Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

A Identidade de Euler e suas constantes

Alberto Santos dos Reis

Goiânia

2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Alberto Santos dos Reis

Título do trabalho: A Identidade de Euler e suas constantes

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Alberto Santos dos Reis

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Thaynara Arielly de Lima

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 13 / 01 / 2020

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Alberto Santos dos Reis

A Identidade de Euler e suas constantes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientadora: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Thaynara Arielly de Lima.

Goiânia

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Reis, Alberto Santos dos
A Identidade de Euler e suas constantes [manuscrito] / Alberto Santos dos Reis. - 2019.
XLVII, 47 f.: il.

Orientador: Profa. Thaynara Arielly de Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2019.
Bibliografia.
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Leonhard Euler. 2. Identidade de Euler. 3. História da Matemática. I. Lima, Thaynara Arielly de , orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **16** da sessão de Defesa de Dissertação de Alberto Santos dos Reis, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos vinte dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezenove, a partir das 14 **hora**, no auditório do IME, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"A Identidade de Euler e suas constantes"**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Thaynara Arielly de Lima (IME-UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Ivonildes Ribeiro Martins (IME-UFG) e membro titular externo; José Eder Salvador de Vasconcelos (IFG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Thaynara Arielly de Lima, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos Aos vinte dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Thaynara Arielly De Lima**, **Professora do Magistério Superior**, em 23/12/2019, às 10:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **JOSÉ EDER SALVADOR DE VASCONCELOS**, **Usuário Externo**, em 08/01/2020, às 10:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Ivonildes Ribeiro Martins**, **Professor do Magistério Superior**, em 08/01/2020, às 20:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Alberto Santos dos Reis graduou-se em matemática, bacharelado, pela Universidade Federal de Goiás em 2007, atualmente é professor da educação básica pela Secretaria de Educação de Goiás.

Dedico este trabalho a Fabiana, minha amada esposa, a Helena, minha querida filha, a minha família e aos meus alunos que sempre torceram por mim.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida, a minha família por me ensinar a ser uma pessoa melhor a cada dia, a minha amada esposa por estar sempre ao meu lado;

Aos professores do PROFMAT por ampliarem minha fronteira do conhecimento, em especial cito: Eduardo Arbieto Alarcon, Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, Ivonildes Ribeiro Martins, Rosângela Maria da Silva,Tiago Moreira Vargas, Kelem Gomes Lourenço, Ewerton Rocha Vieira, e Maria Bethania S. dos Santos que estiveram mais próximos a mim, ministrando as aulas e me ajudando a me tornar um professor melhor do que fui antes;

Aos coordenadores do IME-UFG, ao ex-coordenador do PROFMAT Mario de Sousa pelo empenho e dedicação mostrados ao longo do curso;

Aos meus queridos colegas de turma pela parceria e apoio;

Ao meu ex-vizinho, ex-aluno, padrinho de casamento, colega de mestrado e profissão e querido amigo, Ricardo Tomé, pela parceria durante esse mestrado e apoio num momento importantíssimo da minha vida;

Em especial a Thaynara Arielly de Lima, minha colega de graduação e mestrado, por um ano, e agora minha estimada orientadora, que com paciência, simpatia e muita inteligência me inspirou a continuar esse trabalho nos momentos difíceis que pensava em desistir.

Resumo

Ensinar matemática contando a sua história pode se elucidar uma série de perguntas que evidenciam a necessidade dos alunos de entender o contexto no qual alguns conteúdos estão inseridos. Tais perguntas podem ser: quem inventou a matemática? Por que preciso estudar esse conteúdo? Além disso, esse procedimento pode ser uma forma de ilustrar as aulas e motivar os alunos, obtendo-se assim resultados mais significativos no processo de ensino e aprendizagem.

Saber como a matemática se desenvolveu e quem são seus criadores e descobridores é fundamental para dar sentido aos conteúdos do ensino básico, muitas vezes tido como prontos e acabados, como algo mecânico e sem uma história que caracterize sua descoberta ou criação. É com o intuito de levar tais elementos a esta etapa do ensino que este trabalho se propõe a relatar de forma objetiva a vida e o legado de um matemático brilhante, e extremamente criativo, Leonhard Euler. Bem como, dar ênfase a algumas de suas criações presentes na educação básica.

Propõe-se também dar destaque a uma de suas criações, $e^{i\pi}+1=0$, a identidade de Euler, considerada uma das mais belas de todos os tempos. Contando a história desta identidade, seguida de sua demonstração e caracterização de cada uma das constantes que a compõem.

Palavras-chave

Leonhard Euler, Identidade de Euler, História da matemática.

Abstract

Teaching math by telling its story can elucidate a series of questions that highlight the need for students to understand the context in which some content is inserted. Such questions may be: who invented mathematics? Why do I need to study this content? In addition, this procedure can be a way of illustration as lessons and motivating students, thus obtaining more significant results in the teaching and learning process.

Knowing how mathematics has developed and who its creators and discoverers are critical to making sense of the content of basic education, often taken as done and finished, as mechanical and without a story that characterizes its discovery or creation. It is in order to bring such elements to this stage of teaching that this paper proposes to objectively report the life and legacy of a brilliant and extremely creative mathematician, Leonhard Euler.As well, emphasize some of his creations present in basic education.

It is also proposed to highlight one of his creations, $e^{i\pi} + 1 = 0$, the identity of Euler, considered one of the most beautiful of all time. Telling the history of this identity, followed by its demonstration and characterization of each of the constants that compose it.

Keywords

Leonhard Euler, identity of Euler, history of Mathematics.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Com a intenção de proporcionar, aos estudantes dos níveis fundamental, e do ensino médio, a ressignificação e a estruturação de seus conhecimentos matemáticos, este presente trabalho se propôs a fazer uma pesquisa bibliográfica sobre a identidade de Euler, seu autor e os números que a constituem, destacando seus aspectos históricos.

Uma motivação para a escolha deste tema, A identidade de Euler e suas constantes, surgiu da experiência, de 15 anos, do autor em sala de aula, sempre que os alunos perguntavam: por que estudar matemática ou esse conteúdo específico? A matemática é inventada ou é criada? Quem inventou a matemática? Estas perguntas surgem da necessidade de se compreender a história que envolve a criação e a descoberta da matemática, particularmente, neste trabalho, os números, equações, funções e a notação, forma de se escrever a matemática.

Tal escolha se justifica, pois essa equação está entre as mais importantes e belas da matemática, uma vez que conecta cinco constantes (0, 1, π, e, i) e as três operações adição, multiplicação e exponenciação. Além disso, como tais constantes e operações aparecem com frequência em assuntos estudados nos ensino fundamental ou médio, o aprofundamento sobre história, construção e aplicações dos elementos envolvidos na Identidade de Euler pode gerar material interessante para ser apresentado aos estudantes da educação básica, uma vez que nessa etapa do ensino, estes assuntos não são tratados com essa abordagem.

O estudo da Identidade de Euler pressupõe uma apresentação da história de Euler, um dos matemáticos mais importantes, aos alunos do ensino básico. Inter-relacionar história, aspectos algébricos e aplicações dos conteúdos estudados podem figurar como um método de ensino que desperta no aluno a curiosidade em aprender mais profundamente sobre os elementos envolvidos nesta interessante identidade.

A história de Leonhard Euler, de sua identidade e de cada um dos números que a compõem têm importância fundamental na educação básica. Haja vista que os Parâmetros Curriculares Nacional de 1997 (PCN) enfatizam que a história da matemática bem como outros recursos didáticos e metodológicos podem contribuir significativamente para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina. Ainda mais se considerarmos que a maneira como se ensina matemática atualmente nas escolas públicas brasileiras tem se tornado mecânica e sem atrativos distanciando-se cada vez mais das ideias que a conceberam.

Um dos principais frutos da utilização da história da matemática no ensino básico é que o aluno percebe a matemática como um conhecimento dinâmico, resultado de uma evolução, com vários fatos que prendem a atenção. Então o estudante entende que esta ciência avança através de estudo, dedicação e criatividade de seus criadores e inventores.

Com o intuito de explanar o tema objeto deste estudo, este trabalho está organizado em 3 capítulos culminando com as considerações finais. O Capítulo 1 tem como principal objetivo trazer um esboço da história de Leonhard Euler e seu legado para a humanidade, este sem dúvida foi um grande matemático, uma vez que foi considerado o matemático mais produtivo de todos os tempos e um dos quatro maiores ao lado de Arquimedes, Newton e Gauss. Euler publicou cerca de 866 artigos e livros em vários ramos da matemática bem como da física. Tem-se ainda a história de sua famosa equação que de acordo com Crease (2008), foi eleita em 1988 pelo jornal de matemática *The Mathematical intelligencer* dentre vinte teoremas e equações a mais bela de todas.

