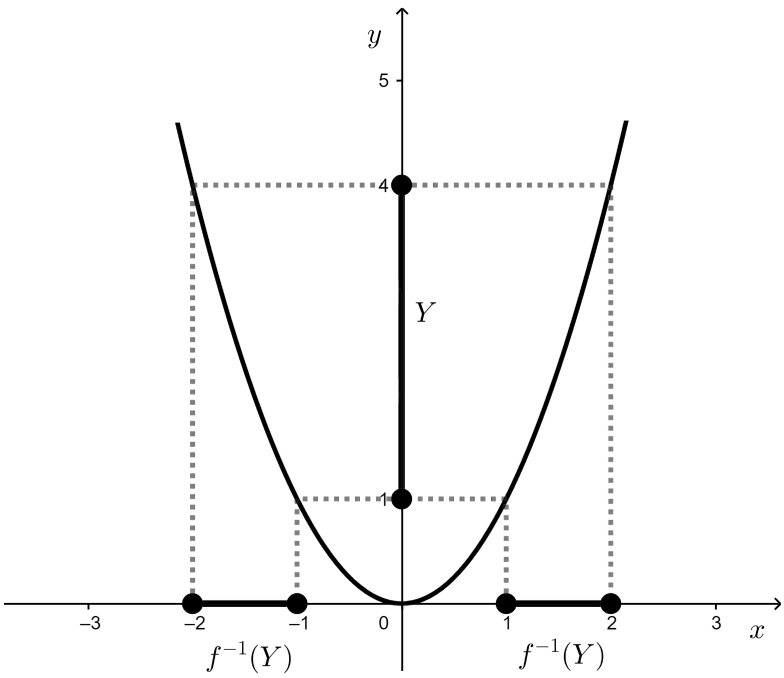


Figura 3.3: Representação gráfica dos conjuntos Y e $f^{-1}(Y)$

Fonte: O autor.

Proposição 3.19. Dada uma função $f : A \to B$, qualquer reta vertical do diagrama cartesiano que passa por um ponto de A conterá exatamente um ponto do diagrama cartesiano de f.

Demonstração.

Pela Definição 3.1, dado $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $y = f(x)$. Assim, temos a existência do ponto desejado.

Agora, se (x, y) e (x, z) pertencem ao diagrama cartesiano de f, então $y = f(x)$ e $z = f(x)$. Logo, pela Definição 3.1, temos $y = z$, o que nos dá a unicidade. ■

O diagrama sagital de uma função $f : A \to B$ é o diagrama sagital da relação f. A diferença para a representação da função f se dá no fato de que se $A = B$, a representação é feita em diagramas separados. Este tipo de diagrama só é interessante quando o conjunto for finito, conforme já mencionamos na Subseção 2.2.2.

Exemplo 3.20. Consideremos a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 1$, e os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. O diagrama sagital da relação f é dado pela figura a seguir

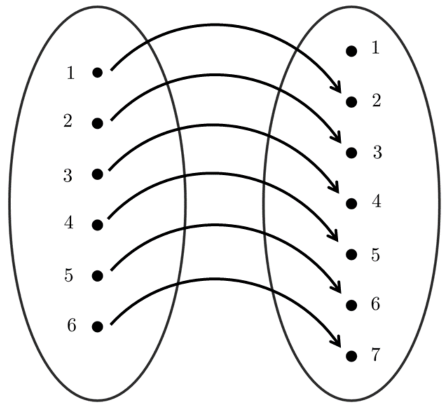


Figura 3.4: Representação de uma função através do diagrama sagital

Fonte: O autor.

O diagrama de barras de f é construído através de retângulos de largura fixa e altura medindo $f(x)$. Os retângulos se distribuem lado a lado sobre uma reta horizontal e, em uma reta vertical à esquerda de todos os retângulos, marcam-se as imagens de f. Este diagrama é indicado para conjuntos finitos e mais comumente utilizado para representação de dados estatísticos.

Exemplo 3.21. Sejam $f : A \to B$, $g : A \to C$ e os conjuntos $A = \{x, y, z\}$, $B = \{2, 5, 7\}$, $C = \{3, 4, 8\}$, $\text{Gr}(f) = \{(x, 2), (y, 5), (z, 7)\}$ e $\text{Gr}(g) = \{(x, 3)(y, 8), (z, 4)\}$. O diagrama de barras da relação f é dado pela figura a seguir

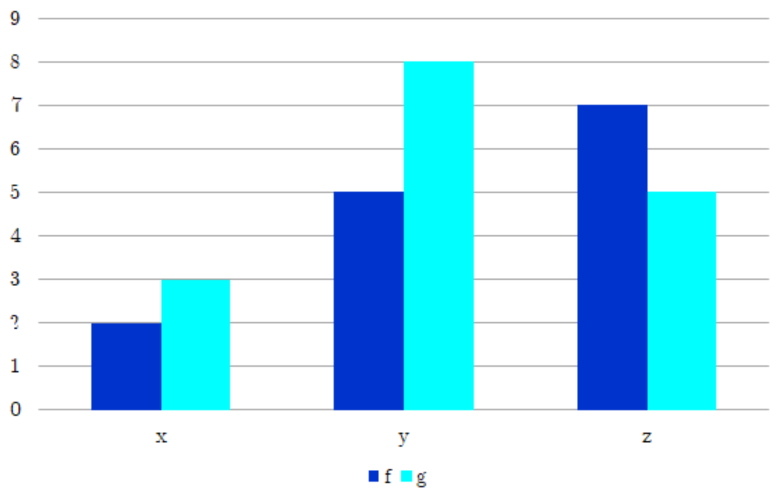


Figura 3.5: Representação de uma função através do diagrama de barras

Fonte: O autor.

O diagrama de pizza da função f é construído através de um círculo onde cada valor de $f(x)$ é representado por um setor circular de área $f(x)$, onde a área total do círculo é dada pela soma dos valores de $f(x)$. Este diagrama é indicado para conjuntos finitos e mais comumente utilizado para representação de dados estatísticos.

Exemplo 3.22. Sejam $f : A \to B$, $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{2, 5, 7\}$. Então, $\text{Gr}(f) = \{(x, 2), (y, 5), (z, 7)\}$. O diagrama de pizza da relação f é dado pela figura a seguir:

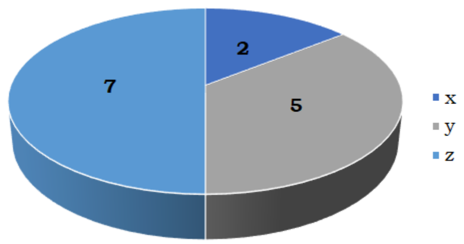


Figura 3.6: Representação de uma função através do diagrama de pizza

Fonte: O autor.

3.5 Construção de funções

Podemos construir novas funções a partir de outras já conhecidas, através de operações aritméticas do contradomínio e através da composição de funções.

3.5.1 Operações entre funções

Definição 3.23. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com domínios $\text{Dom}(f)$ e $\text{Dom}(g)$, respectivamente, então $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ são funções assim definidas

(a) função soma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ com domínio $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

(a) função diferença: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ com domínio $\text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

(c) função produto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ com domínio $\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

(d) função quociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ com domínio $\text{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \{x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \mid g(x) \neq 0\}$.

Observação 3.24. Os sinais de adição na igualdade

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

têm significados diferentes, no primeiro membro se dá graças a definição da função $f+g$ e no segundo membro, $f(x)+g(x)$ representa a adição usual de números reais $f(x)$ e $g(x)$. Analogamente, a interpretação é valida para as funções diferença, produto e quociente.

Exemplo 3.25. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ e $g(x) = -x+3$, respectivamente, temos

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + (-x+3) = \dfrac{-x^3+3x^2+3}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}.$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{x}{x^2+1} - (-x+3) = \dfrac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}.$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \cdot (-x+3) = \dfrac{-x^2+3x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}.$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{x}{x^2+1}}{-x+3} = \dfrac{x}{-x^3+3x^2-x+3}, x \in \mathbb{R}.$

3.5.2 Composição de funções

Teorema 3.26. Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ funções tais que $\mathrm{Im}(f) \subset C$ e a relação $\mathcal{C} = g \circ f = \{(x,z) \in A \times D \mid \exists y \in B \text{ com } y = f(x) \text{ e } z = g(y)\}$, então a terna $(\mathcal{C}, A, D)$ é uma função.

Demonstração. Dado $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $y = f(x)$, pois f é uma função de A em B. Além disso, existe $z \in D$ tal que $z = g(y)$, pois $y \in C$ e g é uma função de C em D. Logo, $(x,z) \in \mathcal{C}$, ou seja, $A \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{C})$. Portanto, $\mathrm{Dom}(\mathcal{C}) = A$.
Ademais, suponhamos pela relação $\mathcal{C}$ que $x\mathcal{C}y$ e $x\mathcal{C}z$. Então, pela definição da relação $\mathcal{C}$, existem $x', x'' \in B$ tais que xfx', $x'gy$, xfx'' e $x''gz$. Como f é uma função de A em B, xfx' e xfx implicam $x' = x$. Do mesmo modo, g é uma função de C em D, $x'gy$ e $x''gz$ implicam $y = z$. Portanto, $\mathcal{C} = g \circ f$ é uma função. ■

Definição 3.27. A função $g \circ f : A \to D$ dada pelo Teorema 3.26 é chamada de função composta de g por f.

Teorema 3.28. Sejam $f : A \to B$, $g : C \to D$ e $h : E \to F$ funções tais que $\text{Im}(f) \subset C$ e $\text{Im}(g) \subset E$. Então,

(a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$.

(b) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (Propriedade associativa).

Demonstração.

(a) Dado $x \in A$, sejam $y = f(x)$ e $z = g(f(x))$, então $(x, y) \in \text{Gr}(f)$ e $(y, z) \in \text{Gr}(g)$. Logo, pela Definição 3.27 dada no Teorema 3.26, temos $(x, z) \in \text{Gr}(g \circ f)$, ou seja, $z = (g \circ f)(x)$. Portanto, $(g \circ f)(x) = z = g(f(x))$.

(b) Pelo item (a), para $x \in A$, temos

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g \circ f)(x) = h \circ (g \circ f)(x).$$

Portanto, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

■

Exemplo 3.29. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$, então $(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\text{Im}(f) \subset \text{Dom}(g)$.

Exemplo 3.30. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x$. Temos que $(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = 10x + 10$ e $(f \circ g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = 10x + 2$. Observemos que a propriedade comutativa geralmente não é valida, para a composição de funções, pois $(g \circ f)(0) = 10$ e $(f \circ g)(0) = 2$.

3.6 Funções inversas

Na Seção 3.1 vimos que uma função é caracterizada pela terna (f, A, B), onde cada elemento do domínio é associado a um único elemento do contradomínio. Determinadas funções possuem ainda a propriedade de que cada elemento do contradomínio está associado a um único elemento do domínio, isto é, ele é imagem de um único elemento do domínio. Essas funções são chamadas de funções injetoras, logo quando pensamos numa possível função inversa, pensamos em uma função que faz o caminho inverso. Porém, para que tenhamos uma função inversível, duas condições são necessárias, ou seja, a função dada deve ser uma função injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Definição 3.31. (Função injetora) Uma função $f : A \to B$ é denominada injetora quando

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \ \forall x_1, x_2 \in A,$$

ou, equivalentemente, quando,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ para todo } x_1, x_2 \in A.$$

Exemplo 3.32. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x$. Então f é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.33. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é injetora, pois dados $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$, temos $x_1 \neq x_2$, porém $f(x_1) = 9 = f(x_2)$.

Observação 3.34. Observemos que se tivéssemos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ no Exemplo 3.33 essa função seria injetora. Portanto, para determinarmos a injetividade de uma função devemos analisar seu domínio.

Teorema 3.35. Seja $f : A \to B$ uma função injetora. Então as seguintes alternativas valem

(a) se X_1 e X_2 são subconjuntos de A, então $f(X_1 \setminus X_2) = f(X_1) \setminus f(x_2)$.

(b) se $\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ é uma família de subconjuntos de A, então $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$.

Demonstração.

(a) Pelo item (e) do Teorema 3.14, temos que $f(X_1 \setminus X_2) \supset f(x_1) \setminus f(X_2)$. Logo, para mostrarmos a igualdade basta mostra que $f(X_1 \setminus X_2) \subset f(x_1) \setminus f(X_2)$. Seja $y \in f(X_1 \setminus X_2)$, assim existe $x_1 \in (X_1 \setminus X_2)$ tal que $y = f(x_1)$. Como f é injetora, para todo $x_2 \in X_2$, $f(x_2) \neq f(x_1) = y$. Portanto, $y \in f(X_1)$ e $y \notin f(X_2)$. Assim $y \in f(X_1) \setminus f(X_2)$.

(b) Pelo item (g) do Teorema 3.14, temos que $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$. Logo, para mostrarmos a igualdade basta mostrar que $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) \supset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$. Para tanto, seja $y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$, então $y \in f(X_\Gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Logo, para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $x \in X_\Gamma$ com $f(x) = y$. Como f é injetora, x é único em todos os X_γ, onde $\gamma \in \Gamma$. Logo, $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Portanto, $y \in f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)$.

■

Exemplo 3.36. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ e a função (f, A, B), com $\mathrm{Gr}(f) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Consideremos os subconjuntos $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$, $B_1 = \{3\}$, $B_2 = \{1, 3\}$ e $B_3 = \{2, 3\}$. Pelo item (a) do Teorema 3.35, temos

- $A_2 \setminus A_1 = \{2\}$, assim $f(A_2 \setminus A_1) = \{3\}$. Como $f(A_1) = \{2\}$ e $f(A_2) = \{2, 3\}$, temos ainda que $f(A_2) \setminus f(A_1) = \{3\} = f(A_2 \setminus A_1)$.

e pelo item (b) do Teorema 3.35 temos,

- $f(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = f(A_1) = \{2\}$ e $f(A_1) \cap f(A_2) \cap f(A_3) = \{2\}$.

Teorema 3.37. Seja $f : A \to B$ uma função. Existe $g : \mathrm{Im}(f) \to A$ tal que $(g \circ f) = \mathrm{I}_A$, sendo I_A a relação identidade em A, se, e somente se, f é injetora.

Demonstração. Seja $g : \mathrm{Im}(f) \to A$ uma função tal que $g \circ f = \mathrm{I}_A$. Suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$, como g é função segue que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, ou seja, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Logo, $\mathrm{I}_A(x_1) = \mathrm{I}_A(x_2)$ e, portanto, $x_1 = x_2$.

Reciprocamente, suponhamos que f seja injetora e consideremos a relação

$$g = \{(y, x) \in \mathrm{Im}(f) \times A \mid y = f(x)\}.$$

Temos que a terna $(g, \mathrm{Im}(f), A)$ é uma função, pois $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Im}(f)$ e, se ygx e ygz, temos $y = f(x)$ e $y = f(z)$. Como f é injetora, $x = z$. Além disso, dado $x \in A$, temos $f(x) = y \in \mathrm{Im}(f)$. Logo, $g(f(x)) = g(y) = x$, ou seja, $(g \circ f)(x) = x$. Portanto, $(g \circ f) = \mathrm{I}_A$. ■

O resultado demonstrado no Teorema 3.37 nos aproxima da função inversa, ou seja, dada uma função $f : A \to B$, garantimos que, se para $y \in B$ existe $x \in A$, então x é único. Entretanto, não garantimos a existência de $x \in A$.

Definição 3.38. (Função sobrejetora) Uma função $f : A \to B$ é denominada sobrejetora, se Im(f)=B, ou seja, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 3.39. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$. Então f é sobrejetora. De fato, seja $y \in \mathbb{R}$. Se $y = \frac{1}{2}x + 1$, então $x = 2y - 2$ e $f(x) = f(2y - 2) = \frac{1}{2}(2y - 2) + 1 = y$. Logo, f é sobrejetora.

Exemplo 3.40. A função do Exemplo 3.33, não é sobrejetora, pois existe um elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) \neq y$. Com efeito, consideremos $y = -2$, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(x) \geq 0$, ou seja, $-2 \notin$ Im(f).

Observação 3.41. Observemos que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, a função do Exemplo 3.40 seria sobrejetora. Portanto, para determinarmos a sobrejetividade de uma função devemos analisar seu contradomínio.

Teorema 3.42. Seja $f : A \to B$ uma função. Se existir $g : B \to A$ tal que $(f \circ g) = \mathrm{I}_B$, então f é sobrejetora.

Demonstração. Seja $y \in B$ e escrevemos $x = g(y)$, então

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \mathrm{I}_B(y) = y.$$

Portanto, f é sobrejetora. ■

Antes de definirmos a função inversa, apresentamos outro conceito importante.

Definição 3.43. Uma função $f : A \to B$ é denominada bijetora se for injetora e sobrejetora.

Exemplo 3.44. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é bijetora, pois a todo número real relacionamos uma, e somente uma, raiz cúbica.

Exemplo 3.45. Seja $f :]-1, 1[\to]-1, 1[$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Então f é bijetora. Com efeito, para $x, y \in$]-1, 1[, se $f(x) = f(y)$, então $\dfrac{x}{1 + |x|} = \dfrac{y}{1 + |y|}$. Notemos que x e y possuem mesmo sinal, pois o denominador é sempre um número positivo. Suponhamos que $x, y > 0$, assim $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1+y}$ implica $x = y$, o mesmo ocorre para $x, y \leq 0$. Portanto, f é injetora. Para mostramos a sobrejetividade, escolhemos $z \in \,]-1, 1[$ e consideremos $x = \dfrac{z}{1-z}$. Se $0 \leq z < 1$, temos $x = \dfrac{z}{1-z}$ e

$$f(x) = \frac{\dfrac{z}{1-z}}{1 + \left|\dfrac{z}{1-z}\right|} = \frac{\dfrac{z}{1-z}}{\dfrac{1-z+z}{1-z}} = z.$$

Se $-1 < z < 0$, temos $x = \dfrac{z}{1+z}$ e

$$f(x) = \frac{\dfrac{z}{1+z}}{1 + \left|\dfrac{z}{1+z}\right|} = \frac{\dfrac{z}{1+z}}{\dfrac{1-z+z}{1+z}} = z.$$

Logo, f é sobrejetora. Portanto, f é bijetora.

Teorema 3.46. Sejam $f : A \to B$ uma função bijetora e X um subconjunto de A, então $f(\mathrm{C}_A X) = \mathrm{C}_B f(x)$.

Demonstração. A demonstração detalhada o leitor poderá encontrar no Capítulo 5 de [10]. ■

Teorema 3.47. Seja $f : A \to B$ uma função. Então existe $g : B \to A$ tal que $(g \circ f) = \mathrm{I}_A$ e $(f \circ g) = \mathrm{I}_B$ se, e somente se, f é bijetora.

Demonstração. Seja $f : A \to B$ uma função e suponhamos que exista $g : B \to A$ tal que $(g \circ f) = \mathrm{I}_A$ e $(f \circ g) = \mathrm{I}_B$, então, pelo Teorema 3.37 e pelo Teorema 3.42, f é bijetora. Da mesma forma, suponhamos que $f : A \to B$ seja bijetora. Logo, $\mathrm{Im}(f) = B$. Além disso, construímos no Teorema 3.37 uma função $g : B \to A$ tal que $(g \circ f) = \mathrm{I}_A$. Resta-nos mostra que $(f \circ g) = \mathrm{I}_B$. Com efeito, dado $y \in B$, como f é sobrejetora, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como g foi construída de modo que $(g \circ f) = \mathrm{I}_A$, assim $x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$. Logo, $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$. Portanto, $(f \circ g) = \mathrm{I}_B$. ■

Os resultados do Teorema 3.37 e do Teorema 3.42 nos levam ao Teorema 3.47.

Definição 3.48. A função $g : B \to A$, que satisfaz as condições do Teorema 3.47, quando existe, é chamada de inversa de f e denotada por f^{-1} e dizemos que f é invertível.

Corolário 3.49. Dada uma função $f : A \to B$, se existir a inversa de f^{-1} então f é bijetora. Além disso, $(f^{-1})^{-1} = f$.

Demonstração. A demonstração detalhada o leitor poderá encontrar no Capítulo 5 de [10]. ■

Exemplo 3.50. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x + 3$. Então f é uma bijeção. Logo, f^{-1} denotada pela função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = x - 3$. De fato,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = x + 3 - 3 = x, x \in \mathbb{Z},$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = x - 3 + 3 = x, x \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $(g \circ f) = (f \circ g) = \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$ e g é a inversa de f.

Teorema 3.51. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções bijetoras, então a função composta $(g \circ f) : A \to C$ também é bijetora. Além disso $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Demonstração. A demonstração detalhada o leitor poderá encontrar no Capítulo 5 de [10]. ■

A fim de prosseguirmos nosso estudo de funções, precisamos de mais alguns conceitos, elencados na definição a seguir.

Definição 3.52. Sejam $(A, \prec')$ e $(B, \preccurlyeq')$ conjuntos ordenados. Uma função $f : A \to B$ é dita

(a) crescente se, para todos $x_1 \prec x_2$ em A, tivermos $f(x_1) \prec' f(x_2)$.

(b) decrescente se, para todos $x_1 \prec x_2$ em A, tivermos $f(x_1) \succ' f(x_2)$.

(c) não decrescente se, para todos $x_1 \prec x_2$ em A, tivermos $f(x_1) \preceq' f(x_2)$.

(d) não decrescente se, para todos $x_1 \prec x_2$ em A, tivermos $f(x_1) \succeq' f(x_2)$.

Ademais, em um qualquer dos casos acima, dizemos que a função f é monótona em A.

Exemplo 3.53. A função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ é crescente em $\mathbb{R}$. De fato, escolhemos $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ tais que $0 \leq x_1 < x_2$. Então,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{{x_2}^2}{x_2 + 2} - \frac{{x_1}^2}{x_1 + 2} = \frac{{x_2}^2(x_1 + 2) - {x_1}^2(x_2 + 2)}{(x_2 + 2)(x_1 + 2)}$$

e, notemos que $(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0$, verifiquemos que ${x_2}^2(x_1 + 2) - {x_1}^2(x_2 + 2) > 0$. De fato, vejamos que

$$\begin{aligned} {x_2}^2(x_1 + 2) - {x_1}^2(x_2 + 2) &= {x_2}^2 x_1 - {x_1}^2 x_2 + 2({x_2}^2 - {x_1}^2) \\ &= x_1 x_2 (x_2 - x_1) + 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ &= (x_2 - x_1)[x_2 x_1 + 2(x_2 + x_1)]. \end{aligned}$$

Como $0 \leq x_1 < x_2$, segue que os fatores, $(x_2 - x_1)[x_2 x_1 + 2(x_2 + x_1)]$, do último produto acima são positivos, logo ${x_2}^2(x_1 + 2) - {x_1}^2(x_2 + 2) > 0$, ou seja, é sempre crescente em $[0, +\infty[$.

