CAROLINI CUNHA SILVA GIOIA

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

Novembro de 2019

CAROLINI CUNHA SILVA GIOIA

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof[a]. Dr[a]. Elba Orocia Bravo Asenjo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
Novembro de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pela autora.

G495 Gioia, Carolini Cunha Silva.

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA : UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / Carolini Cunha Silva Gioia. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

141 f. : il.
Bibliografia: 100 - 102.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2019.
Orientadora: Elba Orocia Bravo Asenjo.

1. Breve Histórico do Conceito de Função. 2. Funções Exponenciais . 3. Funções Logarítmicas. 4. Metodologia de Ensino Resolução de Problemas. 5. Interdisciplinaridade e Matemática. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

CAROLINI CUNHA SILVA GIOIA

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 6 de novembro de 2019.

Prof^a^. Dr^a^. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IF Fluminense campus Campos - Centro

Prof. Dr. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Dr. Ausberto Silverio Castro Vera
D.Sc. - UENF

Prof^a^. Dr^a^. Elba Orocia Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Este trabalho é dedicado à minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por me iluminar nesta trajetória e permitir a conclusão de mais um sonho.

Aos meus pais, Valeria Lima e Erlane Silva, por todo apoio e incentivo que me deram neste e em tantos outros momentos da minha vida. Sem eles nada disso seria possível.

Ao meu marido Lucas Gioia, por toda paciência e compreensão durante essa jornada. Obrigada por ficar ao meu lado, sempre me incentivando e me fazendo mais feliz.

À minha querida irmã Lara Cunha que tanto me ajudou e incentivou a não desistir.

À minha orientadora Elba Asenjo por toda paciência, dedicação e carinho na orientação deste trabalho.

A toda a minha família e amigos, por serem compreensivos em tantos momentos em que tive que estar ausente, buscando esse sonho.

Aos meus colegas da turma do PROFMAT - 2017, que sempre me incentivaram e ajudaram. Em especial, aos meus queridos amigos Érika Sant'Ana e Jonatas Sarlo, cujo apoio foi essencial, sem vocês eu não teria conseguido.

Aos professores do curso PROFMAT, que tanto contribuíram para a minha formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

A todos que, de alguma forma, me ajudaram a concluir mais esta etapa da minha vida.

"Para nós, o conhecimento não é descoberto nem é transmitido: ele é uma produção gradativa de um coletivo pensante"
Pierre Lévy

Resumo

Importante não só para entender diversos fenômenos da natureza, o estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas possibilita compreender desde reprodução de bactérias, decaimento radioativo, leis de resfriamento até rendimentos financeiros que são capitalizados por juros compostos. Com o objetivo principal de desenvolver um estudo sobre Funções Exponenciais e Logarítmicas utilizando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, a presente dissertação traz atividades que foram desenvolvidas para alunos do 2ª ano do Ensino Médio, de uma escola estadual localizada no município de Macaé. Para isto, foi realizada uma pesquisa qualitativa, utilizando o estudo de caso como método de pesquisa. Foi escolhida a metodologia de ensino Resolução de Problemas, visando realizar um trabalho centrado no aluno, partindo de problemas que pudessem gerar novos conceitos e conteúdos matemáticos. Assim, o aluno pode construir um conhecimento matemático por meio da Resolução de Problemas. Nessa metodologia de ensino, o aluno tem uma participação ativa, cabendo ao professor o papel de orientar durante a resolução dos problemas e, ao final do processo, formalizar as ideias construídas, utilizando a linguagem matemática correta. O conteúdo foi trabalhado partindo das Funções Exponenciais, visto que os alunos já haviam estudado este conteúdo, para a definição da Função Logarítmica como a inversa da Exponencial. Após isso, foram demonstradas as propriedades de logaritmo e proposto para os alunos problemas interdisciplinares, de forma a fazer um estudo desse conteúdo de maneira mais significativa. Foi constatado que trabalhar com essa metodologia, atrelada a interdisciplinaridade, foi um fator motivacional para os alunos e para a pesquisadora, destacando o desempenho positivo dos alunos durante as atividades, de modo que os objetivos traçados fossem alcançados de maneira satisfatória.

Palavras-chaves: Função Exponencial, Função Logarítmica, Metodologia de ensino Resolução de Problemas, Problemas Interdiscipinares.

Abstract

Important not only to understand multiple natural phenomena, the study about Exponential and Logarithmic functions make it possible to understand everything from bacterial reproduction, radioactive decay, cooling laws to financial yields that are capitalized by compound interest. This thesis has as main goal develop a study about Exponential and Logarithmic functions, through activities developed for Senior High School students of a public school located in Macaé city. For that a qualitative research was made using the case study as a research method. The methodology of Resolution Problems was choose aiming to realize a job centering in the student, beginning from problems that can create a new mathematic concepts and contents. Thus, the student can construct mathematics knowledge through Problems Resolution. With this methodology, the student have a active participation, fitting the teacher the paper of guide during the solving of a problem and, at the end of the process formalize the constructed ideas, by using the correct mathematic language. The content was worked on starting with the Exponential functions, since the students already have studied the content, to Logarithmic functions like the inverse of the Exponential. After this, properties of logarithmic was demonstrated and interdisciplinary problems was propose to the students, in order to do a study of this content in a significative way. Was found that working with this methodology, linked to interdisciplinarity, was a motivational factor to the students and to the researcher, highlighting the positive performace of the studants during the activities, so the goals set were satisfactorily achieved.

Key-words: Exponential Function, Logarithmic Function, Methodology of Resolution Problems, Interdiscipinary Problems.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
NEJA	Nova Educação de Jovens e Adultos
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics (*Tradução: Conselho Nacional de Professores de Matemática*)

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Matemática, em seu papel de formação, colabora para que os processos de pensamento e atitude sejam utilizados em diversos âmbitos e não somente em seu próprio. Esta pode proporcionar aos alunos mais do que a capacidade de resolver problemas, mas criar hábitos que contribuam para uma visão mais ampla da realidade, gerando nesses confiança e desprendimento para enfrentar novas situações e desenvolvendo a criatividade (BRASIL, 2000).

Essa disciplina permite uma interdisciplinaridade com outras áreas de conhecimento, como sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio de Matemática (PCN+EM)(2002):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p. 111).

Ao analisar a história do desenvolvimento do conceito de função, é possível observar que, temas importantes como este surgem a partir de problemas do cotidiano. Com isso, considera-se que esse fato vem ao encontro com a metodologia de ensino Resolução de Problemas e, também, com a interdisciplinaridade que foram utilizadas nas atividades desenvolvidas para esta pesquisa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio de Matemática destacam a importância do estudo de funções(PCN+EM)(2002):

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos

> de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p. 121).

Assim como foi destacado anteriormente pelos PCN (BRASIL, 2002), o estudo de funções é de extrema importância para a Matemática, e ganha ainda mais significado quando feito de forma contextualizada. Por isso, nesta pesquisa o estudo de Funções Exponenciais e Logarítmicas está aplicado a outras áreas do conhecimento, como por exemplo, a Física, Química, Biologia, e também dentro da própria Matemática, como nas progressões geométricas e na Matemática Financeira.

As autoras Onuchic e Allevato (2004, p. 204) corroboram com a ideia trazida pelos PCN (BRASIL, 2002) e afirmam, ainda, que a Resolução de Problemas "envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas".

Ao escolher a metodologia de ensino Resolução de Problemas, foi levado em consideração a participação do aluno enquanto aquele que desenvolve seus próprios raciocínios. Sobre esta metodologia Onuchic e Allevato (2011) afirmam que se prentede que:

> [...] enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Onuchic et al. (2014) sugerem que o trabalho em sala de aula seja organizado em dez etapas:

1. **Proposição do problema** - Nesta etapa é proposto para os alunos um problema inicial que vise a construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento;
2. **Leitura individual** - Cada aluno faz sua leitura do problema;
3. **Leitura em conjunto** - Os alunos se reúnem em pequenos grupos e discutem o problema;
4. **resolução do problema** - Nesta etapa a ação está centrada no aluno, cabendo ao professor apenas o papel de auxiliar os alunos na compreensão do problema;
5. **Observar e incentivar** - O professor age observando o trabalho dos alunos e incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios;

6. **Registro das soluções na lousa** - Os alunos representantes de cada grupo vão até o quadro fazer o registro da solução elaborada pelo seu grupo;

7. **Plenária** - Neste momento os alunos justificam suas ideias e são incentivados a defender seus pontos de vista;

8. **Busca do consenso** - Em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado corrreto;

9. **Formalização do conteúdo** - O professor registra a solução correta, de uma maneira organizada, estruturada em linguagem matemática e construindo demonstrações, quando necessário;

10. **Proposição e resolução de novos problemas** - esta estapa visa criar a possibilidade de analisar se os conteúdos matemáticos introduzidos naquela aula foram compreendidos.

Diante do exposto, gerou-se a seguinte questão de pesquisa: **Como fazer um estudo sobre Funções Exponenciais e Logarítmicas de forma contextualizada e significativa?**

Para responder essa pergunta propõe-se como objetivo geral aplicar a metodologia de Resolução de Problemas de forma a melhorar o ensino e aprendizagem dos alunos do Ensino Médio no estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas. Assim, para alcançar tal objetivo, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Fazer um estudo das Funções Exponenciais, destacando seus gráficos e suas características;

- Definir a Função Logarítmica como a inversa da Função Exponencial;

- Definir e demonstrar as propriedades de logaritmo;

- Trabalhar problemas interdisciplinares que apresentem o conteúdo de forma contextualizada.

As atividades desenvolvidas foram aplicadas em duas turmas de 2º ano do Ensino Médio, em uma escola pública estadual, visto que este conteúdo é indicado pelo Currículo Mínimo (RIO DE JANEIRO (2012)) do estado do Rio de Janeiro para ser trabalhado com alunos do 2º ano do Ensino Médio Regular.

Esta pesquisa foi dividida em seis capítulos, sendo o primeiro deles a Introdução (Capítulo 1). No Capítulo 2 foi feito, inicialmente, um breve histórico sobre o conceito de funções e, em seguida, um estudo sobre as funções exponenciais e logarítmicas, levando em consideração suas definições, propriedades e demonstrações.

O Capítulo 3 apresenta a metodologia de ensino Resolução de Problemas segundo os autores Onuchic et al. (2014), mostrando suas características e etapas. Este capítulo contempla ainda a interdisciplinaridade, em que se destaca a importância de utilizá-la no estudo da Matemática.

O Capítulo 4 faz uma caracterização da pesquisa e dos sujeitos pesquisados, além de descrever, detalhadamente, os objetivos de cada etapa planejada para as atividades. Já no Capítulo 5, são relatadas as aplicações das atividades, destacando os principais acontecimentos, bem como algumas das respostas dadas pelos alunos.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta as considerações finais, em que é avaliado todo o processo de construção desta pesquisa, assim como os resultados obtidos. Relatam-se as principais dificuldades encontradas para elaboração e aplicação das atividades, além de oferecer algumas sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Este capítulo tem início com um breve histórico do conceito de funções, em que se descreve desde seus primeiros registros até um modelo próximo ao que conhecemos hoje. Em seguida, serão abordadas as definições e características das Funções Exponencial e Logarítmica, e os principais fundamentos matemáticos que são pré-requisitos para os estudos desenvolvidos no presente trabalho.

2.1 Breve Histórico do Conceito de Função

Sabe-se que o professor de Matemática e o pesquisador em Educação Matemática necessitam ter conhecimento da disciplina e dos conteúdos que por ela são contemplados. Entretanto, conhecer a história que envolveu o processo de concepção e desenvolvimento do assunto pode ajudar não somente na contextualização, mas também auxiliará a entender melhor as dificuldades na sua compreensão (PIRES, 2016).

Segundo Barbosa et al. (2014), é possível afirmar que, na Antiguidade, a noção de função aparece de maneira intuitiva, como uma dependência de valores. Já na Idade Média, surgem as noções funcionais expressas sob a forma geométrica, mecânica e física, em que cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era representado, por um gráfico ou por uma descrição verbal. No período Moderno, predominam as expressões analíticas de funções, sendo apenas no final do século XVII o momento de maior intensidade para o desenvolvimento da noção de função, se aproximando do que é conhecido atualmente.

Quando se fala sobre a origem do conceito de função, dois povos se destacam: os babilônios e os gregos.

Os babilônios se aproximaram muito do conceito de função, por volta de 2000 a.C., quando registravam em suas tábuas astronômicas algumas de suas relações funcionais que eram utilizadas, por exemplo, para registrar os períodos de visibilidade de um planeta, e, também, a distância deste planeta até o sol. Essas funções expressas em suas tábuas serviram de base para o desenvolvimento da astronomia. Após esse período, entre 500 a.C. e 500 d.C., houve uma maior ênfase no estudo da Geometria (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

Os gregos tentaram trabalhar com problemas em que a noção de função aparecia de forma implícita, porém não conseguiram reconhecê-la e nem simbolizá-la. No entanto, faziam cálculos de áreas, volumes, longitudes e também desenvolveram tabelas de acordes e de senos, similares as que são utilizadas atualmente. Todos esses desenvolvimentos foram explicados verbalmente, em tabelas, gráficos ou por meio de exemplos.

Durante a Idade Média, houve maior ênfase nos estudos dos fenômenos naturais, como por exemplo, o calor, a luz, a cor, a densidade, a distância e a velocidade média de um movimento uniformemente acelerado. Houve um desenvolvimento nas ideias de quantidade de variáveis independentes e dependentes, porém sem definições específicas. Assim, a evolução da noção de função aconteceu associada ao estudo do movimento. Uma função era definida por meio de uma descrição verbal de suas propriedades específicas ou por meio de gráficos, mas ainda não se usavam fórmulas (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

Foi o filósofo Nicolas Oresme (1323 - 1382) que desenvolveu um método para representar a mudança nas propriedades de um objeto. Ele propôs a Teoria de Latitude de Formas, que hoje é considerada como a representação gráfica de uma função. Oresme tinha por objetivo representar, geometricamente, a intensidade de uma variável. Ele buscava representar a intensidade da velocidade desses movimentos e desenhava segmentos verticais, referentes à velocidade, e perpendiculares a outro segmento, referentes ao tempo. Com isso, tinha como objetivo que seu método pudesse possibilitar as pessoas uma maior compreensão das mudanças da natureza. A sua representação demonstra uma evolução no desenvolvimento das ideias de variáveis dependentes e, de certa forma, de função (BARBOSA et al., 2014).

Contribuindo também com a ideia de função, Galileu Galilei (1564 - 1642) introduziu números nas representações gráficas e, também, expressou as leis do movimento, nas quais incorporou a linguagem da teoria das proporções, revelando um sentido na variação direta ou indiretamente proporcinal. Sua obra apresenta várias expressões de relação funcional, todas com palavras e na linguagem das proporções, mostrando assim que estava trabalhando com variáveis e funções (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) desenvolveram, separadamente, as bases teóricas da Geometria Analítica e apresentaram um método para a representação de função.

A obra de Descartes representou um grande avanço, ele buscava dar sentido à Álgebra por meio da Geometria. Ele foi revolucionário ao estabelecer que uma curva poderia ser construída apenas com uma equação algébrica, introduzindo assim, a ideia de função de uma forma analítica. Ele foi o primeiro matemático a utilizar em uma equação as variáveis *x* e *y* de forma a expressar uma dependência entre elas (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

Boyer e Merzbach (2012) afirmam que foi Fermat (1601 - 1665) que deu origem ao uso de coordenadas, surgindo da álgebra da Renascença aos problemas geométricos da Antiguidade. Apesar de ter escrito sobre esses temas antes de Descartes publicar seus trabalhos, a obra de Fermat foi publicada apenas após a sua morte e depois das obras de Descartes.

Leibniz (1646 - 1716) foi o primeiro matemático a utilizar a palavra função para se referir a qualquer quantidade que varia de uma ponto a outro de uma curva. É importante destacar que Leibniz utilizava o conceito de função como é utilizado atualmente, visto que, para ele uma curva era formada por um número infinito de segmentos de retas infinitamente pequenos (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

O conceito de função aparece pela primeira vez desvinculado da geometria, durante o século XVIII, pelos matemáticos Johann Bernoulli (1667-1748) e Leonhard Euler (1707-1783). Bernoulli, em 1718, publicou um artigo em que apresenta a primeira definição: "Chamamos função de uma grandeza variável a uma quantidade composta de um modo qualquer a partir desta grandeza variável e de constante". Já Euler usou a definição de Bernoulli, seu mestre, como base para um novo conceito que formularia pouco tempo depois, em 1748, afirmando que "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja desta quantidade e números ou quantidades constantes" (BARBOSA et al., 2014).

Durante o século XIX, houve um aprofundamento da concepção de função e uma correção das noções limitadas de Euler. Muitos estudiosos estiveram envolvidos nesse processo, como, os Bernoulli, Euler, Lagrange (1736–1813), D'Alambert (1717–1783) e Fourier (1768–1830), e por meio deles, a formulação matemática dos problemas em mecânica teve grande ênfase neste século (BARBOSA et al., 2014).

Com a necessidade de se estudar o desenvolvimento de uma função em série trigonométrica, não somente para funções contínuas, mas também para as contínuas por partes, em 1837, Dirichlet (1805 – 1859), sugere uma definição de função mais ampla. Já em 1968, a definição de função é apresentada pelo grupo Boubarki [1] como certo subconjunto do produto cartesiano E x F, assim apresentado:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável *x* de E e uma variável *y* de F é dita uma relação funcional em *y*, ou relação funcional de E em F, se para qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que esteja associado a*x* na relação considerada.

[1] Bourbaki foi um grupo formado por jovens matemáticos franceses organizado em 1935.

> Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a *x* na relação dada: diz-se que *y* é o valor da função para o elemento *x*, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (MENDES, 1994, p.53).

De modo geral, toda evolução apresentada até aqui, permitiu com que se chegasse ao que é conhecido hoje como função.

2.2 Funções e Composição de Funções

Destaca-se que para esta seção, e para as demais deste capítulo, foram utilizadas como referências bibliográficas os seguintes livros: Sullivan (2016), Aufmann (2011), Stewart (2016) e Rogawski (2009). As definições, teoremas e propriedades estão baseadas, principalmente, nessas referências.

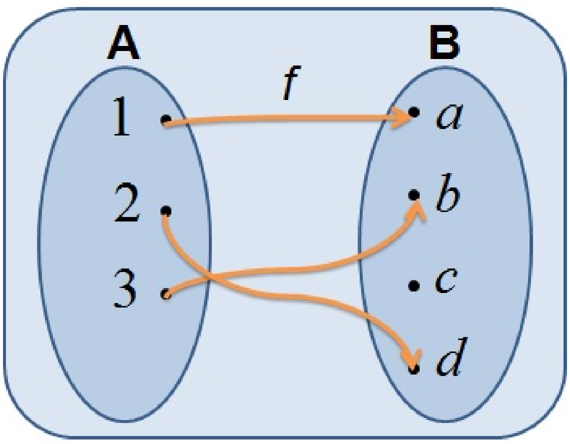
Primeiramente será apresentada a definição de função e, em seguida, a função composta, sua definição e algumas características.

Definição 2.1. *Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função f de A em B é uma regra que associa cada elemento $x \in A$ a um único $y \in B$. Simbolicamente,*

$$f : A \to B$$

Exemplo 2.1. *Na Figura 1 podemos observar os conjuntos A e B associados pela função f. Neste caso, cada número do conjunto A está associado a uma única letra do conjunto B.*

Figura 1 – Função



Fonte: Elaboração própria.

Definição 2.2. *Dadas duas funções f e g, a função composta, denotada por $f \circ g$ (lê-se f composta com g), é definida como:*

$$(f \circ g(x)) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x no domínio de g, de modo que $g(x)$ está no domínio de f.

Exemplo 2.2. *Dadas as funções $f(x) = x^2 + 3x - 1$ e $g(x) = 2x + 3$, encontre a função $f \circ g$:*

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = (2x+3)^2 + 3(2x+3) - 1 = 4x^2 + 12x + 9 + 6x + 9 - 1 = 4x^2 + 18x + 17$

Neste exemplo, como o domínio das funções f e g são os números reais, a função composta $f \circ g$ também tem como domínio os números reais.

Teorema 2.1. *A função g composta com f, em geral, não é igual a f composta com g.*

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Demonstração: *Sejam $x \in A$, $y \in B$, $u \in C$ e $v \in D$. Suponhamos que $y = f(x)$ ($y : A \to B$), $u = g(y)(u : B \to C)$ e $v = h(u)(v : C \to D)$, temos:*
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = u \leftrightarrow g \circ f = u$ *e*
$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(u) \leftrightarrow f \circ g = f(u)$, *o que é uma contradição, já que $u \in C$ e $f : A \to B$.*

Logo: $g \circ f \neq f \circ g$

Exemplo 2.3. *Utilizando as mesmas funções do exemplo anterior (2.1), $f(x) = x^2 + 3x - 1$ e $g(x) = 2x + 3$, em que possuem o domínio pertencente ao conjunto dos reais, econtraremos agora a função $g \circ f$:*

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3x - 1) = 2(x^2 + 3x - 1) + 3 = 2x^2 + 6x - 2 + 3 = 2x^2 + 6x + 1$

$g \circ f$ também tem como domínio os números reais. Este exemplo ilustra o teorema 2.1, em que $f \circ g \neq g \circ f$.

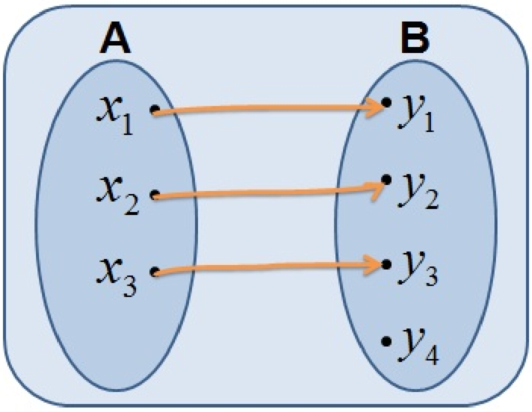
2.3 Função Inversa

Para definir a função inversa é importante pontuar as definições das funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras:

Definição 2.3. ***Função Injetora:*** *Dizemos que uma função $f : A \to B$ é injetora (ou injetiva) quando para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A, $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$. Em outras palavras, quando $x_1 \neq x_2$, em A $\Rightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$ em B.*

A Figura 2 apresenta um exemplo de função injetora.

Figura 2 – Função Injetora

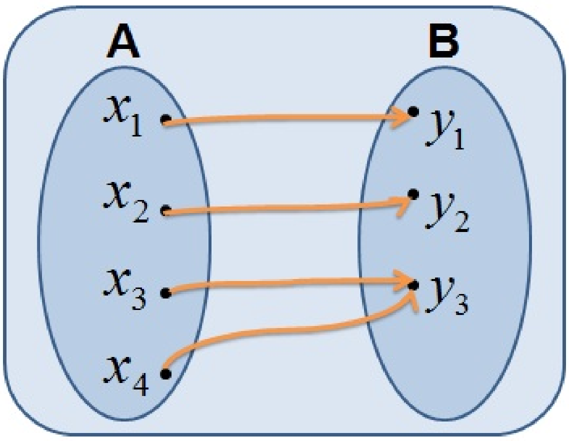


Fonte: Elaboração própria.

Definição 2.4. ***Função Sobrejetora:*** *Dizemos que uma função $f : A \to B$ é sobrejetora (ou sobrejetiva) quando para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

A Figura 3 apresenta um exemplo de função sobrejetora.

Figura 3 – Função Sobrejetora

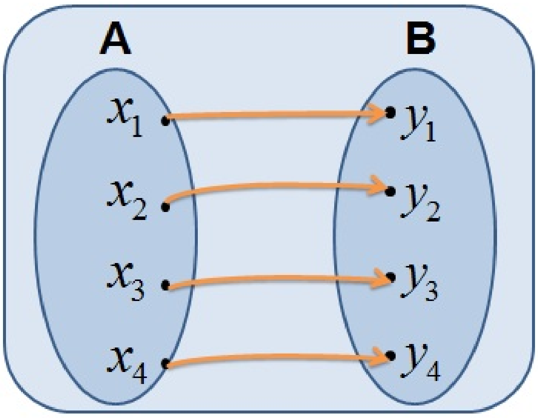


Fonte: Elaboração própria.

Definição 2.5. ***Função Bijetora:*** *Uma função $f : A \to B$ chama-se bijetora (ou bijetiva) quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.*

A Figura 4 apresenta um exemplo de função bijetora.

Figura 4 – Função Bijetora



Fonte: Elaboração própria.

Definição 2.6. ***Função Inversa:*** *Seja f ($f : A \to B$) uma função bijetora. Cada $x \in A$ está associado a um único $y \in B$ e, para cada $y \in B$ existe exatamente um $x \in A$ correspondente. A correspondência que parte da imagem B, voltando para o domínio A, é chamada de função inversa de f. Utiliza-se a notação $f^{-1}(x)$ para representar a função inversa de $f(x)$.*

Como f é uma função bijetora, definida em um intervalo I, esta função é estritamente crescente ou estritamente decrescente em I.

Exemplo 2.4. *Para exemplificar a definição dada, têm-se as funções $f(x) = x^3$ e a sua inversa $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$, logo é possível observar que os pares ordenados das tabelas a seguir estão invertidos:*

Função	
x	$y = x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

Inversa	
x	$y = x^{\frac{1}{3}}$
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2
27	3

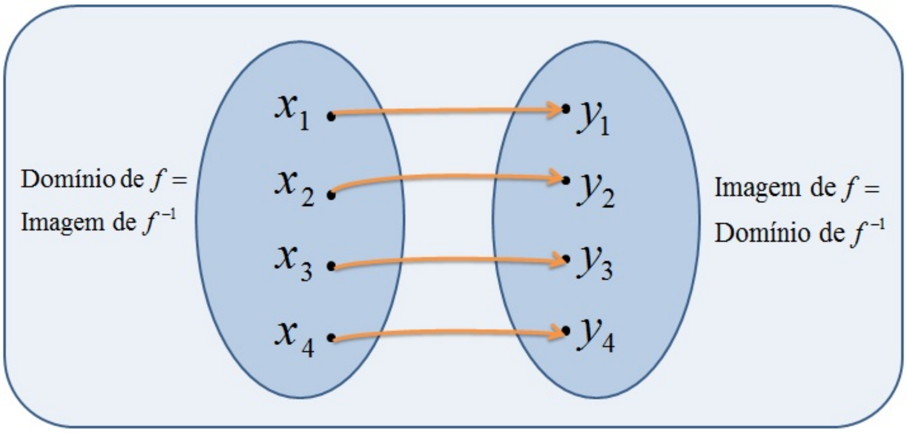
Teorema 2.2. ***Existência de inversa*** *Se $f(x)$ for bijetora em seu domínio D, então f é invertível. Além disso,* [2]

- *Domínio de f = Imagem de f^{-1}*

[2] Demonstração feita no Teorema 2.1

- *Imagem de f = Domínio de f^{-1} , como mostra a Figura 5:*

Figura 5 – Domínio e Imagem da Função Inversa



Fonte: Elaboração própria.

Exemplo 2.5. *Encontre a inversa da função $f(x) = 3x + 8$.*
Solução:
$f(x) = 3x + 8$ *Substituí-se $f(x)$ por y*
$y = 3x + 8$
$x = 3y + 8$ *Inverte-se as posições do x e do y*
$x - 8 = 3y$ *Resolver em função de y*
$\frac{x-8}{3} = y$
$y = \frac{x-8}{3}$ *Substituir y por $f^{-1}(x)$*

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$, *que é a função inversa de $f(x)$.*

Propriedades 2.1. ***Composição de funções inversas:*** *Se f é uma função bijetora , então f^{-1} é a função inversa de f, se e somente se:*

$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = x$ *para todo x pertencente ao domínio de f^{-1} e,*
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x$ *para todo x pertencente ao domínio de f.*

Exemplo 2.6. *Dadas as funções $f(x) = 3x - 4$ e $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$, temos que:*

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f(\tfrac{1}{3}(x+4)) = 3 \cdot \tfrac{1}{3}(x+4) - 4 = x + 4 - 4 = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(3x-4) = f(\tfrac{1}{3}(3x-4+4)) = f(\tfrac{1}{3}(3x)) = x$$

Logo, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

2.4 Função Exponencial

Esta seção apresenta as definições, propriedades, características e gráficos da Função Exponencial e algumas de suas aplicações.

2.4.1 Definições e Propriedades

Definição 2.7. *Uma Função Exponencial de base* b*, com* $b \in \mathbb{R}$*, é definida por:*

$$\boldsymbol{f(x) = b^x},$$

em que $b > 0$*,* $b \neq 1$ *e* x *é um número real.*

O caso $b = 1$ é excluído pois $f(x) = 1^x$ é uma função constante.

Propriedades 2.2. *Destacam-se algumas propriedades da Função Exponencial* $f(x) = b^x$*, com* $f : A \to B$*:*

1. *A Função Exponencial é bijetiva, tendo como domínio* $A = (-\infty, \infty)$ *e imagem* $B = (0, \infty)$*;*
2. *O gráfico de* $f(x)$ *é uma curva suave e contínua que intersecta o eixo* y *no ponto (0,1);*
3. *O eixo* x $(y = 0)$ *é a assíntota horizontal de* $f(x)$*;*
4. $f(x) = b^x$ *é crescente se* $b > 1$*;*
5. $f(x) = b^x$ *é decrescente se* $0 < b < 1$*.*

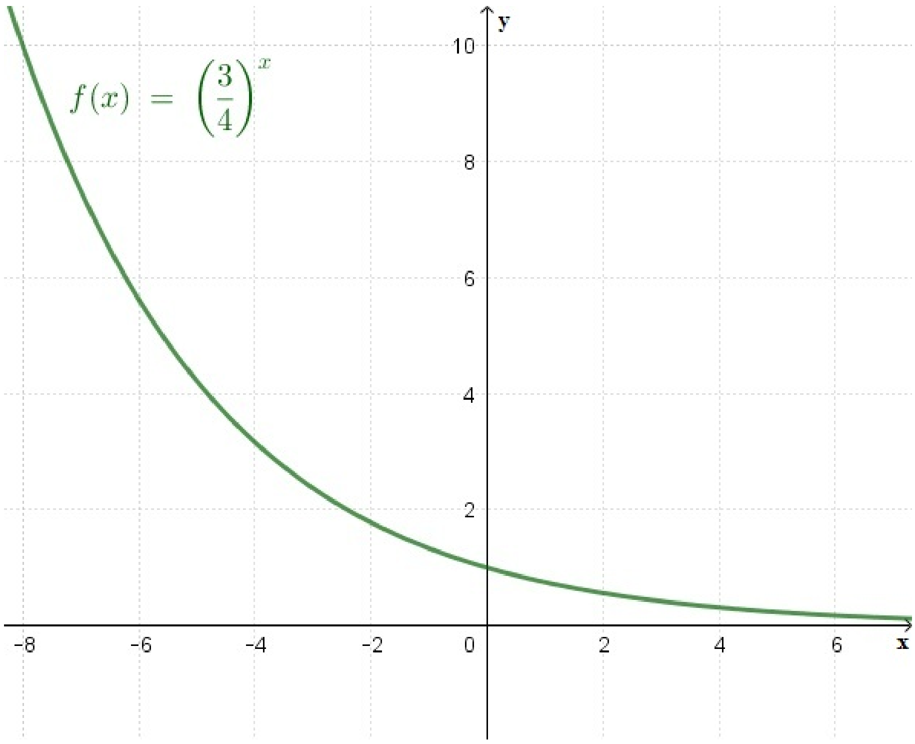
Como dito anteriormente, os gráficos da Função Exponencial possuem assíntota horizontal, que será definida a seguir:

Definição 2.8. *Uma reta horizontal* $y = L$ *é chamada de assíntota horizontal de uma função f(x) se existir um ou ambos dos limites a seguir:*

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Exemplo 2.7. *Gráfico da função* $f(x) = (\frac{3}{4})^x$*:*
Como a base da Função Exponencial é $\frac{3}{4}$*, e este valor está entre 0 e 1, o gráfico de* f *representa uma função decrescente, que passa pelo ponto (0,1), tendo como assíntota o eixo* x*, como mostra a Figura 6.*

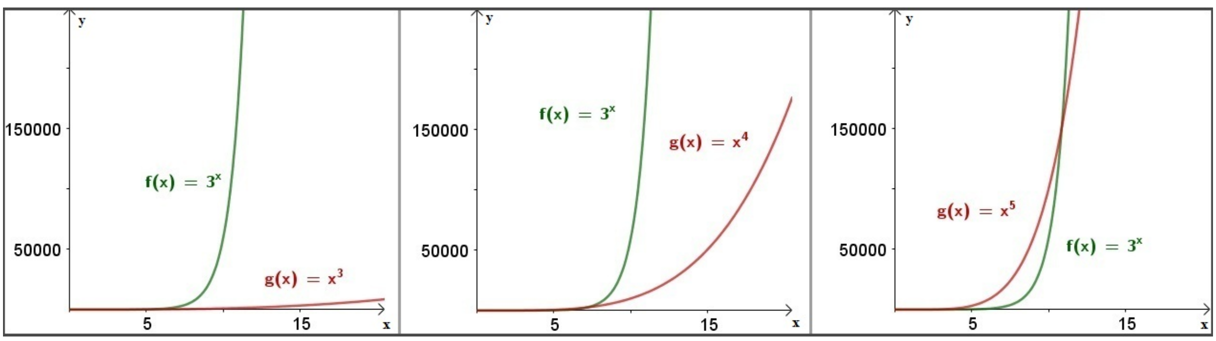
Figura 6 – Gráfico de uma Função Exponencial decrescente



Fonte: Elaboração própria.