O Capítulo 2 consiste nas deduções da equação de Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$ e como ela harmoniza essas cinco constantes de naturezas tão distintas. Uma dedução será de forma algébrica utilizando séries de potências e a outra também algébrica utilizando o teorema de De Moivre. Em seguida, será feita uma representação no plano de Argand-Gauss da identidade de Euler.

O Capítulo 3 é dedicado às constantes, 1, 0, π, e e i que compõem a Identidade de Euler destacando seu contexto histórico, suas aplicações tanto na matemática quanto em outras áreas e como elas aparecem e são tratadas na educação básica.

Por fim, tem-se as considerações finais onde se faz ponderações sobre as informações, ideias e conceitos apresentados ao longo deste trabalho.

Capítulo 1

Apanhado Histórico da Vida de Leonhard Euler e seu Legado

Neste capítulo trataremos de alguns aspectos da vida e obras de um dos matemáticos mais importantes. O espaço destinado a esses relatos bem com a natureza e finalidade deste trabalho são pequenos para conter a descrição de uma pessoa tão especial quanto Leonhard Euler. Existem alguns livros, por exemplo,Debnath (2010) e Fellmann (2007) que tratam muito bem e dão narrações mais completas da vida e do legado dessa personalidade ilustre fazendo jus a suas importantes contribuições a matemática e a física.

A descrição contida aqui tem por objetivo ilustrar como Euler encontrou a matemática e como ele a transformou. Foram selecionados assuntos mais pertinentes a serem utilizados na educação básica, possibilitando aos alunos entrarem em contato com a história desse notável matemático e com os resultados que são utilizados nessa etapa do ensino que muitos alunos sequer sabem quem os conceberam.

Este capítulo está baseado nas referências: Boyer (1974), Crease (2008), Debnath (2010), Fellmann (2007), Nahin (2006), Sandifer (2015) e Wilson (2018).

1.1 História de Euler e contribuições gerais

A cidade da Basileia, na Suíça, foi o local de nascimento de Leonhard Euler que nasceu no dia 15 de Abril de 1707, filho de Paul Euler (1670 -1745) e de Margarete Brucker. (filha de um ministro religioso). O pai de Euler era ministro calvinista e também um matemático amador talentoso, tendo sido aluno de Jacob Bernoulli. Paul ensinou a seu filho a base da matemática, mas desejava que ele seguisse a vocação religiosa e se tornasse ministro, como relata Debnath (2010).

Seguindo os conselhos e orientação do pai, Euler entrou para a Universidade da Basileia e estudou teologia e hebraico graduando-se com honras com a idade de 13 anos. Felizmente, suas habilidades extraordinárias para a matemática e física foram reconhecidas por Johann Bernoulli (1667-1748) que era professor de matemática na Universidade da Basileia e o maior matemático da época.

Johann Bernoulli dava aulas particulares aos sábados a tarde para Euler. Tão logo Johann percebeu o potencial, de seu aluno, para se tornar um grande matemático convenceu Paul a deixar seu filho seguir essa carreira. Todo esse contexto possibilitou que Euler se torna amigo de Daniel e Nicolas Bernoulli, filhos de seu professor, foi sob a influência desses amigos, pai e filhos, que ele encontrou sua vocação para a matemática obtendo reputação mundial.

O destino de Euler como um matemático de reconhecimento universal e sua carreira estão intimamente ligados à família Bernoulli. Segundo Boyer (1974) não existe outra família na área da matemática que tenha tantos matemáticos célebres quanto a família Bernoulli. Eles se mudaram da Antuérpia para a Basileia e alguns deles se destacaram na matemática e na física. Sendo que Jacob I (1654 - 1705) foi o primeiro deles a conseguir proeminência na matemática. Eles fizeram contribuições para o cálculo diferencial, teoria das probabilidades e dinâmica dos fluidos. A árvore genealógica dessa importante família está ilustrada na Figura 1.1, logo a seguir.

Euler aos 17 anos recebeu o título de mestre por escrever uma comparação da filosofia natural de René Descartes com a de Isaac Newton e então começou seus estudos independentes e pesquisas em matemática. Aos 19 anos ele submeteu dois artigos a Academia de Ciência de Paris, um sobre os mastros de navios e o outro sobre ciências do som. Esses artigos marcaram o início de uma carreira prolífica na pesquisa tanto em matemática quanto em ciências.

Euler falava fluentemente algumas línguas, especialmente latim, francês, alemão, e russo ele de forma efetiva e eficiente utilizava essas línguas para escrever seus artigos,

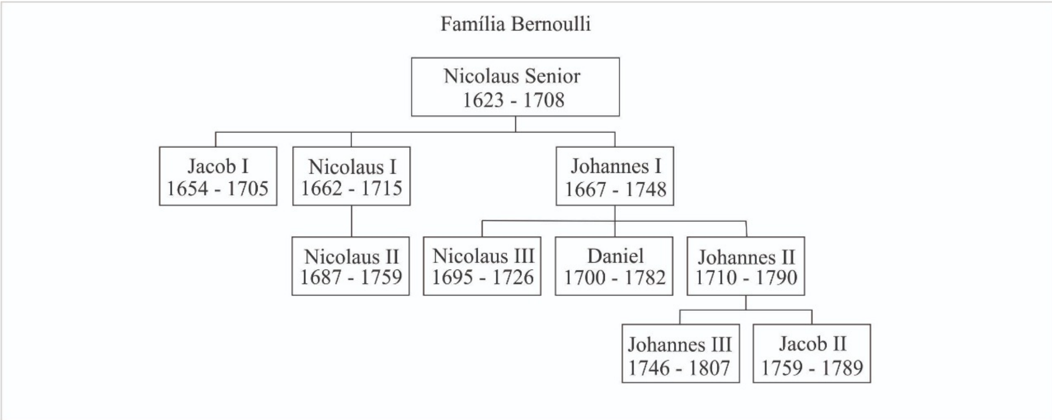


Figura 1.1: Árvore genealógica da família Bernoulli[1]

livros e correspondências. Além disso, também possuía um amplo conhecimento da história da matemática e das ciências e tinha uma memória fenomenal para eventos históricos e pessoas. Mesmo não sendo suas áreas de trabalho Euler tinha conhecimento em botânica, química e medicina.

Segundo Crease (2008), Leonhard Euler foi o matemático mais produtivo, produzindo cerca de 866 artigos e livros, também possuía uma memória prodigiosa conseguindo fazer conexões entre áreas da matemática que pareciam distintas. Por volta de 1730, já tinha alcançado considerável reputação em matemática pura e aplicada, sendo que nesse mesmo ano ele foi selecionado para trabalhar como professor de física na academia de São Petersburgo e em 1733 ele sucedeu seu amigo Daniel Bernoulli na cadeira de matemática. Por causa de seu trabalho na faculdade e sua grande reputação como um matemático brilhante na Europa, ele decidiu estabelecer-se na Rússia e casou-se com Catharina Gsell em 1734 e tiveram treze filhos.

Euler permaneceu em São Petersburgo por 14 anos, nesse tempo ele publicou vários artigos originais, tanto em matemática quanto em física, e também escreveu muitos livros sobre matemática. Um dos maiores problemas não resolvidos naquela época era chamado de problema da Basileia que foi formulado por Pietro Mengoli (1625 - 1686) em 1664. Os irmãos Bernoulli, Jakob e Johann, fizeram várias tentativas para resolvê-lo, contudo não conseguiram. O problema da Basileia consistia em encontrar a soma dos inversos dos quadrados dos números inteiros positivos, isto é, calcular a soma:

[1]Fonte da Figura 1.1: Disponível em https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2195573. Acesso em: 27 de dez. 2019

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .$$

Em 1735 Euler mostrou que esse problema tem soma igual a $\frac{\pi^2}{6}$.

Em 1736 umas das pequisas mais influentes de Euler foi a formulação e solução originais do famoso problema das sete pontes de Königsberg, dando início a uma nova área da matemática conhecida, atualmente, como a Teoria dos Grafos. Nesse mesmo ano ele também publicou um tratado em dois volumes sob o título de *Mechanica sine molus scientia analytice exposita*. Este trabalho tratou de mecânica analítica incluindo: mecânica celeste, balística, mecânica das partículas, dos corpos rígidos, dos corpos flexíveis e elásticos bem como da dinâmica dos fluídos, guiando-o também a formular a mecânica newtoniana.

