Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

A ruptura entre o ensino de Matemática nos níveis básico e superior e a adoção de uma perspectiva contrária para a sua minimização

Ricardo Tomé

Goiânia

2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Ricardo Tomé

Título do trabalho: A ruptura entre o ensino de Matemática nos níveis básico e superior e a adoção de uma perspectiva contrária para a sua minimização

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Ricardo Tomé

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2] Data: 14/01/2020

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Ricardo Tomé

A ruptura entre o ensino de Matemática nos níveis básico e superior e a adoção de uma perspectiva contrária para a sua minimização

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientadora: Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias.

Goiânia

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Tomé, Ricardo
A ruptura entre o ensino de Matemática nos níveis básico e superior e a adoção de uma perspectiva contrária para a sua minimização [manuscrito] / Ricardo Tomé. - 2019.
CXXXIII, 133 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2019.
Bibliografia.
Inclui fotografias, tabelas, lista de figuras.

1. Matemática Científica. 2. Educação Básica. 3. Livro didático. 4. OBMEP. 5. Abordagem profunda e abordagem superficial. I. Dias, Ivonildes Ribeiro Martins, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **14** da sessão de Defesa de Dissertação de **Ricardo Tomé,** que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em **Matemática do ensino Básico**.

Aos dezesseis dias do mês dezembro de dois mil e dezenove a partir das 8:00 horas, no LEMAT do IME/UFG, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"**A ruptura entre o ensino de matemática nos níveis básico e superior e a adoção de uma perspectiva contrária para a sua minimização**"**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Ivonildes Ribeiro Martins Dias IME/UFG**,** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Jhone Caldeira Silva IME/UFG e membro titular externo; Eunice Candida Pereira Rodrigues UFMT. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Ivonildes Ribeiro Martins Dias, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos dezesseis dias do mês dezembro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Ivonildes Ribeiro Martins**, **Professor do Magistério Superior**, em 16/12/2019, às 18:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jhone Caldeira Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 15/01/2020, às 19:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Eunice Cândida Pereira Rodrigues**, **Usuário Externo**, em 22/01/2020, às 13:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0997641** e o código CRC **D2B32CF1**.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e da orientadora.

Ricardo Tomé graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (Campus Goiânia) em 2012, e atualmente é professor efetivo tanto no Ensino Básico da Secretaria Municipal de Educação de Senador Canedo quanto na Secretaria de Estado da Educação - SEDUC-GO.

Dedico a minha esposa e meus filhos. Que celebremos cada conquista em nossas vidas sempre juntos.

Agradecimentos

A Deus, senhor misericordioso, inigualável e maravilhoso que sempre me concedeu ânimo para continuar diante dos tropeços e força para vencer tantos obstáculos.

A minha mãe Rosângela, minha heroína que sempre me amou e me amparou todos os dias de minha vida.

Ao meu pai Jalimar, por me ensinar a encarar a vida com otimismo, e principalmente mansidão.

A minha esposa Andréa, amor da minha vida, mãe dos meus filhos, minha companheira que sempre me apoiou incondicionalmente, e suportou todos os fardos que surgiram durante esse processo.

Aos meus filhos Gustavo, Beatriz e Isadora meus presentes de Deus, minha razão de viver, por eles me mantenho em frente sempre, seja pra servir de exemplo ou ainda para lhes proporcionar uma melhor qualidade de vida.

Ao meu amigo Alberto, a quem considero como irmão, por seu companheirismo ao longo de toda essa caminhada.

A minha família, aos amigos e colegas que sempre acreditaram em mim e superestimaram minhas qualidades.

A minha orientadora Ivonildes Ribeiro Martins Dias, por me ajudar a desenvolver intelectualmente e enxergar possibilidades, mas principalmente pela paciência e compreensão ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores da banca examinadora, Dr.ª Eunice Cândida Pereira Rodrigues e Dr. Jhone Caldeira Silva, por suas valorosas contribuições.

A Sociedade Brasileira da Matemática (SBM) pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Enfim a todos que passaram por minha vida e que contribuíram diretamente ou indiretamente na minha caminhada, em especial aqueles que me deixaram de consolo a sempre marcante frase: “No final tudo dá certo!”

Resumo

Como professor na Educação Básica há mais de 12 anos, por muito tempo busquei justificar os conteúdos que ensinava, a partir da contextualização dos mesmos. Porém consegui perceber que para compreender a Matemática não seria suficiente contemplá-la apenas observando sua presença em nosso cotidiano, pois a própria Matemática enquanto criação humana se encontra muito além dessa limitação, uma vez que ela trata de assuntos que só se justificam pela sua utilidade dentro da própria Matemática, sendo inclusive, inquestionavelmente, relevantes para o seu próprio desenvolvimento. Assim nos propusemos a conduzir uma discussão que argumentasse a favor da inserção de aspectos da Matemática Científica no ensino de Matemática na Educação Básica. Para tanto buscamos discutir o ensino atual e alguns de seus elementos, evidenciar que iniciativas estão sendo desenvolvidas nesse sentido, especificamente, alguns projetos da OBMEP, além de tentar compreender situações do passado em que essa mesma perspectiva foi adotada, reivindicando inclusive o que denominaram de "modernização do ensino de Matemática".

Palavras-chave

Matemática Científica. Ensino de Matemática. Educação Básica. OBMEP. Livro didático. Abordagem profunda e abordagem superficial.

Abstract

As a teacher in Basic Education, for over 12 years, for a long time, I tried to justify the contents I taught, from the yours contextualizations. However, I realized that to understand mathematics it would not be enough to contemplate it only by observing its presence in our daily lives, since mathematics itself as a human creation is far beyond this limitation, since it deals with subjects that are only justified by its usefulness, within Mathematics itself, and that are unquestionably relevants to its own development. Thus we proposed to conduct a discussion that argued for the inclusion of aspects of Scientific Mathematics in the teaching of Mathematics in Basic Education. Therefor we, seek to discuss current education and some of its elements, to show that initiatives are being developed in this sense, specifically, some OBMEP projects, as well as to try to understand past situations in which this same perspective was adopted, even claiming what they called "modernization of Mathematics teaching".

Keywords

Scientific Math. Mathematics Teaching. Basic Education. OBMEP. Textbook. Deep approach and shallow approach.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O objeto de estudo desta pesquisa consiste em compreender o porquê da falta de conexão entre o ensino de Matemática na Educação Básica e o ensino de Matemática na Educação Superior. Para tanto, ao invés de buscarmos respostas na formação inicial de professores de Matemática, como têm feito inúmeros estudos, como por exemplo, os de Ferreira (2017), Ferreira (2014), Silva (2015), Ponte (2002), entre outros, optamos por adotar neste trabalho, exatamente a perspectiva contrária. Assim, nos propusemos a refletir sobre o ensino de Matemática na Educação Básica atualmente e apontar que determinados aspectos característicos da Matemática, que não têm sido contemplados nesse ensino, poderiam certamente contribuir para minimizar os prejuízos advindos com a questão levantada no início deste parágrafo.

Constantemente preocupados em situar o leitor e interessados em envolvê-lo, faremos a seguir, prenúncios do que estar por vir, apresentando como se encontram distribuídos os assuntos abordados nesta pesquisa, no intuito de conceder-lhe uma visão geral sobre a mesma.

Assim, no primeiro capítulo, visando possibilitar ao leitor entender o que nos motivou a enveredar por esses caminhos, tornou-se bastante oportuno a princípio, fazemo-lo saber a respeito de algumas experiências ao longo do percurso pesquisador e seus contributos para motivação desta pesquisa. Particularmente, experiências com a Matemática ocorridas na sua vida escolar, acadêmica e profissional, principalmente aquelas vividas durante o período de transição do Ensino Básico para o Ensino Superior em Matemática, e que acabaram se constituindo como um dos principais fatores que nos motivaram a desenvolver esta pesquisa. Em seguida, procuramos mostrar que a forma como conduzimos este estudo identifica-se com a pesquisa do tipo bibliográfica (FONSECA, 2002), além de esclarecer quais os principais objetivos pretendidos com este estudo e a quem pretendemos direcioná-lo. Logo após, expomos o levantamento bibliográfico que realizamos para compreender que abordagem os estudos que nos precederam haviam dado aos assuntos explanados em nossa pesquisa. Na sequência, apresentamos os referenciais teóricos que guiaram nossa pesquisa, em cada uma das abordagens que propusemos.

No segundo capítulo, buscamos refletir um pouco sobre o ensino atual de Matemática na Educação Básica e seu distanciamento em relação ao ensino de Matemática no nível superior, com o objetivo de alertar o leitor sobre esse problema, atualmente ignorado, apontamos algumas das possíveis consequências negativas geradas por ele, além de fazê-lo perceber, que iniciativas de programas como o PIC da OBMEP, visam sanar esse problema, mas ainda representam uma tentativa muito pouco abrangente. Em seguida discorremos sobre o ensino de Matemática no passado, contemplando alguns de seus momentos históricos, visando compreender dois movimentos que ocorreram, sendo esses extremamente distintos, como veremos posteriormente, mas, que tinham como objetivo comum, resolver o problema da descontinuidade no ensino de Matemática da Educação Básica para a Educação Superior: o "Primeiro Movimento Internacional de Modernização do Ensino de Matemática", denominado dessa forma, segundo Miorim (1995, p. 14) e ocorrido no início do século XX e o "Movimento da Matemática Moderna" (MMM), cujo auge ocorreu durante a década de 60. Ao final desse capítulo, apresentamos ainda uma experiência isolada, ocorrida no segundo movimento (MMM), que reconhecidamente foi bem sucedida apesar do movimento, numa visão geral, ter sido um fracasso (COSTA, 2014).

No terceiro capítulo, tendo em vista a importância do livro didático no processo de ensino aprendizagem tanto no passado quanto no presente, uma vez que ele auxilia e orienta a ação do professor e até mesmo direciona o currículo escolar, como afirma o MEC (BRASIL, 2019), procuramos compreender os processos de seleção percorridos pelos livros didáticos desde sua aprovação junto ao MEC até sua chegada definitiva para a escola. Em seguida, buscamos apresentar e discutir como é feita a abordagem de alguns assuntos da Matemática, mais especificamente sobre alguns conteúdos de Aritmética, refletindo sobre três vertentes: a abordagem feita pelos livros didáticos na Educação Básica; a abordagem feita pelo Programa de Iniciação Científica (PIC-OBMEP) e a abordagem feita por alguns textos universitários. Em seguida, para confrontar essas distintas abordagens procuramos estabelecer uma análise comparativa, usando para tanto, principalmente, a "Teoria das abordagens à aprendizagem" e as concepções de Lima (2007).

