Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Coordenação do PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

KARLA WAACK NOGUEIRA

O USO DE VÍDEOS NO AMBIENTE ESCOLAR: EXPLORANDO LINGUAGEM E LÓGICA MATEMÁTICA

Orientador:

Humberto José Bortolossi

NITERÓI

DEZEMBRO/2019

Karla Waack Nogueira

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Linguagem e Lógica Matemática

Niterói – RJ

Dezembro / 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

N778 Nogueira, Karla Waack

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Linguagem e Lógica Matemática / Karla Waack Nogueira. – Niterói: [s.n.], 2019.

94 f.

Orientador: Humberto José Bortolossi

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2019.

1. Narrativas. 2. Uso de vídeos. 3. Ensino e Aprendizagem de Matemática. I. Título.

CDD: 510.7

Karla Waack Nogueira

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Linguagem e Lógica Matemática

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Niterói – RJ

Dezembro / 2019

Dissertação de Mestrado Profissional sob o título *“O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Linguagem e Lógica Matemática”*, defendida por Karla Waack Nogueira e aprovada em 20 de Dezembro de 2019, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Anne Michelle Dysman Gomes
Doutora em Matemática pelo IMPA

Leandro Tavares da Silva
Doutor em Modelagem Computacional pelo LNCC

Patrícia Erthal de Moraes
Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação pela UFRJ

Dedico este trabalho aos meus pais, Rubem e Vânia, que foram o início da minha história e que irão fazer parte dela para sempre.

Agradecimentos

A Deus, por me dar a vida e o privilégio de pertencer a uma família que amo. Aos meus pais, Rubem e Vânia, que sempre me mostraram a importância do conhecimento, mas sobretudo da sabedoria.

Ao Professor Dr. Humberto José Bortolossi, orientador deste trabalho, pessoa e profissional por quem tenho profunda admiração.

Aos colegas do curso de mestrado, André de Carvalho Rapozo, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas, Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho e Rodrigo Pessanha da Cunha, pelas muitas manhãs de sábado em que passamos juntos moldando parte da narrativa das nossas dissertações.

Gosto de ser gente porque a história em que me faço com os outros e de cuja feitura tomo parte é um tempo de possibilidades, e não de determinismo.
Daí que insista tanto na problematização do futuro e recuse sua inexorabilidade.
(Paulo Freire)

Blanco
Me vejo no que vejo
Como entrar por meus olhos
Em um olho mais límpido
Me olha o que eu olho
É minha criação
Isto que vejo
Perceber é conceber
Águas de pensamentos
Sou a criatura do que vejo
(Marisa Monte / Octávio Paz / Haroldo de Campos)

Resumo

Nesta última década, ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes e curtas) relacionados com Matemática e Estatística. Com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Esta dissertação contribui, então, para esse projeto oferecendo dois roteiros detalhados para uso em sala de aula de vídeos relacionados com as temáticas de linguagem e lógica em Matemática: "Romanos" e "As Maravilhas da Lógica". Cada roteiro inclui, entre várias informações, indicações de objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo e, também, uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição de cada vídeo. Mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma. Nosso trabalho apresenta também alguns recortes teóricos que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática e da Estatística.

Palavras-chave: ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, uso de vídeos em sala de aula, narrativa, *storytelling*, linguagem, lógica.

Abstract

In the last decade, there has been a remarkable increase in the production of audiovisual materials (documentaries, animations, films and short films) related to Mathematics and Statistics. With the aim of potentializing the didactic scope beyond the simple exhibition, a group of professors, undergraduate, and graduate students has cataloged the available videos and elaborated support material in the format of guidelines by the Film Society of Mathematics and Statistics Project of the Fluminense Federal University. This dissertation contributes to this project by offering two detailed guidelines for classroom use of videos related to the theme of language and logic in Mathematics: “Romanos” and “The Joy of Logic”. Each guideline includes, among various information, indications of learning objectives that, in our opinion, can be achieved through the video and, also, suggestions of questions that can be worked out immediately after each video is exhibited. More than a definitive text, it is expected that the guideline serves as a starting point for the teacher to make adaptations and modifications according to the needs and characteristics of his/her class. Our work also presents some theoretical highlights that seek to provide different perspectives on the role of narrative (storytelling) in human society. The goal is to try to frame the reasons why a video (a powerful form of narrative that unites image and sound) constitutes a didactic instrument for the teaching and learning of Mathematics and Statistics.

Keywords: teaching and learning of Mathematics and Statistics, use of videos in the classroom, narrative, storytelling, language, logic.

Sumário

1 Introdução

1.1 Nossa proposta

Nesta última década ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes, curtas) relacionados com Matemática e Estatística: vídeos da TV Escola do Ministério da Educação; documentários da BBC (British Broadcasting Corporation) e PBS (Public Broadcasting Service); episódios da série "Isto é Matemática" apresentada por Rogério Martins; o canal "Numberphile" no YouTube com suporte do MSRI (Mathematical Sciences Research Institute); vídeos educacionais TED-Ed; curtas das séries "Dimensions" e "CHAOS" idealizadas e produzidas por Étienne Ghyz e colaboradores; alguns vídeos de "Os Simpsons"; apenas para mencionar alguns (Figura 1.1).

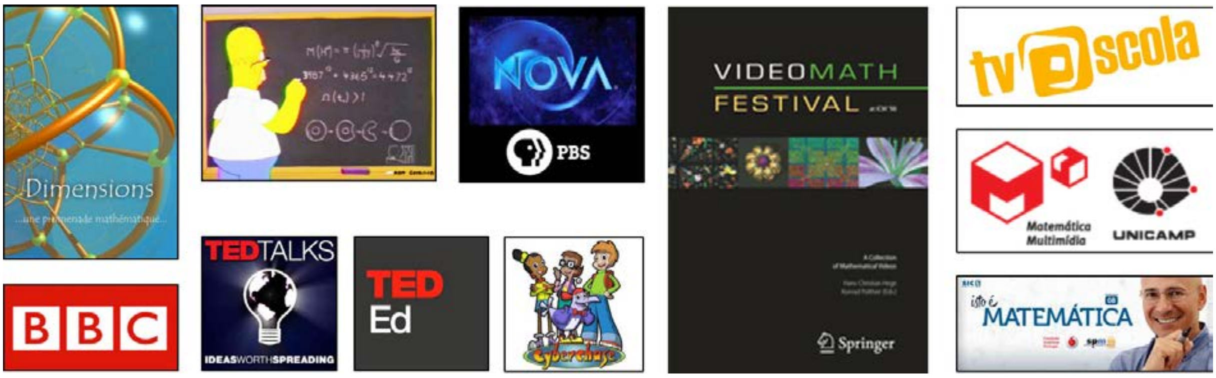


Figura 1.1: Algumas iniciativas na produção de materiais audiovisuais relacionados com Matemática e Estatística.

Nesse contexto, com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição com ênfase nos aspectos matemáticos e estatísticos, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado alguns vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Cada roteiro é dividido nas seguintes seções:

- **Ficha catalográfica**: faixa de classificação etária; idioma do áudio e das legendas; título original; gênero; duração; produtora e ano de produção; tópicos matemáticos abordados;

nível escolar sugerido; interdisciplinaridade; marcadores; competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias.

- **Imagens selecionadas**: seis imagens que permitem ao professor, visualmente, ter uma ideia do estilo do vídeo e, também, de seu conteúdo.
- **Sinopse**: uma breve descrição do conteúdo do vídeo sem *spoilers* (isto é, sem informações que poderiam estragar a apreciação do vídeo).
- **Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado**: um parágrafo indicando alguns objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo.
- **Sensibilização**: um texto e uma ou duas imagens que podem ser usadas para confeccionar um cartaz de divulgação do vídeo na escola.
- **Sugestões de questões gerais**: uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição do vídeo.
- **Sugestões de questões específicas**: uma proposta de questões que para serem respondidas, se faz necessário que trechos específicos do vídeo sejam revisitados (os tempos dos trechos são indicados no roteiro).
- **Observações para o professor**: orientações didáticas, desdobramentos, curiosidades, materiais suplementares relacionados com o vídeo.
- **Outras informações**: bibliografia, agradecimentos, créditos.

Cabe ressaltar que, mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma.

1.2 Vídeos em sala de aula

O uso de vídeos em sala de aula não é uma novidade. Já na época dos antigos videocassetes a questão era considerada[a]. Moran (1995), por exemplo, já apontava para os usos inadequados, observações estas que continuam ainda válidas nos dias de hoje com vídeos *on-line*, em DVD ou *blu-ray* e em formato *streaming*:

- **vídeo tapa-buraco**: colocar vídeo quando há um problema inesperado, como ausência do professor;
- **vídeo enrolação**: exibir um vídeo sem muita ligação com a matéria;
- **vídeo deslumbramento**: o professor que acaba de descobrir o uso do vídeo costuma empolgar-se e passar vídeo em todas as aulas, esquecendo-se outras dinâmicas por vezes

[a]Ainda que, nesta época, existisse relativamente pouco material disponível para a área de Matemática.

mais pertinentes;

- **vídeo perfeição**: existem professores que questionam todos os vídeos possíveis porque possuem falhas de informação ou defeitos estéticos; não obstante, os vídeos que apresentam conceitos problemáticos podem ainda ser usados para, junto com os alunos, descobrir e analisar os erros existentes;
- **só vídeo**: não é didaticamente satisfatório exibir o vídeo sem discuti-lo, sem integrá-lo com o assunto da aula, sem reproduzir trechos com momentos mais importantes.

Outra referência clássica da época dos videocassetes é Ferrés (1996). Neste livro, o autor:

- **propõe uma sistematização para o uso didático de vídeos:** videolição, videoapoio, videoprocesso, programa motivador, programa monoconceitual, vídeo interativo;
- **estabelece critérios para a utlização didática do vídeo:** mudança de estruturas pedagógicas, o papel do professor, a formação do professor frente a este tipo de mídia, a relação didática do vídeo com outras mídias, etc.;
- **categoriza as diversas funções do vídeo no ensino:** função formativa/videodocumento, função motivadora/videoanimação, função expressiva/criatividade e videoarte, função avaliadora/videoespelho, função investigativa, função lúdica/ vídeo como brinquedo, função metalinguística, combinação e interação das funções previamente citadas;
- **dá sugestões práticas e técnicas para a exibição do vídeo:** preparação antecipada do local, disposição dos alunos de acordo com o tamanho da tela do televisor, problemas técnicos frequentes;
- **sugere abordagens pedagógicas após a exibição do vídeo:** comunicação espontânea dos alunos, reflexão crítica, pesquisa final e recapitulação, nuvem de palavras, entrevista com um especialista, gravação de pesquisa de opinião pública, manipulação de objetos, palavras-chave, resumo objetivo, recontar a história em grupo, desenho livre, desenho em quadrinhos, escrever uma carta, comunicação em duplas, interpelação em duplas, expressão corporal, cartazes e trabalhos em grupo, fotografia do ambiente, elaboração de um dossiê, tribunal e julgamento, criação de um mural, realização de uma colagem, Phillips 66, primeira exibição muda (sem som), interrupção da exibição, exibição invertida;
- **sugere várias pautas para avaliação do vídeo sob o ponto de vista didático:** tema, objetivos, formulação didática, estrutura, roteiro didático, formulação audiovisual, imagem como valor técnico, faixa sonora como valor técnico, interação dos elementos.

Desde então, vários trabalhos sobre vídeos no contexto escolar têm sido produzidos. Para o leitor interessado, indicamos: Polster e Ross (2012), Sklar e Sklar (2012), Machado e Mendes (2013), Napolitano (2003, 2015), Muzás (2015), Pellicer (2015), Reiser (2015), Santos (2015), Bulman (2017). Indicamos também quatro páginas *WEB* especializadas na Matemática dos filmes: *Mathematics in Movies* (<http://bit.ly/2OuJOUU>) mantida por Oliver Knill, do Departamento de Matemática da Universidade de Harvard (nos EUA); *Matemáticas en El Cine y en Las Series de T.V.* (<http://bit.ly/2yPI8Aa>), mantida por José María Sorando Muzás (na Espanha); *MMDB–The Mathematical Movie Database* (<https://bit.ly/2HurRY8>) mantida por Burkard Polster (Monash University) e Marty Ross na Austrália; e *Mathematical Fiction* <https://bit.ly/1kcpcAR> mantida por Alex Kasman (College of Charleston) nos Estados Unidos.

Entre as iniciativas governamentais do uso de vídeos em sala de aula, destacamos o projeto "O Cinema Vai À Escola – O Uso da Linguagem Cinematográfica na Educação" da Fundação para o Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. De acordo com o *site* oficial (<http://bit.ly/2OnYXqT>), o projeto procura subsidiar a rede pública de ensino com materiais, equipamentos e acervos didáticos, fornecendo às escolas de Ensino Médio um conjunto de filmes de diferentes categorias e gêneros, em DVD, acompanhado de materiais de apoio à prática pedagógica. Os vídeos são principalmente produções cinematográficas do circuito comercial e os materiais de apoio incluem roteiros no formato PDF (<http://bit.ly/2F3hPMu>) e, também, vídeos tratando do universo dos vídeos (<http://bit.ly/2OorDA8>). Não obstante, observamos que, neste projeto, temas relacionados com a Matemática estão ausentes.

Por fim, registramos que o Whittier College nos Estados Unidos oferece uma disciplina de graduação, NTD 231 – *Numb3rs in Lett3rs & Fi1ms*, que explora a conexão entre a Matemática e as Artes criativas escritas/teatrais. Segundo o catálogo da instituição (<https://goo.gl/j5wtX4>), nessa disciplina, os alunos leem ficção e assitem a filmes nos quais os conceitos matemáticos fornecem a estrutura ou desempenham um papel central na peça criativa. Os alunos também estudam os tópicos matemáticos relacionados a esses trabalhos para entender melhor a intenção do autor. Detalhes da iniciativa podem ser encontrados no artigo Chabrán & Kozek (2015).

1.3 Concepção e divisão deste trabalho

Este texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 descrevemos algumas perspectivas relacionadas com o conceito de narrativa (*storytelling*) na intenção de tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os roteiros de dois vídeos (nos moldes descritos na seção anterior) são apresentados nos Capítulos 3 e 4. Experiências de uso dos vídeos e dos roteiros junto com algumas considerações finais são o tema do Capítulo 5.

Os Capítulos 1, 2 e parte do 5 foram redigidos de forma conjunta a partir de seminários realizados pelos mestrandos que trabalharam com a mesma metodologia acerca do uso didático de vídeos: André de Carvalho Rapozo, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas, Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho e Rodrigo Pessanha da Cunha. Os Capítulos 3, 4 e parte do 5 têm redação individual: mestrandos diferentes trabalharam com assuntos diferentes (Probabilidade e Estatística, Números e Medidas, Linguagem e Lógica Matemática, Fractais e Caos, etc.).

Por fim, indicamos que as respostas das questões propostas nos roteiros podem ser obtidas mediante solicitação para o e-mail <amec7a@gmail.com>.

2 Narrativas: Um Panorama

Neste capítulo, apresentamos alguns recortes que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Como aponta Gottschall (2013), *storytelling* é como gravidade: ela é esta força poderosa e abrangente que permeia nossas vidas e que acabamos por não perceber por estarmos tão habituados com ela. Vídeos (tema de nosso trabalho), quadrinhos, contos, piadas, parábolas (incluindo as religiosas), novelas, músicas, peças de teatro e *video games* são, todos, formas de narrativa que nos cercam e nos ensinam.

2.1 Narrativas e A História da Humanidade: Harari

Harari em seu livro “Sapiens: Uma Breve História da Humanidade” coloca o papel importante que a narrativa teve na evolução histórica dos seres humanos. De acordo com o autor, foi o surgimento da ficção que permitiu a cooperação humana em grande escala: um grande número de estranhos só pode cooperar de maneira eficaz se acreditar nos mesmos mitos, ou seja, histórias que existem na imaginação coletiva das pessoas. Formigas e abelhas também podem trabalhar juntas em grandes números, mas elas o fazem de uma maneira um tanto rígida, e apenas com parentes próximos. As religiões, as nações, o dinheiro, as leis, as culturas e as marcas são apenas alguns exemplos de realidades imaginadas que foram construídas e fortalecidas baseadas em mitos partilhados. Uma realidade imaginada não é uma mentira. Pelo contrário, é algo em que muitos acreditam e por essa razão, exerce influência sobre o mundo, molda comportamentos e preferências. A imensa diversidade de realidades imaginadas que os *sapiens* inventaram e a diversidade resultante de padrões de comportamento são os principais componentes do que chamamos “culturas”. A partir da Revolução Cognitiva[a], as narrativas históricas

[a]Surgimento de novas formas de pensar e se comunicar, ocorrida entre 70 e 30 mil anos atrás, que pode ter sido causada por mutações genéticas acidentais que mudaram as conexões internas dos *sapiens*, possibilitando que pensassem de uma maneira sem precedentes e se comunicassem usando um tipo de linguagem totalmente novo.

substituem as narrativas biológicas como nosso principal meio de explicar o desenvolvimento do *Homo sapiens*.

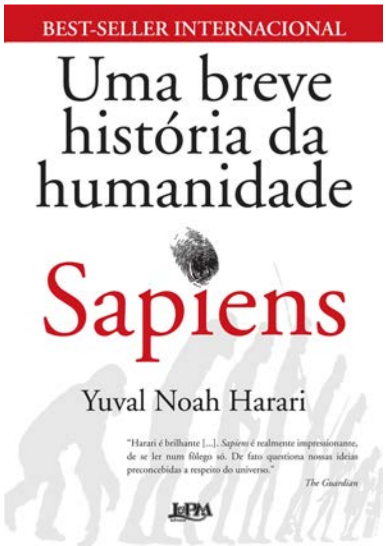


Figura 2.1: Capa do livro de Harari (2015).

2.2 Narrativas e A Neurociência: Zak

Uma outra explicação para a afinidade humana com *storytelling* se dá no campo da neurociência com a substância oxitocina[b] (um tipo de hormônio). Um dos principais pesquisadores desta área é o neurocientista americano Paul J. Zak, fundador do campo de estudo "neuroeconomia".

O estudo do Dr. Zak busca entender um pouco mais sobre os efeitos da oxitocina. O que se sabia deste hormônio é que ele induzia as contrações no parto e a produção de leite na amamentação, além de ser liberado por ambos os sexos durante o ato sexual. Mas as perguntas que ele se fez foram: "Por que os homens também a produziam?"e "Qual era exatamente a sua importância?". Sua busca por respostas resultaram no livro "A Molécula da Moralidade: As Surpreendentes Descobertas sobre A Substância que Desperta O Melhor em Nós". Ele também tem divulgado seu trabalho por meio de palestras, como o vídeo TED "Confiança, Moralidade – e Oxitocina" (<https://goo.gl/PmzKve>).

[b] Alguns autores escrevem ocitocina no lugar de oxitocina.

Figura 2.2: Zak, seu livro e sua palestra TED sobre a oxitocina (2011).

O laboratório de Paul Zak foi o primeiro a descobrir que a oxitocina neuroquímica é sintetizada no cérebro humano e que essa molécula motiva a reciprocidade, isto é, mesmo sem contato visual, face a face, o hormônio da oxitocina parece sinalizar que o outro é familiar e confiável. Esse pequeno peptídio sintetizado no hipotálamo dos cérebros dos mamíferos pode ser identificado por meio das alterações no exame de sangue que refletem as alterações na produção cerebral.

Em seu trabalho "*Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*" ("Por que Histórias Inspiradoras Nos Fazem Reagir: A Neurociência da Narrativa", tradução nossa) de 2015, Zak fez experimentos para verificar como o tipo de narrativa de um vídeo se correlaciona com a liberação de oxitocina e como a liberação de oxitocina se correlaciona com o grau de atenção de um indivíduo. A medição do nível de oxitocina foi feita por uma aferição indireta a cada milésimo de segundo via eletrocardiograma no nervo vago (descobriu-se que esse nervo está repleto de receptores de oxitocina). O nível de atenção foi medido pela aceleração do batimento cardíaco e pelo suor proveniente de glândulas écrinas na pele. O vídeo exibido contava uma história com arco dramático envolvente: um pai que aparecia falando de seu filho Ben com câncer terminal e a sua tentativa de superar seus medos e frustrações para conseguir conectar-se ao seu filho e desfrutar de sua companhia pelos meses que ainda tinha. O experimento verificou que a produção de oxitocina e a atenção estão correlacionadas com o grau de dramaticidade. Ao longo dos cem segundos do vídeo, observou-se que o nível de atenção aumentava e diminuia, com o cérebro ficando atento à história para, em seguida, fazer uma rápida pesquisa do restante do ambiente e, então, reorientar para a história à medida que a tensão aumentava. O pico de resposta da atenção ocorreu no clímax do vídeo, quando o pai de Ben revela que seu filho está morrendo.

Paul Zak (2015) conclui: "Narrativas que nos levam a prestar atenção e também nos envolvem emocionalmente são as histórias que nos movem para a ação. Isto é o que um bom documentário faz.” (tradução nossa). Assim, segundo o pesquisador, as narrativas convincentes causam liberação de oxitocina e, portanto, elas têm o poder de afetar nossas atitudes, crenças e comportamentos.

2.3 Narrativas, Matemática e A Língua Materna: Machado

Em sua palestra intitulada “A Narrativa em Matemática”, proferida na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da Universidade Federal Fluminense em 2016, o educador Nilson José Machado analisa as correlações entre a Língua Materna (o Português, em nosso caso) e a Matemática, mostrando como uma faz uso da outra a todo momento e o papel das narrativas neste processo. No que se segue, nessa seção, apresentaremos algumas ideias apresentadas pelo autor nessa palestra.

Machado inicia observando que informações soltas, em geral, perdem o seu valor, enquanto narrativas encadeiam informações e criam elos cognitivos que constroem os significados mais marcantes, estabelecendo assim o conhecimento. Segundo Machado, a conexão entre “conhecimento” e “narrativa” é tão profunda que ambas as palavras têm um léxico comum: *gnarus* (em Latim).

A ideia de narrativa, destaca Machado, surge do diálogo entre as ideias de cadeia e de rede. Na rede, tudo está ligado, articulado. O encadeamento é a ideia cartesiana que segue uma linha: “se isso, então aquilo”. Atualmente, continua o autor, as pessoas tendem a dizer que as ideias cartesianas são ultrapassadas e que tudo está em rede, porém temos que pensar que até mesmo para falar precisamos de um encadeamento de ideias; do contrário, não formamos sequer uma frase. Quem conta uma história, encadeia, pois toda narrativa é um encadeamento.

Machado, em seguida, estabelece que o *conhecimento explícito* é aquele que, quando perguntados a respeito, respondemos imediatamente. Este tipo de conhecimento, acrescenta o educador, representa uma parte muito pequena de todo o conhecimento que adquirimos na vida. A maior parte de tudo o que sabemos não conseguimos expressar claramente e este é o *conhecimento tácito*. A narrativa combina os dois tipos de conhecimento: o tácito (que ele chama de “recheio da história”) e o explícito (que é a “moral da história”). Machado prossegue: a informação sem narrativa se perde, é como se fosse uma cena isolada e informações isoladas de nada valem. O que não vira uma história para contar, morre. É preciso “linkar” as coisas, criar um roteiro, para que elas (as informações) permaneçam na memória.