Figura 1.2: Leonhard Euler 1756 large oil painting by Jakob Emanuel Handmann[2]

Embora os estudos em geometria em geral e os poliedros, em particular, tenham sido ambientados na Matemática grega, ficou para Euler descobrir uma fórmula topológica para os poliedros. Ele pode ser considerado o pai da topologia. Em 1752 encontrou a

[2]Fonte da Figura 1.2: Disponível em http://eulerarchive.maa.org/. Acesso em: 27 de dez. 2019

famosa e celebrada relação:

$$V + F = 2 + A$$

em que V denota o número de vértices de um poliedro convexo, F o número de faces e A a quantidade de arestas.

Também, foi o mais influente inventor de notações matemáticas na história. Alguns dos símbolos importantes que ele introduziu ou padronizou são:

- π, para representar a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo;
- e, para a base dos logaritmos naturais, provavelmente por ser a primeira letra da palavra exponencial;
- i, o número imaginário para $\sqrt{-1}$;
- $f(x)$, para uma função de variável x;
- $e^x, \sin x, \cos x$ e $\log_a x$ como funções de x no cálculo e na análise.

Em 1741, após 14 anos trabalhando em São Petersburgo, Euler recebeu um convite do imperador Frederico o Grande e partiu para a Academia de Berlim. Embora, Frederico tivesse o espírito renascentista, contudo, Euler manteve uma constante correspondência com seus colegas na Rússia. Ele achou Berlim menos agradável que São Petersburgo. Ademais, Frederico o Grande estava acostumado com reverências e cumprimentos cerimoniosos, e o reservado Euler era contrário a isso como descrito em Crease (2008).

Diante desse contexto, Euler retorna a São Petersburgo, em 1766, a convite de Catarina a Grande, depois de ficar quinze anos em Berlim. Mesmo recebendo toda ajuda possível nesse necessário, seus problemas de saúde se agravaram. Ele descobriu que estava com catarata no olho bom, portanto a cegueira seria questão de tempo. Então, aprendeu a escrever com giz num quadro e ensinou seus filhos a copiar seus cálculos. Euler prosseguiu no mesmo ritmo por mais 17 anos, calculando, revisando, compondo, conversando enquanto andava ao redor de uma mesa, seus filhos e seus assistentes escreviam suas palavras. Dessa forma, completamente cego, ele produziu quase metade de sua obra,Crease (2008).

Mencionando as características pessoais de Euler, tem-se que ele era extremamente consciente e profundamente orgulhoso de sua religiosidade e de sua herança cultural suíça. Ao longo de sua vida ele permaneceu com sua cidadania e manteve os valores familiares e a fé em Deus que ele herdara de seus pais. Ele sempre foi muito cordial com seus parentes, amigos, alunos e colegas. Euler também amava música e teoria musical. Esse amor estava diretamente relacionado com suas investigações matemática em teoria musical.

Em toda sua vida Euler manteve correspondência de maneira amigável e respeitosa com muitos matemáticos e cientistas famosos por toda a europa. Dentre esses pode-se citar: Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Christian Golback. J.N. Deslie, P.L.M. Maupertuis, Alexis Claude Clairaut, Jean D'lambert, J.L Langrange e Jean Henri Lambert. Estes foram suas principais fontes de trocas de novas ideias e descobertas que o ajudaram a resolver problemas e descobrir novos resultados. Embora fosse um grande matemático e recebesse muitos prêmios e honras ele sempre manteve sua humildade e modéstia.

Em 18 de setembro de 1783, Euler estava em sua rotina diária, ele deu aula particular a um de seus netos, trabalhou em alguns problemas sobre as trajetórias dos balões e pensava sobre possíveis órbitas para o planeta urano,recém-descoberto, quando o cachimbo de repente caiu de sua boca. No mesmo suspiro, ele parou de fazer contas e de viver,Crease (2008).

1.2 História da Identidade de Euler

A expressão $e^{i\pi} + 1 = 0$, descrita como: a base dos logaritmos naturais (um número irracional) elevado à potência de pi (outro número irracional) multiplicado pela raiz quadrada de menos um (um número imaginário) mais um é um inteiro: zero. Tem sua descoberta atribuída a Leonhard Euler. Tal expressão recebe muitas designações alguns a consideram como equação de Euler como em Crease (2008), e em Wilson (2018), ela também recebe o nome de fórmula de Euler em Nahin (2006) e identidade de Euler em Sandifer (2015) . Neste trabalho essa expressão receberá o nome de Identidade de Euler.

A Identidade de Euler fez parte de uma investigação e, posteriormente, de um julgamento criminal. Em 2004, um estudante de pós-graduação em física teórica participou de uma série de vandalismos em revendedoras de automóveis em Los Angeles nos Estados Unidos. Ele escreveu a identidade de Euler num carro, essa pista foi usada pelo FBI para encontrá-lo, como descrito em Crease (2008).

A identidade de Euler é obtida como um caso particular de resultados mais gerais, existem duas fórmulas que estão intimamente relacionadas a esta identidade. A primeira delas é chamada de fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.1}$$

em que $i = \sqrt{-1}$. Essa fórmula será demonstrada no Capítulo 2. A identidade de Euler é uma consequência de (1.1), tomando $\theta = \pi$. E a segunda é a fórmula de De Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$$

que é uma consequência de (1.1), uma vez que:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$$

O matemático inglês Roger Cotes (1862-1716) estava estudando problemas sobre comprimento de arco de espirais e, por volta de 1712, no decorrer de seus estudos descobriu uma fórmula equivalente à de Euler, e parece ter sido o primeiro a descobrir essa equivalência. A seguir tem-se a fórmula que Cotes encontrou

$$\ln(\cos q + i\sin q) = iq, \tag{1.2}$$

podendo ser transformada na fórmula de Euler aplicando e em ambos os lados de (1.2) como a seguir:

$$e^{\ln(\cos q + i\sin q)} = e^{iq},$$

que resulta em:

$$e^{iq} = \cos q + i\sin q.$$

Contudo, Rogers Cotes não fez isso. Além do mais ele morreu em 1716 sem publicar muitos de seus trabalhos.

Johann Bernoulli (1667 - 1748) em 1702 encontrou uma fórmula para a área de um setor circular de raio a, centrado na origem entre o eixo x e o raio até o ponto (x, y)

como sendo:

$$\frac{a^2}{4i} \cdot \ln\left(\frac{x+yi}{x-yi}\right). \tag{1.3}$$

Em 1727 Johann Bernoulli e Euler estavam estudando a equação $y = (-1)^x$ e descobriram a natureza dos logaritmos de números negativos. Bernoulli então argumentou que $\ln(-1) = 0$, porque

$$0 = \ln(+1) = \ln\left((-1)^2\right) = 2\ln(-1)$$

o mesmo argumento aplica-se a qualquer número negativo. Euler fez $x = 0$ em (1.3) e mostrou que $\frac{a^2}{4i} \cdot \ln(\,-1)$ é finito e diferente de zero. Entretanto, se $\ln(\,-1) = 0$, a área de um quarto de círculo seria 0, o que não é verdade.

Caso Euler tivesse prosseguido nessa direção e resolvido a equação:

$$\frac{a^2}{4i} \cdot \ln(\,-1) = \frac{\pi a^2}{4}$$

em que $\frac{\pi a^2}{4}$ é a área de um quarto de círculo. Ele encontraria que $\ln(\,-1) = \pi i$ e isto implica que $e^{\pi i} = -1$, contudo Euler não fez isso. Nos parágrafos precedentes percebe-se que Cotes, De Moivre, Johann Bernoulli e Euler, até por vota de 1730, tinham todas as peças que poderiam ser organizadas para descobrir a fórmula de Euler (1.1). Entretanto, os problemas nos quais eles trabalhavam não dependiam diretamente dessa fórmula e portanto naquela época não a descobriram. Contudo, por volta de 1740 Euler estava descobrindo as propriedades das funções trigonométricas e isso possibilitou que ele a encontrasse e a demonstrasse de forma rigorosa. A identidade de Euler é um caso especial da fórmula de Euler, contudo ele nunca escreveu a identidade que leva seu nome como descrito em Sandifer (2015).

Nesse trabalho bem como nas referências aqui apresentadas a identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$ é atribuída a Euler, observando que de acordo com Wilson (2018) tal identidade não aparece em nenhuma de suas publicações. Além disso, não se sabe ao certo quem primeiro chegou a essa expressão explicitamente, embora Jacques Français a escreveu em 1813 em um jornal de matemática francês. Atualmente, todos atribuem a descoberta dessa identidade a Leonhard Euler em honra as realizações desse grande matemático.