E por último, manifestamos nossas Considerações Finais, momento em que analisamos o ensino de Matemática, retomamos as discussões dos capítulos 1, 2 e 3 para realizarmos uma última reflexão. Procuramos ainda responder as questões levantadas ao longo desta pesquisa, principalmente as levantadas no final desta introdução. Finalmente, enfatizamos as principais contribuições desta pesquisa para a Educação Básica e o PROFMAT, apresentamos seus resultados e sugerimos possíveis temas que fogem do escopo deste trabalho e que certamente resultariam em novos trabalhos.

Esperamos que nossa investigação, apresente fatos e opiniões que talvez não sejam do conhecimento do leitor, que ele se sinta, de maneira positiva, provocado a refletir sobre nossos apontamentos, e que despido de seus pré-conceitos, analise todo o discurso a partir de seu senso crítico e com um mínimo de sensatez, e que de maneira geral, mesmo este estudo, obviamente, não sendo capaz de responder a todos os questionamentos que norteia nossa proposta, que ele seja ao menos satisfatório, mas contudo, procuramos ao final deste trabalho responder as seguintes perguntas:

➢ Nossas discussões realmente favorecem o alcance de nossos objetivos? O que ainda poderia ser feito?

➢ Que lições podemos extrair dos dois movimentos que tiveram em sua causa: a redução do distanciamento entre o ensino de Matemática, nos níveis básicos e superior?

➢ A OBMEP e seus projetos têm, de fato, contribuído para minimizar esse problema?

➢ Como a Matemática Científica pode contribuir no ensino da Educação Básica?

➢ Que assuntos não abordados nessa proposta, carecem ser desenvolvidos?

Capítulo 1

Os contributos para o surgimento desta pesquisa e seus elementos

Por mais que uma pesquisa científica seja desenvolvida levando em conta um problema que não seja de interesse exclusivo apenas do pesquisador, ela com certeza se origina, a priori para satisfazer os anseios do mesmo. Nesse sentido, reforça Lakatos e Marconi (2003), quem se propõe a elaborar um trabalho científico deve sempre selecionar um assunto com base em dois critérios: o primeiro consiste em refletir se o assunto merece ser investigado cientificamente; e o segundo em priorizar assuntos que levem em consideração suas inclinações, aptidões e tendências. Consequentemente, ainda segundo as autoras, essa é uma das razões que explicam porque o assunto tende a se originar de experiências do pesquisador ou ainda de estudos e leituras que provoquem sua curiosidade.

Sendo assim, para que o leitor possa entender que fatores permearam a escolha de nosso tema, julgamos necessário, iniciar este capítulo mencionando "Algumas experiências e observações ao longo do percurso do pesquisador e a motivação para esta pesquisa".

1.1 Algumas experiências e observações ao longo do percurso do pesquisador e a motivação para esta pesquisa

1.1.1 Experiências marcantes e seus reflexos na formação

Ao longo de nossa formação, estamos sempre suscetíveis a mudanças. Partindo desse ponto de vista, há que se considerar que nossas concepções vão se constituindo e se modificando ao longo de nossa trajetória, e principalmente, com base nas experiências que vivenciamos.

Sendo assim, é natural que comecemos refletindo sobre a formação recebida pelo pesquisador durante a Educação Básica, pois a mesma nos possibilitará compreender a linha tênue que se estabeleceu, por um determinado período, entre seu gosto e sua aversão pela Matemática. E mais, poderemos ainda entender o que levaria, por um longo tempo, o pesquisador a adquirir a impressão de que a Matemática era simplesmente uma disciplina baseada em desafios, exercícios de raciocínio lógico e problemas que sempre poderiam ser solucionados empregando-se adequadamente suas regras, fórmulas e procedimentos.

Durante todo o Ensino Básico, os resultados matemáticos, como fórmulas, identidades, algoritmos, técnicas de resolução, lhe foram apresentados sempre prontos, como se não necessitassem ser justificados, e apesar de sentir um ligeiro incômodo com essa recorrente situação, ele prosseguiu sem muitos questionamentos, "aprendendo" com facilidade, os ensinamentos de Matemática que recebeu nessa etapa.

Em consonância com uma fala específica de D'Ambrosio (1989), era extremamente natural que se sentisse cada vez mais convencido de que para dominar os conhecimentos matemáticos seria necessário apenas acumular fórmulas, algoritmos e aplicar regras. Além disso, apresentada dessa forma a Matemática parecia pronta e acabada, sendo assim, que razão havia em entender como "essas coisas" surgiram se nada mais precisava ser criado ou desenvolvido? Então, dotado dessa falsa convicção, seguiu internalizando conceitos e fórmulas, e estes por sua vez, o habilitavam a solucionar com "eficiência" todas as atividades de Matemática que desenvolvia.

E assim concluiu a Educação Básica, dando ênfase a procedimentos e técnicas, sem dar a devida atenção às ideias matemáticas que estavam por trás de cada situação e sem compreender realmente o significado de cada algoritmo que utilizava. Consequentemente, acabou adquirindo uma ideia errônea sobre a Matemática, pois julgava compreendê-la em sua essência, mas na verdade tudo que havia obtido era uma visão fragmentada e totalmente mecanicista acerca de sua natureza, e obviamente ao optar por seguir carreira nessa área iria descobrir de forma bastante desmotivadora o quanto estava longe dessa realidade.

De fato, ao ingressar no curso de Matemática (modalidade ainda não definida: Licenciatura ou Bacharelado) na UFG, sofreria um tremendo baque, visto que nada daquilo que lhe era apresentado parecia natural, não havia fórmulas prontas, os exercícios traziam enunciados que pediam para mostrar, provar, demonstrar ou até mesmo verificar resultados que lhe pareciam óbvios, afinal a maioria deles já estavam arraigados nele. Contudo, começou a se perguntar se havia feito a escolha certa, já que não conseguia se apropriar daquela forma de tratar a Matemática. Intrigava-lhe o fato, de que boa parte de seus colegas também manifestavam o mesmo desconforto e dificuldade, até mesmo aqueles oriundos da educação privada, que supostamente seriam melhores preparados.

Mesmo sendo capaz de prever o provável insucesso que teria a priori, optou por persistir. Lamentavelmente, muitos de seus colegas não fizeram essa mesma escolha e acabaram desistindo do curso. Aliás, como veremos posteriormente, essa realidade parecia ser algo normal, pois ano após ano constatava-se um alto índice de desistência no Curso de Matemática (ROSA e SANTOS, 2018a).

No 3º semestre do curso, teve que escolher entre as modalidades de Licenciatura ou Bacharelado, e como havia acabado de receber a oportunidade de começar a lecionar em uma escola do estado, isso pesou em sua decisão, e acabou optando pela modalidade de Licenciatura no Curso de Matemática.

Começava ali, alguns dos muitos desafios que enfrentaria desde então. Por um lado, enquanto reproduzia o ensino que havia recebido para os seus alunos, percebia com preocupação que muitos não o acompanhavam. Ainda que se desdobrasse para explicar uma mesma ideia de maneiras diferentes usando para tanto a linguagem mais clara que conseguia, chegava à conclusão de que aquela maneira de ensinar não despertava o interesse de seus alunos. Por outro lado, na faculdade ainda insistia em manter sua forma limitada de pensar, pois tentava resolver os problemas que tinha com base nos padrões que encontrava ao observar exercícios resolvidos sobre o assunto. Ainda não havia aprendido a valorizar a construção dos conhecimentos na Matemática, a beleza presente em suas demonstrações, enfim não havia assumido ainda o perfil esperado por um estudante do Curso de Matemática.

Somente em meio aos tropeços, compreenderia a necessidade de mudança de postura nos dois ambientes. Então, influenciado pelas disciplinas de educação que estudava na faculdade, começaria a entender o valor da pesquisa, e através dela conhecer outros tipos de metodologias, que poderiam ser aplicadas no ensino, com vistas a despertar no aluno mais que o entendimento, o gosto pela Matemática. Sendo assim, não poderia deixar de perceber que, nesse campo de incertezas, cada momento era uma contínua aprendizagem; uma estratégia que dava certo em uma turma podia não ter o mesmo resultado em outra, um assunto que era assimilado com maior facilidade por uma turma para outra poderia ser extremamente complicado, então, aos poucos foi compreendendo a complexidade do processo de ensino e aprendizagem, que não havia um método único, perfeito, ou mesmo infalível. E assim foi se transformando e se formando, de fato, num professor-educador, que tinha agora uma única certeza: Para lidar com os desafios presentes no ensino seria sempre necessário buscar um aperfeiçoamento contínuo.

Já na faculdade, passaria a exigir mais de si mesmo, mais esforço, mais dedicação, apresentar uma maior curiosidade em compreender como surgiam os conhecimentos matemáticos (axiomas, conceitos, teoremas, propriedades, ...), em cada uma das disciplinas de Matemática que fazia. Entretanto, a Álgebra, em particular, seria em sua aprendizagem, o que poderia chamar com absoluta certeza de “divisor de águas”, pois as contribuições advindas com seu estudo lhe permitiriam obter uma compreensão muito mais profunda acerca da Matemática, e somente a partir de então, e tão tardiamente, nasceria nele uma enorme fascinação pela Matemática Científica.

Desse modo, já no fim do curso, se por um lado procurava discutir em seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) a importância da contextualização no ensino de Matemática, por outro aproveitava para aprofundar cada vez mais seus conhecimentos em Matemática “elegendo” como disciplinas optativas, disciplinas específicas do Curso de Bacharelado.

Apesar de obter o diploma de Licenciatura plena em Matemática, deixava a faculdade com um sentimento de incompletude. Remoendo todo o processo, começou a fazer questionamentos do tipo: “Será que toda essa experiência acadêmica não poderia ter sido muito mais proveitosa se seu contato inicial com o curso não tivesse sido tão chocante?”, mas então sem dar continuidade a vida acadêmica, acabaria perdendo o instinto que lhe faria buscar por essas respostas e assim permaneceria por alguns anos.

Envolvido então apenas com o âmbito escolar seguia lidando com os inúmeros obstáculos que dificultavam o processo de ensino aprendizagem, tendo como suporte o uso de diferentes metodologias, que minimizavam os problemas, mas ainda assim deixavam a desejar quando sua principal questão se pautava na busca por justificativas para a necessidade daqueles estudos, pois nem todos os assuntos podiam ser contextualizados, e nem por isso eles deixariam de ser relevantes, afinal a importância desses assuntos estava condicionada à necessidades deles para a própria Matemática, foi quando se atentou, seria importante também respaldar a Matemática com argumentos científicos.