3.7 Funções afim

De acordo com ([20], 1995), o termo afim, foi introduzido por Leonhard Euler no século XVIII, sendo o primeiro a estudar tópicos avançados da Geometria Afim. Além disso, afim tem origem no latim *affinis*, cujo significado é ligados, conectados, que tem afinidade,

Definição 3.54. (Função afim Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.55. A função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim, assim como as translações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Sendo casos particulares de funções afins, as funções lineares, $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$, que serão tratadas nas Seções 3.7.1 e 3.7.2, respectivamente.

Exemplo 3.56. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ é uma função afim.

Mediante critérios, é possível, como apresentamos a seguir, saber se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam expressamente fornecidos. Podemos obter b como o valor que a função assume quando $x = 0$, ou seja, $b = f(0)$. Quanto ao valor de a, podemos determiná-lo a partir do conhecimento dos valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ assumidos pela função f nos pontos x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$. Com efeito, conhecidos

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e } f(x_2) = ax_2 + b,$$

obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Observação 3.57. Dados $x, x+h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos $x, x+h$ e o número $b = f(0)$ é chamado, muitas vezes, de valor inicial da função f.

Observação 3.58. Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afim é monótona e possui as características da Definição 3.52.

Definição 3.59. A função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é crescente, se $a > 0$ e decrescente, se $a < 0$.

Observação 3.60. Verifiquemos para $a > 0$ (o caso $a < 0$ é análogo). Para números reais quaisquer $x_1 < x_2$, segue que

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) > 0,$$

logo f é crescente.

Proposição 3.61. O gráfico $\mathrm{Gr}(f)$ de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma reta.

Demonstração. Verifiquemos que três pontos quaisquer do gráfico de f são colineares. Sejam,

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b), P_2 = (x_2, ax_2 + b) \text{ e } P_3 = (x_3, ax_3 + b).$$

Para verificarmos se P_1, P_2 e P_3 são colineares é necessário e suficiente que o maior dentre os três números $\mathrm{d}(P_1, P_2)$, $\mathrm{d}(P_2, P_3)$ e $\mathrm{d}(P_1, P_3)$, distâncias de P_1 a P_2, P_2 a P_3 e P_1 a

P_3, respectivamente, seja igual a soma dos outros dois. Com efeito, sejam $x_1 < x_2 < x_3$, basta verificar, através da fórmula da distância entre dois pontos, que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\ \mathrm{d}(P_2, P_3) &= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \end{aligned}$$

e

$$\mathrm{d}(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Daí segue, imediatamente, que

$$\mathrm{d}(P_1, P_3) = \mathrm{d}(P_1, P_2) + \mathrm{d}(P_1, P_3).$$

provando, o desejado. ■

Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo OY. O número a chama-se inclinação ou coeficiente angular, dessa reta em relação ao eixo horizontal OX.

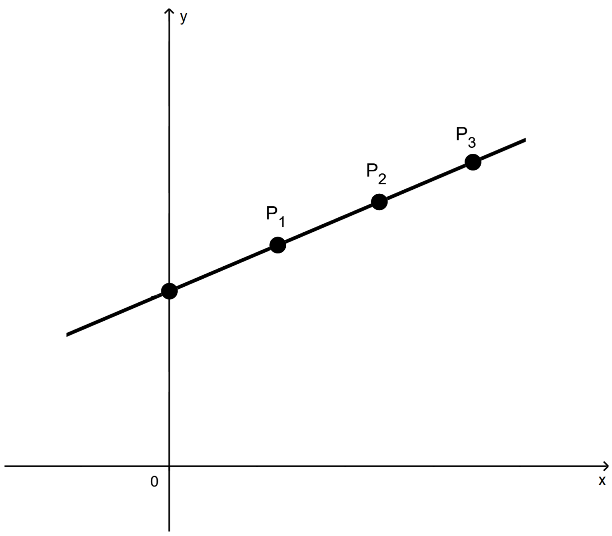


Figura 3.7: Função afim

Fonte: O autor.

Notemos ainda que, quanto maior for o valor de a, mais a reta do gráfico da função $f(x) = ax + b$ se afasta da posição horizontal. Além disso, quando $a > 0$ o gráfico de $f(x) = ax + b$ é uma reta ascendente e quando $a < 0$, a reta é descendente, conforme Definição 3.59, se $a > 0$, a função f é crescente e se $a < 0$ a função é decrescente.

Proposição 3.62. Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Demonstração. Observemos que

$$\begin{cases} ax_1 + b &= y_1 &= f(x_1) \\ ax_2 + b &= y_2 &= f(x_2). \end{cases} \tag{3.1}$$

Deste modo, existe uma única função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ se, e somente se, o sistema linear (3.1) nas variáveis a e b possui apenas uma solução. De fato, como $x_1 \neq x_2$, temos

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ e } b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

é a única solução do sistema linear (3.1). ■

Proposição 3.63. Toda reta não-vertical r é o gráfico de uma função afim.

Demonstração. Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, com $x_1 \neq x_2$ pontos pertencentes a uma reta não-vertical r. Temos, da Proposição 3.62, que dados dois pontos existe uma única função afim cujo gráfico contém esses dois pontos. Como o gráfico desta função afim é uma reta que contém os pontos dados, ela só pode ser a reta r dada. ■

3.7.1 Função linear

Definição 3.64. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se linear se existe constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Funções lineares são modelos matemáticos envolvendo problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

Proposição 3.65. Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Demonstração. Se $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todos $c, x \in \mathbb{R}$ então, fazendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) = ca$, ou seja, $f(c) = ac$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo f é uma função linear.

Como a proporcionalidade inversa só tem sentido quando se trata de grandezas não-nulas, então f somente será uma função se $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, tal que $f(xc) = \dfrac{f(x)}{c}$, para todo $c, x \in \mathbb{R}^*$. De modo análogo, temos $f(x) = \dfrac{a}{x}$, onde a constante a é $f(1)$. ∎

Teorema 3.66. (Teorema fundamental da proporcionalidade) Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função com as seguintes propriedades:

1. $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.

2. $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c, x \in \mathbb{R}_+$. Consequentemente, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, com $a = f(1)$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

pela propriedade 2. Logo, $f(rx) = \dfrac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c \cdot f(x)$ é valida quando c é racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$. Consideremos o primeiro caso, então $\dfrac{f(cx)}{f(x)} < c$. Seja r uma valor aproximado de c, de modo que $\dfrac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, logo $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r é racional, vale $r \cdot f(x) = f(rx)$. Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e pela propriedade 1., isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c \cdot f(x)$. De modo análogo, tem-se que $f(cx) > c \cdot f(x)$ é impossível. Portanto, deve ser $f(x) = c \cdot f(x)$, para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$. ∎

Observação 3.67. De modo análogo, a mesma demonstração do Teorema 3.66, vale para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, escrevendo, na propriedade 2., $n \in \mathbb{Z}$ em vez de $n \in \mathbb{N}$.

3.7.2 Função constante

Definição 3.68. Seja $k \in \mathbb{R}$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k$ é denominada função constante cujo $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{k\}$.

A representação gráfica de uma função constante é sempre uma reta paralela ou coincidente com o eixo OX, abscissas, passando pelo ponto $(0, k)$.

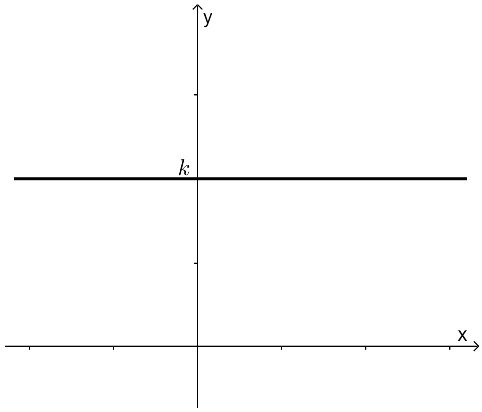


Figura 3.8: Gráfico da função $f(x) = k, k > 0$

Fonte: O autor.

Observação 3.69. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função constante, digamos $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$, consideremos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então o produto de f e g será kg. Desta forma, multiplicar uma função por uma constante é um caso particular de multiplicação de duas funções.

3.8 Caracterização da função afim

Teorema 3.70. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

Demonstração. Suponhamos que f seja crescente, pela hipótese feita sobre f, a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(h) = f(x + h) - f(x)$ está bem definida. Além disso, para todo $h \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned}\varphi(2h) &= f(x+2h)-f(x)\\ &= [f((x+h)+h)-f(x+h)]+[f(x+h)-f(x)]\\ &= \varphi(h)+\varphi(h)=2\cdot\varphi(h).\end{aligned}$$

Analogamente, se vê que $\varphi(nh)=n\cdot\varphi(h)$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Tem-se ainda

$$\varphi(-h)=f(x-h)-f(x)=-\{f(x)-f(x-h)\}=-\varphi(h),$$

pois $x=(x-h)+h$. Segue-se que, para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $h\in\mathbb{R}$ vale

$$\varphi((-n)h)=\varphi(-nh)=-\varphi(nh)=-[n\cdot\varphi(h)]=(-n)\varphi(h).$$

Como $\varphi(0)=0$, é obvio, vemos que $\varphi(nh)=n\cdot\varphi(h)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$. Pela Observação 3.67, concluímos que $\varphi(ch)=c\cdot\varphi(h)$ para quaisquer $c,h\in\mathbb{R}$, logo φ é linear. Assim, pondo $a=\varphi(1)=f(x+1)-f(x)$, tem-se que $\varphi(h)=a\cdot h$ para todo $h\in\mathbb{R}$. Então, para quaisquer $x,h\in\mathbb{R}$ vale $f(x+h)-f(x)=a\cdot h$. Trocando h por x, vem $f(h+x)-f(h)=ax$. Fazendo $h=0$ e escrevendo $b=f(0)$, obtemos $f(x)-b=ax$, donde $f(x)=ax+b$, para todo $x\in\mathbb{R}$. ■

3.9 Funções quadráticas

Definição 3.71. (**Função quadrática**) Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ chama-se quadrática quando $f(x)=ax^2+bx+c$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e $a,b,c\in\mathbb{R}$, com $a\neq 0$.

Definição 3.72. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$. Dizemos que um número α, real ou complexo, é raiz[1] da equação $ax^2+bx+c=0$ se $f(\alpha)=0$. Como$f(\alpha)=0$, dizemos também que α é um dos zeros da função.

Proposição 3.73. Seja α uma raiz da equação $x^2-sx+p=0$, então $\beta=s-\alpha$ também é raiz desta equação.

Demonstração. De fato, como α é raiz da equação, temos

$$\alpha^2-s\alpha+p=0.$$

[1] Chamamos de raízes, quando existirem, os valores de x que anulam a equação ax^2+bx+c.

Substituindo $\beta = s - \alpha$, na equação temos

$$\beta^2 - s\beta + p = (s-\alpha)^2 - s(s-\alpha) + p = 0,$$

então,

$$s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p = 0,$$

logo,

$$\alpha^2 - s\alpha + p = 0.$$

Portanto, $\beta = s - \alpha$ é raiz da equação. ■

Proposição 3.74. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, então a forma fatorada de f é $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$, onde α e β são raízes da equação.

Demonstração. Suponhamos que α é uma raiz de f. Logo

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

e podemos escrever

$$f(x) = f(x) - f(\alpha).$$

Então

$$f(x) - f(\alpha) = a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) + c - c.$$

Evidenciando a e $(x-\alpha)$, segue que

$$f(x) = a(x-\alpha)\left(x + \alpha + \frac{b}{a}\right).$$

Denotando $-\beta = \alpha + \dfrac{b}{a}$, temos

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta).$$

■

Ao escrevermos a função quadrática na forma fatorada, temos a vantagem de determinar, visualmente, os zeros da função. De fato, analisando a expressão de $f(x)$

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

vemos que a função só se anula quando pelo menos um de seus termos é igual a zero. Como supomos desde o início que $f(x)$ é quadrática, sabemos que necessariamente $a \neq 0$. Logo, algum dos outros dois termos deve ser igual a zero, isto é, $x - \alpha = 0$, então $x = \alpha$, ou $x - \beta = 0$, então $x = \beta$.

Proposição 3.75. Se α e β são raízes de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ e $\alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a}$, $a \neq 0$.

Demonstração. De fato, se α e β são raízes de f, então

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

logo,

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - x\alpha - x\beta + \alpha \cdot \beta),$$

segue que

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - ax(\alpha + \beta) + a(\alpha \cdot \beta).$$

Como a igualdade implica que os trinômios são iguais termo a termo, temos

$$b = -a(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

e

$$c = a(\alpha \cdot \beta) \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}.$$

■

Podemos inferir a variação do sinal de f. De fato, considerando de início que $a > 0$ e supondo, sem perda de generalidade, que $\alpha < \beta$, temos $f(x) > 0$ se um dos seguintes casos acontecer

$$x > \beta \text{ ou } x < \alpha.$$

Caso contrário, $a < 0$, para que $f(x) > 0$ é necessário apenas que

$$\alpha < x < \beta.$$

Exemplo 3.76. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$. Sejam α e β as raízes de f. Temos

$$\alpha + \beta = -\frac{-15}{3} = 5$$

e

$$\alpha \cdot \beta = \frac{18}{3} = 6,$$

ou seja, para determinarmos os valores de α e β devemos descobrir dois números que somados resultam 5 e que quando multiplicados resulta 6. Notemos que tanto a soma quanto o produto são positivos α e β também serão positivas, caso existam. Listando os pares, cujo produto resulta em 6, temos (1,6) e (2,3). Logo, dos pares, o único cuja soma é 5 é quando $\alpha = 2$ e $\beta = 3$. De posse das raízes da função, podemos reescrevê-la em sua forma fatorada, ou seja,

$$f(x) = 3(x-2)(x-3).$$

Entretanto, nem sempre é fácil determinar os valores das raízes α e β, quando existem. Vejamos o Exemplo 3.80.

Exemplo 3.77. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -4x^2 + 17x - 9$. Sejam α e β as raízes de f. Temos

$$\alpha + \beta = -\frac{17}{-4} = \frac{17}{4}$$

e

$$\alpha \cdot \beta = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}.$$

Notemos que não é tão simples determinar α e β, já que são números racionais. Continuaremos este exemplo, após a Proposição 3.78.

Proposição 3.78. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, então a forma canônica de f é $f(x) = a(x-m)^2 + k$, onde $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Demonstração. Consideremos

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

como $a \neq 0$, podemos reescrevê-lo evidenciando a, logo

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Completando quadrados, temos

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right),$$

então

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

segue que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Chamando $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, chegamos à relação

$$f(x) = a(x - m)^2 + k.$$

■

Exemplo 3.79. Consideremos o Exemplo 3.76. Vamos escrever a função f na sua forma canônica. Pela Proposição 3.78, temos

$$m = -\frac{15}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{2}$$

e

$$k = \frac{4 \cdot 3 \cdot 18 - (15)^2}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{4}.$$

Logo, podemos reescrever f como

$$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Por mais que possa parecer inútil e complicado escrever uma função quadrática na sua forma canônica veremos a seguir que a esta forma de representação nos fornece resultados importantes.

Exemplo 3.80. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -4x^2 + 17x - 9$. Sejam α e β as raízes de f. Vamos determinar α e β através da Proposição (3.78), ou seja, fazendo $f(x) = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
-4x^2 + 17x - 9 &= 0 \\
\frac{-4x^2}{-4} + \frac{17x}{-4} - \frac{-9}{-4} &= 0 \\
x^2 - \frac{17}{4} + \frac{9}{4} &= 0 \\
x^2 - \frac{17}{4} + \frac{189}{64} - \frac{289}{64} + \frac{9}{4} &= 0 \\
\left(x - \frac{17}{8}\right)^2 - \frac{145}{64} &= 0 \\
\left(x - \frac{17}{8}\right)^2 &= \frac{145}{64} \\
x - \frac{17}{8} &= \pm\sqrt{\frac{145}{64}} \\
x &= \frac{17}{8} \pm \frac{\sqrt{145}}{8}
\end{aligned}
$$

logo, $\alpha = \frac{17}{8} + \frac{\sqrt{145}}{8} = \frac{17 + \sqrt{145}}{8}$ e $\beta = \frac{17}{8} - \frac{\sqrt{145}}{8} = \frac{17 - \sqrt{145}}{8}$.

Definição 3.81. Dado $\gamma \in \mathbb{R}$, dizemos que $f(\gamma)$ é o valor máximo da função se $f(x) \leq f(\gamma)$, para todo $x \in \,\mathrm{Dom}(f)$ e dizemos que $f(\gamma)$ é o valor mínimo se $f(x) \geq f(\gamma)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observamos que na Proposição 3.78 f é composta de duas parcelas, a parcela $a(x-m)^2$ que varia com x e a parcela $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$, formada apenas por valores constantes.

Se $a > 0$, então $(x - m)^2 \geq 0$ e

$$a(x - m)^2 \geq 0 + k.$$

Logo,

$$f(x) \geq k,$$

ou seja f atingem o valor mínimo $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, quando $x - m = 0$, ou ainda, em $x = m$.

Se $a < 0$, então $a(x - m)^2 \leq 0$ e

$$a(x - m)^2 + k \leq 0 + k.$$

Logo,

$$f(x) \leq k,$$

ou seja, f atinge o valor máximo $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ quando $x - m = 0$, ou ainda em $x = m$.

Deste modo, o ponto do $\text{Dom}(f)$, $m = -\dfrac{b}{2a}$ é o ponto que maximiza ou minimiza a função, dependendo exclusivamente do sinal de a.

Definição 3.82. A $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

- possui concavidade "para cima"e admite um valor mínimo se $a < 0$,
- concavidade "para baixo"e admite um valor máximo se $a < 0$.

Exemplo 3.83. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 6x + 4$, reescrevendo-a na sua forma canônica, temos $f(x) = (x + 3)^2 - 9 + 4$, ou seja, $f(x) = (x + 3)^2 - 5$. Donde concluímos que o valor mínimo de f é -5 e ocorre no ponto do domínio $x = -3$.

Definição 3.84. O discriminante Δ da função quadrática f é o discriminante do trinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$, isto é, $\Delta = b^2 - 4ac$. Além disso,

- se $\Delta > 0$ a função f admite dois zeros distintos,
- se $\Delta = 0$ a função f admite um único zero,
- se $\Delta < 0$ a função f não admite zeros.

As informações da Definição 3.84 fornecem dados importantes na determinação da imagem da função quadrática.

Proposição 3.85. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Então,

(a) $a > 0$, implica que $\text{Im}(f) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty \right[$.

(b) $a < 0$,implica que $\mathrm{Im}(f) = \left]-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.

Ademais, em qualquer um dos casos acima, $f(x) = -\dfrac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}, a \neq 0$.

Demonstração. Para obtermos a imagem de f, devemos encontrar os $y \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $ax^2 + bx + c = y$, isto é, os valores de $y \in \mathbb{R}$ tais que $ax^2 + bx + (c - y) = 0$ tenha solução. A Definição 3.84 garante que é necessário e suficiente que o discriminante não seja negativo, ou seja, que $b^2 - 4a(c - y) \geq 0$. Mas, $\Delta = b^2 - 4ac$, portanto estamos procurando y que sejam solução da inequação $\Delta + 4ay \geq 0$.

Consideramos separadamente os casos $a > 0$ e $a < 0$. Se $a > 0$, então $4ay + \Delta \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{\Delta}{4a}$ e segue que

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R}; y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\} = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[.$$

Agora, se $a < 0$, então $4ay + \Delta \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -\dfrac{\Delta}{4a}$, de maneira que

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R}; y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\} = \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right].$$

Para o que nos falta, veja que, para $y \in \mathrm{Im}(f)$, as soluções da equação $ax^2 + bx + c = y \Leftrightarrow ax^2 + bx + (c - y) = 0$ são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta + 4ay}}{2a}.$$

Portanto, a equação $f(x) = y$ admite uma solução única se, e somente se, $\Delta + 4ay = 0$, que é o mesmo que $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$, sendo esse o caso, temos que $x = -\dfrac{b}{2a}$. ∎

Corolário 3.86. Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenha sinal constante se, e somente se, $\Delta < 0$. Neste caso, temos $af(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e ainda

(a) se $\Delta \leq 0$ e $a > 0$, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) se $\Delta \leq 0$ e $a < 0$, então $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Analisamos o caso $a > 0$, sendo a análise do caso $a < 0$ análoga.

Sendo $a > 0$ e $\Delta \leq 0$, segue da Proposição 3.85 que

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} \geq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, suponhamos $a > 0$ e que $f(x)$ não muda de sinal. Pelo item (a) da Proposição 3.85, a imagem de f contém números positivos, de forma que a constância de sinal de $f(x)$ garante que devemos ter $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, devemos ter

$$-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) \geq 0.$$

Logo, $\Delta \leq 0$. ■

Observação 3.87. Se modificarmos o argumento do Corolário 3.86 podemos concluir que

(i) se $\Delta < 0$ e $a > 0$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) se $\Delta < 0$ e $a < 0$, então $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.10 Gráfico da função quadrática

Nesta seção, vemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Definição 3.88. (Parábola) Dados um ponto F, denominado foco, e uma reta diretriz d, pertencentes a um plano α, com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de d.

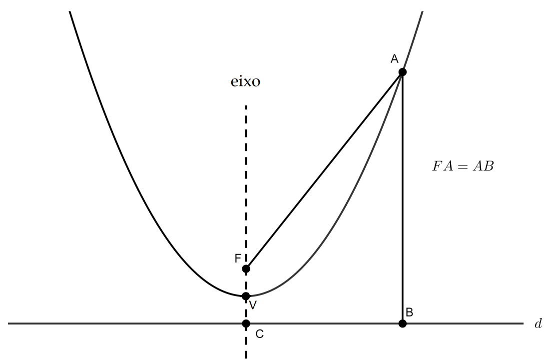


Figura 3.9: Gráfico da função quadrática

Fonte: O autor.

A reta perpendicular a diretriz d, baixada a partir do foco F, chama-se eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se vértice da parábola, ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Definição 3.89. O gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto de pares ordenados da forma $(x, f(x))$, ou seja,

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\}.$$

3.10.1 O gráfico de $f(x) = ax^2$

O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$ é a parábola cujo foco $F = \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e cuja diretriz $d : y = -\dfrac{1}{4a}$.

Consideremos o vértice V da parábola coincidindo com a origem do plano cartesiano e o foco de coordenadas $F = (0, p)$. Dessa forma a diretriz d será a reta $y = -p$ e desta forma cumprindo os requisitos da Definição 3.88.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola, pela Definição 3.88, P é equidistante de F e de d, ou seja,

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p, \tag{3.2}$$

onde na equação (3.2) o primeiro membro é a distância entre os pontos P e F, enquanto que o segundo membro da equação é a distância de P a diretriz d, veja Figura 3.10.