Machado destaca, então, a importância das metáforas na construção do significado: quando encontramos algo que explica tão bem o que queremos, as coisas tornam-se claras de modo que não precisamos defini-las. De acordo com o pesquisador, há vários tipos de narrativas: binárias (que são as mais simples e polarizadas entre o "bem" e o "mal"), quaternárias (que são as que têm dois eixos) e as multifárias (mais complexas, sem definição explícita de bem e mal, e que são mais parecidas com a realidade).

Machado apresenta, na sequência, vários indícios de um "paralelismo" entre a Matemática e os Contos de Fadas em Língua Materna.

- Contos de Fadas são, em geral, binários, isto é, polarizados (o "bem" contra o "mal"); em Matemática, há também uma polarização: ou uma sentença matemática fechada é "verdadeira" ou ela é "falsa".
- A palavra "contar" tem, por um lado, na Matemática, a noção de "enumerar" e, por outro, em Português, ela traz a ideia de "narrar" (entre outros significados).
- Os Contos de Fadas começam com "Era uma vez ..." e terminam com "E foram felizes para sempre!"; em Matemática, as demonstrações começam com "Seja ..." e terminam com "Como queríamos demonstrar!".
- A Matemática, assim como os Contos de Fadas, fazem forte uso de abstrações. Por exemplo, não existem unicórnios nem círculos no mundo real (ambos são objetos abstratos). Contudo, frequentemente, a abstração na Matemática é vista como algo muito complicado, enquanto que, nos Contos de Fadas, ela é aceita de forma mais natural.
- Os significados, tanto na Matemática, como nos Contos de Fadas, devem passar por narrativas coerentes: é preciso contar bem a história, mesmo sendo ela uma demonstração, com começo, meio e fim.

Existem ainda outros aspectos comuns, complementa Machado: o tempo que tem que ser presente na história, mas que serve a qualquer tempo ou em qualquer época; a micromotivação que gera a macromotivação; a hermenêutica que não exclui a interpretação aberta; o genérico que trata do particular.

Por fim, Machado cita o filósofo britânico Bertrand Russell, ao colocar que o papel principal do professor é evitar duas coisas na mente dos alunos: a primeira são as *narrativas unárias*, aquelas nas quais se acredita que haja uma única verdade e que dão origem a dogmatismos e fanatismos; a segunda são as *narrativas binárias*, que levam aos extremismos ao não permitirem opções alternativas intermediárias (para mais detalhes, ver a referência Russell (2009)).

2.4 Narrativas e A Prova Matemática: Doxiadis e Mazur

O livro “*Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*”, editado pelos professores Apostolos Doxiadis e Barry Mazur, e publicado pela Princeton University Press, em 2012, tem sua origem em uma conferência em Mykonos, na Grécia, em 2005, com a formação do grupo THALES + FRIENDS. O grupo foi criado com o objetivo de transpor “o abismo entre a Matemática e as outras formas de atividades culturais”. A segunda conferência, que ocorreu em Delphi, também na Grécia, em 2007, e contou com matemáticos, historiadores, filósofos, professores de Literatura e um romancista especialista em Matemática, focou em estudos sobre Matemática e Narrativa. Os trabalhos desta conferência tornaram-se a base para o referido livro, cujo título remete às palavras “Não perturbe meus círculos!” atribuída a Arquimedes antes de ser assassinado por um soldado romano em Siracusa.

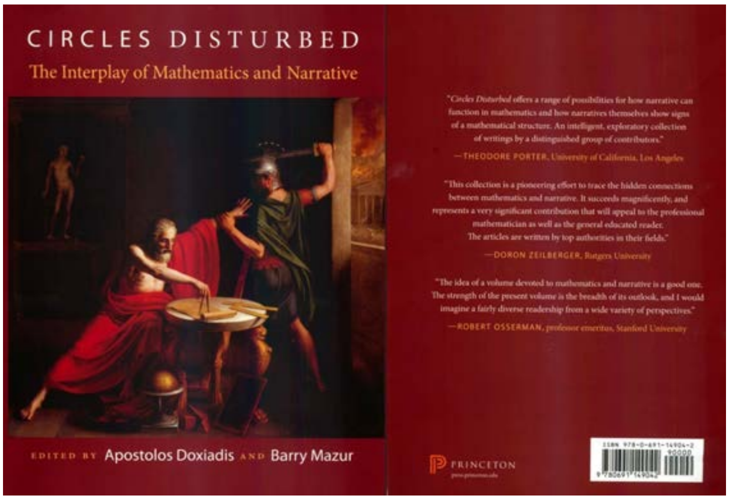


Figura 2.3: Doxiadis, Mazur e a estrutura narrativa da Matemática.

O Capítulo 10 do livro, ‘‘*A Streetcar Named (among Other Things) Proof: From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric*” (“Um Bonde Chamado (entre Outras Coisas) Prova: Da Narrativa à Geometria, via Poesia e Retórica”), escrito por Apostolos Doxiadis, é o capítulo mais longo da obra, ocupando mais de cem páginas. Nele, o autor defende que a origem grega da maneira de se fazer e escrever provas que usamos hoje está relacionada com a narrativa, a narrativa poética e, sobretudo, com a retórica forense. Doxiadis sintetiza as várias conexões em um diagrama, conforme a figura a seguir. No diagrama, a flecha preta sólida denota influência direta e a pontilhada, indireta. As flechas cinzas indicam influências de domínios específicos nos dois domínios em que a prova matemática teve início (*Prática Jurídica e Política* e *Geometria Prática*).

Os termos “narrativa” e “história” são frequentemente usados intercambiavelmente, mas precisamos distingui-los, usando narrativa para denotar algo mais geral, ou seja, todas as histórias são narrativas, mas nem todas as narrativas são histórias. O termo narrativa denota um modo de comunicação cujo objetivo é representar uma ação bem como representar uma mediação simbólica entre o mundo das ações e o mundo das representações mentais. De acordo com Zacks, Tversky e Iyer (2001), “narrativas são discursos que descrevem uma série de ações”, um ponto de vista compartilhado por Doxiadis.

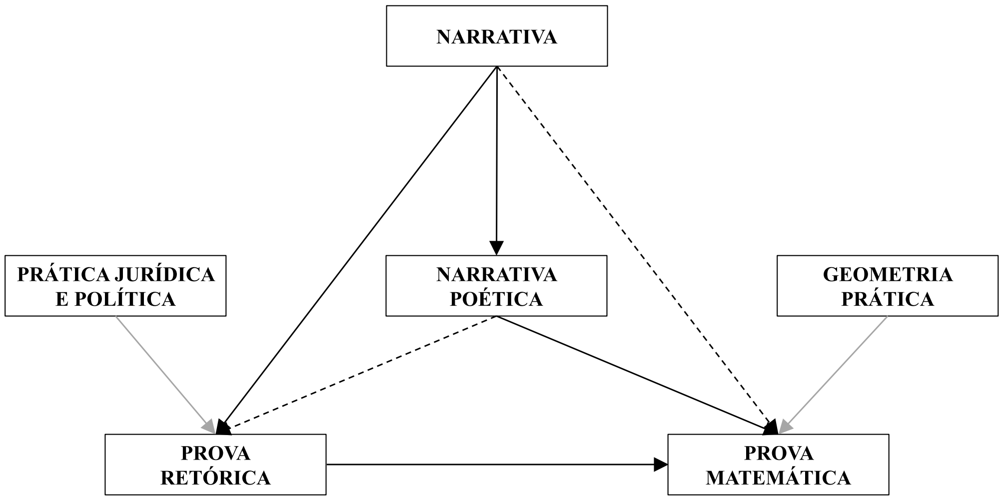


Figura 2.4: relações de práticas culturais que deram origem à prova matemática.

Por narrativa poética, o autor entende como aquela narrativa em prosa e verso desenvolvida na Grécia Antiga nos séculos VI e VII a.C. da qual fazem parte as epopeias de Homero e Hesíodo. Tais formas de narrativa dominaram a cultura grega e suas características serviram para a formação das formas narrativas subsequentes.

De acordo com Doxiadis, o estilo arcaico de narrativa, especialmente aquele encontrado nas epopeias, trabalha com uma combinação de mecanismos cognitivos inatos e os hábitos de uma prática de desenvolvimento cultural, unindo sentenças narrativas curtas com o objetivo de criar uma representação viva na mente do leitor. Na Idade Clássica, surge um novo estilo narrativo, a tragédia, que dá um novo formato à representação da ação por meio do uso da mimese (figura em que o orador imita outrem, na voz, estilo ou gestos, em discurso direto). Doxiadis coloca que “o desenvolvimento conjunto da tragédia e da retórica é parte da história maior das mudanças trazidas na vida das cidades-estados gregas pela transformação política, da tirania à oligarquia, para práticas mais participativas, a mais avançada das quais é a democracia”. Central para essa transformação, continua Doxiadis, são formas de discurso culturalmente desenvolvidas cujo objetivo é a persuasão. A retórica, a arte da persuasão, também usa uma forma de prova, diferente, mas não em sua totalidade, da prova matemática. Existiram três gêneros de retórica na Antiguidade Clássica: cerimonial, política e judicial. A retórica cerimonial é usada em ocasiões festivas ou em exibições oratórias, a retórica política usada em assembleias e a retórica judicial usada pelos litigantes em uma corte judicial.

Por fim, a Geometria Prática é aquela evidenciada na Grécia Antiga, na qual as ferramentas básicas se resumiam à régua e ao compasso. Por volta do ano 900 a.C. podemos perceber a evidência de uma ferramenta semelhante a um compasso. Seria um pincel articulado que foi utilizado para desenhar em ânforas (vasos antigos). Vale ressaltar que muitas vezes uma ferramenta é criada para um determinado propósito, mas seus usuários a tornam mais sofisticada do que para aquilo que fora criada. Esta obra artesanal acabou sendo o mesmo desenho utilizado em muitas provas geométricas realizadas séculos depois.

2.5 Narrativas e O Ensino de Matemática: Zazkis e Liljedahl

Rina Zazkis e Peter Liljedahl da Simon Fraser University, no Canadá, escreveram o livro "*Teaching Mathematics as Storytelling*" que trata especificamente do uso de narrativas (*storytelling*) no ensino da Matemática. O livro apresenta *storytelling* em Matemática como um meio para se criar uma aula em que a Matemática seja apreciada, entendida e divertida. Os autores mostram como envolver os alunos nas atividades matemáticas por meio da narrativas. O texto apresenta vários tipos de narrativas que podem ser usadas em sala de aula: (1) narrativas que proporcionam uma trama ou plano de fundo para os problemas matemáticos; (2) narrativas que se entrelaçam profundamente com o conteúdo e que explicam conceitos e ideias; (3) narrativas que ajudam a resolver um problema ou a alcançar um melhor entendimento de uma solução; (4) narrativas na forma de problemas que propõem questões. Além disso, os autores apresentam um enquadramento teórico para a criação de novas narrativas, ideias para enriquecer e usar narrativas já existentes, bem como várias técnicas que tornam uma narrativa mais interativa e invocativa para o leitor. O livro é, assim, de interesse para quem ensina Matemática ou para quem forma professores de Matemática.

Ao longo dos seus 12 capítulos, o livro intercala justificativas e ponderações sobre o uso de *storytelling* no contexto escolar. Destacamos os seguintes trechos:

- O valor de uma história para o ensino está precisamente no poder de engajar as emoções dos estudantes e, de forma conjunta, suas imaginações no material curricular.
- O grande poder das histórias está em sua missão dupla: elas comunicam informação de uma forma memorável e delineiam os sentimentos dos ouvintes sobre a informação que está sendo comunicada.
- Contar uma história é estabelecer um significado e estabelecer significado é o fio condutor

no ensino da Matemática, uma disciplina que é frequentemente percebida como uma mera manipulação de símbolos cujo significado está muitas vezes longe de estar claro para os estudantes.

- Usar histórias em sala de aula pode servir para muitos e diferentes propósitos. Histórias podem despertar interesse, ajudar na memorização e reduzir a ansiedade. Elas podem criar uma atmosfera confortável e de suporte na sala de aula, bem como estabelecer um relacionamento entre o professor e os estudantes.
- As escolas de hoje estão mais acostumadas com os *word problems* (problemas com palavras), primos distantes das boas histórias. Contudo, uma análise mais cuidadosa dos *word problems* revela que esses de fato não são histórias engajantes, pois foram desprovidos dos detalhes e emoções que ajudam a orientar os sentimentos dos ouvintes.

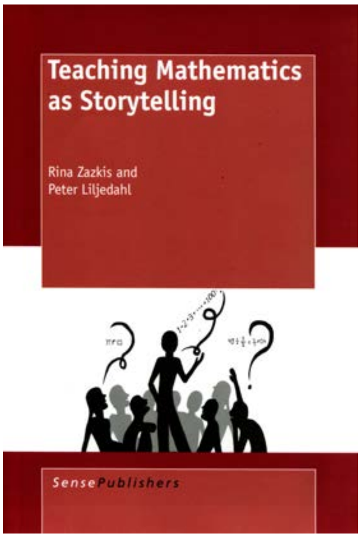


Figura 2.5: Zazkis, Liljedahl e o uso de narrativas no Ensino da Matemática.

Os autores citam ainda os 10 benefícios enumerados por Haven (2000) sobre o uso de narrativas como ferramenta educacional:

- *Storytelling* é um elemento efetivo e poderoso no esforço de melhorar e desenvolver todas as quatro primeiras habilidades da linguagem (ler, escrever, ouvir e falar).
- Informações (tanto conceitos como fatos) são melhor lembradas e por mais tempo quando apresentadas em forma de narrativa.
- *Storytelling* é uma ferramenta de ensino multidisciplinar efetiva e poderosa que perpassa todo o currículo.
- *Storytelling* motiva positivamente os estudantes para o aprendizado.
- *Storytelling* constrói efetivamente a autoconfiança e a autoestima do estudante.

- *Storytelling* envolve e desenvolve as habilidades ligadas à imaginação e à criatividade melhor do que qualquer outra atividade escolar.
- *Storytelling* envolve e entretém.
- *Storytelling* cria empatia e senso de conectividade.
- *Storytelling* melhora as habilidades de análise e resolução de problemas.
- *Storytelling* cria conexões valiosas com a comunidade e com a herança familiar.

2.6 Narrativas e Propaganda

Como coloca McSill (2013), desde tempos imemoriais, a estória[c] é utilizada como instrumento para ensinar, informar, entreter, reforçar crenças, dominar e, como se chama hoje, "fidelizar o cliente". Estudiosos da área de *marketing* colocam a narrativa como uma das pedras angulares da boa propaganda: se propaganda é a alma do negócio, então narrativa é a alma da propaganda.

Embora seja um livro destinado ao público de propaganda, Xavier (2015) discute as implicações educacionais de *storytelling*:

> *Pergunte a um professor qual é seu maior problema no exercício do magistério. A resposta mais ouvida certamente será o binômio desinteresse/desatenção. [...] Tudo começa com atenção, sem a qual o restante se inviabiliza. Se logo após a atenção inserirmos algum grau de afetividade (ou, se preferirmos, de emoção), estará aberto o caminho para uma identidade mais profunda entre comunicador e público. [...] A maneira de cumprir esse difícil percurso é contar uma boa história, que prenda a atenção, envolva com emoção, crie laços profundos com o público, una todas as pontas em um relato compreensível, seja apreciada e lembrada.*
>
> (Xavier, 2015)

Neste contexto, Xavier (2015) coloca o papel fundamental da narrativa (*storytelling*) em capturar e conduzir os capitais emocional, cultural e de atenção:

> *As pessoas estão à procura de conexões novas e emocionais. Elas procuram algo para amar [...] Só existe uma forma de prosperar como profissional de marketing na Economia da Atenção: parar de correr atrás de modismos e dedicar-se a estabelecer conexões consistentes e emocionais com os consumidores.*
>
> (Xavier, 2015)

Ao leitor interessado em mais detalhes sobre a questão da narrativa no âmbito da propaganda, recomendamos, portanto, a leitura dos livros Xavier (2015) e McSill (2013).

[c]Aqui, estamos usando "estória" seguindo o uso do próprio McSill (2013), mas o significado é o mesmo de "história". De fato, atualmente, os dois termos têm sido usados como sinônimos.

3 *Romanos*

Faixa de classificação etária: Livre L.

Áudio: Português.

Título original: Romanos.

Gênero: Curta-metragem.

Duração: 2 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: Porta dos Fundos (2014).

Tópicos matemáticos abordados: Notação Matemática; Algarismos Romanos; Equações.

Nível escolar sugerido: Ensino Fundamental; Ensino Médio; Formação de Professores.

Marcadores: Algarimos Romanos; Porta dos Fundos; Notação Matemática; Linguagem.

Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: H1.

Link para o vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=2vzwOeY9YUY>.

Página web oficial: <http://www.portadosfundos.com.br/video/romanos/>.

Imagens selecionadas






Sinopse

Neste curta-metragem divertido, Fábio Porchat interpreta um professor de matemática da Roma Antiga que tenta ensinar aos seus alunos como resolver uma equação matemática escrita com algarismos romanos.

Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

Muitos alunos utilizam a linguagem simbólica da matemática sem perceber as questões envolvidas no uso dessa linguagem, como por exemplo, o fato de um mesmo símbolo matemático poder ter diferentes significados. Neste contexto, o vídeo pode ser usado para mostrar a importância da escolha de uma boa notação.

Sensibilização (para montar um cartaz)

Neste episódio, o pessoal do canal Porta dos Fundos dá sua interpretação de como seria uma aula de matemática na Roma Antiga. Será que era mais fácil resolver equações naquela época? Venha, assista e descubra!

Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?

2. Quais são os diferentes significados que aparecem para “X” no vídeo?
3. Afinal, em notação moderna, qual é a equação que o professor está tentando resolver? Qual é a solução dessa equação? Escreva essa solução usando números romanos!
4. Você conhece outros significados para “X” além daqueles apresentados no curta? Quais?
5. Você conhece outros símbolos matemáticos que tenham mais do que um significado? Quais?
6. Você acredita que na Roma Antiga uma aula de matemática era como a apresentada no vídeo?
7. Do que você mais gostou no vídeo?
8. Se você fosse o diretor deste vídeo, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. Diante da equação XXX + X = IXXX, escrita com algarismos romanos, o professor tem em mente uma determinada leitura para essa estrutura (0:21-0:30). Você conseguiria fazer outras duas leituras coerentes dessa equação supondo que não tivesse conhecimento dos significados dados ao X pelo professor? Escreva essas equações com os algarismos indo-arábicos e, em seguida, resolva-as.
2. No vídeo (0:56-1:25), o professor tenta resolver a equação e comete alguns erros. Você saberia identificar pelo menos um desses erros? Cite-o(s).
3. Quase no final do vídeo (1:03-1:14) o professor utiliza o X novamente, mas com um novo significado. Diante da confusão gerada, ele introduz um novo símbolo para representar esse novo significado: a bola. Qual é esse novo significado do X?
4. No canto superior esquerdo do “quadro” utilizado pelo professor, aparece uma suposta data (0:48-0:50). Que data seria essa?

Observações para o professor

- O fato da letra X representar o número dez no sistema romano pode sugerir que os algarismos romanos tenham sido calcados em letras do alfabeto latino.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

  Porém, segundo Cajori (1993), existe pouca informação segura sobre a origem da notação dos números romanos. Os etruscos que habitavam Roma até cerca de 500 a.C. usavam sinais para representar numerais que se assemelhavam a letras de seu alfabeto.

- O sistema de numeração romano antigo teve diversas fases e nem sempre foi como aprendemos na escola nos dias de hoje. Menninger (2011) observa, por exemplo, que os romanos antigos nunca usaram M como notação para 1000 ou MM para 2000 mas, sim, CIↃ e CIↃCIↃ e, eventualmente IIM, usando o M como uma abreviação para a palavra *mille*. No monumento chamado Columna Rostrata de Duilius (260 a.C.), em Roma, há entre 23 e 33 cópias de CCCIƆƆƆ (100000) inscritas para registrar um saque de mais de 2 milhões de moedas de bronze. Na Idade Média, contudo, o M tornou-se um símbolo comum para 1000: por exemplo, MMCXII representa o número 2112.

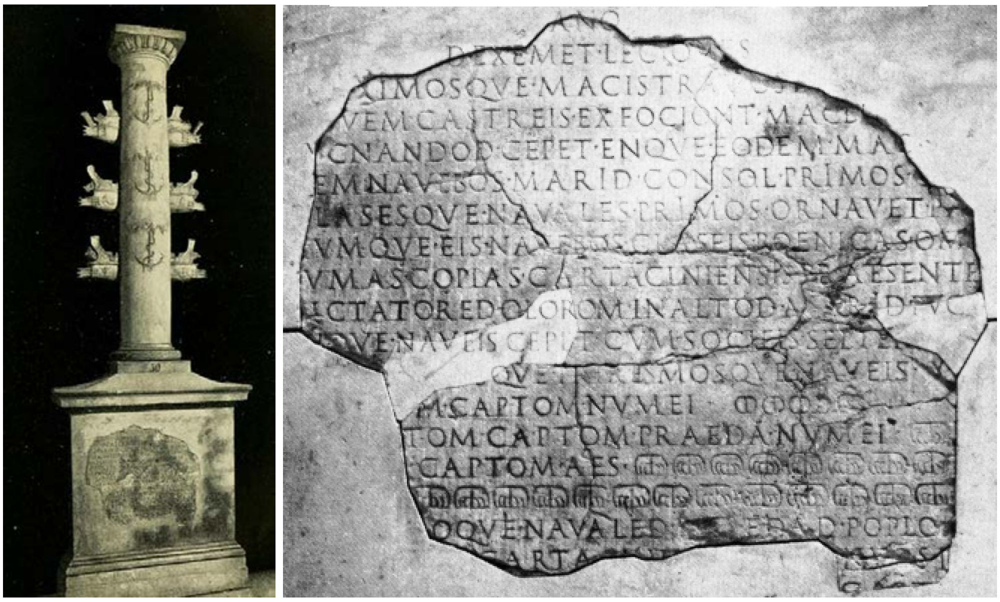


Figura: Reprodução da Columna Rostrata e destaque da parte com as inscrições de várias cópias de CCCIƆƆƆ.

Fonte: Wikimedia Commons e <https://goo.gl/Uyb9SN>.

Outro exemplo bastante citado se encontra no Coliseu de Roma, que teve sua construção finalizada por volta de 80 d.C., em que, diante do portão 44, muitos turistas se sentem “enganados” por seus professores de matemática, pois o número 44 é ali representado não por XLIV como aprendemos, mas por XLIIII.

Figura: Portão 44 do Coliseu de Roma.

Fonte: UFRGS (<https://goo.gl/0JcicS>).

Por volta do século XV, o sistema indo-arábico, criado pelos indianos e difundido pelos árabes, substituiu o sistema de numeração romano, devido às suas diversas vantagens. Para um aprofundamento desse tema, sugerimos o vídeo “A História do Número Um” produzido pela BBC.

