
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS
Câmpus de Dourados
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPP
MESTRADO NACIONAL EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Números e Funções Complexas

Marcos Antonio Kotovicz

Orientador: Jaime Rezende de Moraes

Dourados,
Dezembro – 2019

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS
Câmpus de Dourados
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPP
MESTRADO NACIONAL EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Números e Funções Complexas

Marcos Antonio kotovicz

Orientador: Jaime Rezende de Moraes

Dissertação de Mestrado, apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito obrigatório para obtenção, do grau de Mestre em Matemática.

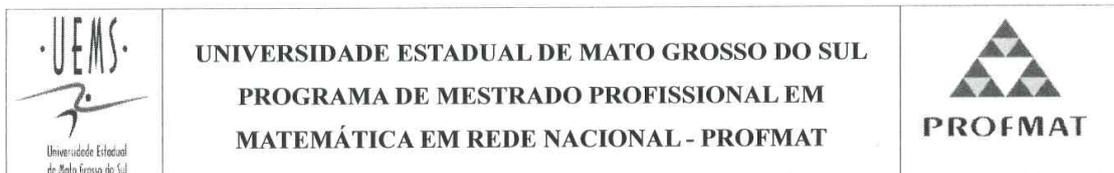
Dourados,
Dezembro - 2019

K88n Kotovicz, Marcos Antonio
Números e funções complexas/ Marcos Antonio Kotovicz.
– Dourados, MS: UEMS, 2019.
106p.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Matemática –
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Jaime Rezende de Moraes.

1. Números complexos 2. Funções analíticas 3. Aplicações
na física. I. Moraes, Jaime Rezende de II. Título

CDD 23. ed. - 512.788



MARCOS ANTONIO KOTOVICZ

NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS

Produto Final do Curso de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 12/12/2019.

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Jaime Rezende de Moraes (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul


Prof. Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul


Prof^a Dr^a Ana Cláudia Machado Mendonça Chagas (UFGD)
Universidade Federal da Grande Dourados

Ata de Defesa de Dissertação
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional

Aos doze dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezenove, às catorze horas, na Unidade Universitária de Dourados, da Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, realizou-se a sessão de defesa de Dissertação, intitulada: "Números e Funções Complexas" de autoria do aluno: **MARCOS ANTONIO KOTOVICZ**, CPF 778.986.801-20, sob a orientação de JAIME REZENDE DE MORAES do Programa de Pós-Graduação em Matemática, nível: Mestrado Profissional. Reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos membros: Dr. JAIME REZENDE DE MORAES (**Presidente**), Dr. COSME EUSTAQUIO RUBIO MERCEDES e Dra. ANA CLÁUDIA MACHADO MENDONÇA CHAGAS (UFGD). Concluída a apresentação e arguição, os membros da Banca Examinadora emitiram parecer expresso conforme segue:

Aprovação

Aprovação com revisão

Reprovação

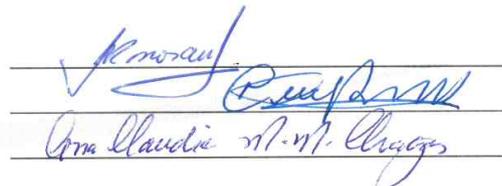
EXAMINADOR

ASSINATURA

Dr. JAIME REZENDE DE MORAES

Dr. COSME EUSTAQUIO RUBIO MERCEDES

Dra. ANA CLÁUDIA MACHADO MENDONÇA CHAGAS (UFGD)



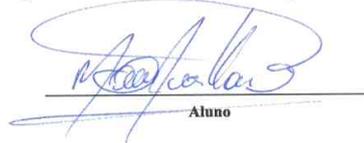
OBSERVAÇÕES:

Nada mais a ser tratado, o Presidente declarou a sessão encerrada e agradeceu a todos pela presença.

Assinaturas:



Presidente da Banca Examinadora



Aluno

Agradecimentos

Nestes anos de mestrado, de muito esforço, gostaria de agradecer algumas pessoas que me acompanharam e foram fundamentais para a realização deste sonho. Por isso, expresso aqui minha gratidão a todas elas. Primeiramente agradeço minha esposa Vania, minhas filhas Ana Carolina e Ana Alice, pela compreensão, ao serem privadas em muitos momentos de minha companhia e atenção. Obrigado por sempre desejarem o melhor para mim, pelo esforço que fizeram para que eu pudesse superar cada obstáculo em meu caminho a chegar aqui. Minha gratidão especial ao meu orientador Jaime Rezende de Moraes, que muitas vezes deixou seus momentos de descanso para me orientar, e teve muita paciência em corrigir e ensinar a digitação em \LaTeX no qual sou extremamente leigo. Obrigado por acreditar em mim. Sua orientação foi exime digna de um Doutor. Agradeço o Prof. Dr. Vando coordenador do PROFMAT -UEMS, pela paciência e as orientações que deu a todos os alunos do curso e ainda pela preocupação que sempre mostrou quanto a preparação para a prova de qualificação. Tal preocupação e orientação foram decisivos para que nossa turma conseguisse êxito. Obrigado! Agradeço a Professora Dr. Maristela que é nossa grande inspiradora, mulher de uma sensibilidade incrível, sábia por natureza. Mostrou em suas aulas o exemplo de um professor, apesar de estarmos sempre avaliados pela senhora nunca nos sentimos constrangidos nem acoados, conseguiu tirar o melhor de nós sem ao menos pedir, por isso repito: tens atitudes que somente pertencem aos sábios. Agradeço imensamente aos meus amigos: Ênio, Ronan e José por serem verdadeiros amigos. Pouco tempo de convívio, no entanto, momentos de intensa interação. Não posso esquecer da véspera da prova de qualificação que permanecemos unidos até findar do dia, e sem exageros posso dizer, ultrapassamos a madrugada, todos apreensivos e tentando adivinhar que tipo de problemas teríamos que resolver na prova de qualificação. Posso dizer que vocês foram anjos neste momento de minha vida e que sem esta interação dificilmente conseguiria, fico eternamente agradecido a vocês. Finalmente não poderia esquecer de uma ex-aluna, magnífica por sinal, de competência inquestionável, e, que agora é minha colega na profissão, professora Delza de Souza Silva, na verdade ela é responsável por tudo isto. Certo dia ao me encontrar num mercado ela me comentou sobre

o PROFMAT pela UEMS. Eu disse que já havia participado pela UFGD e que concluí as disciplinas, no entanto, não consegui passar nas duas qualificações e desta maneira me sentia desmotivado. Para falar a verdade sentia uma frustração pois parecia não ser competente ou ter bagagem suficiente para poder passar no exame. Após ouvir minha breve história, minha agora colega Delza olhou nos meus olhos e disse que acreditava em mim e que me conhecia como profissional e que não aceitaria que eu desistisse. Pois bem, dona Delza, só posso te dizer uma coisa, obrigado. Finalmente agradeço a todos meus amigos e em especial Paulo Zanetti “ O Urso” que está sempre presente na minha vida, chorando e se alegrando em cada tropeço e em cada conquista.

Dedico este trabalho a minha mãe,
mulher indescritível que me faz
acreditar ainda, em pessoas.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um estudo introdutório, porém detalhado, sobre Análise Complexa e algumas de suas aplicações. Apresentamos o corpo dos números complexos, escrevemos o complexo de formas variadas como polar e algébrica, exploramos as funções complexas de uma variável complexa, exibimos parte da teoria das funções analíticas. Provamos um importante resultado: o Teorema de Cauchy-Riemann. Finalmente damos alguns exemplos de aplicações dos números complexos na Física.

Palavras-chave: Números Complexos, Funções Analíticas, Teorema de Cauchy-Riemann e aplicações na Física.

Abstract

The main goal of this work is to develop an introductory, yet detailed, study on Complex Analysis and some of its applications. We shall present the field of complex numbers, write the varied complex of forms, exhibit part of the theory of analytic functions. We prove an important result: Cauchy-Riemann's theorem. Finally, we give some examples of usage of the complex numbers in Physics.

Keywords: Complex Numbers, Analytic Functions, Cauchy-Riemann's theorem and applications on Physics.

Sumário

1	O Corpo \mathbb{C}	20
1.1	Módulo de z	24
1.2	Conjugado de z	31
1.3	Representação Polar de z	35
1.4	Multiplicação em \mathbb{C}	36
1.5	Divisão em \mathbb{C}	45
2	Cálculo no Plano	47
3	Funções Analíticas	52
3.1	Limites de Uma Função Complexa	54
3.2	A Derivada Complexa	58
4	Equações de Cauchy-Riemann	64
4.1	Derivadas Parciais	64
4.2	Propriedade Geométrica de Funções Analíticas	71
5	Exponencial Complexa	73
5.1	Propriedades da Exponencial	75
6	O Logaritmo Complexo	79
6.1	Propriedades do Logaritmo	82
7	Potenciação em \mathbb{C}	85
8	Aplicações: Circuitos Elétricos e Amortecimentos	89
8.1	Preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias	89
8.2	Aplicações em Circuitos RLC	90
8.3	Vibrações Amortecidas	97
9	Considerações Finais	106
	Referências	107

Lista de Figuras

1	Ponto P representa o complexo (a, b)	24
2	A figura representa $ x - (-2) = 4$	25
3	Representação de $ z - 2 = 5$	26
4	Representação da reta mediatriz	27
5	Pontos z_1 e z_2 , onde as figuras geométricas se intersectam.	28
6	O complexo acima é uma elipse $\varepsilon = \frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1$	29
7	A solução da equação dada no Exemplo 3 é uma circunferência de equação $\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 131$	30
8	Observe a representação do complexo z e seu conjugado \bar{z} . Note que o eixo das abcissas funciona como se fosse um “espelho”, onde z seria o objeto e \bar{z} sua imagem.	31
9	Rotação de $\pi/2$ radianos sobre z_1 pelo vetor z_2	38
10	Sugestão para a demonstração do adição e subtração de arcos.	40
11	A figura representa as raízes quarta do complexo 16.	43
12	A figura representa as raízes sextas do complexo $z = 3(\cos \pi/9 + i \sin \pi/9)$	44
13	As dez raízes do complexo $-i$	45
14	Disco Fechado.	47
15	Esboço para elucidar demonstração.	48
16	Disco contendo C e C'.	49
17	Disco aberto de centro z_o e raio 5.	49
18	Disco aberto de raio 8 e centro z_o	50
19	Disco fechado de raio $15/2$ e centro z_o	50
20	Função f	52
21	Interpretação geométrica da definição de limite em \mathbb{C}	55
22	$x^2 - y^2 = c_1$ e $2xy = c_2$. (Nos pontos os encontros das curvas são ortogonais).	72
23	$e^x \cos y = c_1$ e $e^x \sin y = c_2$. (Nos pontos os encontros das curvas são ortogonais).	72
24	Circuito RLC, alimentado por uma fonte E	91
25	Circuito RLC sem fonte E	95
26	Curva de amortecimento $Q(t)$ (oscilação subamortecida).	96

27	Sistema massa x mola	98
28	Sistema massa \times mola com amortecimento.	99
29	Curva de amortecimento.	101
30	Curva de amortecimento elevado	102
31	Curva de amortecimento gradual (subamortecido).	104
32	Decaimento da amplitude $x(t)$ e $x'(t)$ movimento subamortecido.	104

Introdução

Assim como Carmo [3] em seu livro “Trigonometria e Números Complexos”, optou por escrever um pouco da história dos complexos segundo João Bosco ¹, também o faremos pelo fato de sua boa sintetização, já que nosso objetivo de estudo é a teoria dos números e não a história em si.

A resolução de equações sempre apresentou um dos principais interesses dos matemáticos, desde a antiguidade até os dias de hoje. Babilônios, gregos, egípcios e hindus já conheciam alguns casos particulares de equações de segundo grau, mas, em vez de fórmulas usavam régua e compasso para resolvê-las. Para estes matemáticos não havia dificuldade quando aparecia a raiz quadrada de um número negativo: como as equações eram para resolver problemas concretos, se surgisse uma raiz negativa, o problema era considerado sem solução.

Entretanto, para aqueles que simplesmente não queriam ignorar a existência de um corpo de números que possa resolver este tipo de problema, foi uma história longa de até mesmo resistência, por parte de excelentes matemáticos.

Na verdade os números começaram a aparecer com muita veemência através dos italianos no século XVI, e, o que é mais interessante para efeito histórico é que já se discutiam números complexos, no entanto ainda havia uma discussão sobre a existência de números negativos. Isto nos mostra que o conceito de número não é progressivo, da maneira como é apresentado linearmente, como: naturais, inteiros, racionais, reais e complexos.

Poderíamos afirmar que muitas vezes o descobrimento de um número, operação, propriedade, etc, vem ao encontro de resolver um problema, outras um simples achado. Parece falta de cientificidade dizer ‘achado”, no entanto acontece. Veja o caso de Planck ², que não conseguia resolver o problema da radiação do corpo-negro, pois os experimen-

¹Possui graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Ceará (1962), mestrado em Matemática - University of Chicago (1964) e doutorado em Matemática - University of Chicago (1967). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: história da matemática, ensino-aprendizagem de matemática, geometria dinâmica, história da educação matemática e ensino-aprendizagem de geometria.

²Max Karl Ernst Ludwig Planck, que foi um físico alemão. Ele é considerado o pai da Física quântica, um dos físicos mais importantes do século XX. Planck foi laureado com o Nobel de Física de 1918, por

tos efetuados tinham resultados que divergiam do esperado pelas equações. Após grande esforço, Planck propôs uma constante h , conhecida hoje como “Constante de Planck”, que para ele não era claro mas que funcionava, inclusive alega-se que sua constante surgiu de um momento de desespero.

Assim, percebemos que ao longo da história “um problema”, é fator impulsionador para descobrirmos ferramentas matemáticas. O matemático Gardano (1501–1576), em seu livro *Ars Magna* (1545), ensina um método de resolver problemas de 3º grau. Considere o seguinte problema: dividir 10 em duas partes cujo produto é 40. Este problema pode ser apresentado com a seguinte equação $x^2 - 10x + 40 = 0$. Pelo método de completar quadrados temos $(x - 5)^2 - 25 + 40 = 0$, donde $(x - 5)^2 = -15$, logo a solução procurada $x = 5 \pm \sqrt{-15}$, simplesmente assim, resolvido o problema, segundo Gardano, “Deixando toda a tortura mental envolvida, basta multiplicar $(5 + \sqrt{-15})$ por $(5 - \sqrt{-15})$. O produto é $25 - (-15) = 40$. Bem, de qualquer maneira era inevitável que os matemáticos se interessassem por este tipo de número e ainda no século XVI os matemáticos começaram a usar os números complexos, aplicando regras usuais de cálculo com números reais, embora declarassem que estes “não existiam”.

Uma mudança de comportamento quanto a aceitação dos números complexos pode ser percebida pela fala de Girard “Para que serve estas soluções impossíveis (raízes complexas)? Eu respondo: para três coisas- para validade das regras gerais, devido a sua utilidade e por não haver outras soluções”.

Neste momento deixaremos um pouco da história e nos concentraremos neste novo universo dos números. Tentaremos agora compreender esta descoberta que revolucionou ou melhor ampliou o conjunto dos números.

Sabemos que, no conjunto dos números reais a equação $X^2 + 1 = 0$ não tem solução. Obviamente, a incapacidade de tratar uma expressão matemática qualquer, além de frustrante, implica numa série de limitações práticas no tratamento de problemas do mundo real. A inexistência de soluções reais da equação acima é uma manifestação do fato do conjunto dos números reais não formar um corpo algebricamente fechado.

Começaremos assim: vamos admitir que há solução. Então ao admitirmos para sua

suas contribuições na área da Física Quântica.

solução é necessário a existência de um novo conjunto, onde este deverá ter a propriedade de $X.X = -1$, por enquanto postularemos que nosso candidato que é solução para a equação é o número “ i ”. Recorrendo a álgebra linear, mais precisamente as matrizes, podemos associar a $X.X = -I$, onde X é uma matriz 2×2 , com coeficientes reais, e

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

e “ \cdot ” é o produto das matrizes, então usando as operações de multiplicação e igualdade de matrizes podemos achar a solução para “ i ”,

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

Esta matriz expressa geometricamente a rotação de uma ângulo reto ($\pi/2$ radianos) no plano \mathbb{R}^2 , no sentido anti-horário. Mais precisamente pode-se verificar em [9] que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

é a matriz transformação que rotaciona no sentido anti-horário o vetor $v = (x, y)$ num ângulo teta do \mathbb{R}^2 no \mathbb{R}^2 , assim para $\pi/2$ radianos obtemos a matriz “ i ”.

Até agora vimos que i rotaciona um vetor em 90° no sentido anti-horário, mas como pode i ampliar o conjunto dos \mathbb{R} . Bem vejamos, considere um número real a associado a matriz

$$a.I = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

então a soma $a + c = c + a$, fica associada a matriz

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & a+c \end{bmatrix},$$

e o produto $ac = ca$ fica associado a

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & ac \end{bmatrix},$$

ou seja, as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

se comportam exatamente da mesma maneira que os números reais em relação a soma e ao produto Segundo Soares [9], em linguagem mais sofisticada isso quer dizer que \mathbb{R} é isomorfo ao corpo) cujos elementos são as matrizes

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

onde a pertence \mathbb{R} . Neste momento, ampliaremos o conjunto dos \mathbb{R} , considerando as matrizes 2×2 da forma

$$a.I + b.i = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

onde a, b pertence aos \mathbb{R} . Chamamos os números da forma $a.I + 0.i = a.I$ de reais e os da forma $0.I + b.i = b.i$ de imaginários. Um número da forma $a.I + b.i$ é chamado número complexo. Alguns autores de livros didáticos do ensino médio costumam chamar os números da forma $b.i$ de "imaginário puro", nós por sua vez optaremos por chamá-lo de imaginário.

Através das operações de matrizes a partir da soma e do produto é possível verificar que o conjunto $\{a.I + b.i\}$ é um corpo, ou seja, os axiomas que essas operações obedecem são:

1. Comutatividade
2. Elementos Neutros
3. Inversos
4. Distributividade
5. Associatividade

Demonstração

1. A soma é comutativa dado por

$$\begin{aligned}(aI + bi) + (cI + di) &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \\ &= (a+c)I + (b+d)i.\end{aligned}$$

O produto é comutativo

$$\begin{aligned}(aI + bi).(cI + di) &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = (cI + di).(aI + bi).\end{aligned}$$

2. Elemento Neutro da adição

$$0I + 0i = 0. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0. \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e simétrico } -(aI + bi) = -aI - bi = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix},$$

e elemento neutro da multiplicação

$$1I + 0i = 1. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Inverso multiplicativo

Primeiramente é necessário que uma matriz quadrada seja invertível, logo seu determinante deve ser não nulo. Logo

$$\det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2,$$

se anula apenas $a = b = 0$. Portanto para que haja inverso se faz necessário que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, ou seja, $aI + bi \neq 0I + 0i$. Nesse caso procuremos c e d tal que:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, deveremos resolver o sistema

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}.$$

Daí temos

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad d = -\frac{b}{a^2 + b^2},$$

e portanto

$$\begin{aligned} (aI + bi)^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2}I + \frac{-b}{a^2 + b^2}i. \end{aligned}$$

Para as propriedades, distributiva e associativa de matrizes, deixaremos a cargo do leitor.

Sabendo que a soma e o produto das matrizes quadradas são operações associativas, e além disso vale a distributividade do produto em relação a soma. Concluimos que todas as propriedades são validas para a soma e produto de números complexos e daí temos que o conjunto $\{a.I + b.i\}$, com a e b pertencente a \mathbb{R} é um corpo que representaremos por \mathbb{C} .

A partir de agora ganhamos um aliado. Vimos que associar \mathbf{a} pertencente aos reais com uma matriz diagonal não modificam as operações de soma e produto e ainda nos fornece $i^2 = -I$ que corresponde ao numero real -1 . Isto nos leva naturalmente expressar $i = \sqrt{-1}$.

Até agora tentamos resolver a equação $X.X = -1$ e daí obtivemos o corpo dos complexos. Poderia se perguntar: e se fosse outra equação polinomial, obteríamos outro corpo mais complexo? Seria covardia não responder esta pergunta ao leitor. A resposta é não e o teorema que demonstra é conhecido como *Teorema fundamental da Álgebra*, provado pelo matemático alemão Carl Friedrich em 1799.

1 O Corpo \mathbb{C}

Definição 1. Um número complexo z é um par ordenado de números reais $z = (x, y)$ que satisfaz as seguintes regras de manipulação para a soma e o produto:

$$(1) \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

$$(2) \quad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Veremos agora as propriedades dessa soma e produto:

$$(3) \quad \text{comutatividade: } z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ e } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

$$(4) \quad \text{associatividade: } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ e } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

$$(5) \quad (0,0) \text{ é elemento neutro aditivo: } z + (0,0) = z \text{ para todo } z \text{ complexo.}$$

$$(6) \quad (1,0) \text{ é a identidade multiplicativa } z \cdot (1,0) = z \text{ complexo.}$$

$$(7) \quad \text{todo } z = (x, y) \text{ tem um simétrico aditivo, o número } -z = (-x, -y), \text{ ou seja, } \\ (x, y) + (-x, -y) = (0, 0).$$

$$(8) \quad \text{todo } z = (x, y) \neq (0, 0) \text{ tem um inverso multiplicativo, o número } \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right), \\ \text{ou seja, } (x, y) \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).$$

$$(9) \quad \text{distributividade do produto em relação à soma: } z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Observe que todas as propriedades decorrem de (1) e (2) e do fato que elas são válidas para a soma e o produto de números reais. Da álgebra linear sabemos que um conjunto munido da soma e o produto para os quais valem (3) à (9) é chamado de corpo. Optamos por demonstrar duas destas propriedades as demais fica a cargo do leitor.