Mas contrário a essa sua percepção, surgia um discurso proeminente, alegando a "importância" de se instaurar no processo de ensino e aprendizagem da Educação Básica uma visão totalmente simplista sobre a Matemática, abordá-la de uma maneira "menos complicada", de uma forma cada vez mais intuitiva em detrimento ao seu caráter dedutivo, pois somente assim ela se tornaria mais acessível. Essa visão errônea deixa de considerar que ambos os raciocínios indutivos e dedutivos são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois a partir deles é que se constituirá uma base sólida para o conhecimento.

A observação dessa situação e a não conformidade com a mesma acabariam o impulsionando a tomar algum posicionamento.

1.1.2 Algumas observações e a necessidade de um posicionamento

Quando se considera apresentar a Matemática de forma simplista, não se reflete que em contrapartida, ela será desfigurada, que deixará de evocar seu real sentido, e isso não só agrega ao aluno uma perspectiva mecânica acerca da Matemática, como também acaba impedindo ou mesmo dificultando a construção dos conhecimentos matemáticos.

Ainda nesse sentido, reafirmamos que, os reflexos negativos dessa situação incidem principalmente sobre o aluno que termina o Ensino Básico e opta pelo Curso de Matemática. A sustentação dessa afirmação se faz presente, em estudos como os de Rosa & Santos (2018a, 2018b), relacionados à evasão e a retenção[1] no IME-UFG, esses estudos revelam dados preocupantes dos últimos anos, e nos possibilitam refletir sobre os possíveis fatores que tem contribuído para o alto índice de evasão e retenção no Curso de

[1] Neste estudo, entende-se por retenção a permanência prolongada do aluno no curso de graduação, o atraso na conclusão de sua formação.

Matemática do IME-UFG. Segundo Rosa & Santos (2018a, 2018b), embora a maioria dos alunos alegue escolher o curso por uma questão de aptidão para a Matemática, em contrapartida, dentre os motivos constatados que os levam a abandonar o curso ou mesmo à retenção, destacamos os seguintes:

- Dificuldades de acompanhar o curso, em razão de deficiência da formação na educação básica;
- Excesso de reprovações;
- Alto nível de exigência;
- Elevado grau de dificuldade do curso;
- Desinteresse e desmotivação.

É importante ressaltar que essa realidade não seria exclusiva da UFG; a esse respeito, Gatti (1997) já teria observado um infeliz padrão presente na realidade de um Curso de Matemática, do total de alunos que ingressam nele, muito menos da metade chega a se formar no tempo mínimo previsto.

É inegável, a existência de uma grande contradição nisso tudo: "Como esses alunos que, outrora, julgavam-se aptos para lidar com a Ciência Matemática, tendem no início do curso e de maneira tão abrupta, a tornarem-se excêntricos em relação a essa "nova" maneira de tratar a Matemática?".

Acreditamos que a resposta para essa pergunta possa ser encontrada repensando-se esse período de transição, da Matemática na Educação Básica para a Matemática no Ensino Superior, e em como ele poderia deixar de ser traumático para os ingressantes nesse curso, se ao longo desse processo houvesse uma conexão mais explícita entre essas duas etapas de ensino.

Consequentemente, precisamos nos atentar para uma possível incoerência presente em nosso Sistema de Ensino Básico: o ensino de Matemática, tal como tem sido oferecido não tem contribuído para que nossos alunos desenvolvam um nível de maturidade matemática[2] que lhes possibilite compreender com certa naturalidade a forma do pensamento matemático exigido no nível superior. Contanto, somos levados a nos atentar que ainda subsiste entre o ensino da Matemática na Educação Básica e o ensino da Matemática na Educação Superior um tremendo abismo.

[2]A maturidade matemática diz respeito ao nível de conhecimento e habilidades em Matemática que o aluno possui.

Estes indícios somados a minha própria experiência ainda me permitiriam perceber com angústia, há quanto tempo temos tolhido nosso aluno de desenvolver seu verdadeiro potencial matemático, com nossos currículos mínimos e nossas técnicas superficiais de ensinar. Portanto, é totalmente fora de propósito que continuemos a transmitir uma Matemática na Educação Básica pautada em regras e procedimentos sem justificativa, pois isso nada tem a ver com a Matemática Científica.

Compreendemos a Matemática Científica, como sendo aquela abordada dentro das Universidades, que se utiliza de axiomas, teoremas, proposições, ..., para promover uma construção de conhecimentos matemáticos de forma lógica e estrutural. Segundo Moreira (2004, p.18) a Matemática Científica é um corpo científico de conhecimentos, conforme a produzem e percebem os matemáticos profissionais.

D'Ambrósio (1961) já havia nos alertado a esse respeito, ao nos dizer que é extremamente prejudicial desvincular a Matemática da Educação Básica da verdadeira Matemática Científica, pois o ensino dessa forma, pouco será útil, tanto para aqueles que não se "simpatizam" com a Matemática quanto para aqueles que seguirão carreira nela.

Ainda a respeito disso, entendemos que qualquer possibilidade de êxito no ensino de Matemática precisa tomar como ponto basilar: a construção de conhecimentos matemáticos, e para tanto, deve necessariamente, propiciar ao aluno compreender que a Matemática enquanto criação humana lida constantemente com "verdades" inacabadas, resultados que carecem de explicações, justificativas e demonstrações, e mais, nesse sentido, é fundamental também instigar o aluno a questionar a validade dos resultados matemáticos, explicar seus raciocínios, justificar suas conclusões e até mesmo demonstrar esses resultados sempre que for adequado, possibilitando-o assim participar ativamente em todo processo.

Contudo é forçoso admitir, que iniciativas assim visam contribuir para que o aluno não só adquira uma compreensão mais profunda e significativa sobre os conteúdos matemáticos que lhe são apresentados, mas também perceba um maior sentido nas ideias matemáticas que for desenvolver, além de acenar para uma perspectiva mais promissora para o processo de ensino e aprendizagem.

A partir do estudo realizado por Mendes e Silva (2018), constata-se que, embora hoje, diversas pesquisas na área de Educação Matemática, principalmente as desenvolvidas pelo Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT) e seus subgrupos, sob a coordenação do Prof. Wagner Rodrigues Valente, apontem a falta de conexão entre os dois níveis de ensino, ao qual temos nos referido, suas perspectivas têm dado ênfase à falta de relação existente entre os cursos de formação inicial do professor e sua efetiva prática na Educação Básica. A partir daí, tem-se discutido, exaustivamente a necessidade de se repensar a maneira como são conduzidos os cursos de licenciatura. Esta percepção não é recente, há pelo menos um século, já havia sido disseminada pelo matemático Félix Klein.

Klein (2009) havia identificado uma ruptura entre o ensino de Matemática na universidade e o ensino de Matemática na Educação Básica, e como consequência, evidenciado dois graves problemas: o primeiro deles seria enfrentado pelo aluno, que enquanto calouro em um curso de Matemática, não enxergaria a Matemática universitária que lhe estava sendo apresentada como uma continuidade da Matemática escolar que havia recebido; o segundo seria enfrentado também por esse mesmo aluno, agora professor recém formado, atuando na Educação Básica, não conseguiria estabelecer relação entre os conhecimentos matemáticos recebidos durante sua formação e os conhecimentos matemáticos necessários a sua prática docente.

Indubitavelmente, apesar dos empenhos anteriores (como veremos no próximo capítulo), esses dois problemas transpassaram o tempo, e por essa razão têm sido pauta em muitos trabalhos, como já havíamos mencionado. No entanto, há que se enfatizar que o desprendimento de esforços, atualmente, tem sido direcionado para apenas um desses problemas, aparentemente com o propósito de resgatar o prestígio dos Cursos de Licenciatura em Matemática, e contestar, os rumores que questionam o possível efeito inócuo que esses cursos podem ter na formação do professor. De fato, nesses cursos existe a necessidade de se articular as disciplinas da Matemática pura com as disciplinas da Educação, para que dessa forma se possibilite ao professor obter domínio tanto sobre os conhecimentos matemáticos de maneira profunda quanto sobre os conhecimentos pedagógicos necessários ao ensino e a adaptação desses conteúdos para a Educação Básica, pois conforme denuncia Moreira (2012), nos Cursos de Licenciatura em Matemática, os "conteúdos matemáticos" e as "disciplinas de pedagogia" ainda continuam sendo pensados e ensinados sem nenhuma articulação.

Ainda que reconheçamos a importância, dos estudos desenvolvidos visando resolver o problema mencionado anteriormente, faz-se, contudo necessário também empenharmo-nos para resolver o outro problema, que foi apontado por Klein: retirar do aluno ingressante na universidade essa visão que há duas matemáticas distintas: uma da Educação Básica e outra da universidade. Nesse sentido, mais uma vez reiteramos a necessidade de voltarmos nosso olhar também para o ensino de Matemática na Educação Básica e familiarizar os alunos, também com a Matemática Científica, naturalmente com certo cuidado.

Desse modo, em relação ao ensino de Matemática, é razoável que pensemos em projetos e ações, que visem diminuir e/ou até mesmo cessar com essa ruptura entre a universidade e a escola, e seus efeitos negativos sobre o aluno ingressante em um Curso de Matemática no nível superior.

No intuito de contrapor essas ideias, com vistas à melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica, enxergaríamos no PROFMAT não só a oportunidade de reaver nossos anseios e continuar a aprofundar nossos conhecimentos matemáticos como também de confrontar esses equívocos e reafirmar a necessidade de se promover ações para reduzir o distanciamento existente entre abordagem matemática na Educação Básica e a abordagem matemática no Ensino Superior, através do desenvolvimento de uma pesquisa científica. É sobre, esta última que mencionaremos a seguir, procurando não só identificá-la, mas ainda, evidenciar a priori alguns de seus elementos fundamentais.

1.2 Explicitando o tipo de pesquisa, seus objetivos e a quem ela se destina

Qualquer um que se proponha a realizar um estudo científico, se não compreendia antes a relevância da leitura, certamente o fará ao longo de seu trabalho, pois dela deriva toda riqueza necessária para o desenvolvimento de ambos: o pesquisador e sua pesquisa. Muito intensa nesse período, a leitura, nos permitiu ampliar conhecimentos, revigorar ou mesmo rever concepções, organizar pensamentos, valorizar a importância da reflexão sobre outros estudos, outras ideias, e assumir até mesmo uma postura crítica sobre eles, que nos possibilitou ir muito além, como era de se esperar, do simplesmente,"eu concordo" ou "eu discordo".

Nessa busca constante por informações a leitura assume o papel de "carro chefe", porém em meio a tantas possibilidades, fazia-se necessário tornar essa longa e cansativa viagem mais proveitosa, mais significativa, rumo a horizontes mais assertivos.