Capítulo 2

Deduções da Identidade de Euler

Neste capítulo será apresentada a Identidade de Euler com suas constantes bem como duas deduções analíticas para essa identidade sendo que a primeira terá uma abordagem via séries de potências e a outra via fórmula de De Moivre e concluindo como uma representação dessa identidade no plano de Argand - Gauss. Essa identidade geralmente aparece de duas formas equivalentes como:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

e como:

$$e^{i\pi} = -1$$

e que também podem aparecer com o π antes do i, como na forma algébrica de um número complexo $z = a+bi$. A Identidade de Euler envolve cinco dos mais importantes números da matemática:

- o número 1: a base do sistema de contagem;
- o número 0: o número que expressa o nada;
- o número π: a base da medida do círculo;
- o número e: relacionado ao crescimento exponencial;
- o número imaginário i: a raiz quadrada de -1.

Essa identidade, de acordo com Wilson (2018), é um caso especial de um resultado mais geral publicado em *introductio in Analysis Infinitorum* de Leonhard Euler, em 1748. Esse resultado mais geral é chamado de Fórmula de Euler, a saber:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

essa fórmula conecta a função exponencial às funções trigonométricas $\cos x$ e $\sin x$. Tal equação teve uma homenagem em um selo postal suíço, ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Euler e sua equação, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + isen\varphi$ [1]

Um fato interessante da Fórmula de Euler é como ela consegue harmonizar de tal forma a função exponencial que tende ao infinito quando x torna-se grande, e as funções trigonométricas seno e cosseno que são periódicas cujas imagens estão entre -1 e 1 juntamente com a unidade imaginária i. Os gráficos dessas funções estão nas Figuras 2.2, 2.3 e 2.4. Este Capítulo se baseia em Stewart (2007) e Wilson (2018).

[1] Fonte da Figura 1.2: Disponível em http://eulerarchive.maa.org/. Acesso em: 27 de dez. 2019

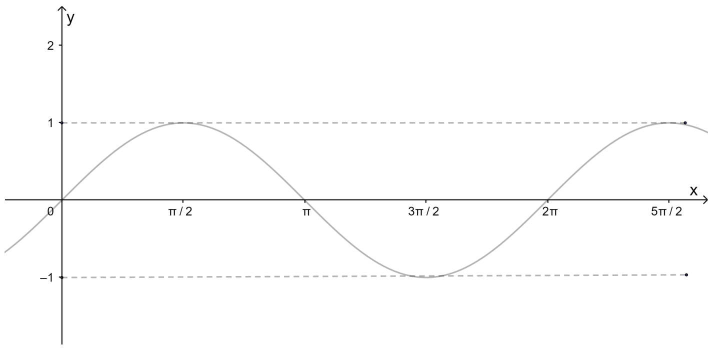


Figura 2.2: Gráfico da função seno $y = \sin x$[2]

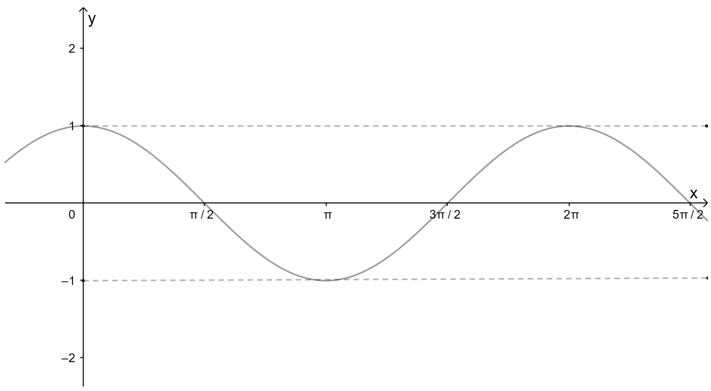


Figura 2.3: Gráfico da função cosseno $y = \cos x$[3]

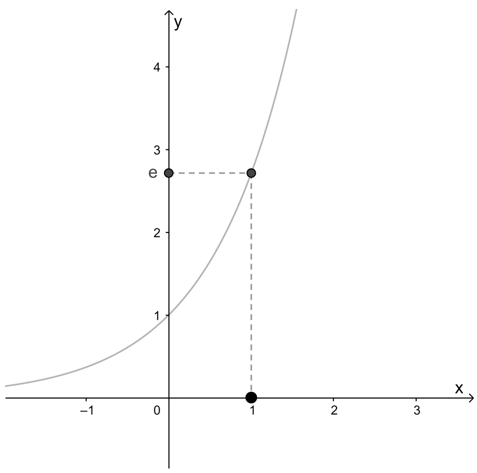


Figura 2.4: Gráfico da função exponencial $y = e^x$[4]

[2]Fonte da Figura 2.2: Feita pelo autor utilizando o Geogebra.
[3]Fonte da Figura 2.3: Feita pelo autor utilizando o Geogebra.
[4]Fonte da Figura 2.4: Feita pelo autor utilizando o Geogebra.

2.1 Abordagem analítica

Os requisitos básicos para a dedução da Fórmula de Euler e, consequentemente da Identidade de Euler, faz-se uso do desenvolvimento das funções: exponencial $y = e^x$, cosseno $y = \cos x$ e seno $y = \sin x$ em séries de Maclaurin, contudo, aqui nesse trabalho não será dado os pré-requisitos para justificar que tais funções podem ser desenvolvidas em série de Maclaurin, nem que se pode fazer as operações com tais desenvolvimentos. Assumir-se-á todos esses detalhes. Entretanto em Stewart (2007) encontra-se a fundamentação teórica das séries de potências em especial da série de Maclaurin.

Considerando as expansões da função exponencial $y = e^x$, e das funções trigonométricas $y = \cos x$ e $y = \sin x$ em séries de potências tem-se:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots ,$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots ,$$

e substituindo x por ix na série de potências de $y = e^x$ obtém-se a seguinte expressão:

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \cdots ,$$

como $i^2 = -1$, porque $i = \sqrt{-1}$, segue que $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$ e assim por diante. Então tem-se que:

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \cdots ,$$

$$e^{ix} = \left\{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right\} + i\left\{\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right\}$$

de onde obtém-se

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

Para obter a identidade de Euler é necessário apenas considerar $x = \pi$ nessa equação, de fato, fazendo essa consideração tem-se:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

que resulta em:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{2.1}$$

Euler deu mais do que uma demonstração de sua fórmula. Esta prova que será aqui delineada aparece em *Intruductio in Analysin Infinitorum* de 1748 e é iniciada com os resultados de De Moivre‘s possivelmente ele as tenha descoberto de forma independente. Considere os resultados de De Moivre´s:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

e

$$(\cos x - i \sin x)^n = \cos nx - i \sin nx,$$

adicionando e subtraindo essas duas identidades deduz-se que:

$$\cos nx = \frac{1}{2}\{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n\}$$

e

$$\sin nx = \frac{1}{2i}\{(\cos x + i \sin x)^n - (\cos x - i \sin x)^n\}.$$

Então, tomando x infinitamente pequeno e n infinitamente grande, de tal maneira que o produto nx seja um valor finito denominado de u. Como $x = \frac{u}{n}$ é pequeno, e assim as séries de potências para $\sin x$ e $\cos x$ têm como aproximações que $\sin x = x = \frac{u}{n}$ e $\cos x = 1$, e os termos x^2, x^3,$\cdots$ podem ser ignorados pelo fato do x ser pequeno. Isto resulta em:

$$\cos u = \frac{1}{2}\{(1 + \frac{iu}{n})^n + (1 - \frac{iu}{n})^n\}$$

e

$$\sin u = \frac{1}{2i}\{(1+\frac{iu}{n})^n - (1-\frac{iu}{n})^n\}$$

fazendo n crescer indefinidamente, isto é, usando um processo de limite onde n tenda ao infinito, para um z qualquer tem-se que $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ tende a e^z. Desse modo $\left(1+\frac{iu}{n}\right)^n$ tende a e^{iu} e analogamente $\left(1-\frac{iu}{n}\right)^n$ tende a e^{-iu} isso resulta em:

$$\cos u = \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu})$$

e

$$\sin u = \frac{1}{2i}(e^{iu} - e^{-iu})$$

escrevendo essas últimas duas expressões em função de e^{iu} tem-se

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

e

$$e^{-iu} = \cos u - i \sin u$$

Novamente tomando $u = \pi$ na primeira dessas essas expressões e $u = -\pi$ na última tem-se a identidade de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

2.2 Representação geométrica

Em Wilson (2018) destaca-se que o professor L.W.H. Hull ilustrou a identidade de Euler no plano de Argand - Gauss. O procedimento foi o seguinte ele considerou o desenvolvimento de e^x em série de potências, e colocou $x = i\pi$, obtendo:

$$e^{ix} = 1 + i\pi - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{i}{6}\pi^3 + \frac{1}{24}\pi^4 + \frac{i}{120}\pi^5 - \frac{1}{720}\pi^6 + \cdots .$$

Então, partindo do ponto 1 no plano e acrescentando $i\pi$, subtraindo $\frac{1}{2}\pi^2$ e $\frac{i}{6}\pi^3$, acrescentando $\dfrac{1}{24}\pi^4$ e $\dfrac{i}{120}\pi^5$, subtraindo $\dfrac{1}{720}\pi^6$, e assim por diante. Esse procedimento produziu um caminho em forma de espiral que converge para a soma da série, que é $e^{i\pi} = -1$, como ilustrado na Figura 2.5.