Demonstração dos itens (3) e (9).

Comutatividade:

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\ &= z_2 + z_1.\end{aligned}$$

■

Distributividade do produto em relação à soma:

$$\begin{aligned}z_1(z_2 + z_3) &= (x_1, y_1)((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\ &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3) \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.\end{aligned}$$

■

O número complexo $(x, 0)$ é identificado como real x . Observe que $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ e ainda $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$, e desta maneira o corpo dos \mathbb{R} é visto como um subconjunto de \mathbb{C} .

O número complexo $(0, 1)$ é chamado de unidade imaginária e representa o símbolo i . A propriedade notável que o número i satisfaz é a seguinte:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Fazendo $(y, 0) \cdot (0, 1) = (0, y)$, obtemos

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

A identificação acima é a forma de um número complexo. Nos livros didáticos do ensino médio os autores costumam chamar de *forma algébrica* dos complexos. Poderíamos ainda fazer uma pequena mudança, como o produto é comutativo, ou seja, $yi = iy$, então todo complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito como $z = x + iy$. A partir de agora usaremos esta notação.

Observe que a notação $z = x + yi$ simplifica manipulações com os números complexos, num caso geral, por exemplo:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

Para um caso particular

$$(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1) = x_1^2 + y_1^2.$$

Vamos agora através de operações conhecidas nos \mathbb{R} , simplificar uma expressão com números complexos, por exemplo, para reduzir

$$\frac{(2 + 3i) + (-1 + 7i)}{\sqrt{2} + 4i}.$$

Simplificando primeiramente o numerador, obtemos

$$\frac{(2 + 3i) + (-1 + 7i)}{\sqrt{2} + 4i} = \frac{1 + 10i}{\sqrt{2} + 4i}.$$

Em seguida reduziremos o denominador em um número real, para tal basta multiplicar por $\sqrt{2} - 4i$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1 + 10i}{\sqrt{2} + 4i}\right) \left(\frac{\sqrt{2} - 4i}{\sqrt{2} - 4i}\right) &= \frac{(1 + 10i)(\sqrt{2} - 4i)}{2 + 16} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 40 + (10\sqrt{2} - 4)i}{18} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 40}{18} + \frac{10\sqrt{2} - 4}{18}i,\end{aligned}$$

daí temos que o complexo acima tem como parte real

$$x = \frac{\sqrt{2} + 40}{18}$$

e a parte imaginária

$$y = \frac{10\sqrt{2} - 4}{18}.$$

Do estudo dos números reais é conhecido que o produto de dois números reais é nulo se pelo menos um deles é nulo. Da mesma maneira ocorre nos complexos, ou seja, para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $z_1 z_2 = 0$, só temos as opções: $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$. Vamos mostrar esta validade. De fato, seja $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ a princípio considere que $z_1 \neq 0$ daí temos que $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$, se $z_1 z_2 = 0$ então necessariamente teremos que encontrar x_2 e y_2 igual a zero.

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= 0, \\(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= 0.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $x_1 - iy_1$

$$\begin{aligned}(x_1 - iy_1)[(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)] &= 0, \\(x_1^2 + y_1^2)(x_2 + iy_2) &= 0, \\(x_1^2 + y_1^2)x_2 + i(x_1^2 + y_1^2)y_2 &= 0,\end{aligned}$$

e necessariamente

$$(x_1^2 + y_1^2)x_2 = 0,$$

e

$$(x_1^2 + y_1^2)y_2 = 0.$$

Como $(x_1^2 + y_1^2) \neq 0$ pois $z_1 \neq 0$ obriga que $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, assim fica evidente a nossa afirmativa que o produto de dois números complexos é nulo se pelo menos um complexo é nulo.

É conhecido ainda que o corpo dos \mathbb{R} é ordenado, isto é, dados dois reais x e y , com x diferente de y só temos duas hipóteses: ou x é maior que y , ou x é menor que y . Segue do fato de \mathbb{R} ser ordenado que o quadrado de qualquer número real não nulo é positivo. Afirmamos que não é possível ocorrer esta tricotomia nos \mathbb{C} pelo fato de que $i^2 = -1$, logo, podemos dizer que o corpo dos \mathbb{C} não é ordenado.

Dado o número complexo $z = (x, y) = x + iy$ chamamos ao número real x de parte real de z e ao número real y de parte imaginária de z e escreveremos

$$x = \text{Re}(z), \quad y = \text{Im}(z).$$

Note que a parte real e a parte imaginária podem ser representadas no sistema de coordenadas (x, y) . Portanto, um ponto no plano cartesiano é a representação mais provável do complexo z . Na próxima seção estudaremos a representação desses pontos e uma outra maneira de expressar o número complexo z .

1.1 Módulo de z

O valor absoluto ou módulo de um número real x que representaremos por $|x|$, é definido como a distância de x a 0. O módulo de um número complexo z que representaremos por $|z|$, é definido como a distância da origem $(0, 0)$ do sistema de coordenadas (x, y) até o ponto P . Veja a Figura 1.

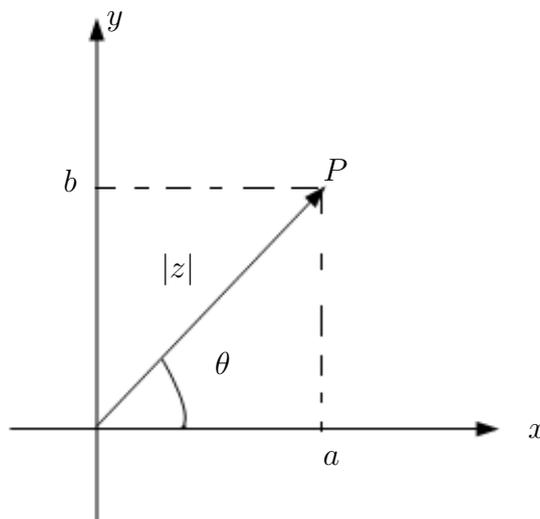


Figura 1: Ponto P representa o complexo (a, b) .

Desta maneira temos que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $(0, 0)$ a origem, ou ainda, conforme as variáveis escolhidas na (Fig.1) que representa o ponto P podemos escrever $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, onde a representa a parte real e b a parte imaginária.

É importante salientar que na maioria dos livros didáticos, o módulo de z é representado por ρ e não por $|z|$, e ainda, é sabido que quase na totalidade dos alunos do ensino médio, quando um aluno vê uma equação do tipo $|x + 2| = 4$ apenas relaciona o módulo de um número como um número sempre positivo, pois não compreende ou não foram orientados que podemos interpretar como “4” a distância do número x ao número “(-2)” pertencentes a mesma reta.

É evidente que a solução obtida por eles é correta, ou seja:

$$|x + 2| = 4 \Rightarrow x + 2 = 4 \quad \text{ou} \quad x + 2 = -4,$$

daí temos que $x = -6$ ou $x = 2$. O mais interessante seria que os alunos entendessem o conceito geométrico de módulo, um desenho simples de segmentos já ajudaria, assim como na Figura 2. O que acabamos de mencionar trata-se apenas de uma sugestão e,

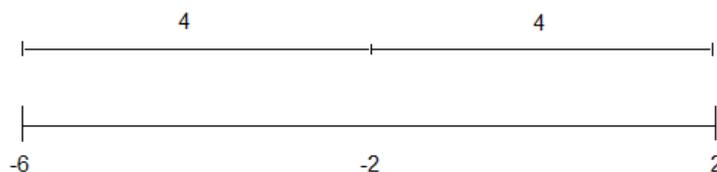


Figura 2: A figura representa $|x - (-2)| = 4$.

para que esta sugestão possa dar mais ênfase, resolveremos o sistema abaixo sob o ponto de vista geométrico.

Exemplo 1. *Seja $z \in \mathbb{C}$.*

$$\begin{cases} |z - 2| = 5 \\ |z + 3| = |z - 7| \end{cases}$$

Poderíamos definir $z = x + iy$ e substituir nas equações. Como é um sistema de duas equações com duas incógnitas não teríamos problemas em resolvê-la, isso tudo sob o ponto de vista algébrico. Vamos agora resolver através de uma interpretação geométrica e pela própria definição de módulo de z .

Note que $|z - 2| = 5$ nos revela que o complexo z dista 5 do complexo 2, e isto é importante salientar, pois é distância entre dois pontos logo temos que ver o número

dois como o par $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) = (2, 0)$. Então poderíamos perguntar qual é o lugar geométrico que dista 5, do ponto $(2, 0)$, de imediato vemos que trata-se da circunferência de raio 5 e centro $(2, 0)$. Veja a Figura 3.

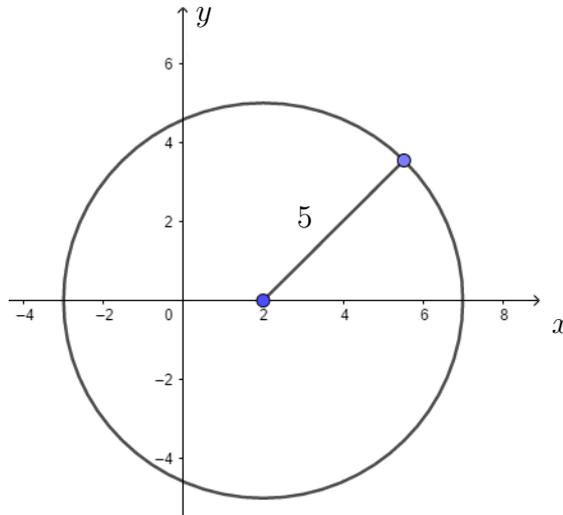


Figura 3: Representação de $|z - 2| = 5$.

Para a equação $|z + 3| = |z - 7|$ de maneira análoga a anterior, temos que $|z + 3| = r_1$ é uma circunferência de raio desconhecido e centrado em $(-3, 0)$, para $|z - 7| = r_2$ temos uma circunferência de raio desconhecido e centrado em $(7, 0)$. Observando a Fig. 4, vemos que as coordenadas $(-3, 0)$ e $(7, 0)$ são as extremidades da circunferência, é fácil ver que os pontos pelos quais a distância de $|z + 3|$ é igual a $|z - 7|$, é o lugar geométrico chamado reta mediatriz.

Agora podemos sobrepor as figuras geométricas e teremos a configuração da Fig 5. Assim é fácil verificar que os pontos z_1 e z_2 são soluções para o sistema.

Exemplo 2. Encontre qual lugar geométrico pertence a equação abaixo, dado que $z \in \mathbb{C}$.

$$|z - 3 - 8i| + |z - 3 - 2i| = 10.$$

Solução: Temos na verdade três complexos, z , $z_1 = 3 + 8i$ e $z_2 = 3 + 2i$, poderíamos reescrever da seguinte maneira $z = (x, y)$, $z_1 = (3, 8)$ e $z_2 = (3, 2)$. A equação acima tem a seguinte propriedade, que a soma das distancias $d(z, z_1) + d(z, z_2) = K$, onde K é uma constante real. Tal propriedade nos remete a definição de elipse:

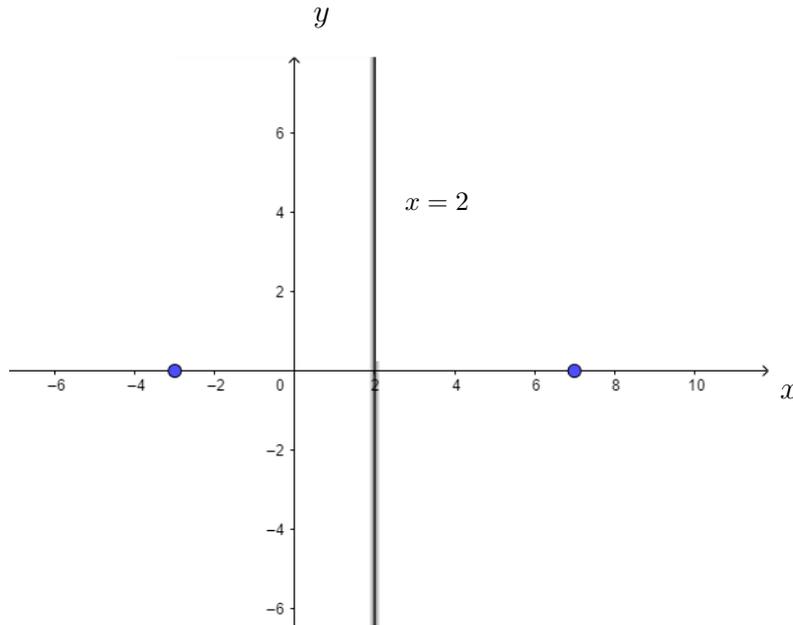


Figura 4: Representação da reta mediatriz

Definição 2. Uma elipse ε de focos F_1 e F_2 é um conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \leq 0$.

Portanto a solução da equação anterior é uma elipse com seu centro deslocado para o ponto (x_0, y_0) de focos $F_1 = (3, 8)$, $F_2 = (3, 2)$. Assim fica evidente que o eixo focal é paralelo ao eixo $0y$ e ainda $k = 2a = 10$.

Sabendo que a elipse na forma canônica com centro em (x_0, y_0) é da seguinte forma

$$\varepsilon : \frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1,$$

temos que o centro é

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (3, 5),$$

portanto

$$\varepsilon : \frac{(x - 3)^2}{b^2} + \frac{(y - 5)^2}{a^2} = 1,$$

como $2a = 10$, temos que $a = 5$ e a distância $d(z_1, z_2) = 6$. Podemos usar a relação $b^2 = a^2 - c^2$ e daí vem que $b = 4$. Portanto a equação da elipse (veja Fig. 6) com eixo focal paralelo ao eixo $0y$ é:

$$\varepsilon : \frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1.$$

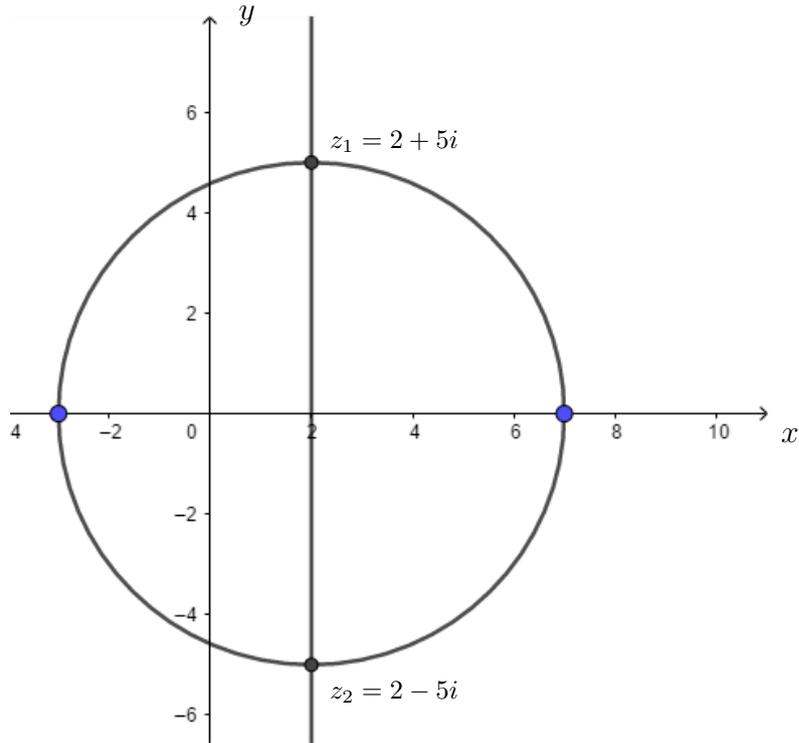


Figura 5: Pontos z_1 e z_2 , onde as figuras geométricas se intersectam.

Solução alternativa do **Exemplo 2**.

$$\begin{aligned}
 |z - 3 - 8i| + |z - 3 - 2i| &= 10 \\
 \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 8)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} &= 10 \\
 \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 8)^2} &= 10 - \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}
 \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e reajustando a expressão temos

$$3y + 10 = 5\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os lados e reajustando temos

$$16y^2 + 160y + 25x^2 + 150x^2 = -225$$

Completando quadrados temos que

$$16(y - 5)^2 + 25(x - 3)^2 = 400$$

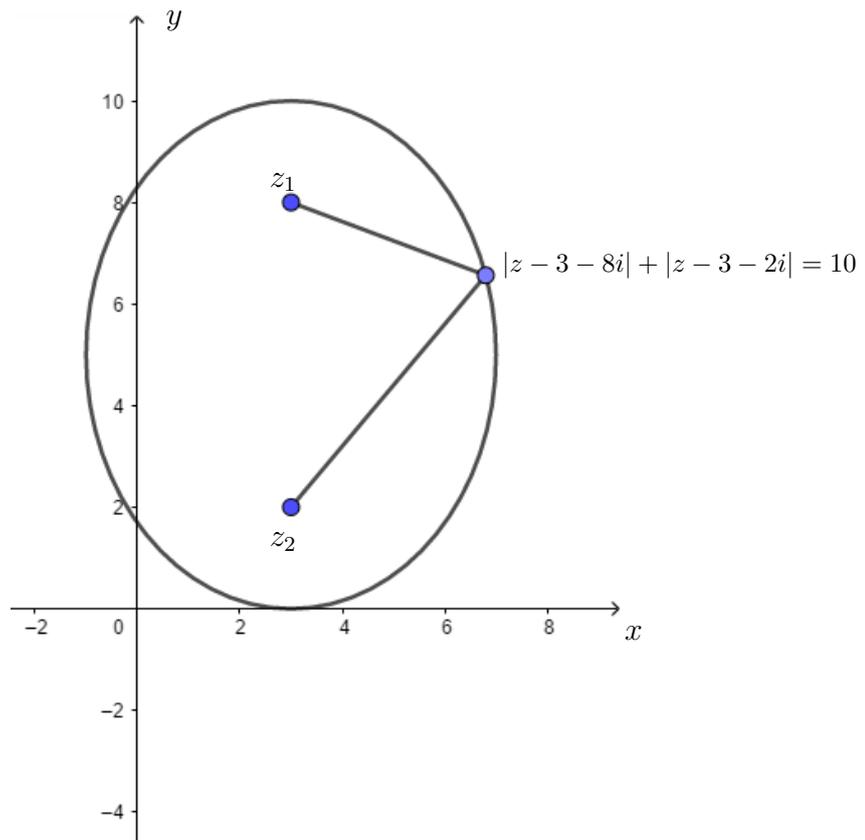


Figura 6: O complexo acima é uma elipse $\varepsilon = \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

dividindo por 400, finalmente obtemos

$$\varepsilon : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1.$$

Exemplo 3. *Descreva geometricamente o conjunto definido por $\left| \frac{z-i}{z-2+i} \right| = 3$, com $z \in \mathbb{C}$.*

Solução: A propriedade que vamos utilizar a seguir será provada mais adiante. Portanto,

vamos assumir sua veracidade. Assim, temos

$$\left| \frac{z-i}{z-2+i} \right| = \frac{|z-i|}{|z-2+i|} = 3$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2} = 3\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 9[(x+2)^2 + (y-1)^2]$$

$$x^2 + y^2 + \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}y - \frac{5}{4} = 0.$$

Completando quadrado chegamos a seguinte equação,

$$\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 131,$$

o que nos revela uma circunferência centrada em $(-9/4, 5/4)$ e raio $\sqrt{131}$. Ver Fig 7.

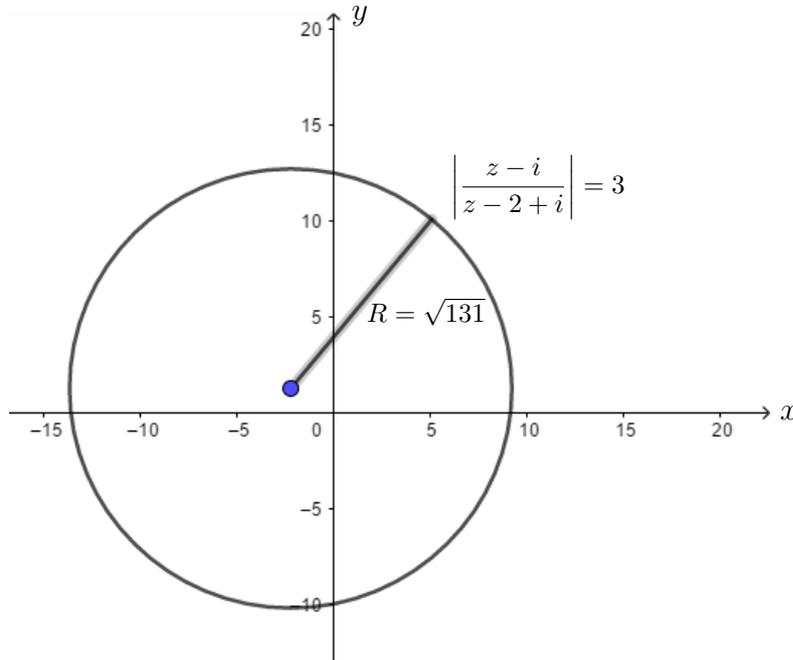


Figura 7: A solução da equação dada no Exemplo 3 é uma circunferência de equação $\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 131$.

Aproveitando a própria definição de $|z|$, com $z = x + yi$, que é a distância da origem $(0, 0)$ a (x, y) em \mathbb{R}^2 , todas as propriedades transportam-se imediatamente para o módulo, como por exemplo a desigualdade triangular:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Esta propriedade é uma dentre várias propriedades que podemos obter com a operação de multiplicação. Veremos algumas delas na próxima secção, começando com o conjugado.

1.2 Conjugado de z

Definição 3. Dado um número complexo $z = x + iy$, o conjugado de z é o número complexo $\bar{z} = x - iy$.