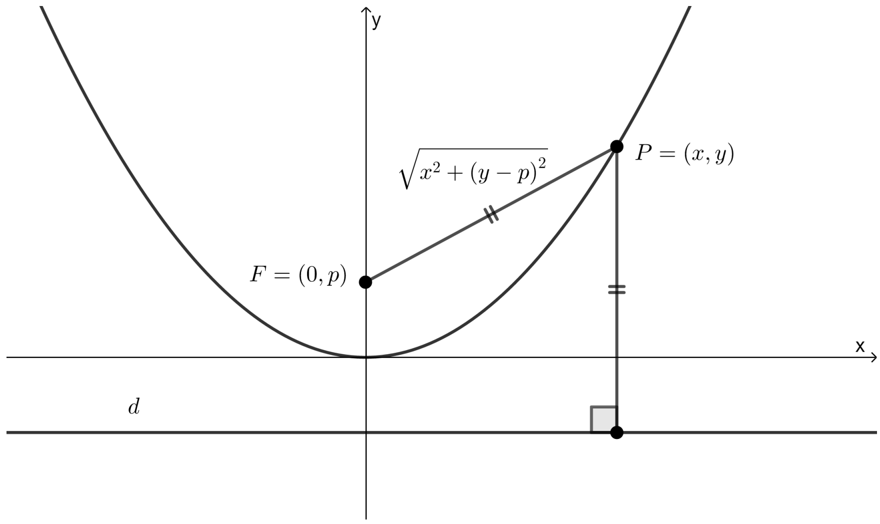


Figura 3.10: Distância entre F, P, d

Fonte: O autor.

Ao elevarmos ambos os membros da equação (3.2), obtemos

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2,$$

que é equivalente a

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2,$$

logo

$$4py = x^2,$$

segue que

$$y = \frac{x^2}{4p}.$$

Portanto, os pontos da parábola de foco $F = (0, p)$ e diretriz $d : y = -p$ satisfazem a equação $y = \dfrac{x^2}{4p}$, ou seja, pertencem ao gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ com $a = \dfrac{1}{4p}$.

Mostremos que os pontos do gráfico da função $f(x) = ax^2$ pertencem a parábola cujo foco $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e diretriz é $y = -\dfrac{1}{4a}$.

Tomemos um ponto $B = (x, ax^2)$ do gráfico de f, temos que a distância de B a F é

$$\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}$$

.

Observemos que

$$\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} \Leftrightarrow \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|,$$

ou seja,

$$\left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|,$$

é a distância de B a diretriz d. Como as equivalências são satisfeitas para todo $x \in \mathbb{R}$, mostramos que todos os pontos do gráfico de $f(x) = ax^2$ coincidem com os da parábola cujo foco $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = -\dfrac{1}{4a}$.

Definição 3.90. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, ao aplicarmos a translação vertical, ou seja, $(x, y) \mapsto (x, y + k)$ a qual leva o eixo horizontal $y = 0$ na reta horizontal $y = k$, então o gráfico da função g é obtido a partir do gráfico da função g, deslocando-o verticalmente k unidades acima ou abaixo, conforme $k > 0$ ou $k < 0$.

Definição 3.91. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$, ao aplicarmos a translação horizontal, ou seja, $(x, y) \mapsto (x + m, y)$ a qual leva o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = m$, então o gráfico da função g é obtido a partir do gráfico da função g, deslocando-o horizontalmente m unidades à direita ou à esquerda, conforme $m > 0$ ou $m < 0$.

3.10.2 O gráfico de $f(x) = ax^2 + k$

O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + k$, com $a, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, k + \dfrac{1}{4}\right)$ e de diretriz $d : y = k - \dfrac{1}{4a}$.

De fato, observemos que o gráfico de $f(x) = ax^2 + k$ é consequência do gráfico de $f(x) = ax^2$ pela translação vertical, $(x, y) \mapsto (x, y + k)$, a qual leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -\dfrac{1}{4a}$ na reta $y = k - \dfrac{1}{4a}$, veja figura 3.11.

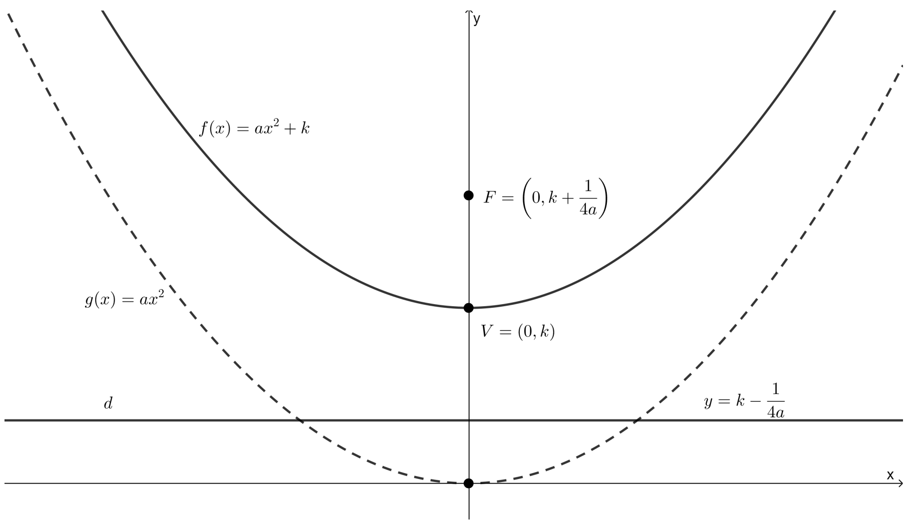


Figura 3.11: Translação vertical da parábola $g(x) = ax^2$

Fonte: O autor.

3.10.3 O gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$

O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a(x-m)^2$, com $a, m \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é a parábola cujo foco é $F = \left(m, \dfrac{1}{4a}\right)$ e de diretriz $d : y = -\dfrac{1}{4a}$.

De fato, observamos que o gráfico da função $f(x) = a(x-m)^2$, Figura 3.12, é consequência do gráfico da função $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal, $(x, y) \mapsto (x + m, y)$, a qual leva o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = m$.

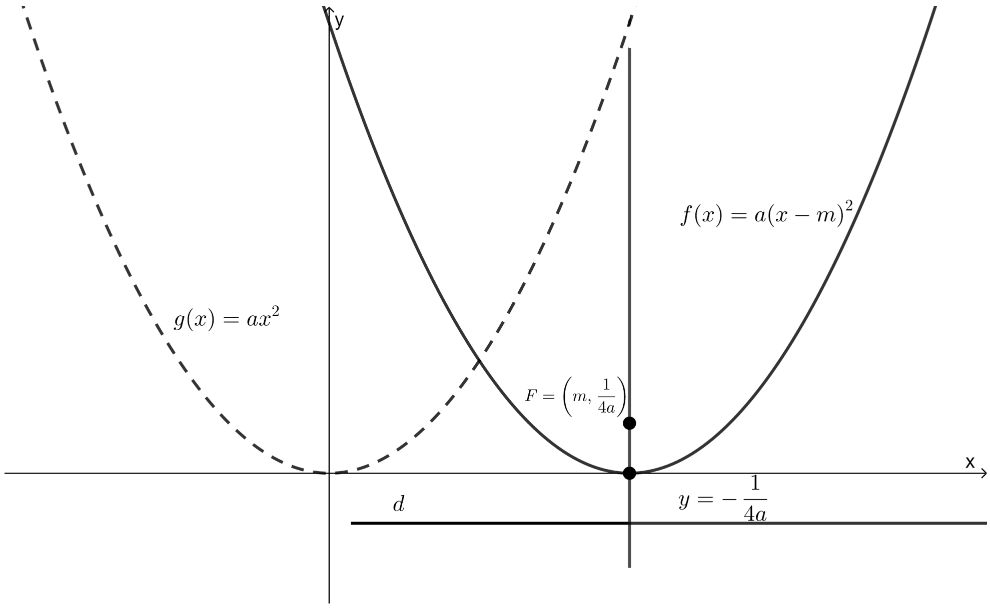


Figura 3.12: Translação horizontal da parábola $g(x) = ax^2$

Fonte: O autor.

3.10.4 O gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$

O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a(x-m)^2 + k$, com $a, m, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é a parábola de foco $F = \left(m, k + \dfrac{1}{4}\right)$ e de diretriz $d : y = k - \dfrac{1}{4a}$, transladada verticalmente m unidades, horizontalmente k unidades, da função $g(x) = ax^2$, enquanto que a diretriz d é transladada k unidades verticalmente, veja Figura 3.13.

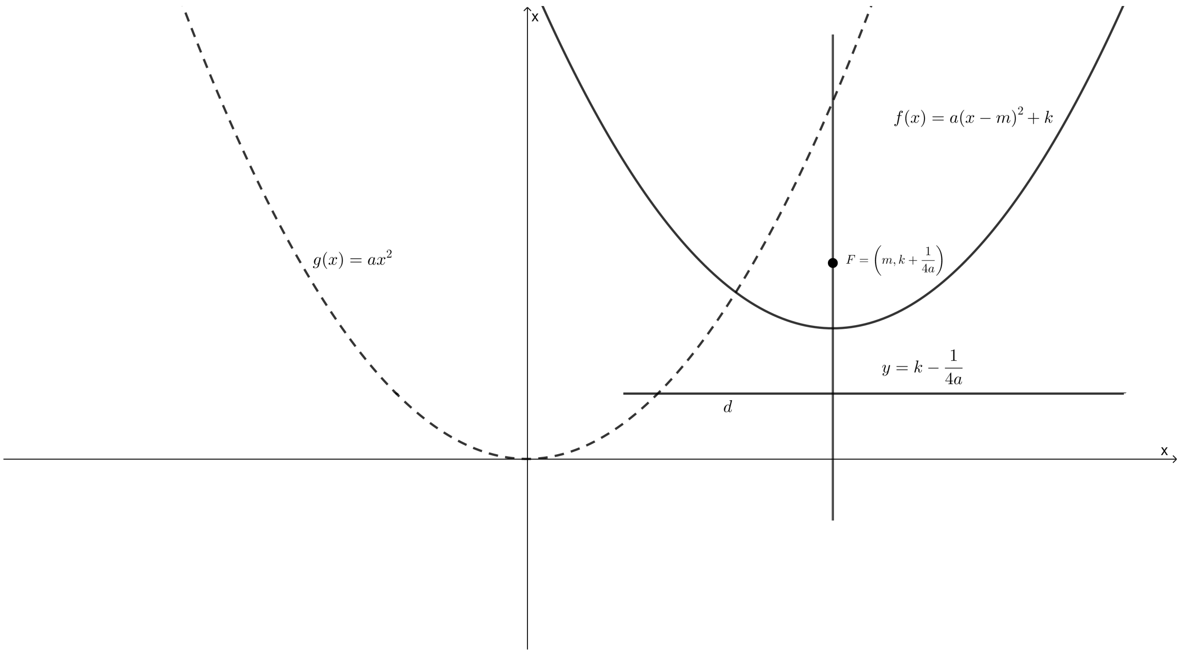


Figura 3.13: Translação vertical e horizontal da parábola $g(x) = ax^2$

Fonte: O autor.

Observação 3.92. A função quadrática transladada m unidades verticalmente e k unidades horizontalmente é a função quadrática na sua forma canônica, Proposição 3.78.

Definição 3.93. Toda função quadrática pode ser escrita na forma canônica, Proposição 3.78, logo o gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola.

Observação 3.94. Podemos esboçar o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ através da forma canônica, Proposição 3.78, ou seja, a partir de $f(x) = ax^2$ realizamos as translações necessárias que ficam evidenciadas na forma canônica.

Exemplo 3.95. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por$f(x) = 2x^2 - 12x + 18$, ao reescrevermos f na sua forma canônica obtemos $f(x) = 2(x-3)^2$, ou seja, para obtermos o gráfico de f transladamos horizontalmente três unidades a direita, a função $g(x) = 2x^2$, veja figura 3.14.

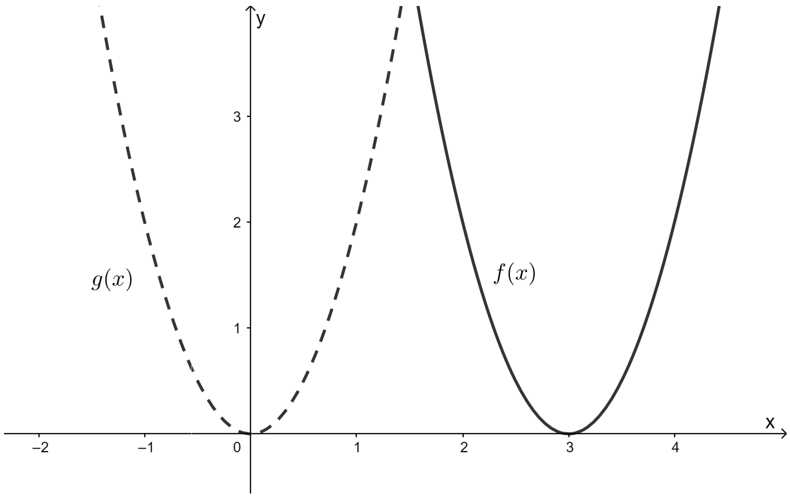


Figura 3.14: Exemplo de translação horizontal da parábola

Fonte: O autor.

Exemplo 3.96. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por$f(x) = -2x^2 - 7x + 9$, ao reescrevermos f na sua forma canônica obtemos $f(x) = -2\left(x + \dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{13}{4}$, ou seja, para obtermos o gráfico de f transladamos verticalmente $\dfrac{7}{2}$ a esquerda e horizontalmente $\dfrac{13}{4}$ unidades abaixo, a função $g(x) = -2x^2$, veja Figura 3.15.

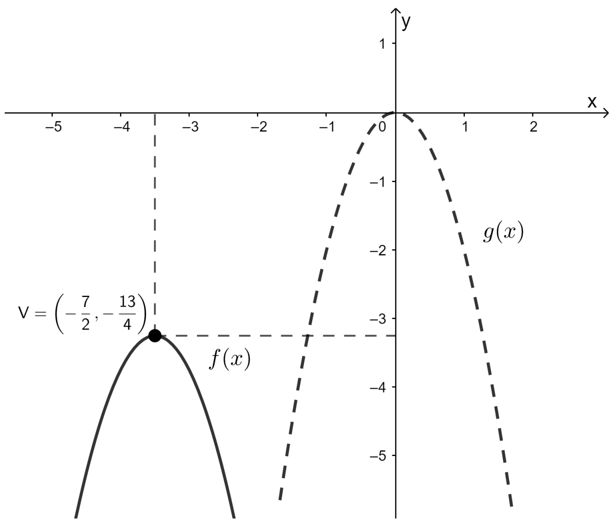


Figura 3.15: Exemplo I de translação vertical e horizontal da parábola

Fonte: O autor.

Exemplo 3.97. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 10x + 20$, ao reescrevermos f na sua forma canônica, obtemos $f(x) = (x + 5)^2 - 5$, ou seja, para obtermos o gráfico de f transladamos horizontalmente 5 a esquerda e verticalmente 5 unidades abaixo, a função $g(x) = x^2$, veja Figura 3.16.

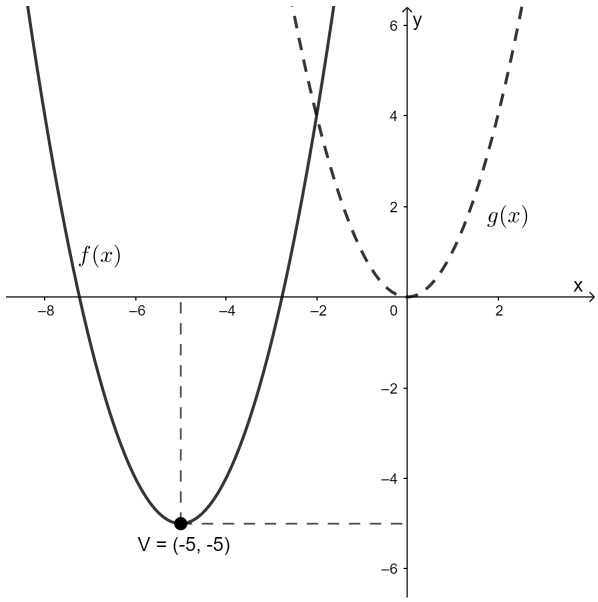


Figura 3.16: Exemplo II de translação vertical e horizontal da parábola

Fonte: O autor.

3.10.5 Zeros da função quadrática

Quando estamos falando em zeros da função quadrática, referimo-nos a valores do domínio para os quais temos $f(x) = 0$, ou seja, queremos saber os pontos em que o gráfico intercepta o eixo OX.

Deste modo,

(a) o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, intercepta o eixo da abcissas, OX, em dois pontos distintos, quando o valor do discriminante $\Delta > 0$.

(b) o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, intercepta o eixo da abcissas, OX, em em um único ponto, quando o valor do discriminante $\Delta = 0$.

(c) o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, não intercepta o eixo da abcissas, OX, quando o valor do discriminanted $\Delta < 0$.

Exemplo 3.98. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 - x + 6$, intercepta o eixo das abcissas, OX, em dois pontos distintos.

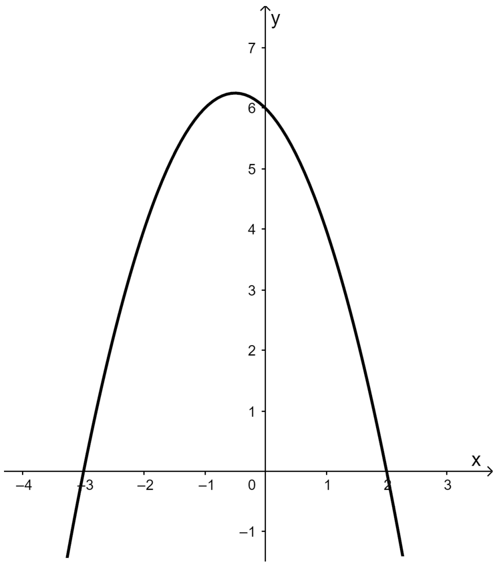


Figura 3.17: Função quadrática com discriminante $\Delta > 0$

Fonte: O autor.

Exemplo 3.99. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 9$, intercepta o eixo das abcissas, OX, em um único ponto.

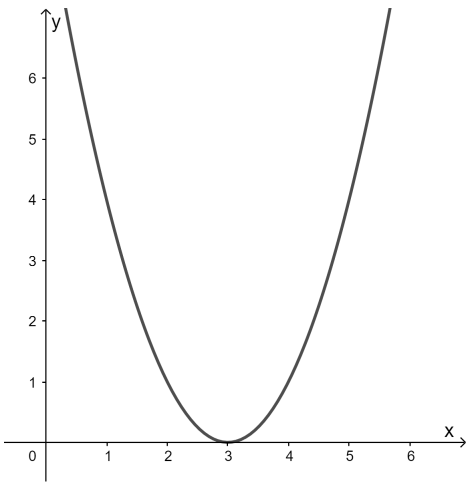


Figura 3.18: Função quadrática com discriminante $\Delta = 0$

Fonte: O autor.

Exemplo 3.100. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 6$, não intercepta o eixo das abcissas, OX.

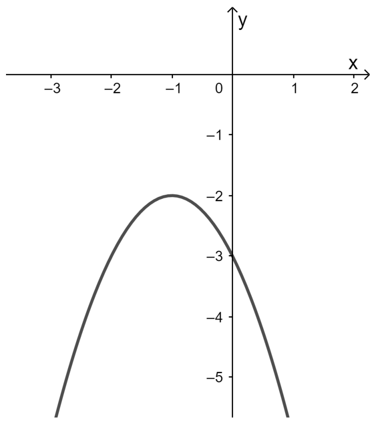


Figura 3.19: Função quadrática com discriminante $\Delta < 0$

Fonte: O autor.

3.10.6 Estudo do sinal da função quadrática

Já apresentamos de forma algébrica parte do estudo do sinal da função quadrática na Definição 3.84, no Corolário 3.86 e na Proposição 3.85. Faremos o estudo do sinal da função quadrática a partir do esboço de seu gráfico, ou seja, analisaremos o domínio da função quadrática e determinaremos quando $f(x) > 0, f(x) = 0$ e $f(x) < 0$.

Para $a > 0$ a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, possui um valor de mínimo e, consequentemente, a concavidade da parábola é voltada para cima. Temos três casos,

(a) Se $a > 0$ e $\Delta < 0$ então a parábola não toca o eixo das abcissas, OX, portanto $f(x) > 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$. Veja Figura 3.20.

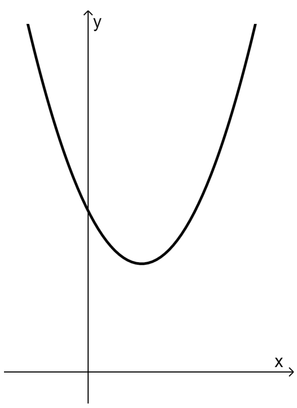


Figura 3.20: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta < 0$

Fonte: O autor.

(b) Se $a > 0$ e $\Delta = 0$, a parábola toca o eixo das abcissas,OX, em um único ponto e a função assumirá o valor zero quando x for a raiz da equação e $f(x) > 0$ para os demais $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Veja Figura 3.21.

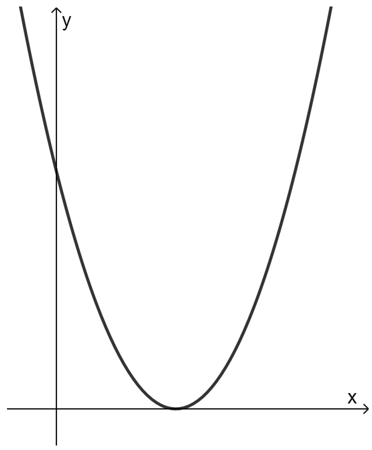


Figura 3.21: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta = 0$

Fonte: O autor.

(c) Se $a > 0$ e $\Delta > 0$, a parábola toca o eixo das abcissas,OX, em dois pontos distintos. Sejam α e β as raízes da equação de $f(x)$, temos que $f(x) > 0$ quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$ e $f(x) < 0$ quando $\alpha < x < \beta$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Veja Figura 3.22.

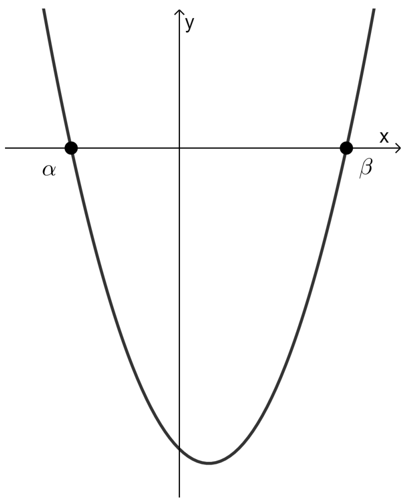


Figura 3.22: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta > 0$

Fonte: O autor.