- É muito comum utilizarmos sem distinção, em matemática, os termos: “variável” e “incógnita”. Porém, vale lembrar que esses termos têm significados diferentes. A palavra variável tem sua origem no latim em *variabilis*, “mutável, de diversos aspectos”, de *varius*, “matizado, de distintas cores, diferente”; e, a palavra incógnita tem sua origem no latim em *incognitus*, formado por *in-*, “não”, mais *cognitus*, particípio passado de *decognoscere*, “conhecer, saber”. Segundo Roque (2012), na matemática, ambas são grandezas desconhecidas, porém:
  - Incógnita é uma quantidade desconhecida cujo valor pode ser determinado pelas condições fornecidas pela equação. Trata-se, portanto, de uma quantidade determinada, porém desconhecida.
  - Variável é uma quantidade indeterminada, cujo valor “varia” de acordo com outra quantidade que também é variável.
- Por que a letra X é a mais utilizada para representar uma variável ou incógnita? De fato não existe, atualmente, documento algum que nos leve a uma única resposta. Uma teoria, apresentada recentemente por Terry Moore, diretor do fórum *The Radius Foundation*, é que a associação da letra X ao desconhecido tem suas origens na incapacidade das escolas medievais espanholas em traduzir algumas palavras de textos árabes que chegaram à Europa por volta dos séculos XI e XII. Segundo Moore, esse era o caso da palavra *shalan*, que significa “alguma coisa”. Começando com a letra árabe “shîn”, o termo “*shalan*” não podia ser pronunciado pelos espanhóis que decidiram então utilizar em suas traduções, a letra grega χ (chi) no lugar da letra “shîn”. Mais tarde, na tradução para o latim, a letra χ foi substituída por uma letra com formato bem parecido, a letra “X”, formando, assim, a base para milhares de obras e estudos matemáticos que perduram até hoje. A palestra do TED onde Moore fala sobre esse assunto pode ser encontrada em: <https://goo.gl/Ulg2fX>.

Figura: palestra TED com Terry Moore.

Fonte: TED.

Outras teorias para a escolha frequente da letra X como incógnita são registradas no *site* <https://goo.gl/6DpQxb>, onde destaca-se o fato da palavra grega *xenos*, que denota desconhecido, começar com X; ou ainda pelo fato de Descartes ter adotado em seu trabalho, *La Géométrie* (1637), a notação simbólica instituindo o uso de letras minúsculas do começo do alfabeto para valores conhecidos (a, b, c) e as do final do alfabeto para os desconhecidos (z, y,

x). Fato sugestivo para que a escolha da letra X tenha ocorrido por razões tipográficas, já que por ser a letra menos usada, a gráfica é que teria dado essa sugestão a Descartes, para obter mais blocos de letras disponíveis.

- Atribui-se ao matemático inglês William Ougtred (1574-1660) a primeira utilização do símbolo $\times$ para a multiplicação, isso acontece em 1631 em seu livro *Clavis Mathematicae*.

Figura: William Oughtred (1574-1660).

Fonte: Wikimedia Commons.

Para muitos, essa escolha teve fundamento religioso já que tal símbolo representa a Cruz de Santo André (nome oficial do símbolo). Porém, em 1698, de acordo com Cajori (1993), o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) escreve uma carta ao matemático suíço Johann Bernoulli (1667-1748) na qual relata: “Eu não gosto de $\times$ como símbolo para multiplicação, uma vez que ele é facilmente confundido com x; $\ldots$ muitas vezes eu simplesmente relaciono duas quantidades com a interposição de um ponto e indico a multiplicação por $ZC \cdot LM$”. Tem início então a utilização desse novo símbolo, o ponto, para a multiplicação.

Figura: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Fonte: Wikimedia Commons.

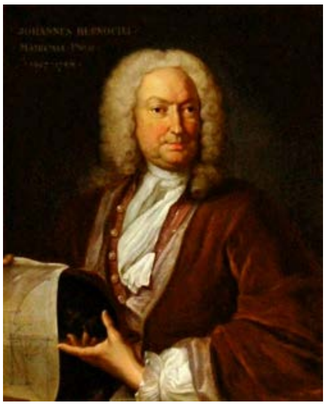


Figura: Johann Bernoulli (1667-1748).

Fonte: Wikimedia Commons.

O símbolo $\times$ é frequentemente adotado na indicação da multiplicação em toda a fase inicial da aprendizagem da matemática. No momento em que as incógnitas são introduzidas, frequentemente esse símbolo é substituído pelo ponto $\cdot$. Vale ressaltar que o ponto usado como símbolo da multiplicação ($\cdot$) é posicionado mais acima da linha de base que o ponto final (.) usado como sinal de pontuação da língua portuguesa.

- É interessante perceber que a utilização da letra X em diversas áreas segue da utilização dada à letra X na matemática. Por exemplo, na genética, segundo os professores Paulo Roberto Jubilut e Marcelo Valério, foi a estranheza da natureza do cromossomo X que fez com que ele fosse batizado com tal letra e, em seguida, foram estudados os cromossomos Y, Z e W, que foram batizados com letras usadas, primeiramente na matemática, para representar algo desconhecido (<http://bit.ly/334C430>). O físico alemão Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923) ao se deparar com emissões eletromagnéticas com poder de penetração em objetos opacos maior que as conhecidas até a época, batizou-as de raios-X. Em interfaces gráficas de sistemas operaciomais, utiliza-se o símbolo X para fechar uma janela.

Figura: Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923).

Fonte: Wikimedia Commons.

- A seguir, apresentamos alguns outros símbolos matemáticos que tem mais do que um significado.

Símbolo	Significado
!	Ponto de exclamação: “Que dia lindo!”
	Fatorial: $5! = 120$
( )	Par ordenado: $(3,5)$
	Intervalo aberto: $(3,5) =]3,5[$
	Matriz: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}_{1\times 2}$
	Número binomial: $\binom{5}{3} = 10$
	Sinais de pontuação: Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923)
·	Ponto final: Nasce Maria.
	Multiplicação: $2 \cdot 3 = 6$
	Separador decimal: 0.5 (cinco décimos)
Δ	Triângulo: ΔABC
	Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$
{ }	Agrupamento: $\{9-[3+(5-7)]\} \div 2$
	Conjunto: $\{2,4,6,8\}$
| |	Valor absoluto: $\|-3\| = 3$
	Determinante: $\|-3\| = -3$
–	Subtração: $2-1$.
	Meia-risca: A–Z.
:	Divisão: $6:2$.
	Sinal de pontuação: “Sinal de Pontuação:”.
	Tal que: $]1,3[= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$.
	Proporção: a escala é de 1 : 1000000.
∼	Sinal diacrítico para anasalar vogais: irmão.
	Negação em lógica: $\sim(\sim p) = p$.
,	Sinal gráfico de pontuação: “ Penso, logo existo.”.
	Separador decimal: $0{,}5 = 1/2$.

- Para os leitores interessados na história dos símbolos matemáticos, recomendamos as referências Cajori (1993) e Mazur (2014).
- Enquanto um mesmo símbolo pode representar conceitos diferentes, um mesmo conceito pode ser representado por símbolos diferentes. A tabela a seguir, por exemplo, apresenta diferentes notações sugeridas por diferentes pessoas, ao longo da história, para a representação decimal de um número.

Ano	Autor	Notação	Notação Atual
1579	François Viète	$0 \vert 375$	0,375
1585	Simon Stevin	375	0,375
1593	Christopher Clavius	46.5	46,5
1603	Johann Hartmann Beyer	$8\ 79\overset{v}{8}$	8,00798
1608	Robert Norton	$3^{(1)}7^{(2)}5^{(3)}$	0,375
1612	Bartholomaeus Pitiscus	$13 \vert 00024$	13,00024
1616	Johannes Kepler	21(90	21,90
1617	John Napier	1993,273	1993,273
1620	John Napier	25.803	25,803
1620	Joost Bürgi	$23027\mathring{0}022$	230270,022
1623	John Johnson	$3 \vert \overset{1.}{2}\overset{2.}{2}\overset{3.}{9}\overset{4.}{1}\overset{5.}{6}$	3,22916
1624	Henry Briggs	$5^{\underline{9321}}$	5,9321
1629	Albert Girard	1,532	1,532
1629	Wilhelm von Kalcheim	693 ·	6,93
1630	Joach. Stegman	39(063	39,063
1631	William Oughtred	$2\,\underline{\vert 5}$	2,5
1651	Robert Jager	$16 \vert \dot{7}\dot{2}\dot{4}\dot{9}$	16,7239
1653	Richard Balam	3 : 04	3,04
1657	Francisci à Schooten	58,5	58,5
1665	Andrea Tacquet	$25.\ \overset{i}{8}\overset{ii}{0}\overset{iii}{0}\overset{iv}{7}\overset{v}{9}$	25,80079

1668	Nicholas Mercator	12[345	12,345
1670	Joannis Caramvels	22=3	22,3
1688	Jonas Moore	116‘64	116,64
1691	Jacques Ozanam	$\overset{(0)}{3}\ \overset{(1)}{9}\ \overset{(2)}{8}$	3,98
1696	Samuel Jeake	$34.\ \overset{/}{1}.\overset{//}{4}.\ \overset{///}{2}.\ \ \overset{////}{6}.$	34,1426
1707	William Whiston	0;9985	0,9985
1729	Isaac Greenwood	3,14	3,14
1739	L'Abbé Deidier	$32.6'3''4'''$	32,634
1777	Henry Clarke	2˙5	2,5
1857	Ignaz Lemoch	1˙63	1,63
1875	Anton Steinhauser	1˙63	1,63
1919	Giuseppe Peano	1˙63	1,63

- Ao assistir ao vídeo que retrata uma aula na Roma antiga, fica a pergunta de como seria, de fato, uma aula naquela época. O ensino das leis às crianças na Roma antiga era feito pelos seus pais, onde se ressalta a importância das mães, que normalmente eram responsáveis por ensinar as primeiras letras do alfabeto.

  > *A educação romana evoluiu, com o passar do tempo, de realizada pelos pais para uma educação conduzida por escravos. Primeiramente, um escravo pedagogo e mestre, ligado a uma família, educava seus filhos; posteriormente, escravos mestres educavam crianças de várias famílias; em seguida, surgem as escolas, onde escravos libertos eram professores. No entanto, apesar de a regra ser esta, vários autores da Antiguidade narram a existência de escolas no mundo romano, todas de influência grega. Vale ressaltar que não era, porém, o padrão geral da sociedade romana.*
  >
  > (Manacorda, 2010)

  Para maiores detalhes de como era a educação na Antiguidade sugerimos a referência Manacorda (2010).

- Os números romanos têm uma escrita bem peculiar e alguns alunos se atrapalham com essa escrita. Alguns *sites* interativos, aplicativos e jogos podem ser utilizados para uma melhor fixação desse conteúdo. *Sites* interativos: <https://goo.gl/61A0MN>; <https://goo.

gl/TtIYW8>; <https://goo.gl/6FYd3k>. Aplicativos: *Roman Converter* (<https://goo.gl/jlB0VH>); *Roman Numeral Converter Plus* (<https://goo.gl/OFi5p2>); *Roman Numerals Converter* (<https://goo.gl/LhE9Z4>).

- A escrita da equação adotada no vídeo, certamente não era utilizada na Antiguidade. Segundo Aczel (2007), os babilônios compreendiam conceitos simples de equações: dado um conjunto específico de condições matemáticas, eram capazes de resolver uma equação para obter o valor de uma incógnita. Por exemplo, sabiam como encontrar o comprimento e a largura de um campo que devesse ter uma área especificada, dadas algumas condições nas duas medidas. Os egípcios antigos também sabiam resolver esse tipo de problema. Papiros que foram conservados, como o famoso papiro Ahmes, datado de aproximadamente 1650 a.C., mostram a solução de equações simples. O problema 24 no papiro Ahmes pede o valor de uma “pilha” se uma pilha acrescentada a um sétimo de uma pilha der 19. Segundo o Ahmes a resposta é $16+1/2+1/8$, que é 16,625, como obteríamos hoje resolvendo a equação $x+(1/7)x=19$. Mais tarde, nota-se a presença de equações em uma linguagem retórica como no exemplo a seguir.

> *Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida.*
>
> (Boyer, 1996 apud Serrão e Brandemberg, 2013)

No próximo quadro, pode-se comparar a escrita retórica utilizada no epitáfio com a escrita atual.

Equação na linguagem vernácula	Equação na linguagem da Álgebra
Anos de vida de Diofanto.	x
Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida,	$\frac{x}{6}$
e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem.	$\frac{x}{12}$

Equação na linguagem vernácula	Equação na linguagem da Álgebra
Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte,	$\frac{x}{7}$
e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho.	5
Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou.	$\frac{x}{2}$
Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida.	4

Para sabermos quantos anos viveu Diofanto, basta resolver a equação, conforme escrita atual:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

Além disso, podemos descobrir que Diofanto teve seu rosto coberto de pêlos aos 21 anos, foi pai aos 38 anos e, seu filho morreu com 42 anos, quando Diofanto tinha 80 anos.

Na Grécia Antiga, portanto, uma equação tinha uma escrita bem diferente da que conhecemos hoje. Segundo Serrão e Brandemberg (2013), somente no século III, Diofanto introduziu à álgebra o estilo sincopado, cuja característica principal é o uso de abreviações de palavras para a escrita de equações, foi o primeiro passo em direção à notação algébrica. A seguir, um problema proposto por Diofanto em sua mais famosa obra, "Aritmética": Dividir um número dado em dois números de diferença dada.

(a) Resolução proposta por Diofanto (retórica): seja 100 o número e a diferença 40; achar os números. Supondo *arithmo* o número menor, o maior será *arithmo* mais 40; logo, os dois somados dão 2 *arithmos* mais 40, que vale 100. Então, 100 é igual a 2 *arithmos mais* 40. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando 2 *arithmos igual a* 60. Logo o número será 30. Então, *arithmo igual a* 30 e *arithmo mais* 40 *igual a* 70.

(b) Uma resolução usando as abreviações (mais geral): supondo ς o número menor, o maior será $\varsigma + 40$; logo, os dois somados dão $2\varsigma + 40$, que vale 100. Então, 100 é igual a $2\varsigma + 40$. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando 2ς igual a 60. Logo o número será 30. Então, ς igual a 30 e ς mais 40 igual a 70.

(c) Resolução em notação moderna: supondo x o número menor, o maior será $x+40$; logo, os dois somados dão $2x+40$, que vale 100. Então, 100 é igual a $2x+40$. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros $2x+40-40=100-40$, ficando $2x$ igual a 60. Logo, o número será 30. Ou, ainda, $x=30$ e $x+40=70$.

Serrão e Brandemberg (2013) apresentam ainda outros dois problemas propostos por Diofanto com resoluções retóricas, usando as abreviações da época e com notação moderna.

Aczel afirma ainda que os gregos antigos também eram capazes de resolver equações, de modo que perto do final do período clássico da Grécia e Roma antigas, sabia-se resolver algumas equações quadráticas, como é mostrado no vídeo *Media for Thinking The Unthinkable*, de Bret Victor, disponível em <http://bit.ly/2lOdIdQ>, onde o matemático Al-Khwarizmi (c.780-c.850), considerado o Pai da Álgebra, propõe o seguinte problema, com a sua respectiva resolução: *Qual é o quadrado que combinado com dez das suas raízes dará uma soma total de trinta e nove? A maneira de resolver este tipo de equação é tomar uma metade das ditas raízes. Ora, as raízes no problema são dez. Assim, tomando cinco multiplicadas por si mesmas dá vinte e cinco, uma quantidade que adicionada a trinta e nove dá sessenta e quatro. Toma-se então oito e subtraindo a isto metade das raízes que são cinco, fica três. O número três então representa uma raiz deste quadrado, o qual ele próprio com certeza é nove.*
O problema proposto e resolvido por Al-Khwarizmi seria tratado hoje como a resolução da equação $x^2+10x=39$; e a resolução dada por ele remete ao que conhecemos hoje como método de completar quadrados. Ou seja,

$$x^2+10x=39 \;\Rightarrow\; x^2+10x+\frac{10}{2}\cdot\frac{10}{2}=39+\frac{10}{2}\cdot\frac{10}{2} \;\Rightarrow\; x^2+10x+25=39+25$$
$$\Rightarrow\; (x+5)^2=64 \overset{(*)}{\Rightarrow} x+5=8 \;\Rightarrow\; x=3.$$

(*): naturalmente, números negativos não estavam disponíveis na época de Al-Khwarizmi. Para um aprofundamento do tema sugerimos, Aczel (2007), Victor (2013) e Serrão e Brandemberg (2013).

Referências relacionadas

- Aczel, Amir D.. *O Caderno Secreto de Descartes*. Zahar, 2007.
- Cajori, Florian *A History of Mathematical Notations, Two Volumes Bound as One*. Dover Publications, Inc., 1993.
- Manacorda, Mario Alighiero. *História da Educação: Da Antiguidade aos Nossos Dias*. Cortez Editora, 2010.
- Mazur, Joseph. *Enlightening Symbols: A Short History of Mathematical Notation and Its*

Hidden Powers. Princeton University Press, 2014.

- Menninger, Karl. *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*. Dover Publications, 2011.
- Roque, Tatiana. *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Rio De Janeiro: Zahar, 2012.
- Serrão, Marcelo Miranda; Brandemberg, João Cláudio. *Utilizando Problemas da História Antiga da Matmeática como Estratégia para O Ensino de Equações no 9º da Escola Básica*. X Seminário Nacional de História da Matemática, 2013. Disponível em <http://bit.ly/2ltzK5A>. Acesso em: 02 set. 2019.
- Victor, Bret. *Media for Thinking the Unthinkable*. MIT Media Lab, 2013. Disponível em <http://bit.ly/2lOdIdQ>. Acesso em: 02 set. 2019.

Referências sobre o uso de vídeos em sala de aula

- Ferrés, Johan. *Vídeo e Educação*. Segunda Edição. Artes Médicas, 1996.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. Editora Contexto, 2003.

Concepção

Karla Waack Nogueira

Revisão

André de Carvalho Rapozo, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira,
Keyla Lins Bruck Thedin, Rodrigo Pessanha da Cunha, Oswaldo dos Santos A. Coutinho

---

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

4 As Maravilhas da Lógica

Faixa de classificação etária: Livre L.

Áudio: Inglês.

Legendas: Português.

Título original: *The Joy of Logic*.

Gênero: Documentário.

Duração: 60 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: BCC-Four (2013).

Tópicos matemáticos abordados: Lógica; Sistemas de Numeração Binária; Teoria dos Conjuntos.

Interdisciplinaridade: Filosofia; Ciência da Computação; Literatura.

Nível escolar sugerido: Ensino Médio; Formação de Professores.

Marcadores: BBC; Lógica; Filosofia; Círculo de Viena; Documentário; Alan Turing; Paradoxos; Ãlgebra Booleana; Lewis Carroll; Alice no País das Maravilhas.

Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: 4.

Link para o vídeo: <https://philos.tv/video/as-maravilhas-da-logica/35579>.

Página web oficial: <http://www.bbc.co.uk/programmes/b03k6ypz>.

Imagens selecionadas

Sinopse

Neste documentário da BBC, acompanhado por nomes ilustres como Aristóteles, Lewis Carroll, George Boole, Friedrich Frege, Bertrand Russell, Kurt Gödel e Alan Turing, o professor de Ciência da Computação Dave Cliff embarca em uma jornada buscando mostrar a lógica como uma ferramenta poderosa criada pelo homem, desde suas origens na Grécia antiga, passando pela lógica na linguagem cotidiana, pela lógica Booleana e chegando aos dias de hoje com a Inteligência Artificial.

Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

Esse vídeo pode ser usado para apresentar a Lógica como um ramo da Filosofia ou da Matemática[a] e suas aplicações em temas como: bolsa de valores, jogos, computadores, sistemas de controle de tráfego aéreo, sinalização ferroviária, rede elétrica, biologia molecular e telefonia avançada. Outro possível objetivo é associar o tema do vídeo às habilidades da Matriz de Referência ENEM relacionadas com lógica: construção de argumentos e argumentos consistentes. Além disso, o vídeo também pode ser empregado para caracterizar a Lógica como uma ferramenta de organização, pesquisa e obtenção de informações.

Sensibilização (para montar um cartaz)

O que é Lógica? O que significa ser lógico?

Neste documentário da BBC, o apresentador e professor de Ciência da Computação Dave Cliff remonta parte da história do que hoje denominamos Lógica desde os seus primórdios com Aristóteles, passando por nomes importantes como George Boole, Gödel e Alan Turing, entre outros.

Crédito da imagem: Raul Abi-Abib (2019).

Diante do fato da lógica poder ir além da argumentação, pois está presente em setores do cotidiano como: controle de tráfego aéreo, bolsa de valores, telefonia avançada, computadores e tantos outros, fica a pergunta: “Há limite no que a lógica pode fazer por nós?”.

[a] Alguns autores não concordam com a afirmação de que a Lógica é um ramo da Matemática.

Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo de novo com o vídeo? O quê?
3. Segundo o documentário, o que é lógica?
4. O vídeo comenta a existência de uma porta com uma placa que diz: "Mantenha esta porta fechada o tempo todo.". Para você, o que está escrito nessa placa faz sentido? Justifique sua resposta.
5. Em alguns momentos do vídeo, o apresentador segura um cartaz com a frase: "Esta frase é falsa." e questiona as pessoas sobre a veracidade dessa frase. Na sua opinião, essa frase é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.
6. O vídeo apresenta uma falácia de Aristóteles em um diálogo entre dois homens, onde um deles afirma:
   – Todos os gatos têm 4 patas. Meu cachorro tem 4 patas.

   Em seguida, o outro homem diz:
   – Portanto, meu cão é um gato.

   Você acha que essa argumentação está correta? Justifique sua resposta.
7. O vídeo mostra uma piada envolvendo três lógicos em um bar. O garçom diz:
   – Todos os 3 querem uma cerveja?

O primeiro lógico diz:

– Eu não sei.

O segundo lógico também responde que não sabe e, então o terceiro lógico diz:

– Sim, todos queremos uma cerveja.

Por que o primeiro e o segundo lógico dizem não saber responder?

8. O que você mais gostou no filme?
9. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. O vídeo afirma que a lógica inspirou nossos maiores intelectuais, nos deu tecnologias transformadoras e nos fez questionar o significado de ser humano (1:26-1:38). Em seguida, o apresentador questiona se há um limite no que a lógica pode fazer por nós. Relate alguma situação do seu conhecimento em que a lógica tenha levado a uma decisão acertada.
2. Segundo o apresentador Dave Cliff, o software desenvolvido por ele (ZIP) é bem simples (2:31-2:37). Quais os dois pilares envolvidos nesse software?
3. O vídeo conta uma piada a respeito de três lógicos em um bar (4:05-4:34) e afirma que a lógica tem relação com com as regras do raciocínio correto. Afinal, você saberia dizer o que é lógica? Ou ainda, o que significa ser lógico?
4. A história da lógica remonta há 2 500 anos, na Grécia antiga (6:27-6:33). Qual é o nome do filósofo grego que criou as primeiras regras formais da lógica?
5. Segundo o documentário, a ferramenta da lógica mais famosa de Aristóteles é o silogismo (6:44-7:22). O que é um silogismo?
6. A professora Muffy Calder afirma que mesmo existindo vários sistemas sobre os quais raciocinamos, todas as lógicas envolvidas nesses sistemas envolvem axiomas e regras. Em seguida, o apresentador Dave Cliff fala sobre a existência de algoritmos que automatizam a forma como respondemos logicamente às perguntas feitas e menciona o fato da sua profissão – programador – estar ligada a isso (21:08-22:08). Afinal, o que faz um programador de computadores?
7. O primeiro paradoxo lógico conhecido, criado a cerca de 600 a.C. por Epimênides de Cnossos foi inspiração para o cartaz “Esta frase é falsa.” (28:20). Epimênides, que era cretense, teria dito: “Todos os cretenses são mentirosos.”. Afinal, o que é um paradoxo? Você conhece algum outro paradoxo famoso ou saberia criar algum?
8. O vídeo afirma que “Seria um mundo estranho se seguíssemos as regras da lógica sempre.” (6:03) e apresenta o pensamento de George Bernard Shaw para esclarecer essa afirmação:

> *Quando ficamos bêbados, nós dormimos.*
> *Quando dormimos, não pecamos.*
> *Quando não pecamos, vamos pro céu.*
> *Então vamos ficar bêbados e ir pro céu!*

O que você deduz ao associar a afirmação do vídeo ao pensamento de Shaw?