Geometricamente podemos dizer que \bar{z} é a reflexão de z em torno do eixo horizontal, como se o eixo horizontal fosse um espelho e \bar{z} a reflexão da imagem de z . Esta imagem a a qual nos referimos é estritamente óptica (visualmente), e não se trata de imagem de uma função (Fig.8).

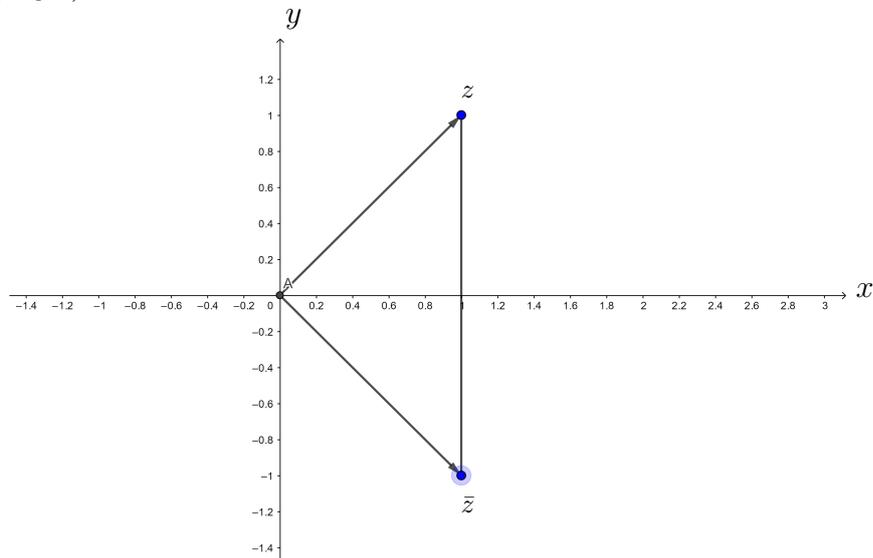


Figura 8: Observe a representação do complexo z e seu conjugado \bar{z} . Note que o eixo das abcissas funciona como se fosse um “espelho”, onde z seria o objeto e \bar{z} sua imagem.

Veja algumas propriedades que a conjugação pode nos fornecer:

- (1) $z\bar{z} = |z|^2$,
- (2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,
- (3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$,
- (4) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,

$$(5) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$(6) ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|,$$

$$(7) x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),$$

$$(8) y = \operatorname{Im}(z) = \frac{-i}{2}(z - \bar{z}).$$

Prova: Para efeito de prova, vamos tomar $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$, $x_1 = \operatorname{Re}(z_1)$, $y_1 = \operatorname{Im}(z_1)$, $x_2 = \operatorname{Re}(z_2)$ e $y_2 = \operatorname{Im}(z_2)$.

$$(1) z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(xy - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

(2) Por um lado,

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

e pelo outro,

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (x - iy)(x - iy) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 - x_2 y_1) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Assim, segue a igualdade.

(3) Como,

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

extraindo a raiz quadrada (as expressões envolvem números reais) obtemos o resultado.

(4)

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \right| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 \bar{z}_2| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 z_2| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(5)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + z_1 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada obtemos o resultado.

(6)

$$\begin{aligned}|z_1| &= |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \\ |z_2| &= |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| = |z_1 - z_2| + |z_1|.\end{aligned}$$

Daí,

$$\pm(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 - z_2|,$$

ou seja,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

(7)

$$\begin{aligned}x = \operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(2x + 0i) \\ &= \frac{1}{2}(2x + iy - iy) \\ &= \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) \\ &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}).\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}y = \operatorname{Im}(z) = -i^2y &= -\frac{2i^2y}{2} \\ &= \frac{-i}{2}(2iy) \\ &= \frac{-i}{2}(iy + iy) \\ &= \frac{-i}{2}(x + iy - x + iy) \\ &= \frac{-i}{2}[(x + iy) - (x - iy)] \\ &= \frac{-i}{2}(z - \bar{z}).\end{aligned}$$

■

Exemplo 4. Determine todos o valores de $c \in \mathbb{R}$ para que:

$$\frac{i}{1 + ci},$$

seja real.

Solução: Temos,

$$\frac{i}{1+ci} = \frac{i}{1+ci} \cdot \frac{1-ci}{1-ci} = \frac{c+i}{1+c^2} = \frac{c}{1+c^2} + i \frac{1}{1+c^2}.$$

Assim,

$$\operatorname{Im}(z) \left(\frac{i}{1+ci} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+c^2} = 0 \Rightarrow c \Rightarrow \pm\infty.$$

No entanto ocorre que,

$$\operatorname{Re}(z) \left(\frac{i}{1+ci} \right) = 0 \Rightarrow \frac{c}{1+c^2} = 0 \Rightarrow c \Rightarrow \pm\infty \text{ ou } c = 0.$$

Podemos notar então que $\frac{i}{1+ci}$ nunca será real, mas é possível que seja imaginário puro: basta tomar $c = 0$.

Exemplo 5. Resolva a equação $z + \bar{z}i = 2 + i$.

Solução: Seja $z = x + yi$, com x e $y \in \mathbb{R}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}x + yi + (x - yi)i &= 2 + i, \\x + yi + xi + y &= 2 + i, \\x + y + (x + y)i &= 2 + i.\end{aligned}$$

Igualando os termos, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Note que o sistema acima é impossível e portanto não existe x e $y \in \mathbb{R}$, que satisfaçam $z + \bar{z}i = 2 + i$.

Exemplo 6. Determine todos os números complexos cujo quadrado seja igual ao conjugado.

Solução: Novamente tomando $z = x + yi$, com x e $y \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}(x + yi)^2 &= x - yi, \\x^2 - y^2 + 2xyi &= x - yi.\end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ 2xy = -y. \end{cases}$$

No sistema anterior, é fácil verificar que se na segunda equação $y = 0$, a primeira equação torna-se $x^2 - x = 0$, que nos fornece $x = 0$ ou $x = 1$. Se $y \neq 0$, a segunda equação fornece $x = -1/2$. Daí, substituindo esse valor na primeira equação, obtemos $y^2 = \frac{3}{4}$, isto é, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto o conjunto solução em \mathbb{C} pode ser representado pelo seguinte conjunto

$$S = \left\{ 0, 1, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

1.3 Representação Polar de z

Até agora vimos o número complexo z como um par ordenado $z = (x, y)$, e podemos expressá-lo na forma algébrica $z = x + yi$. Neste momento, cabe a apresentação do complexo z , na forma polar, ou seja, o mesmo ponto pode ser representado em coordenadas polares. A representação polar é da seguinte forma:

- (i) O módulo do vetor \vec{oz} indicado por $|z|$ ou ρ , representando a distância do ponto P a origem do plano (supondo $|z| \neq 0$);
- (ii) O ângulo θ , em que $0 \leq \theta < 2\pi$, que o vetor \vec{oz} forma com o eixo x . Esse ângulo é chamado *argumento* de z ou argumento principal de z e indicado por $\arg(z)$. É bom salientar que θ deve ser considerado a partir do eixo x no sentido anti-horário.

Pela (Fig.1), temos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Teorema de Pitágoras), e ainda:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}.$$

Essas igualdades levam a

$$a = |z| \cos \theta,$$

$$b = |z| \sin \theta.$$

Substituindo os valores em $z = a + bi$, temos

$$z = a + bi = |z| \cos \theta + |z|i \sin \theta = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Portanto,

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Chamaremos a representação anterior de *forma trigonométrica* ou *forma polar* de z .

Poderíamos nos perguntar: o que esta nova maneira de escrever um complexo pode nos trazer de benefício? Poderá facilitar algumas operações nos \mathbb{C} ? O complexo da forma como está escrito nos leva a pensar intuitivamente se é possível descrever alguns fenômenos físicos através desta equação, já que, existem vários fenômenos físicos que se comportam com certa periodicidade? Estas perguntas serão respondidas nos próximos capítulos.

1.4 Multiplicação em \mathbb{C} .

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra muito conveniente para a multiplicação. Sejam:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

e

$$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

dois números complexos quaisquer. Então,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2)))].$$

Vemos assim que o produto de dois números complexos é o número cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores, ou seja, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. Se fizermos $z_1 = z_2 = z$ então, obtemos

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

Fazendo estas operações n vezes, essa igualdade nos induz a conjecturar que:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]. \quad (1)$$

A fórmula (1) é conhecida como a primeira fórmula de Moivre. É importante salientar que para a conjectura ter validade para todo $n \in \mathbb{N}$ se faz é necessário uma demonstração por indução.

Demonstração da fórmula (1) por indução sobre n.

Considere o número complexo $z = |z| \cos \theta + i \sin \theta$.

Seja,

$$P(n) : z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)].$$

Vamos verificar se para $n = 1$ a hipótese é válida.

$$[|z|(\cos \theta + i \sin \theta)]^1 = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|^1(\cos 1.\theta + i \sin 1.\theta).$$

Portando $P(1)$ é válido. Resta agora mostrar a hereditariedade ou seja:

$$P(n) \Rightarrow P(n + 1).$$

De fato,

$$[|z|(\cos \theta + i \sin \theta)]^{n+1} = [|z|(\cos \theta + i \sin \theta)]^n [|z|(\cos \theta + i \sin \theta)] = A.$$

Por hipótese, $P(n)$ é válido. Assim,

$$\begin{aligned} A &= [|z|^n(\cos n\theta + i \sin(n\theta))]. [|z|(\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= (|z|^n |z|)[(\cos n\theta + i \sin \theta).(\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= |z|^{n+1}[(\cos(n\theta) \cos \theta + i \cos(n\theta) \sin \theta + i \sin(n\theta) \cos \theta - i^2 \sin(n\theta) \sin \theta)] \\ &= |z|^{n+1}[(\cos(n\theta) \cos \theta + i \cos(n\theta) \sin \theta + i \sin(n\theta) \cos \theta - \sin(n\theta) \sin \theta)] \\ &= |z|^{n+1}[(\cos(n\theta) \cos \theta - \sin(n\theta) \sin \theta + i(\cos(n\theta) \sin \theta + \sin(n\theta) \cos \theta))] \\ &= |z|^{n+1}[(\cos(n\theta + \theta) + i \sin((n\theta) + \theta))] \\ &= |z|^{n+1}[\cos(n + 1)\theta + i \sin(n + 1)\theta]. \end{aligned}$$

Logo pelo princípio da indução finita a fórmula (1) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Perguntávamos na seção anterior sobre os benefícios de escrever um número na forma polar e não algébrica. Primeiramente, note que se elevarmos um complexo na forma

algébrica $z = a + bi$ a um n grande, obteríamos um binômio bastante trabalhoso. Assim, há uma vantagem em escrever z na forma polar. Note que para todo natural n , não teríamos problemas em expressar z^n , utilizando a primeira fórmula de De Moivre.

Uma outra vantagem em escrever z na forma trigonométrica está na interpretação geométrica quando aplicamos a operação de multiplicação com outros complexos:

“Multiplicar dois complexos unitários w_1 e w_2 significa, geometricamente, dar a um deles uma rotação positiva de ângulo igual ao ângulo do outro. No caso dos complexos não serem unitários, escreveremos $z_1 = r_1 w_1$, $z_2 = r_2 w_2$ com $|w_1| = |w_2| = 1$, e o produto será simplesmente

$$z_1 z_2 = r_1 w_1 r_2 w_2 = r_1 r_2 w_1 w_2 \quad [\text{Carmo} - 2017]”$$

Em outras palavras, efetua-se o produto dos complexos unitários correspondentes como acima e multiplica-se o resultado pelo número $r_1 r_2$.

Recordando do primeiro capítulo, vimos que se o complexo w_1 for multiplicado pelo complexo w_2 , onde $w_2 = i$, obtemos uma rotação de $\pi/2$ radianos no sentido anti-horário. Para fixarmos melhor esta ideia, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 7. Considere o complexo $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i$, fazendo $z_1 z_2$, temos na forma algébrica $z_1 z_2 = -1 + i$.

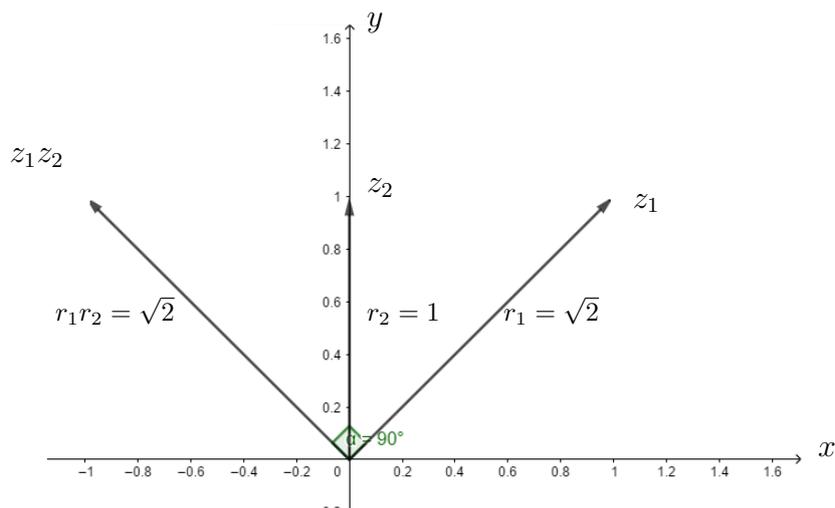


Figura 9: Rotação de $\pi/2$ radianos sobre z_1 pelo vetor z_2

Observe que o vetor $z_1 z_2$ tem módulo $r_1 r_2$ e $\theta(z_1 z_2) = \theta(z_1) + \theta(z_2)$, como mostra a Fig.9.

Uma outra consequência importante da interpretação que foi estabelecida é o seguinte teorema, que é conhecido como o teorema fundamental da trigonometria. Segue o teorema.

Teorema 1 (Fórmulas de adição da Trigonometria). *Se x e y são reais quaisquer, então*

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x.\end{aligned}$$

Demonstração. Se x e y satisfazem à condição,

$$0 \leq x < 2\pi \quad e \quad 0 \leq y < 2\pi,$$

escrevemos:

$$z_1 = \cos x + i \sin x \quad e \quad z_2 = \cos y + i \sin y.$$

Pela interpretação geométrica do produto, $z_1 z_2$ é obtido de z_1 dando uma rotação positiva de ângulo y . Portanto,

$$z_1 z_2 = \cos(x + y) + i \sin(x + y). \tag{2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \sin y \cos x).\end{aligned} \tag{3}$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (2) e (3), obtemos:

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x.\end{aligned}$$

□

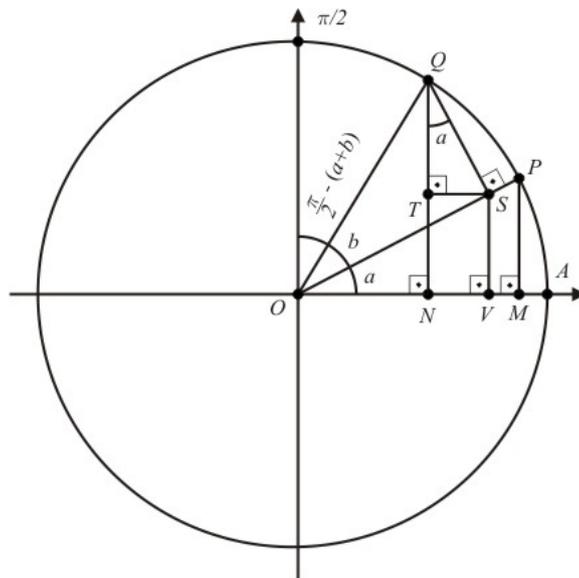


Figura 10: Sugestão para a demonstração do adição e subtração de arcos.

Geralmente a demonstração deste teorema é apresentada como relações entre dois triângulos semelhantes. Não faremos aqui a demonstração mas deixaremos aqui um esboço (Fig.10), que nos fornece os triângulos semelhantes, deixando a cargo do leitor a demonstração.

É interessante como a geometria nos proporciona diversas maneiras de demonstrar um teorema. Infelizmente nos cursos de graduação não é possível discutir cada interpretação. Para não nos desviarmos de nosso foco, vamos retomar o nosso estudo, onde veremos de maneira mais geral a soma de arcos. Para tal, imagine que você queira encontrar a raiz n -ésima de um complexo z_0 , tal que

$$z^n = z_0.$$

Para ficar mais evidente o que estamos propondo, veja os seguintes exemplos.

Exemplo 8. As raízes quarta do complexo 16 são os seguintes complexos $\{2, -2, 2i, -2i\}$.

Solução: De fato,

- 2 é raiz, pois $(2)^4=16$,
- -2 é raiz, pois $(-2)^4=16$,
- $2i$ é raiz, pois $(2i)^4=16$,

- $-2i$ é raiz, pois $(-2i)^4=16$.

Há portanto em \mathbb{C} , quatro raízes quartas de 16.

Exemplo 9. -As raízes quarta do complexo 1 são os seguintes complexos $\{1, -1, i, -i\}$.

Solução: De fato,

- 1, pois $(1)^4=1$
- -1, pois $(-1)^4=1$
- i , pois $(i)^4=1$
- $-i$, pois $(-i)^4=1$

Há portanto em \mathbb{C} , quatro raízes quartas de 1.

Exemplo 10. As raízes quadradas do complexo 9 são os seguintes complexos $\{3, -3\}$.

Solução: De fato,

- 3, pois $(3)^2=9$
- -3, pois $(-3)^2=9$.

Há portanto em \mathbb{C} , duas raízes quadradas de 9.

Vamos ver como isto funciona e o que significa geometricamente essas raízes. Dado um complexo z_o , uma raiz n -ésima de z_o é o complexo z que satisfaz:

$$z^n = z_o.$$

Para resolver esta equação escrevemos ambos os lados na forma polar, ou seja,

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

e

$$z_o = |z_o|(\cos \theta_o + i \sin \theta_o)$$

como,

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)].$$

Temos que:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] = |z_o| (\cos \theta_o + i \sin \theta_o) = z_o.$$

A igualdade acima é válida somente se $|z|^n = |z_o|$ daí vem que,

$$z = z_o^{\frac{1}{n}},$$

e a igualdade acima fica reduzida a seguinte expressão:

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = \cos \theta_o + i \sin \theta_o.$$

Sabendo que dois números complexos são iguais se as partes reais são iguais e as partes imaginárias também são iguais, temos

$$\cos(n\theta) = \cos \theta_o \quad \text{e} \quad \sin(n\theta) = \sin \theta_o.$$

Sabemos da trigonometria que as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π . Desta maneira podemos concluir que $n\theta = \theta_o + 2\pi k$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Isolando θ temos,

$$\theta = \frac{\theta_o + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_o}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Observe que existe um limite para n , ou seja, a partir de um certo n a função passa a ter o mesmo valor. É fácil perceber que tomando a primeira solução é dada com $k = 0$, e a última solução com $k = n$. Então, teríamos $n + 1$ soluções, mas como o período é 2π , segue que para $k = 0$ e $k = n$, temos a mesma solução. Portanto, concluimos que existem mais precisamente n soluções. Assim, para $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, obtemos precisamente n raízes distintas.

Observemos também que a fórmula pode ser escrita como

$$z_k = |z_o|^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta_o}{n} + \frac{+2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta_o}{n} + \frac{+2k\pi}{n} \right) \right].$$

Todas as raízes têm modulo igual a $|z_o|^{\frac{1}{n}}$ e seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta_o}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$. Geometricamente, as n raízes são vértices de um polígono regular de n lados. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 11. As raízes quartas do complexo 16, formam um quadrado (Fig.11) de coordenadas $A = (0, 2), B = (0, -2), C = (2, 0)$ e $D = (-2, 0)$ como já mencionamos no Exemplo 8. No entanto, escreveremos na forma polar para podermos visualizar a progressão do argumento de z . Sendo assim,

$$\begin{aligned}(2, 0) &= z_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0), \\(0, 2) &= z_1 = 2(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2), \\(-2, 0) &= z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi), \\(0, -2) &= z_3 = 2(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2).\end{aligned}$$

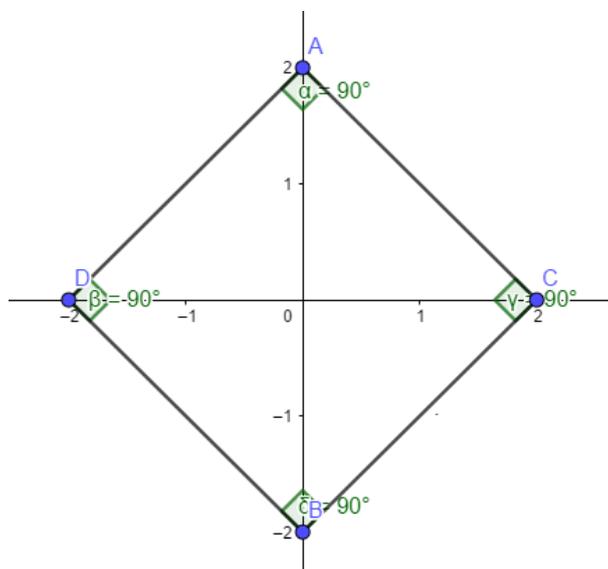


Figura 11: A figura representa as raízes quarta do complexo 16.

Exemplo 12. As raízes sextas do complexo $z = 3^6(\cos 6\pi/9 + i \sin 6\pi/9)$ são:

$$\begin{aligned}z_0 &= 3(\cos \pi/9 + i \sin \pi/9), \\z_1 &= 3(\cos 4\pi/9 + i \sin 4\pi/9), \\z_2 &= 3(\cos 7\pi/9 + i \sin 7\pi/9), \\z_3 &= 3(\cos 10\pi/9 + i \sin 10\pi/9), \\z_4 &= 3(\cos 13\pi/9 + i \sin 13\pi/9), \\z_5 &= 3(\cos 16\pi/9 + i \sin 16\pi/9).\end{aligned}$$

Note que a razão é $3\pi/9$. Estas raízes são representadas na (Fig.12) e formam um polígono regular de seis lados (hexágono).