De modo análogo, para $a < 0$ a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, possui um valor de máximo e consequentemente a concavidade da parábola é voltada para baixo. Temos três casos,

(a) Se $a < 0$ e $\Delta < 0$ então a parábola não toca o eixo das abcissas, OX, portanto $f(x) < 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$. Veja Figura 3.23.

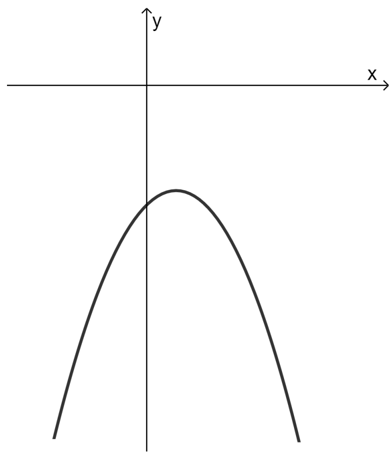


Figura 3.23: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta < 0$

Fonte: O autor.

(b) Se $a > 0$ e $\Delta = 0$, a parábola toca o eixo das abcissas,OX, em um único ponto e a função assumirá o valor zero quando x for a raiz da equação e $f(x) < 0$ para os demais $x \in \text{Dom}(f)$. Veja Figura 3.24.

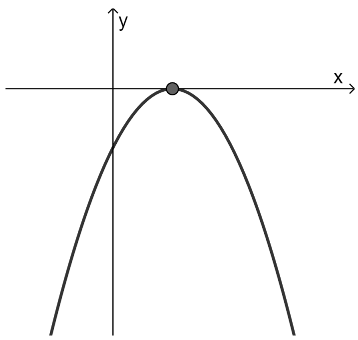


Figura 3.24: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta = 0$

Fonte: O autor.

(c) Se $a < 0$ e $\Delta > 0$, a parábola toca o eixo das abcissas,OX, em dois pontos distintos. Sejam α e β as raízes da equação de $f(x)$, temos que $f(x) < 0$ quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$ e $f(x) > 0$ quando $\alpha < x < \beta$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$. Veja Figura 3.25.

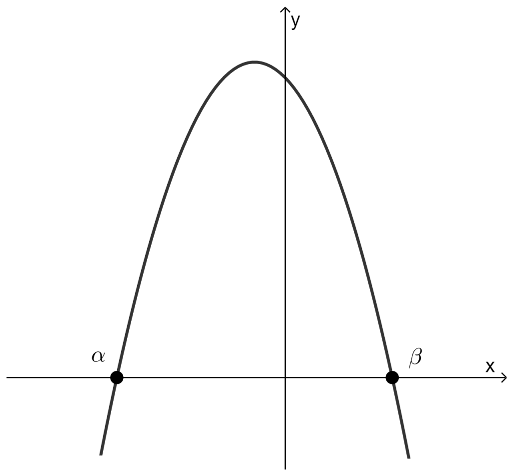


Figura 3.25: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta > 0$

Fonte: O autor.

Exemplo 3.101. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, reescrevendo f na forma fatorada temos $f(x) = -(x-1)(x-3)$, concluímos que quando $f(x) = 0$ suas raízes são $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, que a concavidade da parábola é para baixo, pois $a < 0$ e além disso

- $f(x) < 0$ para $x < 1$ ou $x > 3$.
- $f(x) = 0$ para $x = 1$ e $x = 3$.
- $f(x) > 0$ para $1 < x < 3$.

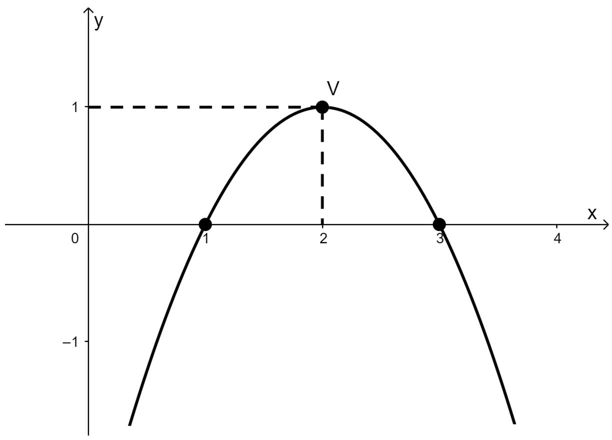


Figura 3.26: Gráfico de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Fonte: O autor.

3.10.7 Simetria da função quadrática

Proposição 3.102. Toda parábola é simétrica em relação ao seu eixo focal.

Demonstração. Seja P um ponto qualquer da parábola. Tomemos seu simétrico R em relação ao eixo r. Seja Q a interseção do eixo r com o segmento $\overline{PR}$. Logo, Q é ponto médio de $\overline{PR}$. Os triângulos ΔPQFe ΔRQF são congruentes, pelo caso lado-ângulo-lado (LAL), pois $\overline{PQ} \equiv \overline{RQ}$, $\widehat{Q}$ é um ângulo reto e $\overline{QF}$ é lado comum. Em particular, as hipotenusas também são congruentes, ou seja, $\overline{PF} \equiv \overline{RF}$: Além disso, como P e R são simétricos, se considerarmos os pontos P' e R', projeções na diretriz d de P e R, respectivamente, $PP'R'R$ é um retângulo. Consequentemente, os lados paralelos $\overline{PP'}$ e $\overline{RR'}$ são congruentes. Portanto, a parábola é simétrica em relação ao eixo focal.

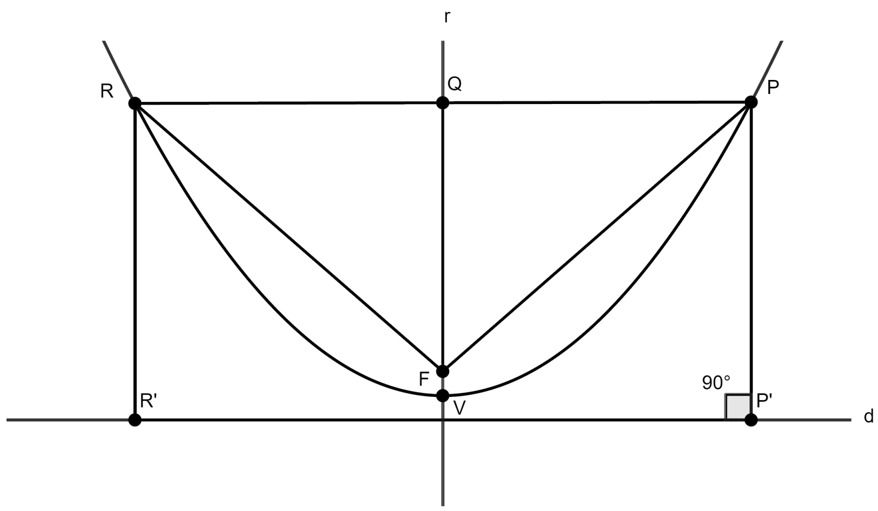


Figura 3.27: Simetria da parábola

Fonte: O autor.

■

A demonstração mostra que todos os pontos x_1 e x_2 distintos, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, são simétricos em relação a reta vertical $x = -\dfrac{b}{a}$.

3.11 Funções polinomiais

Definição 3.103. (Função Polinomial) Dizemos que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando dados números reais $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-a} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ e } a_n \neq 0.$$

Dizemos que p tem grau n.

Exemplo 3.104. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = -x^2 + 3x - 1$ é uma função polinomial com coeficientes $a_2 = -1, a_1 = 3$ e $a_0 = -1$.

Exemplo 3.105. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2x^6 - 7ix^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1 + i$. Então, $p(x)$ é uma função polinomial com coeficientes $a_6 = 2, a_5 = 0, a_4 = -7i, a_3 = -4, a_2 = 1, a_1 = -2$ e $a_0 = 1 + i$.

Exemplo 3.106. A função $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x\ -1$ com $p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ não é uma função polinomial.

Definição 3.107. (Valor numérico) A função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, assume valores para todo $x \in \mathbb{R}$ do seu domínio, então

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n - a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$.

Exemplo 3.108. Consideremos $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$, temos que

- $p(0) = 0$
- $p(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 2$
- $p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 6$

Definição 3.109. São funções polinomiais a soma e o produto de funções polinomiais.

Exemplo 3.110. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^n - \alpha^n$, podemos reescrever p como um produto, $p(x) = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha n^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}$, em que $x^n - \alpha^n$ é divisível por $x - \alpha$.

Definição 3.111. Seja p a função polinomial da Definição 3.103, então para quaisquer $x, \alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$p(x) - p(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1} + \cdots + a_1(x - \alpha),$$

onde cada parcela do segundo membro é divisível por $x - \alpha$, então para todo $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha)q(x),$$

onde $q(x)$ é uma função polinomial, tais que se p tem grau n, q tem grau $n - 1$.

Definição 3.112. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) = 0$ para uma função qualquer $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que α é a raiz de p.

Observação 3.113. α é uma raiz de p se, e somente se, $p(x)$ for divisível por $x - \alpha$ e, de modo mais geral $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ são raízes de p se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$ valer

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - a_k)q(x),$$

onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Exemplo 3.114. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. Temos que $p(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + (-2) + 2 = 0$, logo $x = -2$ é raiz de p.

Exemplo 3.115. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^3 - 4x$. Temos que $p(0) = (0)^3 - 4 \cdot (0) = 0$, logo $x = 0$ é raiz de p, assim como $x = 1$ e $x = -1$ também são raízes de p, ou seja, $p(2) = (2)^3 - 4 \cdot (2) = 0$ e $p(-2) = (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = 0$.

Observação 3.116. Uma função polinomial de grau n não pode ter mais que n raízes.

Definição 3.117. Uma função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, quando possui todos os coeficientes iguais a zero

$$p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0.$$

Proposição 3.118. Duas funções polinomiais, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $p(x) = ax^n + \cdots a_1x + a_0$ e $t(x) = bx^n + \cdots b_1x + b_0$, são iguais se $p(x) - t(x) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $p(x) = t(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, que p e p_1 sejam funções iguais. Então a diferença $d = p - t$ é a função identicamente nula, pois

$d(x) = p(x) - t(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$d(x) = (a_n - b_N)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0),$$

mas pela Definição 3.117, segue que $a_n - b_n = 0, \cdots, a_1 - b_1 = 0, a_0 - b_0 = 0$, ou seja,

$$a_n = b_0, \cdots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Portanto, as funções p, t assumem o mesmo valor $p(x) = t(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, têm os mesmos coeficientes. ■

Teorema 3.119. (Teorema do resto) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial definida por $p(x) = ax^n + \cdots a_1x + a_0$, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - r$ é igual ao valor numérico de $p(r)$.

Demonstração. Suponhamos que a divisão de $p(x)$ por $x - r$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto r, temos

$$p(x) = (x - r)q(x) + r.$$

Fazendo $x = r$, temos

$$p(r) = (r - r)q(r) + r = 0 \cdot q(r) + r,$$

ou seja, $p(r) = r$. ■

O Teorema 3.119 pode ser uma ferramenta útil quando queremos determinar a raiz ou as raízes da função polinomial de grau n.

Existem outras formas para se obter a raiz ou as raízes de uma função polinomial, tais como a divisão polinomial pelo método da chave, método de Descartes e dispositivo de Briot-Ruffini, que não serão abordados, mas podem ser encontrados nos livros do ensino médio.

3.11.1 Gráfico da função polinomial

Nesta subseção, observamos que os gráficos das funções polinomiais não são limitados, pois estas funções podem crescer ou decrescer, indefinidamente. Além disso, a curva associada ao gráfico pode interceptar o eixo x, OX, um certo número de vezes, sendo esse número igual ou menor do que n, e a estes chamamos de raízes.

Nos exemplos a seguir, observaremos a Definição 2.85 e a Definição 3.52 através de uma função polinomial.

Exemplo 3.120. Consideremos $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, vejamos o esboço do gráfico de p através da Figura 3.28.

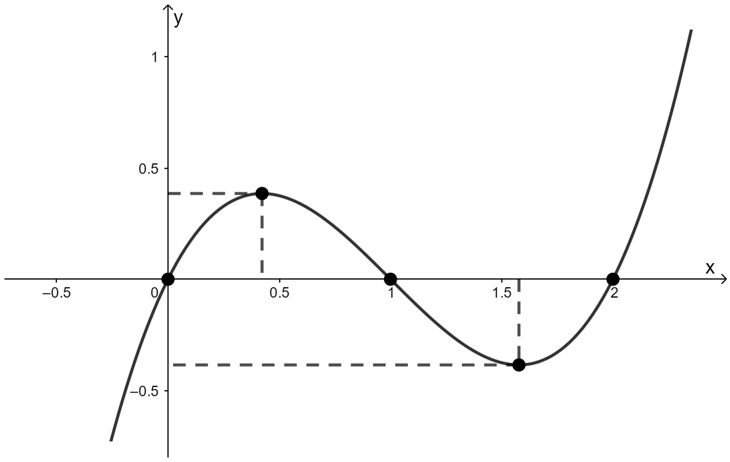


Figura 3.28: Gráfico de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Fonte: O autor.

Notemos que:

- os zeros ou raízes de p são $x_1 = 0, x_2 = 1$ e $x_3 = 2$.
- p é crescente em $]-\infty; 0,3849[$ e em $]-0,3849, +\infty[$.
- p é decrescente, por exemplo, em $]0,3849; 0,3849[$.
- um ponto de máximo local de p está entre 0 e 1.
- um ponto de mínimo local de p está entre 1 e 2.
- p não possui máximo ou mínimo absoluto.

Exemplo 3.121. Consideremos $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, vejamos o esboço do gráfico de p através da Figura 3.29.

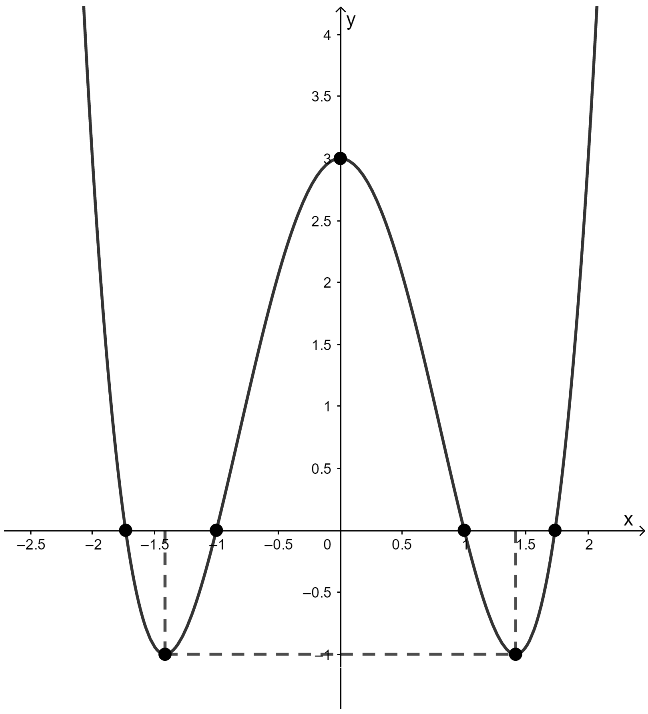


Figura 3.29: Gráfico de $p(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

Fonte: O autor.

Notemos que:

- os zeros ou raízes de p são $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = -1, x_3 = 1$ e $x_4 = \sqrt{3}$.
- p é crescente em $]-1, 3[$ e $]-1, +\infty[$
- p é decrescente em $]-\infty, -1[$ e $]3, -1[$.
- um ponto de máximo local de p está em 0.
- um ponto de mínimo local de p está em $-\sqrt{2}$ e o outro em $\sqrt{2}$.
- p não possui máximo absoluto.
- p possui mínimo absoluto igual a 1.

Exemplo 3.122. Consideremos $p : \,]-1, 3[\, \to [-4, 0]$ definida por $p(x) = x^3 - 3x^2$, vejamos o esboço do gráfico de p através da Figura 3.30.

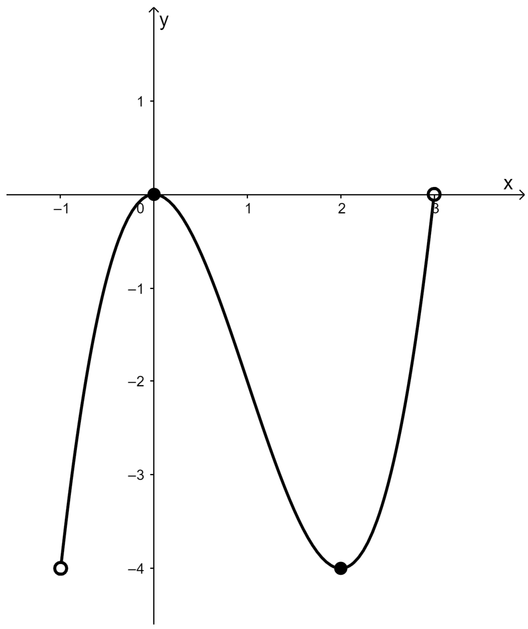


Figura 3.30: Gráfico de $p(x) = x^3 - 3x^2$

Fonte: O autor.

Notemos que:

- os zeros ou raízes de p são $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.
- p é crescente, por exemplo, em $]-4, 0[$ e $]-4, 3[$.
- p é decrescente, por exemplo, em $]0, -4[$.
- o ponto de máximo local de p está em 0, que também é máximo absoluto.
- o ponto de mínimo local de p está em 2, que também é mínimo absoluto.

Capítulo 4

Atividades práticas com materiais manipuláveis

Neste capítulo, apresentamos algumas atividades com materiais manipuláveis para o ensino de funções São adaptações de experimentos de [4], [11], [21], [23] e [29], sendo que tais podem ser desenvolvidas em sala de aula caso a instituição de ensino não tenha à disposição o Laboratório de Matemática.

4.1 Dinamômetro com elástico

Nesta atividade, os alunos inicialmente construirão uma espécie de dinamômetro[1], usando elástico, através do qual medirão a variação do comprimento que este sofre em função do número de bolas de gude que ele está suportando. Ao fim, através da construção de um gráfico com os dados obtidos, que será aproximadamente linear a partir de um certo número de bolinhas, deverão encontrar uma função que descreve seu comportamento com relação ao número de bolinhas de gude suportado.

Observação 4.1. Em pareceria com o professor da disciplina de física poderá ser abordada a Lei de Hooke [2].

Conteúdos

Função afim: coeficientes, equação, gráfico e aplicação.

[1]De acordo com [22], o dinamômetro: Instrumento para medir forças mecânicas ou torques, mediante o emprego da resistência de molas, pesos ou fricção. Instrumento para medir a força muscular.

[2]A Lei de Hooke é a lei da física relacionada à elasticidade de corpos, que serve para calcular a deformação causada pela força exercida sobre um corpo, ou seja, existe uma linearidade entre a tensão aplicada e a distensão do fio ou da mola, até que se atinja a tensão de ruptura no limite elástico. O fato de que o aumento de comprimento é proporcional à força aplicada.

Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. construir gráficos através de dados obtidos experimentalmente;
2. determinar a lei que fornece a variação do comprimento de um elástico em função do número de bolinhas de gude que ele suporta;
3. conhecer uma aplicação da função afim.

Duração

Duas aulas de 50 minutos.

Materiais

Para cada grupo providenciar:

- elástico de látex (aproximadamente 20 cm) ou elástico de costura ou elástico utilizado em pastas;
- 60 cm de barbante;
- tesoura;
- um copo plástico de 300 ml (500 ml) ou um pote plastico de manteiga ou requeijão (preferencialmente redondo de 200g);
- 30 a 50 bolas de gude de mesmo tamanho;
- régua graduada de 30 cm;
- fita adesiva;
- um palito de dente;
- uma folha de papel milimetrado (por aluno).

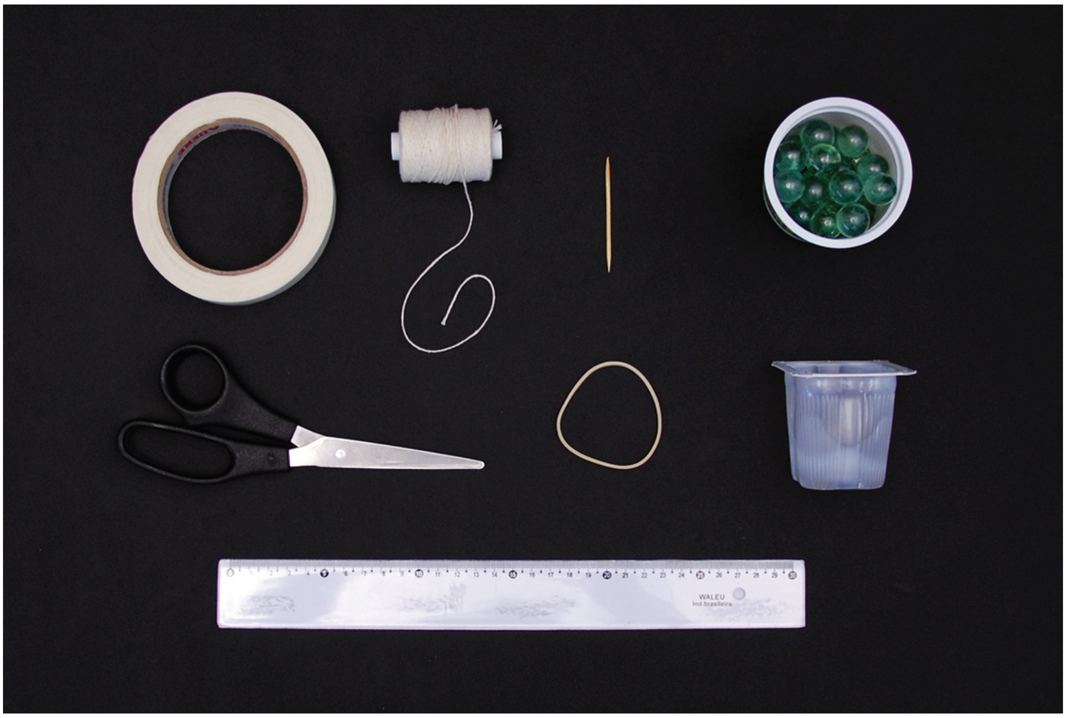


Figura 4.1: Materiais para construção do dinamômetro

Fonte: [21].

Procedimentos

1. formar grupos de no máximo três alunos;
2. distribuir os materiais;
3. construir o dinamômetro juntamente com os alunos.

Observação 4.2. Para evitar acidentes, solicite aos alunos o copo plástico (ou o pote) e os recolha com antecedência, pois será necessário três furos bem distribuídos que podem ser feitos com um prego quente.

Construção do dinamômetro

Cada grupo deverá construir o seu dinamômetro seguindo o roteiro a seguir.

1. divida o barbante em três pedaços de 20 cm cada;
2. amarre um pedaço em cada furo do copo plástico;

3. junte as extremidades dos barbantes e dê um nó, de modo que o copo fique bem equilibrado;

Figura 4.2: Passo I: construção dinamômetro

Fonte: [21].