Uma característica muito importante de $f(x) = b^x$ (para $b > 1$) é que ela cresce rapidamente. Embora essa afirmação pareça subjetiva, vale destacar que a Função Exponencial cresce mais rapidamente do que qualquer Função Polinomial. Por exemplo, a Figura 7 mostra que $f(x) = 3^x$ cresce mais rapidamente que as funções $g(x) = x^3$, $h(x) = x^4$ e $j(x) = x^5$:

Figura 7 – Comparação da função 3^x com as funções potência



Fonte: Elaboração própria.

2.4.2 Gráficos da Função Exponencial

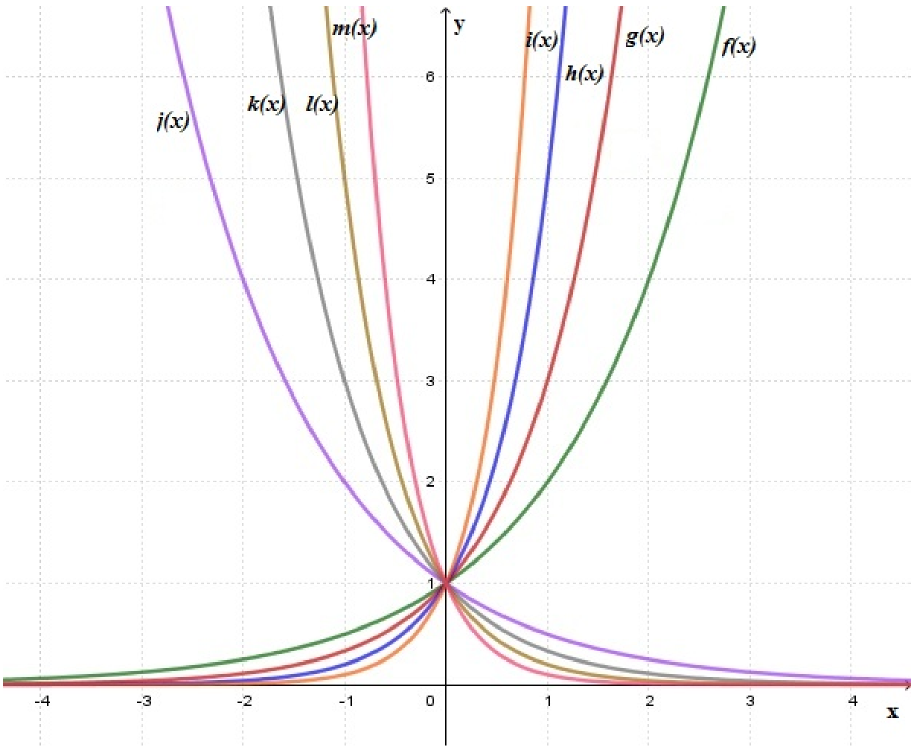
Nesta seção serão apresentadas algumas das transformações que podem ocorrer no gráfico da Função Exponencial. Essas transformações ocorrem quando os parâmetros da função são alterados ou quando são acrescentados. As orientações curriculares para o ensino médio (BRASIL, 2006) destacam a importância de se apresentar as movimentações gráficas das funções, quando afirmam que:

> É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes. (BRASIL, 2006, p. 72)

Com relação ao gráfico da Função Exponencial $f(x) = b^x$, é possível perceber que para as funções crescentes ($b > 1$), quanto maior o valor da base, mais próximo o gráfico fica do eixo y, enquanto que para as funções decrescentes ($0 < b < 1$), quanto menor o valor da base , mais próximo o gráfico fica do eixo y. Como se pode observar na Figura 8, tem-se os gráficos das funções:

- Funções crescentes: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = 5^x$ e $i(x) = 10^x$.
- Funções decrescentes: $j(x) = (\frac{1}{2})^x$, $k(x) = (\frac{1}{3})^x$, $l(x) = (\frac{1}{5})^x$ e $m(x) = (\frac{1}{10})^x$.

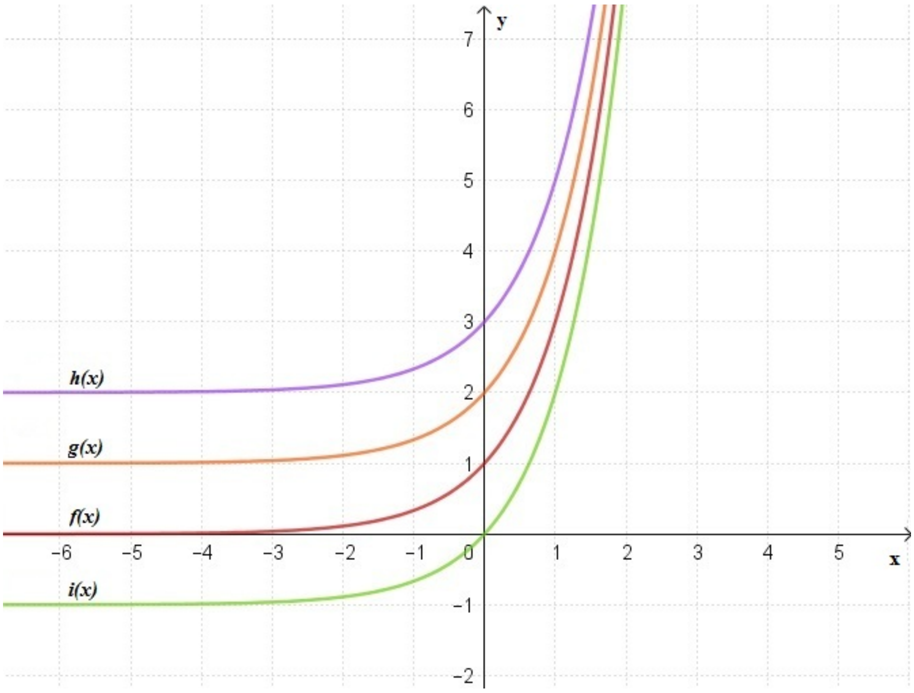
Figura 8 – Função Exponencial com diferentes bases



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 9 tem-se a Função Exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida como $f(x) = 3^x$, e suas translações verticais para cima, $g(x) = 1 + 3^x$ ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$), $h(x) = 2 + 3^x$ ($h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$) e a translação vertical para baixo, a $i(x) = -1 + 3^x$ ($i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Figura 9 – Translações verticais na Função Exponencial

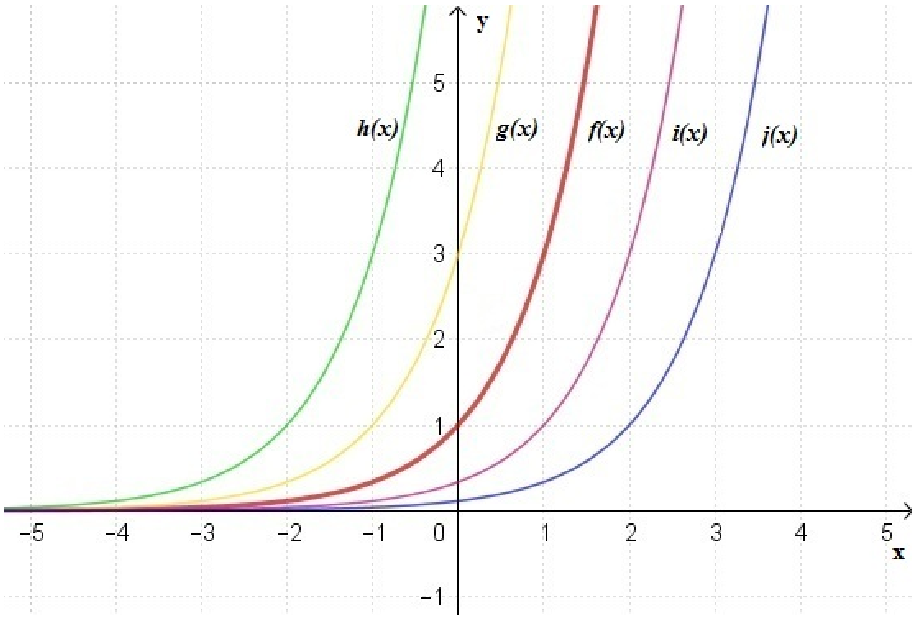


Fonte: Elaboração própria.

Vale ressaltar que, à medida que a Função Exponencial translada para cima ou para baixo, sua assíntota também translada.

A Figura 10 apresenta a Função Exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida como $f(x) = 3^x$, e suas translações horizontais para a esquerda, $g(x) = 3^{x+1}$ ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$), $h(x) = 3^{x+2}$ ($h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$) e as translações horizontais para a direita, a $i(x) = 3^{x-1}$ ($i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$), $j(x) = 3^{x-2}$ ($j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$).

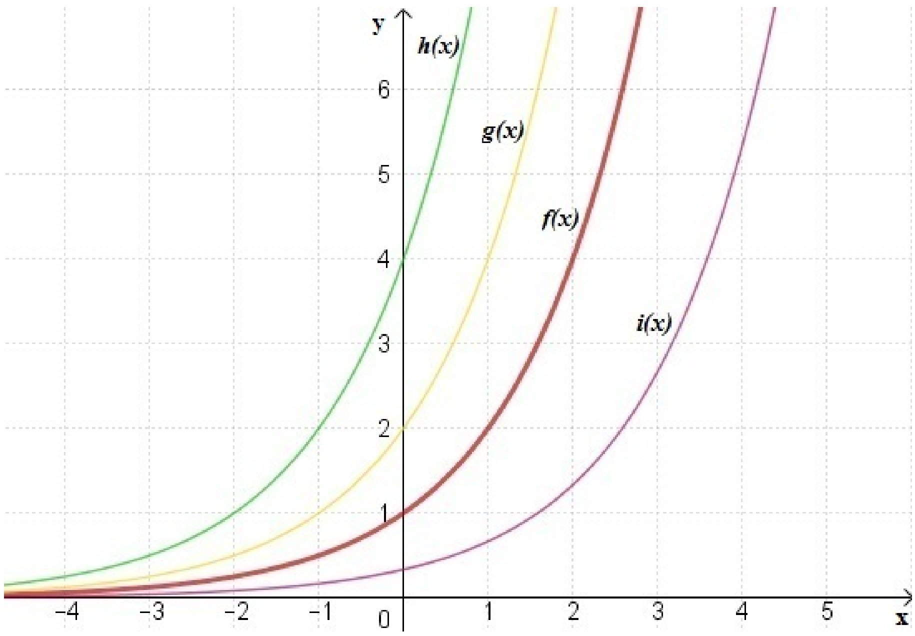
Figura 10 – Translações horizontais na Função Exponencial



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 11 tem-se a Função Exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida como $f(x) = 2^x$, e suas expansões verticais, a $g(x) = 2 \cdot 2^x$ ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$), $h(x) = 4 \cdot 2^x$ ($h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$) e a contração vertical, a $i(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ ($i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$).

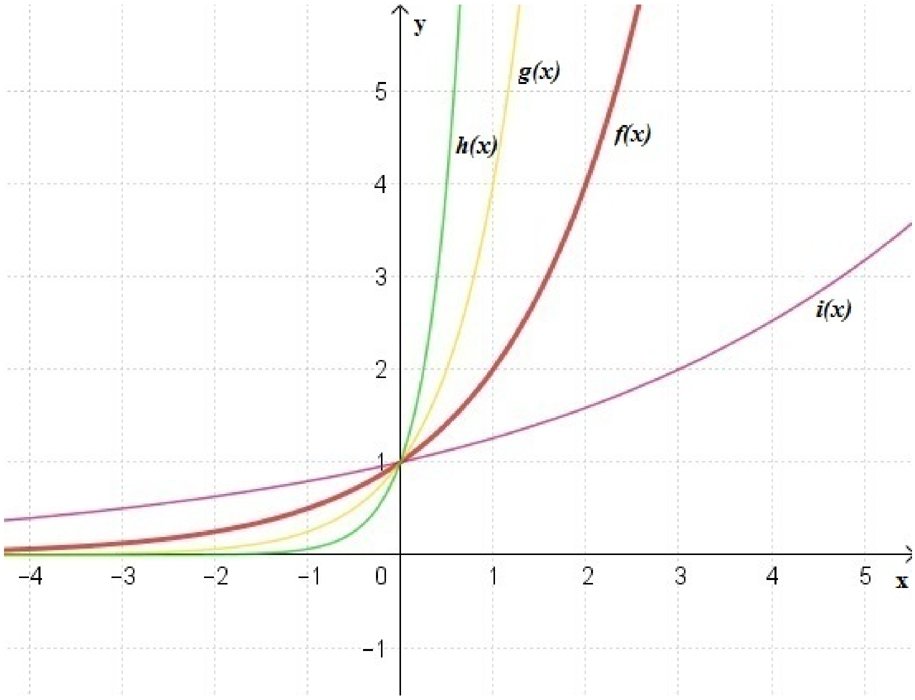
Figura 11 – Expansões verticais na Função Exponencial



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 12 tem-se a Função Exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida como $f(x) = 2^x$, e suas contrações horizontais, a $g(x) = 2^{2x}$ ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$), $h(x) = 2^{4x}$ ($h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$) e a expansão horizontal, a $i(x) = 2^{\frac{x}{3}}$ ($i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$).

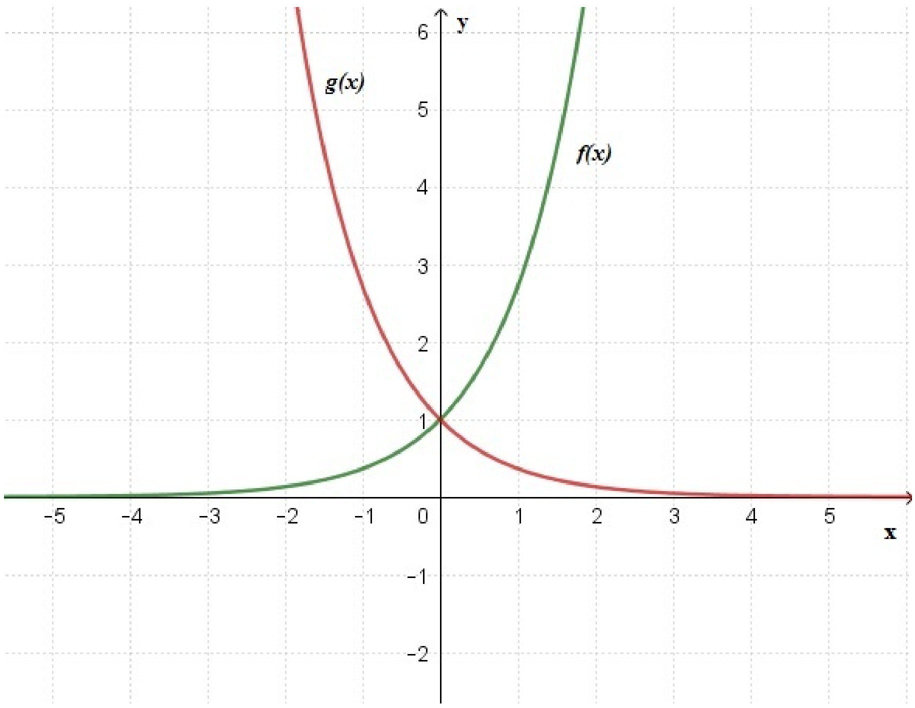
Figura 12 – Contrações horizontais na Função Exponencial



Fonte: Elaboração própria.

A Figura 13 mostra a Função Exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida como $f(x) = e^x$, e sua reflexão em relação ao eixo y, $g(x) = e^{-x}$ ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$).

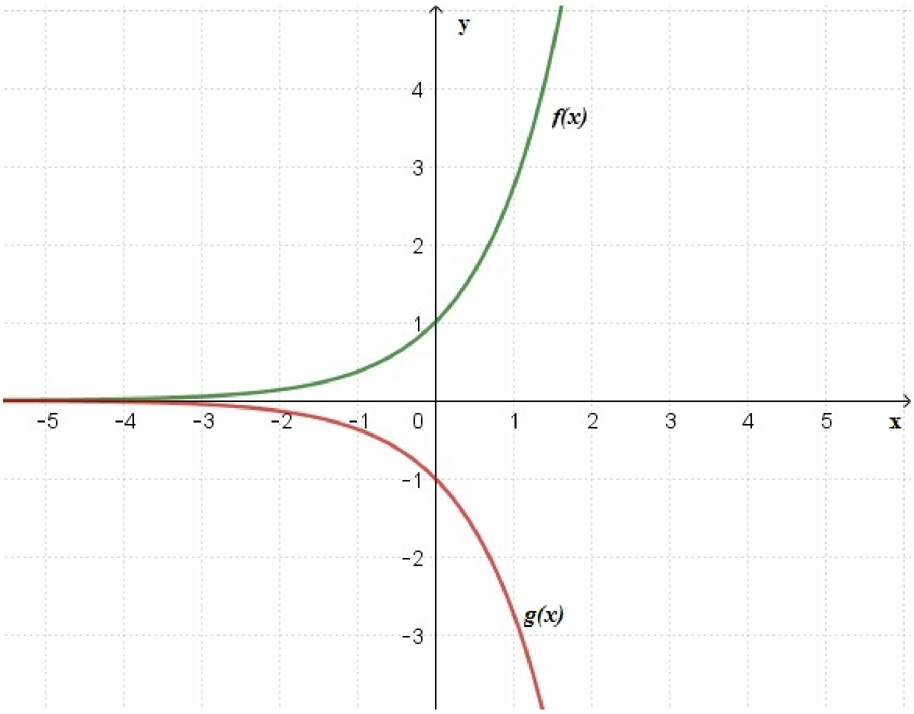
Figura 13 – Reflexão da Função Exponencial em relação ao eixo y



Fonte: Elaboração própria.

A Figura 14 apresenta a Função Exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida como $f(x) = e^x$, e sua reflexão em relação ao eixo x, $g(x) = -e^x$ ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$).

Figura 14 – Reflexão da Função Exponencial em relação ao eixo x



Fonte: Elaboração própria.

2.4.3 Aplicações Diversas das Funções Exponencais

Nesta subseção, serão apresentadas algumas das diversas possibilidades de aplicação das funções exponenciais.

- **Juros Compostos Contínuos**
  São calculados pela seguinte fórmula:
  $$A(t) = Pe^{rt}$$
  onde, $A(t)$ = montante após t anos; P = Montante de um capital; r = taxa de juros por ano; t = número de anos.

- **Medicamentos**
  Quando um certo medicamento é administrado a um paciente, o número de miligramas que permanece na corrente sanguínea do paciente após t horas é modelado por:
  $$D(t) = A\, e^{-\beta t}$$
  em que, A e β variam de acordo com o medicamento.

- **Decaimento Radioativo**

  Uma substância radioativa decai de tal maneira que, a quantidade de massa restante após t dias é dada pela função:

$$m(t) = B\, e^{-\alpha t}$$

  onde $m(t)$ é medido em quilogramas e B e α variam de acordo com a substância radioativa.

- **Velocidade Descendente**

  Um paraquedista de Sky Diving salta de uma altura razoável sobre o chão. A resistência do ar que ele vivencia é proporcional a sua velocidade, e a constante de proporcionalidade é de $0,2$. Pode ser demonstrado que a velocidade descendente do paraquedista no tempo t é dado por:

$$v(t) = 180(1 - e^{-0,2t})$$

  onde t é medido em segundos (s) e $v(t)$ é medido em pés por segundo.

- **Crescimento Logístico**

  As populações de animais não são capazes de crescer indefinidamente devido a limitação de seu habitat e alimentos. Sob tais condições, a população segue um modelo de crescimento logístico:

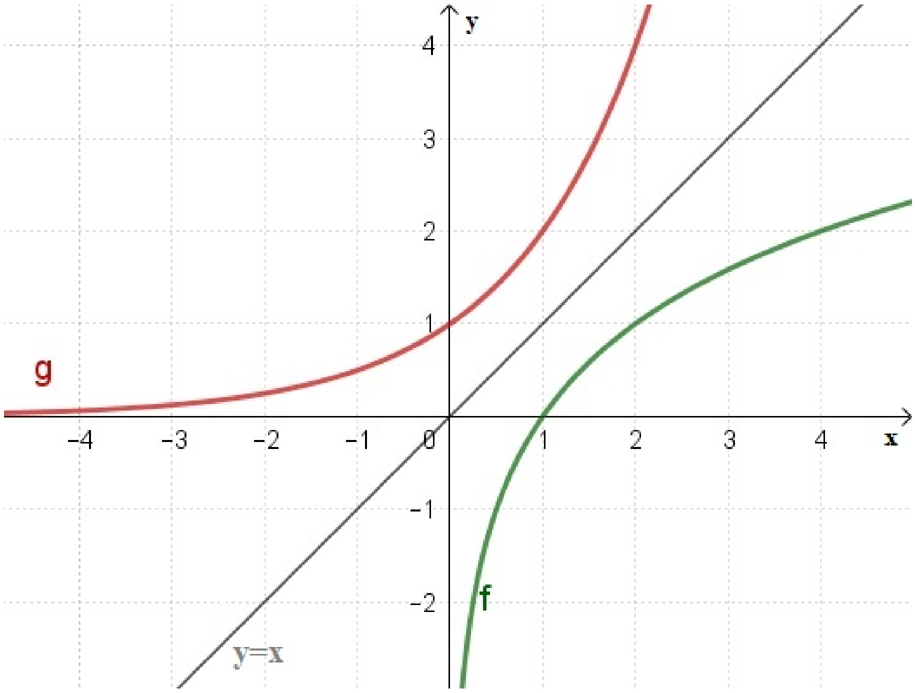
$$P(t) = \frac{d}{1 + k\, e^{-ct}}$$

  onde c , d e k são constantes positivas , e t é medido em anos.

2.4.4 Inversa da Função Exponencial

Como visto na seção 2.3, a função precisa ser bijetiva para possuir inversa. A Função Exponencial é bijetiva, portando, possui sua inversa, conhecida como Função Logarítmica, como mostra a Figura 15.

Figura 15 – Gráfico da Função Exponencial $g(x) = 2^x$ e da sua inversa, a Logarítmica $f(x) = log_2 x$



Fonte: Elaboração própria.

2.5 Função Logarítmica

Esta seção aborda a função inversa da Exponencial, a Função Logarítmica. Aqui serão apresentadas as definições, propriedades, características e alguns gráficos e aplicações.

2.5.1 Definições e Propriedades

Definição 2.9. ***Logaritmo e Função Logarítmica:*** *Se $x > 0$ e b é uma constante positiva ($b \neq 1$), então:*

$$\boldsymbol{y = \log_b x} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \boldsymbol{b^y = x}$$

A notação $\log_b x$ é lida como "logaritmo de x na base b". A função f, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \log_b x$ é a Função Logarítmica de base b.

Exemplo 2.8. *As equações logarítmicas e exponenciais são equivalentes, ou seja, se uma é verdadeira, a outra também será; como é possível vizualizar na tabela abaixo:*

Propriedades 2.3. *Dada a definição de logaritmo, é possível apresentar algumas propriedades que são consequências da definição.*
Tome $a > 0$ e $a \neq 1$; $b, c > 0$ e $m \in \mathbb{R}$.

Equação logarítmica
$\log_{10} 1000000 = 5$
$\log_2 8 = 3$
$\log_2 \frac{1}{8} = -3$
$\log_5 s = r$

Equação exponencial
$10^5 = 100000$
$2^3 = 8$
$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$5^r = s$

1. $\log_a 1 = 0$ *pois* $a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1$ *pois* $a^1 = a$
3. $\log_a a^m = m$ *pois* $a^m = a^m$
4. $a^{\log_a b} = b$ *pois* $\log_a b = x \to a^x = b$
5. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Propriedades 2.4. *Podemos destacar ainda outras propriedades importantes:*

- *A Função Logarítmica é bijetiva;*
- *A Função Logarítmica* $\log_b x$ *com* $b > 1$ *cresce muito lentamente, ao contrário da Função Exponencial;*
- *O domínio da Função Logarítmica é o intervalo* $(0, \infty)$ *e a imagem são todos os números reais;*
- *O gráfico da Função Logarítmica* $f(x) = log_b x$ *será crescente se* $b > 1$*, e será decrescente para* $0 < b < 1$*;*
- *A Função Logarítmica possui uma assíntota vertical. Para* $f(x) = \log_b x$*, a assíntota é o próprio eixo* y $(x = 0)$.

Como dito anteriormente, os gráficos da Função Logarítmica possuem assíntota vertical, que será definida a seguir:

Definição 2.10. *Uma reta vertical* $x = L$ *é chamada de assíntota vertical de uma função f(x) se existir um ou ambos dos limites a seguir:*

- $\lim\limits_{x \to L+} f(x) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to L-} f(x) = \pm\infty$

Exemplo 2.9. *Para exemplificar a bijetividade da Função Logarítmica, utilizando os conceitos vistos das seções 2.2 e 2.3, considere* $f(x) = log_b x$ *e* $g(x) = b^x$*:*

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(b^x) = log_b b^x = x$, *como visto no item 3 das Propriedaes 2.3 e;*

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(log_b x) = b^{log_b x} = x$, *como visto no item 4 das Propriedaes 2.3.*

Logo, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

Propriedades 2.5. *Propriedades operatórias dos logaritmos:*

1. $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

   Demonstração: Consideramos $\log_a (M \cdot N) = p$*;* $\log_a M = m$ *e* $\log_a N = n$
   Dessas igualdades tiramos que $a^p = M \cdot N$*;* $a^m = M$ *e* $a^n = N$*.*
   Então: $a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
   Se $a^p = a^{m+n}$*, então* $p = m + n$*, ou seja:*

   $$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

2. $\log_a (\frac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$

   Demonstração: Consideramos $\log_a (\frac{M}{N}) = q$*;* $\log_a M = m$ *e* $\log_a N = n$
   Dessas igualdades tiramos que $a^q = \frac{M}{N}$*;* $a^m = M$ *e* $a^n = N$*.*
   Então: $a^q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
   Se $a^q = a^{m-n}$*, então* $q = m - n$*, ou seja:*

   $$\log_a (\frac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$$

3. $\log_a M^N = N \cdot \log_a M$

   Demonstração: Consideramos $\log_a M^N = r$ *e* $\log_a M = m$
   Dessas igualdades tiramos que $a^r = M^N$ *e* $a^m = M$*.*
   Então: $a^r = M^N = a^{mN} = a^{N \cdot m}$
   Se $a^r = a^{N \cdot m}$*, então* $r = N \cdot m$*, ou seja:*

   $$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$$

4. $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$

Demonstração: Consideramos $\log_b N = p$; $\log_a N = q$ *e* $\log_a b = r$
Daí tiramos que $b^p = N$ *e* $a^r = b$.
Fazendo substituições: $N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{r \cdot p}$
Se $a^q = a^{r \cdot p}$, *então* $q = r \cdot p$ *e daí* $p = \frac{q}{r}$, *ou seja:*

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Exemplo 2.10. *Sejam os valores aproximados de* $\log 2 = 0,301$ *e* $\log 7 = 0,845$, *calcule o valor do* $\log 28$.

Solução: $\log 28 = \log(4 \cdot 7) = \log 4 + \log 7 = \log 2^2 + \log 7 = 2 \cdot \log 2 + \log 7 = 2 \cdot 0,301 + 0,845 = 0,602 + 0,845 = 1,447$

Vale destacar que, das variadas bases que um logaritmo pode ter, existem duas que são muito utilizados não só na Matemática, como em outras áreas do conhecimento, que são:

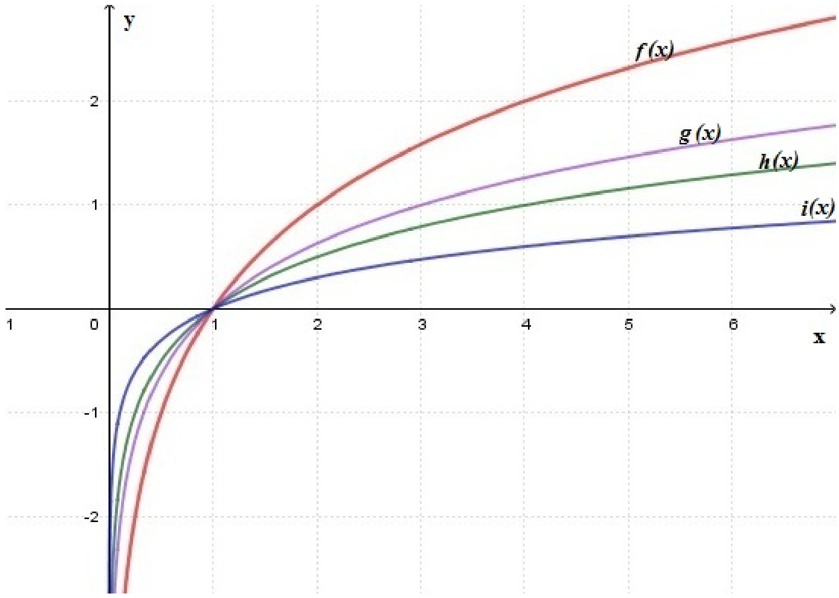
- Logaritmos de base decimal: indicado por $log_{10}x$, ou apenas por $logx$;
- Logaritmos naturais: são os logaritmos de base e, sendo $e = 2,71828...$ e e um número irracional. Indicado por $log_e x$ ou lnx

2.5.2 Gráficos da Função Logarítmica

Como visto anteriormente, o gráfico da Função Logarítmica tem como principal característica um crescimento lento, e, será crescente se $f(x) = log_b x$ e decrescente se $b > 1$. Nesta seção serão apresentadas algumas das transformações que podem ocorrer no gráfico da função logarítmica.

Considere o gráfico de uma Função Logarítmica crescente, à medida que se aumenta o valor da base, mais o gráfico se aproxima do eixo x. Na Figura 16 é possível ver essas transformações nas funções: $f(x) = log_2 x$ ($f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$); $g(x) = log_3 x$ ($g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$); $h(x) = log_4 x$ ($h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) e $i(x) = log_{10} x$ ($i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$).

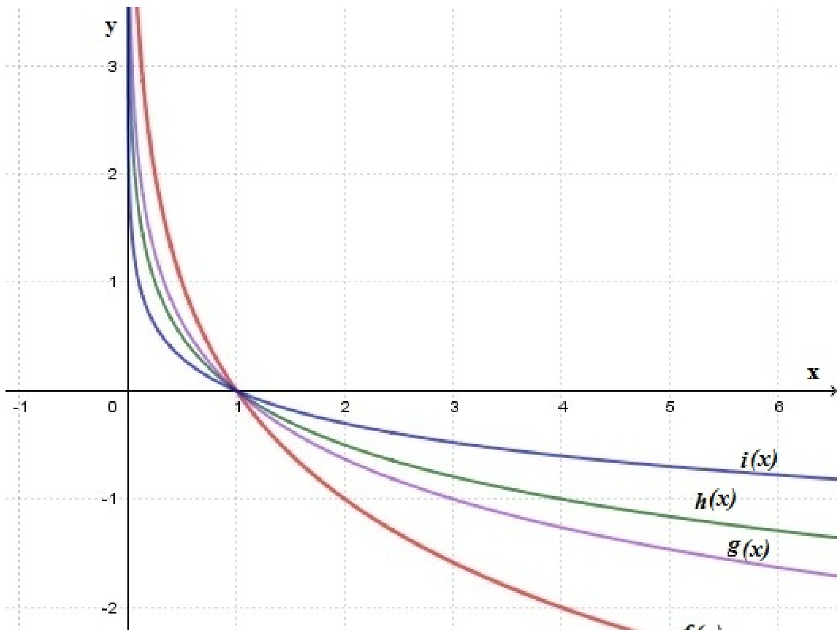
Figura 16 – Gráficos das Funções Logarítmicas crescentes



Fonte: Elaboração própria.