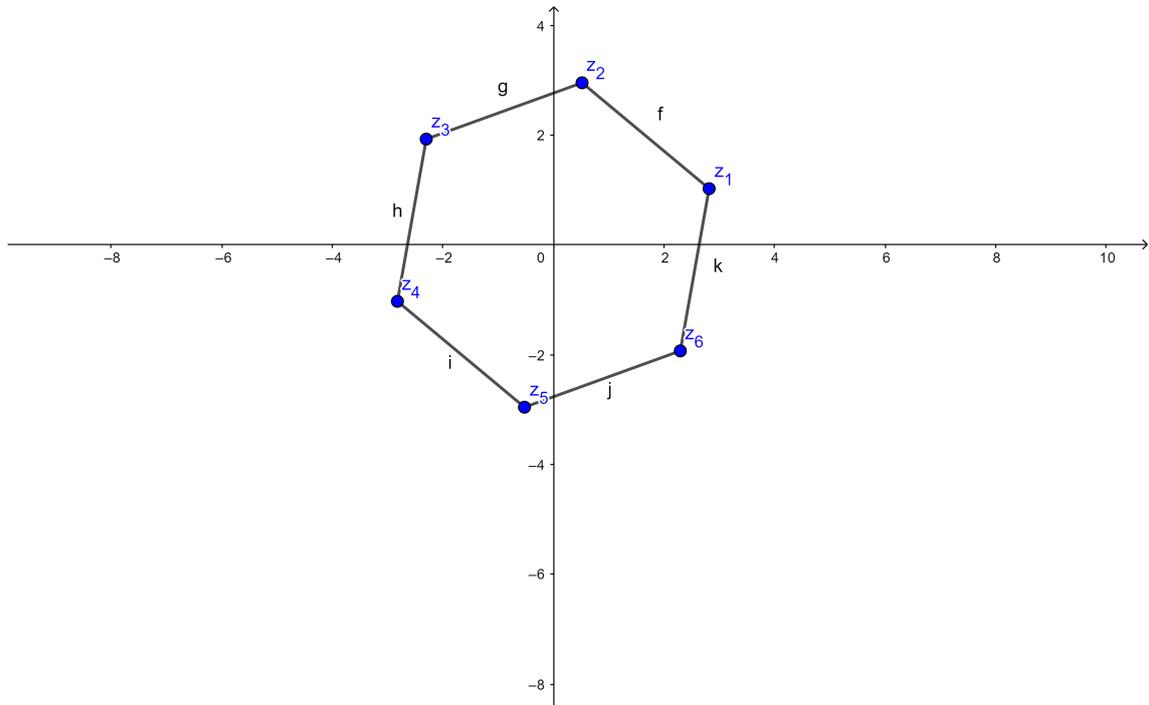


Figura 12: A figura representa as raízes sextas do complexo $z = 3(\cos \pi/9 + i \sin \pi/9)$.

Exemplo 13. Encontre as dez raízes do complexo $-i$ e interprete as mesmas geometricamente.

Solução: Escreveremos z na forma trigonométrica, ou seja, na forma:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Assim,

$$|z| = 1, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1.$$

Logo, $\theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$. Assim, o complexo $-i$ na forma trigonométrica é expresso por,

$$z = 1. \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

Usando a segunda regra de Moivre, temos as seguintes raízes

$$z_k = \cos \left(\frac{3\pi + 2k\pi}{20} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi + 2k\pi}{20} \right),$$

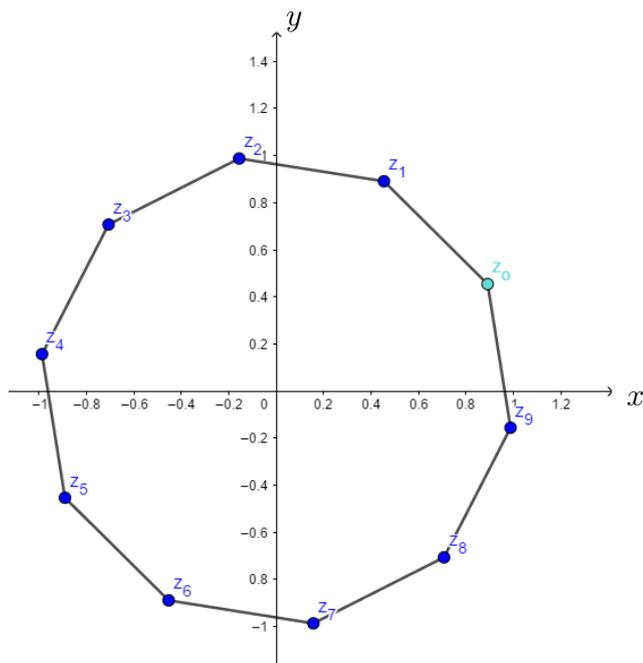


Figura 13: As dez raízes do complexo $-i$.

com k variando de 0 à 9.

Fica evidente na Fig 13, que as raízes são vértices de um polígono regular de 10 lados (decágono).

Poderíamos encontrar várias raízes para o complexo esboçado na figura (13), caso tivéssemos disposição de tempo e paciência. Verificaríamos que os pontos para um k próximo de n , a figura se aproximaria de um círculo de raio igual 1. Neste caso, como esta tarefa é desnecessária e humanamente impossível de ser realizada, pelo menos contribuimos para que a imaginação do nosso leitor possa fazer intuitivamente.

1.5 Divisão em \mathbb{C}

Não poderíamos deixar de mencionar a operação de divisão nos complexos na forma polar, já que dedicamos algumas páginas para a multiplicação. A dedução de uma fórmula que permitirá fazer a divisão na forma polar partirá da seguinte equação

$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

Tomemos agora:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{|z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Assim, fica claro que na divisão dos complexos basta fazer o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos.

2 Cálculo no Plano

Até agora em nossa investigação sobre a solução da equação $X^2 = -1$ desencadeou, ou melhor, encontramos um ente por assim dizer, que é solução para a equação e que tem estrutura de corpo, e ainda, suas operações de soma e multiplicação estão bem definidas. Além disso vimos que tal ente o qual chamamos de número complexo pode ser escrito de forma algébrica ou polar e que sua representação geométrica é um ponto no \mathbb{R}^2 . Interessante também foi encontrarmos as raízes de um complexo, bem como suas interpretações geométrica. Agora, é chegado o momento de introduzirmos um breve estudo do cálculo nos complexos.

Assim como estudamos domínio, limites, derivadas na reta, faremos no plano. Para tal definiremos alguns conjuntos que nortearam nossos estudos.

Dados os números $r > 0$ e z_o complexo qualquer, chama-se *disco aberto* de centro z_o e ao raio r o conjunto $D_r(z_o)$ de todos os números complexos que estão a distância menor que r do ponto z_o , ou seja definimos o seguinte conjunto:

$$D_r(z_o) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| < r\}.$$

O disco fechado é o conjunto $\{z : |z - z_o| \leq r\}$, que inclui a fronteira, isto é, o círculo $\{z : |z - z_o| = r\}$, como ilustra a (Fig.14).

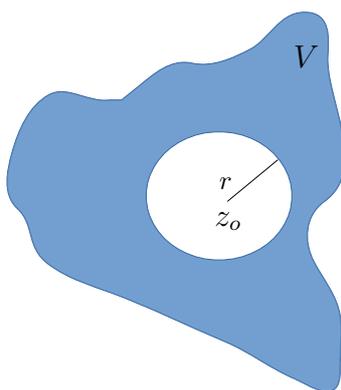


Figura 14: Disco Fechado.

Chama-se vizinhança de um ponto z_o a todo conjunto V que contem um disco de centro z_o . Em particular, qualquer disco $D_r(z_o)$ é uma vizinhança de z_o , que frequentemente

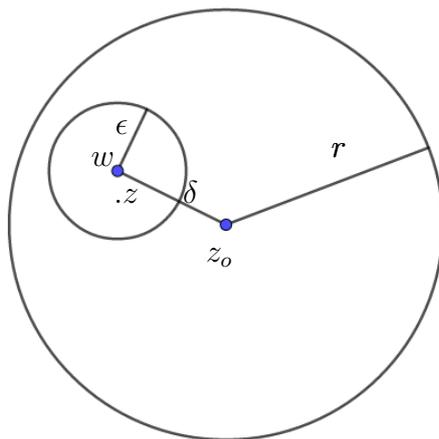


Figura 15: Esboço para elucidar demonstração.

denotaremos por $V_r(z_0)$. Usaremos $V'_r(z_0)$ para denotar a vizinhança de $V_r(z_0)$, da qual excluímos o ponto z_0 , isto é $V'_r(z_0) = V_r(z_0) - \{z_0\}$.

Dizemos que z_0 é *ponto interior* de um conjunto C se C   vizinhança de z_0 , isto é, se existe um disco de centro z_0 todo contido em C . Dizemos que C é aberto se todos os seus pontos são interiores, ou seja, se C   vizinhança de cada um de seus pontos. Para demonstrar que todo disco $D_r(z_0)$ é aberto, usaremos os argumentos que podem ser encontrados em [1]. De fato, seja w um ponto qualquer de $D_r(z_0)$. Temos que mostrar que existe um disco $D_\epsilon(w)$ contido em $D_r(z_0)$. Veja Fig. 15.

Seja $\delta = |w - z_0|$; então, $\delta < r$. Seja $\epsilon < r - \delta$ e z um ponto qualquer de $D_\epsilon(w)$. Pela desigualdade do triângulo, temos

$$|z - z_0| = |(z - w) + (w - z_0)| \leq |z - w| + |w - z_0|,$$

Como $|z - w| < \epsilon < r - \delta$ e $|w - z_0| = \delta$, obtemos $|z - z_0| < (r - \delta) + \delta = r$. Logo, $z \in D_r(z_0)$. Mas z é arbitrário em $D_\epsilon(w)$, o que nos leva a concluir que $D_\epsilon(w) \subset D_r(z_0)$, e isto completa a demonstração.

Dizemos que um conjunto F é *fechado* quando o seu complementar   aberto. Lembra-mos que o *complementar* de um conjunto C   o conjunto C' dos ponto que não pertencem a C . É claro que o complementar do complementar de C   o próprio C .

Chama-se *fronteira* de um conjunto C o conjunto dos pontos z tais que qualquer vizinhança de z cont m os pontos de C e pontos do seu complementar C' (Fig. 16).

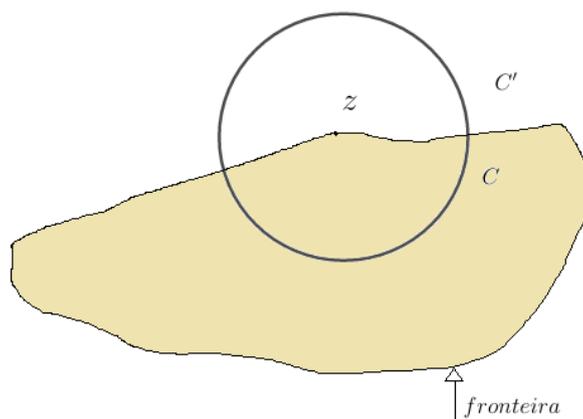


Figura 16: Disco contido C e C'.

Todo o exposto até agora, ou seja, todas estas noções são as mesmas do plano euclidiano. Elas se baseiam apenas na noção de distância entre dois pontos z_1 e z_2 , dada por $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, que é mesmo que a distância euclidiana $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, onde $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$.

Para que possamos compreender de maneira significativa daremos alguns exemplos para elucidar tais conjuntos de pontos no plano complexo.

Exemplo 14. O conjunto dos pontos z tais que $|z + 3i| < 5$ é o disco aberto de centro $z_o = -3i$ e raio 5.

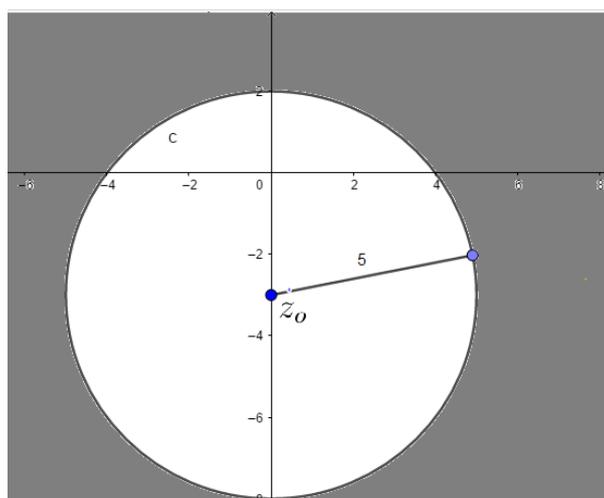


Figura 17: Disco aberto de centro z_o e raio 5.

Observando a Figura 17 e o conjunto definido $|z + 3i| < 5$, fica evidente que a parte hachurada, inclusive o círculo de $r = 5$ é o complementar do conjunto procurado, ou seja, todos os pontos interiores ao disco pertencem ao conjunto procurado.

Exemplo 15. O conjunto dos pontos z tais que $|z + 3| > 8$ é o complementar do disco fechado de centro $z_o = -3$ e raio 8.

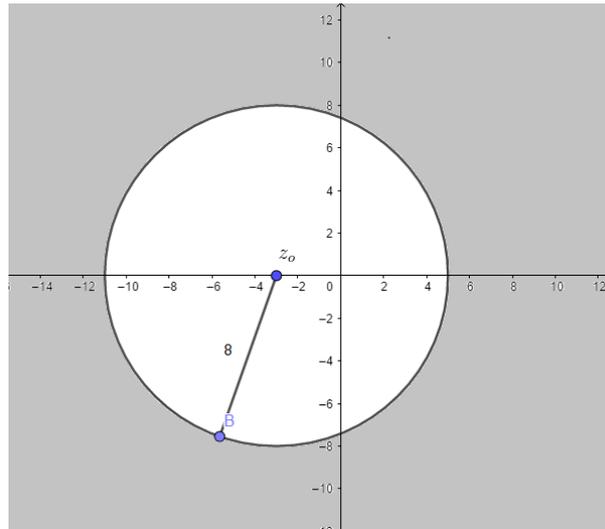


Figura 18: Disco aberto de raio 8 e centro z_o

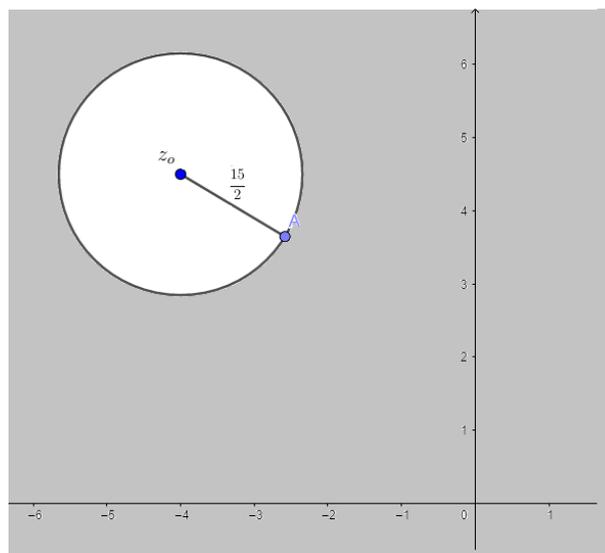


Figura 19: Disco fechado de raio $15/2$ e centro z_o

Observando a Figura 18, fica evidente que a parte hachurada é conjunto de pontos z tal que $|z + 3| > 8$.

Exemplo 16. O conjunto dos pontos z tal que $|2z + 8 - 9i| \geq 15$ é o mesmo conjunto de pontos z tal que $|z + 4 - 9i/2| \geq 15/2$, isto é, um disco fechado de raio $15/2$ e centro $z_o = -4 + 9i/2$.

A Figura 19 mostra que a região hachurada incluindo a própria circunferência de raio $15/2$ é o conjunto de pontos tal que $|2z + 8 - 9i| \geq 15$, neste caso os pontos interiores a circunferência é o complementar do conjunto dos pontos de z .

3 Funções Analíticas

Sabemos que nos estudos de funções, uma função $f : X \rightarrow Y$ associa cada elemento x do conjunto X a um único elemento y do conjunto Y . Observe a Figura 20.

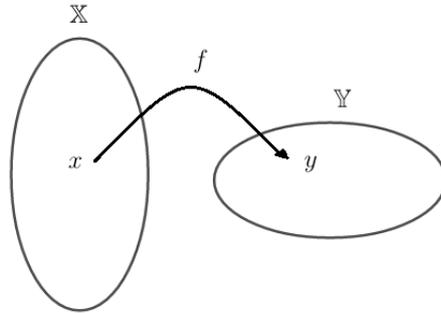


Figura 20: Função f .

A noção de função complexa envolve naturalmente a consideração de duas variáveis reais. Assim uma função complexa de z é uma correspondência f que associa ao número z um único número w , chamado a imagem de z por f , e denotado por $w = f(z)$. No entanto, como $z = x + iy = (x, y)$, também podemos dizer que tal função associa o par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ao par $w = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y) = f(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim cada função $w = f(x, y)$ de uma variável complexa $z = x + iy$ estão associadas duas funções reais de variáveis reais x e y dadas por:

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re}f(z),$$

$$v = v(x, y) = \operatorname{Im}f(z).$$

Tomemos como exemplo a função $w = f(z) = z^2 + 3z - 5$, com $z = x + iy$, temos:

$$f(z) = (x + iy)^2 + 3(x + iy) - 5$$

$$f(z) = x^2 + 2iy + i^2y^2 + 3x + 3iy - 5$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 3x - 5 + i(2xy + 3y),$$

assim,

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 3x - 5,$$

$$v(x, y) = 2xy + 3y.$$

A função acima escolhida é uma função sem ressalvas para seu domínio, assim não tivemos problemas, mas como já havíamos mencionado, a lei de correspondência f deve ser seguida de seu domínio. Para que fique mais evidente vamos tomar como exemplo a função

$$w = \frac{5z + 7}{(z + 3)(z - 2i)}.$$

Note que a função complexa pode apresentar problemas quando $z = -3$ e $z = +2i$, pois teríamos denominador nulo. Portanto o domínio D tem como conjunto $D = \mathbb{C} - \{-3, 2i\}$.

Tomemos agora alguns exemplos de funções que podem ser expressas através de números complexos.

Exemplo 17. Considere a função $f(z) = 2z^3 - z - i$. Temos

$$f(z) = 2(x + iy)^3 - (x + iy) - i,$$

$$f(z) = 2(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) - (x + yi) - i,$$

$$f(z) = 2x^3 - 6xy^2 - x + (6x^2y - 2y^3 - y + 1)i.$$

Logo, $u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 - x$ e $v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 - y + 1$.

Na Seção 1.2, vimos que

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = \frac{-i}{2}(z + \bar{z}).$$

Logo, podemos escrever uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ em função de z e \bar{z} .

Exemplo 18. Seja $f(z) = xy + (x^2 + y)i$. Temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{4i} + \left(\frac{(z + \bar{z})^2}{4} + \frac{(z - \bar{z})}{2i} \right) i \\ &= \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i} + \left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} + \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) i \\ &= \left(\frac{\bar{z}^2 - z^2}{4} + \frac{z^2 + \bar{z}^2}{4} + \frac{z\bar{z}}{2} \right) i + \frac{z - \bar{z}}{2} \\ &= \left(\frac{\bar{z}^2}{2} + \frac{z\bar{z}}{2} \right) i + \frac{z - \bar{z}}{2}, \end{aligned}$$

mas $z\bar{z} = |z|^2$. Assim, podemos escrever $f(z)$ como se segue

$$f(z) = \left(\frac{\bar{z}^2}{2} + \frac{|z|^2}{2} \right) i + \frac{z - \bar{z}}{2}.$$

3.1 Limites de Uma Função Complexa

Do Cálculo I, estudamos o limite de uma função que pode ser definida da seguinte maneira:

Definição 4. *Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o limite de $f(x)$ tende à L , e escrevemos,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Esta definição nos deixa claro que $|x - a|$ é a distância de x a a , e, $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L , e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos quanto desejarmos de L tomando-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

Vimos também que quando falamos de limites laterais e ao mencionar como x se aproxima de a , temos duas opções, pela direita de a ou pela esquerda de a , ou seja, $x > a$ ou $x < a$, pois estamos restritos a reta real, há uma única direção de aproximação de a e dois sentidos. No entanto, como agora falaremos do limite de uma função complexa a direção de aproximação não se restringe a uma única direção, já que seu domínio está contido em \mathbb{R}^2 . Esta aproximação pode acontecer por infinitos caminhos. A noção de limite associado a uma função de variável complexa segue o mesmo princípio de uma função de duas variáveis reais.

Definição 5. *Sejam $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que existe o limite de f quando z tende z_0 se existir $L \in \mathbb{C}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

A notação acima também pode ser expressa da seguinte maneira,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Geometricamente, a existência do limite de f em z_0 significa que dado qualquer disco C centrado em L , é possível encontrar um outro disco D' em D centrado em z_0 tal que $f(D') = C$ (veja a Fig. 21). Note que agora z_0 por definição é um par ordenado (a, b) , e, para aproximar deste par ordenado temos infinitas direções de aproximação. Talvez aí, seja nosso principal desafio de trabalharmos com limites de funções complexas.

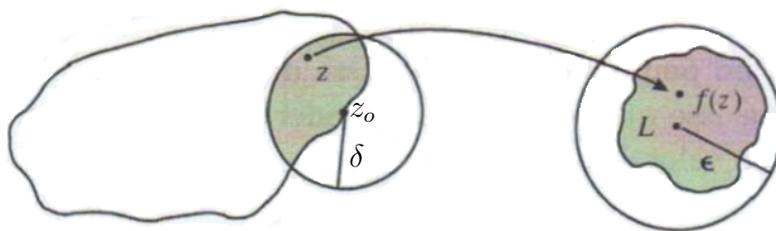


Figura 21: Interpretação geométrica da definição de limite em \mathbb{C} .