9. O vídeo apresenta um matemático e lógico inglês que imaginou algo extraordinário que hoje chamamos de computador – a "Máquina Universal" (44:08-46:27). Qual é o nome desse matemático e o que você sabe a respeito dele?
10. O documentário apresenta algumas afirmações e questionamentos que nos levam a reflexões importantes. Escolha um dos tópicos abaixo e exponha sua opinião a respeito dele.
    (a) A lógica é o motor da Filosofia, Matemática, Ciência e Linguagem. Ela impulsiona o processo fundamental do raciocínio (1:08).
    (b) Há um limite para o que a lógica pode fazer por nós (1:43)?
    (c) A lógica não é conhecimento e não cria conhecimento, mas nos dá regras firmes para que organizemos e lidemos com o conhecimento (5:35).
    (d) A qualidade das conclusões que você tira depende da qualidade das ideias que você insere (5:45).

Observações para o professor

- O vídeo "*The Joy of LOGIC*" é apresentado pelo professor Dave Cliff, nascido em 1966, na Inglaterra, onde frequentou a Segsbury School (agora conhecida como King Alfred's Academy). Cliff é licenciado em Ciência da Computação pela Universidade de Leeds e concluiu mestrado e doutorado em Ciência Cognitiva na Universidade de Sussex. Além disso, Cliff também atuou como professor associado no MIT *Artificial Intelligence Lab*, Cambridge EUA, com pesquisa na área de neurociência computacional/neuroética estudando o controle visual do olhar e do voo em insetos aéreos.

  Em 1996, enquanto trabalhava como consultor para a HP Labs em Bristol, Reino Unido (Laboratórios da Hewlett-Packard), Cliff inventou o algoritmo de negociação "ZIP" (*Zero-Intelligence-Plus*), um dos primeiros sistemas da geração atual de sistemas de negociação algorítmica adaptativa autônoma. Daí, em 1998, agora como pesquisador sênior no HP Labs, fundou e liderou o grupo de pesquisa de Sistemas Adaptativos Complexos da HP. Em 2001, uma equipe da IBM mostrou o software de negociação "ZIP" superando comerciantes humanos, e este fato levou Cliff a trabalhar em vários bancos de investimento, entre eles o *Deutsche Bank* (em Londres). Cliff então renuncia ao Deutsche e volta às universidades no final de 2005 passando pela Universidade de Southampton (na Inglaterra) e pela Universidade de

Bristol (no Reino Unido), onde atua desde 2007. Desde outubro de 2005, Cliff é diretor da Iniciativa de Pesquisa e Treinamento do Reino Unido na Ciência e Engenharia de Sistemas de TI Complexos de Grande Escala (LSCITS) que é financiada por quase 10 milhões de fundos públicos do Reino Unido e apoio significativo de parceiros da indústria. Em 2013, Cliff apresentou o documentário de TV "*The Joy of Logic*", na BBC Four que, em 2015, ganhou como melhor filme internacional no Festival de Cinema Ciência – Academia Film Olomouc. Além disso, Cliff se apresenta regularmente junto com outros cientistas nos eventos da *GCSE Science*. Atualmente, Cliff pesquisa sobre os temas: sistemas complexos de tecnologia Ultra-Large-Scale-Sistemas Sócio-Técnicos Intensivos em geral, e LSCITS, em particular.

Figura: Dave Cliff (1966-).
Fonte: <http://bit.ly/2Jzv2g1>.

- O algoritmo de negociação ZIP (*Zero-Intelligence-Plus*) citado no vídeo (2:00-3:08), criado por Dave Cliff em 1996, é um dos primeiros da geração atual de sistemas de negociação algorítmica adaptativa autônoma. É um algoritmo simples, rápido, gratuito e, além disso, se mostrou mais eficiente que os humanos nas negociações da bolsa de valores. Cliff inventou o ZIP enquanto trabalhava com Ciência da Computação e Inteligência Artificial na Universidade de Sussex, no Reino Unido. Nessa época, ele propôs à empresa HP Labs (Hewlett Packard Labs) o desenvolvimento de algoritmos para negociação em leilões eletrônicos e, em contrapartida, a Universidade de Sussex impôs a restrição de que o trabalho fosse publicado como um relatório técnico da HP Labs e, por isso, o ZIP se tornou gratuito. Os detalhes completos do algoritmo, incluindo o código-fonte "C", foram publicados na Internet em 1997 e, para os interessados em se aprofundar no assunto, sugerimos o *site* <https://goo.gl/kpeY2s>.
- A palavra "lógica" tem origem no grego $\lambda o\gamma\iota\kappa\acute{\eta}$ (logiké) que significa tanto "pensamento", "razão", "raciocínio" quanto "linguagem", "discurso articulado". Atualmente, a palavra lógica pode ser empregada em diversos contextos e com significados diferentes. Uma afirmação interessante (com a qual concordamos) no contexto da questão de se encontrar uma boa definição de lógica é dada por Copi (1981): "*...para compreender o que é, de fato,*

lógica, uma pessoa tem que estudá-la.". Conforme Machado e da Cunha (2008), a Lógica (ou Dialética) era uma das três disciplinas básicas (Trivium[b]) presentes na formação do homem grego na Grécia Antiga, e referia-se ao exercício da capacidade de argumentação, no discernimento entre os bons e os maus argumentos. Esta lógica aristotélica, também chamada de *lógica formal* ou *lógica clássica*, é a lógica que geralmente está presente no contexto da ciência.

De acordo com Velasco (2017), a lógica se dedica (no referente ao pensamento) aos princípios e métodos do raciocínio; igualmente, estuda (no que se refere à linguagem) os argumentos, atentando para o encadeamento entre as sentenças de determinada língua. Dessa forma, a lógica tem por objeto as inferências e os argumentos.

Segundo da Costa e Krause (2015), existe a "Lógica" (disciplina) e a "lógica" (sistema lógico). A Lógica (disciplina) é parte tanto da Filosofia quanto da Matemática, e tem se infiltrado em praticamente todas as áreas da investigação humana. Já a lógica (sistema lógico) popularmente associa-se à "lógica do mercado" ou à "lógica da criança", entre outras, que são denominações imprecisas e necessitam ser interpretadas com cautela.

Por fim, um registro de Wesley Salmon (1925-2001) sobre lógica:

> Quando as pessoas raciocinam, fazem inferências. Essas inferências podem transformar-se em argumentos e, as técnicas da Lógica podem então ser aplicadas aos argumentos resultantes. É desse modo que se avaliam as inferências a partir das quais os argumentos se originaram. A Lógica trata de argumentos e inferências. Um de seus objetivos fundamentais consiste em proporcionar métodos que permitam distinguir entre argumentos e inferências logicamente certos e aqueles que não o são.
>
> (Salmon *apud* Velasco, 2017)

Para melhor explorar o tema lógica, sugerimos as seguintes referências: da Costa e Krause (2015), Copi (1981), Velasco (2017), Machado e da Cunha (2008).

- O vídeo menciona que Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) foi o precursor da lógica formal (6:22-6:47). Nascido em Estagira, antiga cidade da Macedônia, Aristóteles foi um notável filósofo grego que, após abandonar a academia de Platão, desenvolveu sua própria filosofia, a qual divergia daquela de seu mestre na ênfase dada à observação sistemática da realidade e à tentativa de delinear leis indutivas. A sua ideia fundamental era a de tudo classificar, dividindo as coisas segundo a sua semelhança ou diferença, obedecendo a duas perguntas: – Como é esta coisa? (o gênero). – O que a difere de outras coisas semelhantes? (a diferença).

[b]Conjunto formado pelas três disciplinas (Gramática, Lógica, e Retórica) necessárias para a formação básica do homem, na Grécia Antiga. O estudo da Gramática era uma condição necessária para o domínio da língua. A Lógica, ou Dialética, dizia respeito ao exercício da capacidade de argumentação, no discernimento entre os bons e os maus argumentos. Na Retórica, o ponto fundamental era o convencimento dos outros, a persuasão. As metas do *Trivium* eram então: expressar-se adequadamente, argumentar de modo correto para parecer convincente e persuadir os outros à ação.

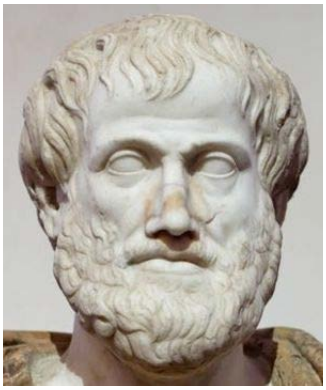


Figura: busto de Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.).
Fonte: Wikimedia Commons.

Sua contribuição mais duradoura à humanidade talvez seja a sistematização e exposição da lógica em uma série de obras posteriormente reunidas em um livro sob título Organon (“instrumento” ou “ferramenta”). Os livros que compõe o *Organon – Categorias*, *Da Interpretação*, *Analíticos* (Primeiros e Segundos), *Tópicos* e *Argumentos Sofísticos* – foram as principais obras do cânone do estudo da lógica até o século XIX.

De nosso conhecimento, existem apenas duas publicações do “*Organon*” em Português. São elas: (1) Edipro, tradução de Edson Bini e, (2) Lisboa Guimarães Editores, LDA, tradução de Pinharanda Gomes.

- O documentário indica que a ferramenta lógica mais famosa de Aristóteles é o silogismo (6:43-8:42). A palavra silogismo vem do grego *súllogus* ($\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\iota\sigma\mu \acute{o}\varsigma$), que significa “pôr proposições em conjunto”, mas também “inferir”, “raciocinar”. Segundo Gomes e D’Ottaviano (2010), inicialmente o termo designava “reunião”, donde se derivam as acepções “conta”, “cálculo” e, por vezes, “conjectura”.

  Porém, Aristóteles deu um novo significado ao termo: “inferir silogisticamente” ou “por meio de silogismo”. A lógica aristotélica define silogismo como um argumento que consiste de duas premissas e uma conclusão (conforme Machado e da Cunha (2008)). O documentário apresenta alguns exemplos de silogismos na apresentação de alguns professores, como foi o caso do professor Peter Millican (7:00):

  (Todos os) Professores de Filosofia são brilhantes. (Premissa)
  Peter Millican é professor de Filosofia. (Premissa)
  Peter Millican é brilhante. (Conclusão)

- Segundo Ferreira (2013), em Primeiros Analíticos, Aristóteles define o que é um *silogismo perfeito* ($\tau\acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\iota o\varsigma\ \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$), logo após ter definido o que é um silogismo:

> συλλογισμὸς δέ ἐστι λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι. λέγω δὲ τῷ ταῦτα εἶναι τὸ διὰ ταῦτα συμβαίνειν, τὸ δὲ διὰ ταῦτα συμβαίνειν τὸ μηδενὸς ἔξωθεν ὅρου προσδεῖν πρὸς τὸ γενέσθαι τὸ ἀναγκαῖον. τέλειον μὲν οὖν καλῶ συλλογισμὸν τὸν μηδενὸς ἄλλου προσδεόμενον παρὰ τὰ εἰλλημένα πρὸς τὸ φανῆναι τὸ ἀναγκαῖον, ἀτελῆ δὲ τὸν προσδεόμενον ἢ ἑνὸς ἢ πλειόνων, ἃ ἔστι μὲν ἀναγκαῖα διὰ τῶν ὑποκειμένων ὅρων, οὐ μὴν εἴληπται διὰ προτάσεων.
>
> Silogismo é um argumento no qual, colocadas certas coisas, outra distinta das estabelecidas decorre necessariamente porque essas coisas são o caso. Por "porque essas coisas são o caso" quero dizer decorrer em virtude delas; por "decorrer em virtude delas" quero dizer não carecer de nenhum termo externo para que o necessário venha a ser o caso. Chamo, assim, perfeito o silogismo que não carece de nenhuma outra coisa além das assumidas para tornar evidente o necessário; imperfeito, o que carece de uma ou mais, as quais são necessárias por causa dos termos estabelecidos, mas não foram assumidas entre as premissas.
>
> (Aristóteles *apud* Ferreira, 2013)

Ferreira (2013) afirma ainda que apesar de certa semelhança entre as definições de silogismo e silogismo perfeito, há entre elas uma diferença fundamental. Na definição de silogismo perfeito, Aristóteles diz que não se carece "de nenhuma outra coisa além das assumidas para tornar evidente o necessário". Assim, em um silogismo perfeito, não é permitida a ausência de uma premissa sem a qual a conclusão não resultaria, necessariamente, verdadeira. Porém, há muita controvérsia quanto a que seja esse estado de "perfeição" atingido e quanto a qual seja precisamente a contribuição do procedimento de redução para que um silogismo atinja esse estado. Desde meados do século passado, novas e interessantes interpretações a respeito da natureza de uma inferência silogística têm sido apresentadas e, a cada nova interpretação, uma tentativa diferente de esclarecer a noção de perfeição silogística foi empreendida.

Só se tem *silogismo científico* quando as premissas são verdadeiras. Quando, ao invés de verdadeiras, as premissas são simplesmente prováveis, isto é, fundadas na opinião[c], então se terá o *silogismo dialético*, que Aristóteles estuda nos *Tópicos*. Além de derivar de premissas fundadas na opinião, um silogismo também pode derivar de premissas que parecem fundamentadas, mas que, na realidade, são premissas falsas. Temos, então, o *silogismo erístico*. Vale ressaltar que tal silogismo, embora apresente premissas falsas, é considerado um argumento válido. Em seus argumentos, Aristóteles considera apenas proposições que não dão margem a dúvidas, ditas *Proposições Categóricas*, que se apresentam apenas em 4 tipos básicos, a saber:

Afirmação Universal: "Todo *a* é *b*".

Negação Universal: "Nenhum *a* é *b*".

[c]Quando se declara que a conclusão é verdadeira por uma pessoa ou organização tidas por autoridades no assunto a declararem verdadeira.

Afirmação Particular: “Algum *a* é *b*”.

Negação Particular: “Algum *a* não é *b*”.

Para melhor compreensão do que foi exposto até o momento, tomemos os exemplos dados a seguir.

(a) Silogismos perfeitos:

1. Todo homem é mortal. (Premissa: Afirmação Universal)
   Sócrates é homem. (Premissa: Afirmação Particular)
   Sócrates é mortal. (Conclusão)
2. Todos os girassóis são amarelos. (Premissa: Afirmação Universal)
   Alguns pássaros não são amarelos. (Premissa: Negação Particular)
   Alguns pássaros não são girassóis. (Conclusão)
3. Todos os baianos são brasileiros. (Premissa: Afirmação Universal)
   Todos os soteropolitanos são baianos. (Premissa: Afirmação Universal)
   Todos os soteropolitanos são brasileiros. (Conclusão)

(b) Silogismo dialético:

Quem ama, sofre. (Premissa fundada em opinião)
Maria ama João. (Premissa: Afirmação Particular)
Maria sofre. (Conclusão)

(c) Silogismo erístico:

Toda fruta é vermelha. (Premissa falsa: Afirmação Universal)
Existe maçã que não é vermelha. (Premissa: Negação Particular)
Existe maçã que não é fruta. (Conclusão)

- Além dos conceitos de premissa, conclusão e proposição categórica, outros ainda se fazem necessários no estudo de silogismos, como: *premissa maior*, *premissa menor*, *termo maior*, *termo médio* e *termo menor*. No silogismo perfeito do Exemplo 1 em (a), tem-se:

  Todo homem é mortal. (Premissa Maior)
  Sócrates é homem. (Premissa Menor)
  Sócrates é mortal. (Conclusão)

  onde o “termo maior” é mortal, o termo médio é homem e o termo menor é Aristóteles. O sujeito da conclusão é o termo menor que figura na premissa menor, o predicado da conclusão é o termo maior que figura na premissa maior e o termo médio que deve aparecer nas duas premissas, porém não se faz presente na conclusão.

  Note que o argumento dado a seguir não pode ser considerado um silogismo devido à ausência do termo médio.

  Todos as crianças são meigas. (Premissa)

Algumas aves são amarelas. (Premissa)

????? (Conclusão)

Dependendo da posição do termo médio (b), há 4 classes de silogismos, que Aristóteles chamou de figuras.

PROPOSIÇÃO	Figura 1 termos envolvidos	Figura 2 termos envolvidos	Figura 3 termos envolvidos	Figura 4 termos envolvidos
Premissa 1	b e a	a e b	b e a	a e b
Premissa 2	c e b	c e b	b e c	b e c
Conclusão	c e a	c e a	c e a	c e a

Fonte: Machado e da Cunha (2008).

No Exemplo 3 em (a), os termos a, b e c são respectivamente: brasileiros, baianos e soteropolitanos, o que caracteriza a Figura 1 no quadro anterior.

- É possível mostrar que existem 256 tipos de silogismos (8:20). Para isso, basta notar que em um silogismo aristotélico, cada proposição envolve dois termos – um sujeito e um predicado. Além disso, as duas premissas não podem ser totalmente desvinculadas, devendo apresentar um elemento em comum que é chamado de termo médio.

  Observe que cada uma das 3 proposições envolvidas nas premissas de um silogismo pode ser de uma das 4 formas categóricas básicas. Logo, há $4 \times 4 \times 4 = 64$ possibilidades, para cada classe de silogismo descrito no quadro acima. Portanto, o número possível de silogismos é dado por $4 \times 64 = 256$. Porém, dos 256 silogismos possíveis, apenas 24 são considerados coerentes e desses, somente 19 não podem ser reescritos de maneira óbvia em função dos demais. Vejamos um exemplo de silogismo que não é considerado coerente:

  Todos os cães são corajosos. (Premissa)

  Todos os cães são meigos. (Premissa)

  Todos os meigos são corajosos. (Conclusão)

  Observemos, agora, um exemplo onde o segundo silogismo é consequência do primeiro e, por isso, também não é considerado legítimo.

Todos os quadrados são retângulos. (Premissa)	Todos os quadrados são retângulos. (Premissa)
Todos os retângulos são trapézios. (Premissa)	Todos os retângulos são trapézios. (Premissa)
Todos os quadrados são trapézios. (Conclusão)	**Alguns** os quadrados são trapézios. (Conclusão)

Para os interessados em se aprofundar no tema silogismo, sugerimos as seguintes referências: Ferreia (2013), Machado e da Cunha (2008), Gomes e D'Ottaviano (2010).

- O documentário afirma que o jogo de lógica mais popular da atualidade é o sudoku (12:23). O nome sudoku é uma simplificação da frase “*suji wa dokushin ni kagiru*”, que significa “os números têm que ser únicos”. O sudoku é um quebra-cabeça numérico em que, em um espaço de 9×9 células, os numerais de 1 a 9 devem ser dispostos sem repetição nas linhas, nas colunas e nas regiões de 3×3 células delimitadas em destaque, às vezes chamadas de blocos ou caixas. Não são realizados quaisquer cálculos matemáticos e há apenas uma solução possível. A partir dos números dados previamente, o jogador deve completar todas as 81 células utilizando apenas a lógica (não é necessário qualquer “chute”) .

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Figura: Sudoku 9×9.

Fonte: Wikimedia Commons.

O sudoku como hoje conhecemos, foi criado pelo arquiteto americano Howard Garns (1905-1989) quando tinha 74 anos de idade, provavelmente utilizando como base o quadrado latino, assim denominado por Leonhard Euler (1707-1783) pelo fato dele utilizar letras latinas em seus estudos. Euler começou os estudos no tema por volta de 1726 e, em 1779, expôs os quadrados latinos para tentar resolver o problema dos 36 oficiais. Este problema consiste em, dados seis regimentos, cada um com seis oficiais e com postos diferentes, alinhar os 36 oficiais em uma formação de seis linhas por seis colunas, de modo que cada linha e cada coluna tivesse apenas um oficial de cada posto e de cada regimento.

O sudoku só ganhou projeção mundial após 2004, quando Wayne Gould (1945-), um juiz aposentado que conheceu o jogo em uma visita ao Japão em 1997, criou um programa capaz de gerar diferentes jogos e propôs ao jornal Britânico “*The Times*” que publicasse o passatempo em suas páginas. O sucesso alcançado pelo jogo foi tanto que outros jornais resolveram fazer o mesmo, publicando também o jogo em suas páginas. A partir de então, o sudoku passou a ganhar popularidade e se transformou em fonte de estudo e pesquisa para diversos matemáticos.

O número de grades completas de sudokus 9×9, foi determinada por Bertram Felgenhauer e Frazer Jarvis no ano de 2005, utilizando computadores e algoritmos especialmente preparados para essa tarefa, obtendo um número gigantesco (6 670 903 752 021 072 936 960, ou aproximadamente, $6,67 \times 10^{21}$). Durante o processo de contagem, os matemáticos encontraram dentro desse universo, diversos jogos considerados simétricos e, então, efetuando algumas reduções, foi possível determinar a quantidade de “grades essencialmente diferentes” que são em número de 5 472 730 538. Um exercício interessante de combinatória que pode ser aplicado no Ensino Médio é contar o número de grades de sudoku diferentes numa versão reduzida 4×4 (resposta: 288).

Existem também vários aplicativos e jogos online disponíveis gratuitamente para jogar sudoku. Entre eles:

<https://sudoku.com/>, <http://bit.ly/32RPIYn> e <https://apple.co/2YpIviO>.

Aos interessados em se aprofundar nos tópicos de quadrados latinos e sudokus, recomendamos as seguintes referências: dos Santos (2018), Kovačec (2012), Isto é Matemática (T04-E13), Math Explorer’s Clube (2009).

- O vídeo menciona que argumentar com premissas verdadeiras, mas conclusões falsas, é falacioso (8:35-9:25). O termo “falácia” tem sua origem no latim, *fallacia* (engano, ardil), *fallax* (o que engana) e, por vezes, é usado como sinônimo de “sofisma”. Segundo Machado e da Cunha (2008), falácia ou sofisma são termos que dizem respeito a argumentações que não são bem construídas, não são coerentes, ou ainda, não são válidas. Na linguagem usual, a palavra falácia é utilizada para fazer referência a um argumento que parece correto, mas que, na realidade, não é correto – são as *falácias informais*. Alguns exemplos de falácias informais são dadas a seguir.

  – Falácia do apelo à autoridade (quando se declara que a conclusão é verdadeira por uma pessoa ou organização tidas por autoridades no assunto a declararem verdadeira):

Figura: tirinha da Mafalda.

  – Falácia da falsa causa (argumento segundo o qual por um fato se seguir a outro se conclui que o primeiro é causa do segundo): “Levei um tombo ao subir a escada. Logo, levei um tombo porque subi a escada.”.

  – Falácia do apelo à piedade (quando se apela aos sentimentos a quem nos dirigimos, ao invés de apresentar razões objetivas):

Figura: tirinha de Calvin e Haroldo.

– Falácia do acidente convertido ou generalização apressada (argumentação que consiste em tomar uma exceção como regra):

  Quando ficamos bêbados, nós dormimos.
  Quando dormimos, não pecamos.
  Quando não pecamos, vamos pro céu.
  Então vamos ficar bêbados e ir pro céu!