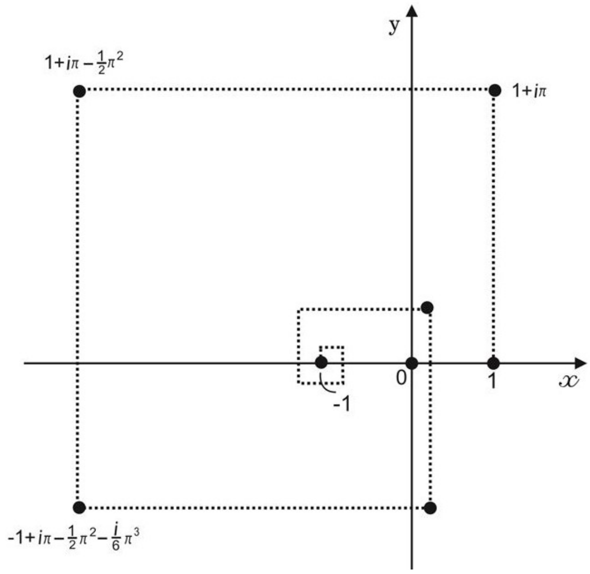


Figura 2.5: Representação geométrica da Identidade de Euler[5]

[5]Fonte da Figura 2.5: Recriada de Wilson (2018)

Capítulo 3

As constantes da Identidade de Euler

O objetivo deste capítulo é tratar de cada uma das contantes que aparecem na identidade de Euler bem como da importância de cada uma delas, e da forma como elas são tratadas no ensino de matemática na educação básica.

Sobre a importância dessas constantes Maor (2008) diz que a fórmula de Euler está entre as mais importantes da matemática e além disso conecta as cinco constantes e as três operações (adição, multiplicação e exponenciação) mais importantes da matemática. Estas constantes simbolizam ou representam os quatros principais ramos da matemática clássica: Aritmética representada pelo 0 e pelo 1; Álgebra pelo i; Geometria pelo π e Análise pelo e.

Para Devlin (2018) essas contantes são cinco números diferentes, com origens distintas, inventadas para tratar de questões diversas. E, no entanto, todos juntos formam uma equação gloriosa e intrincada, cada uma desempenhando um papel perfeito ao se misturarem e se unirem formando uma composição matemática perfeita.

Wilson (2018) afirma que essas constantes são cinco dos mais importantes números em matemática, porque: o número 1 geralmente marca o início dos dos sistemas de contagem; o número 0 representa o nada; o número π é a base da medida do círculo; o número e está conectado ao crescimento exponencial e o número i é um número imaginário (números complexos), a raiz quadrada de -1.

As constantes 0, 1, e, i e π aparecem na educação básica brasileira em diferentes momentos. Os números 0 e 1 aparecem no conjunto dos números naturais, conjunto esse ensinado no 6° ano do ensino fundamental, mas esses números não recebem nenhum tratamento especial, nenhum tipo de destaque, são tratados apenas como elementos do conjunto dos números naturais.

Já o número π aparece no 8° ano do ensino fundamental, e muitas vezes é limitado a uma aproximação de duas casas decimais que os alunos assumem como sendo o valor do símbolo π. A constante e aparece em aplicações da função exponencial, que é ensinada na 1^a série do ensino médio e também limita-se a importância desse número ao seu uso em alguns exercícios de aplicações em que ele aparece, como por exemplo, as aplicações que se encontram no final da Seção 4.4 e podem ser vistas na Figura 3.8. Quanto ao i quando se ensina números complexos na 3^a série do ensino médio ele é citado quando se fala sobre a forma algébrica do número complexo e na operação de multiplicação desses números onde se tem potências de i.

A construção deste capítulo baseia-se nas referências Beckmann (1971), Contador (2012), Figueiredo (1985), Maor (2008), Nahin (1998), Posamentier e Lehmann (2004), Stewart (2014) e Stewart (2016).

3.1 A constante 1

Desde o início dos tempos os povos tinham a necessidade de contar. Manter o controle de suas ovelhas, a medida de suas terras, questões financeiras e muitos outros problemas de demandavam símbolos para representar quantidades. Para fazer isso formavam-se pilhas de pedras, entalhe em varas ou em ossos para representar quantidades mesmo sem haver símbolos para os números. Usava-se também pequenos objetos de argila tais como: cones, cilindros e esferas que representavam gêneros básicos da época. Pequenas esferas de argila representavam volumes de grãos, cilindros significavam animais, os que tinham formato de ovo referiam-se a jarros de óleo. Como na Figura 3.1. O número 1 é onde se começa a contar. Ele está presente em sistemas

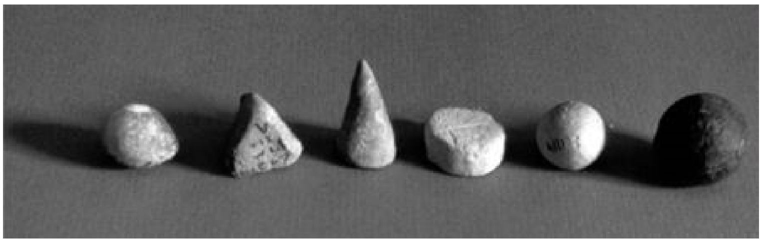


Figura 3.1: Cones, esferas e discos representando medidas [1]

[1] Fonte da Figura 3.1: Retirada de Roque (2012)

de numeração, marcando o início deste sistemas. No sistema de numeração de base 10 tem-se que dado qualquer número inteiro positivo, forma-se o seguinte acrescentado 1, a seguir tem-se alguns exemplos dessa ideia

- $2 = 1 + 1$
- $3 = (1 + 1) + 1$;
- $4 = ((1 + 1) + 1) + 1$

e assim por diante. O número 1 é o menor inteiro positivo. Ele é a unidade indivisível da aritmética: o único número inteiro positivo que não pode ser obtido pela soma de dois números inteiros positivos menores. O número 1 também expressa a unicidade que é uma importante ideia matemática. Um objeto matemático com uma propriedade particular é único se somente um objeto tem essa propriedade Stewart (2016).

3.2 A constante 0

Embora a invenção do zero seja atribuída aos hindus, em muitos sistemas mais antigos, apareceram sinais evidentes do uso do zero, não do modo como o conhecemos e empregamos atualmente. Surgiu em sistemas para anotar números. Era um recurso de escrita (notação). Os indianos também usavam *shunya* (significando vazio) e o que de fato parece ser um símbolo para o zero apareceu por volta de 876 D.C. e era um pequeno círculo Stewart (2016).

Os babilônios criaram a primeira numeração posicional e desenvolveram símbolos para representar o número zero. Lembrando que esse povo tinham um sistema de numeração de base 60. Por volta de 300 A.C. Esses símbolos foram criados para preencher espaços vazios, isto é, eram empregados para registrar os números 1070 e 2005 , contudo não se utilizavam para dar o resultado de uma conta como $30 - 30$ e $40 - 40$.

Na Índia, inventou-se um símbolo para representar o nada, a falta, o nulo. Um número que atualmente possui características peculiares, a saber:

- todo número multiplicado por zero é igual a zero;
- todo número adicionado a zero não se altera;
- todo número diferente de zero elevado a zero é igual a 1;

- não se pode dividir nenhum número por zero.

Algumas dessas características foram formuladas pelos matemáticos hindus Aryabhata e Brahmagupta. Se n é um número qualquer então:

$$n \cdot 0 = 0 \tag{3.1a}$$

$$n + 0 = n \tag{3.1b}$$

$$n - 0 = n \tag{3.1c}$$

Com a ausência do zero a numeração ficou estagnada por centenas de anos e cálculos elementares eram extremamente complicados de se fazer. Aristóteles afirmava que tal número perturbava os demais e deveria ser proibido.