4. amarre uma das extremidades do elástico no ponto de junção dos barbantes (nó),

5. ainda nesse ponto, fixe um palito de dentes perpendicularmente ao elástico usando uma fita adesiva, de forma a obter um ponteiro,

Figura 4.3: Passo II: construção dinamômetro

Fonte: [21].

6. com uma fita adesiva, fixe bem a outra extremidade do elástico na mesa, próximo a uma de suas pernas, deixando-o pendurado,

7. prenda a régua na perna da mesa, de modo a deixar o palito de dentes alinhado com o zero (a perna da mesa deve ser perpendicular ao chão).

Figura 4.4: Passo III: construção dinamômetro

Fonte: [21].

Figura 4.5: Passo IV: medir o comprimento do elástico

Fonte: O autor.

Coleta de dados

Os alunos deverão anotar, em uma tabela como a apresentada a seguir, qual é a variação do comprimento do elástico do dinamômetro em função do número de bolas de gude que ele está suportando (a variação do comprimento é dada pela indicação do ponteiro do dinamômetro). Apresentamos uma tabela com os dados de um experimento realizado.

N.º de bolas (x)	Variação do comprimento do elástico (mm)	N.º de bolas (x)	Variação do comprimento do elástico (mm)
1	0	16	25
2	0	17	27
3	3	18	30
4	5	19	33
5	5	20	36
6	5	21	39
7	6	22	42
8	8	23	46
9	9	24	49
10	11	25	51
11	13	26	54
12	15	27	57
13	18	28	60
14	20	29	63
15	22	30	65

Fonte: O autor.

Tabela 4.1: Dinamômetro: coleta dos dados

Após a preenchimento da tabela, os alunos deverão representar graficamente na folha milimetrada, os dados coletados, no eixo das abcissas, o número de bolas e, no eixo das ordenadas, a variação da medida do elástico.

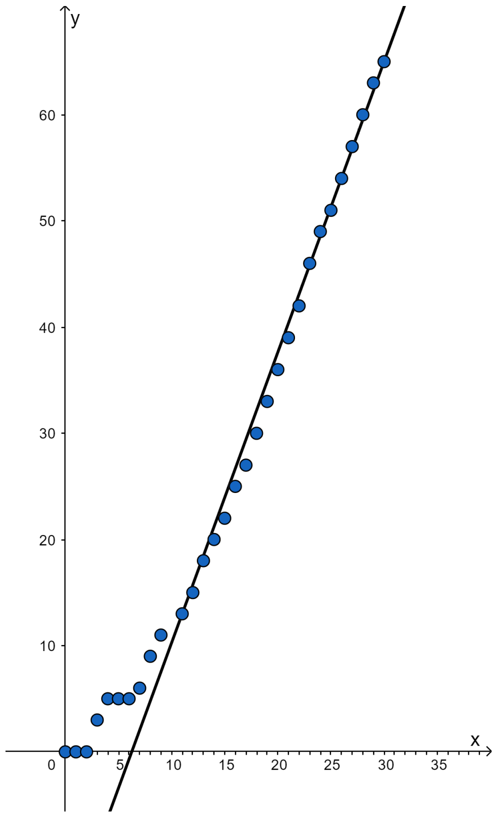


Figura 4.6: Comprimento do elástico × n.º de bolas

Fonte: O autor.

Notemos que para as primeiras aferições o gráfico não é linear, entretanto, a partir de certo número de bolas, o gráfico assemelha-se ao gráfico de uma função afim.

Questionar os alunos a partir de qual número de bolas o gráfico tem a forma mais linear e a partir deste traçar uma reta até o último valor obtido de forma equilibrada, ou seja, deixando o mesmo número de pontos acima e abaixo da reta.

A partir deste momento, o professor deve indagar e estimular seus alunos a conjecturar uma representação algébrica que possa fornecer a variação do comprimento do elástico em função do número de bolas sem a necessidade de novas aferições.

O professor, ao avaliar o *feedback* dos alunos, irá dizer que são necessários apenas dois pontos da reta traçada para se obter a representação requerida.

Observemos que na tabela apresentada de $n < 11$ não se mostram lineares, mas para $11 < n < 30$ o representação tem a forma linear.

Deste modo, tomando os pontos (11, 13) e (30, 65) e com estes determinamos a função afim, que retrata a variação do comprimento do elástico em função do número de bolas.

Sabemos pela Definição 3.54 que sua forma é $f(x) = ax+b$. Assim ao resolvermos o sistema linear

$$\begin{cases} 13 = 11a + b \\ 65 = 30a + b. \end{cases}$$

obtemos $a = \dfrac{52}{19}$ e $b = -\dfrac{325}{19}$. Portanto a função desejada é $f(x) = \dfrac{52}{19}x - \dfrac{325}{19}$.

Encerramento

Com a parceria do professor da disciplina de física, além dos objetivos elencados, é possível discutir os motivos de determinado grupo ter um elástico que esticou mais que outro grupo, do por quê parte da representação gráfica não é linear e o que aconteceria caso o número de bolas de gude fosse grande o suficiente para o elástico ficar rígido a ponto de se romper.

Vale ressaltar que ao descobrir a função que descreve o comportamento da situação observada, é possível determinar o que poderia acontecer ao aumentar gradativamente o número de bolinhas de gude.

4.2 Qual a “maior” caixa de papel?

Para a realização desta atividade, os alunos, trabalhando em grupo, construirão no mínimo seis caixas de papel e tentarão descobrir qual delas tem maior volume. Só depois, fazendo os cálculos, verificarão se sua intuição estava certa. Ao fim, eles usarão os dados coletados para esboçar um gráfico do volume obtido em função da medida × do corte usado na confecção da caixa, sendo novamente instigados a responder: qual o maior volume possível?

Conteúdos

- polinômios – funções polinomiais, gráficos e propriedades;
- geometria espacial – problemas de otimização;
- unidades de medida.

Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. construir gráficos através de dados obtidos experimentalmente;
2. determinar a lei que fornece a variação do volume de uma caixa em função de suas dimensões (altura × largura × comprimento);
3. discutir o comportamento de funções associado com o conceito de volume.

Duração

Duas aulas de 50 minutos.

Materiais

- folha de papel A4;
- régua;

- lápis;
- cola;
- tesoura.

Procedimentos

Divida os alunos em grupos.

Cada grupo deverá construir no mínimo seis caixas, escolhendo para cada uma delas diferentes valores de x. Depois, colocando-as uma ao lado da outra, o grupo deve discutir e tentar descobrir qual delas tem maior volume.

Feito isso, eles irão numerá-las em relação ao volume, do maior para o menor. Essa numeração servirá de registro para a verificação da percepção visual dos alunos acerca do volume das caixas.

Construção das caixas

Os alunos, sob supervisão, construirão caixas de papel de acordo com os seguintes procedimentos:

Fazer, com o auxílio de régua, quadrados de lado x nos quatro cantos da folha A4, anotando, próximo ao lado desse quadrado, o valor de x utilizado.

Figura 4.7: Passo I para construção das caixas

Fonte: [23].

Após feita a marcação dos quadrados nos quatro cantos da folha A4, deverão cortar com a auxilio de uma tesoura conforme mostrado nos 2.º e 3.º passos.

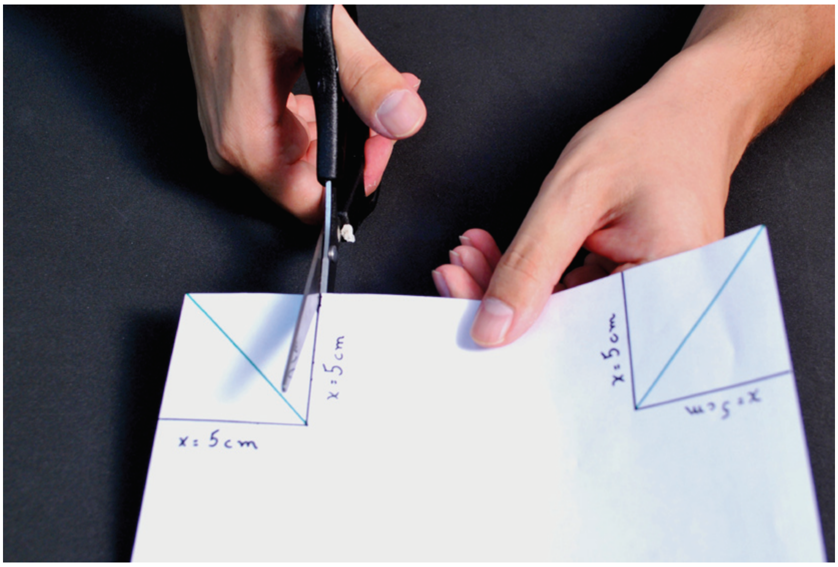


Figura 4.8: Passo II para construção das caixas

Fonte: [23].

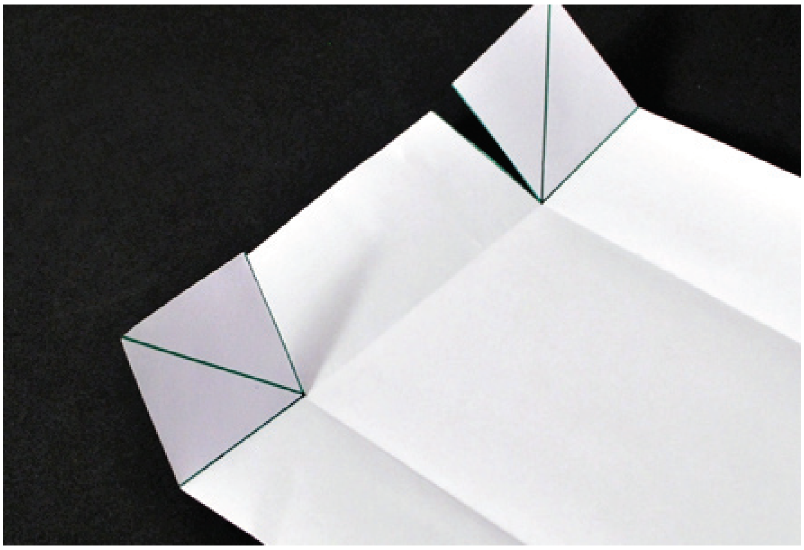


Figura 4.9: Passo II para construção das caixas

Fonte: [23].

Ao concluir o corte nos quatro cantos do papel A4 cada grupo deverá ter uma folha como a do 4.º passo.

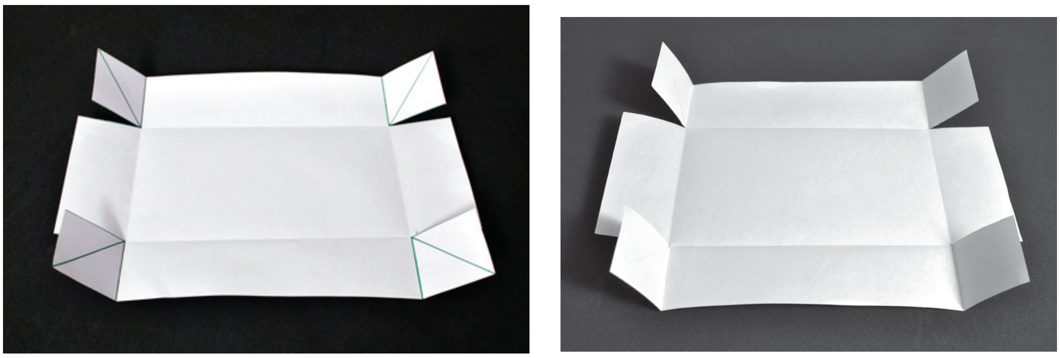


Figura 4.10: Passo IV para construção das caixas

Fonte: [23].

Os quatro cantos, das seis, deverão ser colados de forma a ter caixas sem tampa como a do 5.º passo.

Figura 4.11: Passo V para construção das caixas

Fonte: [23].

Chamaremos de 1.ª numeração aquela realizada pelos alunos através da ordenação das caixas com base em suas percepções visuais e as classificaram em relação aos seus volumes. Nesta etapa, peça aos alunos para calcularem os volumes das caixas algebricamente: chamaremos de 2.ª numeração. Para isso, com o auxílio de uma régua, medirão o comprimento, a largura e a altura de cada caixa. Depois de calculados os volumes de todas as caixas, os alunos irão realizar a 2.ª numeração, do maior para o menor volume obtido. Neste momento, eles poderão comparar a percepção visual que têm do volume com o seu valor real. Com os dados obtidos anteriormente, eles farão uma tabela no caderno, como mostrado na Tabela 4.2.

Coleta de dados

Caixa		Altura	Volume
1.ª numeração	2.ª numeração		
1	2	5 cm	1085,70 cm³
2	1	4 cm	1130,48 cm³
3	4	6 cm	957,96 cm³
4	3	3 cm	1068,30 cm³
5	5	2 cm	875,16 cm³
6	6	9 cm	316,98 cm³

Fonte: O autor.

Tabela 4.2: Volumes das caixas de papel

Após a confecção da tabela, os grupos deverão esboçar o gráfico do volume da caixa em função de sua altura x em um sistema de eixos de coordenadas, semelhante ao que mostramos Figura 4.12.

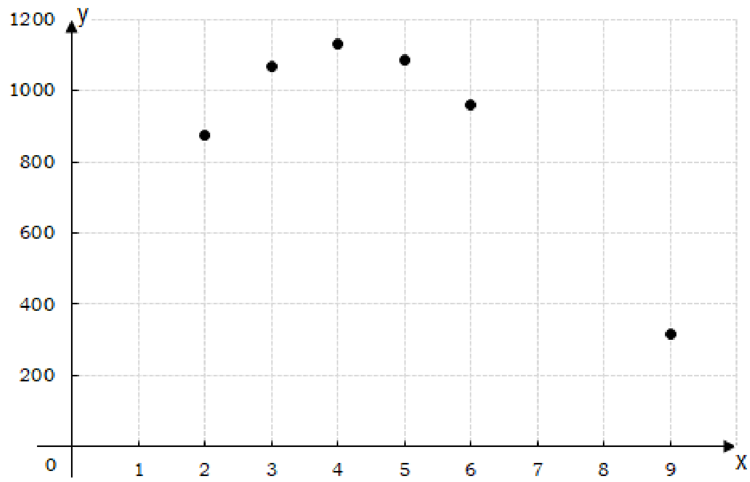


Figura 4.12: Gráfico do volume das caixas × altura

Fonte: O autor.

Quando terminarem o esboço, questione qual seria o maior volume possível: o que eles obtiveram ou algum outro que eles desconhecem. Caso tenham algum palpite, ajude os alunos a construir a caixa que acreditam ser a maior.

Encerramento

Depois que todos os grupos terminarem a representação gráfica, sugerimos o fechamento em duas etapas:

1.ª Etapa: Reúna os dados obtidos pelos diversos grupos e faça um gráfico (volume × altura) na lousa e, a partir dele, identifique quem obteve a melhor estimativa. Se nenhum grupo chegou no valor máximo para o volume, que é aproximadamente 1130,48 cm^3, fale de sua existência e mostre, com o gráfico, que o valor aproximado de x para essa caixa é 4 cm. Peça para algum aluno construir a caixa para $x = 4$ cm. O gráfico deve ficar semelhante ao gráfico mostrado na Figura ??.

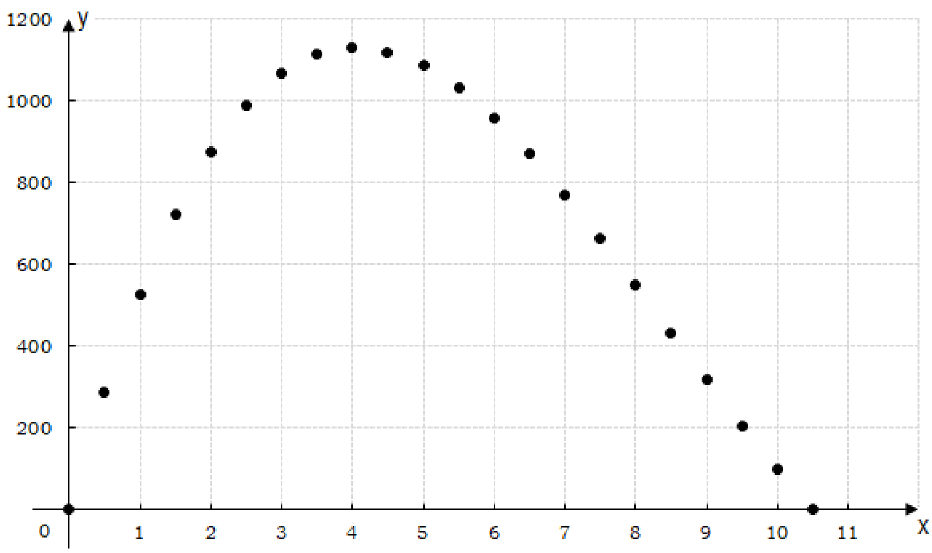


Figura 4.13: Volumes das caixas de papel

Fonte: O autor.

Nesta etapa também é possível identificar eventuais valores errados, por estarem discrepantes da curva sugerida pelos demais dados. É preciso estar atento a esses desvios durante toda a atividade, mas com o gráfico na lousa, provavelmente os próprios alunos tomarão a iniciativa de questionar os pontos fora da curva.

Com poucos pontos, a plotagem do gráfico facilmente esconde detalhes só visualizáveis com uma curva contínua.

2.ª Etapa: Indague os alunos quanto a possibilidade da construção de uma função que descreva o gráfico da Figura ?? e deixe alguns minutos para que conjecturem a expressão que descreve o volume da caixa em função de sua altura.

Posteriormente, solicite que alguns alunos (um de cada grupo) faça a socialização e tente identificar se algum grupo foi capaz de descrever a expressão algébrica da função, ou seja, $V(x) = (29,74 - 2x) \cdot (21 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 101,48x^2 + 624,5x$. Caso os grupos não consigam expressar a função que descreve o volume, mostre-os como é possível utilizando as seguintes dimensões da folha A4: comprimento igual a 29,74 cm e largura igual a 21 cm. Além disso, traga neste momento a discussão da Definição 2.5, Definição 2.11, Definição 3.1, Definição 3.11, Definição 2.85 e que as raízes da função que descreve o volume são os extremos do $\text{Dom}(V)$.

Discussão sobre a percepção de volume

Após o término da socialização dos dados, peça para cada grupo mostrar, com as caixas, a numeração que eles fizeram antes e depois do cálculo do volume.

Uns dirão que escolheram a caixa de maior base, outros, aquela em que se equilibra altura e área da base. Mas, o importante é discutir sobre a divergência entre intuição e a poderosa ferramenta que é o cálculo matemático. Depois dessa discussão, seria interessante perguntar para os alunos quanto eles acham que vale 1130,48 cm^3, já que estamos acostumados com o volume dado em litros. Lembrando, 1 litro é o equivalente a 1 decímetro cúbico, ou seja, temos uma caixa de 1,13048 litros.

4.3 O cercado

Diariamente distintos momentos nos exigem uma tomada de decisão. Muitas vezes, usamos apenas nossa intuição para realizarmos escolhas, porém nem sempre a intuição é a melhor maneira para resolver isso. A matemática é uma excelente ferramenta que pode nos auxiliar nestes momentos.

Dentre os inúmeros caminhos para se chegar as soluções que a disciplina nos oferece, encontramos a possibilidade de descrever, com funções, situações reais. Neste experimento, buscaremos otimizar áreas de cercados, cuja solução envolverá uma função quadrática. É uma ótima oportunidade para os alunos explorarem elementos e propriedades desta função, relacionando-a à situação real.

Além disso, com este experimento o professor poderá criar diversas variações para o enriquecimento das atividades de sua turma.

Conteúdos

Função quadrática: gráfico, aplicações e otimizações simples.

Objetivos

- resolver um problema de otimização através do estudo de uma função quadrática.
- estudar as propriedades de uma função quadrática.

Duração

Uma aula de 50 minutos.

Material

- folha de papel A4;
- papel milimetrado;
- cola;

- fita adesiva;
- régua (uma régua de 30 cm é suficiente para o professor; para os alunos, uma de 20 cm basta);
- um rolo de barbante (aproximadamente 40 m de barbante para uma sala de 40 alunos);
- lápis.

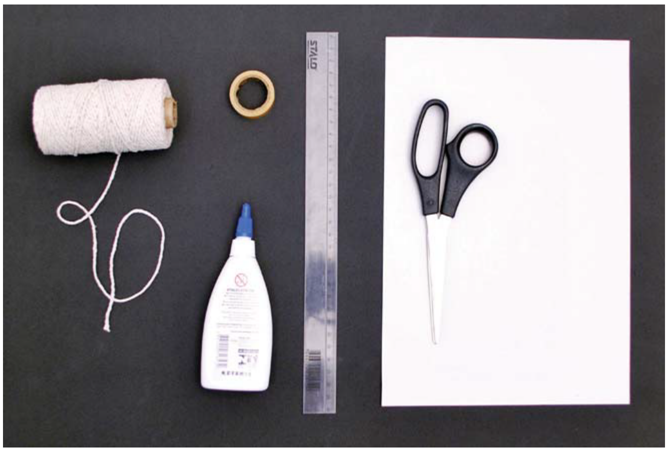


Figura 4.14: Cercado: materiais para a atividade

Fonte: [29].

Procedimentos

Divida os alunos em duplas e entregue para cada dupla uma folha A4 e uma folha de papel milimetrado juntamente com o material necessário descrito anteriormente.

Distribua para cada grupo seis pedaços de barbante com o mesmo comprimento. Sugerimos que estes pedaços sejam diferentes de um grupo para o outro, com tamanhos entre 20 cm e 30 cm. Assim, será possível construir os cercados colando-os em uma folha de papel A4.

Os alunos realizarão os seguintes procedimentos:

1. Com fita adesiva, unir as pontas dos barbantes de forma a produzir seis anéis.

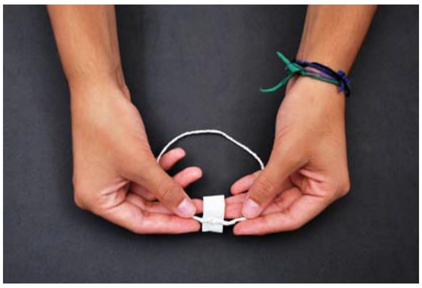


Figura 4.15: Passo I para a atividade cercado

Fonte: [29].

Figura 4.16: Passo I.a para a atividade cercado

Fonte: [29].

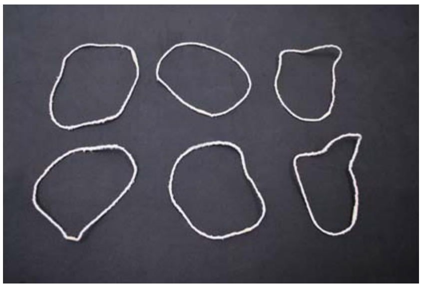


Figura 4.17: Passo I.b para a atividade cercado

Fonte: [29].