As *falácias formais* acontecem quando se apresentam todas as premissas verdadeiras e, simultaneamente, a conclusão falsa. A seguir apresentamos alguns exemplos de falácias formais.

– Falácia de afirmar o consequente (8:49-8:58).

Todos os gatos têm quatro patas.	(Premissa)
Meu cachorro tem quatro patas.	(Premissa)
Portanto, meu cão é um gato.	(Conclusão)

– Falácia de negar o antecedente.

Se Maria é brasileira então Maria é inteligente.	(Premissa)
Maria não é brasileira.	(Premissa)
Logo, Maria não é inteligente.	(Conclusão)

Para o leitor interessado em se aprofundar sobre o tópico de falácias, indicamos as seguintes referências: Cesar (2007), Wikidot (2009), Copi (1981)

- O vídeo afirma que não foram só os filósofos que se apaixonaram pela lógica e que, no século XIX, um matemático teve um papel importante na missão de tornar a lógica atraente para o público em geral (9:45-12:16). Esse matemático foi Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) que usava o pseudônimo de Lewis Carroll. Carroll nasceu em Cheshire, um condado da Inglaterra. Ele era filho de um pastor anglicano, teve dez irmãos e cresceu em um ambiente cheio de crianças, onde aprendeu a contar histórias. Ele desviou-se do caminho religioso, sonhado pelo pai, em 1851, quando foi estudar Matemática na Universidade de Oxford, onde foi professor mais tarde.

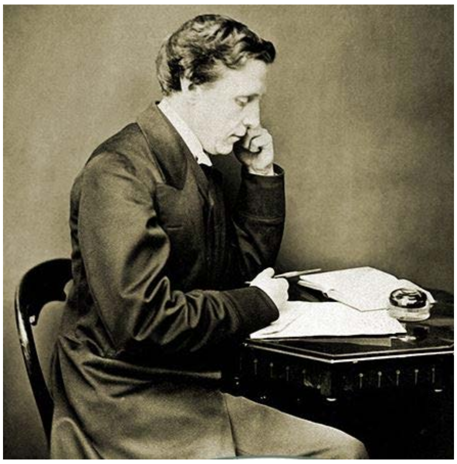


Figura: Lewis Carroll (1832-1898).

Fonte: Wikimedia Commons. ou <http://www.lewiscarroll.org/>

Enquanto era professor, Carroll publicou vários livros de Matemática e alguns poemas. Nessa época, conheceu Henry Liddell, que também trabalhava na Universidade de Oxford e que veio a tornar-se seu grande amigo. Liddell era pai de Alice, fonte de inspiração para o livro "Alice no País das Maravilhas", publicado pela primeira vez em 1865 e traduzido para mais de 30 idiomas (incluindo uma edição em Braile), além de ter sido um dos primeiros textos a circular na internet em edição virtual. A obra é resultado de um passeio em 1862 no qual Carroll conta para Alice uma história improvisada sobre uma menina que ia parar embaixo da terra. Carroll também foi fotógrafo amador e grande fã de magia, ilusionismo e enigmas de lógica. Além de tratados matemáticos, livros de lógica, adivinhações e jogos, Lewis Carroll ainda escreveu "Alice através do Espelho", história famosa que envolve a mesma personagem em situações que exploram a linguagem simbólica.

Figura: Alice Liddell (1852-1934).

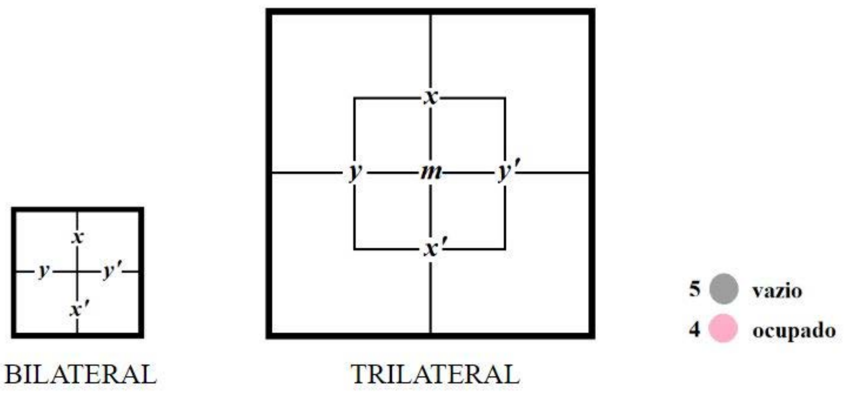
Fonte: Wikimedia Commons.

O pseudônimo Lewis Carroll não foi criado por Dodgson ao acaso. Dodgson traduziu seu nome em inglês “Charles Lutwidge” para Latim, formando o nome *Ludovicus Carolus*. Depois, passou novamente para o Inglês, criando o famoso Lewis Carroll. Vale ressaltar que, na escola, o escritor não era grande fã de literatura, nem de gramática. Sua grande paixão era a Matemática.

Alguns vídeos que abordam mais detalhadamente o raciocínio lógico envolvido nas histórias de Alice estão no site da coleção Matemática Multimídia, da UNICAMP. Dentre eles, sugerimos os seguintes. “A Lógica de Alice” (<http://bit.ly/2Y15fFT>), “Alice, Os Paradoxos e A Formalização” (<http://bit.ly/2XJhlnK>) e “A Revanche de Alice” (<http://bit.ly/2SfS52c>).

Para os interessados em se aprofundar nas obras de Carroll, sugerimos as referências seguintes referências: Teixeira (2007), Silva, de Souza e da Silva (2013), de Souza e Maggio (2012).

- Segundo o vídeo, Lewis Carroll acreditava que os jovens precisavam de uma ferramenta para identificar argumentos falaciosos e, por isso, escreveu obras como “Lógica Simbólica” e “O Jogo da Lógica” (11:36-11:55). Nesse último, ele apresenta um jogo de tabuleiro criado com o objetivo de ensinar lógica a seus alunos e leitores, onde,a partir de determinadas premissas que eram codificadas nesse tabuleiro, era possível inferir uma ou mais sentenças apenas com a manipulação de fichas coloridas sobre esse tabuleiro. O tabuleiro consiste de dois diagramas (bilateral e trilateral) e 9 fichas (5 cinzas e 4 rosas).

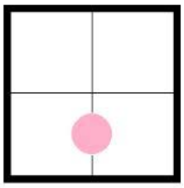


O diagrama bilateral apresenta as regiões: norte (x), sul (x’), leste (y’) e oeste (y), onde x e y são predicados de um sujeito que pertencem a um universo estabelecido previamente e, x’ e y’, as respectivas negações dessas propriedades.

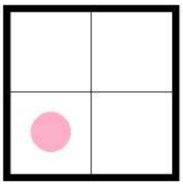
O diagrama trilateral apresenta, além das regiões já citadas, a região interna (m), que representa uma propriedade e a região externa (m’) que representa a negação de m.

Quando uma ficha rosa é colocada em uma região, significa que existe pelo menos um elemento nesta região. Se uma ficha rosa estiver na linha divisória de duas regiões, significa que existe pelo menos um elemento no compartimento formado por essas regiões, mas não é possível precisar em qual delas. Uma ficha cinza dentro de uma região representa que não há um elemento sequer nesta região.

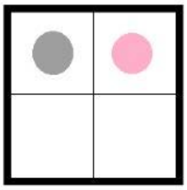
Por exemplo, considerando os tabuleiros bilaterais abaixo, tem-se:



Existe *x*'.



Existe *x*' que é também *y*.

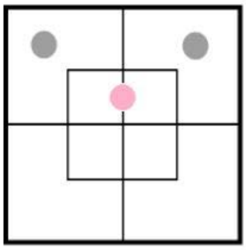


Todo *x* é *y*'.

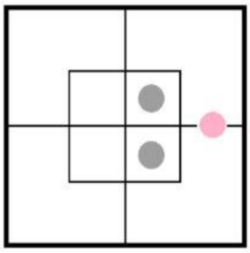
Note que as premissas que envolvem o "todo" são abertas em duas premissas equivalentes, ou seja, para representar que todo *x* é *y*', deve-se representar que existe *x* que é *y*' e não existe *x* que é *y*. Tomando-se o universo dos brinquedos, *x* como a propriedade ser colorido e *y* a propriedade ser grande, as configurações das imagens anteriores podem ser lidas assim:

Existe *x*'.	Existe brinquedo que não é colorido.
Existe *x*' que é também *y*.	Existe brinquedo que não é colorido e é grande.
Todo *x* é *y*'.	Todo brinquedo colorido não é grande.

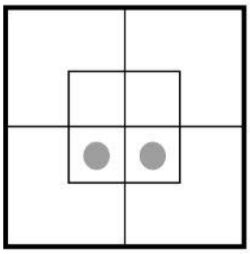
No diagrama trilateral são possíveis outras configurações, como nos exemplos a seguir:



Todo *x* é *m*.

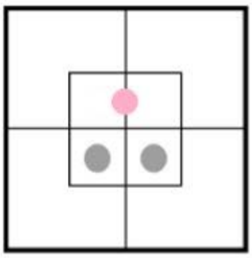


Todo *y*' é *m*'.

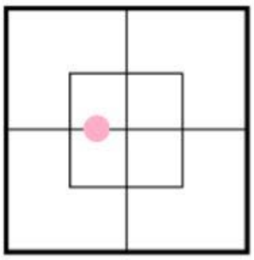


Não existe *m* que seja *x*'.

Depois de compreendidas as possíveis representações nesse tabuleiro, é possível utilizá-lo para apresentar uma argumentação de forma coerente. Vejamos um exemplo. Dadas as premissas: (1) Todo homem é mortal e (2) Aristóteles é homem, como representá-las no tabuleiro e que conclusão ele nos oferece a partir dessas premissas? Primeiramente, tomemos no universo das criaturas terrenas, as letras *m*, *x* e *y* para representar os predicados, ser homem, ser mortal e ser Aristóteles, respectivamente. Daí, temos a seguinte representação em diagramas:

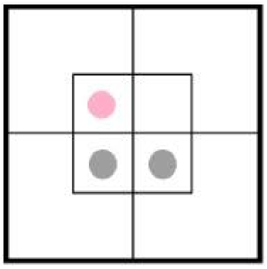


Premissa (1): todo *m* é *x*.

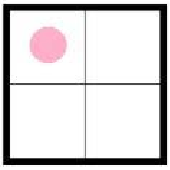


Premissa (2): Existe *y* que é *m*.

Tais premissas são então expressas em um só diagrama, conforme a figura abaixo.

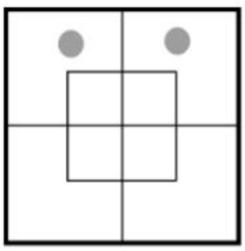


Daí, devemos reduzir o diagrama trilateral a um bilateral mediante algumas regras do jogo, como por exemplo: se um quadrante de um diagrama trilateral tem duas fichas cinzas, então esse quadrante terá uma conta cinza no diagrama bilateral e, se um quadrante tiver uma ficha rosa no diagrama trilateral, esse quadrante terá uma conta rosa no diagrama bilateral. No caso analisado, o diagrama trilateral será reduzido ao diagrama a seguir. Portanto, a conclusão da argumentação é: Aristóteles é mortal.

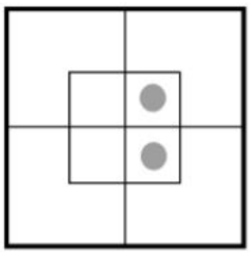


Conclusão: existe *x* que é *y*.

Vejamos outra argumentação: considere as premissas (1) Nenhum cachorro é feroz e (2) Nenhum animal com fome é manso. Tome ainda as letras *m*, *x* e *y* como, respectivamente, ser manso, ser cachorro e estar alimentado. Considere ainda *m*’ e *y*’ como, ser feroz e estar com fome, respectivamente, as negações de *m* e *y*. Temos então a seguinte representação em diagramas:

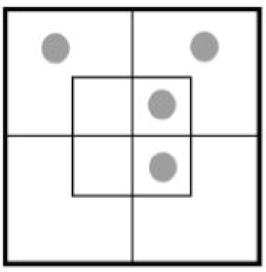


Premissa (1): nenhum *x* é *m*’.

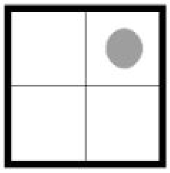


Premissa (2): nenhum *y*’ é *m*.

Expressando os dois diagramas acima em apenas um, tem-se o diagrama seguinte:



Daí, reduzindo-se a um diagrama bilateral indicador a seguir. Portanto, a conclusão extraída do diagrama é que, nenhum cachorro está com fome.



Conclusão: nenhum *x* é *y*'.

Para os interessados em mais detalhes sobre o jogo de tabuleiro da obra de Carroll, sugerimos as seguintes referências: Teixeira (2007), Coelho (2008).

- A professora Muffy Calder (1958-) afirma no vídeo que, para ela, o herói da lógica é George Boole (1815-1864), pois a lógica booleana é simples, mas fundamental para explicar o nosso mundo, cheio de sistemas complexos que ele jamais teria imaginado. Para Calder, é brilhante que revisitemos muitas ideias lógicas inventadas e concebidas há mais de 100 anos, antes que qualquer um imaginasse os sistemas aos quais elas seriam aplicadas (15:45-16:49). Em meados do século XIX, segundo o vídeo, ao lançar a obra "*The Mathematical Analysis Logic*", um matemático afirmava que o verdadeiro propósito da lógica era a matemática (13:09-17:04), esse matemático era George Boole. Boole foi um matemático e filósofo britânico com contribuições importantes no estudo da lógica matemática. Boole era proveniente de uma família modesta, teve suas primeiras aulas de matemática com seu pai e aprendeu, praticamente sozinho, vários idiomas como: latim, grego, francês, alemão e italiano. Mesmo sem formação acadêmica, Boole começou a lecionar com 16 anos e abriu uma escola onde lecionava matemática, quando tinha apenas 20 anos. Tornou-se amigo de De Morgan (1806-1871) e interessou-se por uma controvérsia sobre lógica que o filósofo escocês Sir William Hamilton (1805-1865) tinha iniciado com De Morgan. O resultado foi que Boole ,em 1847, publicou uma obra curta chamada "*The Mathematical Analysis Logic*", um pequeno livro que marcou época. Mais tarde, em 1849, foi professor de Matemática e Lógica no *Queen's College*, em Cork, na Irlanda e, em 1854 publicou sua obra mais famosa: "*An Investigation of the Laws of Thought*", onde definiu as teorias matemáticas da lógica e da probabilidade estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra. Boole desenvolveu a ideia de que as proposições lógicas podem ser expressas em uma linguagem puramente simbólica. O ponto central da obra de Boole é o cálculo proposicional que dá origem à Álgebra Booleana, básica para o *design* de circuitos de computadores digitais e telefonia.

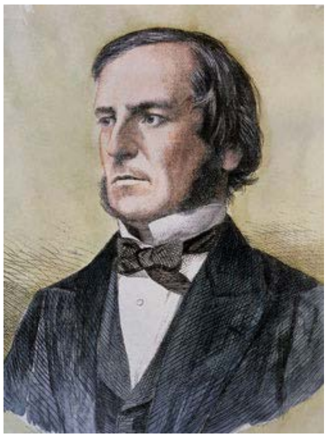


Figura: George Boole (1815-1864).
Fonte: Wikimedia Commons.

Boole também escreveu um tratado sobre Equações Diferenciais, um tratado em Cálculo de Diferenças Finitas, trabalhou em métodos gerais de probabilidades e foi um dos primeiros a investigar as propriedades básicas de classes[d], como por exemplo, a propriedade distributiva. George Boole morreu na Irlanda, aos quarenta e nove anos de idade, um século antes da revolução dos microcomputadores.

Para um aprofundamento sobre a biografia de Boole e Álgebra Booleana, sugerimos as referências seguintes: de Souza (2005), Dias (1994).

- O apresentador Dave Cliff afirma no documentário que Boole nunca soube, mas graças a ele (Boole), os computadores de hoje processam as informações como dígitos binários ou bits (16:50). Cliff diz ainda que com o sistema binário, qualquer número pode ser representado por combinações de uns e zeros. A tabela a seguir exibe alguns exemplos.

Base 10 (base decimal)	Base 2 (base binária)
2 = $\mathbf{2}\cdot 10^0$	10 = $\mathbf{1}\cdot 2^1+\mathbf{0}\cdot 2^0$
3 = $\mathbf{3}\cdot 10^0$	11 = $\mathbf{1}\cdot 2^1+\mathbf{1}\cdot 2^0$
5 = $\mathbf{5}\cdot 10^0$	101 = $\mathbf{1}\cdot 2^2+\mathbf{0}\cdot 2^1+\mathbf{1}\cdot 2^0$
7 = $\mathbf{7}\cdot 10^0$	111 = $\mathbf{1}\cdot 2^2+\mathbf{1}\cdot 2^1+\mathbf{1}\cdot 2^0$
12 = $\mathbf{1}\cdot 10^1+\mathbf{2}\cdot 10^0$	1100 = $\mathbf{1}\cdot 2^3+\mathbf{1}\cdot 2^2+\mathbf{0}\cdot 2^1+\mathbf{0}\cdot 2^0$

Cliff realiza então uma experiência com crianças, na intenção de mostrar como a lógica de Boole pode ser usada na computação. Ele constrói um circuito onde as partes mais importantes, segundo ele, são as junções nas quais os bits de informação são combinados e transferidos, chamadas de *portas lógicas booleanas*. A organização das portas lógicas determina o que o circuito pode fazer, que pode ser uma simples soma ou cálculos muito complexos.

[d]Segundo Dias (1994), uma classe encerra uma multiplicidade de entes de qualquer ordem (quer seja lógica, matemática, humana, física, ou outras) e uma função entre estes mesmos entes. Uma classe, desta maneira, é constituída por todos os termos que verificam uma determinada função.

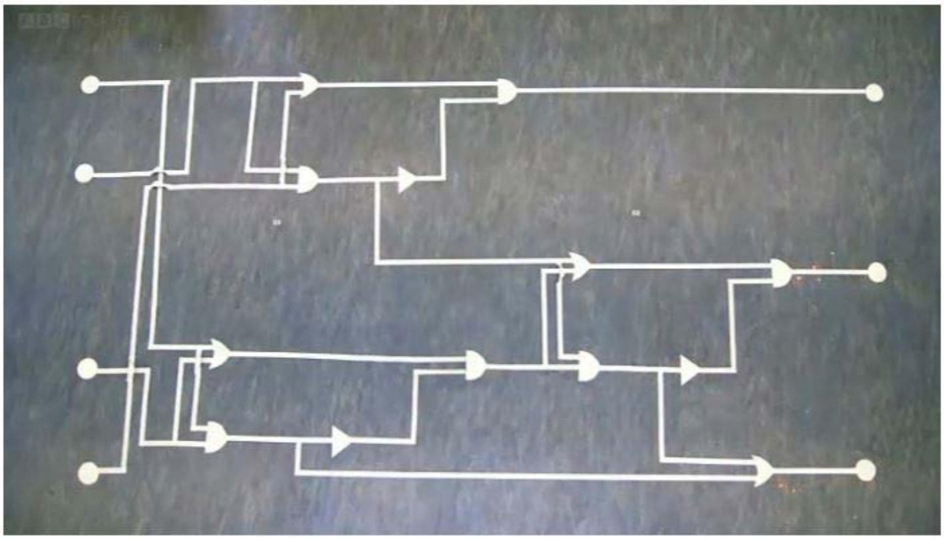


Figura: quadro do vídeo “As Maravilhas da LÓGICA”.

Na experiência de Cliff com as crianças, ele utiliza apenas as portas lógicas simples, “e” (), “não” () e “ou” () e um circuito desenhado no chão, com o objetivo de somar dois determinados números. As crianças devem transferir os uns e os zeros tocando a criança seguinte na fila, para ela ser 1, ou não a tocando, para ela ser zero. Algumas crianças se posicionam nos lugares que representam as portas lógicas e outras crianças se posicionam nos lugares que representam os dois números que serão somados, no caso, 2 e 3.

Figura: quadro do vídeo “As Maravilhas da LÓGICA”.

As portas lógicas “e”, “ou” e “não” operam da seguinte forma descritas nas tabelas a seguir.

A	B	A **e** B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A **ou** B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	**não** A
0	1
1	0

Portanto, de acordo com o circuito desenhado no chão, temos configuração descrita na figura a seguir.

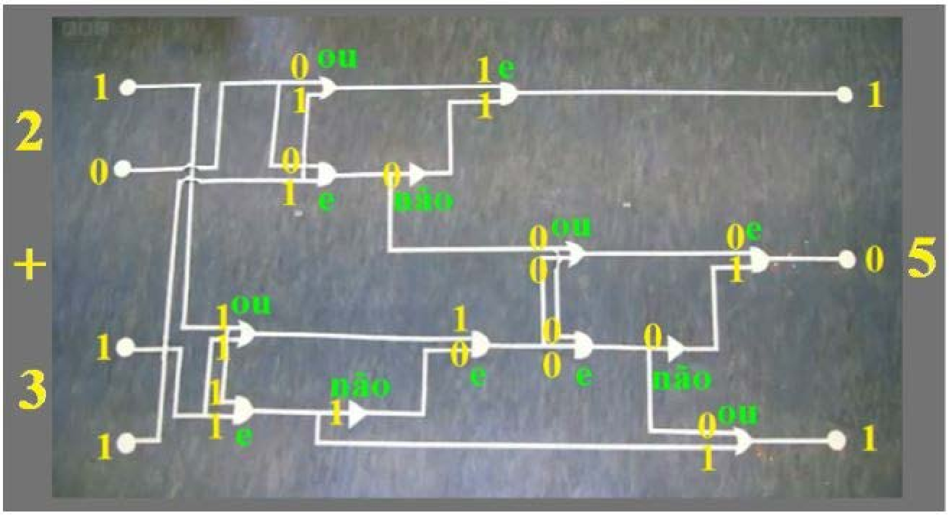


Figura: circuito simples para somar números de 0 a 3 (no caso, 2 + 3 = 5), com portas lógicas, como no vídeo.

Dessa forma, as crianças seguem pelo circuito de acordo com as instruções dada pelo apresentador e comemoram o resultado que vai ao encontro do que era esperado, o número 5. Podemos simular essa soma de forma mais dinâmica utilizando o *The Logic Lab*, que é um aplicativo *online* para simular circuitos simples ou portas lógicas. Veja em <http://bit.ly/2ZbyH9q> o circuito utilizado pelas crianças para efetuar a soma $2+3=5$ (é necessário ter o plug-in Flash para executar o aplicativo).

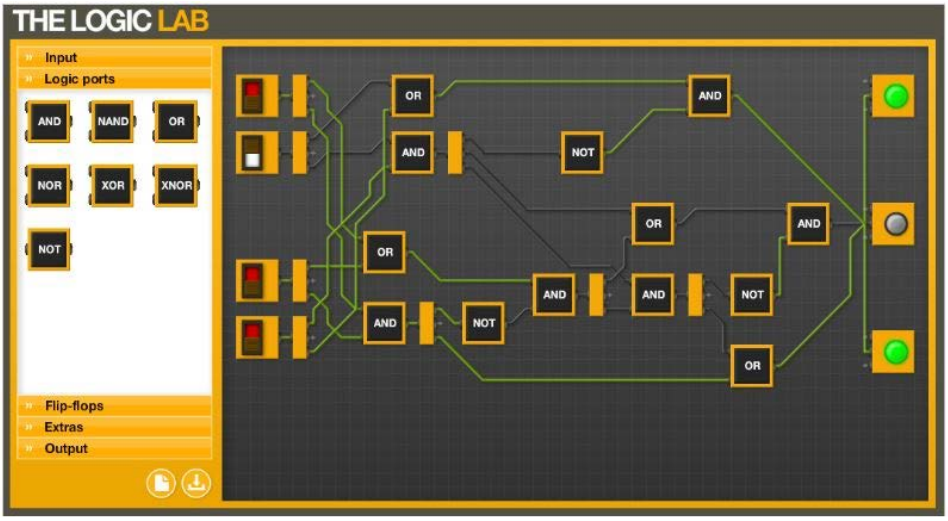


Figura: circuito simples para somar números de 0 a 3 (no caso, $2+3=5$), com portas lógicas, utilizando o aplicativo *The Logic Lab*.