O nome zero é um termo italiano para representar o nada, surgiu inicialmente do termo hindu *sunya* que significa vazio, espaço em branco. Esse termo hindu foi traduzido para o árabe *sifr* que também significa vazio, depois *sifr* foi traduzido para o latim como *zephirum* que sofreu várias mudanças chegando finalmente ao nome zero.

Os maias, civilização da América Central, empregavam um sistema numérico de base 20 e também utilizavam um símbolo para o zero, veja figura 3.2.

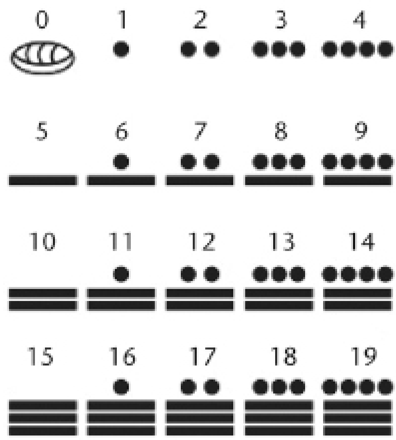


Figura 3.2: Sistema de numeração maia[2]

[2]Fonte da Figura 3.2: Retirada de Stewart (2016)

3.3 A constante π

Em sua forma simples e bela o círculo abriga o número π que é uma das constantes mais famosas e importantes da matemática Beckmann (1971). Tanto no cálculo do comprimento da circunferência quanto no calculo da área do círculo essa constante está presente. A história desse número reflete bem de perto a história da humanidade.

A letra grega π(lê-se pi) foi utilizada para designar a relação entre o comprimento do círculo e o diâmetro em 1706, pelo matemático galês William Jones na obra *Synopsis Palmariorum Matheseos*, embora o uso do símbolo não tenha sido popularizado até o ano de 1737, quando foi utilizada por Leonhard Euler, em *Variae Observationes Circa Series Infinitas*.

A constante π é definida como sendo a razão entre o comprimento da circunferência (C) pelo diâmetro do círculo (D). Em notação atual tem-se:

$$\pi = \frac{C}{D}$$

ademais $D = 2r$, onde r denota o raio do círculo. Esta razão é a mesma para todos os círculos independentemente do tamanho. Esse resultado foi provado por Euclides no livro XII de Os elementos. Na Figura 3.3 tem-se um círculo de raio r e diâmetro D.

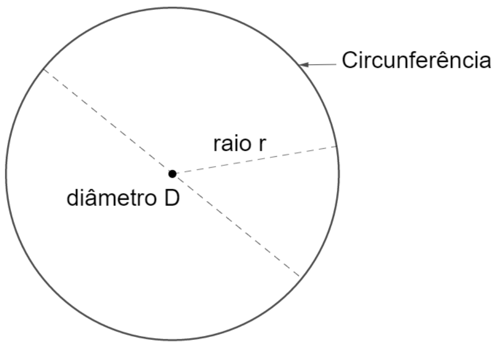


Figura 3.3: Representação de um círculo[3]

O número π surge para alunos nas escolas públicas brasileiras quando eles estão cursando o oitavo ano do ensino fundamental II, momento esse em que os livros didáticas apresentam como calcular o comprimento da circunferência, bem como a área do círculo. E em muitos desses cálculos que os alunos fazem utiliza-se, como aproximação

[3]Fonte da Figura 3.3:Feita pelo autor utilizando o Geogebra.

para π, o valor $3,14$. Contudo os alunos tem apenas a explicação de como obter esse número usando a definição citada no parágrafo anterior, sem entretanto terem alguma ideia de como chegar ou encontrar a fórmula para o cálculo da área do círculo.

No que segue tem-se uma maneira de explicar para os alunos como obter a área do círculo em função do raio r, não sendo esta uma prova ou demonstração de tal fato. A ideia para a fórmula da área do círculo é obtida tomando dois círculos de raio r, um sombreado e o outro não, e supor que cada um tem comprimento $2\pi r$. Então divide-se cada círculo em um número de setores organizando tais setores circulares formando um paralelogramo como na Figura 3.4. Quando o número de setores circulares em cada círculo aumenta mais e mais o paralelogramo torna-se um retângulo de comprimento $2\pi r$ e largura r cuja área é dada por $2\pi r \cdot r = 2\pi r^2$. Como foram utilizados dois círculos para formar o retângulo, logo a área de cada círculo é πr^2. Estas ideias apareceram no *Sato Moshun's tengen Shinan*, um tratado japonês de 1698 Wilson (2018).

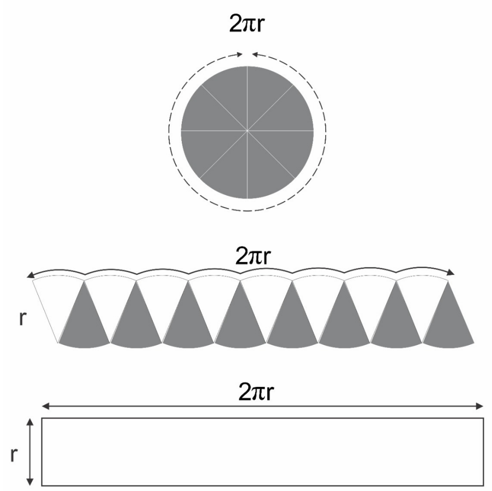


Figura 3.4: Ideia para o cálculo da área do círculo[4]

Muitos povos antigos tinham estimativas para área do círculo e comprimento da circunferência, embora não tivessem o conceito de π como um número, mas forneciam estimativas inferiores e superiores para seu valor. Dentre tais civilizações destacam-se os babilônios e os egípcios que conheciam muito mais a respeito do π do que meramente a sua existência. Os babilônios conheciam a seguinte aproximação:

$$\frac{25}{8}.$$

[4]Fonte da Figura 3.4: Recriada a partir de Wilson (2018).

Já os egípcios tinham como aproximação o valor:

$$\frac{256}{81}.$$

Os hebreus também tinham uma aproximação, um pouco mais grosseira, pois na bíblia nos livros de I Reis 7:23 e II Crônicas 4:2 encontra-se a seguinte descrição: Fez o tanque de metal fundido, redondo, medindo quatro metros e meio de diâmetro e dois metros e vinte e cinco centímetros de altura. Era preciso um fio de treze metros e meio para medir a sua circunferência. Assim a aproximação para π seria $\frac{13{,}5}{4{,}5} = 3$. Levando em conta que o livro de Reis foi editado cerca de 550 a.C existiam, à época, outras aproximações mais precisas.

Um método para estimar π foi dado pelos gregos Antiphon e Bryson que consistia em aproximar a área do círculo por polígonos inscrito e circunscrito e Arquimedes em 250 a.C. Baseando-se nessas ideias estimou o valor de π por aproximar o comprimento da circunferência pelos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo. As aproximações ficavam cada vez melhores por dobrar o número de lados dos polígonos.

Arquimedes usou hexágonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo, e comparou seus perímetros com o comprimento da circunferência (veja Figura 3.5). Isso gerou uma estimativa superior a 3 e e inferior a $2\sqrt{3}$. A seguir tem-se essas aproximações em valores decimais:

$$3 < \pi < 3,464$$

Considerando polígonos regulares de 12 lados, isto é, dodecágonos regulares, ele obteve estimativa inferior de $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e superior de $12(2-\sqrt{3})$ essa aproximações em valores decimais é dada a seguir:

$$3,106 < \pi < 3,215$$

Considerando polígonos de 24, 48 e 96 lados obteve outras aproximações que são mostradas na Tabela 3.1. Arquimedes não usava notação decimal, mas dava seus resultados aproximados na forma de fração.

O Chinês Liu Hui por volta do ano 263 d.C usou um polígono regular inscrito de 192 lados, utilizando um método com áreas e obteve $3,141024 < \pi < 3,142704$ como aproximações para π. Ele também conseguiu, com o mesmo método calcular a seguinte

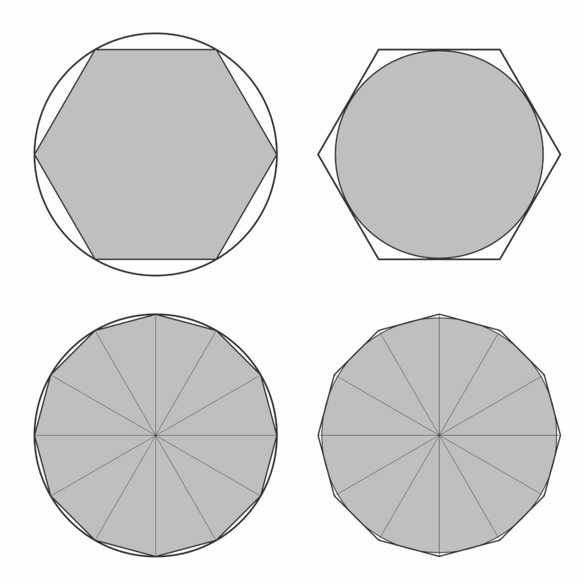


Figura 3.5: Hexágono e dodecágono inscrito e circunscrito ao círculo[5]

Tabela 3.1: Aproximações para π pelo Método de Arquimedes

Número de lados	Aproximações
6	$3,000 < \pi < 3,464$
12	$3,106 < \pi < 3,215$
24	$3,133 < \pi < 3,160$
48	$3,139 < \pi < 3,146$
96	$3,141 < \pi < 3,143$

aproximação $3,14159$ para isso considerou um polígono regular de 3072 lados.