Agora, para analisar o gráfico de uma Função Logarítmica decrescente, observa-se o gráfico das funções: $f(x) = log_{\frac{1}{2}}x$ ($f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$); $g(x) = log_{\frac{1}{3}}x$ ($g : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$); $h(x) = log_{\frac{1}{4}}x$ ($h : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$) e $i(x) = log_{\frac{1}{10}}x$ ($i : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$); à medida que se diminui o valor da base, mais o gráfico se aproxima do eixo x, como mostra a Figura 17:

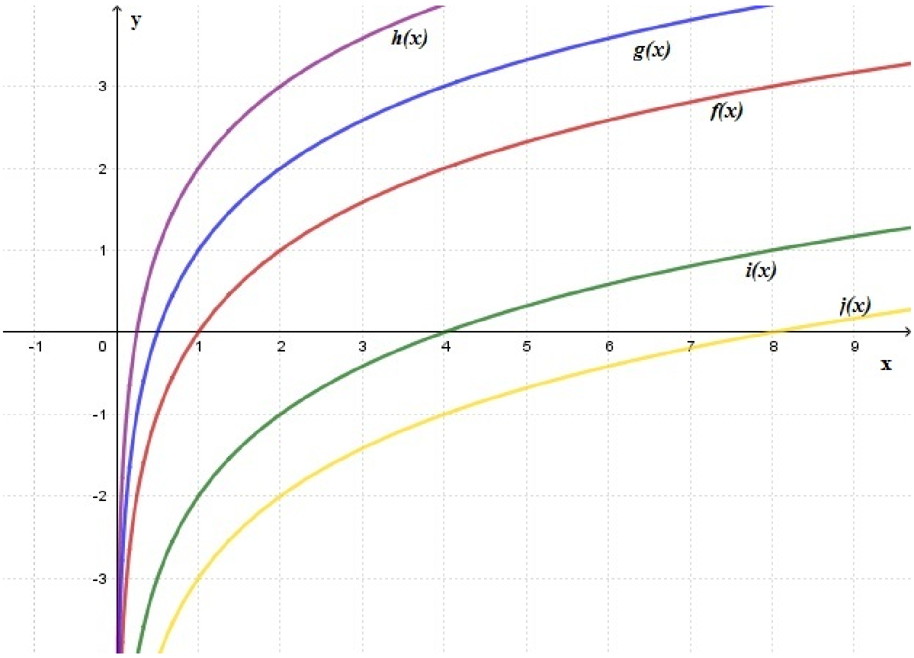
Figura 17 – Gráficos das Funções Logarítmicas decrescentes



Fonte: Elaboração própria.

Ao se somar ou subtrair a Função Logarítmica por um número natural, é possível observar que acontecem translações verticais. Na Figura 18 tem-se a função $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \log_2(x)$, e suas translações verticais para cima, a $g(x) = \log_2(x) + 1$ ($g : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$), $h(x) = \log_2(x) + 2$ ($h : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$) e as translações verticais para baixo, a $i(x) = \log_2(x) - 2$ ($i : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$) e $j(x) = \log_2(x) - 3$ ($j : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$).

Figura 18 – Translações verticais da Função Logarítmica

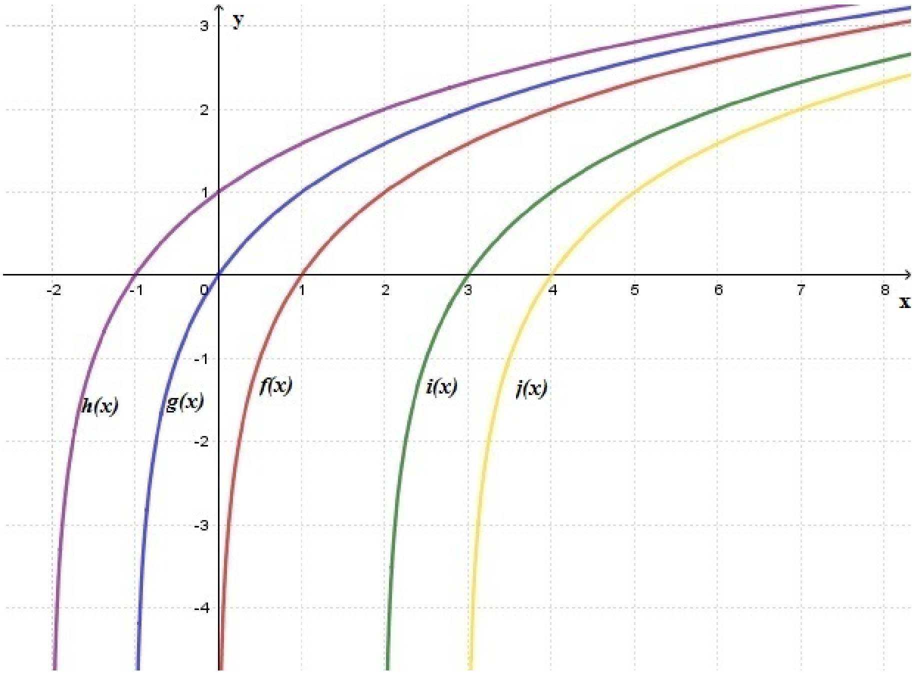


Fonte: Elaboração própria.

Em uma Função Logarítmica, ao se somar ou subtrair o logaritmando por um número natural, gera-se no gráfico dessa função translações horizontais para direita ou para esquerda. Na Figura 19 tem-se a função $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \log_2(x)$, e suas translações horizontais para esquerda, a $g(x) = \log_2(x+1)$ ($g : \ ]-1, \infty[\ \to \mathbb{R}$), $h(x) = \log_2(x+2)$ ($h : \ ]-1, \infty[\ \to \mathbb{R}$) e as translações horizontais para direita, a $i(x) = \log_2(x-2)$ ($i : \ ]2, \infty[\ \to \mathbb{R}$) e $j(x) = \log_2(x-3)$ ($j : \ ]3, \infty[\ \to \mathbb{R}$).

Vale ressaltar que as assíntotas transladam juntamente com o gráfico, no caso da função g, temos a assíntota em $y = -1$; na h em $y = -2$; na função i temos a assíntota em $y = 2$ e na j em $y = 3$.

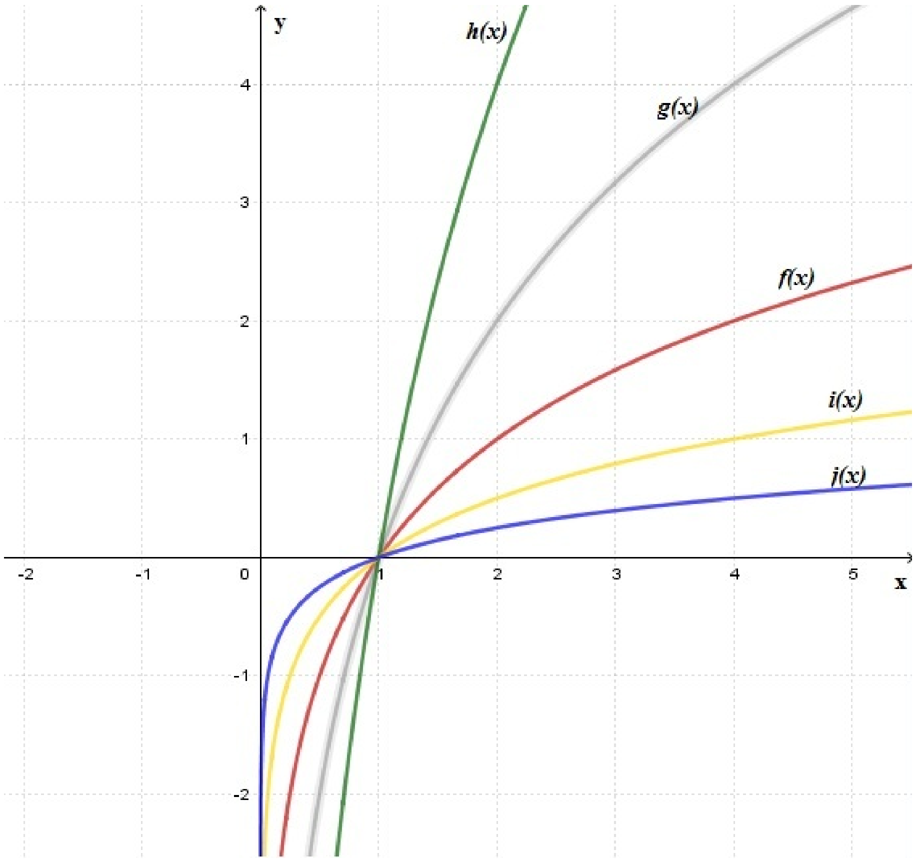
Figura 19 – Translações horizontais na Função Logarítmica



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 20 tem-se a Função Logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \log_2(x)$, e suas expansões verticais, a $g(x) = 2 \cdot \log_2(x)$ ($g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$), $h(x) = 4 \cdot \log_2(x)$ ($h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) e a contração vertical, a $i(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(x)$ ($i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) e $j(x) = \frac{1}{4} \cdot \log_2(x)$ ($i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$).

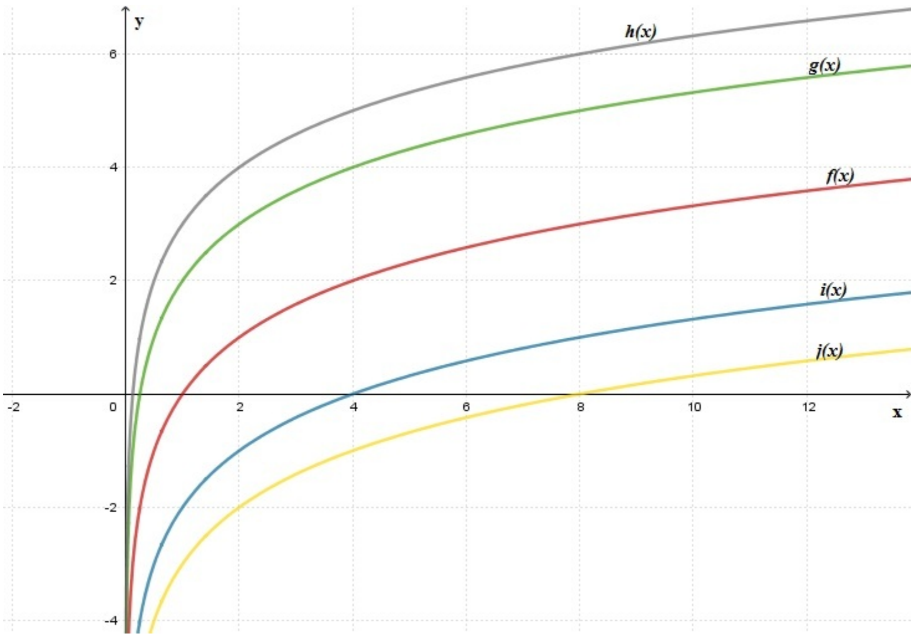
Figura 20 – Expansões verticais na Função Logarítmica



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 21 tem-se a Função Logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \log_2(x)$, e suas contrações horizontais, a $g(x) = \log_2(2x)$ ($g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$), $h(x) = \log_2(4x)$ ($h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$) e a expansão horizontal, $i(x) = \log_2(\frac{x}{4})$ ($i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$) e $j(x) = \log_2(\frac{x}{8})$ ($i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$).

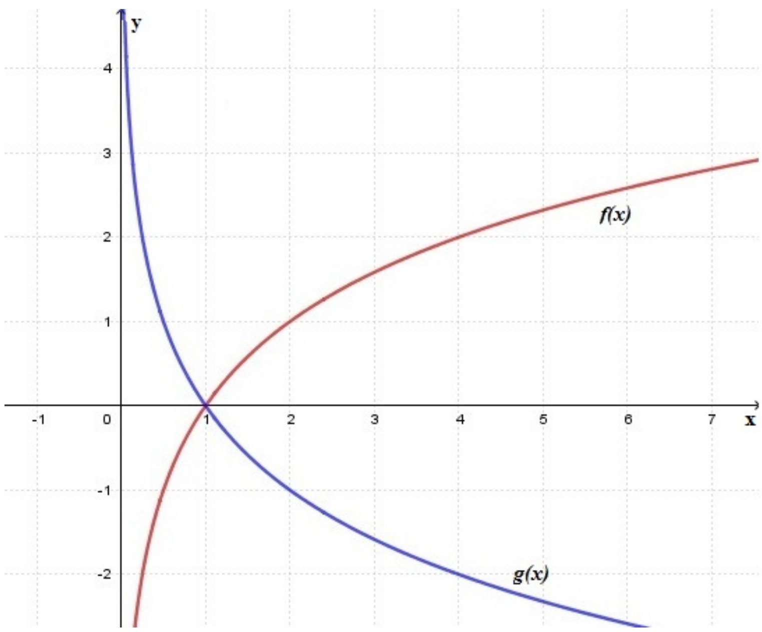
Figura 21 – Contrações horizontais na Função Logarítmica



Fonte: Elaboração própria.

Nas Figuras 22 e 23, é possíver observar a reflexão dos gráficos em relação aos eixos x e y, respectivamente. Na figura 22, são apresentadas as funções $f(x) = lnx$ ($f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) e $g(x) = -lnx$ ($g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$), neste caso observa-se uma reflexão em torno do eixo x.

Figura 22 – Reflexão da Função Logarítmica em torno do eixo x

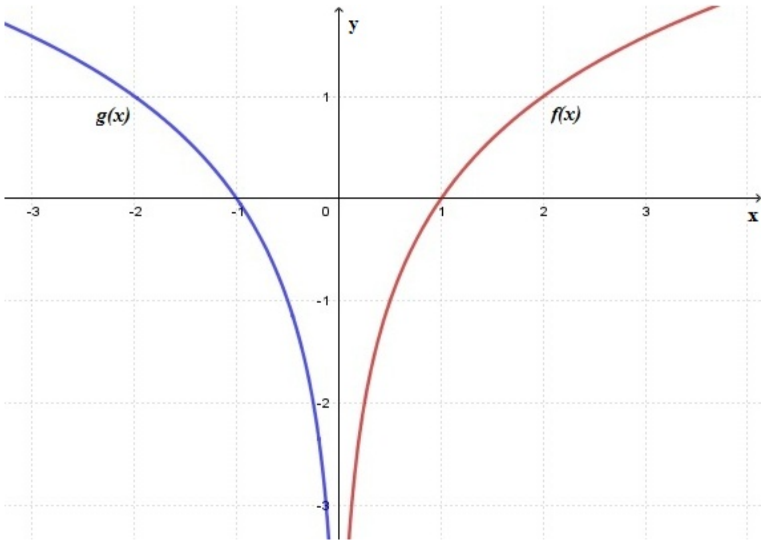


Fonte: Elaboração própria.

Já na Figura 23, são apresentadas as funções $f(x) = lnx$ ($f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) e $g(x) = ln(-x)$ ($g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$), neste caso observa-se uma reflexão em torno do eixo

y.

Figura 23 – Reflexão da Função Logarítmica em torno do eixo y



Fonte: Elaboração própria.

2.5.3 Aplicações Diversas das Funções Logarítmicas

Serão apresentadas algumas das diversas possibilidades de aplicação das Funções Logarítmicas.

- **Transparência de um Lago** É possível determinar a quantidade de luz que atinge as várias profundidades de um lago. À medida que a luz passa pela água, parte da luz é absorvida. A relação entre absorção da luz e a distância que a luz percorre em um material, é descrita de acordo com a lei de Beer-Lambert. Indica-se como I_0 e I a intensidade da luz antes e depois de passar por um material, e x é a distância (em pés) que a luz viaja no material.

  $$x = -\frac{1}{k} \cdot ln(\frac{I}{I_0})$$

  Em que k é uma constante que varia de acordo com o tipo de material utilizado.

- **Carregando uma Bateria**

  O tempo (em horas) necessário para carregar uma bateria totalmente descarregada, a uma carga C, é dada por:

  $$t = -k\ ln(1 - \frac{C}{C_0})$$

  onde k é uma constante positiva que depende da bateria, e C_0 é a carga máxima.

- **A lei do Esquecimento**
  Se uma tarefa é aprendida em um nível de desempenho P_0, logo após um intervalo de tempo t, o nível de desempenho P satisfaz a equação:

$$logP = logP_0 - c\, log(t+1)$$

  onde c é uma constante que depende do tipo de tarefa, medida em meses.

- **A escala Decibel** O ouvido é sensível a uma grande variedade de intensidades sonoras. Tomamos como referência de intensidade $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ (Watts por metro quadrado) a uma frequência de 1000 hertz, que mede um som que é quase inaudível (o limiar de audição). A sensação psicológica de sonoridade varia com o logaritmo de intensidade (Lei de Weber-Fechner), então o nível de decibéis **B**, medido em decibéis (dB), é definido como:

$$B = 10 log \frac{I}{I_0}$$

- **Pressão Atmosférica** A pressão atmosférica P, em quilopascal (kPa), na altitude h, em quilômetros (km), é dada por:

$$ln(\frac{P}{P_0}) = -\frac{h}{k}$$

  Em que P_0 é a pressão ao nível do mar e k uma constante.

Capítulo 3

Resolução de Problemas

Desde o início do século XX até os anos 1950 os currículos da disciplina de Matemática não apresentavam mudanças significativas. Nesta época, a maioria dos alunos se limitavam a memorizar fatos e procedimentos, sem necessariamente compreender os conceitos ou técnicas de aplicação dos mesmos (SCHOENFELD, 1996).

Nesse modelo de ensino descrito anteriormente, sabe-se que alguns alunos conseguiam “pensar” e assimilar o que os era ensinado mas a maioria deles não. Anos depois se entendeu que os alunos deveriam aprender Matemática de uma forma significativa, e foi nesta época que se começou a falar em resolver problemas como um meio de aprender Matemática (BICUDO, 1999).

No Brasil, foi apenas entre as décadas de 1960 e 1970 que o ensino da Matemática passou por uma nova reforma, a Matemática Moderna. Implementada não só no Brasil como em diversos outros países, a Matemática Moderna se caracterizava por valorizar excessivamente as propriedades, as abstrações matemáticas, o ensino de símbolos e termos complexos, ou seja, o formalismo e o rigor no tratamento dado aos conteúdos (BICUDO, 1999).

Segundo as autouras Onuchic e Allevato (2011, p. 78) "o tratamento excessivamente abstrato, o despreparo dos professores para este trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, fadou-o ao fracasso."

Ainda sobre esse momento em que o ensino da Matemática se encontrava imerso, o autor Schoenfeld (1996) afirma que as crianças já haviam perdido suas habilidades básicas, já que não conseguiam aprender as abstrações que esse modelo de ensino impunha, visto que se insistia em ensinar de forma apressada a alunos muito jovens conteúdos que não eram adequados para os níveis de ensino em que se encontravam. Assim, segundo este autor, ao final dos anos 1960 já havia a ideia geral de que a Matemática Moderna tinha falhado.

Em uma tentativa de retornar as práticas anteriores à Matemática Moderna e melhorar o ensino dessa disciplina, os Estados Unidos implementa uma nova fase chamada de *Volta às bases*. Entretanto, esse movimento não conseguiu muitos adeptos e com isso não obteve grandes efeitos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Com isso, a Resolução de Problemas começa a ganhar força a partir dos anos 1970, quando os educadores matemáticos entenderam que o desempenho de um aluno em resolver problemas poderia medir o domínio de uma competência matemática.

Sobre essa época, as autoras Onuchic et al. (2014) relatam que em maio de 1975 aconteceu o primeiro *Seminário de Pesquisa sobre Resolução de Problemas em Educação Matemática*, na Universidade da Georgia, nos EUA, que reuniu pessoas que já estavam profundamente envolvidas com as pesquisas sobre Resolução de Problemas. Com isso, estimulou-se o nível de colaboração entre pesquisadores em Educação Matemática, aumentando o engajamento nas pesquisas sobre Resolução de Problemas em Matemática.

No ano de 1980, incentivados pelas produções desses pesquisadores, educadores matemáticos que formavam o "Conselho Nacional de Professores de Matemática" (NCTM) publicam um documento intitulado "An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics" em que se indicava que o foco da Matemática escolar deveria ser dado a Resolução de Problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Durante os anos 1980, vários recursos em resolução de problemas haviam sido desenvolvidos tendo em vista o trabalho de sala de aula. Também nessa década, as dificuldades encontradas por professores para “ensinar” e por alunos para “aprender” passaram a ser consideradas objetos de estudo por educadores e pesquisadores na educação matemática. Entretanto, existiam divergências entre suas linhas de pesquisa.

Embora se saiba que muito se pesquisava sobre Resolução de Problemas durante os anos 1980, o matemático Polya, considerado o pai da Resolução de Problemas, já havia iniciado suas pesquisas considerando-a como uma forma de ensinar Matemática desde 1944. Em seus trabalhos Polya se preocupa em como ensinar estratégias que levassem o aluno a enxergar caminhos para a solução de um problema (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Segundo Onuchic et al. (2014), durante a década de 1990 o NCTM lançou algumas produções de suma importância para o desenvolvimento do ensino da Matemática, dentre elas, uma foi fortemente difundida, conhecida como *Standarts 2000*. Embora só tenham sido publicados nos anos 2000, os *Standarts 2000* refletem o trabalho de duas décadas desenvolvido pelo NCTM.

Onuchic (2013) afirma que os Standards sugeriram mudanças profundas em quase todos os aspectos do ensino e da aprendizagem de Matemática. No Brasil, influenciados pelas ideias dos Standards do NCTM, foram criados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

- PCN - Matemática - 1º e 2º ciclos - 1ª a 4ª séries - 1997;

- PCN - Matemática - 3º e 4º ciclos - 5ª a 8ª séries - 1998;
- PCN - Matemática - ensino médio – 1999;
- PCN - Matemática - ensino médio - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – 2002;
- Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – 2006.

Os autores Schroeder e Lester (1989) apresentam três modos diferentes de se abordar a Resolução de Problemas: (i) ensinar sobre Resolução de Problemas; (ii) ensinar a resolver problemas; (iii) ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas.

No primeiro deles, ao se ensinar sobre resolução de problemas procura-se destacar o modelo de resolução de problemas segundo Polya ou alguma variação dele. É válido ressaltar que nesse modo o significado está centrado na maneira como a Matemática é ensinada, acabando por distanciar-se da proposta essencial, sugerida pelos PCN (BRASIL, 2002), que o aluno deve aprender Matemática para que seja capaz de usá-la (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Em seu livro *A Arte de Resolver Problemas*[1], Polya (2006) destaca que para resolver um problema são necessárias quatro fases que serão descritas a seguir:

1. *Compreender o problema* - para esta primeira etapa é necessário que o objetivo a ser alcançado esteja claro ao ler o enunciado, para que possam ser identificadas as partes principais do problema: a incógnita, os dados e a condicionante;
2. *Estabelecimento de um plano* - o plano de como resolver o problema geralmente surge, rapidamente ou de forma gradual, como uma ideia para a resolução. O professor pode ajudar o aluno nessa tarefa de forma discreta, primeiramente fazendo perguntas e sugestões que provoquem a ideia ou, sugerir que pense em um problema correlato. Um problema correlato é aquele que se relaciona intimamente com o problema que se deseja resolver;
3. *Execução do plano* - esta fase é facilitada quando o plano de resolução já está previamente estabelecido;
4. *Retrospecto* - nesta fase o aluno deve reconsiderar e reexaminar o resultado obtido para que sua capacidade em resolver problemas seja aprimorada. Para Polya (2006), um problema nunca se esgota, sempre resta algo a fazer, sendo do professor o papel de mostrar aos alunos que se pode aprofundar e melhorar qualquer resolução.

[1] Título em inglês: How to solve it: a new aspect of mathematical method, escrito em 1945 e traduzido para o português em 1978, por Heitor Lisboa de Araújo

No segundo modo, “ensinar a resolver problemas”, o professor deve se concentrar em como a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada em problemas rotineiros e não rotineiros. Destaca-se que neste modo, os estudantes utilizam os conceitos e estruturas matemáticas que estão estudando e, posteriormente, transferem o que aprenderam no contexto de um problema. Assim, a preocupação do professor está apenas em verificar se o aluno consegue transferir seus saberes para esse contexto (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Ainda sobre ensinar a resolver problemas, o autor Huanca (2007, p. 35) afirma que "um grande risco da adoção desse aspecto é que ele pode levar a ver a resolução de problemas apenas como uma atividade que os alunos só podem realizar depois da introdução de um novo conceito ou depois de praticar habilidades de cálculo".

No terceiro modo apresentado, “ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas”, o problema como um ponto de partida para se ensinar Matemática, sendo assim considerada uma metodologia de ensino. Desta maneira, o ensino de um tópico matemático se inicia por meio de uma situação problema que reúna aspectos chaves do tópico, e as técnicas matemáticas vão sendo desenvolvidas. Acredita-se que o ensino deve estar centrado no aluno, sendo ele quem constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, que são em seguida formalizados pelo professor (SCHROEDER; LESTER, 1989).

3.1 Metodologia de Ensino Resolução de Problemas

Após serem analisados os três modos diferentes de se abordar Resolução de Problemas e verificada a importância da mesma para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, será utilizado para este trabalho o terceiro modo apresentado, a Resolução de Problemas como a metodologia da pesquisa.

Sobre esta maneira de se abordar a Resolução de Problemas, as autoras Onuchic e Morais (2013) afirma que:

> Ao se ensinar Matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender Matemática, mas também, como um primeiro passo para se fazer isso. O problema passa a ser olhado como um agente que pode desencadear um processo de construção do conhecimento (ONUCHIC; MORAIS, 2013, p. 406).

Corroborando com a ideia apresentada acima pelas autoras, os PCN (BRASIL, 2002) destacam a importância de se trabalhar com a Resolução de Problemas no ensino da Matemática, afirmando que:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo

> está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2002, p. 112).

As autoras Onuchic et al. (2014) sugerem que o trabalho inicie com o profesor selecionando ou elaborando um problema. Este problema que será proposto aos alunos tem por objetivo estabelecer um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento matemático. Estas autoras intitulam este problema como um *problema gerador* e, afirmam ainda, que este problema irá construir o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução, visto que este será um problema que ainda não foi trabalhado em sala de aula.

Segundo Onuchic et al. (2014), para seguir esta metodologia, o trabalho do professor em sala de aula deve ser organizado em dez etapas:

1. *Proposição do problema* - Nesta etapa é proposto para os alunos um problema inicial que vise a construção de um novo conteúdo matemático, como descrito anteriormente;

2. *Leitura individual* - Cada aluno faz sua leitura do problema, nesta etapa o aluno tem a possibilidade de refletir, entrar em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema que lhe foi proposto;

3. *Leitura em conjunto* - Após a leitura individual, é o momento que os alunos se reúnem em pequenos grupos, lêem o problema novamente e discutem sobre o mesmo;

4. *Resolução do problema* - Nesta etapa a ação dos alunos volta-se à expressão escrita, utilizando todos os recursos matemáticos que dispõe, como desenhos, gráficos e tabelas. O papel do professor neste momento é apenas auxiliar os alunos na compreensão do problema, para que as ações sejam realizadas essencialmente por eles;

5. *Observar e incentivar* - O professor age observando o trabalho dos alunos e incentivando-os a trocar ideias, utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas;

6. *Registro das soluções na lousa* - Alunos representantes dos grupos são solicitados a ir até o quadro e fazer o registro das soluções elaboradas pelo seu grupo, sendo estas soluções certas, erradas ou resolvidas de formas diferentes;

7. *Plenária* - Com as soluções apresentadas no quadro, os alunos são incentivados a justificar e compartilhar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções;

8. *Busca do consenso* - Em um esforço conjunto professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado corrreto. Neste momento ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da esrita matemática.

9. *Formalização do conteúdo* - Nesta etapa o professor registra no quadro a solução de uma maneira organizada, estruturada em linguagem matemática. Deve padronizar os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução do problema, destacando diferentes técnicas e construindo demonstrações, caso necessário.

10. *Proposição e resolução de novos problemas* - Esses problemas criam a possibilidade de analisar se os conteúdos matemáticos introduzidos naquela aula foram compreendidos. Possibilitam também consolidar as aprendizagens construídas durante as etapas anteriores e, também ampliar e aprofundar as compreensões acerca do conteúdo matemático abordado.

Após a construção dos conhecimentos por meio desta metodologia de ensino, a autora Allevato (2008) descreve como o aluno deve ser avaliado nesse processo:

> A opção de utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação. Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário. (ALLEVATO, 2008, p.6)

Em seu artigo, a autora Allevato (2005) destaca que a Resolução de Problemas utilizada como uma metodologia de ensino não exclui as outras formas de se trabalhar a Resolução de Problemas, afirmando que "[...] quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre resolução de problemas, quanto aprendem Matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática através da resolução de problemas."(ALLEVATO, 2005, p. 61).

De acordo com Onuchic (2008), compreender é essencialmente relacionar. Assim, quanto mais condições se proporcione aos alunos para pensar e testar uma ideia emergente, maiores serão as chances dessa ideia ser formada corretamente e integrada a uma rede de ideias e compreensão relacional.

Com isso, considera-se que esta metodologia de ensino-aprendizagem possa ter forte impacto no processo de aprendizagem dos alunos.

3.2 Interdisciplinaridade e Matemática

Como dito na seção anterior, considera-se que compreender é essencialmente relacionar, com isso busca-se nesse trabalho uma abordagem interdisciplinar para as atividades propostas, assim como sugerem os PCN (BRASIL, 2002):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p.111).

Também segundo os PCN, a interdisciplinaridade "deve ser compreendida a partir de uma abordagem relacional, em que se propõe que, por meio da prática escolar, sejam estabelecidas interconexões e passagens entre os conhecimentos através de relações de complementaridade, convergência ou divergência"(BRASIL, 2000, p. 21).

Segundo Thiesen (2008) os conceitos e concepções sobre interdisciplinaridade parecem estar num processo de construção. Segundo este mesmo autor:

> Qualquer demanda por uma definição unívoca e definitiva deve ser a princípio rejeitada, por tratar-se de proposta que inevitavelmente está sendo construída a partir das culturas disciplinares existentes e porque encontrar o limite objetivo de sua abrangência conceitual significa concebê-la numa óptica também disciplinar. (THIESEN, 2008, p. 4).

Apesar de as concepções sobre interdisciplinaridade não estarem bem delineadas, ou, em alguns casos, sofrerem variações, é possível perceber que, de modo geral, as ideias convergem num mesmo sentido. Muitos autores destacam a importância de não se fragmentar e isolar o processo de aprendizagem, e sim, fundamentar a interação entre as disciplinas ou áreas do conhecimento.

Segundo Lavaqui e Batista (2007), a interdisciplinaridade escolar precisa estar fundamentada em pressupostos que indiquem uma orientação epistemológica ao processo, de forma que permita um esboço em relação aos objetivos educacionais e a outros aspectos de formação que se espera desenvolver nos alunos.

Ao se considerar que a interdisciplinaridade, no âmbito escolar, não se coloca apenas como uma questão didática, mas também precisa estar situada em função de princípios epistemológicos, destaca-se que os professores devem assumir um papel que possa dar sentido a essas práticas. Mas, assumir este papel não é algo natural para o professor, visto que foram e são formados em uma perspectiva disciplinar. Assim, uma proposta que busque mudar de maneira extrema a forma de se trabalhar, acaba dando origem a fortes reações negativas e, como a proposta precisa de uma articulação coletiva, esta pode se tornar inviável (LAVAQUI; BATISTA, 2007).

Ainda sobre o papel do professor, Kleemann (2018) também destaca as dificuldades e desafios na inserção de práticas de ensino diferenciadas, como a interdisciplinaridade. Essas práticas demandam do professor um maior preparo, pois, além dos conceitos específicos de sua área de formação, ele também passa a investigar assuntos de outras áreas que possuem ligação direta (aplicações, por exemplo) com os conceitos abordados em sua disciplina.

Kleemann (2018) destaca que:

> O educador também é desafiado a procurar resoluções para situações-problema abordadas a cada momento, podendo ser, inclusive, problemas de interesse dos alunos. As aulas deixam de ser um espaço no qual o professor apresenta seu planejamento ao aluno e segue o mesmo tal e qual foi planejado. Partir da contextualização permite distintos direcionamentos. Introduzir conceitos matemáticos a partir de problemas explorados e(ou) explicados na Física é um exemplo no qual se faz uso da interdisciplinaridade. (KLEEMANN, 2018, p. 29).

Lavaqui e Batista (2007) destacam que o desenvolvimento das práticas interdisciplinares na escola estão diretamente ligadas a não eficácia das disciplinas do Ensino de Ciências e de Matemática, principalmente em relação à iniciação dos alunos nas discussões de questões científicas e tecnológicas, sobretudo quando relacionadas à necessidade de ensiná-los a utilizar esses conhecimentos no seu cotidiano, seja em relação a questões sociais, individuais ou políticas.