Nesse sentido, embora tivéssemos delimitado o tema de nosso interesse, levando em conta não só nossas inclinações, mas sobretudo, considerando um problema que como acreditamos ter justificado, realmente necessita de estudos científicos que possibilitem seu entendimento, compreensão, análise, e com base nisso, a elaboração de propostas visando repará-lo ou mesmo saná-lo, ainda era imprescindível, ter bem claro e definido como proceder para obter leituras que de maneira direta ou indireta acabariam contribuindo com nosso estudo.

Iniciava-se assim nossa revisão bibliográfica, fase que nos permitiria revisar a literatura e compreender o que já havia sido desenvolvido acerca de nosso tema, que estudos seriam semelhantes ao nosso e quais deles adotaríamos como referência, como suporte à nossa pesquisa.

Quanto mais íamos, aprofundando nossa leitura, mais percebíamos a necessidade de buscar informações em outros trabalhos, refletir sobre suas abordagens, e posteriormente analisá-las, para então, ao final, defender nossos pontos de vista que hora convergiam ou mesmo divergiam de tudo que vimos, na esperança de poder proporcionar não só uma reflexão profunda sobre o nosso tema, mas ainda, contribuir com outros estudos ou iniciativas posteriores.

Da maneira como fomos conduzindo este trabalho, tornou-se claro, mas não intencionalmente a priori, que havíamos optado por desenvolver o mesmo, adotando como metodologia a Pesquisa bibliográfica. Conforme, nos confirmaria Fonseca (2002)

> A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002, p. 31-32)

Ainda segundo Gil (2007, p. 44), os exemplos mais característicos de pesquisas bibliográficas são investigações sobre ideologias ou aquelas que se propõem à análise das diversas posições acerca de um problema.

A partir daí, procuramos ao longo do desenvolvimento deste trabalho agir com extrema diligência, principalmente no que diz respeito, a veracidade das informações aqui prestadas, a confiabilidade e prestígio das fontes utilizadas, analisando e discutindo as contribuições dessas produções científicas.

Ademais, elaboramos um roteiro, no intuito de que o mesmo nos guiasse desde nossa apresentação até a comunicação de nossas considerações finais, nos possibilitando construir um texto de modo a promover o encadeamento das ideias de uma maneira lógica e coerente, nos esforçando ao máximo, para evitar o uso de falas confusas ou mesmo ambíguas, mas sobretudo, focados em desenvolver algo que contribuísse para o alcance de nossos objetivos, sendo estes apresentados abaixo:

Objetivo geral

Conscientizar outros pesquisadores sobre a importância de se engajarem na problemática abordada nesse trabalho.

Objetivos específicos

- ➢ Enfatizar ao leitor os prejuízos que a ausência da abordagem da Matemática Científica traz ao Ensino Básico;
- ➢ Evidenciar o Programa de Iniciação Científica (PIC) da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) como uma ação que tem contribuído para amenizar a falta de conexão existente entre a abordagem matemática no nível básico e a abordagem matemática no nível superior e, dessa forma, promover sua valorização e expansão de iniciativas como as do programa.
- ➢ Compreender os dois movimentos modernizadores do ensino de Matemática: suas semelhanças e diferenças, os retrocessos e progressos oferecidos ao ensino;
- ➢ Incentivar o professor a se especializar, tendo em vista o seu papel fundamental no ensino e ainda despertá-lo para a importância de uma busca constante pela formação contínua;

Em coerência com nossos objetivos esta pesquisa foi desenvolvida pensando, em outros pesquisadores, educadores, mas principalmente, nos professores da Educação Básica participantes do PROFMAT.

A seguir, mostramos que para defender nosso ponto de vista, seria necessário compreender as ideias dos outros para que pudéssemos afunilar ou mesmo redefinir as nossas ideias.

1.3 Ideias iniciais, ideias dos outros e as mudanças em nossa pesquisa

Nesse momento, procuramos possibilitar ao leitor compreender quais caminhos pretendíamos seguir inicialmente e como a escassez de alguns assuntos ou mesmo as discussões em outros estudos nos levaram a percorrer caminhos inesperados, e em como estes, contribuíram tanto para o delineamento de nossa proposta inicial, quanto para as alterações significativas que faríamos na mesma. Levando-se em conta toda concepção que o pesquisador havia adquirido, em função dos ocorridos expostos neste primeiro capítulo, e a área a qual se dedica minha orientadora, era nossa intenção a priori produzir um trabalho que discutisse "o papel fundamental da Álgebra abstrata moderna na construção dos conhecimentos matemáticos", tendo em vista, promover a valorização da mesma dentro do processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica, e para tanto, evidenciar as possíveis conexões existentes entre a Álgebra abstrata moderna (conhecida também simplesmente como Álgebra abstrata ou ainda Álgebra moderna) e Álgebra escolar. Entretanto ao iniciarmos nosso levantamento bibliográfico, usando buscas combinadas do tipo: "Álgebra abstrata" e "Educação Básica", "Álgebra moderna" e "Educação Básica", "Álgebra moderna" e "Álgebra escolar", "Álgebra moderna" e "ensino" entre outras variações, no programa PROFMAT, não seria encontrada nenhuma dissertação, procurando apenas por "Álgebra abstrata" seria encontrada uma única dissertação, e ainda assim não seria nem um pouco relevante para o nosso estudo; e o mesmo aconteceria em outros bancos de teses e dissertações.

Ao pesquisar no "Google acadêmico" encontraríamos um artigo do renomado educador matemático Ubiratan D'Ambrósio intitulado "Álgebra moderna e a escola secundária", nesse artigo D'Ambrósio (1961) argumentaria de forma bem eloquente a favor de se associar o ensino de Matemática nas escolas de Ensino Básico aos modernos resultados da Matemática Científica. Em particular, sobre a necessidade urgente de se introduzir o espírito da Álgebra Moderna no ensino secundário (correspondente aos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), tendo em vista que a Álgebra Moderna além de favorecer a reestruturação do currículo de Matemática no ensino secundário seguindo uma organização lógica, ainda permitiria relacionar assuntos que, aparentemente, se apresentavam no currículo atual como se não houvesse nenhuma ligação entre eles.

Certamente este achado, nos deixou bastante otimistas, a não ser é claro pelo contexto em que o mesmo se deu, em pleno auge do Movimento da Matemática Moderna (MMM), o que hoje muitos poderiam rebater dizendo que foram comentários pertinentes naquela época, conforme entenderemos no próximo capítulo. Embora não sejamos de modo algum totalmente indiferentes aos discursos atuais sobre o ensino de Matemática, é no mínimo passível, notarmos que o problema apontado naquela época ainda se faz presente. Sendo assim, este estudo traz à tona a mesma preocupação que culminaram as mudanças daquele tempo, não com a pretensão de evocar os mesmo ideais, mas tendo como objetivo principal, sim, defender a tomada de ações que possam contribuir para reduzir o distanciamento inegável que há entre os níveis: básico e superior, no que tange a Matemática, exclusivamente a partir da Álgebra abstrata.

Ainda no Google, ao procurarmos por "ensino" e "Álgebra abstrata", apareceria outro estudo que também parecia contribuir com nossos intentos, seria a tese de Nilton César Ferreira, cujo título escolhido, por Ferreira (2017) foi "Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática", que de maneira geral buscou juntamente com alunos do 5º período de um Curso de Licenciatura em Matemática estabelecer as possíveis relações que poderiam ser feitas entre a Álgebra Abstrata Moderna e a Álgebra escolar.

A dificuldade em encontrar novos estudos, que tivessem perspectivas semelhantes a nossa, tanto em cunho nacional quanto fora dele, nos faria refletir sobre nosso intuito inicial e redefinir nossas intenções, foi só aí que nos demos conta que algo havia nos passado despercebido, compreender mais profundamente o MMM, seria extremamente necessário, haja vista que, nessa época, nosso discurso provavelmente seria mais bem aceito. Mas antes optamos por discutir o ensino de Matemática na Educação Básica atualmente, defendendo a inserção de aspectos da Matemática Científica nessa etapa de ensino, para tanto recorremos, principalmente, aos documentos norteadores: a BNCC, os PCN's, as DCN's, entre outros; além de apontarmos que as iniciativas feitas pelo programa OBMEP junto a Educação Básica precisam ser mais valorizadas, pois essas coadunam com a perspectiva que adotamos neste trabalho.

Em nossa busca pela compreensão desse movimento a priori nos depararíamos com os estudos de Claras e Pinto (2008) e Alves e Silveira (2016), sendo que ambos buscariam compreender como se deu esse movimento em nosso país, o primeiro buscando refletir sobre os impactos do MMM sobre a formação docente; e o segundo procuraria mostrar que esse movimento não foi simplesmente imposto mas que ocorreu em função das necessidades de mudança que o ensino de Matemática exigia. Esses estudos nos reportariam para estudos mais detalhados sobre o MMM, como as pesquisas desenvolvidas por Miorim (1995) que ao descrever a evolução do Ensino de Matemática no Mundo e no Brasil desde os primórdios até o período anterior ao MMM, nos elucidaria sobre os primeiros esforços realizados visando suprimir a falta de continuidade entre a Matemática universitária e a Matemática escolar, e que estes começariam mais ou menos meio século antes do MMM, a partir do que a autora denominou de "Primeiro Movimento Internacional para Modernização do Ensino de Matemática". Nesse sentido, cabe ressaltar que embora a maioria dos estudos considere esse "Primeiro Movimento" apenas como uma primeira fase do MMM, nosso estudo compartilhará da mesma visão que Miorim (1995), como argumentaremos a frente. Teríamos ainda uma noção sobre os estudos desenvolvidos por D'Ambrosio (1987), Búrigo (1989), sendo que o primeiro faria uma análise sobre as consequências do movimento no Brasil e no mundo, e o segundo faria um paralelo sobre o movimento no Brasil e em Portugal. Vitti (1998), analisaria a reação de professores e pesquisadores diante do MMM. No intuito de compreender os fatores que contribuíram para o fim do MMM recorremos a Kline (1976). Ao pesquisarmos por experiências positivas ocorridas durante o movimento, conheceríamos ainda as pesquisas de Soares (2001) e Costa (2014). Ainda sobre este tema outras pesquisas seriam consultadas, e ao final optaríamos por compreender algumas mudanças ocorridas no ensino de Matemática, tendo como principais aportes teóricos os estudos de Miorim (1998) e Costa (2014), o primeiro como já dissemos por descrever o ensino de Matemática, evidenciando as causas que levaram as mudanças e as consequências advindas em cada uma dessas; já o segundo por nos permitir ter uma visão diferente acerca do MMM, declarando que nem todo o movimento foi mal sucedido e analisando os fatores que contribuíram para a experiência positiva.