Utilizando ainda o circuito montado no *The Logic Lab*, podemos efetuar outras somas (com números que variem de 0 a 3) como por exemplo $3+3=6$.

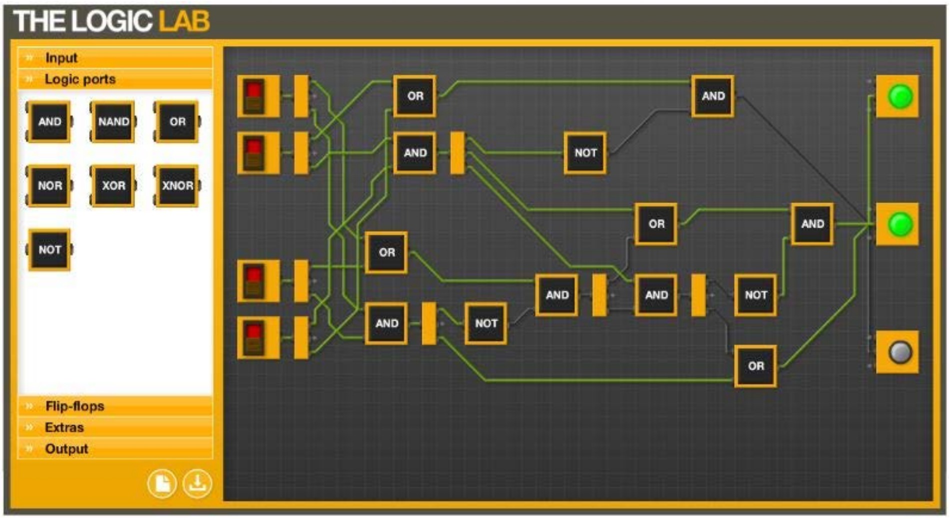


Figura: circuito simples para somar números de 0 a 3 (no caso, $3+3=6$), com portas lógicas, utilizando o aplicativo *The Logic Lab*.

- No vídeo, a professora Muffy Calder afirma que existem diferentes lógicas porque há diferentes tipos de sistemas ou mundos sobre os quais queremos raciocinar, porém todas as lógicas têm um ponto em comum: tratam de axiomas e regras que não levam à ambiguidade (21:08-21:43). Segundo Machado e da Cunha (2008), quando nos referimos à lógica, no contexto da ciência, estamos, geralmente, nos referindo à lógica formal, também chamada lógica clássica ou de Aristóteles. Porém, existem outras lógicas – as lógicas não-clássicas – que podem ser extensões da lógica formal, ou alternativas a ela, isto é, que se contrapõem à lógica formal. As lógicas alternativas à lógica clássica são ainda subdivididas em: lógicas trivalentes, lógicas polivalentes e lógicas paraconsistentes. Basicamente, ainda segundo Machado e da Cunha, tem-se:

  - Lógica clássica ou formal ou de Aristóteles (atemporal)

Modus Ponens	*Modus Tollens*
se p então q (premissa)	se p então q (premissa)
p (premissa)	$\sim q$ (premissa)
q (conclusão)	$\sim p$ (conclusão)

  - Lógicas não-clássicas
    - Extensões da lógica clássica
      - Lógicas temporais: consideram o fator tempo na atribuição de valor verdade a uma afirmação e na validação de um argumento.
      - Lógicas Modais: incorporam operadores que modulam, ou matizam a verdade ou a falsidade, representando as ideias de possibilidade e de necessidade.
    - Alternativas à lógica clássica

◇ Lógicas trivalentes: contemplam três valores de verdade, a saber, o verdadeiro, o falso e o que não é nem verdadeiro, nem falso, por ser desconhecido ou incerto.

◇ Lógicas polivalentes: são, fundamentalmente, lógicas probabilísticas, em que os diversos valores de verdade não se reduzem ao conjunto binário $\{0,l\}$, mas situam-se no intervalo [0,l]. Nessa classe, destacam-se as lógicas *fuzzy*[e] e indutiva.

◇ Lógicas paraconsistentes: negam o princípio da não-contradição, aceitando que uma proposição possa ser e não-ser, simultaneamente, verdadeira.

A lógica *fuzzy*, também conhecida como *lógica difusa* ou *lógica nebulosa*, foi estruturada por Lotfali A. Zadeh (1921-2017), na intenção de resolver problemas de lógica incompatíveis com a lógica clássica. A lógica *fuzzy* permite representar valores lógicos intermediários entre Verdadeiro e Falso, possibilitando o tratamento de atributos imprecisos, como altura, velocidade, tamanho, quantidade etc. Inicialmente, Zadeh foi criticado por vários cientistas e estudiosos da área da computação, porém logo sua idéia foi aceita nesse meio, sendo alvo de várias publicações que abordavam aplicações dos sistemas *fuzzy*.

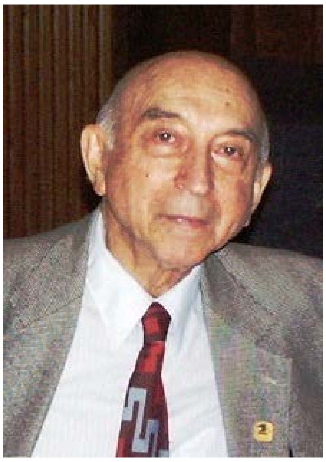


Figura: Lotfali Askar-Zadeh (1921-2017).

Fonte: Wikimedia Commons.

A lógica *fuzzy* é baseada na teoria dos Conjuntos *Fuzzy* ou Nebulosos, que afirma existir um grau de pertinência de um dado elemento a um determinado conjunto; diferente da teoria clássica dos conjuntos, onde cada elemento do universo considerado pertence ou não pertence a um referido conjunto. Daí, na lógica *fuzzy*, uma premissa variar em grau de verdade de "0" a "1", o que leva essa premissa a ser parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa. Segundo Cavalcanti (2012), a força da lógica *fuzzy* deriva da sua habilidade em inferir conclusões e

[e]*Fuzzy*, em inglês, significa incerto, duvidoso.

gerar respostas baseadas em informações vagas, ambíguas e qualitativamente incompletas e imprecisas. Neste aspecto, os sistemas de base *fuzzy* têm habilidade de raciocinar de forma semelhante a dos humanos. Seu comportamento é representado de maneira muito simples e natural, levando à construção de sistemas compreensíveis e de fácil manutenção. Daí, a lógica *fuzzy* ser uma ferramenta capaz de capturar informações vagas, em geral descritas em uma linguagem natural e convertê-las para um formato numérico, de fácil manipulação pelos computadores de hoje em dia. Frases como: *mais tarde procuro você*, *um pouco mais*, *eu não me sinto muito bem*, são expressões *fuzzy*.

Segundo Rignel, Chenci e Lucas (2011), o interesse em aplicar sistemas *fuzzy* foi demonstrado inicialmente pelos japoneses Seiji Yasunobu e Soji Miyamoto, que em 1985 apresentaram simulações de sistemas *fuzzy* em uma estrada de ferro de Sendai. Em 1987, em um encontro internacional de pesquisadores de lógica difusa, ocorrido em Tókio, foram demonstrados diversos trabalhos com tais aplicações. Desde então, em 1988, foi fundado o laboratório internacional de engenharia *fuzzy*, uma cooperativa que compreendia 48 companhias para pesquisa nesses sistemas.

Os sistemas *fuzzy* podem ser utilizados para estimativas, tomadas de decisões, sistemas de controle mecânico, tais como condicionadores de ar, controles de automóveis, e mesmo edifícios inteligentes, controles de projetos industriais e um número grande de outras aplicações (SARAIVA, 2000). Certamente, o mais espetacular sistema *fuzzy*, funcionando hoje em dia, seja o controle do “metrô” da cidade japonesa de Sendai, um sistema de controle que mantém os trens rolando rapidamente ao longo do percurso, freando e acelerando suavemente, deslizando nas estações, parando nos locais precisos, sem perder um segundo.

Para os interessados em se aprofundar em lógica *fuzzy*, sugerimos as referências: Rignel, Chenci e Lucas (2011), Cavalcanti et al. (2012), Saraiva (2000).

- A IOI (International Olympiad in Informatics), segundo o vídeo, é o lugar mais importante para as gerações, atual e vindoura, de jovens programadores (22:10-22:21). A IOI é uma competição anual de informática internacional para estudantes do ensino médio de vários países convidados, acompanhada por programas sociais e culturais. Ela é uma das cinco Olimpíadas Internacionais da Ciência e é uma das mais prestigiadas competições de ciência da computação do mundo, tendo acontecido pela primeira vez em 1989, na Bulgária. Desde então, ela é realizada anualmente e é destinada a alunos do ensino médio ou que o tenham cursado no ano anterior. De acordo com os regulamentos da IOI, os principais objetivos a serem alcançados incluem:

  – Descobrir, incentivar, reunir, desafiar e dar reconhecimento aos jovens excepcionalmente talentosos no campo da informática.

– Promover relações internacionais amistosas entre cientistas da computação e educadores de informática.
– Trazer a disciplina da informática para a atenção dos jovens.
– Promover a organização de competições de informática para estudantes de escolas de Ensino Médio.
– Incentivar os países a organizar uma futura IOI em seu país.

Cada país participante seleciona uma equipe de até 4 concorrentes para representar sua nação, juntamente com um líder de equipe e um vice-líder. A competição ocorre durante dois dias de competição, ambos diretamente precedidos e seguidos por um dia de não competição. Durante dois dias de competição, cada competidor compete individualmente e tenta maximizar sua pontuação resolvendo um conjunto de problemas computacionais de natureza algorítmica. No entanto, os concorrentes devem mostrar habilidades básicas de TI como análise de problemas, design de algoritmos e estruturas de dados, programação e testes. Em cada dia, os alunos geralmente recebem 3 problemas que precisam resolver em 5 horas. Em 2019, a IOI foi realizada no Azerbaijão, com o 1º lugar. Em 2019, a IOI foi realizada no Azerbaijão e o estadunidense Benjamin Qi ficou em 1º lugar, seguido pelo russo Ildar Gainullin e pelo canadense Zixiang Zhou.

Figura: logomarca da IOI 2019 - Azerbaijão.
Fonte: <http://ioinformatics.org/index.shtml>.

Desde 2001 o Brasil conquista medalhas na Olimpíada Internacional de Informática, porém até a sua 31ª edição, a equipe brasileira nunca teve uma aluna do sexo feminino entre seus 4 componentes. A primeira medalha de ouro do Brasil foi conquistada em 2011 por Felipe Abella Cavalcante Mendonça de Souza.

- Logo no início do documentário (1:02), o apresentador aponta para um cartaz onde se lê: “Esta frase é falsa.” e pergunta ao rapaz que lê esse cartaz se aquela frase é verdadeira ou falsa. Note que, se o rapaz responde que a frase é verdadeira é porque de acordo com o que está escrito no cartaz, ela é falsa; porém se ele responde que a frase é falsa, é porque ele está negando o que afirma o cartaz, o que acarreta a frase ser verdadeira. Percebe-se então que há um impasse gerado pelo fato de uma frase ser simultaneamente verdadeira e falsa, ou ainda, a frase não ser falsa, nem verdadeira.

Figura: quadro do vídeo “*The Joy of LOGIC*”.

Na verdade, estamos diante de um paradoxo lógico, pois ao assumirmos que a frase é simultaneamente verdadeira e falsa, contrariamos o *Princípio da Não Contradição* que afirma que duas afirmações contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras, e ao considerarmos que a frase não é verdadeira nem falsa, contrariamos o *Princípio do Terceiro Excluído* que afirma que toda proposição ou é verdadeira ou tem sua negação como verdadeira. Segundo Cunha (2013), o termo “paradoxo” vem do grego *parádoxos* e passou para o latim como *paradoxon* e sua significação se refere ao conceito que é ou parece contrário ao comum. Segundo o dicionário Houaiss, o termo se refere a uma proposição ou opinião contrária à comum, bem como pode significar aparente falta de nexo ou de lógica; contradição. O paradoxo apresentado no documentário é conhecido como o paradoxo do mentiroso e tem sua origem atrelada a filósofos da Grécia Antiga, como Eubulides de Mileto (c. IV a.C.) e Epimênides (c. VI a.C.). Eubulides teria perguntado: “Um homem diz que está mentindo. O que ele diz é verdade ou mentira?” Já Epimênides, que era Cretense, afirmou: “Todos os cretenses são mentirosos.” De acordo com Viana (2017), os paradoxos citados resultam de que as frases contém uma autorreferência: elas falam sobre si mesma; e admitem muitas variações como: “Esta frase contradiz a si mesma, só que não!” O comandante no quartel: “Não faça o que eu estou mandando!” Ou até em duplas: “A próxima frase é falsa. A frase anterior é verdadeira.”. Viana afirma ainda que uma aplicação séria da autorreferência é o paradoxo de Russell, formulado pelo matemático, filósofo e escritor britânico Bertrand Russell (1872-1970) que visando resolver as contradições da teoria matemática dos conjuntos, propôs considerar o “conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos”. A questão de saber se esse conjunto é membro de si mesmo ou não leva ao mesmo tipo de dificuldade que encontramos antes com “Estou mentindo”. Mas há paradoxos para todos os gostos e em todos os domínios. São uma fonte inesgotável de encantamento e um instrumento para aprimoramos o raciocínio. No direito: se o Supremo Tribunal Federal for processado por uma ação ilegal, a quem cabe dar a sentença final? Na teologia: se existe um ser que tudo sabe, como podemos ter livre arbítrio? A autorreferência pode levar a paradoxos mas não são suficientes ou necessários para gerá-los. Segundo Yablo (1993), trabalhos de Gödel (1906-1978) e Tarski (1901-1983) e vários exemplos de senso comum já apontavam para essa realidade. Yablo afirma que paradoxos como o do mentiroso são possíveis apesar da eliminação completa da auto-referência, bastando para isso imaginar uma sequência infinita de frases $S_1, S_2, S_3, \ldots$, em que cada uma considera que qualquer frase subsequente é uma não-verdade.

Entre os muitos paradoxos famosos, destacam-se: Paradoxo do Barbeiro, Paradoxo do Mentiroso, Paradoxo do Enforcamento Inesperado e Paradoxo do Hotel de Hilbert.

Figura: Paradoxo do Pinóquio.

Fonte: Revista Superinteressante.

Para um aprofundamento sobre o tema paradoxos, recomendamos as referências a seguir: Viana (2017), Aguiar (2008), Yablo (1993), Isto é Matemática (T01-E05), Isto é Matemática (T02-E08).

- O vídeo afirma que no final do século XIX, os paradoxos viraram uma questão séria e chegaram a ameaçar a base da própria matemática. O apresentador afirma que, até aquele momento, a lógica não era um tema sobre o qual todos pensavam,e que a lógica de Boole não era suficiente para descrever tudo na matemática (29:22-33:25). Surge então, o matemático alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), considerado o pai da lógica matemática moderna, que já havia estudado esse problema e pretendia solucioná-lo com uma nova lógica, que substituia a clássica distinção entre sujeito e predicado (vigente desde Aristóteles) pela distinção entre função e argumento.

Figura: Gottlob Frege (1848-1925).

Fonte: Wikimedia Commons.

Essa nova visão de Frege rendeu muitos frutos para a matemática, como por exemplo, parte da matemática que conhecemos como Teoria dos Conjuntos. No entanto, após Frege ter definido o número em bases lógicas e se propor a demonstrar as leis fundamentais da aritmética a partir das leis lógicas, às vésperas de publicar o segundo volume de seu livro *As Leis Fundamentais da Aritmética*, ele recebeu uma carta do filósofo inglês Bertrand Russell (1872-1970) que questionava o seu trabalho. O questionamento de Russell em sua carta a Frege era o famoso paradoxo de Russell, também conhecido como o "paradoxo das classes". Considerando que Frege desenvolveu boa parte da sua teoria dos conjuntos baseado no seguinte axioma: "dada qualquer propriedade, existe o conjunto de todas as coisas que têm esta propriedade", Russell afirmou que tal axioma poderia levar a paradoxos, bastando para isso, considerar a seguinte propriedade "o conjunto dos conjuntos que não se pertencem a si mesmos".

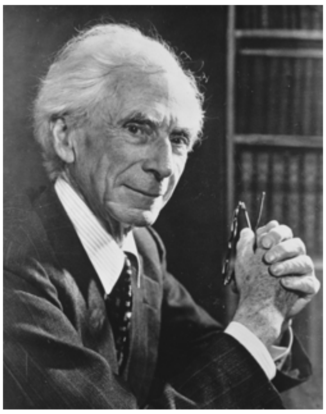


Figura: Bertrand Russell (1872-1970).

Fonte: Wikimedia Commons.

Segundo Hersh (1997), após ler a carta de Russell, Frege publica o seu livro com o seguinte texto em seu apêndice: "*Um cientista dificilmente se pode deparar com algo tão indesejável* *como o de ver os fundamentos ruírem exatamente quando o seu trabalho está terminado. Fui colocado nesta posição por uma carta do Sr. Bertrand Russell, quando o trabalho já estava quase todo impresso.*".

A busca pelo rigor lógico nas demonstrações e pela ausência de contradições tomava conta da sociedade no final do século XIX, início do século XX, quando surgiu o matemático austríaco Kurt Gödel (1906-1978), que sabia da necessidade de um sistema lógico ser completo e consistente, para ser a base da matemática. Segundo Viana (2018), nos anos 1930, Gödel provou um resultado desconcertante, chamado primeiro teorema de incompletude, onde afirmava: em qualquer sistema de axiomas suficientemente forte para conter a aritmética - com as operações de adição e multiplicação - existem teoremas que são verdadeiros e, no entanto, não podem ser provados!

Figura: Kurt Gödel (1906-1978).
Fonte: Wikimedia Commons.

Mas o pior (ou melhor) ainda estava por vir: em seu segundo teorema de incompletude, Gödel provou que a consistência de um tal sistema de axiomas não pode ser provada sem usar axiomas mais fortes (cuja consistência teria de ser provada a partir de outros ainda mais fortes, etc). Ainda antes do advento dos computadores, matemáticos se perguntavam o que pode realmente ser calculado de maneira objetiva. Por exemplo, será que é possível analisar um teorema e decidir, por meio de um cálculo, se ele é verdadeiro? Foi provado mais tarde que as resposta à pergunta acima é negativa: computadores não podem calcular a veracidade de teoremas.

Para maior aprofundamento nesse tópico, sugerimos as seguintes referências: Gomes (2015), Hersh (1997), Viana (2018).

- O vídeo menciona em 42:09 o fato de Gödel saber que para qualquer sistema lógico ser a base da matemática, ele deveria ser completo e **consistente**. Porém, na legenda em português, a tradução é diferente: completo e **coerente**, termo que não é o utilizado pelos matemáticos.

Figura: quadro do vídeo “As Maravilhas da LÓGICA”.

- De acordo com o documentário, o fim de uma era para a lógica, imposto pela obra de Gödel ao afirmar que todos os sistemas de lógica matemática eram limitados, foi inspiração para o matemático Alan Turing (1912-1954) lançar uma revolução lógica (43:58-44:23). Alan Mathison Turing, conhecido como o pai da computação, nasceu em Londres, no seio de uma família da classe média-alta britânica, porém pertenceu a uma nova geração progressista que reagia com desprezo aos valores vitorianos.

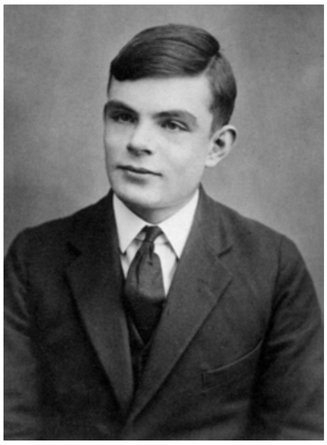


Figura: Alan Turing (1912-1954).
Fonte: Wikimedia Commons.

Turing graduou-se em Matemática na Universidade de Cambridge, em 1934, e segundo Ferreira (2012), Turing enveredou pelo campo da lógica com uma ampla formação prévia tanto em matemática pura quanto em matemática aplicada, e foi imbuído deste espírito eclético que atacou o *Entscheidungsproblem*[f] (problema de decisão), colocado por David Hilbert (1862-1943), na altura ainda em aberto. Turing, com apenas vinte e três anos e trabalhando sozinho,

[f]O *Entscheidungsproblem* (problema de decisão, em alemão) se relaciona com o décimo problema de Hilbert: ?existe um algoritmo capaz de decidir se uma equação diofantina tem solução?? A resposta negativa foi dada somente em 1970 por Yuri Matiyasevich.

atacou e resolveu este problema usando a sua definição de funções computáveis, que segundo (2009), equivalem hoje aos algoritmos computacionais. Turing definiu tais funções com base em sua "máquina", um sistema básico abstrato que podia ser adaptado para simular a lógica de qualquer computador. Dessa forma, Turing mostrava não existir um método geral para decidir a demonstrabilidade de proposições matemáticas e marcou o fim das tentativas de formalização de um sistema completo em matemática. No entanto, esta definição abriu caminho para novas áreas, a que hoje chamamos ciências da computação e ciências cognitivas. Segundo Ferreira (2012), a formação de Turing em Física era visível nas "máquinas" com as quais definiu a sua noção de computabilidade - as agora famosas "máquinas de Turing". Cada máquina de Turing representa um algoritmo e, para os leitores da atualidade é difícil não ver uma máquina destas como um programa de computador e ter em mente que os computadores não existiam na altura. Mas Turing definiu especificamente um tipo de máquina "universal", capaz de ler a tabela de instruções de qualquer outra máquina. Este é precisamente o princípio dos computadores digitais com programas em memória que, à época, ainda não tinham sido criados.

No final de 1936, Turing trabalhou em lógica mais avançada, mas também em álgebra e no desenvolvimento da teoria da função zeta de Riemann, uma teoria fundamental para o estudo de números primos. Em 1938, já na Universidade de Princeton, nos Estados Unidos, Turing obteve seu PhD em lógica matemática com a dissertação "*Systems of Logic Based on Ordinals*", onde resume sua busca por uma definição de "efetivamente calculável".

A Segunda Guerra Mundial conduziu Alan Turing à criptologia, na intenção de quebrar o código de uma máquina eletromecânica de criptografia com rotores, chamada Enigma, usada para criptografar e descriptografar códigos de guerra. Esse tipo de máquina era usado na Europa a partir dos anos 1920, porém, foi após o uso de algumas versões dessa máquina pela maior parte das forças militares alemães a partir de 1930 que essa máquina alcançou sua fama.

Figura: máquina Enigma G, com 3 rotores.

Fonte: Wikimedia Commons.