Seguindo nesta linha de raciocínio, David e Tomaz (2008) destacam em seu livro que a forma fragmentada com que a escola tem buscado produzir conhecimento já não atende mais as exigências nas quais os alunos estão inseridos, mesmo que os conteúdos e métodos de educação escolar tenham a intenção de servir às necessidades básicas de aprendizagem dos indivíduos e das sociedades.

Ressalta-se que apenas o conhecimento disciplinar não favorece a compreensão de forma abrangente a realidade vivida pelo aluno, por isso são elegidos dois princípios básicos para o ensino da Matemática: a contextualização e a interdisciplinaridade (DAVID; TOMAZ, 2008).

Sobre o princípio da contextualização, David e Tomaz (2008) afirmam que:

> O ensino da matemática deve estar articulado com as várias práticas e necessidades sociais, mas de forma alguma se propõe que todo conhecimento deva sempre ser aprendido a partir das situações da realidade do aluno. Outra forma de contextualização pode ocorrer via inter-relações com outras áreas do conhecimento, que, por sua vez, pode ser entendida como uma forma de interdisciplinaridade. (DAVID; TOMAZ, 2008, p. 14).

Estas mesmas autoras destacam que o princípio da interdisciplinaridade:

> [...] pode ser esboçado por meio de diferentes propostas, com diferentes concepções, entre elas, aquelas que defendem um ensino aberto para inter-relações entre a Matemática e outras áreas do saber científico ou tecnológico, bem como com as outras disciplinas escolares (DAVID; TOMAZ, 2008, p. 14).

Inclusive, os PCN destacam em suas orientações que o ensino da Matemática deve apresentar essa abordagem. Segundo eles "o critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático [...]"(BRASIL, 2000, p. 43).

Considera-se que a aprendizagem acontece de maneira mais significativa quando, o aluno consegue criar suposições, testar ideias e tirar suas conclusões. Se o aluno desenvolve a capacidade de observação, questionamento, experimentação e, com isso, obtém conclusões sobre um determinado assunto, ele passa a ter uma compreensão mais abrangente no que diz respeito a uma situação ou problema.

Para que o aluno possa resolver um problema matemático, ele deve usar seus conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo de sua vida. Para que isso aconteça, os alunos deveriam estar permanentemente em contato interdisciplinar com outros conteúdos, a fim de desenvolver seu raciocínio para solucionar problemas matemáticos (MARTINEZ, 2015).

Na tentativa de viabilizar a implementação da interdisciplinaridade escolar, os PCN indicam que:

> Nessa nova compreensão do ensino médio e da educação básica, a organização do aprendizado não seria conduzida de forma solitária pelo professor de cada disciplina, pois as escolhas pedagógicas feitas numa disciplina não seriam independentes do tratamento dado às demais, uma vez que é uma ação de cunho interdisciplinar que articula o trabalho das disciplinas, no sentido de promover competências.(BRASIL, 2002, p. 13).

Sobre a forma de implementação da interdisciplinaridade os PCN afirmam que essa articulação interdisciplinar, originada por um aprendizado com contexto, não deve ser vista como algo adicional a ser oferecido eventualmente se houver tempo, porque sem ela o conhecimento desenvolvido pelo aluno estará fragmentado e não será eficaz (BRASIL, 2002).

A interdisciplinaridade não está atrelada apenas aos procedimentos escolares, ela faz uma forte conexão entre o indivíduo e o mundo em que ele vive. Por isso:

> A abordagem por competências recoloca o papel dos conhecimentos a serem aprendidos na escola. Eles se tornam recursos para que o indivíduo,

> diante de situações de vida, tome uma decisão, identifique ou enfrente um problema, julgue um impasse ou elabore um argumento. (BRASIL, 2002, p. 35).

Quando o aluno ganha a capacidade de argumentar, se posicionar e fazer sua análise de maneira fundamentada, pode-se dizer que se obteve sucesso no processo de aprendizagem, quando ele aprende e percebe o que foi aprendido durante situações reais. Por isso entende-se que a abordagem por competências, o contexto e a interdisciplinaridade são essenciais.

Capítulo 4

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo, será apresentada a metodologia de pesquisa que norteou este trabalho, o campo e os sujeitos da pesquisa e a elaboração das atividades.

Esta pesquisa é de caráter qualitativo, desenvolvida por meio de um estudo de caso com alunos do 2° ano do Ensino Médio de uma escola pública de Macaé. A escolha deste nível de ensino deve-se ao fato de que os alunos tem os conteúdos de logaritmos e funções logarítmicas como parte do currículo escolar do estado (RIO DE JANEIRO, 2012), e os mesmos já haviam estudado alguns tópicos de funções exponenciais no ano anterior.

4.1 Caracterização da Pesquisa

Este trabalho tem a seguinte questão de pesquisa: **Como fazer um estudo sobre funções exponenciais e logarítmicas de forma contextualizada e significativa?** Buscando responder essa pergunta, optou-se por realizar uma pesquisa qualitativa por meio do estudo de caso, visto que questões que se concentram em “como” e “por quê” são mais explicativas e por isso favorecem o uso do método de pesquisa de estudo de caso (YIN, 2010).

Bicudo (1993, p. 18) afirma que o pesquisador deve ter uma inquietação que se expresse por meio de uma pergunta, de uma interrogação. E, "pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada. Configura-se, também, como buscar explicações cada vez mais convincentes e claras sobre a pergunta feita".

A pesquisa qualitativa é conceituada como um processo de reflexão e análise, por meio de métodos e técnicas, que visa a compreender detalhadamente o objeto de estudo (OLIVEIRA, 2013) que, neste caso, é o estudo de funções exponenciais e logarítimicas.

Também chamada de pesquisa naturalística, a pesquisa qualitativa tem como foco entender e interpretar dados e discursos (BORBA, 2004).

"Um estudo de caso pode ter profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias já existentes" (PONTE, 2006, p.8).

O local ideal em que se deve ocorrer o estudo de caso é o ambiente natural do investigado, assim é possível fazer observações para coletar os dados da pesquisa. Neste trabalho, foi feita a observação participante durante a aplicação das atividades. Esta é uma modalidade de observação na qual o observador não é passivo, podendo assumir vários papéis no estudo de caso, além de participar ativamente dos eventos a serem estudados. Para Yin (2010) em alguns tópicos, pode não haver uma maneira de se coletar os dados necessários se não por meio da observação participante. Assim, pode-se ter acesso aos eventos ou grupos que, de outro modo, seriam impraticáveis ao estudo.

Como dito anteriormente, a pesquisa qualitativa não tem como único objetivo recolher dados, mas analisar as causas e efeitos, contextualizando-os no tempo e no espaço, dentro de uma concepção sistêmica (OLIVEIRA, 2013). Assim, foi escolhida a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, uma vez que essa metodologia busca que o aluno aprenda por meio de uma abordagem mais significativa.

A partir dos objetivos traçados, foram realizadas as seguintes etapas: (i) elaboração das atividades; (ii) experimentação das atividades; (iii) análise dos dados, a fim de verificar se os objetivos foram alcançados.

A etapa (i) está descrita na secão 4.4, enquanto as etapas (ii) e (iii) estão descritas no capítulo 5.

4.2 Campo da Pesquisa

A pesquisa foi realizada no Colégio Estadual Jornalista Álvaro Bastos, sendo esta uma escola pública da rede estadual de ensino, localizada no município de Macaé, no estado do Rio de Janeiro. Esta escola está inserida em um bairro periférico da cidade.

A escola escolhida para a realização da pesquisa, oferta, aos seus alunos, apenas o Ensino Médio, em turmas de Ensino Regular e na modalidade Nova Educação de Jovens e Adultos (NEJA), funcionando nos turnos matutino, vespertino e noturno.

No ano de 2019 foram matriculados 1208 alunos nesta escola, distribuídos em 28 turmas do Ensino Regular (1° ao 3° ano do Ensino Médio) e 7 turmas do Ensino Nova Educação de Jovens e Adultos, totalizando 35 turmas.

A escola (Figura 24) apresenta uma infraestrutura regular, contando com um mini-auditório que possui ar condiocinado, televisão e projetor de vídeo, uma quadra poliesportiva, biblioteca, laboratório de ciências e um laboratório de informática que possui poucos computadores em funcionamento, o que sempre impossibilita seu uso.

Figura 24 – Visão frontal da escola

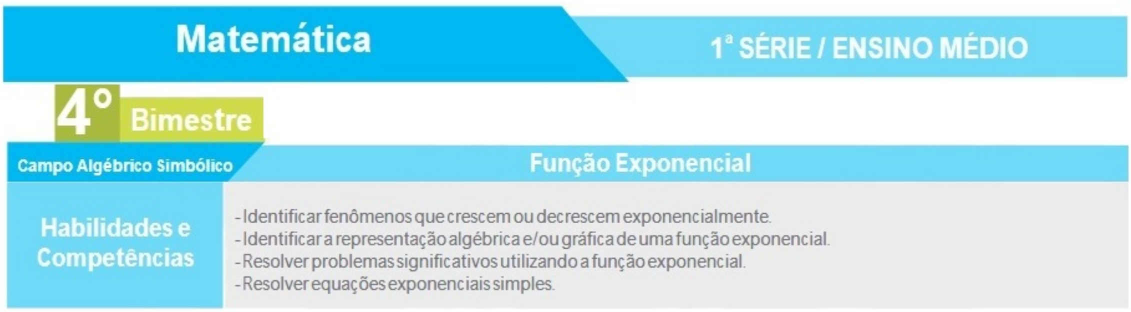
Fonte: Google maps.

A escolha da escola, para a aplicação das atividades, foi devido ao fato da pesquisadora trabalhar como professora de turma na disciplina de Matemática nesta escola há cinco anos.

4.3 Sujeitos da Pesquisa

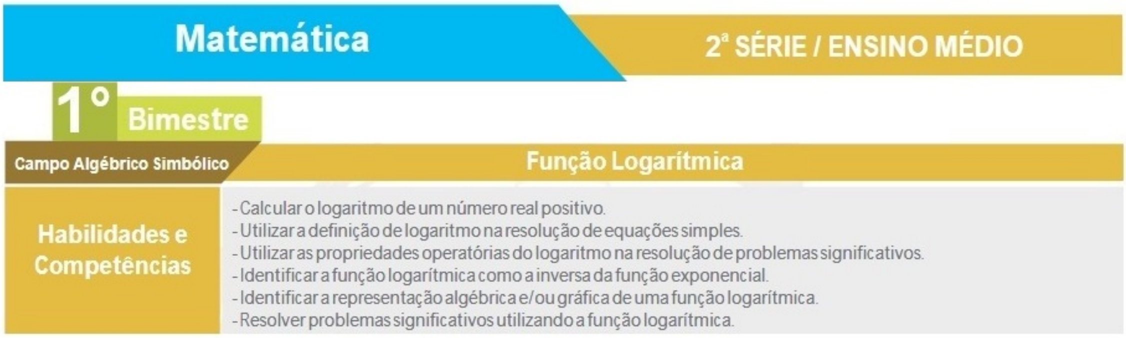
O currículo mínimo do governo estadual do Rio de Janeiro (RIO DE JANEIRO, 2012) indica que o conteúdo de Função Exponencial seja apresentado para os alunos do 1° ano do Ensino Médio (Figura 25), no 4° bimestre e o conteúdo de Função Logarítmica para os alunos do 2° ano no 1° bimestre (Figura 26). Como um dos objetivos das atividades é definir Função Logarítmica como a inversa da Função Exponencial, julgou-se adequado a escolha de duas turmas do 2° ano do ensino médio.

Figura 25 – Currículo Mínimo do 1° Ano do Ensino Médio - 4° Bimestre



Fonte: SEEDUC - RJ.

Figura 26 – Currículo Mínimo do 2° Ano do Ensino Médio - 1° Bimestre



Fonte: SEEDUC - RJ.

Com isso, foram escolhidas duas turmas para a realização das atividades, que serão chamadas, respectivamente, de Turma A e Turma B. A Turma A é composta por 30 alunos e a Turma B é composta por 26 alunos. Os alunos da Turma A serão identificados como, aluno A1, aluno A2, etc, já os alunos da turma B, como, aluno B1, aluno B2, etc.

4.4 Elaboração das Atividades

Como relatado no capítulo anterior, foi escolhida a metodologia de Ensino Resolução de Problemas, segundo a autora Onuchic et al. (2014), para a aplicação das atividades desenvolvidas.

A sequência de atividades foi dividida em duas etapas, na primeira delas foram escolhidas e elaboradas 10 questões (APÊNDICE B.1) e uma relação de definições e propriedades (APÊNDICE B.2) que objetivam definir a função logarítmica como a inversa da Função Exponencial, e também, apresentar a definição de logaritmo e suas propriedades. Na segunda etapa das atividades foi feito um levantamento de 26 problemas (APÊNDICE B.3) e dentre eles foram escolhidos 6 problemas interdisciplinares (APÊNDICE B.3), para serem trabalhados, os quais tem por objetivo, proporcionar aos alunos novos conhecimentos e ferramentas, fazendo uso do conteúdo visto na etapa anterior.

Este trabalho leva em consideração que os alunos do 2° ano do Ensino Médio da rede estadual do Rio de Janeiro já haviam trabalhado o conteúdo de função expoencial no 4° bimestre do 1° ano do Ensino Médio, sendo assim julgou-se não ser necessário a aplicação de um pré-teste. Com isso, foram elaboradas questões que apresentassem o conteúdo proposto partindo do conteúdo que os alunos já conheciam, no caso Função Exponencial, para então trabalhar as Funções Logarítmicas.

Nas subseções a seguir será apresentada a maneira com que as atividades foram pensadas e elaboradas, separadas por semanas.

4.4.1 1ª semana (aulas 1-3) - Função Exponencial e sua Assíntota

Como mencionado anteriormente, a primeira etapa da atividade consiste em propor para os alunos questões que os fizessem caminhar para a definição da função logarítmica como a inversa da função exponencial. Assim sendo, as atividades propostas para esta primeira semana tem por objetivos:

- Identificar e caracterizar Funções Exponenciais crescentes e decrescentes;
- Construir o gráfico de Função Exponencial;
- Identificar a assíntota da Função Exponencial no gráfico, assim como suas translações.

4.4.1.1 Aula 1

Para a primeira aula serão propostas duas questões. Na primeira (Figura 27), o objetivo é fazer com que os alunos percebam a velocidade do crescimento de uma Função Exponencial, ou seja, que este tipo de função tem como principal característica um crescimento muito rápido.

Figura 27 – Questão 1 - Crescimento exponencial

Questão 1

Considere uma cultura de bactérias que cresce de forma exponencial em um certo meio. Em determinado momento (tempo inicial) existem 2000 bactérias e após 30 minutos a quantidade de bactérias passou para 4000. Quantas bactérias estarão presentes neste meio após 2 horas?

Fonte: Elaboração própria.

A questão número dois (Figura 28) é semelhante a apresentada anteriormente, porém mostra o rápido decrescimento da Função Exponencial.

Figura 28 – Questão 2 - Decrescimento exponencial

Questão 2

Um isótopo radioativo utilizado no tratamento de algumas doenças apresenta uma meia-vida (tempo necessário para que a massa se reduza à metade da quantidade apresentada inicialmente) de 3 horas. Se um técnico utilizar uma massa de 50 g no tratamento de um paciente, após quantas horas a massa seria reduzida para 6,25 g?

Fonte: Elaboração própria.

4.4.1.2 Aula 2

Nesta aula será apresentada a questão 3 (Figura 29) que tem por objetivo introduzir o conceito de assíntota, por meio de aproximações. Aqui é esperado que o aluno observe que quanto menor o valor de x, mais próximo de zero estará o resultado.

Figura 29 – Questão 3 - Assíntota

Questão 3

Dada a função $f(x) = 4^x$, Complete a tabela a seguir com os valores descritos abaixo:

x	$f(x)$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	
-4	

Com base na tabela que você completou, responda:

a) Quanto maior o valor de x, o que acontece com os resultados encontrados?

b) Quanto menor o valor de x o que acontece com os resultados encontrados? Se aproxima de qual valor?

c) Você acha que é possível encontrar zero como resultado? Justifique.

Fonte: Elaboração própria.

Após os alunos resolverem esta questão, será apresentada a definição de assíntota no quadro

4.4.1.3 Aula 3

Na aula 3 serão apresentadas por meio do software *GeoGebra*, várias funções exponenciais de mesma base, diferindo entre elas apenas o parâmetro, podendo ser maior ou menor, positivo ou negativo.

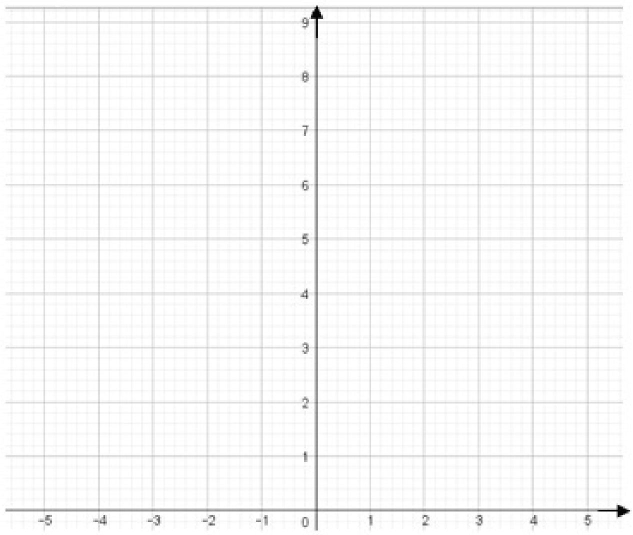
Após a vizualização no software, os alunos farão a quarta questão (Figura 30), que também traz o conceito de assíntota, porém desta vez a mesma aparece transladada. Com isso, espera-se que o aluno perceba que a assíntota pode subir ou descer graficamente, de acordo com a função dada.

Figura 30 – Questão 4 - Traslações das funções e suas assíntotas

Questão 4

Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + 2^x$

x	$f(x)$
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	
-4	



Analisando o gráfico feito, responda:

a) Quanto menor o valor de x o que acontece com os resultados encontrados?

b) Existe assíntota nesse gráfico? Se sim, onde está localizada?

c) Como você pôde perceber isso?

Fonte: Elaboração própria.

4.4.2 2ª semana (aulas 4-5) - Definição de Logaritmo e Função Logarítmica

As atividades propostas para a segunda semana tem por objetivos:

- Identificar a presença da assíntota dentro de uma situação problema;
- Definir a Função Logarítmica como a inversa da Função Exponencial;
- Formalizar a definição de logaritmo;
- Resolver com os alunos alguns exemplos utilizando a definição de logaritmo.

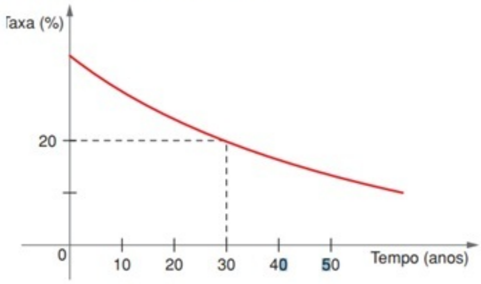
4.4.2.1 Aula 4

A questão 5 (Figura 31) tem por objetivo fazer com que os alunos percebam a assíntota graficamente, mesmo que ela não esteja demarcada no gráfico. Neste caso, que a taxa de analfabetismo se aproxima de 10% mas nunca será igual.

Figura 31 – Questão 5 - Função Exponencial composta e transladada

Questão 5

(UNI-RIO/Ence-RJ-2009-Adaptada) Conforme os dados obtidos pelo IBGE, relativos às taxas percentual de analfabetismo da população brasileira da faixa etária de 15 anos ou mais, a partir do ano de 1960 (tempo zero) foi possível ajustar uma curva de equação $y = 30.k^x + 10$, $k > 0$ e x o tempo em anos, representada a seguir:



a) Determine o valor de k.

b) Determine as taxas relativas aos anos de 1960 e 2020.

c) De acordo com o gráfico acima, a taxa de analfabetismo nunca será inferior a quanto?

Fonte: UNI-RIO/Ence-RJ, 2009. Adaptado pela Pesquisadora.

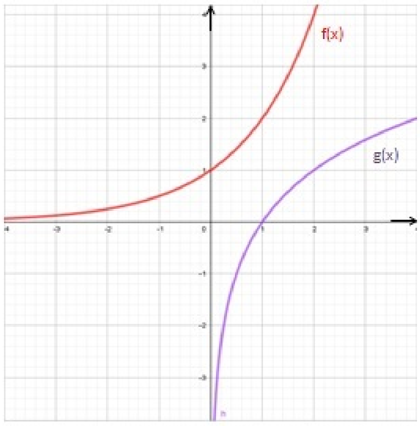
4.4.2.2 Aulas 5

A questão 6 (Figura 32) objetiva definir a Função Logarítmica como a inversa da Função Exponencial. Para isso é esperado que o aluno perceba que a Função Exponencial tem como característica assíntotas horizontais, logo sua inversa possui assíntotas verticais.

Figura 32 – Questão 6 - Funções Exponencial x Logarítmica

Questão 6

Observe os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)* mostrados abaixo e responda o que se pede:



a) Qual desses gráficos representa uma função exponencial? Justifique.

b) O gráfico da função *f(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?

c) O gráfico da função *g(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?

d) Você considera que os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)* são parecidos? O que há de diferente entre eles?

Fonte: Elaboração própria.

Após esta questão serão formalizados com os alunos as definições, propriedades e demonstrações de logaritmo. A seguir, serão apresentadas as definições e as propriedades com suas devidas demonstrações conforme mostrado no capítulo 2.

Dada a definição e apresentados alguns exemplos simples, será solicitado que os alunos façam alguns exercícios, parecidos com os exemplos dados, de forma a fixar o conteúdo.

No material entregue nessa aula para os alunos, também serão dadas as definições de logaritmo decimal e logaritmo natural.

4.4.3 3ª semana (aula 6) - Propriedades Operatórias dos Logaritmos

Os objetivos a serem alcançados na terceira semana são:

- Apresentar as consequências da definição de logaritmo;
- Construir as demonstrações das propriedades de logaritmos junto com os alunos;
- Resolver exemplos utilizando as propriedades de logaritmo.

4.4.3.1 Aula 6

A partir da definição é possível apresentar algumas propriedades que auxiliarão no desenvolvimento de algumas situações envolvendo logaritmo, conforme apresentado no capítulo 2.

Depois de apresentar as consequências da definição, serão demonstradas as propriedades operatórias dos logaritmos.

Posteriormente às demonstrações devidamente construídas juntamente com os alunos, serão feitos alguns exemplos utilizando as propriedades operatórias de logaritmo.

4.4.4 4ª semana (aulas 7-8) - Quando usar Logaritmos?

Os objetivos a serem alcançados na terceira semana são:

- Perceber quando utilizar o logaritmo se faz um recurso necessário;
- Argumentar sobre as restrições impostas na definição de logaritmo.

4.4.4.1 Aula 7

Abordadas as definições e propriedades de logaritmo, a questão 7 (Figura 33) tem por objetivo mostrar aos alunos quando o uso do logarítmo se faz um importante recurso na resolução de problemas. Assim, esta questão é proposta com a intenção de que os alunos não consigam resolver, já que a solução envolve equação exponencial de bases diferentes.

Figura 33 – Questão 7 - Juros compostos

Questão 7

Uma pessoa aplica R$1000,00 em um fundo de investimentos que rende em média, 2% ao mês. Em quantos meses essa pessoa terá no mínimo R$1300,00?

Sugestão: Utilize a fórmula de juros compostos

$$M = C.(1+i)^t$$

Em que:
M: montante
C: capital
t: tempo de aplicação
i: taxa

Fonte: Elaboração própria.

4.4.4.2 Aula 8

O objetivo da questão 8 (Figura 34) é fazer com que o aluno pense, questione e justifique as restrições impostas na definição de logaritmo relacionadas ao logaritmo e a base.

Figura 34 – Questão 8 - Definição de logaritmo

Questão 8

(VELOSO-2014) A definição de *logaritmo* é a seguinte: Dados a e b números reais, $a > 0$ e $0 < b \neq 1$, o logaritmo de a na base b ($\log_b a$) é o único expoente x ao qual devemos elevar b para obter a, ou seja,

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Justifique as restrições impostas a a e b na definição de logaritmo acima.

Fonte: (VELOSO, 2014), p.52.

4.4.5 5ª semana (aulas 9-10) - Gráfico da Função Logarítmica

A quinta semana de aula tem por objetivos:

- Identificar uma função logarítmica a partir de uma situação problema;
- Construir o gráfico da função logarítmica;
- Iniciar a segunda etapa das atividades: Questões Interdisciplinares. Nesta semana serão abordados os temas das disciplinas de:
  - Física;
  - Química;
  - Geografia.

4.4.5.1 Aula 9

A nona questão (Figura 35) tem por objetivo fazer com que o aluno defina uma função logarítmica, tanto graficamente quanto algebricamente.

Figura 35 – Questão 9 - Gráfico da função logarítmica

Questão 9

(PAIVA-2013) Em um certo país, cuja unidade monetária é o denário (D$) a inflação é de 100% ao ano, ou seja, os preços médios dos produtos aumentam em 100% ao ano.

a) Calcule os preços médios (em D$) de um produto correspondente aos anos : 0,1,2,3,y, sabendo que o preço médio atual (tempo zero) é de D$1,00. Em seguida, construa uma tabela para registrar o tempo (em ano) e o preço médio (em D$) obtido.

Tempo (ano)	*Preço (D$)*
0	
1	
2	
3	
y	

b)Indicando por *x* o preço, em denário, desse produto daqui a *y* anos, obtenha uma equação que expresse y em função de x.

c) Construa o gráfico da função do item b.

Fonte: (PAIVA, 2013), p. 242.

O objetivo da questão 10 (Figura 36) é que o aluno trabalhe, a partir da situação proposta, as definições e propriedades de logaritmo vistas nessa etapa da atividade.

Figura 36 – Questão 10 - Resfriamento

Questão 10

(Udesc-2008-Adaptada) Uma peça está quente a 200°C, quando é colocada em um amplo ambiente a 20°C. A partir desse instante, a sua temperatura *T* decresce, obedecendo à equação $T = 20 + 180\left(\frac{4}{5}\right)^t$, em que *t* significa o tempo decorrido em minutos. Pergunta-se:

a) Qual a temperatura depois de decorridos 3 minutos?

b) Qual o instante em que T atinge 29°C? Use $\log 2 = 0{,}301$.

Fonte: UDESC, 2008. Adaptado pela Pesquisadora.

4.4.5.2 Aula 10

A segunda etapa das atividades consiste em apresentar problemas que dialogue com diferentes áreas do conhecimento, de forma a propor uma interdisciplinaridade ao trabalho.

O primeiro problema (Figura 37) escolhido traz conceitos ligados aos conteúdos da disciplina de Química e ao conceito de meia-vida. Neste problema o objetivo é que o aluno utilize o conceito de crescimento exponencial.

Figura 37 – Problema 1 - Meia-vida

1) **(Enem/2013-Adaptada)** A Glicose marcada com nuclídeos de carbono-11 é utilizada na medicina para se obter imagens tridimensionais do cérebro, por meio de tomografia de emissão de pósitrons. A desintegração do carbono-11 gera um pósitron, com tempo de meia-vida de 20,4 minutos, de acordo com a equação da reação nuclear:

$$^{11}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$$

(pósitron)

A partir da injeção de glicose marcada com esse nuclídeo, o tempo de aquisição de uma imagem de tomografia é de cinco meias-vidas.

Considerando que o medicamento contém 1000mg do carbono-11, qual será a massa aproximada (em miligramas), do nuclídeo restante após a aquisição da imagem?

Fonte: Enem, 2013. Adaptado pela Pesquisadora.

Quando se trata de logaritmo e funções logarítmicas, umas das principais aplicações são as escalas (Richter, Decibel, de PH, etc).

O problema número 2 (Figura 38) se relaciona com a disciplina de Geografia, abordando escala Richter e a magnitude de um terremoto. Neste problema a fórmula da magnitude de um terremoto já é apresentada , então o aluno deve apenas utilizar as propriedades de logaritmo já vistas anteriormente.

Figura 38 – Problema 2 - Magnitude de um terremoto

2) [1]A escala mais conhecida para determinar qual a intensidade de um terremoto é a escala Richter, que foi desenvolvida por Charles F. Richter em 1935, no Instituto de Tecnologia da Califórnia, a partir do estudo de cerca de 200 terremotos ao ano. Veja, na tabela a seguir, quais os efeitos gerados por um terremoto, de acordo com seu valor na escala Richter:

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

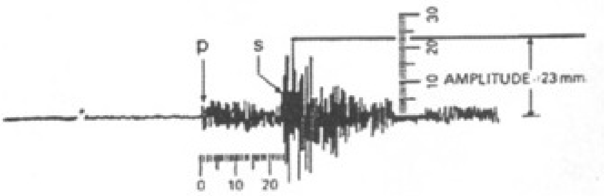
A fórmula desenvolvida por Richter é a seguinte:

$$M = \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10}(8 \cdot \Delta t) - 2{,}92$$

Em que:

- M é a magnitude do terremoto;
- A é a amplitude (em milímetros) medida com um sismógrafo;
- Δt é o intervalo de tempo (em segundos) entre a onda superficial (S) e a onda de pressão máxima (P).

Observe o gráfico obtido através de um sismógrafo de uma estação localizada no sul da Califórnia.



Gentil, N.; Greco, S.E.; Marcondes, C.A. (2000). Matemática – Série Novo Ensino Médio. São Paulo: Atica. 3ª edição.

Sabendo que o papel de um sismógrafo 'anda' a 1 mm/s e que no gráfico acima a distância entre as ondas P e S é de 24mm, calcule a magnitude desse terremoto e verifique quais os efeitos gerados por ele.

Use: $\log 2 = 0{,}301$; $\log 3 = 0{,}477$; $\log 23 = 1{,}362$

[1] http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm. Adaptado pela Pesquisadora.

4.4.6 6ª semana (aulas 11-12) - Logaritmos em sua Abordagem Interdisciplinar

A última semana tem por objetivo:

- Trabalhar os logaritmos de forma interdisciplinar. Nesta semana, os problemas envolvem os temas das seguintes disciplinas:

- Matemática Financeira;
- Biologia;
- Geografia;
- Química.

4.4.7 Aula 11

No problema 3 (Figura 39), os alunos irão utilizar o logaritmo para resolver uma situação que envolve juros compostos, conteúdo da própria discplina de Matemática, na área da Matemática Financeira.

Figura 39 – Problema 3 - Juros compostos

3) (IFPE-2012) Nas aplicações financeiras feitas nos bancos são utilizados os juros compostos. A expressão para o cálculo é:

$$C_F = C_0(1+i)^T ,$$

em que C_F é o montante, C_0 é o capital, i é a taxa e T o tempo da aplicação. Como C_F depende de T, conhecidos C_0 e i, temos uma aplicação do estudo de função exponencial. Um professor, ao deixar de trabalhar em uma instituição de ensino, recebeu uma indenização no valor de R$ 20.000,00. Ele fez uma aplicação financeira a uma taxa mensal (i) de 8%. Após T meses, esse professor recebeu um montante de R$ 43.200,00. Qual foi o tempo T que o dinheiro ficou aplicado?

Obs.: Use $\log(1{,}08) = 0{,}03$ e $\log(2{,}16) = 0{,}33$.

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Fonte: IFPE, 2012.

No problema 4 (Figura 40) o objetivo é que o aluno trabalhe o logaritmo com a base diferente de 10. Neste problema há conceitos ligados a Biologia, relacionado a reprodução de bactérias.

Figura 40 – Problema 4 - Crescimento de bactérias

4) (UFRN-2009) Numa experiência realizada em laboratório, Alice constatou que, dentro de *t* horas, a população *P* de determinada bactéria crescia segundo a função:

$$P(t) = 25 \cdot 2^t$$

Nessa experiência, sabendo-se que $\log_2 5 \approx 2{,}32$, a população atingiu 625 bactérias em, aproximadamente:

A)4 horas e 43 minutos.
B)5 horas e 23 minutos.
C)4 horas e 38 minutos.
D)5 horas e 4 minutos.

Fonte: UFRN, 2009.

4.4.8 Aula 12

O problema 5 (Figura 41), semelhante ao problema 2, também trata sobre magnitude do terremoto. Neste, ao invés de determinar a magnitude do terremoto o aluno deverá descobrir a ordem de grandeza da energia liberada por este terremoto.

Figura 41 – Problema 5 - Energia liberada por um terremoto

5) (UPE - 2012) Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando *tsunamis*. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência.

Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na escala Richter?