É interessante esclarecer ao leitor que, os estudos interessados em compreender as mudanças ocorridas em função desses movimentos, estão em crescente produção, mais uma vez, por causa dos esforços de grupos como o GHEMAT. Esse fato justifica-se em razão do MMM ter sido extremamente difuso, cujos ideais foram abordados de maneiras distintas e em diferentes períodos, e consequentemente, ainda há uma grande necessidade em se promover estudos que visem, sobretudo, preencher suas grandes lacunas.

A reflexão e análise desses dois movimentos, nos despertaria para a importância do livro didático dentro do processo de ensino e aprendizagem, pois ele traz consigo as tendências almejadas para o ensino, sendo dessa forma, na maioria das vezes, o principal comunicador e guia diante das mudanças enfrentadas pelo processo de ensino e aprendizagem. Assim sendo, decidimos observar as abordagens utilizadas por alguns livros atualmente, especificamente os que serão implantados na Educação Básica a partir do ano que vem, os que são utilizados pelo programa PIC-OBMEP e os que foram adotados pelo programa PROFMAT. Para compreendermos se, assim como no passado, haveria alguma relação entre as abordagens feitas por esses livros e o problema da descontinuidade entre os níveis básico e superior, no que diz respeito ao ensino de

Matemática, dois suportes nos guiariam: o primeiro seria a Teoria das abordagens a aprendizagem, segundo Marton e Säljö (1976a, 1976b) e Fontes (2016); e o segundo seria a visão de Lima (2007) ao dizer sobre componentes que são indispensáveis para que o ensino de Matemática na Educação Básica tenha êxito.

Capítulo 2

Ensino de Matemática: atualidade, aspectos de sua evolução e sua constante necessidade de mudança

2.1 O ensino de Matemática atual e o distanciamento entre a Educação Básica e a Educação Superior

São diversas as discussões acerca do ensino da Matemática e a dificuldade que os alunos têm de apreender esta disciplina é um problema que sempre esteve presente ao longo de todo o processo de ensino aprendizagem.

Infelizmente esse fato, tende a se agravar, em parte, porque o ensino de Matemática ofertado na Educação Básica tem se mostrado cada vez mais superficial e desarticulado, muitas vezes reduzindo a Matemática a um amontoado de conjuntos disjuntos, que se baseiam em fórmulas e regras aparentemente sem sentido.

Ainda que se considere o processo de ensino e aprendizagem sob a ótica de toda a sua complexidade, não será por meio da descaracterização da Matemática, que se conseguirá torná-la uma disciplina mais "acessível". Acreditamos que facilitar o entendimento da Matemática, não está de sobre maneira, relacionado a essa visão distorcida, em que se restringe tanto as ideias matemáticas, que ela acaba nos oferecendo caminhos não só desconexos, mas sobretudo, limitados.

Nossa missão, enquanto professores dessa disciplina no Ensino Básico, é assumir de fato o papel de educador, mas ao contrário do que muitos pensam isso não significa renegar os fundamentos puramente matemáticos, pelo contrário, trata-se de evocar, com cautela, a essência Matemática e concomitantemente agregar sentido ao que ensinamos. Dessa forma, conforme indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) devemos organizar o ensino de Matemática para produzir um *conhecimento efetivo*, de significado próprio, *não somente propedêutico.* (BRASIL, 2002)

Apesar de nossos documentos norteadores (como as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN's), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os PCN's, entre outros.) argumentarem a favor da necessidade de priorizarmos um ensino de Matemática mais interdisciplinar e contextualizado, presente na realidade de nossos educandos, ou seja, um ensino de Matemática segundo os mesmos, mais útil à vida e ao trabalho e que permita uma formação mais universal do que profissionalizante, ainda há orientações para o ensino que nos permitem ser flexíveis a ponto de garantir que nosso educando tenha contato também, mas não de maneira exclusiva, com a Matemática enquanto ciência.

Nesse sentido, os PCN's reconhecem que, no que diz respeito a essa perspectiva da Matemática enquanto ciência, compete ao professor, criar condições que possibilitem aos alunos adquirirem uma noção mínima sobre alguns aspectos que lhe são tão característicos, como seus processos de construção e validação de conceitos, suas argumentações e demonstrações, suas formas de generalizar, relacionar e concluir, pois estas são tão essenciais na interpretação de fenômenos e informações, descrição da realidade e elaboração de modelos, como na estruturação do pensamento e desenvolvimento do raciocínio dedutivo; mas sobretudo favorecer que o aluno construa efetivamente essas abstrações matemáticas, evitando-se assim a memorização indiscriminada de algoritmos, que tão prejudiciais revelam ser para o aprendizado. (BRASIL, 2002)

Mas contrário a essas orientações, ainda parece haver uma busca incessante por tornar o ensino de Matemática na Educação Básica cada vez mais simples e aplicado, em detrimento do pensamento formal e abstrato, e isso não só não tem suprimido os problemas de aprendizagem, como também têm impossibilitado os alunos de desenvolverem seu verdadeiro potencial matemático. Novamente salientamos, é preciso mudar nossa postura frente ao ensino de Matemática, e criar condições que sejam favoráveis à construção dos conhecimentos matemáticos.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), a Matemática é, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, pois suas demonstrações têm como ponto basilar um sistema de axiomas e postulados. Ela cria sistemas abstratos, que são essenciais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações contundentes nos mais diversos contextos.

Ainda nas próprias palavras da mesma, encontramos a seguinte orientação:

> Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências. (BRASIL, 2018, p.540)

Apesar da extrema importância da realização de esforços que visem à melhoria e expansão de nossas metodologias de ensino em Matemática, é imprescindível que percebamos também que um dos fatores que contribuirão para que o aprendizado de Matemática ocorra de maneira efetiva, bem como, para que o conhecimento matemático mediante processo de construção possa ser realmente consolidado é enxergarmos a Matemática Científica como parte inerente desse processo.

Não se trata aqui de utilizá-la, em demasia, ou ter por intuito "embeber" nossos alunos com "resultados irrelevantes", certamente, sem deixar de considerar a importância das metodologias de ensino que tornarão isso possível, almejamos atribuir ao ensino, elementos que evidenciem a notória importância de nossa disciplina, de agregar ao ensino de Matemática sua verdadeira essência, aquilo que nos permite reconhecê-la como uma Ciência Exata e muito bem alicerçada.

Pois, já nessa etapa de ensino, é possível mostrar, naturalmente com certo critério, como se originaram as fórmulas, os conceitos e propriedades, por traz de cada uma delas, e em que condições essas ideias são válidas. Isso certamente trará ao menos um sentido maior ao que está sendo estudado, seja pra resolver algum problema de nosso cotidiano ou mesmo satisfazer alguma questão interna da própria Matemática.

Para a OBMEP (2019) trabalhar a Matemática Científica é transmitir a cultura matemática básica, é valorizar o rigor matemático presente na leitura e na escrita de resultados, na independência do raciocínio analítico, estimular a criatividade por meio do confronto com problemas interessantes da Matemática.

Entender a Matemática Científica pode ser uma tarefa árdua, principalmente se considerarmos as teorias avançadas mais recentes, certamente não sendo essa nossa intenção, nos limitamos a pensar na possibilidade de integrar apenas alguns de seus aspectos ao Ensino Básico, confiantes nos prováveis benefícios que isso poderá gerar. Mas para tanto, é importante perceber que, senão voltarmos a considerar o rigor mínimo que ela necessita, não será possível captar o que realmente é a disciplina de Matemática, e assim adentrar profundamente em sua essência. Por outro lado, tememos que sem um conhecimento matemático sólido, não se atinja o grau de excelência, que tanto carecem as áreas de exatas, outras áreas científicas e os centros tecnológicos, e cujas produções fornecem o esteio para o avanço de nosso país.

Contudo, reforçamos que na Educação Básica, a Matemática Científica não é passível de ser analisada isoladamente, mas deve sê-la em estreita relação com as outras abordagens, com outros elementos, como a passagem do intuitivo para o abstrato, ou ainda a construção do conhecimento matemático e os recursos didáticos para promovê-la, especialmente, contrabalanceando a abordagem de assuntos estritamente matemáticos e a abordagem de aplicações matemáticas em nosso cotidiano, nas quais incide decisivamente sobre o conhecimento.

Ainda nesse sentido, é importante ressaltar que esse contato dos alunos com a Matemática Científica deve ser feito de modo gradativo, no intuito de familiarizá-los com essa faceta da Matemática. Além disso, o êxito no ensino de Matemática, de um modo geral, depende da consideração de três componentes que devem ser compensadas por igual na abordagem no processo de ensino aprendizagem: a conceituação, a manipulação e as aplicações. (LIMA, 2007)

Essas componentes seriam ainda definidas, pelo mesmo autor, conforme mostrado abaixo:

- ➢ A ***conceituação*** consiste na formulação correta e precisa das definições, propriedades, proposições, teoremas, ... É a partir dessa componente que se estimula o pensamento dedutivo, compreende-se que as conclusões em Matemática são obtidas, considerando-se a relação intrínseca que há entre uma conclusão e a hipótese, entre uma afirmação e sua recíproca, entre seus diversos assuntos, entre a interpretação e reformulação de ideias, entre diferentes formas e termos, e mais, entre essa componente e o bom resultado das aplicações.

- ➢ A ***manipulação***, de caráter principalmente algébrico, é fundamental para a desenvoltura no manuseio de procedimentos e fórmulas, para a obtenção de atitudes mentais automáticas, que possibilitem ao estudante de Matemática, focar de maneira *consciente* em informações relevantes e ganhar tempo ao lidar com pormenores.

➢ As ***aplicações*** envolvem o uso adequado de conceitos e teorias matemáticas para chegar a resultados, conclusões e previsões sobre problemas simples do nosso cotidiano ou ainda problemas mais sofisticados de outras áreas, como por exemplo, as áreas científicas, tecnológicas ou sociais. Essa componente é a principal justificativa, que manteve a Matemática presente no currículo básico até hoje.

Com base em nosso discurso, não poderíamos deixar de mencionar uma ação, ainda pouco abrangente ou até mesmo pouco valorizada, segundo se constata, por exemplo em CGEE (2011) e Tecnometrica (2015), mas que visa propiciar aos alunos da Educação Básica, esse contato com a Matemática Científica, trata-se do projeto OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e algumas de suas extensões, sobre os quais pretendemos discorrer a seguir.

2.2 Projeto OBMEP: Uma pequena iniciativa (pouco valorizada) visando conectar o ensino de Matemática nos níveis básico e universitário

Todas as informações mencionadas a seguir sobre este projeto foram obtidas com base, principalmente, nas informações obtidas no site oficial da OBMEP (ver referências [64] e [64]) .