A facilidade de uso e a suposta indecifrabilidade do código dessa máquina, na sua versão Enigma G, foram as principais razões para a sua popularidade. Entretanto, em 1939, graças em parte a uma brilhante contribuição polaca, Turing propôs um método altamente engenhoso para testar uma "palavra provável" nas mensagens cifradas pela Enigma. O seu esquema lógico foi rapidamente materializado em grandes dispositivos eletromecânicos, chamados Bombes, que a partir de 1939 trabalharam como motores centrais de decifração durante a guerra. Durante este projeto, Turing esteve sediado no agora famoso Bletchley Park, em Buckinghamshire, na Inglaterra, onde era a figura científica principal. Ainda segundo Ferreira (2012), a contribuição central de Turing no estudo da lógica do dispositivo Bombe, era baseada em estatística Bayesiana para quantificação do "peso de evidência", um desenvolvimento próximo da teoria de Shannon para medida de informação. Turing liderou o que pode ser caracterizado como uma revolução científica e pôde ver o triunfo da sua abordagem na batalha do Atlântico.

A partir de 1947, Turing publicou alguns artigos que abordavam uma perspectiva mais futurista da Inteligência Artificial (IA), ou "maquinaria inteligente" como lhe chamou. Esta teoria argumentava que operações computáveis podiam alcançar muito mais que aquilo que era considerado "meramente mecânico", em linguagem comum, e que poderiam certamente emular a inteligência humana. O último desses artigos, o único a ser publicado em vida na revista de filosofia *Mind*, tornou-se famoso devido ao Teste de Turing e à sua profecia e permanece uma bandeira na confiança da eventual mecanização da mente.

Em 1951, Turing foi eleito membro da Royal Society, com uma citação ao seu trabalho de 1936 e, a partir daí, sua nova ambição foi a de encontrar uma explicação matemática para os fenômenos morfogênicos, mostrando assim um interesse em biologia que remontava à infância mas que era agora expresso em métodos avançados no estudo de equações às derivadas parciais não lineares com simulações computacionais. Em 1952, Turing submeteu o primeiro artigo sobre este tema: "*The Chemical Basis of Morphogenesis*", descrevendo aspectos de sua pesquisa sobre o desenvolvimento de formas e padrões em organismos vivos. Nesse período de sua vida, Turing já havia admitido ser homossexual e, por isso, era considerado um perigo potencial perante a lei britânica vigente da época que criminalizava qualquer atividade desse tipo. Turing foi então submetido a tomar injeções de estrogênio, o que equivalia à castração química, por conta de um processo que havia sofrido.

Em 1954, Turing foi encontrado morto na sua casa em Wilmslow, na Inglaterra, vítima de envenenamento por cianureto. Segundo Ferreira (2012), o estranho drama da morte de Alan Turing em 1954 proporcionou-lhe, de certo modo, vida eterna na consciência pública.

O legado de Alan Turing é imenso e deve-se deixar registrado que parte da sua obra permaneceu completamente secreta até meados da década de 70.

Parte da vida de Alan Turing foi retratada em um filme: “*The Imitation Game*” traduzido como “O Jogo da Imitação”, lançado no Brasil em 2015. O filme foi escrito por Graham Moore, dirigido por Morten Tyldum e ganhou o Oscar de Melhor Roteiro Adaptado, entre outros prêmios.

Figura: cartaz do filme *The Imitation Game*.

Além do filme, outra homenagem será prestada brevemente ao britânico Alan Turing, pois o *Bank of England* escolheu o matemático para estampar as novas cédulas de 50 libras, a partir de 2021.

Figura: cédula de 50 libras.

Fonte: <http://bit.ly/2SgIAzW>.

Dentre as muitas referências sobre a vida e obra de Alan Turing, destacamos a seguir algumas, para um possível aprofundamento: Boetlho e de Siqueira (2006), Rodges (2012), Lannes (2009).

- No documentário (5:35-5:43), Cliff afirma que a lógica não é conhecimento e nem cria conhecimento; ela apenas nos dá as regras fundamentais para saber como organizar e lidar com o conhecimento. Esta linha de pensamento já aparecia na primeira metade do século XX com as filosofias do positivismo lógico e do empirismo lógico que estabeleciam o fato do conhecimento vir da experiência que se desenvolve até assumir a forma de uma teoria através da análise lógica e da síntese. Além disso, fiéis aos preceitos do *Tractatus*, os membros do Círculo de Viena (37:30-43:21) acreditavam que a lógica e a matemática se reduziam a tautologias, e que, portanto, não forneciam conhecimento algum, mas apenas ferramentas para a elaboração do conhecimento empírico.
- O livro “Lógica? É lógico!”, de Machado (2000), apresenta uma história bem interessante cujo o título é “Índios e Jacarés”. A narrativa trata de uma tribo indígena onde segundo a tradição, os homens deveriam submeter-se a uma prova de competência lógica ao atingir a idade para o casamento e somente os que passassem nessa prova teriam permissão para casar-se. Daí, o jovem índio Totelesáris, apaixonado por Masófilis, se submete à uma dessas provas, que dizia o seguinte:

> “*No meio da aldeia, há duas cabanas rigorosamente idênticas. Dentro de uma delas o espera a bela Masófis. A outra, no entanto, apenas recobre um poço habitado por jacarés ferozes, capazes de devorar qualquer um que ultrapasse a entrada. Cada cabana tem apenas uma porta, permanentemente fechada e vigiada por um índio, que conhece perfeitamente o conteúdo da cabana que vigia. Totelesáris deve escolher uma das cabanas e entrar: se encontrar sua amada, poderá casar-se com ela; se entrar na dos jacarés, será devorado instantaneamente. Antes de realizar sua escolha, ele terá permissão de fazer* ***uma única*** *pergunta ao índio que guarda a porta de* ***uma*** *das cabanas. Mas Totelesáris deve ainda levar em conta outro pormenor: um dos guardas mente sempre, enquanto o outro só fala a verdade*”.

Que pergunta deveria fazer o índio Totelesáris? Depois de algumas , o livro revela que tal pergunta deveria ser: “*Se eu perguntasse ao seu colega qual a cabana de Masófilis, o que ele responderia?*”. Note que, se a pergunta fosse feita ao índio que diz a verdade, ele responderia que Totelesáris deveria escolher a cabana habitada pelos jacarés, já que ele estaria dando a resposta que o índio mentiroso daria. De outra forma, se a pergunta fosse feita ao índio que sempre mente, ele responderia também que Totelesáris deveria escolher a cabana habitada pelos jacarés, pois estaria mentindo a respeito da resposta que o índio que diz a verdade daria. Portanto, Totelesáris deve fazer a pergunta mencionada a um dos índios e entrar na cabana contrária à resposta dada!

Existem várias versões dessa história que apresentam a mesma argumentação lógica e, existem também outros problemas, ditos problemas de lógica, que envolvem outras argumentações. A seguir, seguem dois *links* de *sites* que propõe alguns problemas que envolvem a lógica e também o *link* de um vídeo sobre esse tema: <http://bit.ly/2GgmGIp>; <http://bit.ly/

32EVKM2> e <http://bit.ly/2GgjtZn> (Vídeo da série Isto é Matemática: “A lógica é fofinha”, T02-E06).

- A lógica também está presente em diversas questões de concursos. Instituições como ESAF, TSE, ANEEL, AFTN, IBMEC, INSPER, FGV, MACK, ESPM, entre outras, já cobraram questões ditas de “raciocínio lógico” em suas provas. A seguir, uma questão do ENEM (2012):

> Cinco times de futebol (A, B, C, D e E) ocuparam as primeiras colocações em um campeonato realizado em seu país. A classificação final desses clubes apresentou as seguintes características:
> – O time A superou o time C na classificação;
> – O time C ficou imediatamente à frente do time E;
> – O time B não ficou entre os 3 últimos colocados;
> – O time D ficou em uma classificação melhor que a do time A.
> Assim, os dois times mais bem classificados foram
> (A) A e B.
> (B) A e C.
> **(C) B e D.**
> (D) B e E.
> (E) C e D.

- É interessante fazer uma analogia entre a língua portuguesa e a lógica matemática no que diz respeito à dupla negação e a disjunção. No caso da dupla negação, vejamos as frases a seguir:
  – Não vi ninguém esperando por mim no aeroporto.
  – Não fiz nada de errado para estar sendo castigada.
  – Nunca encontrei ninguém com o mesmo nome que eu.
  – Meu filho não é nada modesto.
  – Não quero, não!

  Na primeira frase, se tomarmos a ideia de “vi ninguém” como, não ter visto uma pessoa sequer, ao utilizarmos o advérbio não e afirmarmos “não vi ninguém”, estaríamos negando o fato de não ter visto uma pessoa sequer, ou seja, alguém teria sido visto. O mesmo raciocínio poderia ser aplicado a cada uma das demais frases, ou seja, segundo a lógica matemática, a dupla negação nos traria uma afirmação do fato, porém, provavelmente, não era esse o sentido que se queria dar. Segundo Souza (2017), a negação nas línguas românicas[g] é licenciada, mais comumente, de duas maneiras: em posição pré-verbal e também em posição pós verbal, am-

[g]Segundo o Dicionário Houaiss, família de línguas indo-europeias derivadas do latim (catalão, dalmático, espanhol, francês, italiano, ladino, português, provençal, romeno, sardo etc.).

bos os padrões se desdobram nas formas simples ou duplicadas. Vejamos o quadro abaixo que elucida tais negações:

	Exemplo	Português brasileiro estândar (padrão)	Variedades do Português brasileiro
Negação simples	Ninguém chegou.	Sim	Sim
Dupla negação pós-verbal	Não chegou ninguém.	Sim	Sim
Negação metalinguística	Chegou uma ova!	Sim	Sim
Dupla negação pré-verbal	Ninguém não chegou.	Não	Sim
Dupla negação	Ninguém chegou, não.	Sim	Sim
Negação enfática	Chegou nada!	Não	Sim
Negação à direita	Chegou não.	Não	Sim

Figura: negações no português brasileiro.

Fonte: Souza (2017).

Em relação à dupla negação, Souza (2017) afirma ainda que há várias hipóteses para termos incorporado tal estrutura em nossa língua, são elas:

- Hipótese 1: A dupla negação pré-verbal que se manifesta no português brasileiro contemporâneo fornece subsídios para a afirmação de que na língua existe uma competição de gramáticas que poderia responder a usos discursivos diferentes.
- Hipótese 2: A dupla negação no português brasileiro contemporâneo é realizada nos mesmos moldes do português antigo, ou seja, é uma concordância opcional que legitima a negação, ao invés de anulá-la.
- Hipótese 3: Um dos fatores sociolinguísticos favoráveis para a manifestação da dupla negação pré-verbal em português brasileiro é a baixa escolaridade.
- Hipótese 4: Um falante que legitima a estrutura de dupla negação pré-verbal possui internalizados diversos outros padrões de negação, tal como acontece na língua catalã.

Porém, Souza (2017) afirma também, que de acordo com seus estudos, as duas primeiras hipóteses seriam parcialmente verdadeiras e as duas últimas, verdadeiras.

No caso da disjunção, segundo Monnerat (2001), os lógicos propõem uma distinção entre disjunção exclusiva e disjunção inclusiva. A disjunção inclusiva admite três interpretações, de acordo com a verdade de cada uma das asserções postas em presença: a primeira é verdadeira, a segunda é falsa / a primeira é falsa, a segunda é verdadeira / a primeira é verdadeira, a segunda é verdadeira; enquanto a disjunção exclusiva admite duas interpretações: a primeira é verdadeira, a segunda é falsa / a primeira é falsa, a segunda é verdadeira. Porém, ainda segundo Monnerat, a distinção, tal como é proposta pelos lógicos, não pode ser aplicada à linguagem, já que esta é estudada em seu funcionamento real de comunicação. A operação lógica da disjunção combina proposições por meio do operador ou, que pode ser inclusivo, correspondendo ao latim *vel*, e significando um e outro, possivelmente ambos (= e/ou), ou exclusivo, quando corresponde ao latim *aut*, excluindo necessariamente a verdade de uma das proposições, em proveito da verdade da outra. Usualmente, para o conectivo *ou* ter uma interpretação exclusiva, ele é utilizado como na frase: "*Ou* Paulo vai ao jogo, *ou* Paulo vai ao cinema.". Caso a frase fosse: "Paulo vai ao jogo, *ou* Paulo vai ao cinema.", teríamos uma disjunção inclusiva, muito embora, o contexto pudesse nos levar a uma disjunção exclusiva. Na análise de frases em contexto matemático, o *ou* será inclusivo, e o *ou* ... *ou* ... será exclusivo, como se vê nos quadros abaixo:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção inclusiva.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção exclusiva.

Para um aprofundamento sobre dupla negação e disjunções, indicamos as seguintes referências: Souza (2017), Monnerat (2001), do Nascimento (2016).

- Na história da lógica podemos destacar vários personagens importantes. A seguir, destacamos alguns deles, de forma simplificada, em ordem cronológica.
  - Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.): primeiro a sistematizar a lógica, criou a Lógica como disciplina intelectual e desenvolveu a teoria dos silogismos.
  - Gottfried Leibniz (1646-1716): propôs uma linguagem e um método universal para a lógica (*Calculus Ratiocinator, Characteristica Universalis*).
  - Leonhard Euler (1707-1783): utilizou as curvas fechadas para ilustrar os argumentos do silogismo em 1768. Estes diagramas são conhecidos como diagramas de Euler e são usados na Teoria dos Conjuntos.
  - Charles Dodgson (1832-1898): mais conhecido pelo pseudônimo de Lewis Carroll (de "Alice no País das Maravilhas"), sintetizou aspectos da lógica formal de maneira incomum para a época, tornando a lógica acessível e atraente.
  - George Boole (1815-1864): em 1847, publicou a obra *The Mathematical Analysis of Logic*, em que introduziu os conceitos de lógica simbólica demonstrando que a lógica podia ser representada por equações algébricas. Publicou, em 1854, *An investigation into the Laws of Thought*, onde definiu as teorias matemáticas da lógica e da probabilidade estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra. Criou

a *Álgebra Booleana* (com seus três operadores: e, ou e não) que é muito aplicada na computação.

– Gottlob Frege (1848-1925): foi um dos principais criadores da lógica matemática moderna, com suas variáveis quantificadas e um sistema de representação simbólica para representar formalmente a estrutura dos enunciados lógicos e suas relações.
– Giuseppe Peano (1858-1932): fundador da lógica simbólica. Em 1889, publicou os seus famosos axiomas, chamados axiomas de Peano, que definiram os números naturais em termos de conjuntos. O último desses axiomas é o famoso axioma da indução.
– John Venn (1834-1923): desenvolveu a lógica matemática de Boole, estabelecendo uma forma de representação gráfica de intersecções e uniões de conjuntos, através de diagramas que levam o seu nome.
– Bertrand Russell (1872-1970): provou que o sistema de Frege era inconsistente (paradoxo de Russell). Criou a teoria dos tipos como alternativa para formalizar a matemática. Escreveu com Alfred North Whitehead o *Principia Mathematica* (1910).
– Ludwig Wittgenstein (1889-1951): escreveu o livro *Tractatus Logico-Philosophicus*, que procura esclarecer as condições lógicas que o pensamento e a linguagem devem atender para poder representar o mundo.
– Kurt Gödel (1906-1978): publicou os dois teoremas da incompletude. O primeiro afirma que, qualquer teoria axiomática recursivamente enumerável e capaz de expressar algumas verdades básicas de aritmética não pode ser, ao mesmo tempo, completa e consistente. Ou seja, em uma teoria consistente, sempre há proposições que não podem ser demonstradas nem verdadeiras, nem falsas. O segundo, afirma que uma teoria, recursivamente enumerável e capaz de expressar verdades básicas da aritmética e alguns enunciados da teoria da prova, pode provar sua própria consistência se, e somente se, for inconsistente.
– Alan Turing (1912-1954): considerado o pai da computação, Turing foi um dos primeiros a pensar na possibilidade de uma máquina se tornar inteligente e criou um modelo teórico para um computador universal.

Referências relacionadas

- Aguiar, Sergio da Silva. *Uma Análise de Auto-Referência Baseada em Fluxos Semânticos*. Tese do Curso de Ciência da Computação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008. Disponível em: <http://bit.ly/2SjHeUW>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Botelho, Soraia Garcia Rosa; de Siqueira, Eunice Gomes. *Alan Turing e O Modelo de Máquina Universal*. Revista de Iniciação Científica da FAI, n. 6, p. 23-26, 2006. Disponível

em: <http://bit.ly/2JziEgi>. Acesso em: 25 jul. 2019.

- Cavalcanti, José Homero Feitosa et al. *Lógica Fuzzy Aplicada Às Engenharias*. 2012. Disponível em: <https://goo.gl/5wysdh>. Acesso em: 28 jul. 2019.
- Cesar, Ibrahim. *Guia das falácias de Stephen Downes*. Universidade Federal do Paraná, 2007. Disponível em: <http://bit.ly/2JKOzsS>. Acesso em: 17 out. 2019.
- Coelho, Sandra Sofia Miranda Alfredo. *Jogo de Lógica de Lewis Carroll*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, 2008. Disponível em: <https://goo.gl/Qfba6Q>. Acesso em 25 jul. 2019.
- Copi, Irving M.. *Introdução À Lógica*. Editora Mestre Jou, 1981. Disponível em: <http://bit.ly/2SDSHyQ>. Acesso em: 26 jul.2019.
- Cunha, Antônio Geraldo da. *Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Lexicon Editora Digital Ltda, 2013.
- da Costa, Newton C. A. e Krause, Décio. *O Que é Uma Lógica?* FUNDAMENTO: Revista de Pesquisa em Filosofia, n. 10, jan-jun, 2015.
- de Souza, Caroline Garcia; Maggio, Sandra. *Lewis Carroll e a Educação Vitoriana em Alice no País das Maravilhas*. Anais II Jornada UFRGS de Estudos Literários, 2012. Disponível em: <https://goo.gl/Bk7AmR>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- de Sousa, Giselle Costa. *Uma Reavaliação do Pensamento Lógico de George Boole À Luz da História da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Programa dePós-Graduação do Departamento de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2005. Disponível em: <http://bit.ly/32Rp5Tx>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Dias, Carlos Magno Corrêa. *Álgebra Booleana e Lógica Digital: Uma Aplicação da Lógica Matemática*. Revista Acadêmica, Curitiba, p. 47-56, set. 1994. Disponível em: <http://bit.ly/30yitYb>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- do Nascimento, Jefferson Alexandre. *Explorando a Lógica Matemática no Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduaçãoem Matemátic em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016. Disponível em: <http://bit.ly/2KblQ0u>. Acesso em: 28 jul. 2019.
- dos Santos, Cristiane Aparecida. *Quadrados Latinos: Um Estudo Histórico-Filosófico da Matemática*. Trabalho de conclusão de curso, urso de Licenciatura emMatemática da Universidade Federalde Santa Catarina, 2018. Disponível em: <http://bit.ly/2XUuFk8>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Ferreira, Ana Cristina. *Alan Turing: Uma Biografia Introdutória*. Boletim da SPM, n. 67, p. 1-8, out. 2012. Disponível em: <http://bit.ly/2JIafGa>. Acesso em: 28 jul. 2019.
- Ferreira, Mateus R. F.. *O Que São Silogismos Perfeitos?* Dois Pontos, Curitiba, São Carlos,

v. 10, n. 2, p. 189-224, 2013. Disponível em: <http://bit.ly/2xNe3Af>. Acesso em: 25 jul. 2019.

- Gomes, Evandro Luís; D'Ottaviano, Itala M. Loffredo. *Um Panorama da Teoria Aristotélica do Silogismo Categórico*. 2010. Disponível em: <http://bit.ly/2LnVJXi>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Gomes, Rodrigo Rafael. *As Concepções de Função de Frege e Russell: Um Estudo de Caso em Filosofia e História da Matemática*. Tese do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2015. Disponível em: <http://bit.ly/2GB4qtf>. Acesso em: 29 jul. 2019.
- Hersh, Reuben. *What Is Mathematics, Really?* Oxford University Press, 1997.
- Hodges, Andrew. *Alan Turing: Uma Biografia Introdutória*. Boletim da SPM, n. 67, p. 1-8, 2012. Disponível em: <http://bit.ly/2JIafGa>. Acesso em: 28 jul. 2019.
- Isto é Matemática: *O Paradoxo do Barbeiro*. T01-E05. Disponível em: <http://bit.ly/2GgjtZn>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Isto é Matemática: *Epiménides, Mentiras e Vídeo*. T02-E08. Disponível em: <http://bit.ly/2GgjtZn>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Isto é Matemática: *O Sudoku*. T04-E13. Disponível em: <http://bit.ly/2GgjtZn>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Kovačec, Alexander. *Matemática Recreativa: Quadrados Mágicos*. Boletim da SPM, v. 66, p. 51-56, 2012. Disponível em: <http://bit.ly/2XO5tkn>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Lannes, Wagner. *A Incompletude Além da Matemática: Impactos Culturais do Teorema de Gödel no Século XX*. Tese da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Departamento de História, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. Disponível em: <http://bit.ly/37FJYDI>. Acesso em: 12 ago. 2019.
- Machado, Nilson José. *Lógica? É lógico!* Coleção Vivendo a Matemática. Editora Scipione, 2000.
- Machado, Nílson José; da Cunha, Marisa Ortegoza. *Lógica e Linguagem Cotidiana: Verdade, Coerência, Comunicação, argumentação*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
- Manacorda, Mario Alighiero. *História da Educação: Da Antiguidade aos Nossos Dias*. Cortez Editora, 2010.
- Math Explorer's Clube. *The Math Behind Sudoku*. Departamento de Matemática da Universidade de Cornell, 2009. Disponível em: <http://bit.ly/2lvXXIs>. Acesso em: 03 set. 2019.
- Mazur, Joseph. *Enlightening Symbols: A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers*. Princeton University Press, 2014.

- Menninger, Karl. *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*. Dover Publications, 2011.
- Monnerat, Rosane Santos Mauro. *A Expressão da Contra(dis)junção no Texto Publicitário: Implicações Semântico-Discursivas*. Linguagem & Ensino, v. 4, n. 2, p.123-142, 2001. Disponível em: <http://bit.ly/34vZ1gU>. Acesso em: 28 jul. 2019.
- Rignel, Diego Gabril de Souza; Chenci, Gabriel Pupin; Lucas, Carlos Alberto. *Uma Introdução A Lógica Fuzzy*. Revista Eletrônica de Sistemas de Informação e Gestão Tecnológica, v. 1, n. 1, p. 17-28, 2011. Disponível em: <https://goo.gl/LsW4aD>. Acesso em: 28 jul. 2019.
- Roque, Tatiana. *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Rio De Janeiro: Zahar, 2012.
- Saraiva, Gerardo José de Pontes. *Lógica Fuzzy*. Revista Militar de Ciência e Tecnologia, v. xvii, n. 3, p. 43-66, 2000. Disponível em: <http://bit.ly/2ONW0C2>. Acesso em: 28 jul. 2019.
- Serrão, Marcelo Miranda; Brandemberg, João Cláudio. *Utilizando Problemas da História Antiga da Matmeática como Estratégia para O Ensino de Equações no 9º Ano da Escola Básica*. X Seminário Nacional de História da Matemática, 2013. Disponível em: <http://bit.ly/2ltzK5A>. Acesso em: 02 set. 2019.
- Silva, Carla Valteize de Souto; de Souza, Enne Karol Venâncio; da Silva, Maria Valeska Rocha. *Lewis Carroll e Sua Obra Symbolic Logic: Uma Face da Lógica Matemática do Século XIX*. X Seminário Nacional de História da Matemática, 2013. Disponível em: <https://goo.gl/wjiUgv>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Souza, Paula da Costa. *A Dupla Negação Pré-Verbal no Catalão e no Pportuguês Brasileiro: História, Variação e Uso*. Tese em Filologia e Língua Portuguesa do Departamento de Letras Clássicas e Vernáculas da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de SãoPaulo, 2017. Disponível em: <http://bit.ly/2YgPWow>. Acesso em: 26 nov. 2019.
- Teixeira, Rafael Montoito. *Uma Visita ao Universo Matemático de Lewis Carroll e O (Re)Encontro com A Sua Lógica Nonsense*. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2007. Disponível em: <https://goo.gl/Dq6vD8>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Velasco, Patrícia del Nero. *Educando para a Argumentação: Contribuições do Ensino da Lógica*. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.
- Viana, Marcelo. *Paradoxos estão Por Toda Parte*. Folha de S. Paulo. jul. 2017. Parte do texto disponível em: <http://bit.ly/2LnXILe>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- Viana, Marcelo. *A Crise dos Fundamentos da Matemática – 2*. Folha de S. Paulo. jul. 2018.