2. Com os anéis, modelar diferentes retângulos colando-os na folha de papel A4. Feito isso, numerá-los de 1 à 6.

Figura 4.18: Passo II para a atividade cercado

Fonte: [29].

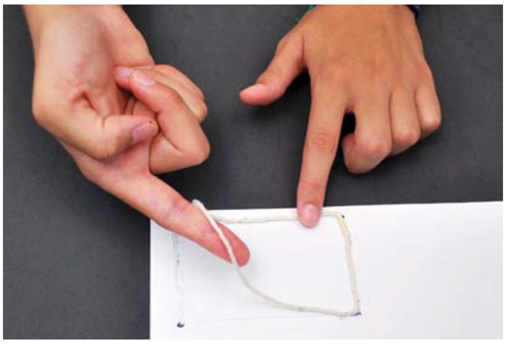


Figura 4.19: Passo II.a para a atividade cercado

Fonte: [29].

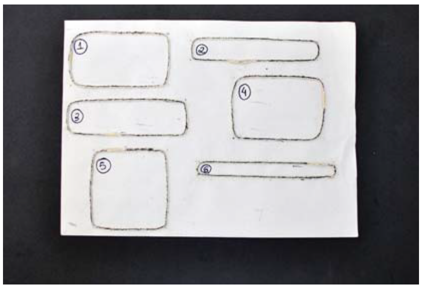


Figura 4.20: Passo II.b para a atividade cercado

Fonte: [29].

Coleta de dados

Quando todos os retângulos forem construídos, os alunos deverão calcular a área de cada um. É importante que registrem os dados coletados na folha de papel A4 onde estão colados os retângulos, utilizando as seguintes notações:

- L_i para a largura;
- C_i para o comprimento;
- A_i para a área.

Após a obtenção dos dados, peça aos alunos que marquem os pontos (L_i, C_i) e (C_i, A_i) na folha de papel milimetrado. Esse registro auxiliará no estudo da função que descreve a área em função de um dos lados de um retângulo.

Para chegar na expressão que fornece esta função, auxilie os alunos a escrever o valor de C_i em função de L_i. Para isso, sendo p o perímetro perímetro um valor fixo, temos:

$$p = 2L_i + 2C_i$$

$$2C_i = p - 2L_i$$

$$C_i = \frac{p}{2} - L_i$$

Assim, os lados do retângulo podem ser descritos como na Figura 4.21.

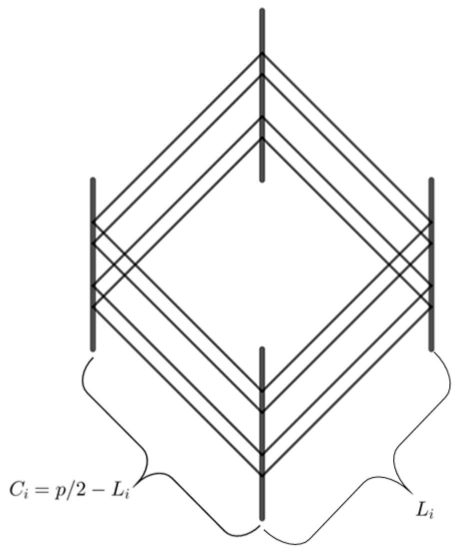


Figura 4.21: Simulação de um cercado

Fonte: O autor.

Área do retângulo (S_{L_i})

$$S(L_i) = C_i \cdot L_i \rightarrow S(L_i)$$

$$S(L_i) = \left[\left(\frac{p}{2}\right) - L_i\right] \cdot L_i$$

$$S(L_i) = \left(\frac{p}{2}\right) \cdot L_i - L_i^2$$

Então a área do retângulo é uma função da largura dada por

$$S(L_i) = \left(\frac{p}{2}\right) \cdot L_i - L_i^2.$$

Com a função, os alunos esboçarão seu gráfico no mesmo plano cartesiano que marcaram os outros pontos e, com ele, tentarão descobrir qual cercado retangular possui a maior área possível.

O importante é que os alunos notem que o gráfico é uma parábola de concavidade para baixo. Assim, a exploração da forma os levará ao ponto de máximo, que corresponde à área do cercado quadrado.

Variação - cercado com a utilização de um muro

Instigue os alunos a resolver uma variação do problema anterior. Com isso, esperamos que o aluno, ao aplicar procedimentos análogos seja capaz de resolver essa nova situação, demonstrando ter compreendido a lógica usada na solução.

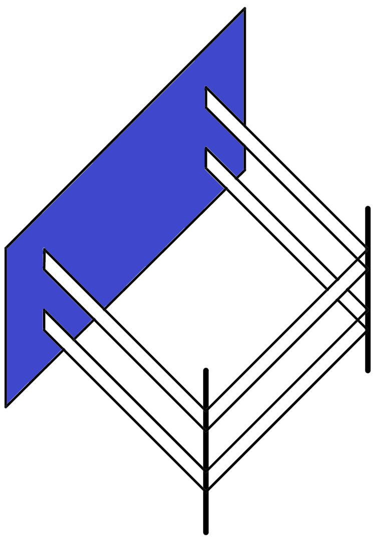


Figura 4.22: Variação de um cercado com aproveitamento de um muro

Fonte: O autor.

Como se trata de uma variação do primeiro problema, para solucioná-lo basta seguir os mesmos passos feitos na etapa anterior. Assim, a única alteração será que $p = L_i + 2C_1$.

Encerramento

Relembre com os seus alunos o que fizeram e pergunte para as duplas qual cercado de maior área que conseguiram?

Faça na lousa a Tabela 4.3 e a preencha com as informações obtidas, sendo que perímetro é o tamanho do barbante entregue.

Perímetro	C_i	L_i	Área

Fonte: O autor.

Tabela 4.3: Tabela para ser reproduzida na lousa

Faça na lousa um gráfico com base nos cercados construídos por alguma das duplas. A Figura 4.23 é um exemplo para $p = 30$ cm. Observe com eles que os pontos (L_i, C_i) e (C_i, A_i) são simétricos em relação ao eixo da parábola.

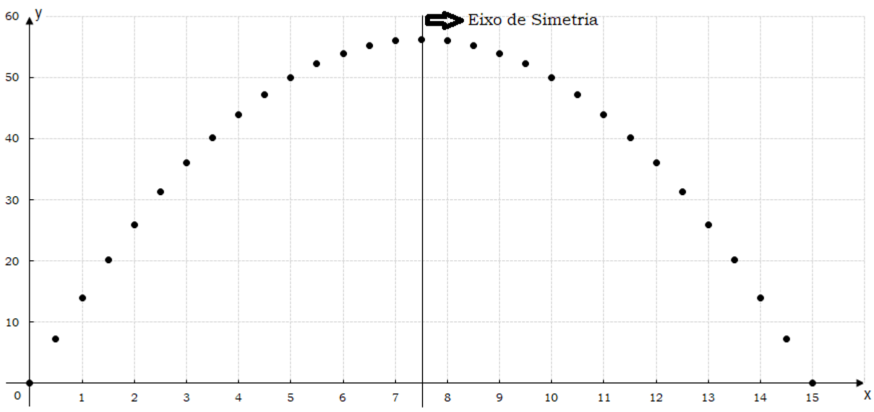


Figura 4.23: Área do retângulo em função da largura

Fonte: O autor.

Conforme esses pontos vão se aproximando do eixo da parábola, obtemos um retângulo de maior área. Quando estamos no vértice da parábola, onde a área é máxima, temos que os lados do retângulo têm o mesmo comprimento, ou seja, temos um quadrado.

Logo que terminar a discussão, desenvolva o raciocínio juntamente com os alunos para obter a expressão geral $S(L_i) = \left(\frac{p}{2}\right) \cdot x - x^2$. Desenhe o gráfico na lousa e estude algumas de suas propriedades com os alunos (vértice, raízes, domínio). O gráfico deve ficar semelhante ao gráfico mostrado na Figura 4.24.

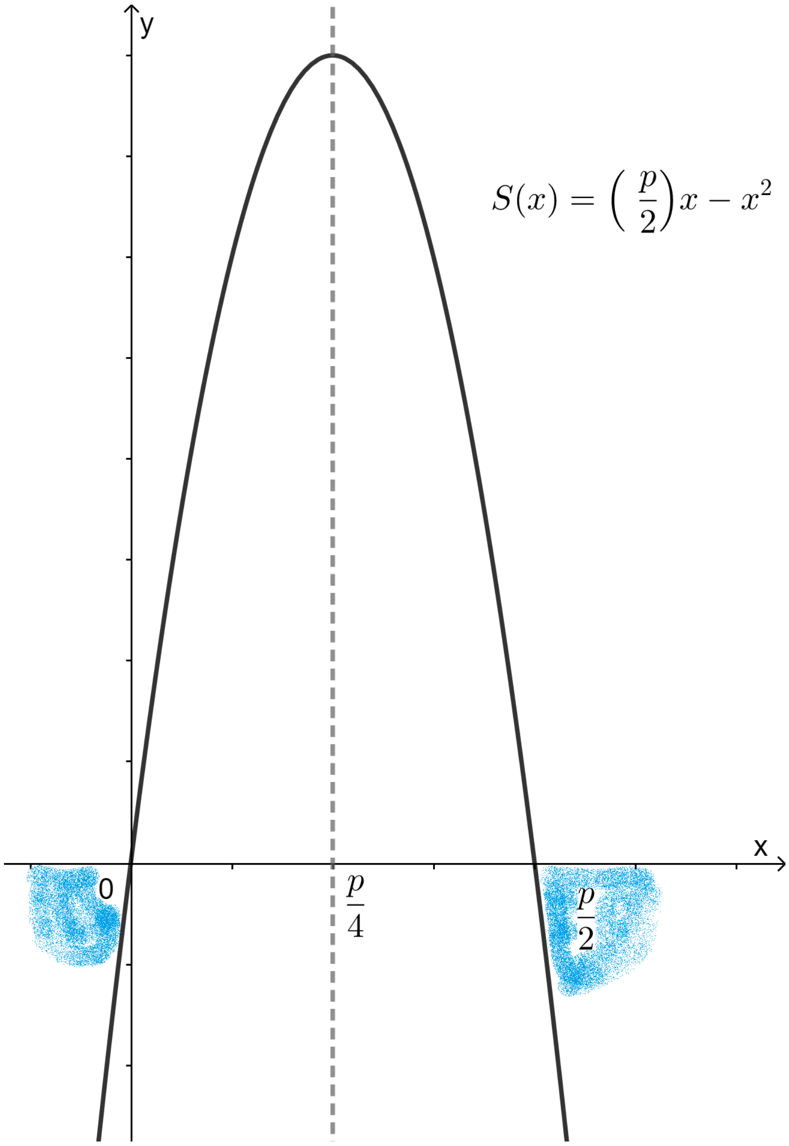


Figura 4.24: Área do cercado - estudo das propriedades

Fonte: O autor.

Note que as raízes são 0 (zero) e $\frac{p}{2}$ e que para estes valores não existe área retangular possível. Repare também que, para valores de $x < 0$ ou $x > \frac{p}{2}$, falar sobre área é algo sem sentido real, pois não existe área negativa. Depois que estudar a função, compare os gráficos da Figura 4.23 e da Figura 4.24, observando que os pontos do primeiro pertencem ao segundo. E, com base na Tabela 4.3, verificando se a soma dos lados dos retângulos é igual ao perímetro, explique os eventuais pontos fora da curva que os alunos obtiveram. Com isso, fale da imprecisão da construção dos cercados e da imprecisão das medidas feitas.

4.4 Formas poligonais e circunferência

O problema proposto envolve a soma das áreas delimitadas por duas figuras geométricas, um polígono regular e uma circunferência. Os alunos obterão uma função quadrática de domínio limitado, cuja solução solicitará análise e esboço do gráfico, conforme Subseção 3.9.

Conteúdos

- função quadrática, gráficos,
- geometria plana, área e perímetro.

Objetivos

- estudar função quadrática tendo como motivação um problema geométrico de otimização de áreas;
- conhecer problemas que envolvem funções de domínio limitado.

Duração

Duas aulas de 50 minutos.

Material

- papel de folha A4;
- tesoura;
- compasso;
- régua;
- papel milimetrado;
- calculadora.

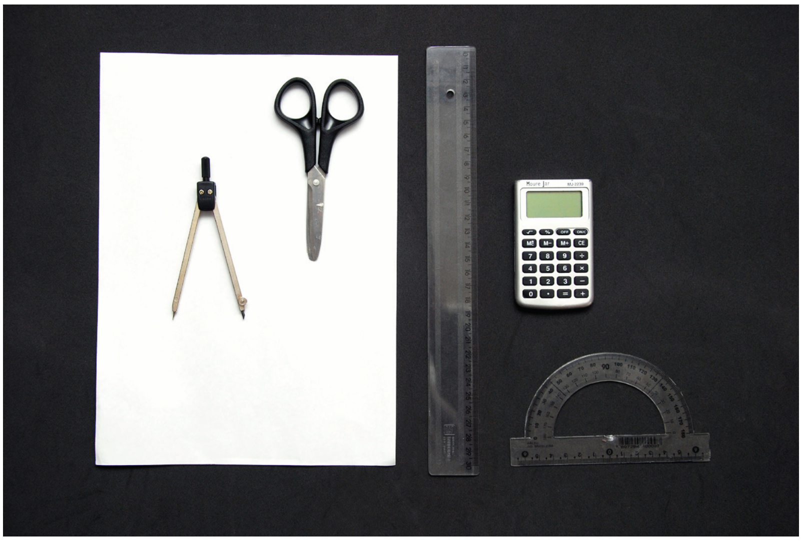


Figura 4.25: Materiais para a realização da atividade formas poligonais e circunferência
Fonte: [4].

Procedimentos

Divida a classe em grupos de quatro alunos e entregue para cada grupo uma folha de papel A4 e os outros materiais necessários para a realização do experimento.

Antes de iniciar a atividade, explique o problema a ser resolvido e destine para o estudo de cada grupo um dos seguintes polígonos: quadrado, triângulo equilátero ou hexágono regular. É interessante manter a variedade de polígonos entre os grupos para a realização do Encerramento, ou seja, cada grupo deve estudar um polígono diferente.

O problema

Considere um fio de 30 cm de comprimento cortado em duas partes. Uma das partes será destinada para a construção de um polígono regular (de 3, de 4 ou de 6 lados) e outra parte será destinada para a construção de uma circunferência. A partir dessas informações, o seguinte problema é proposto:

Como devemos cortar o fio de forma que a soma das áreas delimitadas pelas duas figuras geométricas construídas seja máxima?

Nesta etapa, o grupo tentará solucionar o problema proposto, totalizando quatro soluções diferentes. Para isso, os alunos deverão realizar os seguintes procedimentos:

1. considerando um fio de 30 cm, escolha o comprimento do fio que será destinado para

a construção da circunferência (C) e com o restante, construa o polígono;

2. com o auxílio da régua e do compasso, desenhe a circunferência e o polígono na folha de papel A4. Numere cada um dos pares de soluções de 1 a 4, conforme modelo da Figura 4.26.

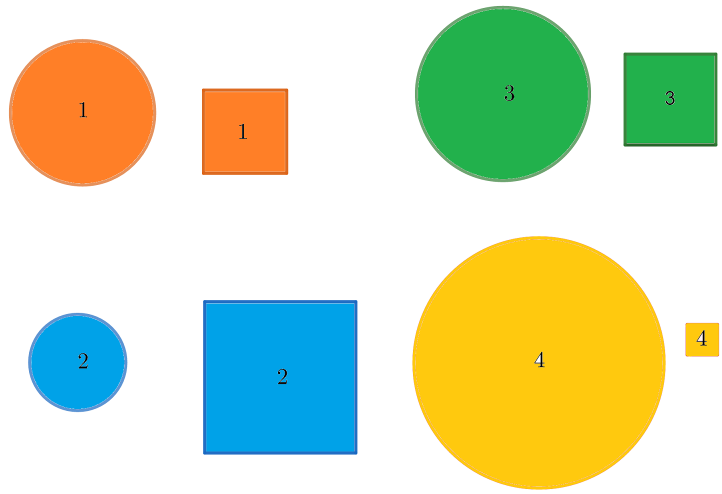


Figura 4.26: Circunferências e polígonos regulares

Fonte: O autor.

3. Complete todas as informações da Tabela 4.4.

Construções	Perímetro do Polígono (cm)	Comprimento das circunferências (cm)
1	15	15
2	20	10
3	12	18
4	4	26

Fonte: O autor.

Tabela 4.4: Circunferências e polígonos: medidas

4. Recorte as formas geométricas desenhadas.

   Logo que os alunos terminarem a construção das formas geométricas, eles deverão manipulá-las para responder à seguinte pergunta:

   Para qual construção vocês obtiveram a maior soma das áreas? Será que essa é a maior soma possível?

Os grupos poderão encontrar diferentes formas de resposta. Incentive a turma a fazer sobreposições e recortes para comparar as somas das áreas, como mostrado na Figura 4.27. O importante desta etapa, envolvendo as construções, é a percepção visual que eles obterão do problema.

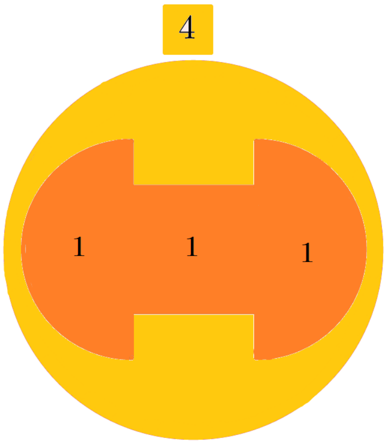


Figura 4.27: Sobreposição de circunferências e polígonos

Fonte: O autor.

Soma das áreas

Nesta etapa, os alunos deverão encontrar a expressão que fornece a soma das áreas delimitadas pelo polígono regular e pela circunferência. Com ela, esperamos que eles encontrem o valor da soma máxima analiticamente.

Soma das áreas delimitadas pelo polígono e pela circunferência

Representando por x o comprimento da parte do fio que formará o polígono regular e por L o comprimento da parte do fio que formará a circunferência, para todos os casos, temos que

$$L + x = 30 \leftrightarrow L = 30 - x.$$

Sabendo que o perímetro da circunferência é igual a L, o raio R da circunferência é dado por $2\pi R = L$ se, e somente se, $R = \dfrac{l}{2\pi}$. Com isso, a área delimitada pela circunferência será igual a

$$S_C = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$$

$$S_C(x) = \frac{(30-x)^2}{4\pi}$$

Deste modo, temos para cada um dos polígonos

1. triângulo equilátero

   A área do triângulo equilátero regular com perímetro igual a x é dada por

$$S_T(x) = \frac{\sqrt{3}\left(\frac{x}{3}\right)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}x^2}{36}.$$

   Dessa forma é possível encontrar a expressão que fornece a soma das áreas delimitadas pelo triângulo e pela circunferência

$$(S_C + S_T)(x) = \frac{(30-x)^2}{4\pi} + \frac{(\sqrt{3}x^3)}{36} = \frac{(900 - 60x + x^2}{4\pi} + \frac{(\sqrt{3}x^3)}{36}$$

$$(S_C + S_T)(x) = \frac{x^2(9+\pi\sqrt{3}) - 540x + 8100}{36\pi}$$

   Utilizando aproximações para os valores irracionais presentes na equação, $\sqrt{3} = 1,73$ e $\pi = 3,14$, obtemos a seguinte expressão

$$(S_C + S_T)(x) \approx 0,13x^2 - 4,78x + 71,65.$$

   Podemos observar que a expressão encontrada é uma função na variável x, $0 \leq x \leq 30$. A variação de x neste intervalo representa o comprimento destinado para a construção do triângulo e, por isso, não pode ser negativo e também não pode exceder 30 cm que é o tamanho original do fio. Deste modo, o gráfico da função $(S_C + S_T)(x)$ é

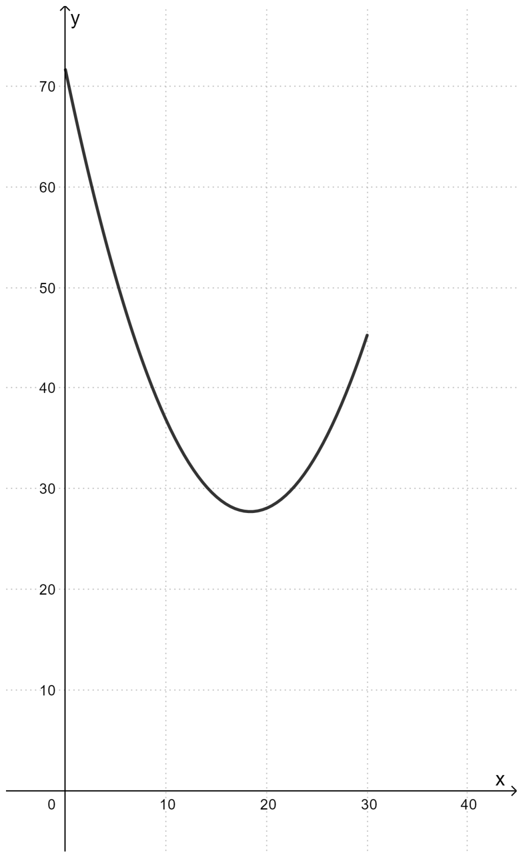


Figura 4.28: Gráfico da função $(S_C + S_T)(x)$

Fonte: O autor.

2. quadrado

Sabendo que a área delimitada pelo quadrado com perímetro igual a x é a dada por

$$S_Q(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16},$$

podemos encontrar a expressão que fornece a soma das áreas delimitadas pelo quadrado e pela circunferência

$$(S_C + S_Q)(x) = \frac{(30 - x)^2}{4\pi} + \frac{x^2}{16}$$

$$(S_C + S_Q)(x) = \frac{(900 - 60x + x^2}{4\pi} + \frac{x^2}{16}$$

$$(S_C + S_Q)(x) = \frac{(x^2(4 + \pi) - 240x + 3600}{16\pi}$$

Utilizando aproximações para os valores irracionais presentes na equação, $\pi = 3,14$, obtemos a seguinte expressão

$$(S_C + S_Q)(x) \approx 0,14x^2 - 4,78x + 71,65.$$

Observamos que neste caso temos uma função quadrática na variável x, para $0 \leq x \leq 30$.