Matemáticos de diversos países usando métodos similares ou outros métodos melhores obtiveram aproximações para π, cada vez mais precisas, aproximando o perímetro ou área. Quando entramos na era dos computadores as aproximações se aprimoraram nas casas do milhares de dígitos de precisão. Em 1973 Jean Guillard e Martin Bouyer chegaram a uma aproximação de um milhão de casas decimais. Até que os japoneses Yoshiaki Tamura, Yasumada Kanada e outros calcularam aproximações na casa dos dez milhões de dígitos em 1983 e chegaram a 538 milhões em 1989. Em 2011, obteve-se uma aproximação para π com dez trilhões de casas decimais.

Recentemente, a engenheira do Google Emma Haruka Iwao, Figura 3.6, usou o Google Computer Engine, juntamente com Google Cloud, para calcular uma aproximação

[5] Fonte da Figura 3.5: Recriada a partir de Wilson (2018).

para π com o maior número de casas decimais, entrando para o livro dos recordes. Ela conseguiu calcular uma aproximação com 31.415.926.535.897 dígitos, o que levou 121 dias para ser feito. O anúncio desse cálculo foi feito no dia 14 de março de 2019 considerado o dia do π. Na língua inglesa, em que se usa a notação mês dia para representar um dia de determinado mês, 14 de março é denotado por 3.14. Emma utilizou cerca de 170 *terabytes* de dados para calcular essa aproximação, o que equivale a todas as coleções de livros impressas na biblioteca do congresso dos Estados Unidos.

Figura 3.6: Emma Haruka Iwao[6]

O fato de ser possível calcular π com milhões de casas decimais torna natural a pergunta sobre a natureza desse número. É conhecido que π é um número próximo de $\frac{22}{7}$ e mais próximo ainda de $\frac{355}{113} = 3,1415929203\cdots$. É possível que esse número seja igual a uma fração composta por números inteiros, isto é, um número racional? É possível que seja a raiz quadrada de uma fração? A reposta a ambas as perguntas é não. As respostas foram dadas pelo grande matemático francês, radicado na Alemanha, Johann Heinrich Lambert em 1767.

Muitos matemáticos suspeitavam que π não fosse a raiz de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros, ou seja π é um número transcendente. A prova desse fato dada por Lindemann em 1882 é um marco histórico da matemática.

[6]Fonte da Figura 3.6: Disponível em https://www.bbc.com/news/technology-47524760. Acesso em: 27 de dez. 2019

3.4 A constante e

No século XVII houve um grande crescimento do comércio internacional e as transações financeiras de todos os tipos aumentaram consideravelmente. Consequentemente o regime de juros compostos ganhou muita atenção, sendo possível que o número e tenha surgido pela primeira vez nesse contexto. No regime de juros compostos ao final de cada período de capitalização, os juros se incorporam ao capital e passam a render juros também. Considera-se a seguir a relação existente entre os juros compostos e o número e. No caso geral de juros compostos suponha que um investimento de um capital C (em reais) que pague uma taxa de juros i por cento anualmente (a taxa de juros i é sempre dividida por 100). Então, nesse regime de juros ao final de um ano tem-se um montante (M) igual a $M_1 = C(1+i)$ e no segundo ano um montante de $M_2 = C(1+i)^2$ e assim por diante. Depois de um período de t anos obtém-se um montante de

$$M = C\,(1+i)^t\,. \tag{3.2}$$

Pode-se deparar com vários tipos de composições de juros em relação aos períodos de tempo, que podem ser: diário, semanal, mensal, bimestral, trimestral, semestral e anual, detre outros supondo que a composição dos juros é feita n vezes ao ano, então para cada período de conversão a taxa de juros anual é dividida por n, isto é, $\frac{i}{n}$. E como em t anos existem (nt) períodos, um capital, C, após t anos renderá um montante de

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}. \tag{3.3}$$

A Equação 3.2 é um caso especial da Equação 3.3 para $n = 1$. Explorando um pouco a Equação 3.3 considere hipoteticamente que $i = 1$. Isso significa uma taxa de juros de 100% que não ocorre em práticas financeiras como retorno de investimento. E considere também que $C = 1$ (real) e $t = 1$ (ano). Então a Equação 3.3 torna-se:

$$M = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \tag{3.4}$$

Analisando o comportamento da Equação 3.4 para alguns valores de n obtém os resultados contidos na Tabela 3.2. Algumas perguntas surgem dessa análise, por exemplo, aumentando o valor de n é possível que esse padrão continue? Para valores cada vez mais elevados de n os resultados da Equação 3.4 fiquem mais próximos de $2,71828$?

Não se sabe quem primeiro observou o comportamento dessa equação à medida que n tende ao infinito, por isso a data exata do surgimento do número, que seria denotado por e, é incerta.

Tabela 3.2: Aproximações para o número e

n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828

O símbolo e para o número irracional $2,71828182845904523536028747135\ldots$, de acordo Wilson (2018), foi usado pela primeira vez por Euler em um artigo não publicado por volta de 1727, e em uma carta de 1731, aparecendo impresso no Volume 1 de *Mechanica on the mathematics of motion*.

No início do século XVIII foram feitos grandes avanços na compreensão dos logaritmos, da função exponencial e na conexão existente entre eles. Um dos principais matemáticos a pesquisar sobre as propriedades do número e, bem como da função $y = e^x$, foi Euler que colocou e como principal elemento na discussão da função logarítmica e encontrou muitos resultados. A seguir tem-se a descrição de alguns deles.

- O número e como limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$. Deve-se entender ($\lim\limits_{n\to\infty}$) como n assumindo valores arbitrariamente grandes, ou n crescendo indefinidamente;
- O número e como uma série infinita $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!} + \cdots$. Se considerarmos somente os cinco primeiros termos dessa série tem-se como aproximação para e o número $2,7182787$, que tem uma precisão de cinco casas decimais;
- A regra da multiplicação para potências de e a saber $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, para quaisquer x e y;

- A função exponencial $y = e^x$ e a função $y = \log_e x$ são inversas uma da outra, isto é, $y = e^x$ se, e somente se, $x = \log_e y$. Os gráficos dessas funções estão ilustrados na Figura 3.7 , observa-se que eles estão refletidos por meio da reta $y = x$;

- O número e é um número irracional, isto é, ele não pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros com $q \neq 0$.

A função exponencial tem algumas aplicações, primeiramente tem-se: o crescimento populacional ao longo do tempo, por exemplo, poderíamos considerar o quão rapidamente cresce uma população? Considere uma população de tamanho $N(t)$, onde t é o tempo. Se a população cresce a uma razão fixa k proporcional ao seu tamanho ela pode ser dada por $N(t) = N_0 e^{k \cdot t}$, sendo N_0 a população inicial. O gráfico para essa função pode ser observado na Figura 3.8(a). Isso é um exemplo de crescimento exponencial.

Também, como aplicação da função exponencial, pode-se considerar o resfriamento de um copo de chá ao longo do tempo. Pela lei de Newton para o resfriamento, a razão com que o copo de chá esfria é proporcional a diferença de temperatura entre o chá e o ambiente que o cerca. Se $T(t)$ é a temperatura do chá ao tempo t e T_0 é a temperatura do ambiente que o cerca, então a temperatura de resfriamento é dada por: $T(t) = T_0 + C \cdot e^{-k \cdot t}$, sendo C uma constante que pode ser calculada quando se sabe a temperatura inicial do chá. O gráfico pode ser observado na Figura 3.8(b). Isso é um exemplo de decaimento exponencial.