A) 10^{14} joules.
B) 10^{16} joules.
C) 10^{17} joules.
D) 10^{18} joules.
E) 10^{19} joules

Fonte: UPE, 2012.

No problema 6 (Figura 42) é apresentado ao aluno um outro tipo de escala, que etá relacionada aos conteúdos de Química, a escala de pH (potencial Hidrogeniônico). Neste problema, além de utilizar a definição e propriedades de logaritmo, o aluno deverá classificar se a solução tratada no problema é ácida, neutra ou básica (ou alcalina).

Figura 42 – Problema 6 - pH das soluções

6) (UFMG-2001 - Adaptada) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão:

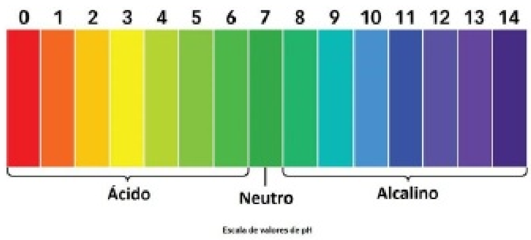
$$pH = -\log [H^+],$$

em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/L.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3. Com isso, responda:

a) Qual o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução?

b) A escala de pH é uma escala de valores e serve para determinar o grau de acidez ou de basicidade de uma dada substância. Essa escala varia entre 0 e 14, sendo o valor médio, o sete, correspondente a soluções neutras. Para valores superiores a 7 as soluções são consideradas básicas, e para valores inferiores a 7, serão ácidas.



Fonte: https://www.acquanativa.com.br/aplicacoes/medidor-de-ph.html

Com essas informações, classifique a solução aquosa do item anterior.

Fonte: UFMG, 2001. Adaptado pela Pesquisadora.

Capítulo 5

Relato de Experiência e Interpretação das Evidências Coletadas

A aplicação das atividades foi realizada no Colégio Estadual Jornalista Álvaro Bastos, no município de Macaé/RJ, com duas turmas do segundo ano do Ensino Médio.

Foram necessários 12 encontros de 1 hora e 40 minutos cada (totalizando 20 horas) para finalizar todas as etapas das atividades em cada uma das duas turmas relatadas.

As turmas A e B, sujeitos desta pesquisa, possuem aulas de Matemática com a professora pesquisadora nos dias de quintas e sextas-feiras, sempre nesta ordem, primeiro e segundo horários, turma A e, terceiro e quarto horários, turma B.

5.1 1ª semana (aulas 1-3)

Esta seção relata a primeira semana de aplicação das atividades.

5.1.1 Aula 1

Inicialmente foi explicado aos alunos que eles estavam participando de um projeto de pesquisa e que a participação deles seria de extrema importância. Além disso foi entregue para cada aluno uma autorização (APÊNDICE A.2), nela era solicitado que apresentassem aos responsáveis de forma que os mesmos os autorizassem a participar da pesquisa.

Foi explicada a dinâmica da metodologia que seria utilizada em todas as etapas das atividades, a professora/pesquisadora destacou que o importante não era acertar as questões e sim participar e contribuir com diferentes raciocínios.

Feito isso os alunos se dividiram em grupos de 3 ou 4 alunos (Figura 43) e foi distribuída para os mesmos a questão 1.

Figura 43 – Grupos 1, 2 e 3 trabalhando na questão 1 - Turma B

Fonte: Protocolo de pesquisa.

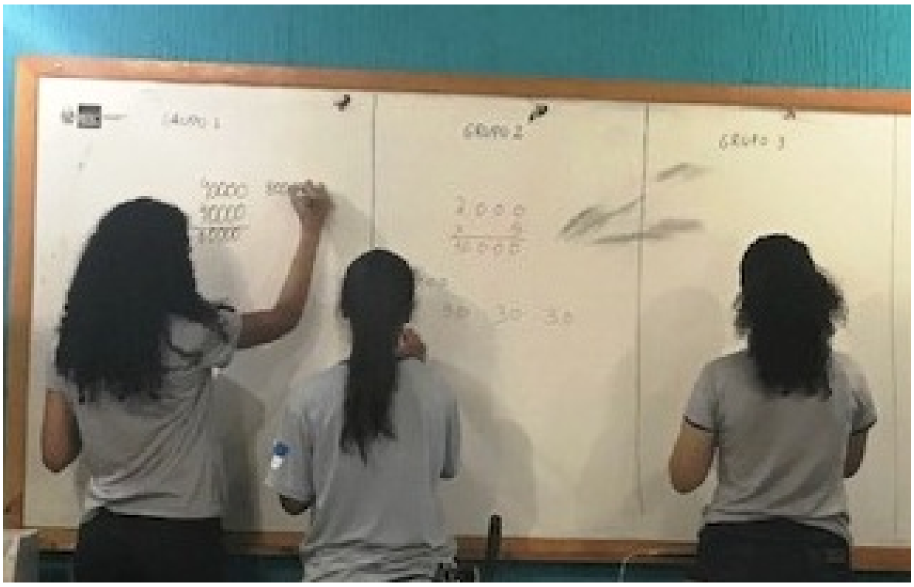
Foi possível perceber a dificuldade na leitura e interpretação dos alunos, principalmente nesse momento inicial. Assim, em ambas as turmas, eles pediram ajuda a professora e a mesma sugeriu que lessem novamente o enunciado. Ao deixar os alunos trabalharem, foi possível observar que eles promoveram a leitura em grupo e com isso começaram a esboçar rascunhos na questão.

Quando os alunos solicitavam ajuda da professora, dizendo não conseguir fazer e que já haviam lido e relido o problema, a professora perguntava aos mesmos "Quantas bactérias existem inicialmente?"; "O que aconteceu após 30 minutos?"; "O que aconteceu com a quantidade de bactérias inicial para a quantidade após 30 minutos?"

A autora Onuchic destaca que o professor deve agir enquanto observa o trabalho dos alunos, "incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e a trocarem ideias. O professor auxilia nas dificuldades dos alunos sem fornecer as respostas, demonstrando confiança nas condições dos alunos". (ONUCHIC et al., 2014, p. 45)

Quando os alunos finalizaram a questão 1, representantes dos grupos foram solicitados a fazer os registros das soluções no quadro (Figura 44) para que em seguida, cada grupo pudesse defender seu ponto de vista, comparar e discutir as diferentes soluções.

Figura 44 – Representantes da turma A, dos grupos 1, 2 e 3, registrando suas soluções no quadro

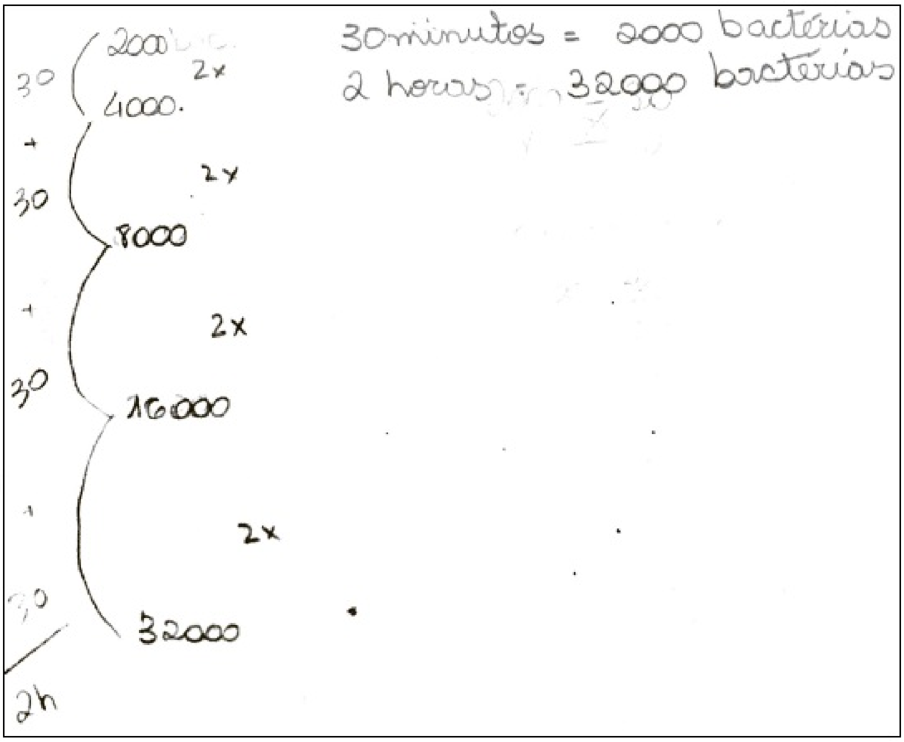


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Inicialmente, foi possível perceber que os alunos ficaram envergonhados em defender seus pontos de vista durante a *plenária*, mas a professora novamente destacou que o importante nesse processo não é estar certo, e sim, refletir sobre os diferentes pontos de vista. Sobre esse momento, Onuchic et al. (2014, p. 46) destacam que "esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo".

Após a reflexão feita pela professora, os alunos se entusiasmaram em defender suas resoluções (Figura 45).

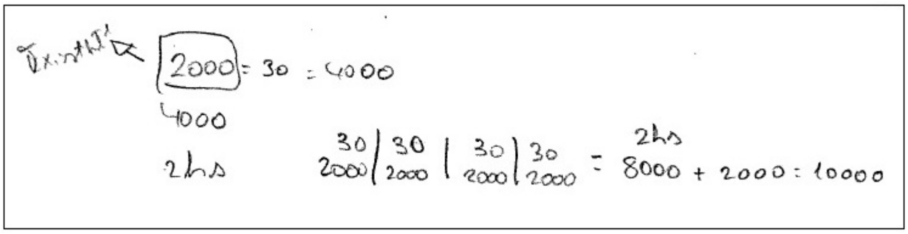
Figura 45 – Questão 1 - Resposta correta do grupo 2 - Turma A



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Alguns grupos acharam que o crescimento seria constante (Figura 46), sempre somando 2000 bactérias para obter a resposta. Porém, a maioria dos grupos entendeu que a cada 30 minutos o valor dobrava.

Figura 46 – Questão 1 - Resposta grupo 4, turma B, que considerou o crescimento constante



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida foi feita a formalização da questão com os alunos no quadro, de forma a registrar a resposta correta.

Ao distribuir a questão 2, foi possível perceber que os alunos já haviam entendido melhor o funcionamento da metodologia, pois já iniciaram a leitura com mais concentração e solicitaram menos a ajuda da professora.

Como esta questão é semelhante à questão vista anteriormente, a maioria dos grupos conseguiu resolver sem grandes dificuldades. Um grupo que havia respondido de forma incorreta, percebeu o erro antes da *plenária* e concertou.

Chegando próximo ao final da aula os alunos começaram a ficar mais agitados, pediram que a professora fizesse logo a plenária. Porém, ainda havia um grupo para finalizar e como havia tempo, a professora decidiu não interromper o raciocínio do grupo e os aguardou finalizar.

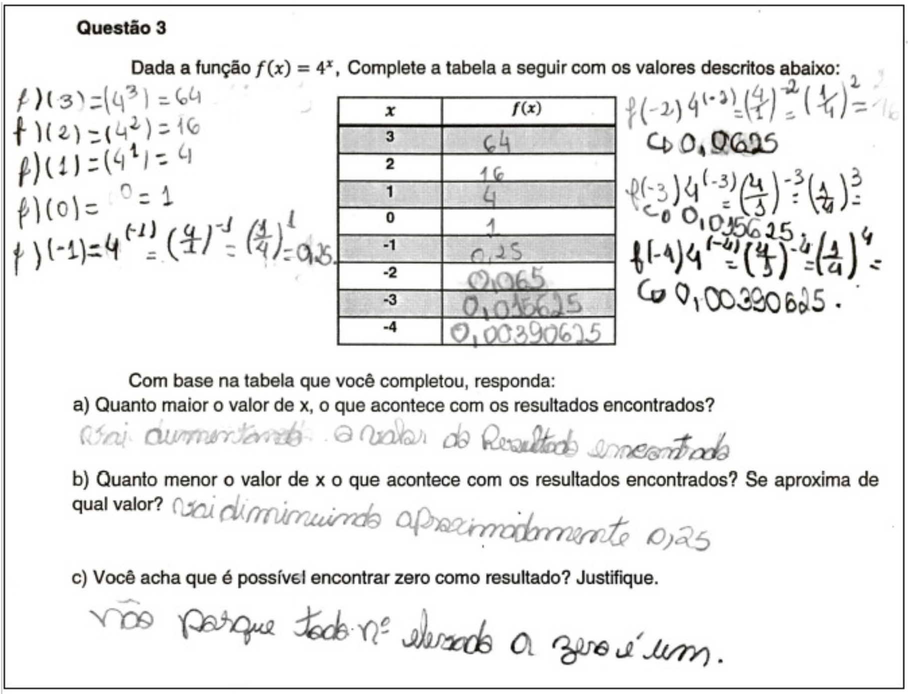
Quando todos os alunos já haviam finalizado a questão 2, foram feitas as últimas etapas da metodologia sem dificuldades.

5.1.2 Aula 2

Nessa segunda aula houve a necessidade de juntar as duas turmas em uma única sala, devido à falta de um professor da turma B neste dia.

Inicialmente, foi distribuído para os alunos a questão 3 (Figura 47) e foi possível perceber que os alunos trabalharam de maneira mais intuitiva. Não solicitaram muito o auxílio da professora.

Figura 47 – Questão 3 - Resposta correta do grupo 3 - Turma B



Questão 3

Dada a função $f(x) = 4^x$, Complete a tabela a seguir com os valores descritos abaixo:

f)(3)=(4³)=64
f)(2)=(4²)=16
f)(1)=(4¹)=4
f)(0)= ⁰=1
f)(-1)=4^(-1)=(4/1)^-1=(1/4)^1=0,25

x	$f(x)$
3	64
2	16
1	4
0	1
-1	0,25
-2	0,065
-3	0,015625
-4	0,00390625

f(-2) 4^(-2)=(4/1)^-2=(1/4)^2=16
→ 0,0625
f(-3) 4^(-3)=(4/1)^-3=(1/4)^3=
→ 0,015625
f(-4) 4^(-4)=(4/1)^-4=(1/4)^4=
→ 0,00390625.

Com base na tabela que você completou, responda:

a) Quanto maior o valor de x, o que acontece com os resultados encontrados?
vai aumentando o valor do resultado encontrado

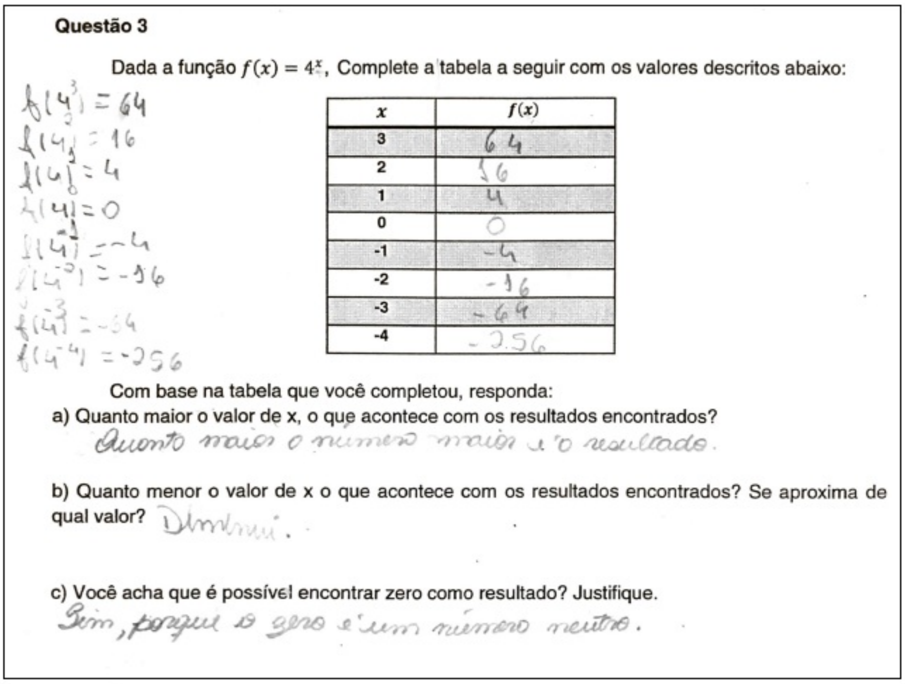
b) Quanto menor o valor de x o que acontece com os resultados encontrados? Se aproxima de qual valor? vai diminuindo aproximadamente 0,25

c) Você acha que é possível encontrar zero como resultado? Justifique.
não porque todo nº elevado a zero é um.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apenas um grupo demonstrou dificuldade em resolver as potências de expoente negativo (Figura 48) e com isso não conseguiu concluir a questão de maneira satisfatória.

Figura 48 – Questão 3 - Resposta do grupo 5, turma A, que não conseguiu resolver as potências de expoente negativo



Questão 3

Dada a função $f(x) = 4^x$, Complete a tabela a seguir com os valores descritos abaixo:

$f(4^3) = 64$
$f(4^2) = 16$
$f(4^1) = 4$
$f(4) = 0$
$f(4^{-1}) = -4$
$f(4^{-2}) = -16$
$f(4^{-3}) = -64$
$f(4^{-4}) = -256$

x	$f(x)$
3	64
2	16
1	4
0	0
-1	-4
-2	-16
-3	-64
-4	-256

Com base na tabela que você completou, responda:

a) Quanto maior o valor de x, o que acontece com os resultados encontrados?

Quanto maior o número maior é o resultado.

b) Quanto menor o valor de x o que acontece com os resultados encontrados? Se aproxima de qual valor? Diminui.

c) Você acha que é possível encontrar zero como resultado? Justifique.

Sim, porque o zero é um número neutro.

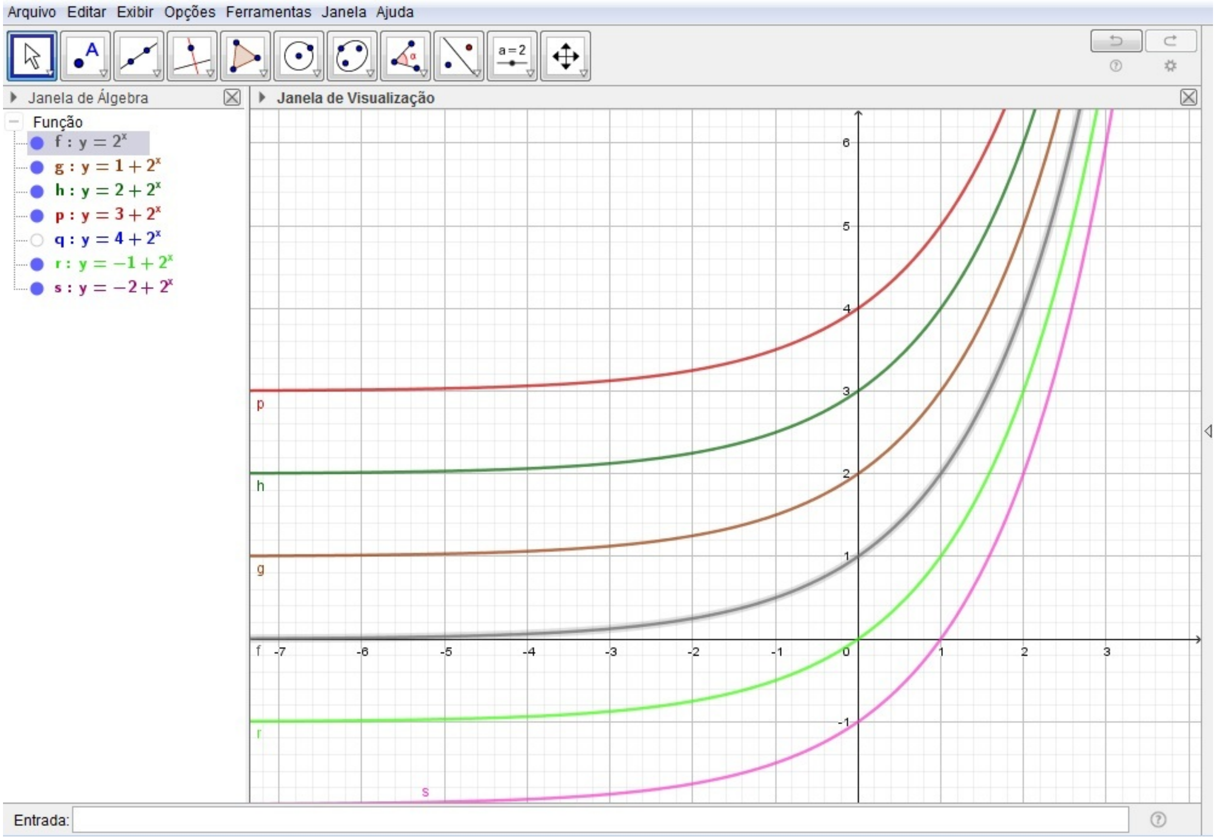
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao finalizar a etapa da *plenária* foi definido o conceito de assíntota, sendo este exemplificado e visualizado por meio da Questão 3.

5.1.3 Aula 3

Na aula anterior o conceito de assíntota já havia sido definido, então a professora mostrou aos alunos algumas das possíveis translações das assíntotas por meio do software GeoGebra. Neste momento, foi mostrado inicialmente apenas a função $y = 2^x$ e depois a função $y = 1 + 2^x$ e, assim, a professora perguntou aos alunos "o que aconteceu com o gráfico?". Após esse gráfico, foram mostrados alguns outros, como na Figura 49, e, com isso os alunos foram percebendo quando o gráfico da função $y = 2^x$ iria transladar para cima ou para baixo.

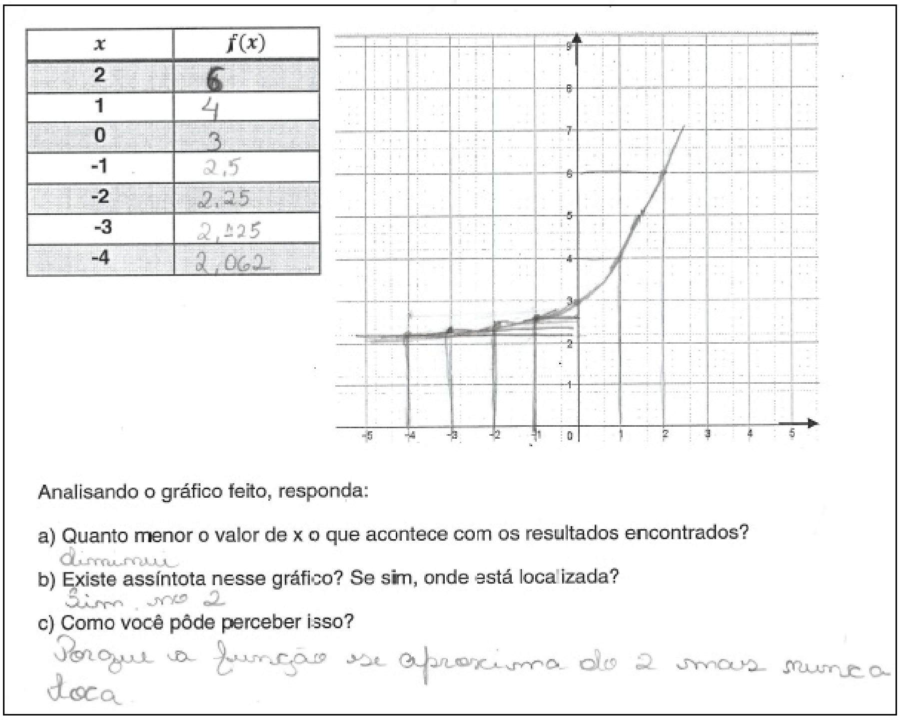
Figura 49 – Translações das assíntotas utilizando o software GeoGebra



Fonte: Elaboração própria.

Assim, ao dar início a questão 4 (Figura 50) foi possível notar que os grupos não apresentaram dificuldades em resolver esta questão.

Figura 50 – Questão 4 - Resposta correta de um dos grupos



x	$f(x)$
2	6
1	4
0	3
-1	2,5
-2	2,25
-3	2,125
-4	2,062

Analisando o gráfico feito, responda:

a) Quanto menor o valor de x o que acontece com os resultados encontrados?
diminui
b) Existe assíntota nesse gráfico? Se sim, onde está localizada?
Sim, no 2
c) Como você pôde perceber isso?
Porque a função se aproxima do 2 mas nunca toca

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final desta aula, foi possível perceber que os alunos conseguiram absorver o conceito de assíntota, visto que os grupos não apresentaram dificuldades na execução da questão.

5.2 2ª semana (aulas 4-5)

Esta seção relata a segunda semana de aplicação das atividades.

5.2.1 Aula 4

Na semana seguinte, a questão 5 foi distribuída para os alunos e foi possível perceber que, novamente, eles apresentaram dificuldades na interpretação do enunciado. Com relação a isso, a autora Gil et al. (2008) afirma que:

> [...] muitas vezes as dificuldades apresentadas pelos alunos na tradução de situação da linguagem corrente para a linguagem formal residem na interpretação. Não sendo capaz de interpretar, o aluno não conseguirá representar formalmente a situação. (GIL et al., 2008, p. 4).

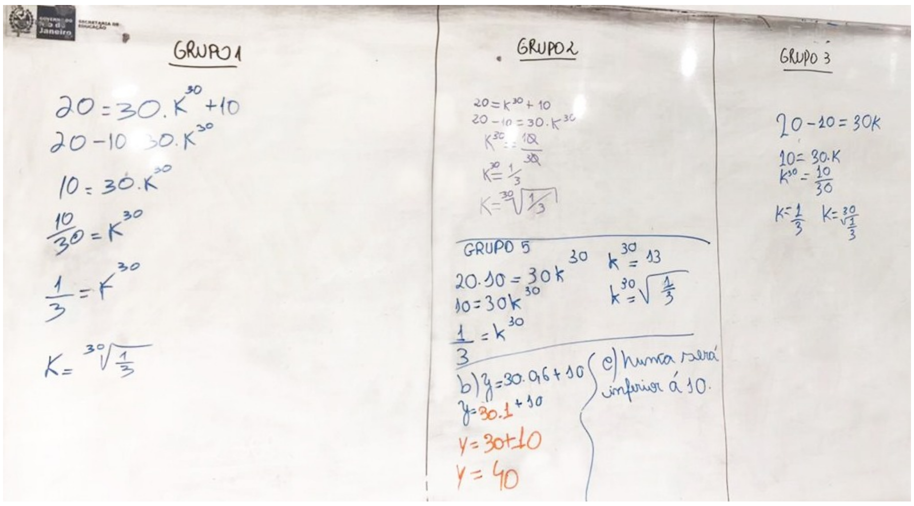
Ao iniciarem a solução do item *a*, a maioria dos alunos apresentou dificuldades em resolver a equação $k^3 = \frac{1}{3}$, neste momento a professora sugeriu que lembrassem como eles resolveriam se a equação, por exemplo, fosse $x^2 = 3$ e com isso os mesmos conseguiram prosseguir (Figura 51). A professora observou que os grupos que conseguiram finalizar primeiro a resolução deste item, ajudaram aos outros grupos que ainda não tinham entendido.

Com relação a isso o autor Huanca (2007) destaca a importância do processo de aprendizagem ser construído coletivamente:

> Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros. (HUANCA, 2007, p. 92).

No item *c* os alunos conseguiram associar a pergunta com o conceito de assíntota visto nas aulas anteriores e não tiveram dificuldades em encontrar a solução.

Figura 51 – Questão 5 - Respostas de alguns grupos da turma B no quadro



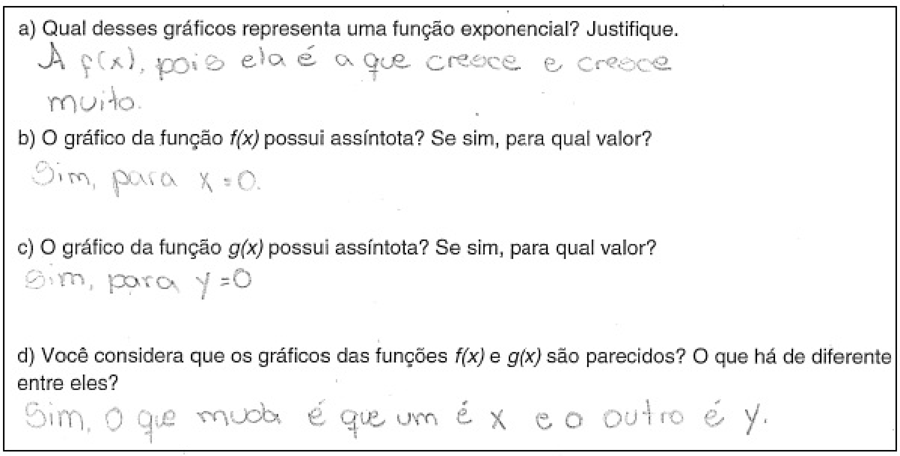
Fonte: Protocolo de pesquisa.

5.2.2 Aula 5

Nesta aula foi distribuída para os grupos a questão 6 (Figuras 52 e 53). Antes dos alunos iniciarem as resoluções foi solicitado que os mesmos construíssem em suas folhas a reta $y = x$, que seria mais adiante o eixo de simetria entre as Funções Exponencial e Logarítmica.

Foi possível perceber que os alunos não tiveram grandes dificuldades em resolver esta questão.

Figura 52 – Questão 6 - Resposta considerada satisfatória do grupo 2 - Turma A



a) Qual desses gráficos representa uma função exponencial? Justifique.

A f(x), pois ela é a que cresce e cresce muito.

b) O gráfico da função *f(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?

Sim, para x = 0.

c) O gráfico da função *g(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?

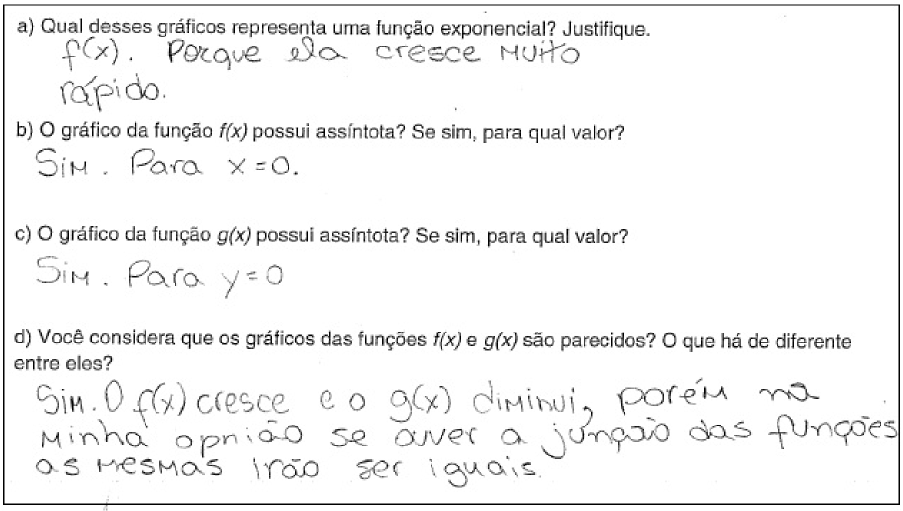
Sim, para y = 0

d) Você considera que os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)* são parecidos? O que há de diferente entre eles?

Sim, o que muda é que um é x e o outro é y.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 53 – Questão 6 - Resposta considerada satisfatória do grupo 4 - Turma B



a) Qual desses gráficos representa uma função exponencial? Justifique.

f(x). Porque ela cresce muito rápido.

b) O gráfico da função *f(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?

Sim. Para x = 0.

c) O gráfico da função *g(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?

Sim. Para y = 0

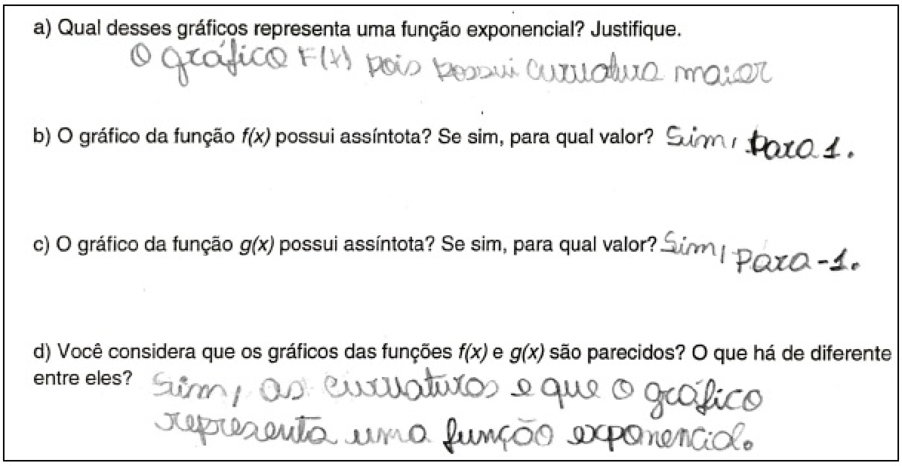
d) Você considera que os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)* são parecidos? O que há de diferente entre eles?