Ensinar Matemática sempre foi um grande desafio e por essa razão diversos projetos de intervenção são desenvolvidos pensando-se na melhoria do ensino. Nesse sentido, a OBMEP têm realizado iniciativas que visam, por um lado, oportuniza aos alunos participarem na construção dos conhecimentos matemáticos, e por outro, contribuí para que os professores de Matemática aprofundem seus conhecimentos.

Este projeto a nível nacional, foi criado em 2005, pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), e conta também com o apoio do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e o Ministério da Educação (MEC). O objetivo geral do programa é estimular o estudo da Matemática e identificar alunos promissores nessa área, e embora fosse pensado inicialmente para abranger apenas escolas públicas, o programa recentemente (2017) foi estendido também para as escolas particulares.

Apesar do programa possuir vários projetos desenvolvidos para incentivar, tanto professores quanto alunos, infelizmente a efetiva participação da OBMEP, na maioria das escolas públicas, se dá através apenas da aplicação de uma prova que ocorre anualmente, e atualmente visando abordar os diferentes graus de escolaridade, ela se apresenta divida nos quatro níveis mencionados abaixo:

- Nível A: Olimpíada voltada para alunos do 4o e 5o anos do ensino fundamental das escolas públicas;
- Nível 1: Olimpíada voltada para alunos dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental;
- Nível 2: Olimpíada voltada para alunos dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental;
- Nível 3: Olimpíada voltada para alunos do Ensino Médio.

A OBMEP Nível A, foi realizada pela primeira vez no ano passado, e sua aplicação consta de uma única prova objetiva. Nessa modalidade de Olimpíada, o IMPA atua parcialmente, disponibilizando as provas e os gabaritos, entretanto, a dinâmica de aplicação das provas, as correções e as premiações ficam sob a responsabilidade das Secretarias de Educação (Municipal, Estadual ou Federal).

Já nos Níveis 1, 2 e 3, as aplicações das provas da OBMEP, ocorrem em duas etapas distintas, sendo que a primeira constitui-se na aplicação de uma prova objetiva, de caráter eliminatório, composta por 20 questões de múltipla escolha, para todos os alunos inscritos; enquanto a segunda constitui-se na aplicação de uma prova discursiva, de caráter classificatório, composta por 6 questões, para os alunos classificados para essa etapa. Essa classificação consiste, em ir selecionando em ordem decrescente os alunos que obtiverem as maiores notas na prova objetiva, até que se preencha o total de vagas disponível para cada escola por cada nível.

Para participar da OBMEP, é necessário apenas que as escolas realizem, em cada edição, sua inscrição no projeto, sendo que para as escolas públicas essa inscrição será gratuita, enquanto que para as escolas particulares será cobrada uma pequena taxa, visando cobrir apenas os custos de logística. As escolas inscritas recebem da OBMEP apostilas com exercícios resolvidos e comentados, denominadas “Banco de Questões”, para que sejam trabalhados em sala, a fim de preparar os alunos para a prova.

Como forma de incentivo o programa OBMEP oferece premiações não só para alunos, mas também para professores, escolas e Secretarias de Educação que obtiverem os melhores desempenhos em cada edição. Os alunos, em particular, são premiados com certificados de menções honrosas, medalhas de bronze, prata e ouro.

Uma outra iniciativa desse programa, que busca atuar continuamente na escola, é o projeto "OBMEP na escola", muito pouco difundido. Essa afirmação, pode ser aceita, por exemplo, considerando apenas Goiás, cruzando as informações obtidas no site da Secretaria de Estado da Educação (SEDUC, 2019) com a lista de professores habilitados para participar do projeto em 2020 (ver referência [65]), conclui-se que, dentre as mais de 1000 escolas que o estado possui, no máximo 41 delas participarão desse projeto no ano que vem.

O projeto visa contribuir para a formação contínua de professores de Matemática, incentivando-os a aprofundar seus conhecimentos matemáticos e adotar novas práticas de ensino em suas aulas. Com base, na resolução de problemas, os professores devem trabalhar, no contra-turno, com um grupo de alunos selecionados de sua própria escola ou de alguma escola vizinha, o conteúdo programático previsto pelo programa, além disso, ele ainda participa de encontros com outros professores do programa e coordenadores do projeto para discutir essas ações.

Para participar do "OBMEP na escola", o professor interessado deve passar em um exame seletivo, na maior parte das vezes aplicado no mesmo dia em que ocorre a segunda fase da OBMEP, ou ainda ser convidado pelo programa. Esse convite, geralmente é feito, somente a professores cujos alunos tenham recebido menções honrosas ou medalhas em alguma edição da OBMEP.

A relevância desse projeto pode ser encontrada em estudos como os de Soares (2014), onde são apontados indícios de como o avanço na aprendizagem em Matemática tem se mostrado visível em escolas envolvidas com o projeto. Os alunos dessas escolas têm obtido desempenhos extremamente positivos em exames como a Prova Brasil, o Enem e o Pisa. Contudo ainda é importante ressaltar que este estudo evidenciou quanto maior o tempo de envolvimento da escola com o projeto, maior o progresso alcançado na aprendizagem de Matemática.

Contudo, um projeto da OBMEP que não poderia deixar de ser comentado é o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), destinado apenas aos alunos medalhistas, estes recebem a oportunidade de ampliar seus conhecimentos científicos e se prepararem para um futuro desempenho profissional e acadêmico. E mais do que isso, se participarem regularmente do programa recebem um incentivo financeiro mensal (bolsa de estudos) do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) em troca de sua dedicação ao programa. O programa é desenvolvido em ambiente virtual, mas também conta com alguns encontros presenciais. Este projeto da OBMEP é certamente o que mais estreita essa relação entre o ensino de Matemática na escola e na universidade, o que pode ser constatado nos objetivos apresentados a seguir.

Segundo a OBMEP (2019) os principais objetivos do PIC são:

➢ Despertar nos alunos o gosto pela Matemática e pela ciência em geral;

➢ Motivar os alunos na escolha profissional pelas carreiras científicas e tecnológicas;

➢ Aprofundar o conhecimento matemático dos alunos, por meio de resolução e redação de soluções de problemas, leitura e interpretação de textos matemáticos e estudo de temas de modo mais aprofundado e com maior rigor matemático;

➢ Desenvolver nos alunos algumas habilidades tais como: sistematização, generalização, analogia e capacidade de aprender por conta própria ou em colaboração com os demais colegas;

➢ Incentivar o aprimoramento matemático dos professores, em especial dos professores dos alunos bolsistas;

➢ Estimular uma articulação entre as escolas e as universidades.

Ainda a respeito desse projeto, um estudo realizado no ano passado pela Secretaria de Avaliação e Gestão da Informação em parceria com o Ministério de Desenvolvimento Social descobriu que inúmeros medalhistas, são oriundos de situações extremamente precárias e buscam através das oportunidades oferecidas pelo projeto PIC mudar sua dura realidade. (SAGI; MDS, 2018)

A partir dessas considerações, percebemos o quanto os projetos da OBMEP, se bem executados, podem ser valorosos, de acordo com estudos como os de Biondi, R. L.; Vasconcellos, L. M. e Menezes F., N. (2009), CGEE (2011) e Soares, C. M. M.; Cipriano, E. L. G. e Soares, J. F. (2014). No entanto, não podemos deixar, a priori, de perceber o quanto têm sido parca a sua influência sobre a Educação básica, e mais, como apenas uma minoria têm sido privilegiada. (CGEE, 2011)

Tomando como pressuposto todas as considerações que foram feitas até este momento, e os possíveis benefícios advindos, de um ensino que também contemple aspectos da Matemática Científica (claro, não de maneira exclusiva), é extremamente peremptório reafirmar, nesse sentido, a necessidade de repensarmos o ensino de Matemática.

Porém, antes é fundamental entendermos que toda proposta de melhoria surge não só de interpretações, análises e conclusões acerca da atualidade, torna-se indispensável também, entender como as influências do passado, nos conduziram até aqui, principalmente, levando-se em conta o fato do problema no qual temos discutido, não ser exclusivamente contemporâneo. Essa reflexão sobre o passado não só nos possibilita reinterpretar a história, mas quem sabe até mesmo, evidenciar fatos e adquirir conhecimentos que fogem ao senso comum.

Portanto, é nosso intuito a partir de agora compreender, o ensino de Matemática desde o período que antecede o despertar para a nossa problemática até o momento em que se cessaram as tentativas de resolvê-la, buscando analisar como procederam, que erros cometeram, pois afinal o problema ainda persiste, mas principalmente se houveram percepções ou iniciativas, que sob uma nova perspectiva poderiam ter funcionado.

2.3 Um olhar sobre o passado: o que deu errado?

Ao longo da história, percebe-se que o ensino de Matemática sempre provocou inquietações, e estas por sua vez, culminaram em discussões que outorgavam sobre a necessidade de melhoria do mesmo. Apesar das diversas mudanças que permearam esse ensino, nos restringiremos a compreender apenas alguns aspectos das mudanças que tiveram em sua justificativa nossa mesma preocupação: reduzir a abjunção existente entre o ensino de Matemática nos níveis médio e superior, a partir da inserção de algumas abordagens da Matemática Científica na Matemática escolar.

A primeira vista, parece ser extremamente perigoso enveredar por esses caminhos, uma vez que, os mesmos nos conduzem para uma pauta contrária, as que têm sido amplamente discutidas, na maioria das tendências educacionais atuais.

Porém, mesmo cientes que muitos poderão alegar como prerrogativa concedida pela história de que esta é uma abordagem fadada ao fracasso, naturalmente em virtude da reforma de ensino mal sucedida pelo Movimento da Matemática Moderna, é com extrema sensatez que nos posicionaremos de forma bastante intrépida frente a esses obstáculos. Aliás, a despeito de todas essas impressões, ainda julgamos ser necessário investigar alguns aspectos que desencadearam esse processo e, sobretudo, refletir sobre uma outra vertente dele que pouco foi explorada em nosso país.

Assim, com base nessa ótica, buscamos a priori compreender dois movimentos, que embora tivessem visões diferentes, podemos dizer que até mesmo contrárias, buscaram a "modernização" do ensino de Matemática, com maior veemência:

1. O "Primeiro Movimento Internacional de Modernização do Ensino de Matemática", denominado dessa forma, segundo Miorim (1995, p. 14) e ocorrido no início do século XX.