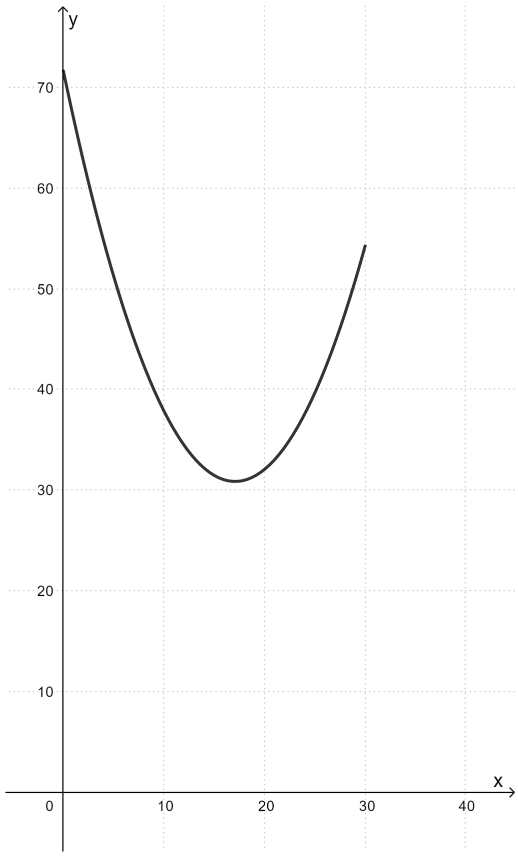


Figura 4.29: Gráfico da função $(S_C + S_Q)(x)$

Fonte: O autor.

3. hexágono regular

Sabendo que a área delimitada pelo quadrado com perímetro igual a x é a dada por

$$S_H(x) = \frac{6\left(\sqrt{3}\left(\frac{x}{6}\right)^2\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}x^2}{24},$$

conseguimos calcular a expressão que fornece a soma das áreas delimitadas pelo quadrado e pela circunferência

$$(S_C + S_H)(x) = \frac{(30-x)^2}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$(S_C + S_H)(x) = \frac{(900-60x+x^2)}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$(S_C + S_H)(x) = \frac{(x^2(6+\pi\sqrt{3}) - 360x + 5400}{24\pi}$$

Utilizando aproximações para os valores irracionais presentes na equação, $\sqrt{3} = 1,73$ e $\pi = 3,14$, obtemos a seguinte expressão

$$(S_C + S_H)(x) \approx 0,15x^2 - 4,78x + 71,65.$$

Do mesmo modo, temos uma função quadrática na variável x, para $0 \leq x \leq 30$. Deste modo, o gráfico da função utilizando aproximações para os valores irracionais presentes na equação, $\sqrt{3} = 1,73$ e $\pi = 3,14$,

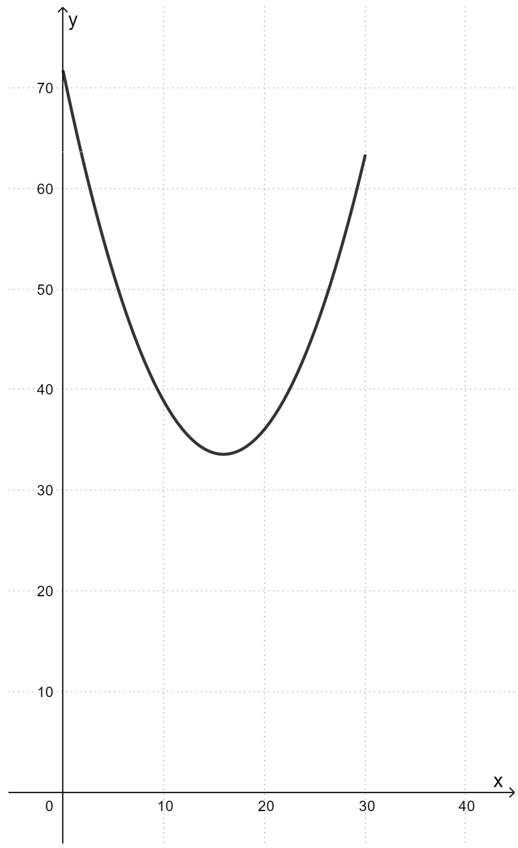


Figura 4.30: Gráfico da função $(S_C + S_H)(x)$

Fonte: O autor.

As funções obtidas são quadráticas, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, e os seus gráficos são parábolas com concavidade para cima, ou seja, o vértice determina um mínimo da função. Portanto, máximo delas ocorrerá nas extremidades do domínio e só poderemos determinar o máximo dessas funções pois este domínio é limitado e fechado.

Com a função encontrada, será pedido para que os alunos esbocem seu gráfico em um eixo cartesiano, anexo da Folha do Aluno. Com base neste gráfico, eles devem responder

(a) qual o máximo da função obtida?

(b) para este valor de máximo, o que acontece com as figuras geométricas construídas?

Uma vez que usamos x para denotar o comprimento do fio destinado para a construção do polígono regular, podemos observar pelas figuras 5, 6 e 7 que o valor x para o qual obtemos a soma máxima das áreas é zero. Deste modo, obtemos a área máxima quando utilizamos todo o fio para a construção da circunferência.

Encerramento

No momento em que todos os grupos concluírem, antes de discutir o resultado de cada grupo, proponha a seguinte pergunta:

Se vocês fossem construir duas circunferências com um fio de 30 cm de comprimento, como vocês o cortariam para que a soma da área delimitada pelas duas partes seja máxima?

Seguindo um raciocínio análogo, encontramos a expressão para a função da soma da área das duas circunferências, C_1 e C_2

$$S_{C_1} + S_{C_2} = \frac{(30-x)^2}{4\pi} + \frac{x^2}{4\pi}$$

$$S_{C_1} + S_{C_2} = 0,16x^2 - 4,78x + 71,65.$$

Então, desenhe o gráfico dessa função na lousa, chamando atenção para seu domínio que deve ser respeitado, assim como fizemos nas outras funçõe, $0 \leq x \leq 30$.

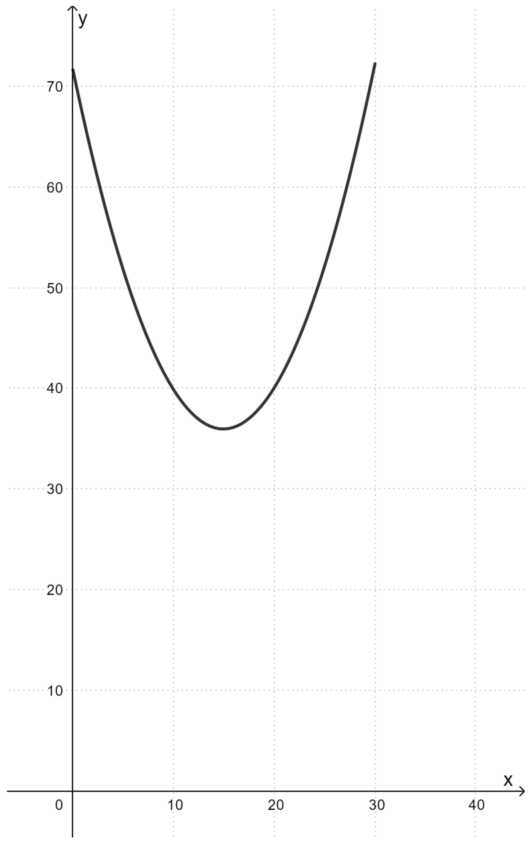


Figura 4.31: Gráfico da função $S_{C_1} + S_{C_2}(x)$

Fonte: O autor.

Depois, mostre que existem dois valores de x para os quais obtemos soma máxima: $x = 30$ cm e $x = 0$, ou seja, a soma das áreas delimitadas pela figura é máxima quando não cortamos o fio e construímos apenas uma circunferência.

Quando terminar a análise do gráfico anterior, peça para que os alunos verifiquem as contas e o gráfico feito envolvendo a área delimitada pelos polígonos regulares. A seguir, promova um discussão com a classe retomando as seguintes perguntas:

(a) Qual é máximo da função obtida?

(b) Para qual valor de x obtemos a soma máxima? Para esse valor, o que acontece com as figuras geométricas construídas?

Com base na resposta dos alunos, observe que a soma máxima obtida, independentemente da função encontrada, é a mesma. Como anteriormente, ela acontece quando não cortamos o fio e construímos apenas a circunferência.

Escreva na lousa um exemplo de cada uma das expressões das funções da soma das áreas delimitadas por cada um dos polígonos regulares e da circunferência. O exemplo que apresentamos usa x para denotar o comprimento do fio destinado para a construção do polígono regular. Novamente, ressalte a importância do domínio das funções, que é o mesmo para todas, e desenhe todos os gráficos na lousa no mesmo eixo cartesiano que desenhou o gráfico anterior.

Por fim, fixando um valor de x, é interessante mostrar para os alunos que a soma das áreas delimitadas aumenta à medida que aumenta o número de lados do polígono regular, sendo que a área delimitada pela circunferência construída é a mesma para todas as somas, já que o valor de x é fixado. Com isso, podemos concluir que:

Quanto maior for o número de lados dos polígonos regulares construídos com o mesmo perímetro, maior será a área que eles delimitam.

Esse resultado está relacionado com o teorema isoperimétrico: dentre todas as curvas fechadas de mesmo perímetro, a circunferência é a que delimita a maior área. Esse resultado não será demonstrado, pois envolve uma série de sutilezas que demandam um domínio matemático muito maior do que o esperado no Ensino Médio. Porém, atividades como as que foram propostas neste experimento, podem sensibilizar os alunos em relação a essa questão.

4.5 Medindo o alcance

Neste experimento, buscamos uma forma alternativa para introduzir as Definições 2.1, 2.3 e 2.5, e vamos perceber que o alcance e o tempo são relações que dependem da altura da rampa.

Dividimos o experimento em duas partes, a Parte I tem foco na relação altura $\times$ alcance, após o carrinho descer a rampa em relação a altura que se encontra do chão e a Parte II tem foco na relação altura $\times$ tempo que o carrinho leva para descer essa rampa.

Observação 4.3. Em pareceria com o professor da disciplina de física poderá ser abordado os temas: aceleração, velocidade, movimento uniforme e movimento uniformemente variado cujos gráficos são representações de funções afins e funções quadráticas, além disso com a parceria pode-se abordar a expressão analítica das funções.

Conteúdos

Relação e representação de relações.

Objetivos

- estudar relações
- definir par ordenado e plano cartesiano;
- representar as relações altura $\times$ alcance e altura $\times$ tempo.

Duração

Uma aula de 50 minutos.

Material

- um carrinho de brinquedo por grupo;
- uma rampa por grupo (pode ser feita com papelão ou isopor);
- blocos, livros ou outro material para elevar a rampa;

- uma régua (ou trena) por grupo;
- um cronômetro por grupo (pode ser utilizado o cronômetro do smartphone);
- folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Figura 4.32: Medindo o alcance: materiais

Fonte: O autor.

Observação 4.4. Se o experimento for realizado sobre uma superfície que gerará grande atrito como carpete ou tapete, utilizar bolinhas de gude no lugar de carrinhos.

Procedimentos

- trabalhar em grupos de três ou quatro alunos;
- montar a rampa, colocando-a inclinada;
- medir a altura da rampa (x);
- soltar o carrinho de cima da rampa;
- medir o alcance do carrinho (y), a partir do final da rampa;
- medir o tempo que o carrinho levou para descer a rampa (y), com o auxílio do cronômetro, o cronômetro deve ser pausado no momento em que o carrinho sai completamente da rampa;

- anotar numa tabela os valores de x e y correspondentes;
- repetir algumas vezes este procedimento e obter a média aritmética simples, com valores diferentes de x, sugerimos de quatro a seis repetições para cada valor de x;
- construir, na folha de papel milimetrado, os gráficos (altura da rampa $\times$ alcance e altura $\times$ tempo) a partir dos valores obtidos para x e y.

Figura 4.33: Medindo o alcance: rampa

Fonte: O autor.

Coleta de dados

Como o experimento é em grupo, sugerimos que os registros das Partes I e II sejam realizados simultaneamente.

Apresentamos nas Tabelas 4.5 e 4.6 o experimento que realizamos, utilizando uma rampa de 47 cm. Realizamos seis coletas de dados para cada altura trabalhada, com objetivo de diminuir a margem de erro. As Tabelas 4.5 e 4.6 mostram apenas a média a aritmética desses valores.

Altura da rampa (cm) - (x)	Alcance (m) - (y)	xRy
4	0,51	(4; 0,51)
6	1,35	(6; 1,35)
9	2,24	(9; 2,24)
13	2,67	(13; 2,67)
14	2,69	(14; 2,69)
17,5	3,01	(17,5; 3,01)

Fonte: O autor.

Tabela 4.5: Relação: altura × alcance

Altura da rampa (cm) - (x)	Tempo decorrido (s) - (y)	xRy
4	0,88	(4; 0,88)
6	0,76	(6; 0,76)
9	0,54	(9; 0,54)
13	0,22	(13; 0,22)
14	0,20	(14; 0,20)
17,5	0,09	(17,5; 0,09)

Fonte: O autor.

Tabela 4.6: Relação: altura × tempo

Observação 4.5. Quanto maior a medida da rampa ficará mais fácil para os alunos cronometrarem o tempo.

Encerramento

A expressão analítica deste experimento não será deduzida uma vez que exige maiores conhecimentos de Física, o que foge aos nossos objetivos. Pretendemos apenas mostrar que existe uma relação funcional entre as variáveis envolvidas no problema.

Faça na lousa a representação cartesiana das relações altura × alcance e altura × tempo com as informações obtidas dos grupos. Mostre também a representação, dos dados de um grupo, através do diagrama sagital e enfatize que esta representação pode ser feita para um número finito de elementos das relações. Além disso, mostre que se fosse tomar todos os resultados, das relações, do experimento por grupo a representação através do diagrama sagital seria inviável.

4.6 Olhando através de tubos

Este experimento é composto de duas partes, na Parte I iremos perceber que a medida da imagem visualizada é função da distância que o observador se encontra da parede, sendo distância a variável independente e a medida da imagem a variável dependente, e na Parte II iremos perceber que a medida da imagem visualizada é função do comprimento do tubo, mantendo fixa sua distância da parede.

Conteúdos

Função afim.

Objetivos

- estudar função afim;
- estudar as propriedades da função afim;
- representar a função afim no plano cartesiano.

Duração

Duas aulas de 50 minutos.

Material

Para a Parte I serão necessários:

- cilindros ocos de tamanhos diferentes e mesmo diâmetro, um por grupo;
- trenas, duas por grupo;
- folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Para a Parte II serão necessários:

- três cilindros ocos de comprimentos diferentes e mesmo diâmetro por grupo;

- trenas, uma por grupo;
- folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Sugestões: se possível utilize canos de policloreto de vinila (PVC), especifique o comprimento de cada cano e solicite que os alunos tragam de casa, poderá ser utilizado ainda rolos de papel e tubos feitos com cartolina.

Procedimentos

Oriente os grupos para que na Parte I do experimento:

- fixem uma trena na parede;
- posicionem-se a uma distância x da parede e visualizar a imagem na parede y;
- anotem os valores de x e y;
- repitam o procedimento para diferentes valores de x;
- construam, na folha de papel milimetrado, a representação cartesiana da relação entre x e y;
- deduzam uma relação entre x e y, a partir da representação cartesiana.

Para a Parte II do experimento oriente os alunos para que:

- meçam o comprimento dos três tubos x;
- fixem uma trena na parede;
- posicionem-se a uma distância fixa da parede e visualizem a imagem;
- anotem os valores de x e y;
- repitam o procedimento para cada tubo;
- construam a representação cartesiana da relação entre x e y;
- deduzam uma relação entre x e y, a partir da representação cartesiana.

Coleta de dados

Estimule seus alunos com o seguintes questionamentos a partir da relação que eles obtiveram:

1. se dobrarmos a distância que estamos da parede, dobra o tamanho da imagem visualizada?

2. se dobrarmos o tamanho do tubo, a imagem visualizada fica reduzida a sua metade?

As Tabelas 4.7 e 4.8 mostram a coleta de dados que realizamos.

Distância da parede (cm) - (x)	Medida da imagem visualizada (cm) - (y)
40	9
70	15
100	20,5
130	25,5
160	32
190	40
220	45
250	52
280	58,5

Fonte: O autor.

Tabela 4.7: Relação: distância da parede × medida da imagem

Comprimento do tubo (cm) - (x)	Medida da imagem visualizada (cm) - (y)
5	97
10	52
15	36,5
20	30
25	24
30	18
35	17,5
40	14,5
45	12,5
50	12

Fonte: O autor.

Tabela 4.8: Relação: comprimento do tubo × medida da imagem

Encerramento

Depois da coleta de dados, sugerimos para a Parte I a construção de um gráfico, na lousa, com os dados obtidos pelos alunos. Mostre-os que o esboço do gráfico aproximava-se de uma reta. Então, podemos obter a relação abaixo, através da equação da reta que passa por dois pontos

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$y - 18 = \frac{12 - 18}{50 - 30} \cdot (x - 30)$$

$$y - 18 = -\frac{3}{10} \cdot (x - 30)$$

$$y = -0,3x + 27.$$

Deduziremos agora a equação a partir da representação geométrica dada pela Figura 4.34.

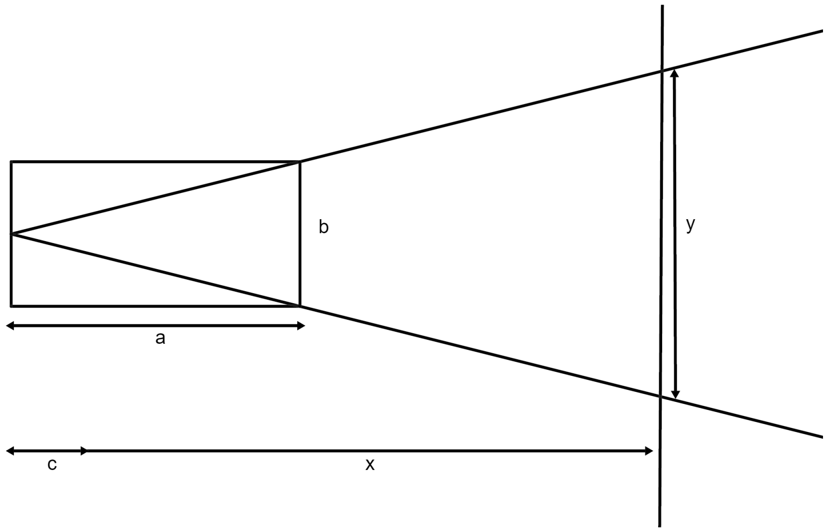


Figura 4.34: Representação geométrica da Parte I

Fonte: O autor.

Observando a Figura 4.34 temos que:

- x é a distância que você está da parede, medida a partir da ponta de seus pés;
- y é a medida da imagem que você enxerga na parede;
- a é a medida do comprimento do tubo;
- b é a medida do diâmetro do tubo;
- c é a medida do que falta do tubo, que se encontra antes da ponta de seus pés.

Além disso, notamos que há, na Figura 4.34, dois triângulos semelhantes: um deles de altura a e base b, compreendido dentro do tubo, e outro de altura $x + c$ e base y, que se prolonga até a parede. Então, se considerarmos a semelhança dos dois triângulos, temos a seguinte proporção:

$$\frac{y}{b} = \frac{x+c}{a}$$

$$y = \frac{(x+c)\cdot b}{a}$$

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{bc}{a}.$$

Como sabemos que "a", "b" e "c" são valores constantes, podemos considerar $\frac{b}{a} = m$ e $\frac{cb}{a} = n$. Daí, temos que

$$y = mx + n.$$

Como podemos perceber, encontramos uma equação de reta tanto no experimento quanto na dedução geométrica. Calcularemos, a partir da equação final, as medidas do nosso tubo.

Para a Parte II sugerimos repetir a representação cartesiana na lousa com os dados obtidos pelos alunos além de deduzir a equação a partir da representação geométrica dada pela Figura 4.35.

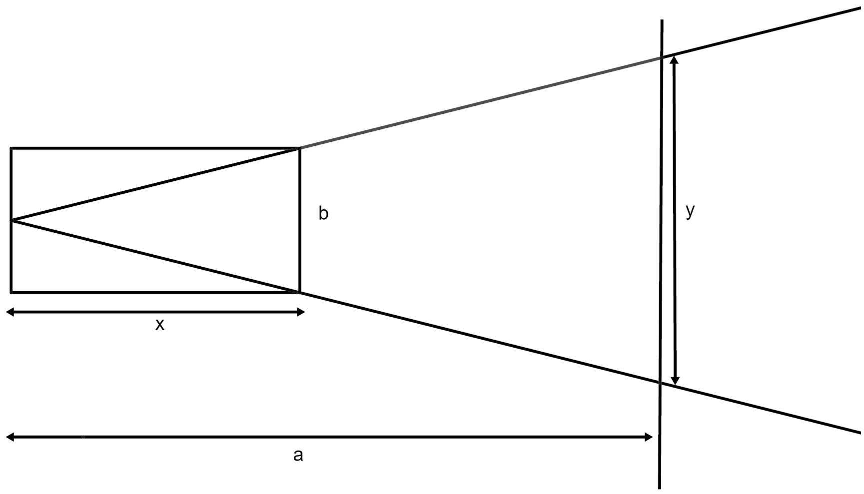


Figura 4.35: Representação geométrica da Parte II

Fonte: O autor.

Observando a Figura 4.35, temos que:

- x é a medida do comprimento do tubo
- y é a medida da imagem que você enxerga na parede
- a é a medida da distância do início do tubo até a parede
- b é a medida do diâmetro do tubo

Observamos ainda que há, na figura, dois triângulos semelhantes: um deles de altura x e base b, compreendido dentro do tubo, e outro de altura a e base y, que se prolonga até a parede. Então, se considerarmos a semelhança dos dois triângulos, temos a seguinte proporção:

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{x}$$

$$y = \frac{ab}{x}$$

Como sabemos que a e b são valores constantes, podemos considerar $ab = c$. Daí, temos que:

$$y = \frac{c}{x}$$

Esta é a equação de uma hipérbole, ou seja, uma relação inversamente proporcional. Se o gráfico que seus alunos encontraram nesta parte for uma hipérbole, o objetivo foi alcançado. Comente que a hipérbole é uma função e fale de sua propriedades.

Indicamos a leitura de [8] para aprofundar a abordagem de hipérbole juntamente com seus alunos.

4.7 Nível de água

O experimento envolve o nível de água em dois tipos de copo, sendo um copo de forma cilíndrica e outro com forma de cone.

Consideraremos o nível da água no copo como função do número de bolinhas de gude que colocamos dentro do copo, por este fato consideraremos o número de bolinhas como a variável independente e o nível de água como variável dependente.

Conteúdos

Funções afim e polinomial, gráficos.

Objetivos

- estudar funções afim e polinomial;
- estudar as propriedades das funções afim e polinomial;
- representar a função afim no plano cartesiano.

Duração

Duas aulas de 50 minutos.