Exemplo 19. Verifique que

- (i) $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha = \alpha$;
- (ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$;
- (iii) $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$;
- (iv) $\lim_{z \rightarrow z_0} |z| = |z_0|$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$.

- (i) Tome $\delta > 0$ qualquer e daí $|\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$.
- (ii) Tome $\delta = \varepsilon$. Daí, sempre que $|z - z_0| < \delta$ temos $|z - z_0| < \delta = \varepsilon$.
- (iii) Tome $\delta = \varepsilon$. Daí, sempre que $|z - z_0| < \delta$ temos $|\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon$.
- (iv) Tome $\delta = \varepsilon$. Daí, sempre que $|z - z_0| < \delta$ temos $||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \delta = \varepsilon$.

□

Exemplo 20. Encontre se possível, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$.

Demonstração. Seja $z = a + bi$ então $\bar{z} = a - bi$, assim temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{a - bi}{a + bi} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{a^2 - 2ab + b^2i^2}{a^2 - b^2i^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(a^2 - b^2) - 2abi}{a^2 + b^2}.$$

Para $a = 0$ temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(0^2 - b^2) - 2 \cdot 0 \cdot bi}{0^2 + b^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-b^2}{b^2} = -1.$$

Para $b = 0$ temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(a^2 - 0^2) - 2 \cdot a \cdot 0 \cdot i}{a^2 + 0^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Se $z \neq 0$ é real temos $\frac{\bar{z}}{z} = 1$ e se $z \neq 0$ é imaginário puro temos $\frac{\bar{z}}{z} = -1$. Como todo disco centrado na origem possui números real e imaginário puro, concluímos, pela unicidade do limite, que não existe $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$.

□

Proposição 1. *Sejam f, g funções tais que existem $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$. Temos*

(a) *Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \beta \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

(b)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

(c) *Se $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ então,*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}.$$

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada em [9].

Proposição 2. *Sejam $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, u e v as partes real e imaginária de f e $z_o = x_o + iy_o \in \mathbb{C}$, $x_o, y_o \in \mathbb{R}$. A fim de que exista limite de f em z_o é necessário e suficiente que existam os limites de u e v em (x_o, y_o) . Em caso afirmativo, vale:*

$$\lim_{z \rightarrow z_o} f(z) = \lim_{z \rightarrow (x_o, y_o)} u(x, y) + i \lim_{z \rightarrow (x_o, y_o)} v(x, y).$$

Demonstração:

Suponha que existam $u_o = \lim_{z \rightarrow (x_o, y_o)} u(x, y)$ e $v_o = \lim_{z \rightarrow (x_o, y_o)} v(x, y)$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que,

$$|u(x, y) - u_o| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } 0 < |z - z_o| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < \delta_1$$

e

$$|v(x, y) - v_o| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } 0 < |z - z_o| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < \delta_2.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos,

$$\begin{aligned} |f(z) - (u_o + iv_o)| &= |u(x, y) - u_o + i(v(x, y) - v_o)| \\ &\leq |u(x, y) - u_o| + |v(x, y) - v_o| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

sempre que $0 < |z - z_o| < \delta$.

Reciprocamente se existir $L = \lim_{z \rightarrow z_o} f(z)$, então, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(z) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |z - z_o| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < \delta.$$

Colocando $L = U + iV$ $U, V \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} |u(x, y) - U| &\leq \sqrt{(u(x, y) - U)^2 + (v(x, y) - V)^2} \\ &= |u(x, y) + iv(x, y) - U - iV| \\ &= |f(z) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |v(x, y) - V| &\leq \sqrt{(u(x, y) - U)^2 + v((x, y) - V)^2} \\ &= |u(x, y) + iv(x, y) - U - iV| \\ &= |f(z) - L| < \varepsilon, \end{aligned}$$

sempre que $0 < |z - z_o| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < \delta$.

■

Exemplo 21. Utilizando a proposição acima e observando as partes real e imaginária das funções exponencial, seno e cosseno, vemos que se $z_o \in \mathbb{C}$ então,

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_o} \exp z = \exp z_o \quad (ii) \lim_{z \rightarrow z_o} \sin z = \sin z_o \quad (iii) \lim_{z \rightarrow z_o} \cos z = \cos z_o.$$

3.2 A Derivada Complexa

Aqui começa a diferença entre as aplicações $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ e funções complexas $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. A razão disso está na estrutura multiplicativa de \mathbb{C} , ausente em \mathbb{R}^2 . A derivada de uma função real de uma variável real no ponto z_o é definida como o limite do quociente de Newton.

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o).$$

Sobre \mathbb{C} esse quociente tem sentido, ao passo que sobre \mathbb{R}^2 não, já que não podemos dividir vetores. Com isso em mente temos a seguinte definição.

Definição 6. *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, z_o um ponto de A e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Se existir o limite abaixo*

$$\lim_{z \rightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = f'(z_o),$$

esse é chamado a derivada de $f(z)$ no ponto z_o e notado $f'(z_o)$.

Vamos dar dois exemplos ilustrativos da derivada complexa. Considere as funções $f(z) = z^2$ e $g(z) = \bar{z}$, ambas definidas em todo \mathbb{C} . A primeira delas tem derivada em todos os pontos de \mathbb{C} , ao passo que a segunda não tem derivada em ponto algum. De fato,

$$\frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = \frac{z^2 - z_o^2}{z - z_o} = z + z_o$$

e portanto

$$f'(z_o) = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = \lim_{z \rightarrow z_o} z + z_o = 2z_o.$$

Já para g temos

$$\begin{aligned} \frac{g(z) - g(z_o)}{z - z_o} &= \frac{\bar{z} - \bar{z}_o}{z - z_o} = \frac{(\bar{z} - \bar{z}_o)^2}{|z - z_o|^2} = \frac{(x - x_o + i(y_o - y))^2}{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \\ &= \frac{(x - x_o)^2 - (y_o - y)^2 + 2i(x - x_o)(y_o - y)}{(x - x_o)^2 + (y_o - y)^2}. \end{aligned}$$

Agora vamos fazer z se aproximar de z_o . Como estamos no plano, podemos fazê-lo de uma infinidade de maneiras. Então, se z é da forma $z = (t + x_o) + iy_o$ a expressão acima se reduz a

$$\frac{(t + x_o - x_o)^2 - (y_o - y_o)^2 + 2i(t + x_o - x_o)(y_o - y_o)}{(t + x_o - x_o)^2 + (y_o - y_o)^2} = \frac{t^2}{t^2} = 1$$

ao passo que, se z é da forma $z = x_o + i(t + y_o)$, então

$$\frac{(x - x_o)^2 - (y_o - t - y_o)^2 + 2i(x_o - x_o)(y_o - t - y_o)}{(x_o - x_o)^2 + (y_o - t - y_o)^2} = \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Já se z é da forma $z = (t + x_o) + i(t + y_o)$, ficamos com

$$\frac{(t + x_o - x_o)^2 - (y_o - t - y_o)^2 + 2i(t + x_o - x_o)(y_o - t - y_o)}{(t + x_o - x_o)^2 + (y_o - t - y_o)^2} = \frac{-2it^2}{2t^2} = -i$$

Portanto, o quociente $\frac{g(z) - g(z_o)}{z - z_o}$ assume o valor constante 1 ao longo da reta $y = y_o$, assume o valor constante -1 ao longo da reta $x = x_o$ e assume o valor constante $-i$ ao longo da rea $y - y_o = x - x_o$. Concluimos da definição de limite que $\lim_{z \rightarrow z_o} \frac{g(z) - g(z_o)}{z - z_o}$ não existe.

Proposição 3. *Se f e g são deriváveis em z_o então também o são cf (c um número complexo qualquer), $f + g$, fg e $\frac{1}{f}$ (desde que $f(z_o) \neq 0$) e valem:*

- (i) $(\alpha f + \beta g)'(z_o) = \alpha f'(z_o) + \beta g'(z_o)$.
- (ii) $(fg)'(z_o) = f(z_o)g'(z_o) + g(z_o)f'(z_o)$.
- (iii) $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_o) = -\frac{f'(z_o)}{f(z_o)^2}$.

Prova:

(i) Como $f'(z_0)$ e $g'(z_0)$ existem, temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha f(z) + \beta g(z) - \alpha f(z_0) - \beta g(z_0)}{z - z_0},$$
$$\alpha \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \beta \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0).$$

■

(ii) Como $f'(z_0)$ e $g'(z_0)$ existem e f é contínua em z_0 , temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)(g(z) - g(z_0)) + g(z_0)(f(z) - f(z_0))}{z - z_0}$$
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} + g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0).$$

■

(iii) Usando o item anterior, basta mostrar que:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$$

Como $g'(z_0)$ existe, g é contínua em z_0 e $g(z_0) \neq 0$, temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} = -\frac{g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

■

Proposição 4. *Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ com $f(A) \subset B$. Se f é derivável em z_0 e g é derivável em $f(z_0)$, então $g \circ f$ é derivável em z_0 e*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Demonstração: Ponha $w_0 = f(z_0)$ e defina a função h por

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_o)}{w - w_o} - g'(w_o) & \text{se } w \neq w_o \\ 0 & \text{se } w = w_o \end{cases}$$

h está definida num disco aberto centrado em w_o e é contínua em w_o pois, como g é derivável em w_o , $\lim_{w \rightarrow w_o} h(w) = h(w_o) = 0$. Além disso, $\lim_{w \rightarrow w_o} (h \circ f)(z) = h(f(z_o)) = 0$, já que f é contínua em z_o . Se $w \neq w_o$ vale a seguinte relação

$$g(w) - g(w_o) = (h(w) + g'(w_o))(w - w_o),$$

que também é claramente verdadeira para $w = w_o$. Troque w por $f(z)$ na relação acima:

$$g(f(z)) - g(f(z_o)) = (h(f(z)) + g'(f(z_o)))(f(z) - f(z_o)).$$

Divida por $z - z_o$:

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_o))}{z - z_o} = (h(f(z)) + g'(f(z_o))) \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}.$$

Tome o limite $z \rightarrow z_o$ e obtenha

$$(g \circ f)'(z_o) = g'(f(z_o))f'(z_o).$$

■

A proposição acima é conhecida com Regra da Cadeia, muito útil para derivar funções compostas. Tomemos o seguinte exemplo.

Exemplo 22. A função $h(z) = (z^2 + 2z - 7i)^2$ está definida para todo $z \in \mathbb{C}$ e h é a função composta $g \circ f$, em que $f(z) = z^2 + 2z - 7i$ e $g(z) = z^2$. Como $f'(z) = 2z + 2$ e $g'(z) = 2z$, segue da Proposição 4, que

$$h'(z) = g'(f(z))f'(z) = 2(z^2 + 2z - 7i)(2z + 2).$$

Exemplo 23. A função $h(z) = \sqrt{z^3}$ está definida para todo $z \in \mathbb{C}$ e h é a função composta $g \circ f$, em que $f(z) = z^3$ e $g(z) = \sqrt{z}$. Como $f'(z) = 3z^2$ e $g'(z) = \frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}$, segue da Proposição 4 que

$$h'(z) = g'(f(z))f'(z) = \frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}.$$

Sabemos do Cálculo Real que se f for diferenciável em a , então f é contínua em a . Para provar que f é contínua em a , temos que mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Fazemos isso mostrando que a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0. De fato, se f é diferenciável em a , então

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A ideia é a seguinte, vamos dividir e multiplicar $f(x) - f(a)$ por $x - a$. Isto pode ser feito, pois $x \neq a$.

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Assim, usando a lei do produto, ou seja, o limite do produto é o produto dos limites, podemos escrever da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemplo 24. Mostre que $f(z) = \alpha z + \beta$ é derivável em qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f'(z) = \alpha$.

Solução: Temos,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha z + \beta - (\alpha z_0 + \beta)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha(z - z_0)}{z - z_0} = \alpha.$$

Sabemos que se f é diferenciável em a logo é contínua em a mas a recíproca é falsa, pois há funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis, como por exemplo $f(x) = |x|$, é contínua em 0, mas não é diferenciável em 0. Poderíamos nos perguntar: como pode uma função deixar de ser diferenciável? Em geral se o gráfico de uma função f tiver uma “Dobra” ou uma “Quina”, então o gráfico de f não terá tangente neste ponto, e f não será diferenciável ali. Há funções definidas com pulo de descontinuidade que obviamente deixa de ser diferenciável e por fim existem curvas cuja reta tangente é vertical em $x = a$, sendo contínua em a mas não diferenciável em a . Estas considerações nos projeta a uma análise de funções reais, no entanto, nosso estudo se concentra em funções complexas.

Já sabemos que um complexo z é um par ordenado (x, y) , logo a função complexa possui duas novas funções dependendo de x e y , assim é interessante trabalhar com derivadas parciais, note que agora trataremos não apenas uma reta tangente, mas sim duas.

Na verdade o que queremos é mostrar a condição necessária e suficiente para que uma função complexa seja diferenciável. Para tal, precisamos de algumas ferramentas matemáticas que nos dê a veracidade desta afirmação. Estas ferramentas (definições, proposições, etc) serão o objeto de estudo no próximo capítulo.

4 Equações de Cauchy-Riemann

4.1 Derivadas Parciais

Definição 7. *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, A um conjunto aberto do \mathbb{R}^2 . Dizemos que f tem derivada parcial em relação a x no ponto $(x_o, y_o) \in A$ se existe o limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h}.$$

Analogamente f tem derivada parcial em relação a y no ponto $(x_o, y_o) \in A$ se o limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_o, y_o + k) - f(x_o, y_o)}{k},$$

existe.

Caso as derivadas parciais em relação a x e y existam, elas são denotadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o),$$

respectivamente. Em termos das coordenadas u e v de f temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) \right),$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o), \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) \right).$$

Lembrando que u e v são funções de variáveis reais x e y , a função f pode ser escrito como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Vejam as implicações da existência de $f'(z_o)$ quando consideramos $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ como uma aplicação $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, dependente das variáveis x e y .

Escreva $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ e $z_o = x_o + iy_o$. Para facilitar a leitura colocamos $u(x, y) = u$, $v(x, y) = v$, $u(x_o, y_o) = u_o$ e $v(x_o, y_o) = v_o$.

Da Definição 7, temos

$$\lim_{z \rightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = f'(z_o).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} &= \frac{u + iv - (u_o + iv_o)}{x + iy - (x_o + iy_o)}, \\
 &= \frac{[(u - u_o) + i(v - v_o)][(x - x_o) - i(y - y_o)]}{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}, \\
 &= \frac{(u - u_o)(x - x_o) + (v - v_o)(y - y_o)}{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}, \\
 &\quad + i \frac{(u - u_o)(x - x_o) + (v - v_o)(y - y_o)}{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}.
 \end{aligned}$$

Vamos fazer z tender a z_o . Como $f'(z_o)$ existe, obteremos o mesmo resultado qualquer que seja a direção de aproximação. Assim, vamos considerar inicialmente a aproximação ao longo da reta $y = y_o$, isto é, colocamos $z = x + iy_o$ e fazemos x tender a x_o . Nessas condições, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} &= \frac{[u(x, y_o) - u(x_o, y_o)] + i[v(x, y_o) - v(x_o, y_o)]}{x - x_o}, \\
 &= \frac{u(x, y_o) - u(x_o, y_o)}{x - x_o} + i \frac{v(x, y_o) - v(x_o, y_o)}{x - x_o}.
 \end{aligned}$$

Portanto, da Definição 7, temos

$$\begin{aligned}
 f'(z_o) &= \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{u(x, y_o) - u(x_o, y_o)}{x - x_o} + i \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{v(x, y_o) - v(x_o, y_o)}{x - x_o} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o).
 \end{aligned}$$

Faça agora z tendendo a z_o ao longo da reta $x = x_o$, isto é, faça $z = x_o + iy$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} &= \frac{[v(x_o, y) - v(x_o, y_o)] - i[u(x_o, y) - u(x_o, y_o)]}{y - y_o}, \\
 &= \frac{v(x_o, y) - v(x_o, y_o)}{y - y_o} - i \frac{u(x_o, y) - u(x_o, y_o)}{y - y_o}.
 \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}
 f'(z_o) &= \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}, \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_o} \frac{v(x_o, y) - v(x_o, y_o)}{y - y_o} - i \lim_{y \rightarrow y_o} \frac{u(x_o, y) - u(x_o, y_o)}{y - y_o}, \\
 &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o).
 \end{aligned}$$

Ora, temos então que

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)$$

e

$$f'(z_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o).$$

e desta forma acabamos de mostrar a proposição conhecida como (condições de Cauchy-Riemann).

Proposição 5. (*Condições de Cauchy-Riemann*). Se a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tem derivada no ponto $z_o = x_o + iy_o$ então,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o).$$

Lembre-se que estamos procurando ferramentas matemáticas para nos orientar se uma função complexa é derivável ou não. A proposição acima garante que se tem derivada no ponto (x_o, y_o) , logo, vale as equações acima, mas será que a recíproca é verdadeira, ou seja, se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas então é derivável? Lamenta-se dizer, mas a recíproca é falsa. Pode-se concluir que as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária para a existência da derivada de uma função f . Mas elas não são suficientes para garantir a existência dessa derivada.

Exemplo 25. Considere a seguinte função

$$f(z) = \sqrt{|xy|},$$

onde $z = x + iy$. Temos aqui $v = 0$, portanto, $v_x = v_y = 0$. Por outro lado, $u = \sqrt{|xy|}$, donde $u(k, 0) = u(0, 0) = 0$, logo,

$$u_x(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(k, 0) - u(0, 0)}{k} = 0.$$

Analogamente, $u_y(0, 0) = 0$. Vemos então que as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas no ponto $z = 0$, no entanto f não é derivável em $z = 0$.

De fato, pondo $\Delta z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, obtemos:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{|\cos \theta \sin \theta|}}{e^{i\theta}} = [(\sin 2\theta)/2]^{1/2} e^{-i\theta}.$$

Esta é a expressão da derivada de f na direção $(\cos \theta, \sin \theta)$. Como se vê, ela depende de θ e portanto $f'(0)$ não existe.

Exemplo 26. Considere a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde x e y são variáveis reais e definamos $u(0, 0) = 0$, $v(0, 0) = 0$,

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

As equações de Cauchy-riemann são satisfeitas em $(0, 0)$ pois,

$$\begin{aligned} u_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1, \\ u_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3/h^2}{h} = -1, \\ v_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h, 0) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1, \\ v_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/h^2}{h} = -1. \end{aligned}$$

Acontece que $f(z)$ não tem derivada em $(0, 0)$, pois

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(x, y) + iv(x, y)}{x + iy} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)(x + iy)} + i \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2)(x + iy)}.$$

Tomando $z \rightarrow 0$ através da reta real $x = 0$, obtemos

$$f'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + iy}{iy} = 1 - i.$$

Tomando $z \rightarrow 0$ através da reta real $y = 0$, obtemos

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + ix}{x} = 1 + i.$$

Isto mostra que $f(z)$ não possui derivada em $z = 0 + i0$. Concluimos novamente que as equações de Cauchy-Riemann não são suficientes para garantir que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ possua derivada.

Então o que garante que $f(z)$ possua derivada? Precisamos, como já mencionamos, de uma ferramenta matemática (teorema, proposição, etc), que nos dê esta garantia. Felizmente é possível, basta juntarmos a condição de que as derivadas de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sejam contínuas numa região \mathbf{R} . Obtemos uma caracterização muito importante das funções analíticas em termos dessas equações (ressaltamos que função analítica é uma função f que é derivável em todos os pontos de algum disco aberto centrado em z_o). Para tal vamos considerar a proposição abaixo.

Proposição 6. *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função complexa tal que as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existem em A e são contínuas no ponto $z_o = x_o + iy_o \in A$. Se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em z_o , então f é derivável em z_o .*

Antes de demonstrarmos a Proposição 6, precisamos de um lema importante. Segue o lema abaixo.

Lema 1. *Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto, uma função admitindo derivadas parciais em A , que são contínuas no ponto $(x_o, y_o) \in A$. Então,*

$$F(x, y) - F(x_o, y_o) = (x - x_o) \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o) + H(x - x_o, y - y_o) \right) + (y - y_o) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o) + K(x - x_o, y - y_o) \right),$$

onde

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_o, y_o)} H(x - x_o, y - y_o) = 0$$

e

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_o, y_o)} K(x - x_o, y - y_o) = 0.$$

Demonstração: Ponha $x = x_o + h$ e $y = y_o + k$ e escreva

$$F(x_o + h, y_o + k) - F(x_o, y_o) = F(x_o + h, y_o + k) - F(x_o, y_o + k) + F(x_o, y_o + k) - F(x_o, y_o).$$

Invocando o teorema do Valor Médio para as funções reais de uma variável temos que existe um número $0 < t < 1$ tal que

$$F(x_o + h, y_o + k) - F(x_o, y_o + k) + F(x_o, y_o + k) = h \frac{\partial F}{\partial x}(x_o + th, y_o + k).$$

Como $\frac{\partial F}{\partial x}$ é continua em (x_o, y_o) , a diferença

$$H(h, k) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_o + th, y_o + k) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o)$$

tende a zero para $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Logo,

$$F(x_o + h, y_o + k) - F(x_o, y_o + k) = h \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o) + H(h, k) \right). \quad (4)$$

Analogamente,

$$F(x_o, y_o + k) - F(x_o, y_o) = k \frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o + tk).$$

para algum $0 < t < 1$ e a diferença

$$K(h, k) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o + tk) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o)$$

Tende a zero para $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Portanto,

$$F(x_o, y_o + k) - F(x_o, y_o) = k \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o) + K(h, k) \right). \quad (5)$$

Somando (4) e (5), temos o lema.