2. E o Movimento da Matemática Moderna (MMM), cujo auge ocorreu durante a década de 60.

Para tanto, seria importante também compreender, ao menos em linhas gerais, os ocorridos que culminaram na manifestação desses movimentos. Fez-se então necessário retroceder no tempo, até o final do século XVIII e início do século XIX, onde novas propostas de ensino seriam criadas visando a princípio um nível, que havia sido deixado de lado, o nível elementar. Essas ideias, acabariam mais tarde, sendo também estendidas para o nível secundário. Essas novas propostas de ensino seriam idealizadas, mais especificamente por Johann Pestalozzi (1746-1827) e alguns de seus seguidores, e teriam em sua fundamentação uma educação que substituísse, a princípio, o ensino tradicional pelo empírico, que fosse mais intuitiva do que conceitual, que partisse do concreto para o abstrato. (MIORIM, 1995)

Considerando exclusivamente a Matemática, as propostas mencionadas anteriormente, enfatizavam ideias que, se contrapunham a um ensino mecânico baseado na memorização. Essas propostas apesar de enfatizar a importância do empirismo, não chegariam, porém, a fazer considerações sobre as possíveis aplicações da Matemática a outras áreas do conhecimento, nem tão pouco, discutiriam sobre a necessidade de mudanças no currículo escolar. Mas, contudo, seriam importantes indícios da reforma que estava por vir... É então, justamente por aí, onde escolheríamos iniciar nossa retrospectiva.

2.3.1 O ensino de Matemática e os indícios de uma grande reforma

Podemos dizer que a segunda etapa da Revolução Industrial ocorrida, no século XIX, na Europa seria a priori a mola propulsora que conduziria diversos países a se atentarem para uma urgente necessidade de mudanças no ensino, tanto em seu currículo quanto em sua acessibilidade. A substituição da mão de obra pela máquina exigiu a capacitação de trabalhadores para lidarem com as novas tecnologias, além da formação de especialistas que fossem capazes de empregar os avanços da ciência a favor das indústrias, e dessa forma melhorar as técnicas de produção. Assim no final desse século, inúmeras discussões acerca do ensino seriam suscitadas, como podemos observar no trecho abaixo, descrito por Miorim (1995):

A ampliação do ensino as classes trabalhadoras, ou seja, a universalização da educação, e a relação educação-trabalho passariam a ser a partir desse momento, os grandes temas das discussões educacionais. (MIORIM, 1995, p. 109)

Embora muitos (nobres) contestassem a oferta de ensino as classes mais baixas, temendo que "a luz do conhecimento" os pudesse "libertar", novas escolas seriam criadas e atingiriam todas as classes da sociedade, inclusive as populares.

Contudo essas escolas apresentariam dois programas distintos: um designado às classes populares e o outro destinado às classes mais nobres. Às classes populares seria reservado o "direito de acesso" a educação, restrito a duas etapas somente; a primeira composta por "estudos elementares" teria como meta desenvolver nos indivíduos as habilidades de leitura, escrita e cálculo, além de fornecer conhecimentos gerais, a fim de garantir trabalhadores mais capazes; já a segunda etapa, em nível secundário, contemplaria conhecimentos mais técnicos pertinentes a formação profissional. Às classes mais nobres frequentariam escolas que forneciam uma formação visando uma cultura geral, isto, tanto no nível elementar quanto no secundário, e após essas etapas, acessariam as os níveis universitários, aliás, é importante frisar que apenas essas classes tinham esse direito.

Mas as mudanças ocorridas nesse período não parariam por aí, o desenvolvimento da ciência passaria a ser vinculado diretamente ao desenvolvimento sócio-político-econômico, o que levaria parte da sociedade a exigir uma modernização do currículo no nível secundário, e introduzir no mesmo algumas ideias que até então só eram vistas em nível universitário. Consequentemente, isso culminaria numa série de debates sobre a necessidade, ou não, de tais mudanças. Enquanto uns eram a favor de se preservar a formação clássica, baseada no estudo das humanidades clássicas, e acreditavam que era a única capaz de despertar a imaginação e o raciocínio, indispensáveis para uma boa formação; outros defenderiam a importância de se inserir no currículo de segundo grau ideias mais modernas visando garantir que o estudante ao findar o ensino secundário, pudesse atender as exigências necessárias ao contínuo progresso da sociedade.

A principal argumentação contra essa mudança, por parte da oposição, era que o desenvolvimento intelectual de um indivíduo não ocorreria apresentando-lhe os resultados da ciência moderna, pois sendo a ciência meramente invenção seria suficiente apenas ensiná-lo a pensar, e fazê-lo saber o que poderia assumir como verdade, para usar como ponto de partida em uma nova criação. O trecho a seguir nos confirmaria esse posicionamento:

> "[...] Não se faz um homem científico, ensinando-lhe ciência, porque a verdadeira ciência, como poesia, é invenção. O melhor meio de reforçar e desenvolver o intelecto da nossa juventude, será sobrecarregar-lhe a memória com os resultados da ciência moderna, ou é ensiná-la a raciocinar, a imaginar, a combinar, a adivinhar, a saber de antemão aquilo que deve ser verdade por um sentido inato de ordem e harmonia, de simplicidade, fecundidade - um senso quase idêntico ao da beleza?" (MONROE, 1939, p. 287)

Já os defensores da modernização do ensino nas escolas secundárias, iriam rebater essa argumentação criticando duramente o ensino daquele tempo, ao dizerem que a escola ministrava aos alunos um "ensino superficial", que em nada contribuía para que os alunos aprendessem, de fato, a raciocinar, a não ser sobre casos particulares, e que paradoxalmente ao que afirmava a oposição, aquele tipo de formação deixava a forma de pensar do indivíduo em modo estacionário e isso o tornava incapaz de obter uma conclusão geral sobre qualquer situação. Esse modo de pensar pode ser evidenciado nos recortes abaixo:

> "[...] não aprendereis sequer uma única coisa de todas aquelas que mais necessitais diretamente conhecer ao deixar a escola e entrar na vida prática; [...] o poder mental que será de mais importância em vossa vida diária será o poder de ver as coisas como elas são, sem respeito à autoridade, e de deduzir com exatidão, conclusões gerais de fatos particulares. [...] no colégio, não conhecereis outra fonte de verdade a não ser a autoridade; e nem exercitareis vossas faculdades de raciocinar sobre coisa alguma a não ser na dedução daquilo que é determinado pela autoridade." (MONROE, 1939, p. 403)

Apesar de toda resistência a modernização, alguns aspectos da ciência moderna acabariam sendo implantados nos currículos das escolas secundárias de diversos países, porém, isso ocorreria de formas distintas e dispersaria vagarosamente.

Ao mesmo tempo a Universidade também seria modernizada introduzindo em seus currículos novos conteúdos técnicos e científicos, esses por sua vez, mais realistas, e adotando novos métodos, além disso, seriam criados cursos técnicos de nível superior. Essas mudanças colocariam em foco repensar o ensino das Ciências Naturais e Matemática que, a partir de então, deixariam de fazer parte da matriz curricular das artes liberais, ao qual pertenciam desde a Antiguidade. Com a possibilidade aberta pela iminente renovação do ensino, nessas novas instituições (a Universidade e as escolas técnicas) as ideias matemáticas passariam por grandes mudanças, e essas, transcenderiam as necessidades impostas pelo desenvolvimento industrial. Conforme aponta Miorim (1995, p. 119), os estudos matemáticos não seriam mais limitados às necessidades práticas, à mecânica e à astronomia, novos campos surgiriam preocupados em desenvolver a própria Matemática, garantindo o rigor e provocando uma revolução na forma de ver a geometria.

Ocorreria assim durante esse período uma produção em larga escala que elevaria a Matemática, fazendo-a alcançar patamares nunca vistos antes. Segundo Boyer (1996), durante o século XIX a produtividade Matemática foi tão grande que superava a produtividade total ocorrida antes desse período, tanto em quantidade como em qualidade, e por isso o mesmo passou a ser conhecido como Idade Áurea da Matemática.

A partir daí a Matemática passaria a ser uma grande teia estrutural e complexa. Dividida em vários campos, muitos dos quais, seriam de conhecimento apenas de especialistas. Com todos esses avanços seria imprescindível divulgá-los, dessa forma, vários congressos internacionais de Matemática começariam a ser realizados. Esses congressos oportunizariam a disseminação dos últimos trabalhos desenvolvidos, dos estudos em desenvolvimento, e mais do que isso, possibilitaria aos professores compartilharem as experiências de seu país, no que diz respeito ao ensino de Matemática, as dificuldades encontradas no mesmo, e a maneira de lidar com elas. Antes disso, cada país vivia limitado as suas próprias experiências, mas agora essa troca de vivências, conduziria a uma reflexão conjunta sobre como enfrentar esses problemas.

Essas preocupações com o ensino de Matemática acabariam originando o "Primeiro Movimento Internacional de Modernização do Ensino da Matemática".

2.3.2 O Primeiro Movimento Internacional de Modernização do Ensino de Matemática

Os primeiros esforços, voltados para a preocupação supracitada, ocorreram no início do séc. XX, e se intensificariam com a criação da Comissão Internacional de Ensino da Matemática (CIEM), durante a realização do 4º Congresso Internacional de Matemáticos (em inglês: International Congress of Mathematicians-ICM) na cidade de Roma em 1908. Essa comissão seria formada por diversos países, que se dividiriam em dois grupos[1]: os países participantes e os países associados. Essa separação seria feita usando como critério o fato desses países terem participado ou não dos últimos ICM's. Assim a principal diferença entre esses grupos estaria relacionada com o sufrágio. Pois, os países associados, embora pudessem participar de todas as atividades promovidas pela Comissão, não teriam o direito de opinar nas questões que seriam abordadas durante as reuniões dessa comissão. Contudo, cada país integrante dessa comissão, independente do grupo a qual pertencia, se comprometeria a compartilhar como se encontrava a situação de seu ensino de Matemática, no congresso seguinte.

Tendo como presidente Felix Klein (1849-1925), considerado naquele tempo, o principal defensor da modernização do ensino de Matemática nas escolas de nível médio, essa comissão influenciaria muitos países a modificar seus currículos e metodologias no ensino de Matemática.

.

Em relação ao avanço contínuo da ciência, o ensino de Matemática observado nas escolas secundárias tornava-se cada vez mais obsoleto. Enquanto as universidades preocupavam-se em espalhar os últimos progressos alcançados na Matemática, as escolas secundárias estariam estagnadas, ao ensino da geometria grega, do cálculo aritmético e da álgebra elementar, conforme propunha a obra de Euclides.