Material

- um copo cilíndrico por grupo;
- um copo em formato de cone por grupo;
- bolinhas de gude;
- uma régua por grupo;
- folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Procedimentos

- trabalhar em grupos de dois ou três;
- colocar água nos dois copos até atingir uma altura de 6cm;
- coloque as bolinhas de gude no copo com água (5 bolinhas de cada vez) e anote numa tabela o nível que está a água;
- construir, na folha de papel milimetrado, a representação cartesiana da relação número de bolinhas $\times$ nível da água a partir dos valores obtidos.

Coleta de dados

Para o experimento com o copo cilíndrico estimule os alunos com os seguintes questionamentos:

1. encontre uma possível equação para a situação trabalhada. A partir dessa equação, responda
   (a) a medida que acrescentamos bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo?
   (b) quantas bolinhas de gude deve-se colocar para que a água fique no limite da borda do copo?
   (c) que altura teremos se colocarmos somente 1 bolinha no copo? E se colocarmos 9 bolinhas?
   (d) como você explica o fato da representação cartesiana ser uma reta?
   (e) mudando o tamanho das bolinhas e/ou o raio do copo, o que muda na expressão da função?
2. deduza uma relação entre x e y a partir da situação geométrica.

A Tabela 4.9 mostra o experimento que realizamos.

N.º de bolinhas (x)	Nível d'água (cm) - (y)
5	6,35
10	6,7
15	7,15
20	7,55

Fonte: O autor.

Tabela 4.9: Copo cilíndrico: n.º de bolinhas × nível d'água

Para o experimento com o copo cônico estimule os alunos com os seguintes questionamentos:

1. encontre uma possível equação para a situação trabalhada. A partir dessa equação, responda
   (a) por que o gráfico desse experimento não deu uma reta?
   (b) qual o comportamento desta função quando colocamos cada vez mais bolinhas no copo?
   (c) você seria capaz de explicar a diferença entre o comportamento dos dois copos (cilíndrico e cônico)?
2. deduza uma relação entre x e y a partir da situação geométrica.

A Tabela 4.10 mostra o experimento que realizamos.

N.º de bolinhas (x)	Nível d'água (cm) - (y)
5	6,75
10	7,20
15	7,50
20	7,90

Fonte: O autor.

Tabela 4.10: Copo cônico: n.º de bolinhas × nível d'água

Encerramento

Depois da coleta de dados, construa um gráfico do experimento com o copo cilíndrico com as informações de um dos grupos. Faça com que o esboço do gráfico se aproxime de uma reta, então obtenha a relação abaixo, através da equação da reta que passa por dois pontos

$$(y - y_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y - 6,35 = \frac{6,7 - 6,35}{10 - 5} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y - 6,35 = 0,07 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = 0,07x + 6,28$$

Posteriormente faça a dedução da equação a partir da situação geométrica.

Para resolver este problema, temos que considerar dois volumes importantes: o volume de água inicial do copo, que pode ser obtido, uma vez que temos todas as informações necessárias para calculá-lo; e o volume de cada bolinha de gude, que também podemos obter facilmente se medirmos o seu raio.

- volume inicial de água = volume do cilindro (copo) de altura 6 cm, ou seja, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = 6 \cdot \pi \cdot R^2$, onde R é o raio do copo.
- volume de cada bolinha de gude = volume da esfera = $4 \cdot \pi \cdot \frac{r^3}{3}$ onde r o raio da bolinha de gude

Entretanto, não colocamos apenas 1 bolinha de cada vez no copo, colocamos 5 bolinhas. Então, devemos multiplicar o volume de uma bolinha por 5: $20 \cdot \pi \cdot \frac{r^3}{3}$.

Como a variável y é a altura do nível que a água atinge de acordo com o número de bolinhas que colocamos no copo, ela aumenta conforme aumenta o volume total do copo (volume inicial de água + volume de bolinhas colocadas). Então temos o seguinte

volume total do copo = volume inicial de água + volume das bolinhas colocadas,

ou seja,

$$\pi \cdot R^2 \cdot y = 20 \cdot \pi \cdot \frac{r^3}{3} \cdot x + 6 \cdot \pi \cdot R^2,$$

logo,

$$y = 20 \cdot \frac{r^3}{3 \cdot R^2} \cdot x + \frac{6 \cdot R^2}{R^2}.$$

Como $20 \cdot \dfrac{r^3}{3R^2}$ é um número constante, podemos substituí-lo por a, obtendo assim

$$y = ax + 6,$$

esta é a equação de uma reta, ou seja, a função do nosso experimento é linear.

Para o experimento com o copo cônico deduza a equação a partir da situação geométrica.

Para resolver este problema, temos que considerar dois volumes importantes: o volume de água inicial do copo, que pode ser obtido, uma vez que temos todas as informações necessárias para calculá-lo; e o volume de cada bolinha de gude, que também podemos obter facilmente se medirmos o seu raio. Vamos considerar o copo como um cone perfeito.

- volume inicial de água = volume do cone (copo) de altura 6 cm, ou seja, $V = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} = 2 \cdot \pi \cdot R^2$, onde R é o raio do copo.
- volume de cada bolinha de gude = volume da esfera = $4 \cdot \pi \cdot \dfrac{r^3}{3}$, onde r é o raio da bolinha de gude.

Entretanto, não colocamos apenas 1 bolinha de cada vez no copo, colocamos 5 bolinhas. Então, devemos multiplicar o volume de uma bolinha por 5: $20 \cdot \pi \cdot \dfrac{r^3}{3}$.

Precisamos ainda encontrar uma relação que represente o raio do cone em função da altura que a água se encontra em determinado momento, porque temos um copo cônico, e a medida que o nível de água sobe, seu raio aumenta. Resolveremos isso através da semelhança de triângulos da secção do cone.

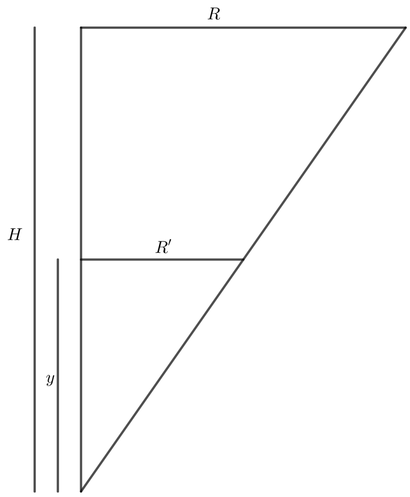


Figura 4.36: Copo cônico seccionado

Fonte: O autor.

$$\frac{H}{R} = \frac{y}{R'} \Leftrightarrow$$
$$R' = \frac{R \cdot y}{H}$$

Como a variável y é a altura do nível que água atinge de acordo com o número de bolinhas que colocamos no copo, ela aumenta conforme aumenta o volume total do copo (volume inicial de água + volume de bolinhas colocadas). Então, temos o seguinte,

volume total do copo = volume inicial de água + volume das bolinhas colocadas,

ou seja,

$$\pi \cdot R'^2 \cdot y = 20 \cdot \pi \cdot \frac{r^3}{3} \cdot x + 2 \cdot \pi \cdot R^2 \Leftrightarrow$$
$$3 \cdot \left(\frac{R \cdot y}{H}\right)^2 \cdot y = 20 \cdot r^3 \cdot x + 6 \cdot R^2 \Leftrightarrow$$
$$3 \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot y^3 = 20 \cdot r^3 \cdot x + 6 \cdot R^2 \Leftrightarrow$$
$$y^3 = \frac{20 \cdot r^3 \cdot H^2}{3 \cdot R^2} \cdot x + \frac{6 \cdot R^2 \cdot H^2}{3 \cdot R^2} \Leftrightarrow$$
$$y^3 = \frac{20 \cdot r^3 \cdot H^2}{3 \cdot R^2} \cdot x + 2 \cdot H^2 \Leftrightarrow$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot r^3 \cdot H^2}{3 \cdot R^2} \cdot x + 2 \cdot H^2}.$$

Substituindo os valores constantes por a e b, temos

$$y = \sqrt[3]{ax + b}$$

Enfim, como acabamos de deduzir, a equação do nosso experimento é uma raiz cúbica. Seu comportamento é diferente da primeira parte, quando o copo era cilíndrico, pois, neste caso, mesmo que se acrescente sempre o mesmo número de bolinhas, a variação do nível de água é cada vez menor, como mostra o gráfico abaixo.

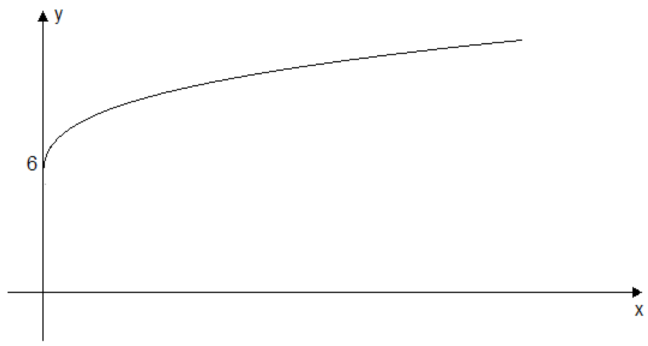


Figura 4.37: Gráfico do experimento com copo cônico

Fonte: O autor.

4.8 Retângulos

Neste parte do experimento composto de dois momentos vamos considerar diversos retângulos que possuem mesma área e posteriormente que possuem o mesmo perímetro. Então, mantendo fixa a área ou o perímetro dos retângulos, teremos que um dos lados do retângulo dependerá do outro, ou seja, um dos lados será a variável independente e o outro lado a variável dependente.

Conteúdos

Funções afim e polinomial.

Objetivos

1. construir gráficos através de dados obtidos experimentalmente.
2. determinar as funções que fornecem a área e o perímetro de um retângulo.

Duração

Duas aulas de 50 minutos.

Material

- folhas de papel quadriculado, diversas por grupo;
- uma régua por aluno;
- folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Procedimentos

Parte I

- trabalhar em grupos de dois ou três;
- construir, com as folhas de papel quadriculado, retângulos de mesma área;

- construir, com as folhas de papel quadriculado, retângulos de mesmo perímetro;
- anotar numa tabela os valores dos lados dos retângulos construídos(x e y);
- construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico (lado$_1$ do retângulo $\times$ lado$_2$ do retângulo) a partir dos valores de x e y.

Coleta de dados

Estimule seus alunos com os seguintes tópicos:

1. encontre uma possível equação para a situação trabalhada, a partir dos dados obtidos no experimento.
2. deduza a equação que relaciona x e y a partir da situação geométrica.

As Tabela 4.11 mostra a relação de alguns retângulos de área 36 e a Tabela 4.12 mostra a relação de alguns retângulos de perímetro 20.

Lado$_1$ do retângulo - (x)	Lado$_2$ do retângulo - (y)
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6

Fonte: O autor.

Tabela 4.11: Área: Lado$_1$ do retângulo $\times$ Lado$_2$ do retângulo

Lado$_1$ do retângulo - (x)	Lado$_2$ do retângulo - (y)
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5

Fonte: O autor.

Tabela 4.12: Perímetro: Lado$_1$ do retângulo $\times$ Lado$_2$ do retângulo

Encerramento

Após os alunos fazerem suas conjecturas faça na lousa detalhadamente o passo-a-passo para encontrar as expressões analíticas desse experimento.

Inicie com a área do retângulo.

$$S = x \cdot y$$

Como, em nosso experimento, a área do retângulo é fixa, então a equação de y em função de x é

$$y = \frac{S}{x}$$

Observamos que se dobrarmos o valor de x, reduziremos y à metade, se triplicarmos o valor de x, reduziremos y à terça parte, se quadruplicarmos o valor de x, reduziremos y à quarta parte, e assim por diante. Relações que apresentam essa característica são chamadas de “relações inversamente proporcionais”.

O gráfico que representa essa relação está esboçado na Figura 4.38.

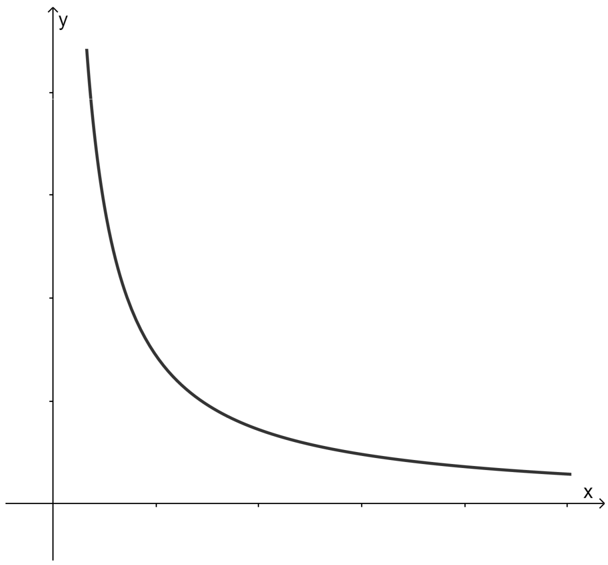


Figura 4.38: Grafico $y = \dfrac{S}{x}$

Fonte: O autor.

Este gráfico recebe o nome de hipérbole e para aprofundar a abordagem dessa função e seu respectivo gráfio sugerimos a leitura de [8].

Posteriormente faça na lousa o passo-a-passo para encontrar o perímetro do retângulo.

$$P = 2x + 2y$$

Como, em nosso experimento,o perímetro do retângulo é fixo, então a equação de$y$ em função de x é:

$$2y = P - 2x$$

$$y = -x + \frac{P}{2}$$

O gráfico que representa essa equação está esboçado na Figura 4.39

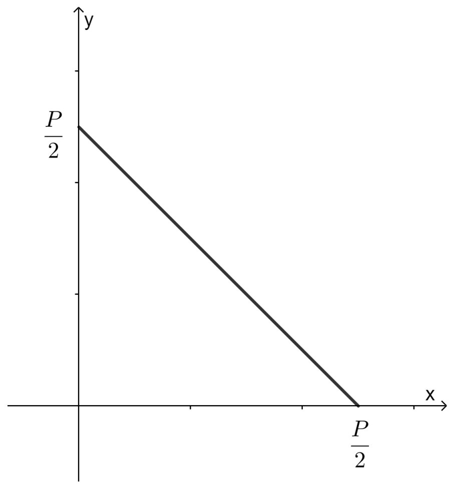


Figura 4.39: Grafico $y = -x\dfrac{P}{2}$

Fonte: O autor.

Capítulo 5

Considerações finais

Este trabalho desenvolveu um estudo acerca do processo de ensino aprendizagem voltado ao ensino de funções.

Durante nossas pesquisas observamos que os baixos resultados não estão presentes somente quando nos referimos ao estudo de funções, os resultados SAEP mostram que os alunos apresentam dificuldades com outras áreas da matemática como, por exemplo, em resolver problemas que envolvam porcentagem, reconhecer o seno, o cosseno e a tangente como razões entre os lados de um triângulo retângulo, geometria analítica e geometria espacial.

Através da metodologia empregada, ou seja, a manipulação de materiais pode-se constatar que estes são fontes ricas para o ensino de funções, pois as atividades são atividades de cunho exploratório e além de nortear o aprendizado do aluno, faz com que o conteúdo que o professor está apresentando tenha significado, mas além disso tenha sentido.

No geral, o objetivo deste trabalho foi alcançado, pois buscamos estimular através de uma proposta distinta tornar as aulas mais instigantes tanto para os estudantes quanto para o professor.

Entretanto, ficou evidente que o professor ao preparar uma aula com materiais manipulativos terá o papel de mediador das atividades, motivando os alunos a discussão, a troca de ideias e como consequência contribuindo para que os alunos construam o próprio raciocínio e conhecimento matemático.

Dessa forma, as atividades propostas podem ser utilizadas por professores atuantes no ensino fundamental e principalmente no ensino médio, e que essas influenciem os professores de modo que possam formular, desenvolver e idealizar suas próprias atividade.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para não só para o ensino de funções, mas que seja instrumento motivador para o uso de atividades e/ou experimentos com materiais manipulativos como uma ferramenta alternativa e motivadora.

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR FILHO, Edgard. *Relações e funções*. São Paulo: Nobel, 1970.

[2] ÁVILA, Geraldo. *Introdução às funções e derivadas*. São Paulo: Atual, 1994.

[3] AZEVEDO, Rodrigo. A história da Educação no Brasil: uma longa jornada rumo à universalização. *Gazeta do Povo* [on-line]. Curitiba. 11 mar. 2018. Caderno de Educação. Disponível em: <https://www.gazetadopovo.com.br/educacao/a-historia-da-educacao-no-brasil-uma-longa-jornada-rumo-a-universalizacao-84npcihyra8yzs2j8nnqn8d91/>. Acesso em: 13 mai. 2019.

[4] BARICHELLO, Leonardo. ALUANI, Thaisa. *Polígonos e circunferências*. Disponível em<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1025>. Acesso em: 21 nov. 2018.

[5] BOTELHO, Leila., REZENDE, Wanderley Moura. Um breve histórico do conceito de função. IN: *Caderno Dá-Licença*. Niterói: UFF. v. 6. a. 9. p. 64 - 75. dez. 2007. Disponível em: <http://www.dalicenca.uff.br/index.php/caderno-da-licenca1/caderno-da-licenca/10-volume-6>. Acesso em: 20 mai. 2019.

[6] BRASIL. Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 23 dez. 1996b.

[7] CAMPITELI, Heliana Cioccia. CAMPITELI, Vicente Coney. *Funções*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

[8] DIAS, Claúdio Carlos. DANTAS, Neuza Maria. *A hipérbole*. Natal, RN: EDUFRN, 2006. Disponível em: <http://professor.luzerna.ifc.edu.br/daniel-ecco/wp-content/uploads/sites/42/2017/10/Aula-6-Geo.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2019.

[9] EVES, Howard. *Introdução a história da matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

[10] GERÔNIMO, João Roberto. FRANCO, Valdeni Soliani. *Fundamentos de matemática: uma introdução à lógica matemática, teoria dos números, relações e funções*. Maringá: Eduem, 2008.

[11] GRAVINA, Maria Alice. PEIXOTO, Luciana. NOTARE, Márcia Rodrigues. *Funções e Gráficos: um curso introdutório*. Instituto de Matemática - UFRGS. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/cursos/trab2/fun_graf.htm#mod1>. Acesso em: 17 nov. 2018.

[12] GUIMARÃES, Maria Helena. Avaliação externa dever ser usada para melhorar o ensino. *Revista Nova Escola*. São Paulo, v. 20, n. 184, p. 22-24, ago. 2005. Entrevista concedida a Paloa Gentile.

[13] HALMOS, Paul R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. São Paulo: Polígono, 1973.

[14] HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. Avaliação mediadora: uma relação dialógica na construção do conhecimento. *Série Ideias*. São Paulo: FDE, n.º 22, 1994. p. 51-59. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/int_a.php?t=008>. Acesso em: 16 fev. 2019.

[15] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar: geometria analítica*. São Paulo: Atual, 1993.

[16] JANUARIO, Gilberto. *Materiais manipuláveis: mediadores na (re)construção de significados matemáticos*. Monografia (Especialização). 89 f. (Educação Matemática) – Universidade de Guarulhos, Guarulhos: 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Januario(1).pdf>. Acesso em: 17 mai. 2019.

[17] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[18] LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. IN: __. (Org.), *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2012. p. 3-37.

[19] LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. São Paulo: Cortez, 2006.

[20] MARQUES, Paulo. *Tranformações Afins na Reta I.* Feira de Santana: 1995. Dísponível em: <http://www.paulomarques.com.br/arq8-1.htm>. Acesso em: 11 ago. 2019.

[21] MARTINS, Lourival Pereira. Silva, Roberto Carlos. Melo, Marcelo de. et al.*Dinamômetro com elástico.* Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1006>. Acesso em: 21 nov. 2018.

[22] MICHAELIS. Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>. Acesso em: 13 mai. 2019.

[23] OLIVEIRA, Samuel Rocha de. ALUANI, Thaisa. *Caixa de papel.* Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367>. Acesso em: 21 nov. 2018.

[24] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes curriculares da educação básica de matemática.* 2008.

[25] _____. Secretaria de Estado da Educação. *SAEP - 2012.* Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 2 (jan./dez. 2012), Juiz de Fora, 2012 - Anual.

[26] _____. Secretaria de Estado da Educação. *SAEP - 2017.* Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 3 (jan./dez. 2017), Juiz de Fora, 2017 - Anual.

[27] _____. Secretaria de Estado da Educação. *SAEP - 2018.* Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 3 (jan./dez. 2018), Juiz de Fora, 2018 - Anual.

[28] PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion., Materiais manipuláveis como recursos didáticos de professores de matemática. IN: LORENZATO, Sérgio. (Org.), *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* Campinas: Autores Associados, 2012. p. 77-92.

[29] REZENDE, Eliane Quelho Frota. MARTINS, Lourival Pereira. RODRIGUES, Wilson Roberto. *Otimização da cerca.* Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1036>. Acesso em: 21 nov. 2018.

[30] RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental á reflexão. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, n. 2, p. 187-196, 2012. Disponível em:<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187/23460>. Acesso em: 17 mai. 2019.

[31] SANTOS, Rosemary Alvarenga dos., *A Importância da avaliação no processo ensino aprendizagem na disciplina de ciências.* Monografia (Especialização). 49 f. (Ensino de Ciências) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2012. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br:8080/jspui/bitstream/1/2597/1/MD_ENSCIE_III_2012_68.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2019.

[32] SILVA, Vandré Gomes da. CARVALHO, Cynthia Paes de. Uso e efeitos das avaliações externas como objeto de pesquisa. *Estudos em Avaliação Educacional*: avaliação em larga escala. São Paulo: Fundação Carlos Chagas. v. 25. n.º 59. p. 12-21, set./dez. 2014.

[33] SILVA E SOUZA, José. Educação e História da Educação no Brasil. *Educação Pública.* Rio de Janeiro: CECIERJ. v. 18. ed. 23. 27 nov. 2018. Disponível em: <https://educacaopublica.cederj.edu.br/edicoes/18/23>. Acesso em 13 mai. 2019.

[34] VALE, Isabel. *Materiais Manipuláveis.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação de Viana do Castelo - Departamento de Matemática, Ciência e Tecnologia. 2002. Disponível em: <https://www.academia.edu/6307061/Materiais_Manipul%C3%A1veis>. Acesso em: 16 mai. 2019.

[35] WERLE, Flávia Obino Corrêa. Políticas de avaliação em larga escala na educação básica: do controle de resultados à intervenção nos processos de operacionalização do ensino. *Ensaio*: Avaliação e Políticas Públicas em Educação.,

Rio de Janeiro, v. 19, n. 73, p. 769-792, out./dez. 2011. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ensaio/v19n73/03.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2019.

[36] WIEBUSCH, Eloisa Maria., Avaliação em larga escala: uma possibilidade para a melhoria da aprendizagem. In: *SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL*, 9., 2012, Caxias do Sul. *Anais...* Caxias do Sul: UCS, 2012. p. 1-13. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/1599/140>. Acesso em: 07 set. 2018.