Para demonstrar a proposição aplicamos o lema às componentes u e v de f para escrever

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_o) &= u(x, y) - u(x_o, y_o) + i(v(x, y) - v(x_o, y_o)), \\ &= (x - x_o) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + H_1 \right) + (y - y_o) \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o) + K_1 \right), \\ &+ i \left[(x - x_o) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) + H_2 \right) + (y - y_o) \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) + K_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Usando as condições de Cauchy-Riemann ficamos com

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_o) &= (z - z_o) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) \right) \\ &+ (H_1 + iH_2)(x - x_o) + (K_1 + iK_2)(y - y_o) \end{aligned}$$

e dividindo por $z - z_o$.

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) \\ &+ (H_1 + iH_2) \frac{x - x_o}{z - z_o} + (K_1 + iK_2) \frac{y - y_o}{z - z_o}. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração basta mostrar que

$$\lim_{z \rightarrow z_o} \left[(H_1 + iH_2) \frac{x - x_o}{z - z_o} + (K_1 + iK_2) \frac{y - y_o}{z - z_o} \right] = 0.$$

Agora,

$$\left| \frac{x - x_o}{z - z_o} \right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{y - y_o}{z - z_o} \right| \leq 1,$$

(lembres-se de que, ao passarmos ao limite sempre assumimos $z \neq z_o$). Logo,

$$\lim_{z \rightarrow z_o} \left[|H_1 + iH_2| \left| \frac{x - x_o}{z - z_o} \right| + |K_1 + iK_2| \left| \frac{y - y_o}{z - z_o} \right| \right] \leq \lim_{z \rightarrow z_o} (|H_1 + iH_2| + |K_1 + iK_2|) = 0.$$

■

A proposição acima mostra que a função $f(z) = z\bar{z}$ é derivável apenas na origem. De fato $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Logo, como as derivadas parciais são contínuas e as condições de Cauchy-Riemann valem apenas em 0 temos $f'(0) = 0$. Uma formulação alternativa das condições de Cauchy-Riemann é a seguinte: recorde que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Logo, escrevendo

$$f = u(x, y) + iv(x, y) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

temos, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right),$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Com o exposto acima pode-se verificar que as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas no ponto z_o , se, e somente se, vale

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o), \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o),\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_o) = 0.$$

■

4.2 Propriedade Geométrica de Funções Analíticas

As funções analíticas possuem uma propriedade geométrica bem interessante como pode ser vista no teorema a seguir:

Teorema 2. *Sejam $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ uma analítica tal que $f'(z) \neq 0$. Sejam $u = Re$ e $v = Im$. Então as curvas de nível de u e v se cruzam ortogonalmente.*

Prova: Como $f' \neq 0$ então os vetores gradientes ∇u e ∇v são não nulos e por um resultado de Cálculo II, temos que ∇u e ∇v são ortogonais às curvas de nível de u e v respectivamente. Porém pelas equações de Cauchy-Riemann,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Assim,

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\rangle = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

■

Exemplo 27. Considere $f(z) = z^2$, $z \neq 0$. Como $f'(z) = 2z \neq 0$, vemos que as curvas $u(x, y) = Re(z) = x^2 - y^2 = c_1$ e $v(x, y) = Im(z) = 2xy = c_2$ se cruzam ortogonalmente nos pontos indicados, pois

$$\begin{aligned}\nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (2x, -2y), \\ \nabla v &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (2y, 2x), \\ \nabla u \cdot \nabla v &= [2x \cdot 2y + (-2y \cdot 2x)] = 0.\end{aligned}$$

Note que estas curvas são hipérbolas (Veja Fig.22).

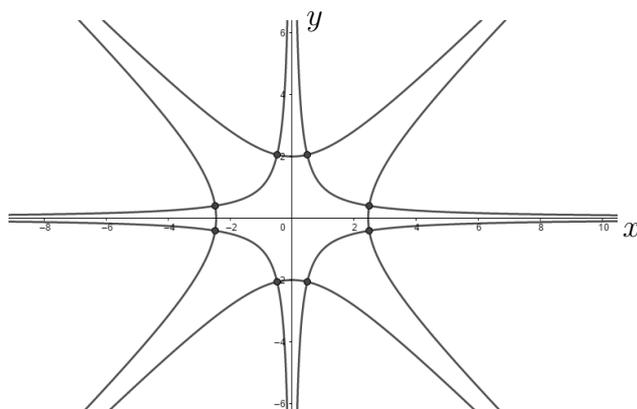


Figura 22: $x^2 - y^2 = c_1$ e $2xy = c_2$. (Nos pontos os encontros das curvas são ortogonais).

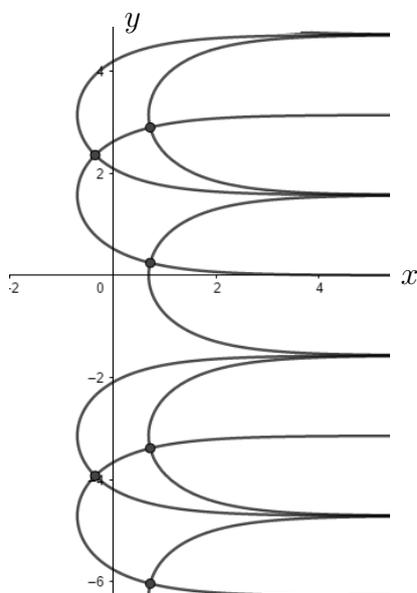


Figura 23: $e^x \cos y = c_1$ e $e^x \sin y = c_2$. (Nos pontos os encontros das curvas são ortogonais).

Exemplo 28. Considere $f(z) = e^z$. Como $f'(z) = e^z \neq 0$, vemos que as curvas $u(x, y) = \operatorname{Re}(z) = e^x \cos y = c_1$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}(z) = e^x \sin y = c_2$ se cruzam ortogonalmente (veja a Fig.23.) nos pontos indicados, pois,

$$\begin{aligned} \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (e^x \cos y, -e^x \sin y), \\ \nabla v &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (e^x \sin y, e^x \cos y), \\ \nabla u \cdot \nabla v &= [(e^x \cos y \cdot e^x \sin y + (-e^x \sin y \cdot e^x \cdot \cos y))] = 0. \end{aligned}$$

5 Exponencial Complexa

É importante que o leitor neste momento já possua conhecimento de funções trigonométricas, constante de Euler e a função exponencial e^x , conceitos estes estudados nos cursos de cálculo, para não partir da equação pronta e acabada vamos recordar o desenvolvimento dessas funções em séries de Maclaurin, válidos para todos os valores de x .

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (6)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots; \quad (7)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \quad (8)$$

No ensino médio os alunos conhecem a constante de Euler, quando o professor ministra aula sobre logaritmo neperiano também conhecido como logaritmo natural, onde a constante de Euler é a base deste logaritmo. Pelo menos é previsto este estudo, mas infelizmente na escola pública não é dada ênfase neste estudo ficando os alunos restrito quase que exclusivamente ao estudo de logaritmo na base 10. Assim a constante de Euler efetivamente será estudada no nível superior se a grade curricular contemple o curso de cálculo.

No curso de cálculo a constante de Euler é apresentada como uma série que converge entre 2 e 3 , basta escolher $x = 1$ na equação 6. Daí temos

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Tentaremos definir e^z com z complexo. Para tal veremos o comportamento da série. Seja $z = iy$. Então, pela equação (6) temos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Ordenando a série acima separando os termos reais dos imaginários, podemos escrever

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right).$$

Agora comparando (7) e (8), temos

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (9)$$

Levando em conta todas estas considerações, agora somos motivados a definirmos uma função exponencial. Note que (9) foi desenvolvida apenas para o complexo $z = x + iy$, com $x = 0$. No entanto, uma propriedade muito importante, a aditiva da exponencial

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2},$$

pode nos ajudar a ampliar para um complexo com x e y diferente de zero. Definindo então, a exponencial de e^z , para um número complexo $z = x + iy$, e utilizando a propriedade acima temos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad (10)$$

definido então a exponencial por (10). Observe primeiramente que está bem definida para todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso suas componentes são

$$u(x, y) = e^x \cos y,$$

$$v(x, y) = e^x \sin y,$$

e temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

As condições de Cauchy-Riemann são cumpridas e ainda da continuidade dessas derivadas podemos concluir que a função exponencial e^z é holomorfa em todo \mathbb{C} , e portanto é uma função inteira. Note ainda que sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}e^z &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z. \end{aligned}$$

5.1 Propriedades da Exponencial

Da definição que foi dada e das propriedades das funções reais $\sin x$, $\cos x$ e e^x , decorrem as seguintes propriedades da exponencial complexa

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}; \quad (11)$$

$$e^{-z} = 1/e^z; \quad (12)$$

$$(e^z)^n = e^{nz} \quad n \text{ inteiro}; \quad (13)$$

$$e^z \neq 0 \text{ para todo } z; \quad (14)$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}; \quad (15)$$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k \text{ inteiro}. \quad (16)$$

Demonstração do item (11). Sejam

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad e \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Obtemos, em vista da Definição (10) que

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2), \\ &= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

■

Demonstração do item (12). Tomando $z = x + iy$, temos

$$\begin{aligned} e^{-z} = e^{-x} e^{-iy} &= \frac{1}{e^x} [(\cos(-y) + i \sin(-y))] \\ &= \frac{1}{e^x} (\cos y - i \sin y) \\ &= \frac{1}{e^x (\cos y + i \sin y)} = \frac{1}{e^{x+iy}} = \frac{1}{e^z}. \end{aligned}$$

■

A demonstração dos itens (13), (14), (15) e (16) será omitida aqui. Para mais detalhes, veja [9].

Exemplo 29. Mostre que $e^{3+i(7\pi)} = -e^3$.

Solução: Da propriedade (11),

$$e^{3+i(7\pi)} = e^3 e^{i7\pi}.$$

Da definição (10),

$$\begin{aligned} e^3 e^{i(7\pi)} &= e^3 (\cos 7\pi + i \sin 7\pi) \\ &= e^3 (-1 + i \cdot 0) \\ &= -e^3. \end{aligned}$$

Exemplo 30. Determine todos os números complexos z tais que $e^z = 5i$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned} e^z = e^{x+iy} = 5i &= 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \\ e^x = 5 &\Rightarrow x = \ln 5, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto $z = \ln 5 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 31. Reduza a forma $re^{i\theta}$ o complexo $z = 1 + i$.

Solução: Escreveremos o complexo $z = 1 + i$ na forma trigonométrica. Temos então que o módulo do complexo é dado por $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e o argumento do complexo é $\tan \theta = \frac{1}{1} = 1$. Daí, $\theta = \pi/4 + 2\pi k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Em tão na forma trigonométrica o complexo é dado por $z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$.

Da Propriedade (10), temos $e^{iy} = (\cos y + i \sin y)$. Tomando $y = \pi/4$, temos $e^{i\frac{\pi}{4}} = (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$. Substituindo esta expressão na forma trigonométrica encontrada, temos $z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exemplo 32. Reduza a forma $re^{i\theta}$ o complexo $z = \frac{i}{1+i}$.

Solução: Multiplicando o denominador e numerador do complexo $z = \frac{i}{1+i}$ por $(1-i)$ obtemos o mesmo complexo ainda na forma algébrica $z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

Agora escreveremos o complexo $z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ na forma trigonométrica, temos então que o módulo do complexo é dado por $|z| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{2}/2$ e o argumento

do complexo é $\tan \theta = \frac{1/2}{1/2} = 1$. Daí, $\theta = \pi/4 + 2\pi k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então na forma trigonométrica o complexo é dado por

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Da Propriedade (10), temos $e^{iy} = (\cos y + i \sin y)$. Fazendo $y = \frac{\pi}{4}$ obtemos

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Substituindo esta expressão na forma trigonométrica encontrada temos

$$z = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

Exemplo 33. Estabeleça as fórmulas de Euler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Solução: Sabendo que $e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$ (*), e da trigonometria que: função cosseno é uma função par, ou seja, $\cos \theta = \cos(-\theta)$, e ainda que a função seno é uma função ímpar ($\sin(-\theta) = -\sin \theta$), assim podemos escrever (*) como $e^{-i\theta} = (\cos \theta - i \sin \theta)$ (**). Somando (*) e (**), temos

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta - i \sin \theta) &= e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \\ 2 \cos \theta &= e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \end{aligned}$$

Subtraindo (*) de (**), temos

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta) &= e^{i\theta} - e^{-i\theta}, \\ 2i \sin \theta &= e^{i\theta} - e^{-i\theta}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned}$$

As fórmulas acima também podem nos fornecer o porquê da $(\sin \theta)' = \cos \theta$.

Seja $f = \sin \theta$ que agora podemos escrever $f = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Usando as regras da derivação

$$\begin{aligned} f' &= \frac{(ie^{i\theta} + ie^{-i\theta})2i}{4i^2}, \\ &= \frac{(e^{i\theta} + ie^{-i\theta})2i^2}{4i^2}, \\ &= \frac{(e^{i\theta} + ie^{-i\theta})2i^2}{4i^2}, \\ &= \frac{(e^{i\theta} + ie^{-i\theta})}{2}, \\ &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Poderíamos mostrar também que a derivada do $\cos \theta$ é $(-\sin \theta)$. Como o desenvolvimento seria análogo, deixaremos a carga do leitor.

Sabemos que no caso de funções reais, a função logaritmo é a inversa da função exponencial. Será que nos complexos segue a mesma estrutura, e, é possível obter a inversa sem que preciso fazer algumas considerações? Este assunto veremos no próximo capítulo.

6 O Logaritmo Complexo

Podemos neste capítulo partir da definição de logaritmo de um número complexo e daí fazer algumas considerações e observações para que possamos entender esta função bem como sua peculiaridade e observar se há divergência com o logaritmo real.

Definição 8. *O logaritmo de um número complexo $z = re^{i\theta} \neq 0$, é definido da seguinte maneira:*

$$\log z = \log r + i\theta,$$

onde $\log r$ denota o logaritmo real do número $r > 0$. O logaritmo está definido para todo o número complexo $z \neq 0$, e se reduz ao logaritmo real quando $\theta = 0$.

Note que pela definição acima $\log z$ fica dependente do argumento escolhido, sendo assim existem vários valores distintos. Esta possibilidade permite dizer que o logaritmo é uma *função multivalente*.

Observação 1. Não faz muito sentido ou não é muito apropriado termos uma função com vários valores distintos. Então teremos que restringir seu argumento para que a função possa se tornar *univalente*.

Recordamos que o argumento do complexo $z \neq 0$ é determinado por múltiplos inteiros de 2π . Tomemos portanto θ_o pertencente ao intervalo de $[0, 2\pi)$. Daí um argumento genérico pode ser assim definido:

$$\theta = \theta_o + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

para que o logaritmo fique bem definido como função univalente. Cada valor de k deverá conduzir a um *ramo* do logaritmo, ou seja, (o logaritmo fica especificado com um determinado valor de k). Denotando $\log_k z$ tal ramo, teremos:

$$\log_k z = \log r + i\theta, \quad 2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi.$$

O ponto $z = 0$ é chamado ponto de *ramificação* de $\log z$, justamente porque, quando o ponto z descreve um círculo centrado na origem e volta ao ponto inicial, a função $\log z$ retorna aumentada de $2\pi i$, isto é, passa de um dos seus ramos ao ramo seguinte.

Se colocarmos o valor de $k = 0$ obtemos o que chamamos de *valor principal*. *ramo principal*, ou *determinação principal* do logaritmo. No entanto o intervalo nada tem de especial em sua escolha para especificar o valor principal, ou melhor segundo (Soares p. 52), o ramo do logaritmo definido no domínio \mathbb{D} , obtido retirando-se de \mathbb{C} o semi-eixo $(x, 0)$, $x \leq 0$, chamado de *ramo principal*.

Para o ramo principal temos $-\pi < \theta < \pi$ e afirmarmos que θ é uma função contínua em \mathbb{D} . Para ver isso considere os três domínios

$$U_1 = \{z : \text{Im}(z) > 0\},$$

$$U_2 = \{z : \text{Re}(z) > 0\},$$

$$U_3 = \{z : \text{Im}(z) < 0\}.$$

Sua união $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ é \mathbb{D} .

Se um número complexo z está em U_1 , então seu argumento satisfaz $0 < \theta < \pi$. Escrevendo $z = x + iy$ temos que

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}$$

e podemos tomar

$$\theta = \arccos \left(\frac{\text{Re}(z)}{|z|} \right),$$

que é uma função contínua (a inversa da função \cos no intervalo $(0, \pi)$ tal que $\arccos(0) = \pi/2$).

No domínio U_2 temos que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ e

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\text{Im}(z)}{|z|}.$$

Aqui tomamos

$$\theta = \arcsin \left(\frac{\text{Im}(z)}{|z|} \right),$$

onde \arcsin é a inversa da função \sin no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ e que vale 0 em 0 e também é uma função contínua.

Para $z \in U_3$ temos $-\pi < \theta < 0$.

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}.$$

Aqui fazemos

$$\theta = \arccos \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \right),$$

onde \arccos é a função inversa da função \cos no intervalo $(-\pi, 0)$, tal que $\arccos(0) = \frac{-\pi}{2}$ e é uma função contínua. Como θ é contínua em cada um dos domínios U_1 , U_2 e U_3 , ela é na união desses domínios e portanto é contínua em \mathbb{D} .

Com isso em mãos podemos afirmar que o ramo principal do logaritmo é uma função contínua em \mathbb{D} . Vamos mostrar que ela é holomorfa nesse domínio. Dado $z_o \in \mathbb{D}$ seja $w_o \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_o} = z_o$. Então,

$$\log'(z_o) = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{\log z - \log z_o}{z - z_o} = \lim_{w \rightarrow w_o} \frac{w - w_o}{e^w - e^{w_o}} = \frac{1}{e^{w_o}} = \frac{1}{z_o}.$$

Portanto

$$\log' z = \frac{1}{z} \text{ qualquer que seja } z \in \mathbb{D}.$$

Uma maneira interessante de encontrar a derivada de $\log z$ está demonstrada no material disponibilizado do Sérgio L. Zani ³, que foi apresentada com um seguinte exemplo.

Exemplo 34. Verifique que a função dada por $L(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan y/x$, definida para $x > 0$ é derivável e calcule a sua derivada.

Solução: Utilizando-se das coordenadas polares, com $r > 0$ e o ramo definido $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, obtemos que

$$L(r \cos \theta + ir \sin \theta) = \log r + i\theta.$$

Analisando as parte real e imaginária temos $U(r, \theta) = \log r$ e $V(r, \theta) = i\theta$.

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad e \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 1.$$

As derivadas parciais acima satisfazem as equações de Cauchy- Riemann, sendo assim

$$L'(z) = L'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\log r + i\theta) = e^{-i\theta} \frac{1}{r} = \frac{re^{-i\theta}}{r^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

■

³Material didático disponível <http://conteudo.icmc.usp.br/Portal/conteudo/1377/333/material-didatico-online>.

Vamos agora utilizar a definição de logaritmo para resolver alguns exemplos. Veremos que existem infinitas soluções para logaritmos com logaritmando negativos na qual em números reais não é possível.

Exemplo 35. Mostre que $\log(-1) = (2k + 1)\pi i$, com $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Solução: Pela definição temos $\log z = \log |z| + i\theta$. Lembrando que: $|z|$ é o módulo do complexo, ou seja $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e θ (ou $\arg(z)$) o argumento do complexo z .

Daí temos,

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1 \quad \text{e} \quad \theta = \pi + 2\pi k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \log(-1) &= \log 1 + i(\pi + 2\pi k) \\ &= 0 + i(\pi + 2\pi k) \\ &= (2k + 1)\pi i, \quad \text{para } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

Exemplo 36. Mostre que $\log(i) = \frac{4k + 1}{2}\pi i$, para $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Solução:

$$|z| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1 \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \log(i) &= \log 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \\ &= 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \\ &= \left(\frac{4k + 1}{2}\right)\pi i, \quad \text{para } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

6.1 Propriedades do Logaritmo

Começaremos esta seção com o seguinte paradoxo (paradoxo de Bernoulli).

$$(-z)^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad 2\log(-z) = 2\log z \quad \Rightarrow \quad \log(-z) = \log z.$$

Geralmente este paradoxo é seguido da seguinte pergunta “Onde está o erro?”. Se considerarmos as propriedades dos logaritmos nos reais, valendo para os complexos, sem

qualquer consideração, poderíamos afirmar que não existe erro. Mas como a pergunta não faria sentido, caso não tivesse erro, então, teremos que inspecionar se as propriedades dos logaritmos nos reais são válidas para os complexos. Se acharmos alguma inconsistência, então resolvemos paradoxo, ou seja, as propriedades podem sofrerem interpelações, ajustes, novas interpretações ou significados.

Primeiramente temos

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2. \quad (17)$$

Vamos verificar que a propriedade (17) é válida para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Com efeito, tome $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Daí, temos

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= [\log r_1 + i(\theta_1 + 2k_1\pi) + \log r_2 + i(\theta_2 + 2k_2\pi)] \\ &= \log(r_1 r_2) + i[(\theta_1 + \theta_2) + 2(k_1 + k_2)\pi], \end{aligned}$$

onde k_1 e k_2 são inteiros arbitrários. Esta última expressão é a forma geral de $\log(z_1 z_2)$ se k_1 e k_2 forem independentes um do outro. Neste caso, a equação (17) é válida com o seguinte significado: *o conjunto dos valores possíveis de $\log(z_1 z_2)$ coincide com os valores possíveis de $\log z_1 + \log z_2$.*

Se k_1 e k_2 não forem independentes, como é o caso em que $z_1 = z_2 = z = r e^{i\theta}$ e (17) se reduz a

$$\log z^2 = 2 \log z. \quad (18)$$

Da igualdade acima o segundo membro pode ser escrito

$$\log r^2 + i[(2\theta) + 2(2k)\pi],$$

onde k é arbitrário. Neste caso, qualquer valor do segundo membro de (18) é um valor do primeiro membro, mas a recíproca é falsa. Tomemos o exemplo abaixo.