Sim. O f(x) cresce e o g(x) diminui, porém na minha opnião se ouver a junção das funções as mesmas irão ser iguais.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Mesmo assim, alguns grupos não concluíram a questão de maneira satisfatória (Figuras 54 e 55).

Figura 54 – Questão 6 - Resposta incorreta do grupo 5 - Turma A


a) Qual desses gráficos representa uma função exponencial? Justifique.
O gráfico F(x) pois possui curvatura maior

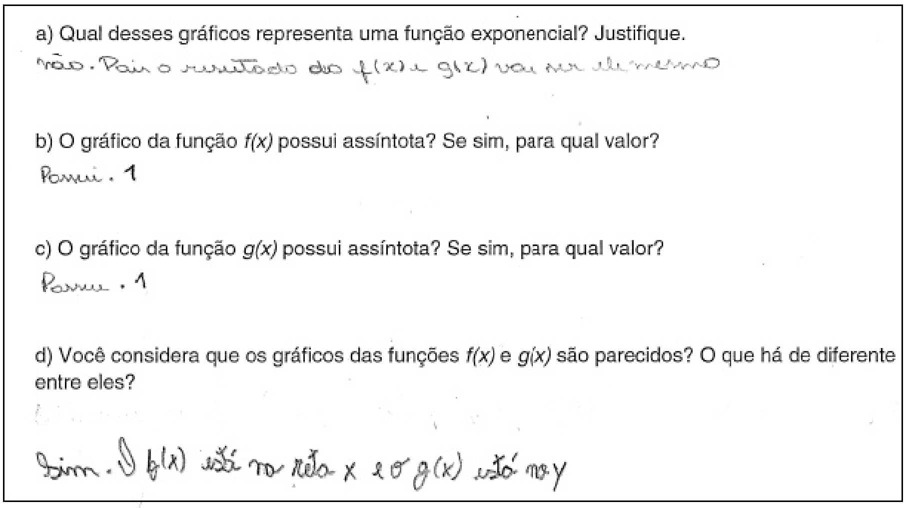
b) O gráfico da função *f(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor? Sim, para 1.

c) O gráfico da função *g(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor? Sim, para -1.

d) Você considera que os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)* são parecidos? O que há de diferente entre eles? Sim, as curvaturas e que o gráfico representa uma função exponencial.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 55 – Questão 6 - Resposta incorreta do grupo 3 - Turma B


a) Qual desses gráficos representa uma função exponencial? Justifique.
não. Pois o resultado do f(x) e g(x) vai ser o mesmo

b) O gráfico da função *f(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?
Possui. 1

c) O gráfico da função *g(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?
Possui. 1

d) Você considera que os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)* são parecidos? O que há de diferente entre eles?
Sim. O f(x) está na reta x e o g(x) está no y

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a *plenária* e a *busca do consenso*, buscando contemplar a nona etapa da metodologia segundo Onuchic et al. (2014), a *formalização do conteúdo*, foi distribuída para os alunos uma folha com as definições de logaritmo e suas propriedades, com as devidas demonstrações, conforme mostrado no capítulo anterior. Durante a formalização destes conteúdos julgou-se necessário fazer alguns exemplos com os alunos de forma que os mesmos pudessem exercitar os novos conteúdos propostos (APÊNDICE B.2).

Nesta aula não houve tempo para terminar a folha de propriedades, o que ficou para a próxima aula.

5.3 3ª semana (aulas 6)

Esta seção relata a terceira semana de aplicação das atividades.

5.3.1 Aula 6

Na aula 6, como comentado anteriormente, foi iniciada com a continuação da folha das propriedades de logaritmo. Nesta aula foram feitas, junto com os alunos, as demonstrações das propriedades operatórias dos logaritmos. Com a bagagem trazida pelas resoluções das questões anteriores, os alunos já estavam familiarizados com as propriedades de potência e, assim, conseguiram acompanhar as demonstrações sem grandes dificuldades.

Em seguida, foram feitos alguns exemplos, de forma a tornar as propriedades uma ferramenta para a solução dos próximos problemas. No último exemplo, os alunos pediram para resolver em grupos, conforme a metodologia, e a professora atendeu a solicitação dos mesmos.

Após essa aula, houve a necessidade de uma pausa de 3 semanas para o cumprimento do calendário acadêmico da escola (revisão, avaliação bimestral, recuperação e conselho de classe).

5.4 4ª semana (aulas 7-8)

Esta seção relata a quarta semana de aplicação das atividades.

5.4.1 Aula 7

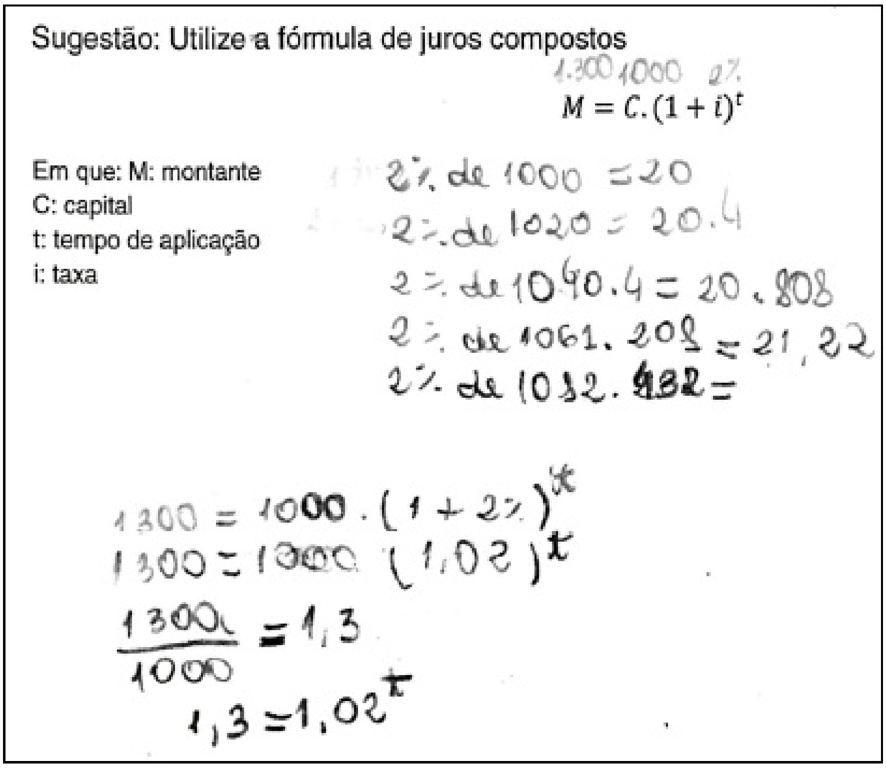
Apresentada para os alunos a Função Logarítmica como a inversa da Exponencial, o logaritmo e suas devidas propriedades, foi proposto para os alunos a questão 7. Esta questão tem por objetivo mostrar que a utilização do logaritmo é uma ferramenta necessária para resolver equações exponenciais de bases diferentes.

Como os alunos ainda não conheciam esse recurso, era esperado que os mesmos não conseguissem finalizar a questão. Esta foi uma estratégia pensada para provocar curiosidade nos alunos, e observar se os mesmos tentariam utilizar o raciocínio de função inversa.

Após os grupos iniciarem as soluções, foi percebido que alguns alunos apresentaram dificuldades em como escrever 2% na forma decimal, assim, alguns escreveram apenas 2 e outros $0,2$. Com isso, a professora sugeriu que os mesmos colocassem o número na forma de fração e, depois, dividissem o numerador pelo denominador, e assim todos os grupos conseguiram prosseguir.

Apesar do enunciado sugerir que fosse utilizada a fórmula de juros compostos, alguns alunos tentaram fazer acréscimos sucessivos de 2% após cada mês, mas no meio do caminho perceberam que daria muito trabalho e desistiram (Figura 56).

Figura 56 – Questão 7 - Resposta do grupo 1 - Turma A


Sugestão: Utilize a fórmula de juros compostos

1.300 1000 2%

$M = C.(1+i)^t$

Em que: M: montante
C: capital
t: tempo de aplicação
i: taxa

2% de 1000 = 20
2% de 1020 = 20.4
2% de 1040.4 = 20.808
2% de 1061.208 = 21,22
2% de 1082.432 =

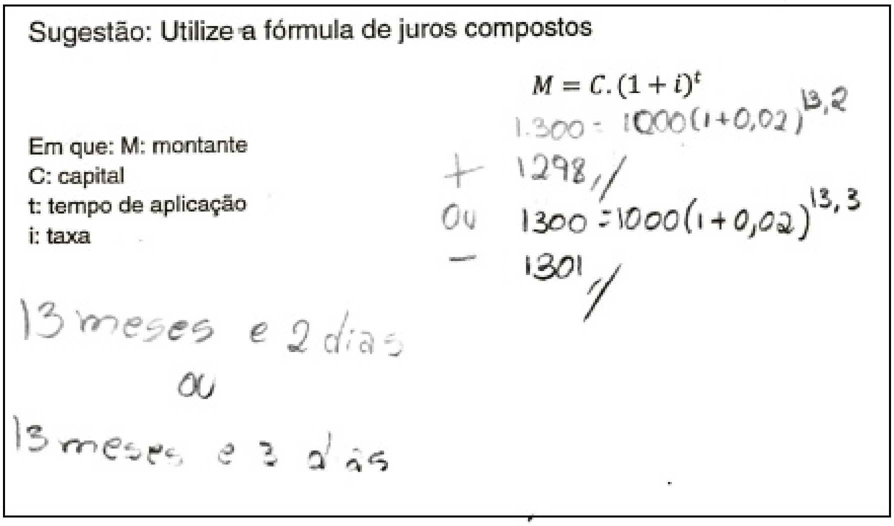
$1300 = 1000.(1+2\%)^t$
$1300 = 1000\,(1{,}02)^t$
$\frac{1300}{1000} = 1{,}3$
$1{,}3 = 1{,}02^t$

Fonte: Protocolo de pesquisa

Um dos alunos solicitou a ajuda da professora e questionou se o ganho de 20 reais não seria fixo a cada mês. Na tentativa de fazê-lo refletir, a professora perguntou ao aluno qual seria o valor após um mês do dinheiro aplicado, o mesmo respondeu 20. Assim a professora o questionou novamente, "Agora quanto dinheiro essa pessoa possui? E com isso, os 2% serão aplicados a qual valor no segundo mês?". E com isso o aluno conseguiu desenvolver a questão.

Um dos grupos utilizou a fórmula, e foi fazendo diversas tentativas de valores para o tempo, até que conseguiu uma resposta aproximada (Figura 57).

Figura 57 – Questão 7 - Resposta do grupo 4 - Turma A


Sugestão: Utilize a fórmula de juros compostos

$M = C.(1+i)^t$

Em que: M: montante
C: capital
t: tempo de aplicação
i: taxa

$1.300 = 1000(1+0,02)^{13,2}$

+ 1298

ou $1300 = 1000(1+0,02)^{13,3}$

− 1301

13 meses e 2 dias
ou
13 meses e 3 dias

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Como os alunos demoraram muito tempo na solução dessa questão, a plenária ficou para a aula seguinte.

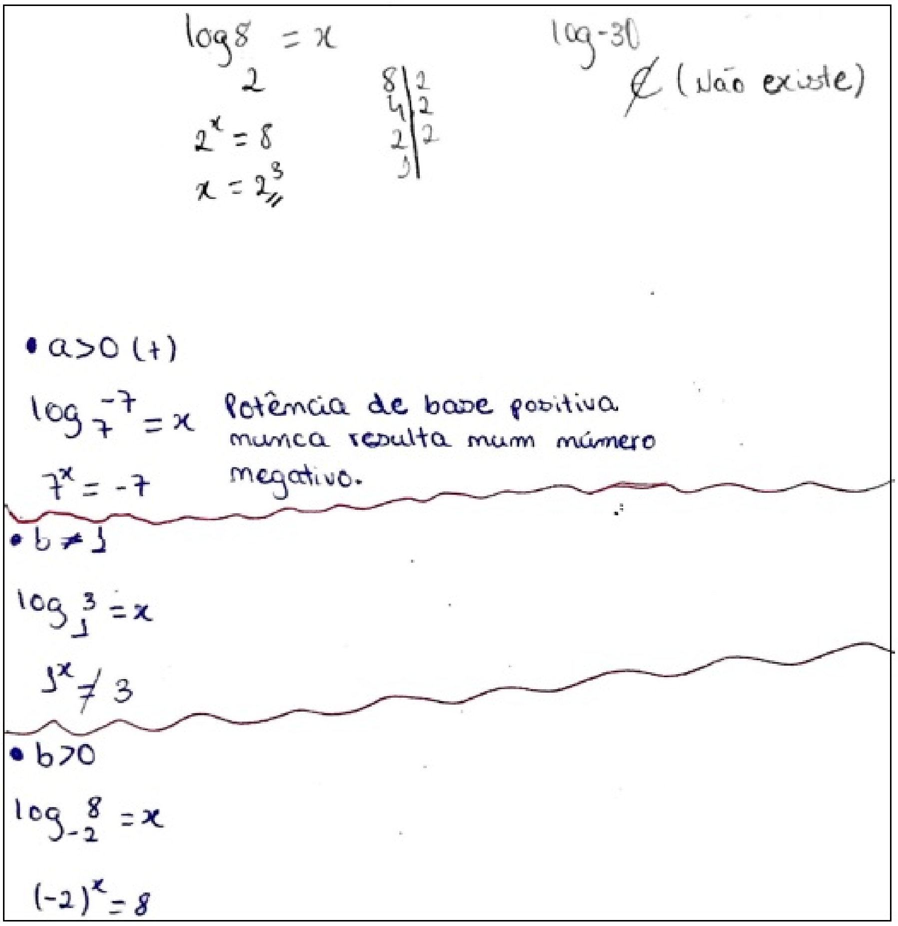
5.4.2 Aula 8

Esta aula teve início com a *plenária* da questão 7, foi devolvido aos grupos as soluções apresentadas na aula anterior, para que os mesmos as colocassem no quadro. Como era esperado quase todos os grupos não finalizaram a questão. A professora explicou para eles que era esse o objetivo, na tentativa de provocá-los e despertar a curiosidade na utilização do logaritmo em certos tipos de questão. Assim foi dada continuidade à *formalização* e à apresentação do recurso de aplicar logaritmo quando se tem equações exponenciais de bases diferentes. Os alunos relataram gostar da provocação e demonstraram entender o que foi passado.

Em seguida, foi distribuída a folha contendo a questão 8. Os alunos apresentaram muita dificuldade nessa questão, principalmente com a leitura e interpretação. A professora já esperava essa dificuldade visto que é uma leitura da parte algébrica da matemática.

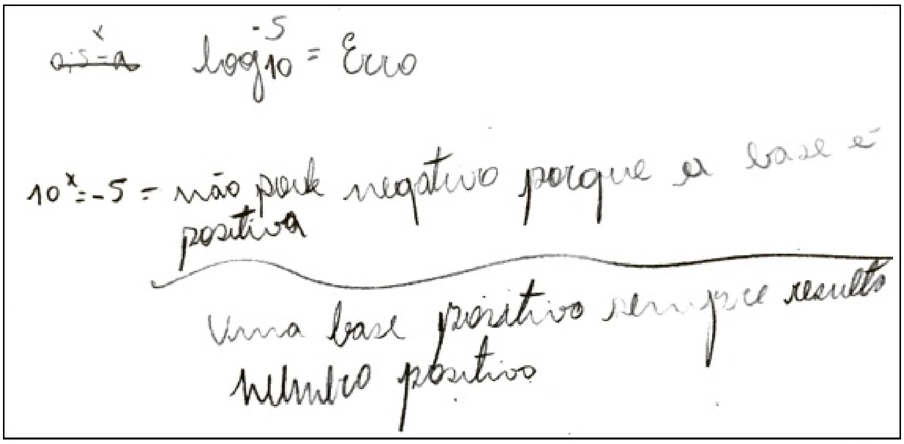
Todos os grupos solicitaram a ajuda da professora e, como todos eles estavam travados sem conseguir evoluir na questão, a professora sugeriu que os mesmos explicassem utilizando exemplos que fossem contrários as restrições impostas. Alguns grupos conseguiram concluir parcialmente, outros não. Seguem abaixo alguns exemplos das respostas dos alunos (Figuras 58, 59 e 60):

Figura 58 – Questão 8 - Resposta parcialmente satisfatória do grupo 2 - Turma B



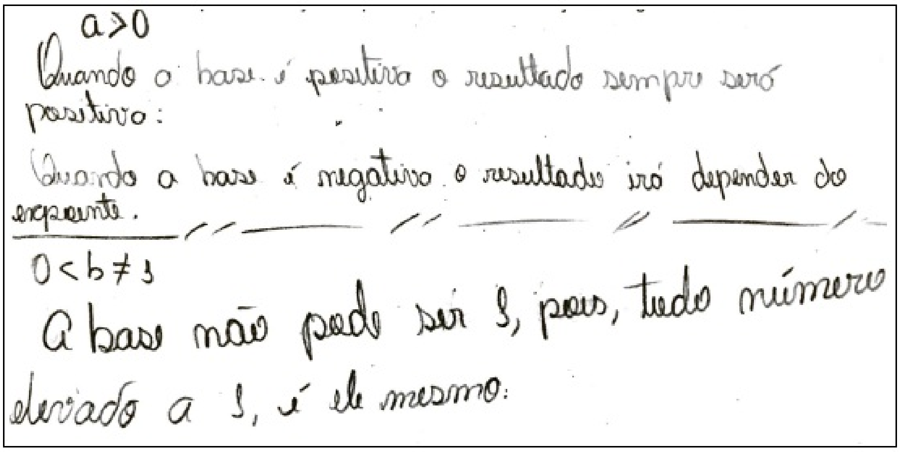
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 59 – Questão 8 - Resposta incorreta do grupo 3 - Turma B



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 60 – Questão 8 - Resposta parcialmente satisfatória do grupo 2 - Turma A


$a>0$
Quando o base é positivo o resultado sempre será positivo:
Quando a base é negativo o resultado irá depender do expoente.
$0<b\neq 1$
A base não pode ser 1, pois, todo número elevado a 1, é ele mesmo.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

5.5 5ª semana (aulas 9-10)

Esta seção relata a quinta semana de aplicação das atividades.

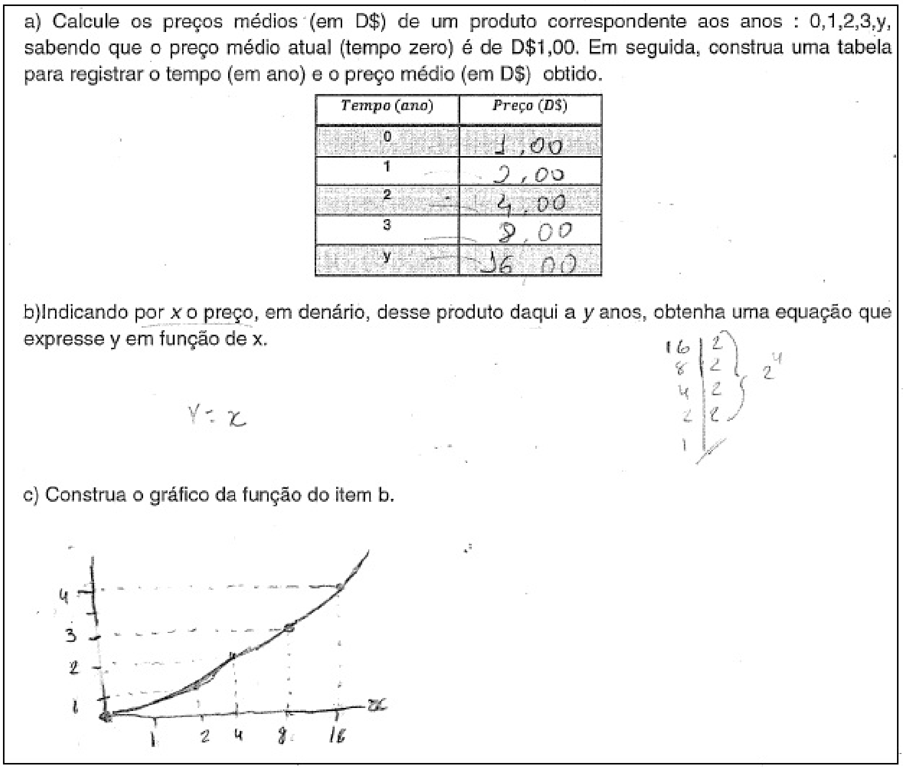
5.5.1 Aula 9

Para iniciar a aula 9, foram formados os grupos e distribuídas as folhas contendo a questão 9. Ao iniciarem a solução desta questão, a professora observou que alguns alunos demoraram a perceber que aumentar em 100% é o mesmo que dobrar.

É comum os alunos apresentarem dificuldades em interpretar problemas, segundo Dante (2010) os alunos têm dificuldades em distinguir o significado de palavras de uso corrente e seus significados matemáticos. Assim, é recomendado que o professor faça a distinção destas palavras e estimule a pesquisa de seus significados corretos.

Um dos grupos encontrou os resultados do item **a** de forma correta mas não os interpretou como números na base 2, com isso não conseguiu acertar os itens **b** e **c** (Figura 61).

Figura 61 – Questão 9 - Resposta incorreta do grupo 5 da turma A - Não colocaram as respostas na base 2



a) Calcule os preços médios (em D$) de um produto correspondente aos anos : 0,1,2,3,y, sabendo que o preço médio atual (tempo zero) é de D$1,00. Em seguida, construa uma tabela para registrar o tempo (em ano) e o preço médio (em D$) obtido.

Tempo (ano)	*Preço (D$)*
0	1,00
1	2,00
2	4,00
3	8,00
y	16,00

b)Indicando por *x* o preço, em denário, desse produto daqui a *y* anos, obtenha uma equação que expresse y em função de x.

Y = x

16 | 2
8 | 2
4 | 2
2 | 2
1

2^4

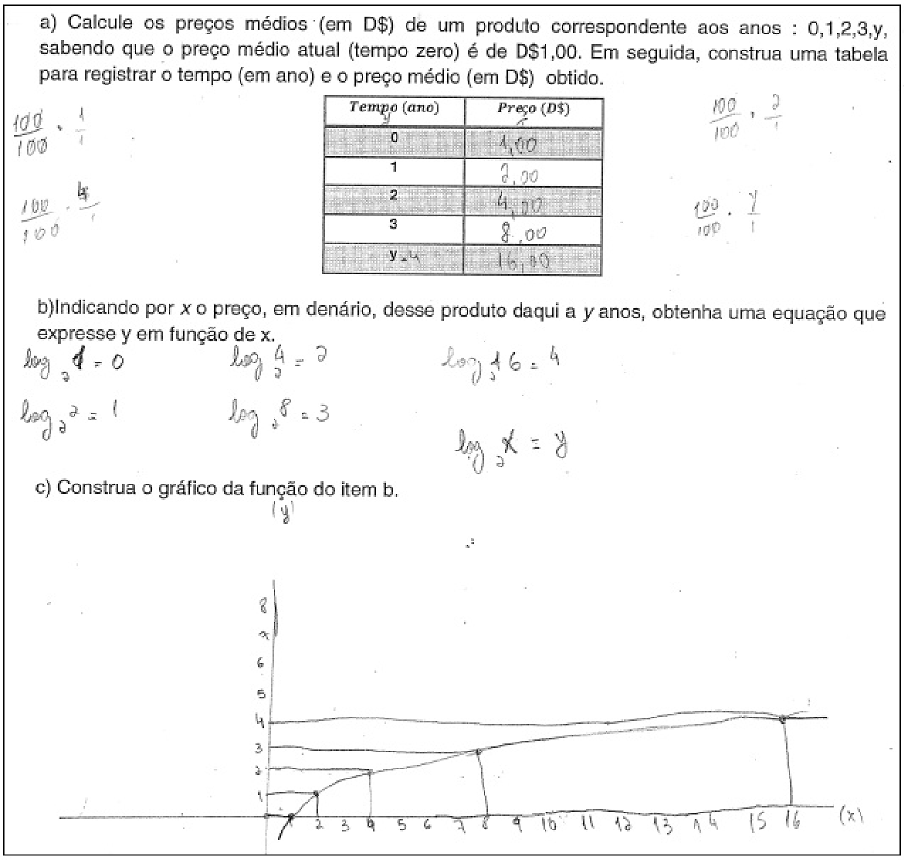
c) Construa o gráfico da função do item b.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A professora percebeu que os alunos apresentaram muita dificuldade em expressar a lei da função, sugeriu então que resolvessem primeiramente o item *c*, ou seja, que fizessem a construção do gráfico, para que por meio da visualização do gráfico surgisse a ideia da função logarítmica.

Ao tirar dúvidas com a professora, um aluno percebeu que precisaria trabalhar com função inversa, neste momento a professora perguntou ao mesmo qual a função ele havia escrito na resposta, e o aluno responde: "Função Exponencial", daí então a professora perguntou: "qual é a inversa dessa função?", com isso o aluno conseguiu perceber que se tratava de uma função logarítmica e desenvolveu a questão (Figura 62).

Figura 62 – Questão 9 - Resposta correta do grupo 1 - Turma B



a) Calcule os preços médios (em D$) de um produto correspondente aos anos : 0,1,2,3,y, sabendo que o preço médio atual (tempo zero) é de D$1,00. Em seguida, construa uma tabela para registrar o tempo (em ano) e o preço médio (em D$) obtido.

Tempo (ano)	*Preço (D$)*
0	1,00
1	2,00
2	4,00
3	8,00
y = 4	16,00

b)Indicando por *x* o preço, em denário, desse produto daqui a *y* anos, obtenha uma equação que expresse y em função de x.

$\log_2 1 = 0$ $\log_2 4 = 2$ $\log_2 16 = 4$

$\log_2 2 = 1$ $\log_2 8 = 3$

$\log_2 x = y$

c) Construa o gráfico da função do item b.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a *plenária* da questão 9, foi dado início as resoluções da questão 10. Os alunos não apresentaram dificuldades na resolução desta questão, mas devido à falta de tempo nenhum dos grupos conseguiu finalizar o item *b*.

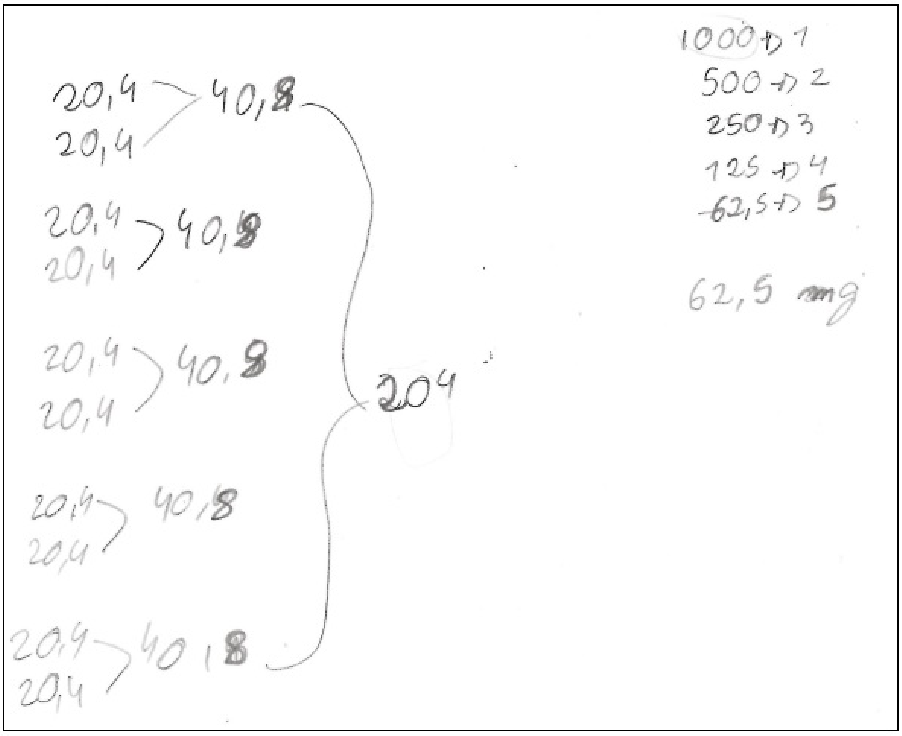
Como o final da aula já se aproximava, a professora pediu que os representantes de cada grupo apresentassem suas soluções no quadro do jeito que haviam feito, e foi feita a discussão com os alunos a partir das respostas apresentadas.

5.5.2 Aula 10

Nesta aula foi dado início a segunda etapa das atividades, os problemas interdisciplinares.

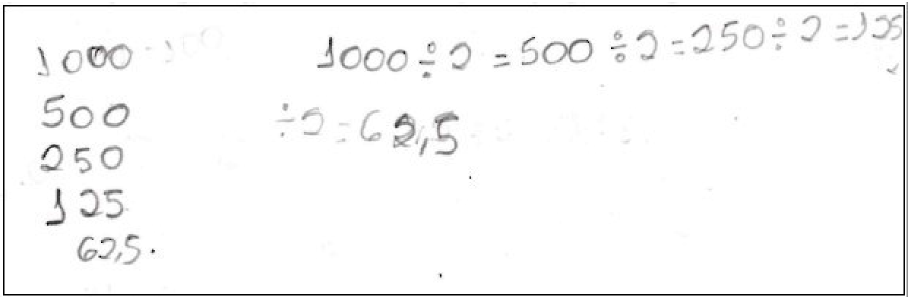
No problema 1 os alunos apresentaram dificuldades na interpretação, quase todos os grupos solicitaram ajuda a professora, e a mesma pediu que lessem novamente a questão de forma a enfatizar que a questão pedia a massa do nuclídeo e não o tempo de aquisição da imagem de uma tomografia (Figuras 63 e 64).

Figura 63 – Problema 1 - Resposta correta do grupo 1 - Turma A



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 64 – Problema 1 - Resposta correta do grupo 3 - Turma B



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apenas um dos grupos não respondeu de maneira satisfatória, contabilizando errado a quantidade de meias vidas (Figura 65).

Figura 65 – Problema 1 - Resposta errada do grupo 4 - Turma A

5 _ 500 mg
5 _ 250 mg
5 _ 125 mg
5 _ 62,5 mg
5 _ 31,25 mg

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao iniciarem a resolução do problema 2, os alunos apresentaram menos dificuldade na interpretação da questão. Apenas alguns grupos que, após montarem a equação, não lembravam uma das propriedades de logaritmo, mas ao lembrarem conseguiram resolver o problema.

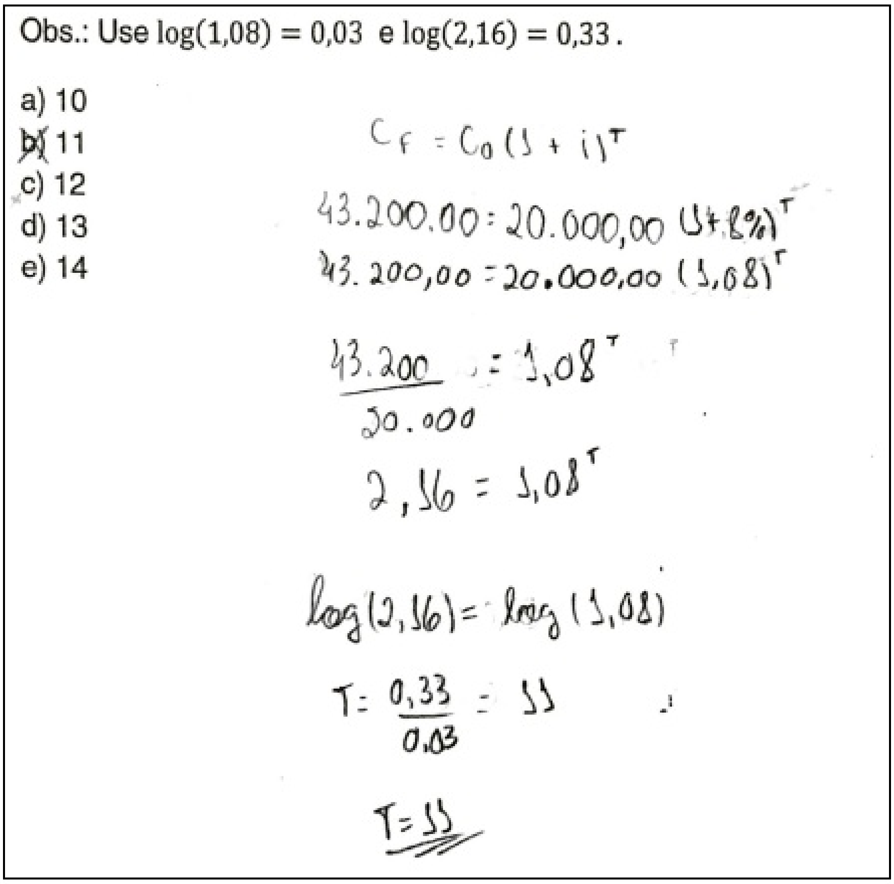
5.6 6ª semana (aulas 11-12)

Esta seção relata a sexta semana de aplicação das atividades.