Parte do texto disponível em: <http://bit.ly/2LONpjE>. Acesso em: 22 ago. 2019.

- Victor, Bret. *Media for Thinking the Unthinkable*. MIT Media Lab, 2013. Disponível em: <http://bit.ly/2lOdIdQ>. Acesso em: 02 set. 2019.
- Wikidot. *Enciclopédia de Falácias*. 2009. Disponível em: <http://bit.ly/30xoZOQ>. Acesso em: 17 out. 2019.
- Yablo, Stephen. *Paradoxo Sem Auto-Referência*. Analysis, v. 53, n. 4, p. 251-252, 1993. Disponível em: <http://bit.ly/2JPxIoK>. Acesso em: 28 jul. 2019.

Concepção

Karla Waack Nogueira

Revisão

André de Carvalho Rapozo, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira,
Keyla Lins Bruck Thedin, Rodrigo Pessanha da Cunha, Oswaldo dos Santos A. Coutinho

---

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

5 Considerações finais

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho colaborativo, com o propósito de auxiliar nas concepções, nos testes e nos aprimoramentos dos roteiros, promovemos diversas ações de vídeos relacionados com Matemática e Estatística em vários eventos: Semana da Matemática da UFRR (2015), Programa Dá Licença da UFF (2016), Semana da Matemática da UFF (2016), Semana Pedagógica no Colégio Estadual Manuel de Abreu (2016, 2018), Festival da Matemática (2017), Simpósio ANPMat da Região Norte (2017), Semana da Ciência e Tecnologia no IMPA (2017), Semana da Matemática da UFSC em Blumenau (2017), Festival da Matemática do Rio Grande do Sul (2017), Semana Pedagógica no Instituto GayLussac (2017), Semana da Matemática da UFMS (2018), 70ª Reunião da SBPC (2018), Semana Pedagógica no Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho (2018).

Figura 5.1: Exibições de vídeos.

Entre estes eventos, destacamos o Festival da Matemática, uma iniciativa do IMPA e da SBM, como parte do "Biênio da Matemática 2017-2018 Gomes de Sousa", realizado entre 27 e 30 de abril de 2017 na Escola SESC do Rio de Janeiro. Durante os quatro dias de evento foram realizadas sessões *non-stop* de 30 em 30 minutos. Estima-se que mais de 1600 pessoas (entre alunos, professores e o público em geral) tenham participado. Após a exibição de cada vídeo, voluntários respondiam a algumas questões gerais do roteiro. Um brinde de participação (um chocolate) era dado à pessoa voluntária. Duas sessões foram especiais com as participações do matemático português Rogério Martins (do Programa "Isto é Matemática") e do matemático francês Étienne Ghys.

Os vídeos também foram exibidos na ação de extensão "Cineclube de Matemática e Estatística" do Projeto "Dá Licença" da Universidade Federal Fluminense. Nestes eventos, filmes mais longos foram apresentados e cada sessão contou com a participação de um convidado especial que, ao final da exibição, fazia comentários e respondia às perguntas da plateia.

Figura 5.2: Exibições de vídeos (continuação).

Nossa proposta de uso didático de vídeos também foi usada em atividades de formação continuada de professores (Simpósio ANPMat da Região Norte e Instituto GayLussac) e, mais recentemente, na formação inicial de professores no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) para o núcleo da Matemática da Universidade Federal Fluminense.

É interessante perceber como alguns alunos que normalmente não se destacam em aulas tradicionais de matemática, participam e contribuem de forma muito positiva em aulas que saem do convencional; em nosso caso, com a exibição de vídeo, orientada.

Romanos

O roteiro foi aplicado em diversas situações e tem a qualidade de atender a diversas faixas etárias, sendo bem aceito em todas elas. Particularmente, o vídeo foi exibido em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental e em duas turmas de 3ª série do Ensino Médio, de uma escola privada em Niterói e, tanto em um segmento quanto em outro, os alunos gostaram muito do vídeo, porém tiveram muita dificuldade em responder qual era a equação que o professor tentava resolver. Vale ressaltar que os alunos receberam as questões impressas e foi dado um tempo para que eles lessem todas as questões antes de assistirem ao vídeo. Após a exibição do vídeo, os alunos responderam as questões e, durante esse momento, o vídeo ficou pausado na cena onde a equação podia ser totalmente visualizada (0:57)[a]. Além disso, o vídeo foi exibido novamente durante a realização da atividade, quando solicitado pelos alunos. Foi curioso notar que a maioria dos alunos não sabiam o que eram os algarismos indo-arábicos, apesar de lidarem com eles. Vale registrar também que alguns alunos resolviam a equação sugerida pelo professor do vídeo corretamente, porém não sabiam escrever o número 60 com algarismos romanos.

Figura 5.3: Exibição do vídeo “Romanos” em turma de 8º ano do Ensino Fundamental.

A seguir, seguem respostas dadas por alunos a algumas das questões que foram selecionadas,

[a]Não obstante, colegas professores que usaram o vídeo em outras ocasiões relataram a existência de alunos que identificaram a equação corretamente com apenas uma exibição do vídeo.

dentre as propostas, no roteiro do vídeo Romanos.

Figura 5.4: Exibição do vídeo “Romanos” em turma de 3ª série do Ensino Médio.

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
   “Sim, que o X tem vários significados diferentes, e eles mudaram ao longo do tempo.”, “Sim. A evolução dos sinais matemáticos, desde a Roma antiga.”, “Sim. Um símbolo matemático com vários significados pode confundir.”, “Sim, a necessidade de uma linguagem clara e de entendimento geral, para que não ocorra confusão, como mostrado no vídeo.”, “Sim. Que a pluralidade de significados de um símbolo pode levar à confusão do que realmente se quer dizer em um determinado uso.”, “Sim, que os símbolos assumem os significados que nós o atribuímos, significando apenas o que nós queremos, todos são coisas da nossa cabeça que colocamos de forma visível ou sintetizada representando o que pensamos.”.
2. Você aprendeu algo de novo com o vídeo? O quê?
   “Sim. Eu aprendi que a evolução da matemática foi muito importante.”, “Sim, o vídeo indaga ao público um questionamento sobre as operações matemáticas e a evidente necessidade de aprimoramento da linguagem.”, “As contas com números romanos devem ser feitas de um modo diferente.”, “A importância dos números indo-arábicos para a matemática moderna.”.
3. Afinal, em notação moderna, qual é a equação que o professor está tentando resolver? Qual é a solução dessa equação? Escreva essa solução usando números romanos!
   “Ele está tentando resolver a equação $30+x=9\cdot x$.”, “$30+x=9\cdot 10$. Solução: 60, ou LX.”.
4. Você conhece outros significados para “X” além daqueles apresentados no curta? Quais?
   “Letra do alfabeto.”, “Elemento radioativo.”, “Cromossomo sexual feminino.”, “Localização

em mapas.", "Proibido.", "Fechar abas em aparelhos eletrônicos.".

5. Você conhece outros símbolos matemáticos que tenham mais do que um significado? Quais?
   " Δ que pode ser $b^2 - 4ac$ ou, variação.", "O símbolo "–" pode ser o símbolo da diferença e também, hífen.".
6. Você acredita que na Roma Antiga uma aula de matemática era como a apresentada no vídeo?
   "Não, pois as equações deveriam ter outras formas e simbologias.", "Não, como usavam o X para representar o 10, deveria haver outros símbolos para as outras coisas.", "Não, naquele período, a matemática era escrita com a gramática.", "Não. Eles deveriam ter alguma forma diferente de diferenciar os números das letras.", "Não, pois eles deviam ter outras maneiras de representar o sinal de vezes e os números.".
7. Quase no final do vídeo (1:03-1:14) o professor utiliza o X novamente, mas com um novo significado. Diante da confusão gerada, ele introduz um novo símbolo para representar esse novo significado: a bola. Qual é esse novo significado do X?
   "O X anularia a equação.", "Significava que estava errado.", "Apagar o anterior.".
8. Diante da equação XXX + X = IXXX, escrita com algarismos romanos, o professor tem em mente uma determinada leitura para essa estrutura (0:21-0:30). Você conseguiria fazer outras duas leituras coerentes dessa equação supondo que não tivesse conhecimento dos significados dados ao X pelo professor? Escreva essas equações com os algarismos indo-arábicos e, em seguida, resolva-as.
   - $10 \cdot 10 \cdot x + 10 = 9 \cdot 10 \cdot 10$
   - $30 + 10 = 9 \cdot 10 \cdot x$
   - $20x + 10 = 1 \cdot 20$
   - $10 \cdot 10 + x = 9 \cdot x$
   - $20x + 10 = 9x$
   - $20x + x = 9^2$
   - $10x + 10 = 1x \cdot 10$
   - $x^3 + x = 1 \cdot x^3$

   Alguns alunos resolviam as equações sugeridas, outros apenas escreviam as equações.
9. O que você mais gostou no filme?
   "O humor.", "A visão contemporânea do passado.", "A mensagem de que uma mesma coisa pode ter vários significados.", "Comandos matemáticos semelhantes com diferentes significados. A mistura da matemática antiga com a matemática moderna.".
10. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?
    "Colocaria mais de uma conta para mostrar exemplos ainda mais confusos.", "Não. O curta é

muito bom.”.

As Maravilhas da LÓGICA

O vídeo foi trabalhado em uma turma de 3ª série do Ensino Médio de uma escola privada. As questões foram entregues aos alunos em folha impressa, foi dado um tempo para que todos lessem todas as perguntas e, em seguida, o vídeo foi exibido. Porém, por ter praticamente uma hora de duração, o vídeo foi exibido com alguns intervalos, nos quais os alunos faziam comentários e respondiam algumas das questões propostas. Os momentos sugeridos para pausas são: 9:30, 28:07 e 37:17. No entanto, outros momentos de pausa aconteceram por solicitação de alguns alunos, bem como a exibição repetida de alguns trechos. Apesar do fato do vídeo ser longo, ele conseguiu a atenção de quase todos os alunos, que se mostraram bem interessados em alguns tópicos do vídeo, como: o circuito montado com as crianças, o paradoxo “Esta frase é falsa.”, os conjuntos de Frege e o sistema de numeração binário.

Figura 5.5: Exibição do vídeo “As Maravilhas da LÓGICA” em turma de 3ª série do Ensino Médio

A seguir, seguem respostas dadas por alunos a algumas das questões que foram selecionadas, dentre as propostas, no roteiro do vídeo “As Maravilhas da LÓGICA”.

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
   “Sim, que a lógica não é conhecimento, ela nos dá regras firmes para que organizemos e lidemos com o conhecimento.”, “O vídeo quer transmitir a ideia de que a lógica é necessária e importante para o avanço de novas tecnologias e ideias que precisam ser válidas.”, “Sim, a ideia

de que a lógica está no nosso dia a dia, desde as coisas simples até as complexas.", "O vídeo tem o intuito de mostrar a importância da lógica no nosso cotidiano. Além de mostrar o seu desenvolvimento ao longo da história.", "Sim, por mais que se tente, em alguns casos, nunca se terá um lógica absoluta.", "Sim, o que é, como funciona e onde surgiu a lógica.", "O verdadeiro propósito da lógica é a matemática, que pode ser aplicada em diferentes situações do dia-a-dia.".

2. Você aprendeu algo de novo com o vídeo? O quê?
   "Sim, o silogismo, existem vários tipos de lógica.", "Sim, a lógica booleana é algo simples mas fundamental para explicar o nosso mundo. Usada na computação.", "Que a lógica não está presente somente dentro da matemática, mas sim em nosso dia-a-dia.", "Sim, que o autor de Alice no país das maravilhas é um matemático.", "Sim. Como a lógica funciona e como usá-la.", "Sim, que a matemática não é tão objetiva como as pessoas costumam achar e está sempre sendo analisada e estudada.", "Sim, funcionamento do sistema binário em operações e algumas teorias matemáticas.".
3. Segundo o documentário, o que é lógica?
   "Lógica é encaixar uma regra a várias situações.", "... tem a ver com formas e regras corretas de pensar.", "... regras para o raciocínio correto, ou seja, regras firmes para que organizemos e lidemos com o conhecimento.", "É um pensamento que busca justificar ações e acontecimentos sem contradições.", "São formas de pensamentos, com que deciframos se algo é falso ou verdadeiro.", "Bom raciocínio, pensamento crítico.".
4. O vídeo comenta a existência de uma porta com uma placa que diz: "Mantenha esta porta fechada o tempo todo.". Para você, o que está escrito nessa placa faz sentido? Justifique sua resposta.
   "Sim, pois não quer dizer que a porta não possa ser aberta, ela só precisa se manter fechada, ou seja, a "função das pessoas" é fechar a porta quando estiver aberta.", "Não, pois se a porta deve ficar sempre fechada, não faz sentido ela existir.", "Não e sim. Não, pois se é pra manter sempre fechada, é melhor colocar uma parede. Sim, pois na fala do cotidiano essa frase seria aceita.", "Não. Teoricamente, uma porta serve de passagem de um lado para outro. Se fosse pra manter a porta fechada eternamente, seria melhor construir uma parede.", "Não, pois mantida fechada o tempo todo ela perde sua função, que é criar uma passagem do interior de um lugar para o exterior ou vice-versa.", "Depende, não é dita a duração de tempo. Seria o tempo de trabalho ou tempo todo de dias?".
5. Em alguns momentos do vídeo, o apresentador segura um cartaz com a frase: "Esta frase é falsa." e questiona as pessoas sobre a veracidade dessa frase. Na sua opinião, essa frase é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

"Essa frase é um paradoxo, pois caso a frase fosse verdadeira, ela mostraria uma incoerência e tornaria-se falsa, contradizendo a primeira condição (ser verdadeira).", "Verdadeira, pois se a frase afirma que a frase é falsa, logicamente ela é verdadeira.", "Depende da intenção dele, se ele quiser mentir para alguém a frase é falsa, se ele for sincero a frase é verdadeira.", "Não sei.", "Não há resposta certa, é paradoxal. Se a frase fosse falsa, ela estaria dizendo a verdade e sendo verdadeira, porém, se ela for verdadeira, ela seria falsa.".

6. O vídeo apresenta uma falácia de Aristóteles em um diálogo entre dois homens, onde um deles afirma:

   – Todos os gatos têm 4 patas. Meu cachorro tem 4 patas.

   Em seguida, o outro homem diz:

   – Portanto, meu cão é um gato.

   Você acha que essa argumentação está correta? Justifique sua resposta.

   "Falaciosa, duas premissas verdadeiras, mas o raciocínio está contrário, logo, é falsa.", "Não, pois apesar de as duas primeiras frases serem verdadeiras, elas nunca farão com que a terceira seja uma verdadeira.", "Não, pois nem todos que tem 4 patas são gatos.".

7. O vídeo mostra uma piada envolvendo três lógicos em um bar. O garçom diz:

   – Todos os 3 querem uma cerveja?

   O primeiro lógico diz:

   – Eu não sei.

   O segundo lógico também responde que não sabe e, então o terceiro lógico diz:

   – Sim, todos queremos uma cerveja.

   Por que o primeiro e o segundo lógico dizem não saber responder?

   "Porque o elemento-chave é a expressão "os três". Se um dos lógicos não quiser a cerveja, não serão "os três". Logo, o primeiro quer a cerveja, mas não pode falar por todos, então fala que não sabe, o mesmo com o segundo, deixando assim o terceiro usar a conclusão lógica para dar a resposta certa.", "Certamente por não saber a resposta dos outros, o terceiro vendo a indecisão dos outros dois vê isso como um "tanto faz" e que estaria tudo bem pedir cerveja para os três."

8. O que você mais gostou no filme?

   "A parte que fala sobre o Lewis Carrol.", "A parte que mostrou como era o código booleano, as atividades com as crianças.", "A maneira com que a matemática se atrela a outras áreas do conhecimento, a exemplo da filosofia.", "Da piada dos três amigos no bar.".

9. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

   "Apenas tentaria deixar as explicações menos complexas, usando termos mais simples.", "Não. Achei uma produção bem legal.".

Provavelmente, muitos alunos responderam que a argumentação presente na Questão 6 não está correta porque a conclusão é falsa e, não, porque se trata de uma falácia de afirmar o consequente.

Dessa forma, o professor pode criar outras argumentações para observar se o aluno entendeu que a argumentação pode ser válida com conclusão falsa e, por outro lado, não ser válida e ter conclusão verdadeira, como por exemplo:

– Argumentação **válida** com conclusão falsa: "Todo cão é fofinho." e "Todo animal fofinho é um gato.". Conclusão: "Todo cão é um gato.".
– Argumentação que **não é válida** com conclusão verdadeira: "Todo homem é mortal." e "Bill Gates é mortal." Conclusão: "Bill Gates é um homem.".

Na Questão 8, vale ressaltar que nenhum aluno comentou que, se um dos dois primeiros lógicos não quisesse tomar cerveja, esse lógico teria dito que os três não queriam. Daí, a certeza de que os dois primeiros lógicos queriam a cerveja.

Como o sudoku foi mencionado no vídeo, surgiu o interesse de investigar se os alunos sabiam jogá-lo. O jogo foi então aplicado em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental e em turmas de 2ª e 3ª séries do Ensino Médio de duas escolas particulares de Niterói. Alguns alunos conheciam o sudoku e já dominavam as suas regras, porém outros apenas sabiam da existência do jogo e nunca o haviam jogado. Após a explicação das normas do sudoku, a aceitação foi instantânea e muitos se diziam apaixonados pelo jogo, instalando aplicativos do sudoku em seus celulares. Vale registrar que uma funcionária de uma das escolas, quando viu o material (jogo) que iria ser aplicado nas turmas, comentou que não sabia jogá-lo e tinha traumas em relação à matemática, porém depois que aprendeu a jogar o sudoku, a funcionária também instalou o aplicativo em seu celular e se dizia encantada por perceber que conseguia ter um raciocínio lógico! Foi mencionado à funcionária, e também aos alunos, que o fato de se pensar alternadamente em linhas, colunas e blocos, proporciona, entre outras coisas, saber analisar um problema sob diversos pontos de vista sem perder o objetivo final, e além disso, que jogar o sudoku desenvolve a capacidade de concentração e persistência; virtudes muito difíceis de serem observadas na maioria dos jovens de hoje e imprescindíveis no estudo da matemática.

Como trabalho futuro, pretendemos organizar um *blog* para melhor divulgar os roteiros dos vídeos, bem como criar um canal de comunicação com o professor de Matemática e outros profissionais interessados no uso de vídeos como instrumento de ensino e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

Bulman, Jeannie Hill. *Children's Reading of Film and Visual Literacy in The Primary Curriculum: A Progression Framework Model*. This Palgrave Macmillan, 2017

Chabrán, H. Rafael; Kozek, Mark. *Mathematics in Literature and Cinema: An Interdisciplinary Course*. PRIMUS, 2015.

Doxiadis, Apostolos; Mazur, Barry. *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*. Princeton University Press, 2012.

Ferrés, Joan. *Vídeo e Educação*. Editora Artes Médicas, 1996.

Gottschall, Jonathan. *The Storytelling Animal: How Stories Make Us Human*. New York: Harcourt Publishing Company, 2013.

Harari, Yuval Noah. *Sapiens: Uma Breve História da Humanidade*. Porto Alegre: L&PM, 2015.

Haven, K. *Super Simple Storvlelling: A Can-Do Guide for Every Classroom, Every Day*. Englewood, CO: Teacher Ideas Press, 2000.

Machado, Benedito Fialho; Mendes, Iran Abreu. *Vídeos Didáticos de História da Matemática: Produção e Uso na Educação Básica*. História da Matemática para Professores, Sociedade Brasileira da História da Matemática, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

Machado, Nilson José. *A Narrativa em Matemática*. Palestra na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da UFF, Universidade Federal Fluminense, 2016.

McSill, James. *Cinco Lições de Storytelling: Fatos, Ficção e Fantasia*. São Paulo: DVS Editora, 2013.

Moran, José Manuel. *O Vídeo na Sala de Aula*. Comunicação & Educação, v. 2, p. 27-35, 1995.

Muzás, José Maria Sorando. *Aventuras Matemáticas em El Cine*. Editorial Guadalmazán, 2015.

Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2003.

Napolitano, Marcos. *Como Usar A Televisão na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2015.

Pellicer, Pablo Beltrán. *Series y Largometrajes como Recurso Didáctico em Matemáticas en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica, Organización Escolar y Didácticas Especiales, Facultad de Educación, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, 2015.

Polster, Burkaro; Ross, Marty. *Math Goes To The Movies*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2012.

Reiser, Elana. *Teaching Mathematics using Popular Culture: Strategies for Common Core Instruction from Film and Television*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2015.

Russell, Bertrand. The Functions of A Teacher. Em: Egner, Robert E.; Denonn, Lester E.. *The Basic Writings of Bertrand Russell*. Routledge Classics, 2009.

Santos, Rosiane de Jesus. *Uma Taxonomia para O Uso de Vídeos Didáticos para o Ensino da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade de Juiz de Fora, 2015.

Sklar, Jessica K.; Sklar, Elizabeth S. *Mathematics in Popular Culture: Essays On Appearences in Film, Fiction, Games, Television and Other Media*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2012.

Xavier, Adilson. *Storytelling: Histórias Que Deixam Marcas*. Rio de Janeiro: Best*Seller*, 2015.

Zak, Paul J. *Confiança, Moralidade e Ocitocina. TED Global 2011*. Disponível em: <https://goo.gl/tFhoqb>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *A Molécula da Moralidade*. Elsevier, 2012.

Zak, Paul J. *Empathy, Neurochemistry, and The Dramatic Arc*. Future of StoryTelling, 2013. Disponível em: <https://vimeo.com/61266150>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *How Stories Change The Brain*. 17 dezembro de 2013. Disponível em: <https://goo.gl/DgBnnB>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *Why Your Brain Loves Good Storytelling*. HBR 28 de outubro de 2014. Disponível em: <https://goo.gl/BVyRng>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*. Cerebrum Jan-Feb; 2015. Disponível em: <https://goo.gl/LPFn7P>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zacks, J. M.; Tversky, B.; Iyer, G. 2001. *Perceiving, Remembering, and Communicating Structure in Events*. Journal of Experimental Psychology: General, v. 130, p. 29-58, 2001.

Zazkis, Rina; Liljedahl, Peter. *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 2009.