Exemplo 37. Seja $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Assim,

$$z^2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad e \quad \log z^2 = -i\frac{\pi}{2},$$

mas

$$\log z + \log z = i\frac{3\pi}{4} + i\frac{3\pi}{4} = i\frac{3\pi}{2}.$$

O exemplo nos mostra que a propriedade falhou neste complexo z escolhido, o que revela que neste em particular temos

$$\log z^2 = \log(z.z) \neq \log z + \log z.$$

Aproveitando o exemplo podemos verificar se a propriedade abaixo é válida. Sabemos que para os \mathbb{R} é verdadeira. Verificaremos agora que para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ a seguinte propriedade também não é verdadeira:

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2.$$

Podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \left(\log z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right).$$

Desta maneira recaímos no caso anterior. Voltando ao paradoxo de Bernoulli, percebemos que ele utilizou-se da seguinte propriedade $\log z^2 = 2 \log z$, o que constatamos a não veracidade quando tratamos de números complexos.

Vejamos agora alguns exemplos básicos onde se calculam alguns logaritmos.

Exemplo 38. Calcule $\log(1 + i)$ e $\log(3 - 3i)$.

Solução: Podemos escrever $(1 + i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. De imediato temos:

$$\log(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

Podemos escrever $(3 - 3i) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. De imediato temos:

$$\log(3 - 3i) = \log 3\sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4}.$$

7 Potenciação em \mathbb{C}

Se $z \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ definimos:

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z).$$

Dependendo do expoente α a função $z \mapsto z^\alpha$ é multivalente. No entanto, quando $\alpha = n$, com $n \in \mathbb{Z}$ a definição acima coincide com aquela que já havíamos dado para z^n . De fato, se $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, temos

$$\begin{aligned} \exp(n \log z) &= \exp(n(\log r + i(\theta + 2k\pi))) \\ &= \exp(n \log r) \exp(in(\theta + 2k\pi)) \\ &= \exp(\log r^n) \exp(in\theta) \exp(2kn\pi i) \\ &= r^n e^{in\theta} \\ &= (re^{i\theta})^n \\ &= z^n, \end{aligned}$$

que é independente de $k \in \mathbb{Z}$.

Quando $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, a definição acima coincide com a da função multivalente raiz n -ésima. De fato,

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}(\log r + i(\theta + 2k\pi))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n} \log r\right) \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\ &= \exp\left(\log r^{\frac{1}{n}}\right) \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\ &= (\sqrt[n]{r})^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = z^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Note que em geral quando tomamos um ramo do logaritmo a função $f(z) = z^\alpha$ com esta restrição é chamada também de ramo. Note que este ramo é uma função analítica pois é composição de duas funções analíticas. No caso de tomarmos o ramo principal do logaritmo, o ramo da função potencia também será chamado de principal.

Exemplo 39. Seja $f(z) = z^\alpha$ um ramo da função potência. Calcule $f'(z)$.

Solução: Fixe um ramo do logaritmo com $r > 0$ e $\theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$, dado por $\log z =$

$\log r + i(\theta + 2k\pi)$. Usando a regra da cadeia pode-se obter

$$\begin{aligned} f'(z) = \exp(\alpha \log z) \alpha \log' z &= \exp(\alpha \log z) \alpha \frac{1}{z} \\ &= \alpha \frac{\exp(\alpha \log z)}{\exp(\log z)} \\ &= \exp[(\alpha \log z - \log z)] \\ &= \alpha \exp[(\alpha - 1) \log z] \\ &= \alpha z^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

onde deve ser entendido que $z^{\alpha-1}$ é o ramo da função multivalente $z \mapsto z^{\alpha-1}$, com $r > 0$ e $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$.

Tomemos agora um exemplo particular para mostrarmos que dada $f(z) = z^\alpha$ temos que $f'(z) = \alpha z^{\alpha-1}$.

Exemplo 40. Seja $f(z) = z^3$. Use as equações de Cauchy Riemann para mostrar que f é analítica e calcule sua derivada.

Solução:

$$\begin{aligned} z^3 = (x + iy)^3 &= x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 \\ &= x^3 + i(3x^2y) - 3xy^2 - iy^3 \\ &= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^3 - 3xy^2 \\ v(x, y) &= 3x^2y - y^3. \end{aligned}$$

Fazendo as derivadas parciais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2. \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy. \end{aligned}$$

Comparando as derivadas parciais encontradas com as equações de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Verifica-se que as equações são satisfeitas, e ainda, as funções são contínuas em todo plano. Portanto elas são analíticas em todo o plano. Podemos então encontrar $f'(z)$.

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \\
 &= 3x^2 - 3y^2 + i6xy \\
 &= 3x^2 + i(6xy + 3iy^2) \\
 &= 3(x^2 + i2xy + i^2y^2) \\
 &= 3(x + iy)^2 \\
 &= 3z^2.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 41. Encontre todos os valores de i^i .

Solução:

$$\begin{aligned}
 i^i &= \exp(\log i^i) = \exp i \log i \\
 &= \exp i \left[\log|i| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] \\
 &= \exp i \left[\log 1 + i \left(\frac{\pi + 4k\pi}{2} \right) \right] \\
 &= \exp i \left[0 + i \left(\frac{\pi + 4k\pi}{2} \right) \right] \\
 &= \exp i^2 \left(\frac{\pi + 4k\pi}{2} \right) \\
 &= \exp \left(-\frac{1 + 4k}{2} \pi \right), \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Observação 2. Observe que todos os valores possíveis de i^i são reais, embora não pareça nada razoável, se levarmos em consideração que inicialmente o nosso “ i ” era apenas um candidato para solução de uma equação do tipo $X^2 + 1 = 0$. Inicialmente vimos que para haver solução era necessário que $i^2 = -1$, o que já nos causava certa espanto, imagine agora o vislumbre em descobrir que i^i é essencialmente um número real.

Poderíamos nos perguntar se as propriedades usuais da potenciação válidas nos reais são válidas nos \mathbb{C} , como por exemplo:

$$(1) \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta;$$

$$(2) \quad z^{(\beta)\alpha} = z^{(\alpha)\beta};$$

$$(3) \quad (z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha.$$

Infelizmente (1) e (2) não são válidos para os complexos. Estas propriedades são falhas, mesmo se tratando de igualdade de conjuntos, no entanto o item (3) tem validade para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar uma contradição para o item (1). Para $z \neq 0$ tome $z = 1$ e $\alpha = \beta = 1/2$. Daí temos $1^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$. Por outro lado sabemos que $\sqrt{1} = \pm 1$. Assim se tomarmos para $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ no segundo termo da equação (1), temos $1^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} = (1)(-1) = -1$.

8 Aplicações: Circuitos Elétricos e Amortecimentos

8.1 Preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias

Antes de irmos direto a solução de problemas físicos, vamos relembrar do Cálculo Diferencial e Integral em \mathbb{R} a teoria necessária para resolver alguns problemas que serão propostos.

Sabemos da teoria das equações diferenciais ordinárias que a solução da equação diferencial ordinária linear

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t), \quad (19)$$

com a, b e $c \in \mathbb{R}$, é dada por

$$y(t) = y_h + y_p,$$

em que y_h é a solução da equação diferencial homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad (20)$$

e y_p é uma solução particular da equação inicial (19).

Um bom candidato para a solução homogênea é $y = e^{\lambda t}$, pelo fato de suas derivadas serem bem previsíveis. Tomemos este candidato como solução, daí temos $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ e $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, assim a solução da homogênea pode ser escrita como $a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$ colocando em fator comum temos, $e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$.

Note que quando λ for solução da equação polinomial então $y = e^{\lambda t}$ será solução da equação diferencial homogênea. Como a, b e c são números reais, se $b^2 - 4ac < 0$, então as raízes da equação $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ são números complexos um conjugado do outro, que escreveremos como $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$, com $\beta > 0$.

Portanto as duas soluções de (20), tem o seguinte formato $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)t}$ e $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)t}$. Como $e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$, temos

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} &= e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta + i \sin \beta), \\ e^{(\alpha-i\beta)t} &= e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta - i \sin \beta). \end{aligned}$$

A solução geral de (20) pode ser escrita como a soma e a diferença de duas funções soluções

$$y_1 + y_2 = e^{\alpha t}(\cos \beta + i \sin \beta) + e^{\alpha t}(\cos \beta - i \sin \beta) = 2e^{\alpha t} \cos \beta,$$

e

$$y_1 - y_2 = e^{\alpha t}(\cos \beta + i \sin \beta) - e^{\alpha t}(\cos \beta - i \sin \beta) = 2ie^{\alpha t} \sin \beta.$$

Desprezando as constantes multiplicativas 2 e $2i$, obtemos um par de soluções com valores reais $u(t) = e^{\alpha t} \cos \beta$ e $v(t) = e^{\alpha t} \sin \beta$. Podemos mostrar que o Wronskiano ⁴, das funções u e v é diferente de zero quando $\beta \neq 0$. De fato, $W(u, v) = \beta e^{2\alpha t}$. Logo as funções u e v são linearmente independentes e formam um conjunto fundamental de soluções (ou base de solução). Assim, a solução geral de (20) é dada pela combinação linear de u e v , isto é,

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$

com c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

8.2 Aplicações em Circuitos RLC

Até agora temos visto uma pequena parcela do estudo sobre funções complexas analíticas, e ainda, formalizamos a representação de um complexo z na forma polar e algébrica e antes mesmo verificamos que o conjunto \mathbb{C} é um corpo que: com uma lei bem definida de manipulação amplia o números reais, fazendo com que problemas do tipo $x^2 + 1 = 0$ tenha solução. Agora poderíamos nos perguntar, se a solução dizemos assim algébrica de um problema antes não resolvível pode dar-nos ferramentas que expliquem algum fenômeno físico. Alguns pesquisadores acreditam que todo fenômeno comporta-se de maneira lógica e estruturada, até parece que o fenômeno ocorre se há algoritmo previamente prescrito para que o fenômeno ocorra, ou seja, é possível equacionar um fenômeno para prever seu comportamento futuro.

São conhecidas várias equações físicas que descrevem movimentos, tais como: equação horária da velocidade em função do tempo ($v = v_o + at$), equação horária da posição em função do tempo ($s = s_o + v_o t + a \frac{t^2}{2}$), etc. No entanto, estas equações não trazem problemas a princípio, diz-se a princípio, pois, muitas vezes ao trabalharmos com estas equações eventualmente encontramos raízes quadradas negativas. Para contornar tal problema

⁴O Wronskiano é utilizado para determinar se um conjunto de funções diferenciáveis são linearmente dependentes ou independentes, em um dado intervalo. Caso o Wronskiano seja diferente de zero em algum ponto do intervalo, as funções são linearmente independentes.

simplesmente procuramos justificar que não há tempos negativos. No entanto, estamos agora dispostos a resolver problemas físicos nos quais podem aparecer raiz quadrada de um número real negativo.

Tomemos por exemplo em eletricidade um circuito RLC (Resistor, Indutor e Capacitor), conforme Fig.24, onde o resistor é um dispositivo elétrico com a finalidade de dissipar energia em forma de calor (conhecido como efeito Joule), o indutor conhecido por bobina, é um elemento usado em circuitos elétricos, eletrônicos e digitais com a função de acumular energia através de um campo magnético (também serve para impedir variações na corrente elétrica), e o capacitor um dispositivo elétrico com a finalidade de armazenar energia elétrica (difere da pilha por descarregar quase que instantaneamente), e, a força eletromotriz E (responsável por alimentar o circuito -Pilha - fonte de energia).

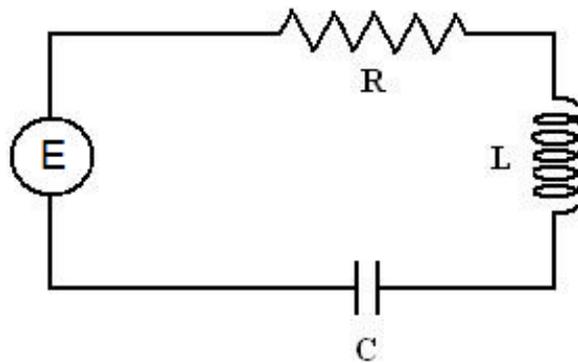


Figura 24: Circuito RLC, alimentado por uma fonte E .

Se a carga no capacitor no instante t for $Q = Q(t)$, então a corrente é a variação de Q em relação a t , isto é, $I = dQ/dt$. A queda de voltagem através do resistor, do indutor e do capacitor pode ser escrita respectivamente, por

$$RI, \quad L \frac{dI}{dt}, \quad e \quad \frac{Q}{C}.$$

A lei de Kirchhoff diz que a soma das quedas dessa voltagem é igual a voltagem fornecida, ou seja, podemos escrever da seguinte maneira:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Temos ainda que $I = \frac{dQ}{dt}$. Assim, essa equação torna-se

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t). \quad (21)$$

Note que a equação (21) trata-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Se a carga Q_o e a corrente I_o forem conhecidas no instante $t = 0$, temos as condições iniciais e deste modo é possível resolver a equação (21). A equação (21) é conhecida como equação diferencial que descreve as oscilações amortecidas num circuito RLC. Veja [5].

Além da equação (21) que está em função da carga Q podemos obter uma equação diferencial para a corrente. Basta lembrarmos que $I = dQ/dt$, e derivando (21) temos

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E'(t). \quad (22)$$

Exemplo 42. Determine a carga e a corrente no instante t no circuito da Fig.24, se $R = 40\Omega$, $L = 1H$, $C = 16 \cdot 10^{-4}F$, $E(t) = 100 \cos 10t$, e a carga e a corrente inicial são ambas 0.

Solução: Substituindo os valores de L , R , C e $E(t)$, na equação (22), temos:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 40 \frac{dQ}{dt} + 625 Q = 100 \cos 10t. \quad (23)$$

Primeiramente, para resolvermos a equação homogênea associada a equação 23, temos que resolver a equação característica

$$r^2 + 40r + 625 = 0.$$

Assim,

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i.$$

Note que se não fosse o surgimento do estudo dos números complexos, fisicamente poderia se dizer que esse problema físico não possui solução. Felizmente, sabemos que há solução como veremos a seguir.

A solução da equação homogênea é

$$Q_c(t) = e^{-20t} (c_1 \cos 15t + c_2 \sin 15t).$$

Precisamos determinar uma solução particular Q_p . Vamos utilizar o método dos coeficientes indeterminados. Suponhamos inicialmente que a solução particular é da forma

$$Q_p(t) = A \cos 10t + B \sin 10t.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q'_p(t) &= -10A \sin 10t + 10B \cos 10t, \\ Q''_p(t) &= -100A \cos 10t - 100B \sin 10t. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (23), temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} 100 \cos 10t &= (-100A \cos 10t - 100B \sin 10t) + 40(-10A \sin 10t + 10B \cos 10t) \\ &\quad + 625(A \cos 10t + B \sin 10t). \end{aligned}$$

Colocando em fator comum, e comparando os termos da igualdade e igualando os coeficientes, temos

$$\begin{aligned} 525A + 400B &= 100, \\ -400A + 525B &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima temos

$$A = \frac{84}{697} \quad e \quad B = \frac{64}{697}.$$

Daí uma solução particular é

$$Q_p(t) = \frac{1}{697}(84 \cos 10t + 64 \sin 10t),$$

e a solução geral é

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \sin 15t) + \frac{4}{697}(21 \cos 10t + 16 \sin 10t)$$

Como a condição inicial $Q(0) = 0$, obtemos

$$Q(0) = c_1 + \frac{84}{697} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{84}{697}.$$

A outra condicional é que a corrente é zero. Para impor esta condição primeiro vamos diferenciar para determinar a corrente:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2) \cos 15t + (-15c_1 - 20c_2) \sin 15t] \\ &\quad + \frac{40}{697}(-21 \sin 10t + 16 \cos 10t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \frac{640}{697} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{464}{2091}.$$

Assim, a função que determina a carga é

$$Q(t) = \frac{4}{697} \left[\frac{e^{-20t}}{3} (-63 \cos 15t - 116 \sin 15t) + (21 \cos 10t + 16 \sin 10t) \right],$$

e a expressão para a corrente é

$$I(t) = \frac{1}{2091} [e^{-20t} (-1920 \cos 15t + 13060 \sin 15t) + 120(-21 \sin 10t + 16 \cos 10t)].$$

■

Observação 3. O exemplo anterior trata-se de um circuito alimentado por um fonte de tensão $E \neq 0$, que além de fornecer energia para dissipar no resistor ainda serve para carregar o capacitor C . Este, tem a propriedade de armazenar energia elétrica, e, quando o circuito deixa de ser alimentado por uma fonte E ele assume o papel de uma fonte de alimentação, diferindo de E apenas no fluxo de carga (a densidade de fluxo de carga é mais intenso).

Considere agora que foi retirado a fonte de alimentação E do circuito, ficando apenas o novo circuito com R , L e C , conforme a ilustração da Fig.25. Agora temos um circuito RLC apenas, e sua equação característica é similar a do RLC com fonte externa de alimentação, pois apenas retiraremos sua fonte. A equação homogênea é dado por

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0. \quad (24)$$

Veremos agora o comportamento do fenômeno baseado no estudo desta nova equação. Para tal, considere o seguinte exemplo.

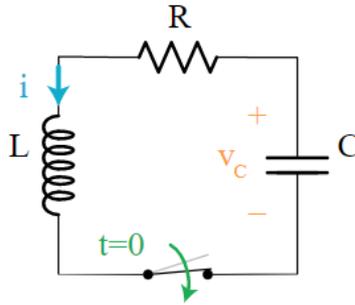


Figura 25: Circuito RLC sem fonte E .

Exemplo 43. Considere o circuito da Fig.25, com a condição inicial que o capacitor esteja carregado com uma carga Q , $Q(0) = 1$ e $i(0) = 0$. Dados: $C = \frac{4}{5}F$, $L = 25H$ e $R = 2\Omega$, encontre a solução para $Q(t)$ em qualquer tempo t .

Solução: Do enunciado e da equação (24), temos:

$$25 \frac{d^2 Q}{dt^2} + 2 \frac{dQ}{dt} + \frac{5}{4} Q = 0.$$

Temos que a equação característica é dada por

$$25r^2 + 2r + \frac{5}{4} = 0.$$

As soluções da equação anterior são os números complexos $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$.

Neste caso, a solução geral da primeira equação será

$$y = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$

No entanto, como $\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{25}$ e $\beta = +\frac{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} = \frac{11}{50}$, podemos então escrever a solução como

$$Q(t) = e^{(-\frac{1}{25})t} \left(c_1 \cos \frac{11}{50}t + c_2 \sin \frac{11}{50}t \right).$$

Utilizando as condições iniciais $Q(0) = 1$ e $Q'(0) = 0$, temos que os valores de C_1 e c_2 , são respectivamente 1 e $\frac{2}{11}$. Finalmente, a equação que descreve a quantidade de carga elétrica que circula no sistema em um t qualquer tem a seguinte forma

$$Q(t) = e^{(-\frac{1}{25})t} \left(\cos \frac{11}{50}t + \frac{2}{11} \sin \frac{11}{50}t \right).$$

Mais uma vez observa-se que existe um fator de decaimento $e^{(-\frac{1}{25})t}$ seguido de uma função periódica, ou seja, espera-se que as oscilações periódicas se dissolvam com o passar do tempo. A Figura 26 permite esclarecer tal fenômeno.

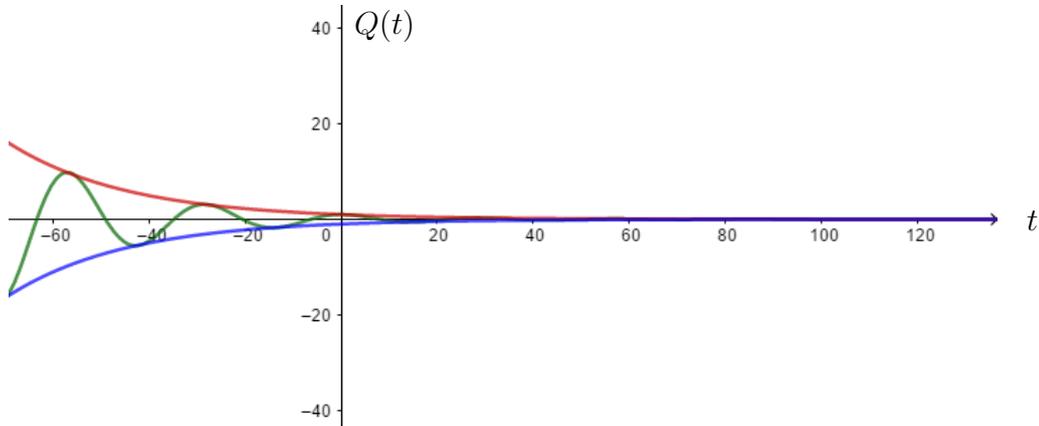


Figura 26: Curva de amortecimento $Q(t)$ (oscilação subamortecida).

É interessante comentar também que em circuitos de corrente alternada, por exemplo, as instalações elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos, o que facilita muito os cálculos.

A relação $U = Ri$, estudada no ensino médio e que utiliza dos números reais, torna-se $U = Zi$, em que U é a tensão, Z é a impedância e i é a corrente elétrica. Sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre i , símbolo da corrente elétrica, e, “ i ” unidade imaginária, os engenheiros elétricos usam “ j ” como unidade imaginária na representação algébrica $a + bj$. Além disso usam a notação $|w| \angle \theta$ para forma trigonométrica $|w| (\cos \theta + i \sin \theta)$ do número complexo w .