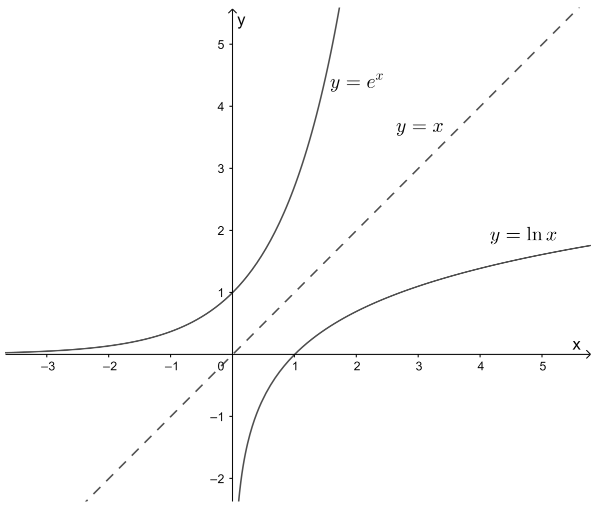
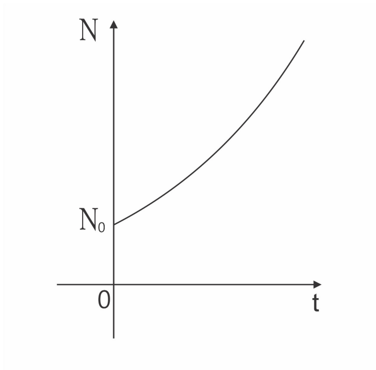
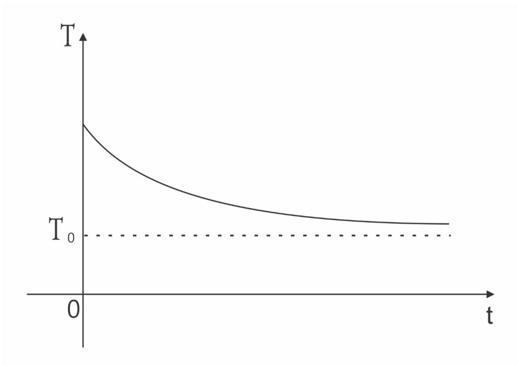


Figura 3.7: Gráfico da função exponencial e logarítmica[7]

[7]Fonte da Figura 3.7: Feita pelo autor utilizando o Geogebra.



(a) Crescimento exponencial



(b) Resfriamento de um copo de chá

Figura 3.8: Aplicações da função exponencial[8]

3.5 A constante i

A raiz quadrada de menos 1, ou seja, $\sqrt{-1}$ denominada de unidade imaginária está intimamente relacionada à resolução de equações polinomiais de grau 3. O matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526) encontrou uma fórmula para resolver equações da forma $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, que é um caso especial das equações de grau 3. De acordo com Nahin (1998) essa solução foi central para o entendimento de $\sqrt{-1}$. A equação cúbica resolvida por del Ferro tinha a forma:

$$x^3 + px = q \tag{3.5}$$

onde p e q são números não negativos. A solução para a equação 3.5 é dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{3.6}$$

pelo fato dos números p e q serem não negativos a solução em (3.6) é sempre um número real. Contudo, nessa solução há sempre uma raiz real e duas raízes que são números complexos. Um número complexo, em sua forma algébrica, é dado por $a + ib$, onde a e b são números reais o símbolo i, introduzido por Euler, representa $\sqrt{-1}$, isto é, $i = \sqrt{-1}$.

Esta solução não foi publicada por del Ferro, entretanto foi passada para seu aluno Antônio Maria Fior que não era um matemático brilhante, mas desafiou Niccolo Fon-

[8]Fonte da Figura 3.8: Retirada de Wilson (2018).

tana (1500 - 1577), conhecido também por Tartaglia, a resolver equações de grau 3, do tipo $x^3 + px + q = 0$ a equação foi resolvida por ele cuja solução é

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Entretanto, ao se considerar a equação $x^3 - 15x + -4 = 0$, percebe-se que $x = 4$ é uma solução e quando divide-se $x^3 - 15x + -4$ por $x - 4$ encontra-se $x = 2 + \sqrt{3}$ e $x = 2 - \sqrt{3}$ como raízes reais dessa equação. Contudo, ao se aplicar a Fórmula 3.5 chega-se a

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \tag{3.7}$$

Tem-se que nessa solução raízes quadradas negativas cujas raízes cúbicas desses números geram números reais. Esse impasse levou à descoberta dos números complexos. A solução para esse problema foi dada por Rafael Bombelli (1526 - 1572), engenheiro hidráulico italiano, ao supor que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$ respectivamente. Ele chegou a conclusão que $a = 2$ e $b = 1$. A partir desses ideias, quase 200 anos depois, Euler mostrou como extrair raízes de números complexos. Ele fez muitas contribuições para o desenvolvimento e uso dos números imaginários, René Descartes foi quem primeiro chamou esses números de imaginários, em 1637, e Carl Friedrich Gauss quem chamou-os de números complexos, em 1831.

Um número complexo da forma $a+bi$, onde a é a parte real e b a parte imaginária. Se $b = 0$ então ele é apenas um número real e se $a = 0$ ele é imaginário puro. O conjugado de $z = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$ e seu módulo ou valor absoluto é $|z| = |a + bi|$ é o número real $\sqrt{a^2 + b^2}$ e se $z \neq 0$ seu argumento $arg z = arg(a + bi)$ é $\arctan \frac{b}{a}$. As operações básicas nos complexos são como segue:

- adição: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- subtração: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- multiplicação: $(a + bi)x(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

- divisão

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i\end{aligned}$$

Considerações finais

O presente trabalho teve por fundamento a equação de Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$. Fez-se inicialmente um esboço da vida de Leonhard Euler e algumas de suas descobertas e criações, principalmente na matemática, seguida da história e deduções da equação de Euler. Depois uma atenção foi dada às constantes: 0, 1, e, π e i que compõe essa equação, destacando a importância de cada uma delas seus aspectos históricos e a presença delas na educação básica.

A escolha desse tema foi motivada pelo fato da equação de Euler apresentar uma forma simples e conter números tão especiais os quais não recebem um tratamento diferenciado na educação básica. Toda essa abordagem que ressalta aspectos históricos e descobertas matemáticas podem gerar atividades interessantes para o ensino básico, proporcionando aso professores maneiras de ensino enriquecedoras para a dinâmica de sala de aula.

Logo, é pertinente apresentar a história e as descobertas ou invenções dos homens e das mulheres que contribuíram para o desenvolvimento tanto da matemática quanto para o desenvolvimento da humanidade para uma melhor formação dos alunos na educação básica. Como forma de lhes mostrar que a matemática é fundamental para a sociedade atual.

como sugestões de trabalhos futuros, complementares a este tema ou diagnósticos tem-se, por exemplo: desenvolvimento de material lúdico contando a história de Euler e de sua identidade em quadrinhos para alunos do ensino básico; entrevistas por meio de questionários com alunos e professores sobre Euler e sua identidade e os números que a constituem.

Referências Bibliográficas

BECKMANN, P. *A history of* π. New York: ST. Martin Press, 1971.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve História*. São Paulo: Livraria da Física, 2012. I.

CREASE, R. P. *The Great Equations*: breakthrougs in science from pythagoras to heisenberg. New York: Norton and Company, 2008.

DEBNATH, L. *The Legacy of Leonhard Euler*: A tricentennial tribute. London: Imperial College Press, 2010.

DEVLIN, K. The most beatiful equation in mathematics. 26 out. 2018. Disponível em: <https://www.wabash.edu/magazine/2002/WinterSpring2002/mostbeautiful.html>. Acesso em: 26 out. 2018.

FELLMANN, E. A. *Leonhard Euler*. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2007.

FIGUEIREDO, D. G. *Números irracionais e transcendentes*. Brasília: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

MAOR, E. *e*: a história de um número. Tradução Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2008.

NAHIN, P. J. *An imaginary Tale*: The history of $\sqrt{-1}$. New Jersey: Princeton University Press, 1998.

NAHIN, P. J. *Dr. Fabulou Formula*: cures many mathematical ills. New Jersey: Princeton University Press, 2006.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. π: A biography of the world's most mysterious number. New York: Prometheus Brooks, 2004.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANDIFER, C. E. *How Euler did even more*. Washington: The Mathematical Association of America, 2015. (Serie Spectrum).

STEWART, I. *Em busca do infinito*: uma história dos primeiros números à teoria do caos. Tradução George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

STEWART, I. *O fantástico mundo dos números*: a matemática do zero ao infinito. Tradução George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

STEWART, J. *Cálculo*. Tradução Antônio Carlos Morreti e Antônio Carlos Gilli Martins. 5. ed. São Paulo: Thoson Learning, 2007. Volume II.

WILSON, R. *Euler pioneering equation*: the most beautiful theorem in mathematics. United Kingdon: Oxford University Press, 2018.