5.6.1 Aula 11

Nesta aula os grupos resolveram os problemas 3 e 4 sem grandes dificuldades (Figura 66). Ao resolver o problema 3, apenas um dos grupos não conseguiu finalizar a questão (Figura 67).

Figura 66 – Problema 3 - Resposta correta do grupo 5 - Turma A


Obs.: Use $\log(1{,}08) = 0{,}03$ e $\log(2{,}16) = 0{,}33$.

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

$C_f = C_0(1+i)^T$

$43.200{,}00 = 20.000{,}00\,(1+8\%)^T$

$43.200{,}00 = 20.000{,}00\,(1{,}08)^T$

$\frac{43.200}{20.000} = 1{,}08^T$

$2{,}16 = 1{,}08^T$

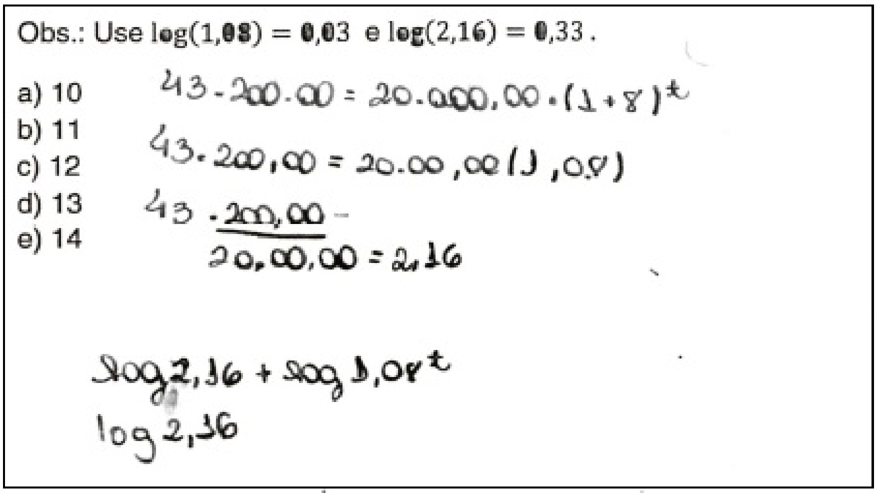
$\log(2{,}16) = \log(1{,}08)$

$T = \frac{0{,}33}{0{,}03} = 11$

$T = 11$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 67 – Problema 3 - Resposta do grupo 3 da turma A, que não consegui finalizar a questão


Obs.: Use $\log(1{,}08) = 0{,}03$ e $\log(2{,}16) = 0{,}33$.

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

$43.200.00 = 20.000.00 \cdot (1+8)^t$

$43.200{,}00 = 20.00{,}00\,(1{,}08)$

$\frac{43.200{,}00}{20.00{,}00} = 2{,}16$

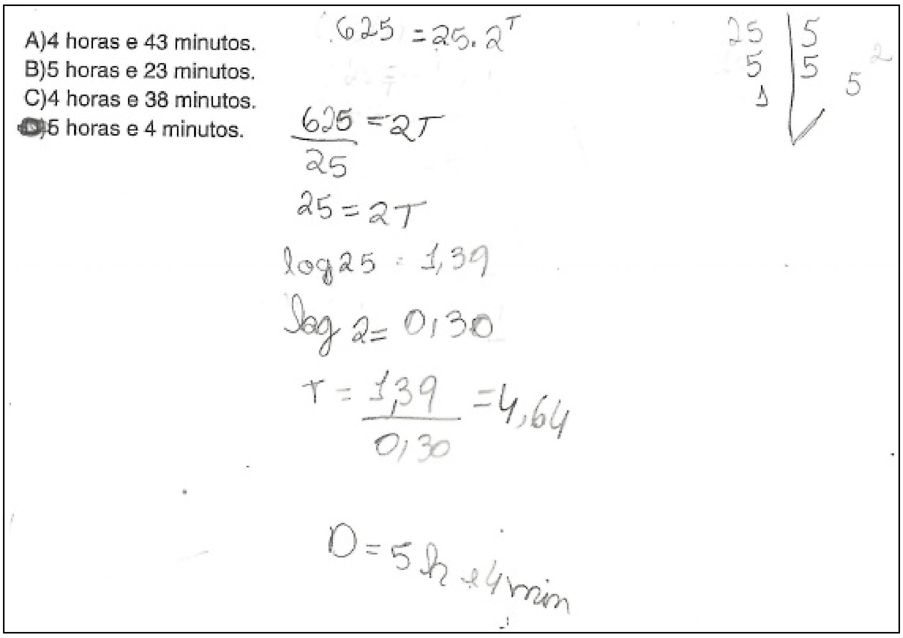
$\log 2{,}16 + \log 1{,}08^t$

$\log 2{,}16$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

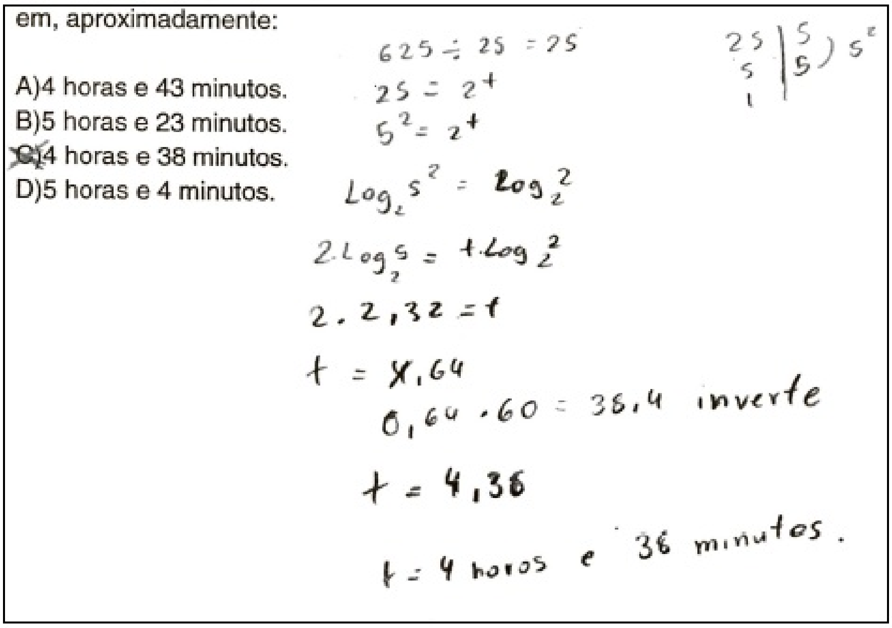
No problema 4 os alunos não apresentaram dificuldades (Figura 68), porém alguns grupos não conseguiram interpretar a resposta final, confundindo o quantitativo de horas, e com isso marcaram a alternativa errada (Figura 69).

Figura 68 – Problema 4 - Resposta correta do grupo 3 - Turma B



Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 69 – Problema 4 - Resposta incorreta do grupo 4 - Turma B



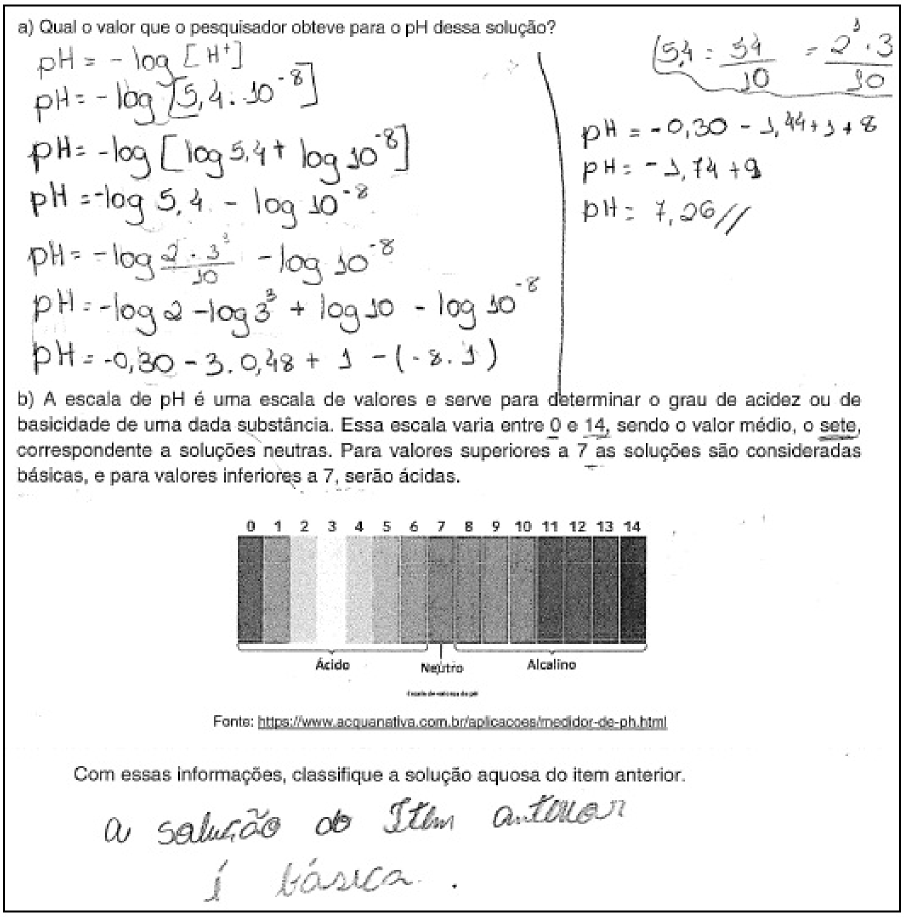
Fonte: Protocolo de pesquisa

5.6.2 Aula 12

Ao iniciarem a resolução do problema 5, alguns grupos demoraram a perceber que para resolver esta questão seria necessário isolar a incógnita. Mas, feito isso, os mesmos conseguiram finalizar a questão de forma satisfatória.

Ao resolver o problema 6, apenas um grupo apresentou dificuldades no desenvolvimento da solução, pois os alunos não estavam lembrando as propriedades de logaritmo da multiplicação e da divisão. Neste momento, a professora foi fazendo perguntas utilizando as soluções anteriores, de forma que os mesmos se lembrassem das propriedades necessárias. Assim todos os grupos concluíram a questão (Figura 70).

Figura 70 – Problema 6 - Resposta correta do grupo 1 - Turma A



a) Qual o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução?

$pH = -\log [H^+]$
$pH = -\log [5,4 . 10^{-8}]$
$pH = -\log [\log 5,4 + \log 10^{-8}]$
$pH = -\log 5,4 - \log 10^{-8}$
$pH = -\log \frac{2 \cdot 3^3}{10} - \log 10^{-8}$
$pH = -\log 2 - \log 3^3 + \log 10 - \log 10^{-8}$
$pH = -0,30 - 3 . 0,48 + 1 - (-8 . 1)$

$5,4 = \frac{54}{10} = \frac{2^{} \cdot 3^3}{10}$
$pH = -0,30 - 1,44 + 1 + 8$
$pH = -1,74 + 9$
$pH = 7,26//$

b) A escala de pH é uma escala de valores e serve para determinar o grau de acidez ou de basicidade de uma dada substância. Essa escala varia entre 0 e 14, sendo o valor médio, o sete, correspondente a soluções neutras. Para valores superiores a 7 as soluções são consideradas básicas, e para valores inferiores a 7, serão ácidas.

Fonte: https://www.acquanativa.com.br/aplicacoes/medidor-de-ph.html

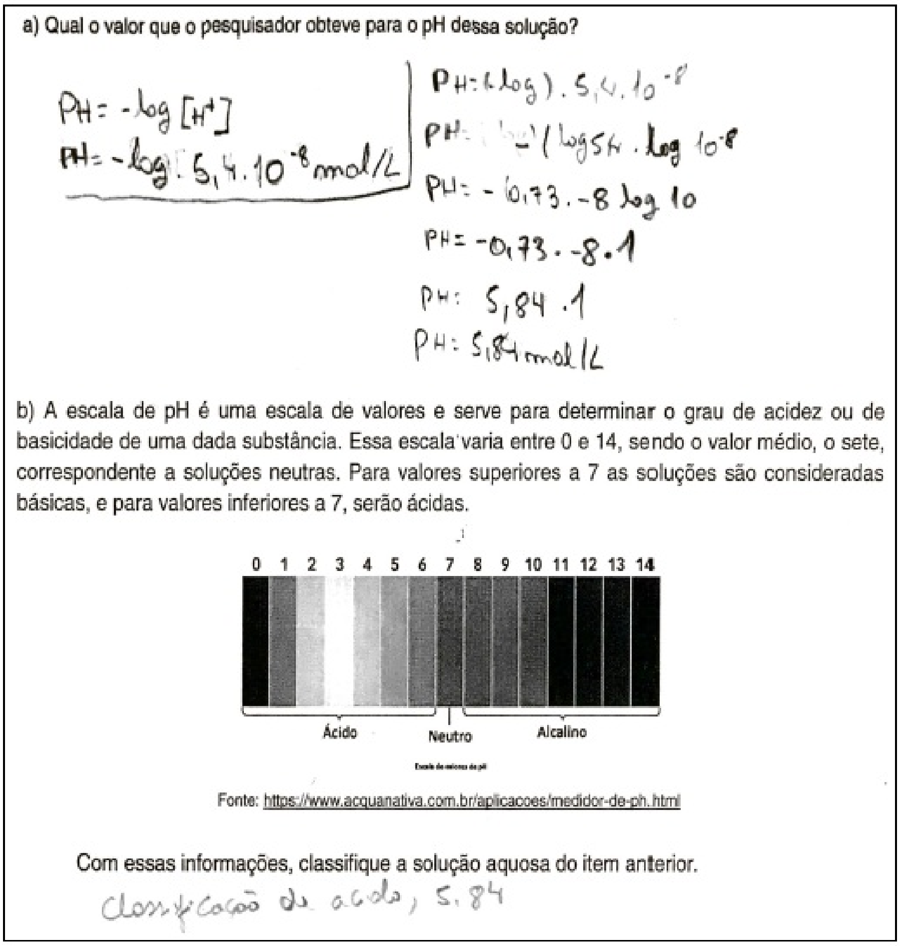
Com essas informações, classifique a solução aquosa do item anterior.

a solução do item anterior é básica.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apenas um grupo da turma B, respondeu de forma incorreta, e com isso classificou o pH da solução de forma errada (Figura 71).

Figura 71 – Problema 6 - Resposta incorreta do grupo 3 - Turma B



a) Qual o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução?

PH = -log [H⁺]
PH = -log 5,4.10^-8 mol/L

PH = (-log). 5,4.10^-8
PH = -(log 5,4 . log 10^-8
PH = -0,73.-8 log 10
PH = -0,73.-8.1
PH: 5,84.1
PH: 5,84 mol/L

b) A escala de pH é uma escala de valores e serve para determinar o grau de acidez ou de basicidade de uma dada substância. Essa escala varia entre 0 e 14, sendo o valor médio, o sete, correspondente a soluções neutras. Para valores superiores a 7 as soluções são consideradas básicas, e para valores inferiores a 7, serão ácidas.

Fonte: https://www.acquanativa.com.br/aplicacoes/medidor-de-ph.html

Com essas informações, classifique a solução aquosa do item anterior.

Classificação de ácido, 5,84

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Durante a *plenária*, o grupo 3 da turma B percebeu o erro que foi cometido. Após isso, foram encerradas as atividades.

Com o problema 6, encerraram-se as etapas das atividades programadas. Assim, ao final da aula a pesquisadora agradeceu a participação dos alunos, ressaltando o quanto o envolvimento dos mesmos contribuiu para o processo da pesquisa.

Capítulo 6

Considerações Finais

Ao fazer um estudo mais aprofundado das Funções Exponenciais e Logarítmicas, foi possível perceber o quanto esse conteúdo pode ser interessante e enriquecedor para os alunos. Como essas funções estão presentes em diversas áreas do conhecimento, é possível provocar um ambiente interdisciplinar ao tratar desse conteúdo. Dentre eles, vale destacar o estudo da Matemática Financeira, que pode ser abordado ao se estudar as Funções Exponenciais e Logarítmicas, visto que a educação financeira é algo de extrema importância para a formação do cidadão.

Pensando em uma maneira de se abordar o conteúdo de uma forma diferenciada, que fosse interessante para os alunos e, ao mesmo tempo, promovesse uma aprendizagem mais significativa, optou-se pela metodologia de ensino Resolução de Problemas segundo as autoras Onuchic et al. (2014).

As atividades desenvolvidas foram aplicadas em duas turmas de 2° ano do Ensino Médio, tendo como principais objetivos fazer um estudo sobre Funções Exponenciais e Logarítmicas de forma contextualizada e significativa, além de definir Função Logarítmica como a inversa da Função Exponencial.

Para realização deste estudo, durante a aplicação das atividades, foi de extrema importância a forte participação dos alunos, que buscaram contribuir, da maneira que podiam, para que as aulas fossem enriquecedoras. Como a metodologia de ensino adotada proporciona uma maior autonomia ao aluno, sem o envolvimento dos mesmos não seria possível obter sucesso na pesquisa, já que são deles que partem as iniciativas e ideias para resolver o problema.

Durante a aplicação das atividades, foi desafiador para a pesquisadora administrar o tempo e a atenção dada aos alunos, visto que as turmas em que as atividades foram aplicadas tem muitos alunos. Trabalhar com essa metodologia exige do professor não só organização e planejamento, mas também flexibilidade.

Destaca-se durante o processo da aplicação das atividades, a satisfação da pesquisadora em presenciar a construção do conhecimento sendo feita de forma coletiva, e a generosidade apresentada pelos alunos em ajudar uns aos outros. Salvo nos momentos da *plenária*, em que os mesmos ficavam mais competitivos.

Pode-se afirmar que, nesta pesquisa, a interdisciplinaridade foi um fator que contribuiu muito para despertar o interesse dos alunos. Com os problemas apresentados, os alunos se sentiram desafiados a encontrar soluções, trazendo para as aulas de Matemática mais empenho.

Ao finalizar as atividades com as turmas, foi possível perceber que o objetivo foi cumprido. É, sim, possível fazer um estudo sobre funções exponenciais e logarítmicas de forma contextualizada. Como a pesquisadora já trabalhou com outras turmas de 2° ano do Ensino Médio, em anos anteriores, foi possível notar não só a motivação para as aulas, mas os resultados obtidos pelos alunos e a forma como conseguiram associar este a outros conteúdos.

Vale destacar que, durante as aulas, alguns alunos que sempre se mostraram pouco participativos e interessados, tiveram empenho para resolver as questões. Algo semelhante também pode ser relatado com relação aos alunos que apresentam dificuldades na disciplina de Matemática, o fato da metodologia valorizar a tentativa de solução do aluno, estando ela certa ou não, foi determinante para que estes alunos se sentissem contemplados e valorizados durante as aulas.

Durante a construção dessa pesquisa, é preciso destacar os desafios encontrados ao longo desse processo, como, a busca por problemas interessantes e, encontrar uma maneira de se abordar o conteúdo com os alunos, partindo do que já haviam aprendido para chegar ao conteúdo desejado, sempre de acordo com a metodologia de ensino adotada. Mas, foi notória a diferença que todo esse processo fez, não só para os alunos, mas para a pesquisadora enquanto profissional.

Assim, como sugestão para futuras pesquisas, ressalta-se a necessidade de ter mais tempo para o estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas. Podendo, assim, dar mais ênfase ao estudo dos gráficos e seus deslocamentos, além de aplicar mais problemas e explorar outras áreas. Caso seja possível, recomenda-se também fazer uso da tecnologia durante as aulas, por meio do software *GeoGebra*. Com base no que foi relatado neste trabalho, considera-se que este projeto possa ser mais adequado para turmas com menos alunos.

Destaca-se que, a metodologia de ensino Resolução de Problemas não está vinculada apenas ao ensino da Matemática. Considera-se que esta seja apropriada para outros campos da ciência, assim como para outras disciplinas.

De maneira geral, considera-se que este trabalho contribuiu de maneira muito satisfatória para a formação dos alunos.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2005. Citado na página 52.

ALLEVATO, N. S. G. O computador e a aprendizagem matemática: reflexões sob a perspectiva da resolução de problemas. *Seminário em Resolução de Problemas–Serp*, v. 1, p. 1–19, 2008. Citado na página 52.

AUFMANN, R. *College algebra and trigonometry*. Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011. ISBN 978-1-4390-4860-3. Citado na página 23.

BARBOSA, C. V. et al. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 ac até o século xx. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 9, n. 1, p. 159–178, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.

BICUDO, M. *Pesquisa em educação matemática : concepções e perspectivas*. São Paulo (SP: Ed. UNESP, 1999. ISBN 8571392528. Citado na página 47.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. *Pró-posições*, v. 4, n. 1, p. 18–23, 1993. Citado na página 57.

BORBA, M. *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. ISBN 8575261185. Citado na página 57.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. San Pablo: Editora Blucher, 2012. Citado na página 22.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. *Brasília: MEC/SEF*, Secretaria de Educação Ensino Médio, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 16, 53 e 55.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. *Brasília: MEC-SEF*, Secretaria de Educação Ensino Médio, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 16, 17, 49, 50, 51, 53, 55 e 56.

BRASIL. *Orientações curriculares para o ensino médio*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Citado na página 30.

DANTE, L. R. *Formulação e Resolução de Problemas de Matemática: teoria e prática*. São Paulo: Ática, 2010. Citado na página 89.

DAVID, M. M. M.; TOMAZ, V. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. São Paulo: Autêntica, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

GIL, K. H. et al. Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2008. Citado na página 81.

HUANCA, R. R. H. A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 20, n. 27, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 82.

KLEEMANN, R. Desenvolvimento de propostas metodológicas para o trabalho interdisciplinar nas disciplinas de matemática e física. Universidade Federal da Fronteira Sul, 2018. Citado na página 54.

LAVAQUI, V.; BATISTA, I. de L. Interdisciplinaridade em ensino de ciências e de matemática no ensino médio. *Ciência & Educação (Bauru)*, SciELO Brasil, v. 13, n. 3, p. 399–420, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

MARTINEZ, D. A. Função exponencial e seu ensino através da resolução de problemas. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2015. Citado na página 55.

MENDES, M. H. M. O conceito de função: Aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. 1994. Citado na página 23.

OLIVEIRA, M. *Como fazer pesquisa qualitativa*. Petro?polis: Vozes, 2013. ISBN 978-8532633774. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.

ONUCHIC, L. d. l. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez*, p. 212–231, 2004. Citado na página 17.

ONUCHIC, L. D. L. R.; MORAIS, R. S. Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 15, n. 3, p. 671–691, 2013. Citado na página 50.

ONUCHIC, L. de la R. O professor, o educador e o pesquisador ao longo de sua trajetória de vida. 2008. Citado na página 52.

ONUCHIC, L. de la R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? e para onde iremos? *Revista Espaço Pedagógico*, v. 20, n. 1, 2013. Citado na página 48.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 25, n. 41, p. 73–98, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 17, 47 e 48.

ONUCHIC, L. de la R. et al. *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. São Paulo: Paco Editorial, 2014. Citado 9 vezes nas páginas 17, 19, 48, 51, 60, 75, 76, 84 e 98.

PAIVA, M. *Matemática: Paiva*. São Paulo: Moderna, 2013. Citado na página 68.

PIRES, R. F. O conceito de função: Uma análise histórico epistemológica. 2016. Citado na página 20.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas : um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. ISBN 978-8571931367. Citado na página 49.

PONTE, J. Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, p. 105–132, 2006. Citado na página 58.

RIO DE JANEIRO. *Currículo Mínimo: Matemática*. 2012. Acesso em: 03/10/2019. Disponível em: http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2012.2/esp00001/arquivos/seerj.pdf. Citado 3 vezes nas páginas 18, 57 e 59.

ROGAWSKI, J. *Cálculo: Volume 1*. Porto Alegre: Bookman Editora, 2009. v. 1. Citado na página 23.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas. *Investigar para aprender matemática*, Matemática para todos: investigações na sala de aula e Associação de professores de matemática Portugal, p. 61–72, 1996. Citado na página 47.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. *New directions for elementary school mathematics*, v. 31, p. 42, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

STEWART, J. *Algebra and trigonometry*. Boston, MA, USA: Cengage Learning, 2016. ISBN 978-1-305-07174-2. Citado na página 23.

SULLIVAN, M. *Algebra & trigonometry*. Boston: Pearson, 2016. ISBN 978-0-321-99859-0. Citado na página 23.

THIESEN, J. d. S. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. *Revista brasileira de educação*, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, v. 13, n. 39, 2008. Citado na página 53.

VÁZQUEZ, P. S.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de función a través de la historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 16, p. 141–155, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

VELOSO, A. L. A. *Estudo de Logaritmos com ênfase à metodologia resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Tocantins, 2014. Citado na página 67.

YIN, R. K. *Estudo de Caso: Planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman editora, 2010. Citado na página 57.

Apêndices

APÊNDICE A

Autorizações

A.1 Autorização Direção

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMATICA

AUTORIZAÇÃO

Prezada Diretora,

Eu, **Carolini Cunha Silva Gioia**, professora e discente, regularmente matriculada no curso de Pós-Graduação em Matemática, pela Universidade Estadual do Norte Fluminense, venho solicitar por meio desta,a V. Senhoria, **Claudia Reis da Conceição Guedes, Diretora Geral do C. E. Jornalista Álvaro Bastos,** a autorização para que possa desenvolver meu experimento de mestrado nas turmas 2005 e 2006 do 2° ano do Ensino Médio.

As atividades serão realizadas durante as aulas de matemática,com o seguinte tema: FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, em que os alunos irão obter de forma significativa e motivadora, o entendimento de assuntos relacionados às Funções Exponencial e Logarítmica.

Atenciosamente

Campos dos Goytacazes, 14 de março de 2019

Carolini Cunha Silva Gioia

Carolini Cunha Silva Gioia

Profa. De Matemática

De acordo,

Guedes

Claudia Reis da Conceição Guedes

Diretora Geral

Claudia da C. R. Guedes
Diretora Geral
C. E. Jornalista Álvaro Bastos
Mat. 50218806 ID.. 38913062

A.2 Autorização Aluno

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Senhores pais ou responsáveis,

Os alunos das turmas 2005 e 2006 do C. E. Jornalista Álvaro Bastos, em que seu filho(a) se encontra matriculado, estão sendo convidados a participar de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual Norte Fluminense, realizado pela mestranda e professora de matemática, Carolini Cunha Silva Gioia.

A pesquisa será realizada na própria escola, durante as aulas de matemática, com o seguinte tema: FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. O objetivo das aulas é que os alunos possam obter de forma significativa e motivadora, o entendimento de assuntos relacionados as Funções Exponencial e Logarítmica, contribuindo para o atingimento da melhoria no ensino e aprendizagem do seu filho(a).

Solicitamos a sua autorização para que ele(a) possa participar das atividades, e a permissão para que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e peço que caso esteja de acordo preencha a autorização a seguir:

Eu, ____, autorizo a participação de meu filho(a) ____ na pesquisa desenvolvida pela mestranda Carolini Cunha Silva Gioia na área profissional de matemática.

Campos dos Goytacazes, 15 de março de 2019.

____

Assinatura do responsável

APÊNDICE B

Atividades

B.1 Questões

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

Questão 1

Considere uma cultura de bactérias que cresce de forma exponencial em um certo meio. Em determinado momento (tempo inicial) existem 2000 bactérias e após 30 minutos a quantidade de bactérias passou para 4000. Quantas bactérias estarão presentes neste meio após 2 horas?

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

Questão 2

Um isótopo radioativo utilizado no tratamento de algumas doenças apresenta uma meia-vida (tempo necessário para que a massa se reduza à metade da quantidade apresentada inicialmente) de 3 horas. Se um técnico utilizar uma massa de 50 g no tratamento de um paciente, após quantas horas a massa seria reduzida para 6,25 g?

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

Questão 3

Dada a função $f(x) = 4^x$, Complete a tabela a seguir com os valores descritos abaixo:

x	$f(x)$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	
-4	

Com base na tabela que você completou, responda:

a) Quanto maior o valor de x, o que acontece com os resultados encontrados?

b) Quanto menor o valor de x o que acontece com os resultados encontrados? Se aproxima de qual valor?

c) Você acha que é possível encontrar zero como resultado? Justifique.

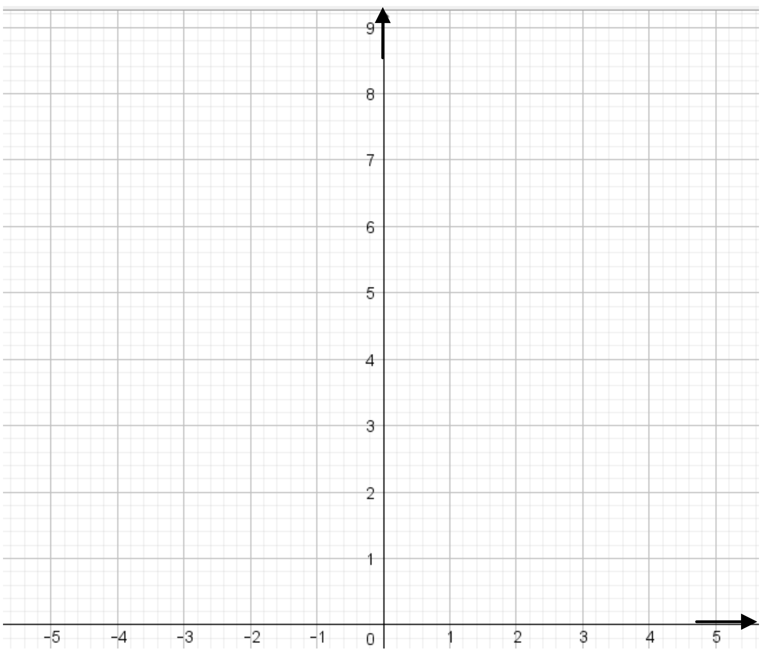
Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

Questão 4

Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + 2^x$

x	$f(x)$
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	
-4	



Analisando o gráfico feito, responda:

a) Quanto menor o valor de x o que acontece com os resultados encontrados?

b) Existe assíntota nesse gráfico? Se sim, onde está localizada?

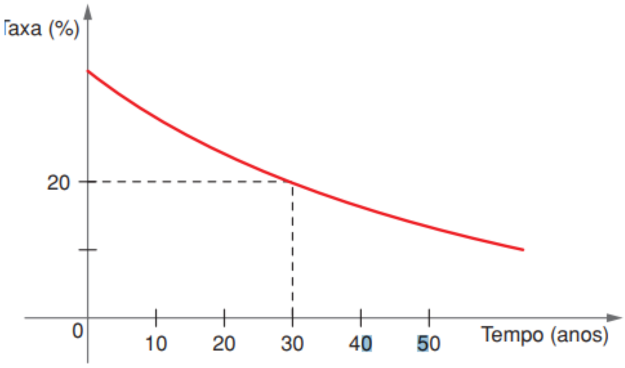
c) Como você pôde perceber isso?

Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professora: Carolini Cunha   Data: ___/___/___
Aluno: ______________________________   Turma: ________

Questão 5

(UNI-RIO/Ence-RJ-2009-Adaptada) Conforme os dados obtidos pelo IBGE, relativos às taxas percentual de analfabetismo da população brasileira da faixa etária de 15 anos ou mais, a partir do ano de 1960 (tempo zero) foi possível ajustar uma curva de equação $y = 30.k^x + 10$, $k > 0$ e x o tempo em anos, representada a seguir:



a) Determine o valor de k.

b) Determine as taxas relativas aos anos de 1960 e 2020.