Vamos resolver o exemplo a seguir.

Exemplo 44. Uma fonte de tensão, de valor eficaz $220 \angle 0^\circ$, alimenta uma carga de impedância $Z = (10 + 10j) \Omega$. Vamos obter a corrente fornecida pela fonte.

Solução: Podemos escrever $U = Zi$, como $z = 10 + 10i$ onde i é um número “imaginário”, então na forma trigonométrica temos que $z = 10\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$, e ainda foi dado que $220 \angle 0^\circ$ que podemos escrever $U = 220(\cos 0 + i \sin 0)$. Assim a corrente produzida

por esta tensão é

$$\begin{aligned} I &= \frac{220(\cos 0 + i \sin 0)}{10\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)} \\ &= 11\sqrt{2} \frac{(\cos 0 + i \sin 0)}{(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)} \\ &= 11\sqrt{2}(\cos(0 - \pi/4)) + i(\sin(0 - \pi/4)) \\ &= 11\sqrt{2}(\cos \pi/4 - i \sin \pi/4) \\ &= 11\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 11 - 11i. \end{aligned}$$

■

8.3 Vibrações Amortecidas

Consideremos o movimento de um objeto de massa m na extremidade de uma mola na vertical ou na horizontal sobre uma superfície sem atrito (veja Fig.27). Sabendo pela Lei de Hooke que: se a mola estiver esticada ou comprimida, então ela exerce uma força proporcional a sua deformação, que podemos escrever da seguinte maneira:

$$\text{Força restauradora} = -kx,$$

onde k é um natural denominado constante da mola e x a deformação sofrida pela mola. Para melhor entendimento considere primeiramente que não há qualquer força dissipativa, ou seja, são desprezados qualquer atrito. Definindo isto, podemos evocar a 2ª Lei de Newton, conhecida no ensino médio por “produto da massa pela aceleração”, ou na forma diferencial que é a derivada segunda da posição em relação ao tempo, ou seja,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{ou} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (25)$$

Esta é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Sua equação auxiliar é $mr^2 + k = 0$ com as raízes $r = \pm wi$, onde $w = \sqrt{k/m}$. Assim a solução geral é

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt,$$

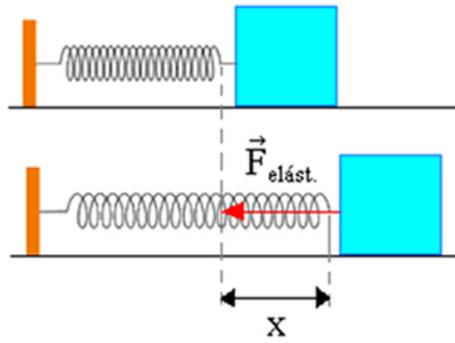


Figura 27: Sistema massa x mola

que pode também ser escrita como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta),$$

onde

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sqrt{k/m}, & A &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad (\text{amplitude}), \\
 \cos \delta &= \frac{c_1}{A} & \text{e} & \quad \sin \delta = \frac{c_2}{A} \quad (\delta \text{ é o ângulo fase}).
 \end{aligned}$$

Este tipo de movimento trata-se de um **movimento harmônico simples**, onde não há dissipação de energia, ou seja, há conservação de energia mecânica, e seu movimento tem um período fixo de oscilação.

Exemplo 45. Considere uma mola com massa de 2 kg com comprimento natural de $0,5 \text{ m}$. Uma força de $25,6 \text{ N}$ é necessária para mantê-la esticada a um comprimento de $0,7 \text{ m}$. Se esta mola for esticada para o comprimento de $0,7 \text{ m}$ e solta com velocidade inicial 0 , determine a posição da massa em qualquer tempo t .

Solução: Pela Lei de Hooke, a força necessária para esticar ou deformar a mola é

$$|F| = kx \quad \Rightarrow \quad 25,6 = k(0,2) \quad \Rightarrow \quad k = 128.$$

Utilizando as informações dadas ($m = 2 \text{ kg}$ e $k = 128$), podemos substituir em (25) e daí temos a seguinte equação diferencial

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 128x = 0,$$

que tem como solução

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt,$$

Como $w = \sqrt{128/2} = 8$, a solução pode ser escrita como

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t. \quad (26)$$

Note que a condição inicial é $x(0) = 0,2$. Mas, da equação (26), $x(0) = c_1$. Assim $c_1 = 0,2$. diferenciando a Equação (26) temos

$$v = x'(t) = -8c_1 \sin 8t + 8c_2 \cos 8t.$$

Uma vez que a velocidade inicial é dada por $x'(0) = 0$, temos $c_2 = 0$. Finalmente temos que a solução é

$$x(t) = \frac{1}{5} \cos 8t.$$

■

A seguir consideremos movimento de uma mola que está sujeita a uma força dissipativa (o atrito). Um exemplo é uma mola vertical que se movimenta através de um fluido, como mostra a Figura 28.

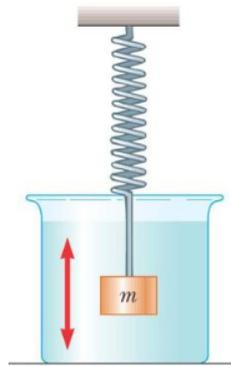


Figura 28: Sistema massa \times mola com amortecimento.

Vamos supor que a força de amortecimento seja proporcional à velocidade da massa e atue na direção oposta ao movimento. Segundo alguns experimentos físicos, podemos escrever a força de amortecimento como:

$$-c \frac{dx}{dt},$$

onde c é uma constante positiva, chamada de constante de amortecimento. Assim, nesse segundo caso podemos expressar a segunda Lei de Newton da seguinte maneira:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (27)$$

Note que a equação (27) é uma equação linear de segunda ordem, e sua equação auxiliar é $mr^2 + cr + k = 0$. As raízes são:

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Note que as raízes podem ser: duas raízes reais e distintas, duas raízes reais e iguais e por último duas raízes complexas. Para cada caso temos um tipo de fenômeno. Como nosso interesse de estudo são os números complexos, atentaremos apenas ao caso em que $c^2 - 4mk < 0$.

Apenas para efeito de conhecimento deixaremos aqui registrado que para os casos:

- $c^2 - 4mk > 0$, trata-se de **superamortecimento**. Neste caso não ocorre oscilação alguma, pois a força de amortecimento é forte.
- $c^2 - 4mk = 0$, trata-se de **amortecimento crítico** e é análogo ao caso anterior.

Voltando ao caso em que $c^2 - 4mk < 0$, as raízes complexas são:

$$r_1 = -\frac{c}{2m} + wi \quad \text{e} \quad r_2 = -\frac{c}{2m} - wi,$$

onde

$$w = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}.$$

A solução é dado por

$$x = e^{-(c/2m)t} (c_1 \cos wt + c_2 \sin wt). \quad (28)$$

Note que as oscilações são amortecidas pelo fator $e^{-(c/2m)t}$, uma vez que c e m são maiores que zero. Isto implica um amortecimento com um decaimento que chamamos de **subamortecido** (que decai a 0 quando $t \rightarrow \infty$). Um gráfico característico é mostrado na Figura 29.

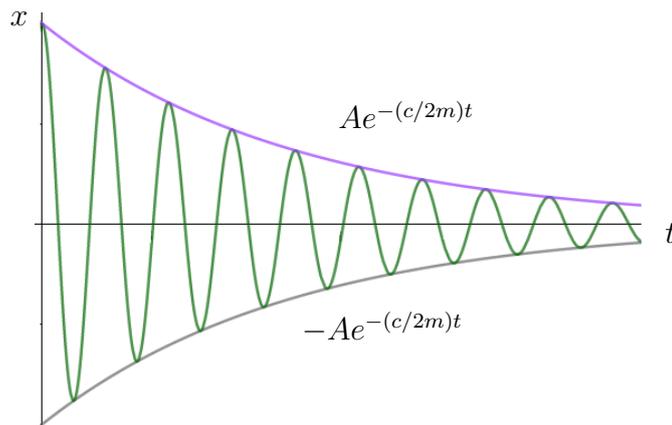


Figura 29: Curva de amortecimento.

Exemplo 46. Uma mola de massa 1 kg tem uma constante de amortecimento 6 e com um força de $6,5\text{ N}$ consegue manter esticada em $0,5\text{ m}$ além do seu comprimento inicial. A mola é esticada 1 m além de seu comprimento natural e então é solta com velocidade inicial zero. Encontre a posição e velocidade da mola para $t = \pi$.

Solução: Sabendo que a equação diferencial que descreve este tipo de movimento é dado por (27), basta primeiramente encontrarmos o valor da constante k . Para tal evocamos a Lei de Hooke $|F| = kx$. Desta maneira, $6,5 = k0,5$. Logo, $k = 13\text{ N/m}$. Com os dados da enunciado e sua constante encontrada temos que (27) pode ser escrita

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 13x = 0.$$

A equação característica é $r^2 + 6r + 13 = 0$ que tem como soluções

$$r_1 = -3 + 2i \quad r_2 = -3 - 2i.$$

Desta maneira fica evidente que o movimento é subamortecido que tem como solução a equação (28). Substituindo nesta os valores do enunciado temos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(6/2.1)t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) \\ &= e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t). \end{aligned}$$

Considerando a condição inicial $x(0) = 1$ temos que

$$x(0) = 1 \Rightarrow e^{-3.0}(c_1 \cos 2.0 + c_2 \sin 2.0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

E ainda, como $x'(t) = 0$, podemos derivar $x(t)$ para utilizarmos esta informação. Assim,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3e^{-3t}c_1 \cos 2t - 2c_1 \sin 2t \cdot e^{-3t} - 3e^{-3t}c_2 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t \cdot e^{-3t} \\ &= e^{-3t}(-3c_1 \cos 2t - 2c_1 \sin 2t - 3c_2 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t) \\ &= e^{-3t}[\cos 2t(-3c_1 + 2c_2) + \sin 2t(-2c_1 - 3c_2)], \end{aligned}$$

substituindo $x'(0) = 0$ e $c_1 = 1$.

$$0 = e^{-3 \cdot 0}[\cos 2 \cdot 0(-3 \cdot 1 + 2c_2) + \sin 2 \cdot 0(-2 \cdot 1 - 3c_2)],$$

$$0 = 1(-3 + 2c_2) \Rightarrow c_2 = 3/2.$$

Finalmente temos que a equação da posição pode ser escrita como

$$x(t) = e^{-3t}(\cos 2t + 3/2 \sin 2t),$$

e da velocidade

$$x'(t) = -e^{-3t}(\cos 2t + 13/2 \sin 2t).$$

Portanto a posição e a velocidade para $t = \pi$, são respectivamente:

$$x(\pi) = e^{-3\pi} \quad e \quad x'(\pi) = -e^{-3\pi}.$$

Observação 4. A equação $x(t)$ tem amortecimento muito elevado (observe a Figura 30).

Tal fato se dá devido a constante de amortecimento ser grande em relação a massa.

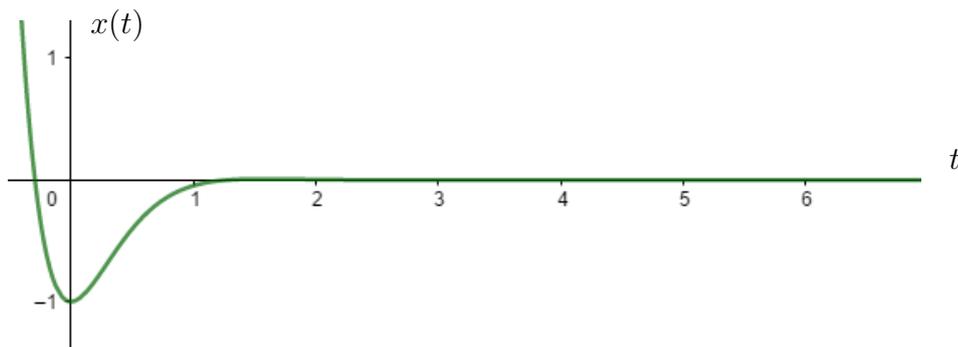


Figura 30: Curva de amortecimento elevado

Vamos agora aumentar a massa e diminuir a constante de amortecimento para vermos o comportamento da função.

Exemplo 47. Uma mola de massa 5 kg tem uma constante de amortecimento 2 e com um força de 26 N consegue manter esticada em 5 m além do seu comprimento inicial. A mola é esticada 1 m além de seu comprimento natural e então é solta com velocidade inicial zero. Encontre a equação da posição e velocidade da mola para um t qualquer.

Solução: Fazendo o mesmo procedimento do exemplo anterior, temos

$|F| = kx$. Assim, $26 = k5$. Logo, $k = 26/5$. Com os dados da enunciado e a constante encontrada, temos que (27) pode ser escrita como

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \frac{26}{5}x = 0.$$

A equação característica é $5r^2 + 2r + \frac{26}{5} = 0$ que tem como soluções

$$r_1 = -\frac{1}{5} + i \quad \text{e} \quad r_2 = -\frac{1}{5} - i.$$

Mais uma vez fica evidente que trata-se de um movimento subamortecido, portanto a equação que descreve tal movimento é:

$$x(t) = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}(c_1 \cos wt + c_2 \sin wt).$$

Substituindo os valores encontrados e do enunciado temos

$$x(t) = e^{-\left(\frac{1}{5}\right)t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Temos ainda a condição inicial $x(0) = 1$. Logo $c_1 = 1$. Derivando $x(t)$ obtemos

$$x'(t) = e^{-(1/5)t} \left[\cos t \left(-\frac{c_1}{5} + c_2 \right) + \sin t \left(-c_1 - \frac{c_2}{5} \right) \right],$$

e como $x'(0) = 0$, então

$$0 = \left(-\frac{1}{5} + c_2 \right) \Rightarrow c_2 = 1/5.$$

Finalmente, podemos escrever a equação do movimento como

$$x(t) = e^{-\left(\frac{1}{5}\right)t}(\cos t + 1/5 \sin t).$$

Esta equação descreve um movimento que pode ser representado conforme a Figura 31. Note que o amortecimento é gradual e amortecido pela função $\pm e^{(-\frac{1}{5})t}$, e quando $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 0$.

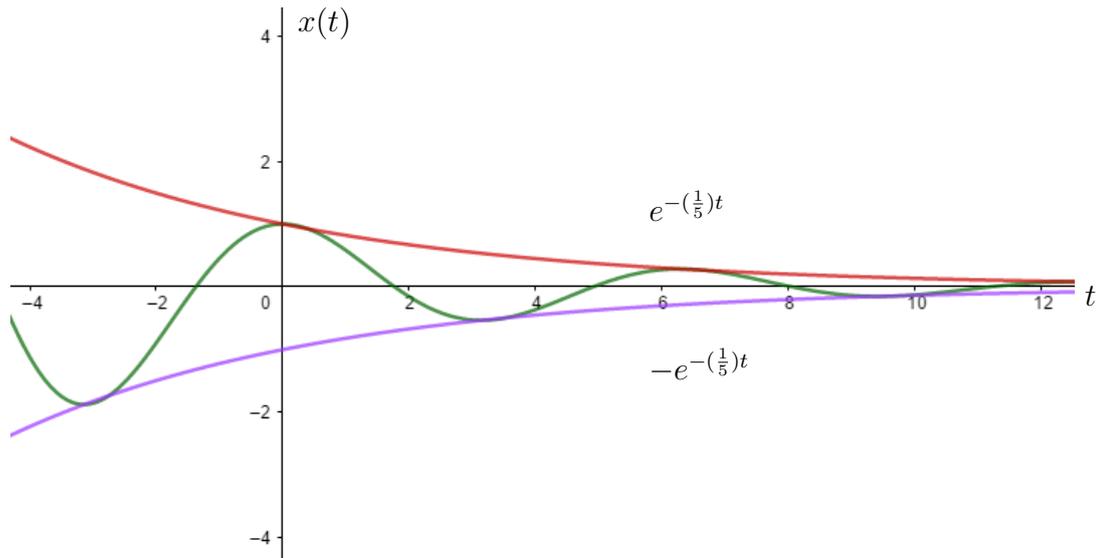


Figura 31: Curva de amortecimento gradual (subamortecido).

Para a velocidade temos,

$$x'(t) = e^{-(\frac{1}{5})t} \left(-\frac{26}{25} \sin t \right).$$

Note que a velocidade também é amortecida pelo mesmo fator e isto implica que decaimento gradativo da velocidade é similar ao decaimento da posição em relação ao tempo. Observe a Figura 32.

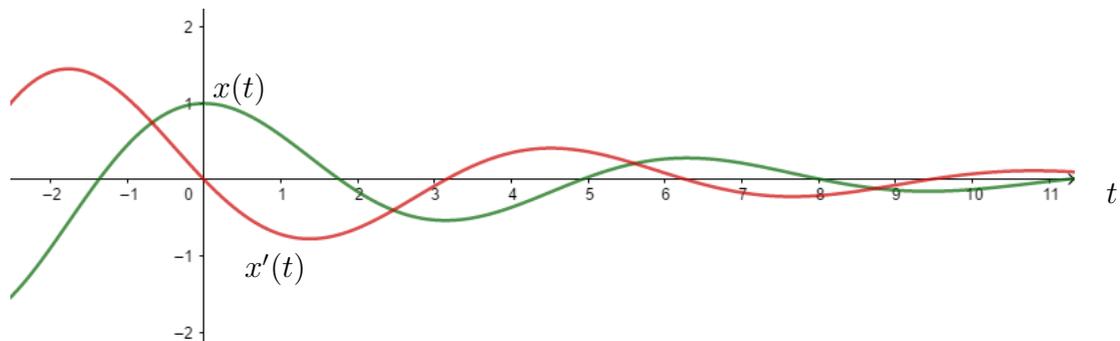


Figura 32: Decaimento da amplitude $x(t)$ e $x'(t)$ movimento subamortecido.

Poderíamos mostrar outros exemplos de maneira a aumentar a sua massa e diminuir sua constante de amortecimento e perceberíamos que o decaimento seria menos intenso.

As aplicações do estudo dos números complexos na Física e na Engenharia poderiam neste trabalho se estender por várias páginas, no entanto, não é nosso foco neste momento.

E ainda, tal aplicações não se resumem apenas a Física e a Engenharia, como por exemplo, o estudo de fractais, computação gráfica, etc.

Independentemente das aplicações, poder-se dizer que o estudo dos números complexos é por natureza encantador e no mínimo místico. Diz-se místico pelo fato de ser intrigante, pois reconhecer um ente “ i ” no qual, seu quadrado é um real “ -1 ”, parecia no início uma loucura.

9 Considerações Finais

O conjunto dos Números Complexos teve processo, como mencionado, não linear, que se desenvolveu graças ao empenho de grandes matemáticos, que por sua vez proporcionaram benefícios para a matemática, principalmente na resolução das equações, mas não apenas nas equações: seus conceitos podem ser aplicados em diversos ramos da matemática assim como em algumas ciências.

Mostramos como é trabalhado os números complexos no ensino superior, e, chamamos a atenção pela pouca ênfase que este estudo é dado no ensino básico, principalmente no que tange a parte geométrica dos números complexos, o que levaria uma visão superficial de seu entendimento e aplicação.

Procuramos desenvolver a teoria, para que no final pudessemos resolver problemas de circuitos elétricos e amortecimentos do sistema massa-mola. No entanto, sabemos que as aplicações tem uma abrangência que vai muito além do exposto, como por exemplo no estudo de: fractais [2], aerodinâmica e computação gráfica [8].

Também vale ressaltar que estudo dos números complexos se estende as integrais, o que nos revelaria outras ferramentas matemáticas que com certeza teriam outras aplicações. Nossa discussão se restringiu apenas sobre limites e derivadas, isto porque as aplicações que propomos envolvem apenas esses conceitos.

Finalmente, podemos dizer que tais assuntos são de grande valor para serem discutidos não apenas no ensino superior mas também no ensino médio. Ressaltamos o trabalho de dissertação [6], que ao discutir tal assunto apontaram que: a falta ou o desconhecimento de aplicações compreensíveis para alunos do ensino médio é um dos principais fatores considerados ao se julgar a relevância do ensino de números complexos. Esse mesmo estudo aponta que uma grande parte dos professores considera inútil o estudo de números complexos. Entretanto, podemos ver nesse trabalho que há aplicações envolvendo números complexos, no estudo de fenômenos físicos que fazem parte da nossa realidade. Além do que essas aplicações podem servir de motivação para os alunos do ensino médio.

Referências

- [1] ÁVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*, 3.ed. Rio de Janeiro, LTC, 2008.
- [2] B. MANDELBROT., *Objectos Fractais*, Coleção Ciência Aberta, Gradiva 2ª Edição, 1998.
- [3] CARMO, M.P., *Trigonometria/Números Complexos*, 3.ed. Rio de Janeiro, SBM, 2005.
- [4] ELON, L. L., *Álgebra Linear*, 8.ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.
- [5] HALLIDAY, David. *Eletromagnetismo*, 4.ed. Rio de Janeiro, LTC, 1996.
- [6] JULIANA, S.B.C., *A Relevância do Ensino de Números complexos no Ensino Médio na Opinião dos Professores de Matemática*, Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, UENF, 2013.
- [7] MARTINEZ, F. B., *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, 4.ed. Rio de Janeiro IMPA, 2010.
- [8] PAULA, LUCIENE DE, *A interpretação Geométrica dos números imaginários no século XIX: A contribuição de Jean Robert Argand (1768-1822)*. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá 2007.
- [9] SOARES, M. G., *Cálculo em uma variável complexa*, Rio de Janeiro, IMPA, 2007.
- [10] SOUZA Jr, L. A. M., *Introdução a Funções de Variáveis Complexas*, 4.ed. Rio de Janeiro: CECIERJ, 2015.
- [11] STEWART, J., *Cálculo*, Vol II, 4.ed. São Paulo, Thomson, 2001.