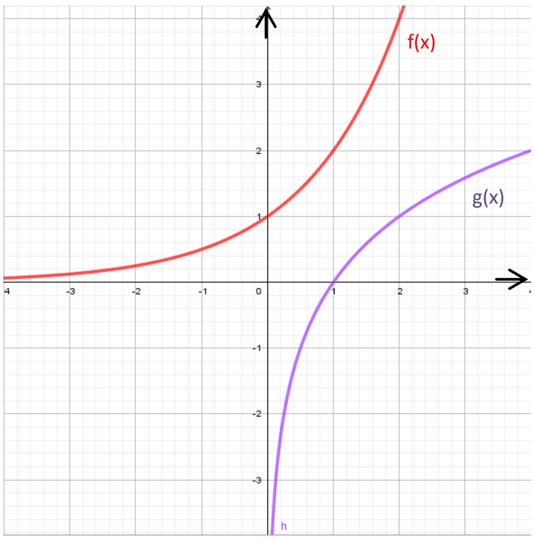
c) De acordo com o gráfico acima, a taxa de analfabetismo nunca será inferior a quanto?

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
PROFMAT CAPES
Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: _________

Questão 6

Observe os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)* mostrados abaixo e responda o que se pede:



a) Qual desses gráficos representa uma função exponencial? Justifique.

b) O gráfico da função *f(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?

c) O gráfico da função *g(x)* possui assíntota? Se sim, para qual valor?

d) Você considera que os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)* são parecidos? O que há de diferente entre eles?

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

Questão 7

Uma pessoa aplica R$1000,00 em um fundo de investimentos que rende em média, 2% ao mês. Em quantos meses essa pessoa terá no mínimo R$1300,00?

Sugestão: Utilize a fórmula de juros compostos

$$M = C.(1+i)^t$$

Em que: M: montante
C: capital
t: tempo de aplicação
i: taxa

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

Questão 8

(VELOSO-2014) A definição de *logaritmo* é a seguinte: Dados a e b números reais, $a > 0$ e $0 < b \neq 1$, o logaritmo de a na base b ($\log_b a$) é o único expoente x ao qual devemos

elevar b para obter a, ou seja,

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Justifique as restrições impostas a a e b na definição de logaritmo acima.

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

Questão 9

(PAIVA-2013) Em um certo país, cuja unidade monetária é o denário (D$) a inflação é de 100% ao ano, ou seja, os preços médios dos produtos aumentam em 100% ao ano.

a) Calcule os preços médios (em D$) de um produto correspondente aos anos : 0,1,2,3,y, sabendo que o preço médio atual (tempo zero) é de D$1,00. Em seguida, construa uma tabela para registrar o tempo (em ano) e o preço médio (em D$) obtido.

$\boldsymbol{Tempo\ (ano)}$	$\boldsymbol{Preço\ (D\$)}$
0	
1	
2	
3	
y	

b)Indicando por *x* o preço, em denário, desse produto daqui a *y* anos, obtenha uma equação que expresse y em função de x.

c) Construa o gráfico da função do item b.

Questão 10

(Udesc-2008-Adaptada) Uma peça está quente a 200°C, quando é colocada em um amplo ambiente a 20°C. A partir desse instante, a sua temperatura *T* decresce, obedecendo à equação $T = 20 + 180\left(\frac{4}{5}\right)^t$, em que *t* significa o tempo decorrido em minutos. Pergunta-se:

a) Qual a temperatura depois de decorridos 3 minutos?

b) Qual a expressão numérica que dá o instante em que T atinge 29°C? Use $\log 2 = 0{,}301$.

B.2 Definições e Propriedades de Logaritmo

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

LOGARITMOS

Definição

Sendo *a* e *b* números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de *b* na base *a*** o expoente *x* ao qual se deve elevar a base *a* de modo que a potência a^x seja igual a *b*, ou seja,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Exemplo: Calcular os logaritmos abaixo:

a) $\log_5 25$

b) $\log_2 \frac{1}{32}$

c) $\log_7 \sqrt[5]{7^2}$

Logaritmo Decimal

Chama-se de logaritmo decimal aquele cuja base é 10.

Indica-se o logaritmo decimal de um número *b* simplesmente por $\log b$ (a base 10 fica subentendida).

Exemplo: $\log 1000 =$

Logaritmo Natural

O logaritmo cuja base é o número irracional $e = 2{,}71828182845...$, chamamos de logaritmo natural.

Indicamos esse logaritmo por $\log_e = b$ ou $\ln = b$

A partir dessa definição podemos apresentar algumas definições que auxiliarão no desenvolvimento de algumas situações envolvendo logaritmo. Veja:

- O logaritmo do número 1 em qualquer base sempre será igual a 0.

$$\log_a 1 = 0 \text{ , pois } a^0 = 1$$

- O logaritmo de qualquer número a na própria base a será igual a 1.

$$\log_a a = 1 \text{ pois } a^1 = a$$

- O logaritmo de uma potência da base é o expoente, em qualquer base.

$$\log_a a^m = m \text{ , pois } a^m = a^m$$

- A potência de base *a* e expoente $\log_a b$ é igual a *b*.

$$a^{\log_a b} = b \text{ , pois } \log_a b = x \rightarrow a^x = b$$

- Dois logaritmos são iguais, quando seus logaritmandos forem iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Propriedades operatórias dos logaritmos

1. Logaritmo de um produto

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Demonstração:

2. Logaritmo de um quociente

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demonstração:

3. **Logaritmo de uma potência**

$$\log_{\mathrm{a}} M^N = N \cdot \log_{\mathrm{a}} M$$

Demonstração:

4. **Mudança de base do logaritmo**

$$\log_{\mathrm{b}} N = \frac{\log_{\mathrm{a}} N}{\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}}, \text{para } N > 0, b > 0, a > 0; b \neq 1 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração:

<u>EXEMPLOS</u>

Exemplo 1 - Calcule o valor de x:

a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{16} = 2$ c) $\log_2 x = 5$

Exemplo 2 - Sendo *log 2 = 0,301* e *log 7 = 0,845*, qual será o valor de *log 28*?

Exemplo 3 - Se $\log_2 b - \log_2 a = 5$, calcule o quociente $\frac{b}{a}$.

B.3 Problemas

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT CAPES

Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Problemas Interdisciplinares

Professora: Carolini Cunha Data: ___/___/___
Aluno: ____ Turma: ________

1) **(**Enem/2013-Adaptada) A Glicose marcada com nuclídeos de carbono-11 é utilizada na medicina para se obter imagens tridimensionais do cérebro, por meio de tomografia de emissão de pósitrons. A desintegração do carbono-11 gera um pósitron, com tempo de meia-vida de 20,4 minutos, de acordo com a equação da reação nuclear:

$$^{11}_{6}C \rightarrow {}^{11}_{5}B + {}^{0}_{1}e$$

(pósitron)

A partir da injeção de glicose marcada com esse nuclídeo, o tempo de aquisição de uma imagem de tomografia é de cinco meias-vidas.

Considerando que o medicamento contém 1000mg do carbono-11, qual será a massa aproximada (em miligramas), do nuclídeo restante após a aquisição da imagem?

Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Problemas Interdisciplinares

Professora: Carolini Cunha | Data: ___/___/___
Aluno: ____ | Turma: ________

2) [1]A escala mais conhecida para determinar qual a intensidade de um terremoto é a escala Richter, que foi desenvolvida por Charles F. Richter em 1935, no Instituto de Tecnologia da Califórnia, a partir do estudo de cerca de 200 terremotos ao ano. Veja, na tabela a seguir, quais os efeitos gerados por um terremoto, de acordo com seu valor na escala Richter:

Magnitude Richter	*Efeitos*
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

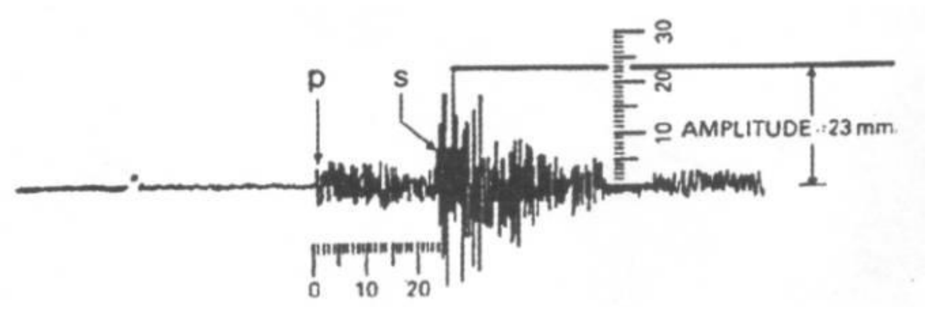
A fórmula desenvolvida por Richter é a seguinte:

$$M = \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10}(8 \cdot \Delta t) - 2{,}92$$

Em que:

- M é a magnitude do terremoto;
- A é a amplitude (em milímetros) medida com um sismógrafo;
- Δt é o intervalo de tempo (em segundos) entre a onda superficial (S) e a onda de pressão máxima (P).

Observe o gráfico obtido através de um sismógrafo de uma estação localizada no sul da Califórnia.



Gentil, N.; Greco, S.E.; Marcondes, C.A. (2000). Matemática – Série Novo Ensino Médio. São Paulo: Ática. 3ª edição.

Sabendo que o papel de um sismógrafo ‘anda’ a 1 mm/s e que no gráfico acima a distância entre as ondas P e S é de 24mm, calcule a magnitude desse terremoto e verifique quais os efeitos gerados por ele.

Use: $\log 2 = 0{,}301$; $\log 3 = 0{,}477$; $\log 23 = 1{,}362$

[1] http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm

3) (IFPE-2012) Nas aplicações financeiras feitas nos bancos são utilizados os juros compostos. A expressão para o cálculo é:

$$C_F = C_0(1+i)^T \ ,$$

em que C_F é o montante, C_0 é o capital, *i* é a taxa e *T* o tempo da aplicação. Como C_F depende de *T*, conhecidos C_0 e *i*, temos uma aplicação do estudo de função exponencial. Um professor, ao deixar de trabalhar em uma instituição de ensino, recebeu uma indenização no valor de R$ 20.000,00. Ele fez uma aplicação financeira a uma taxa mensal (*i*) de 8%. Após *T* meses, esse professor recebeu um montante de R$ 43.200,00. Qual foi o tempo T que o dinheiro ficou aplicado?

Obs.: Use $\log(1{,}08) = 0{,}03$ e $\log(2{,}16) = 0{,}33$.

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

4) (UFRN-2009) Numa experiência realizada em laboratório, Alice constatou que, dentro de *t* horas, a população *P* de determinada bactéria crescia segundo a função:

$$P(t) = 25 \cdot 2^t$$

Nessa experiência, sabendo-se que $\log_2 5 \approx 2{,}32$, a população atingiu 625 bactérias em, aproximadamente:

A)4 horas e 43 minutos.
B)5 horas e 23 minutos.
C)4 horas e 38 minutos.
D)5 horas e 4 minutos.

5) (UPE - 2012) Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando *tsunamis*. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência.

Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na escala Richter?

A) 10^{14} joules.
B) 10^{16} joules.
C) 10^{17} joules.
D) 10^{18} joules.
E) 10^{19} joules

6) (UFMG-2001 - Adaptada) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão:

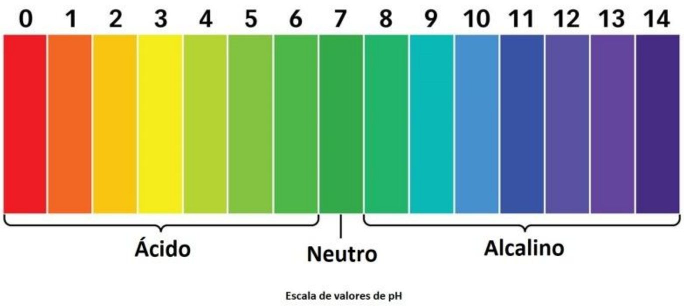
$$pH = -\log [H^+],$$

em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/L.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3. Com isso, responda:

a) Qual o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução?

b) A escala de pH é uma escala de valores e serve para determinar o grau de acidez ou de basicidade de uma dada substância. Essa escala varia entre 0 e 14, sendo o valor médio, o sete, correspondente a soluções neutras. Para valores superiores a 7 as soluções são consideradas básicas, e para valores inferiores a 7, serão ácidas.



Fonte: https://www.acquanativa.com.br/aplicacoes/medidor-de-ph.html

Com essas informações, classifique a solução aquosa do item anterior.

APÊNDICE C

Seleção de Problemas

C.1 Seleção de Problemas

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

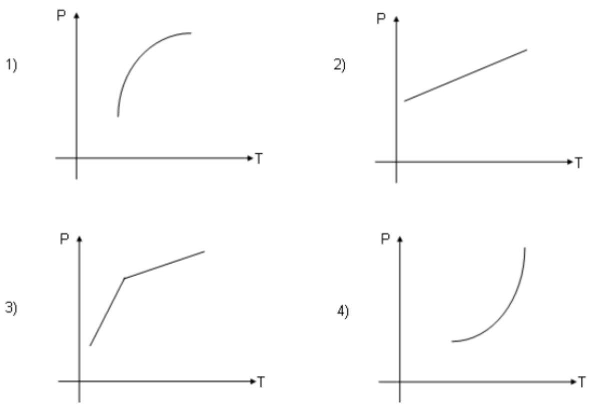
PROFMAT CAPES

Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Professora: Carolini Cunha 2° Ano do Ensino Médio

SELEÇÃO DE PROBLEMAS

1) (UFC-1998-Adaptada) A população de uma cidade X aumenta 1500 habitantes por ano e a população de uma cidade Y aumenta 3% ao ano. Considere os seguintes gráficos:

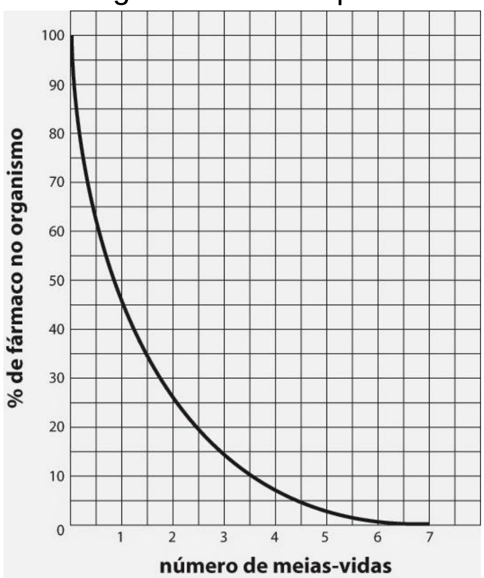


Analisando os gráficos acima, diga:

a) Qual deles melhor representa o crescimento populacional P da cidade X? R: Gráfico 2

b) e da cidade Y? R: Gráfico 4

2) (ENEM-2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



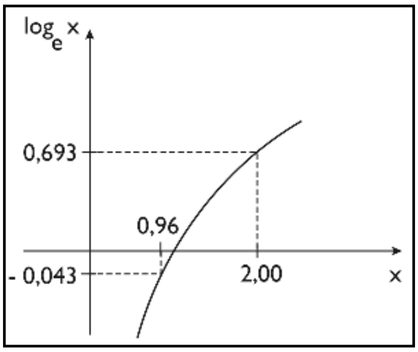
O gráfico anterior representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

Fonte: FUCHS, F. D.; WANNMA, C. I. Farmacologia clinica. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13h30 será aproximadamente de:

a) 10%
b) 15%
c) 25%
d) 35%
e) 50%

3) (UERJ-2001) Meia-vida ou período de semidesintegração de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.



A meia-vida de um isótopo radioativo pode ser calculada utilizando-se equações do tipo $A = C \cdot e^{kt}$, em que:

C é a massa inicial;
A é a massa existente em **t** anos;
k é uma constante associada ao isótopo radioativo.

Em um laboratório, existem 60mg de ^{226}**Ra**, cuja período de semidesintegração é de 1600 anos. Daqui a 100 anos restará, da quantidade original desse isótopo, o correspondente, em **mg**, a:

(a) 40,2 (b) 42,6 (c) 50,2 (d) 57,6

4) (Enem/2013-Adaptada) A Glicose marcada com nuclídeos de carbono-11 é utilizada na medicina para se obter imagens tridimensionais do cérebro, por meio de tomografia de emissão de pósitrons. A desintegração do carbono-11 gera um pósitron, com tempo de meia-vida de 20,4 min, de acordo com a equação da reação nuclear:

$$^{11}_{6}C \rightarrow \, ^{11}_{5}B + \underset{\text{(pósitron)}}{^{0}_{1}e}$$

A partir da injeção de glicose marcada com esse nuclídeo, o tempo de aquisição de uma imagem de tomografia é de cinco meias-vidas.

Considerando que o medicamento contém 1000mg do carbono-11, a massa, em miligramas, do nuclídeo restante, após a aquisição da imagem, é de aproximadamente quanto? R: 31,25mg

5) (FGV-2005) Um computador desvaloriza-se exponencialmente em função do tempo, de modo que seu valor *y*, daqui a *x* anos, será $y = A.k^x$, em que *A* e *k* são constantes positivas. Se hoje o computador vale R$ 5000,00 e valerá a metade desse valor daqui a 2 anos, seu valor daqui a 6 anos será:

a) R$ 625,00 b) R$ 550,00 c) R$ 575,00 d) R$ 600,00
e) R$ 650,00

6) (UFES-2008) Um pesquisador constata que, em um dado instante, existem 400 tartarugas da espécie A e 200 tartarugas da espécie B em uma reserva marinha. Nessa reserva, a população de tartarugas da espécie A diminui a uma taxa de 20% ao ano, enquanto que a população da espécie B aumenta a uma taxa de 10% também ao ano.
Determine, usando duas casas decimais, quanto tempo é necessário, a partir desse instante, para que as populações sejam iguais.(Considere: $\log_{10} 11 = 1{,}04$ e $\log_{10} 2 = 0{,}30$). R: Aproximadamente 2,14 anos.

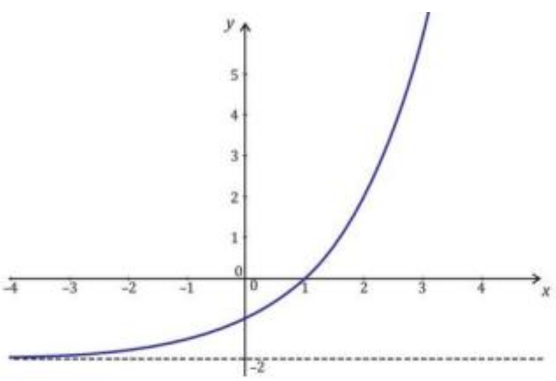
7) (UERJ-2013) Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir.
• A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.
• O nível de toxidez T(x), após x dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$\boxed{T(x) = T_0 \cdot (0{,}5)^{0,1x}}$$

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial. Sendo **log 2 = 0,3**, qual será o valor de D?

(A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36

8) O gráfico a seguir é uma representação cartesiana do gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = b + a^x$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.



Dado que 1 é raiz de f e a reta $y = -2$ é uma assíntota de f, qual o valor de $a + b$?
a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

9) (Unicamp-SP-2011) Para certo modelo de computadores produzidos por uma empresa, o percentual dos processadores que apresentam falhas após T anos de uso é dado pela seguinte função:

$$P(T) = 100(1 - 2^{-0,1T})$$

a) Em quanto tempo 75% dos processadores de um lote desse modelo de computadores terão apresentado falhas? R: 20 anos.

b) Os novos computadores dessa empresa vêm com um processador menos suscetível a falhas. Para o modelo mais recente, embora o percentual de processadores que apresentam falhas também seja dado por uma função na forma $Q(T) = 100(1 - 2^{cT})$, o percentual de processadores defeituosos após 10 anos de uso equivale a $\frac{1}{4}$ do valor observado, nesse mesmo período, para o modelo antigo (ou seja, o valor obtido empregando-se a função *P(T)* acima).
Determine, nesse caso, o valor da constante c. Se necessário, utilize $\log_2 7 \approx 2{,}81$.
R: c=-0,019

10) (IFPE-2012) Nas aplicações financeiras feitas nos bancos são utilizados os juros compostos. A expressão para o cálculo é $C_F = C_0(1 + i)^T$ em que C_F é o montante, C_0 é o capital, *i* é a taxa e *T* o tempo da aplicação. Como C_F depende de *T*, conhecidos C_0 e *i*, temos uma aplicação do estudo de função exponencial. Um professor, ao deixar de trabalhar em uma instituição de ensino, recebeu uma indenização no valor de R$ 20.000,00. Ele fez uma aplicação financeira a uma taxa mensal (*i*) de 8%. Após *T* meses, esse professor recebeu um montante de R$ 43.200,00. Qual foi o tempo T que o dinheiro ficou aplicado? Obs.: Use log (1,08) = 0,03 e log (2,16) = 0,33
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

11) (UPE - 2012) Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando *tsunamis*. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência.

Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na escala Richter?

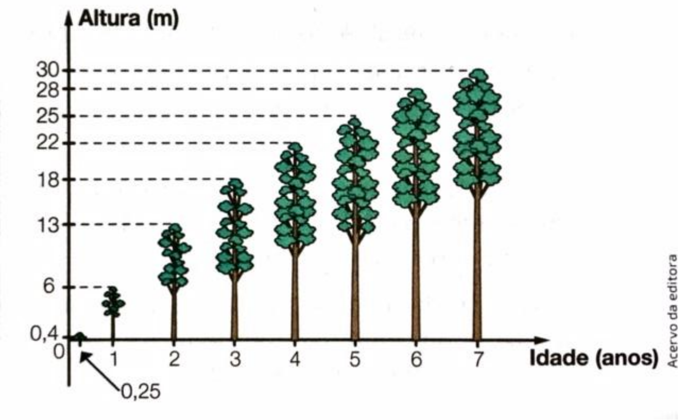
A) 10^{14} joules.
B) 10^{16} joules.
C) 10^{17} joules.
D) 10^{18} joules.
E) 10^{19} joules

12) (Souza - 2016) Um estudo realizado por um restaurante mostrou que o número de refeições servidas por mês, em certo ano, pode ser descrito aproximadamente pela função $f(x) = 4000 \cdot (1{,}1)^{x-1}$, em que *x* representa o mês do ano (para janeiro, por exemplo, x=1).

a) Quantas refeições, aproximadamente, foram servidas por esse restaurante em março? E em julho? R: Em março 4840 refeições e em julho 7086 refeições.

b)Esboce o gráfico de *f.*

13) (Souza - 2016) a altura *f(x)* de certa espécie de eucalipto em função de sua idade *x* em anos, representada a seguir, pode ser descrita por $f(x) = c + \log_a x$, com $c > 0$. O valor de *a* é maior do que 1 ou está entre 0 e 1? Por quê?



R: *a>1*, pois a função é crescente.

14) (Souza - 2016) Uma represa de $2500m^2$ de superfície utilizada para a criação de peixes foi invadida por certa espécie de vegetação aquática. Como ela estava prejudicando o crescimento dos peixes, o proprietário contratou especialistas para realizar um estudo. Ao analisar os $50m^2$ já invadidos pela vegetação, concluiu-se que, se nenhuma providência fosse tomada, a vegetação aquática aumentaria 35% ao ano.

a) Escreva a função *f* que determina a área invadida pela vegetação, em função do tempo t em anos, considerando que o proprietário não tome qualquer providência.

R: $f(t) = 50.(1{,}35)^t$

b) Em quantos anos aproximadamente a vegetação tomará completamente a represa? Considere as hipóteses anteriores e utilize log5=0,699 e log1,35=0,130.

R: 13 anos.

15) (Souza - 2016) Um dos maiores acidentes nucleares da história aconteceu em 1986 na central atômica de Chernobyl, localizada na cidade de Prypiat, Ucrânia (antiga União Soviética). Nesse acidente, houve uma explosão, contaminando com radiação acima do índice máximo tolerado numa região de cerca de 160000 km^2. A cidade de Prypiat foi abandonada às pressas, o que a tornou uma "cidade fantasma". Milhares de pessoas contaminadas pela radioatividade continuam morrendo, principalmente em decorrência de câncer. Com a explosão, foram liberados na atmosfera vários elementos radioativos, entre eles o estrôncio-90, cuja meia vida é de cerca de 28 anos.

Central nuclear de Chernobyl, na Ucrânia.

Fonte: https://www.tecmundo.com.br/energia/9897-25-anos-do-desastre-de-chernobyl-mitos-e-verdades-da-energia-atomica.htm

a) Utilizando a fórmula $n = n_0 \cdot 2^{-t}$, em que n é a quantidade restante de átomos radioativos, n_0 é a quantidade inicial e t é o número de períodos de meia-vida, determine a porcentagem de átomos radioativos de estrôncio-90 que se encontrará na atmosfera 140 anos após o acidente em Chernobyl. R: 3,125%

b) Considerando uma massa de 700 g de estrôncio-90 lançada na atmosfera, quanto tempo aproximadamente é necessário para que essa massa se reduza a 50g? Se necessário utilize $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 7 = 0{,}845$. R: 107 anos.

16) (IEZZI - 2016) Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após *t* semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar *p* unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona *p* e *t* é: $p(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$.

a) Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?
R: 25 unidades.
b) Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da primeira para a segunda semana de experiência? Use $e^{0,2} \cong 1,2$.
R: 4 unidades aproximadamente.
c) Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar, por hora?
R: 55 unidades.

17) (Ufpr 2013) Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificava-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual *S* de palavras lembradas, em função do tempo *t*, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão:

$$S = -18 \cdot \log(t + 1) + 86$$

a) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado? R: 68%
b) Depois de quanto tempo o percentual S alcançou 50%? R: 99 minutos.

18) (IEZZI - 2016) Devido ao declínio da qualidade de vida em um bairro, prevê-se que, durante os próximos quatro anos, um imóvel sofrerá desvalorização de 10% ao ano.

a) Se hoje o valor do imóvel é de R$200.000,00, escreva uma equação que expresse o valor do imóvel V, em real, em função do tempo t, em ano, para os próximos 4 anos.
R: $v(t) = 200000.(0,9)^t$, com $0 \leq t \leq 4$.
b) Qual será seu valor daqui a quatro anos?
R: 131220 reais.

19) (UFABC - 2009) Em São Paulo, a lentidão no trânsito é medida em quilômetros. Em uma determinada via de alto fluxo estão sendo realizadas inúmeras obras visando à diminuição dos congestionamentos. Um engenheiro do departamento de trânsito prevê que o número de quilômetros de lentidão dessa via irá diminuir segundo a lei $n(t) = n(0) \cdot 4^{\frac{-t}{3}}$, em que $n(0)$ é o número de quilômetros de lentidão no início das obras e $n(t)$ é o número de quilômetros de lentidão existentes *t* anos depois. O tempo necessário para que o número de quilômetros de lentidão seja reduzido à medade daquele existente no início das obras será igual a:
A) 16 meses.
B) 17 meses.
C) 18 meses.
D) 20 meses.
E) 24 meses.

20) (PAIVA - 2016) A cada dia, o organismo humano elimina 25% da quantidade de uma determinada substância presente no sangue. Um teste apresentou que, em certo momento, um atleta apresentava 16 mg dessa substância no sangue.

a) Depois de 3 dias, qual era a quantidade da substância no sangue do atleta? R: 6,75mg.

b) Em quanto tempo a quantidade da substância no sangue do atleta ficou inferior a 9 mg?

R: Após 2 dias.

21) (UFRN-2009) Numa experiência realizada em laboratório, Alice constatou que, dentro de *t* horas, a população *P* de determinada bactéria crescia segundo a função $P(t) = 25 \cdot 2^t$.

Nessa experiência, sabendo-se que $\log_2 5 \approx 2{,}32$, a população atingiu 625 bactérias em, aproximadamente:

A)4 horas e 43 minutos.

B)5 horas e 23 minutos.

C)4 horas e 38 minutos.

D)5 horas e 4 minutos.

22) (UFMG-2001) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão pH = –log [H^+], em que [H^+] indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era [H^+] = $5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/L.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3.

Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

a) 7,26

b) 7,32

c) 7,58

d) 7,74

23) (UFSCar-SP - 2010) Um forno elétrico estava em pleno funcionamento quando ocorreu uma falha de energia elétrica, que durou algumas horas. A partir do instante em que ocorreu a falha, a temperatura no interior do forno pôde ser expressa pela função:

$$\mathrm{T(t)} = 2^{\mathrm{t}} + 400 \cdot 2^{-\mathrm{t}},$$

com *t* em horas, $t \geq 0$, e a temperatura em graus Celsius.

a) Determine as temperaturas do forno no instante em que ocorreu a falha de energia elétrica e uma hora depois. R: 202°C.

b) Quando a energia elétrica voltou, a temperatura no interior do forno era de 40 graus. Determine por quanto tempo houve falta de energia elétrica. (Use a aproximação $\log_2 5 = 2{,}3$.) R: 4 horas e 18 minutos.

24) [1] A escala mais conhecida para determinar qual a intensidade de um terremoto é a escala Richter, que foi desenvolvida por Charles F. Richter em 1935, no Instituto de Tecnologia da Califórnia, a partir do estudo de cerca de 200 terremotos ao ano. Veja, na tabela a seguir, quais os efeitos gerados por um terremoto, de acordo com seu valor na escala Richter:

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

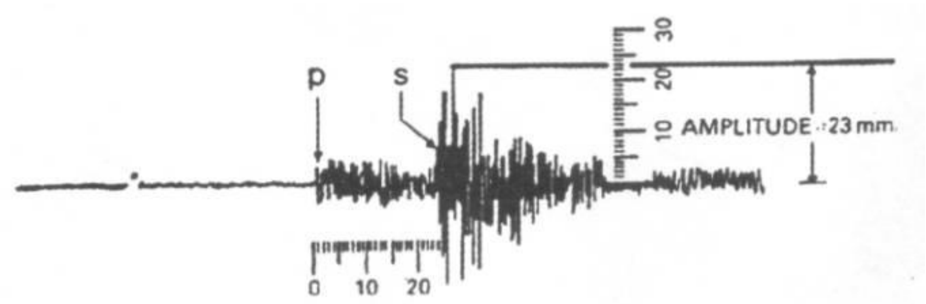
A fórmula desenvolvida por Richter é a seguinte:

$$M = \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10}(8 \cdot \Delta t) - 2{,}92$$

Em que:

- M é a magnitude do terremoto;
- A é a amplitude (em milímetros) medida com um sismógrafo;
- Δt é o intervalo de tempo (em segundos) entre a onda superficial (S) e a onda de pressão máxima (P).

Observe o gráfico obtido através de um sismógrafo de uma estação localizada no sul da Califórnia.



Gentil, N.; Greco, S.E.; Marcondes, C.A. (2000). <u>Matemática – Série Novo Ensino Médio</u>. São Paulo: Ática. 3ª edição.

Sabendo que o papel de um sismógrafo 'anda' a 1 mm/s e que no gráfico acima a distância entre as ondas P e S é de 24mm, calcule a magnitude desse terremoto e verifique quais os efeitos gerados por ele.

Use: $\log 2 = 0{,}301$; $\log 3 = 0{,}477$; $\log 23 = 1{,}362$

R: 5,28.

[1] Retirado de: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm

25) (JOAMIR, 2010 - Adaptado) Sabendo-se que o nível sonoro de um ambiente, em decibéis (dB), pode ser calculado por meio da lei de Weber-Fechner, que é dada por $N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, em que I é a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado (W/m^2), qual é o nível sonoro da respiração normal de uma pessoa que tem intensidade de $10^{-11} W/m^2$? Sabendo que uma conversa em um ambiente fechado emite um nível sonoro de 45 dB, qual a intensidade sonora dessa conversa?
R: $10^{-7,5}$ W/m².

26) (JOAMIR, 2010 - Adaptado) Nos últimos anos, terremotos causaram consequências que foram vivenciadas pela população de diversos países. Em maio de 2008, por exemplo, um terremoto de 7,8 graus atingiu a província de Sichuan, no sudoeste da China, onde milhares de pessoas foram mortas ou feridas. Em abril de 2009, um terremoto com magnitude menor - 6,3 graus -, mas que nem por isso deixou de oferecer graves consequências, atingiu a região de Abruzzo, na Itália. Esse fenômeno natural ocasionou a morte de cerca de 300 pessoas, deixou 20 mil desabrigadas e destruiu cerca de 15 mil edificações, dentre elas algumas de valor artístico e histórico.

Diante disso, apesar do enorme progresso já realizado pelos cientistas no sentido de identificar as causas de terremotos e desenvolver aparelhos que informam sua magnitude e origem, o empenho tem sido em encontrar uma maneira de prevê-los, para que a população possa ser alertada e tomar medidas de segurança necessárias antes de sua ocorrência.

Sabendo-se que a magnitude *y* de um terremoto na escala Richter pode ser expressa pela função $y = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$, na qual *x* representa a energia liberada em quilowatts-hora (kWh), pelo terremoto, determine:

a) A energia liberada pelo terremoto ocorrido em Sichuan e pelo terremoto ocorrido na região de Abruzzo; R: Aproximadamente 10^9 kWh em Sichuan e 10^4 kWh em Abruzzo.

b) A magnitude de um terremoto que libera $7 \cdot 10^9\, kWh$ de energia e suas possíveis consequências. R: 8 graus.