Essa falta de conexão desencadearia já desde aquele tempo, em via de mão dupla, um processo ilógico, pois tanto os jovens acadêmicos ao iniciarem o curso de Matemática utilizando-se apenas de seus conhecimentos prévios, se mostrariam incapazes de lidar

[1] O primeiro grupo seria composto pelos países participantes: Áustria, Bélgica, Dinamarca, França, Alemanha, Grécia, Holanda, Hungria, Itália, Japão, Noruega, Portugal, Romênia, Rússia, Espanha, Suíça, Reino Unido, Estados Unidos e Suécia e o segundo grupo pelos países associados: Argentina, Austrália, Brasil, Bulgária, Canadá, África do Sul, Chile, Egito, Índia, México, Peru, Sérvia e Turquia. (HOUSON, 1974, p. 76 apud MIORIM, 1995, p.150)

[2] <https://tefcrosmichaelidesen.wordpress.com/important-figures/klein-800/ Acesso em: 18 de jul. 2019.>

Figura 2.1: *Felix Klein (1849-1925)*
Fonte: Blog do matemático Tefcros Michaelides[2].

com os novos e estranhos desafios apresentados pela Matemática, quanto os professores egressos do curso superior não conseguiriam aplicar no ensino secundário uma grande parte "daquilo" que haviam estudado na universidade.

Esses fatos são reafirmados por Felix Klein logo no início de sua obra "*Matemática Elemental: desde um punto de vista superior*" como podemos ver nos trechos a seguir:

> "O jovem estudante encontra-se ao começar seus estudos (universitários) ante problemas que não lhe recordam nada das coisas que até então havia se ocupado e, naturalmente esquece rápido e completamente todas elas...
> [...] ao completar seus estudos universitários o recém formado professor não conseguia estabelecer nenhuma relação entre a matemática estudada na universidade e aquela exigida na escola secundária [...], os estudos realizados na (Universidade) [...] não exerceria[m] nem a mais remota influência em seu desempenho no magistério." (KLEIN, 1927, p. 1)

Assim para reivindicar uma urgente mudança na forma do ensino esse "Primeiro Movimento Modernizador" ressaltava o quão longínquo o ensino de Matemática na Educação Básica encontrava-se do ensino de Matemática no Ensino Superior, além disso, alertava que, se esse fato continuasse a ser ignorado, ele se tornaria um fardo cada vez pesado, e isto certamente impossibilitaria acompanhar todos os avanços científicos e tecnológicos exigidos num mundo cada vez mais moderno.

Pois, para Klein (1927), a descontinuidade existente entre esses dois níveis de ensino, não só não beneficiava a escola como também a universidade, a fim de sanar definitivamente este grande problema, seria fundamental agora encontrar maneiras de inserir "adequadamente" as ideias modernas da ciência no ensino da escola secundária.

A esse respeito, entendemos que a Universidade não se favorecia do ensino de Matemática que estava sendo ofertado pela escola, pois ele não contribuía para que o aluno ingressante, no nível superior, se utilizasse do que havia aprendido anteriormente para se adequar mais rapidamente aos estudos e pesquisas que vinham sendo desenvolvidos na Universidade. Da mesma forma a escola, também não era favorecida com a formação que os professores estavam recebendo, pois ela em nada ajudava na superação do ensino tradicional.

Esses apontamentos fundamentariam o surgimento de diferentes iniciativas, em vários países, mas que teriam como objetivo comum promover uma reforma no ensino das escolas secundárias, em particular, no ensino de Matemática. A partir desse marco, teríamos uma primeira tentativa de aproximar o ensino de Matemática, abordado nas escolas de nível secundário, e os avanços científicos e tecnológicos, demandado nas universidades.

Com maior incidência na Europa, essas mudanças começariam pela França e, mais tarde, conseguiriam quebrar a resistência de países mais conservadores como a Inglaterra e a Itália.

De acordo com Kilpatrick (1992), Klein enquanto presidente da Comissão Internacional de Ensino da Matemática, agiria com decoro aos seus ideais, isto é, aproveitaria esse posto para alavancar a reforma que tanto almejava para o ensino secundário.

As ações promovidas por essa Comissão possibilitou reunir informações sobre como se organizava o ensino de Matemática no nível secundário, os métodos empregados nas práticas de ensino, e as tendências pedagógicas que sustentavam o ensino, dos diversos países integrantes do ICM. Essas informações, apresentadas durante a realização do 5º Congresso Internacional de Matemáticos em Cambridge, em 1912, acabariam contribuindo para a elaboração da proposta de reforma do ensino de Matemática no nível secundário que estava sendo desenvolvida pela CIEM.

Nessa proposta, totalmente contrária as orientações de Euclides, seria defendido que esse ensino deveria ser mais simples e intuitivo. Essas ideias visavam atender as novas exigências pedagógicas impostas naquele tempo, que por ora, pensavam num ensino de Matemática que fizesse uso da psicologia, afim de, garantir que esse ensino fosse centrado no interesse do aluno e, portanto, num ensino que pudesse ser adequado ao nível de desenvolvimento do mesmo.

Ainda nas escolas secundárias seriam introduzidas ideias que até então só eram tratadas no nível superior como: as noções de cálculo infinitesimal, o conceito de função e a representação gráfica, uma vez que, esses temas eram vistos como sendo fundamentais para o desenvolvimento das ciências naturais e, além disso, seriam acessíveis para os alunos, já nessa etapa de ensino.

Para ressaltar a importância desses temas, Klein (1927) alegaria que o conceito de função era, há mais de dois séculos, o alicerce de todos os campos que empregavam as ideias matemáticas, e que a partir desse conceito o aluno se habituaria logo, com o uso frequente dos métodos gráficos e a representação no plano cartesiano, tão úteis nas aplicações matemáticas. Já o Cálculo Infinitesimal, seria segundo ele, indispensável para uma formação básica de Matemática, tanto no ensino oferecido pelas escolas secundárias quanto no oferecido pelas escolas técnicas.

Assim para o entendimento desses novos temas e mais do que isso, para o desenvolvimento da própria Matemática, seria imprescindível promover uma melhor articulação entre os vários tópicos de Matemática tratados na escola, principalmente entre os conceitos geométricos e os aritméticos.

Além do mais, se almejava valorizar mais o aspecto prático da Matemática, e com isso agregar mais "utilidade" ao seu ensino. Pois, para Klein (1927) as aplicações práticas da Matemática deveriam ser conciliadas com o ensino de cálculo (na aritmética), assim o aluno não só entenderia as regras, mas também aprenderia a usá-las.

Desse modo, essa nova proposta de ensino apresentada pela CIEM, alteraria de forma significativa, ainda que de maneiras diferentes, o ensino de Matemática em diversos países. Entretanto a repercussão desse movimento modernizador seria abalada, a princípio, por causa da 1ª Guerra Mundial, que acirraria o desmembramento entre os países integrantes do ICM e depois pela morte de Klein em 1925. As ideias desse movimento só seriam reestruturadas, em 1928, e partir daí várias propostas de ensino da Matemática seriam criadas embasadas nesse movimento renovador.

É somente, também, a partir dessa época que parte dessa repercussão chegaria a influenciar o ensino brasileiro. Interessados em entender porque essas discussões atingiriam o ensino de Matemática em nosso país tão tardiamente, é que promovemos as discussões a seguir.

2.3.3 O ensino de Matemática no Brasil

A princípio dominada pela doutrina jesuítica, a educação brasileira contemplaria apenas as disciplinas, do tipo clássico-humanístico, e assim permaneceria por mais de dois séculos. Nesse tipo de ensino, muito pouca ou praticamente nenhuma atenção seria dispensada a Matemática. Esse menosprezo que os jesuítas, em sua maioria, atribuíam às ciências em geral, em particular à Matemática, seria devido ao fato dela ser percebida, pelos mesmos, como uma ciência "fútil" que em nada contribuía para a formação geral do indivíduo. A esse respeito, diz Miorim:

> "Muitos jesuítas não viam com "bons olhos" as matemáticas. Os estudos das relações misteriosas entre números e entre estes e as letras - a gematria[a] - inquietava os religiosos. Além disso, a busca de relações abstratas que aparentemente não ocupa nenhum lugar na escala dos seres era encarada como uma ciência vã." (MIORIM, 1995, p. 164, "grifo nosso")
>
> [a]A Gematria é uma técnica ancestral de numerologia, que tem origem nas culturas assírias, babilônicas e gregas, mas foi seguida especialmente pelo misticismo judaico, principalmente a Cabala - um sistema místico que interpreta os mistérios da Bíblia, da criação e do Torá. A Gematria atribui um determinado valor a cada letra do alfabeto. Somando os valores das letras de uma palavra, é feita a comparação desse total com o de outras palavras. Disponível em: https://www.wemystic.com.br/artigos/conheca-os-misterios-da-gematria-antiga-tecnica-de-numerologia/ - Acesso em: 20 de jul. de 2019.

Embora os jesuítas fossem expulsos do país, em 1759, o ensino brasileiro ainda permaneceria sob influência de sua doutrina, nas décadas seguintes. É então somente no final do século XVIII que a Matemática começaria a ser incorporada nas escolas brasileiras, como podemos observar no relato abaixo:

> "... ao lado das matérias de ensino literário e religioso - o latim, a retórica, o grego, o hebraico, a filosofia, a teologia - a paisagem escolar do Brasil inclui as matemáticas. A estas depois de 1800 agregar-se-ão outras disciplinas como, o desenho, francês e o inglês." (SILVA, 1969 p. 209 apud MIORIM, 1995, p. 167)

Para completar as lacunas do ensino brasileiro, o governo imperial influenciado pela reforma que estava ocorrendo no ensino de Portugal implantaria essas novas disciplinas nas escolas a partir do que denominaram de aulas régias. O principal objetivo era que, a partir dessas aulas, os alunos começassem a resgatar os conteúdos que perderam. No entanto, a falta de local fixo para essas aulas ocorrerem, a maneira aleatória como os assuntos eram selecionados, a não sequência do assunto abordado anteriormente, seriam alguns dos motivos que tornariam essas aulas pouco atrativas. Contudo é importante entender que por meio delas que os conceitos matemáticos, como Álgebra, Aritmética e Geometria, começariam a penetrar nas escolas brasileiras.

O tratamento avulso que era dispensado a essas aulas, aos poucos foi se acabando, à medida que surgiam novas instituições de ensino secundário. Por exemplo, foram criados locais fixos para essas aulas, os Liceus; nesses estabelecimentos, o ensino passaria a ser supervisionado. Além dos Liceus, surgiriam ainda as escolas e professores particulares, e mais do que isso, seria criada também a primeira instituição pública de ensino secundário no Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II, em 1837. Este último seria baseado nos colégios franceses e apresentando um sistema de ensino seriado, conferiria aos alunos concluintes o diploma de bacharel em letras, além do direito de ingresso direto em qualquer escola superior.

Embora a Matemática fosse ensinada em todas essas instituições, nelas também prevaleceria o ensino das disciplinas humanísticas, uma vez que, elas seriam fundamentais para que os alunos concluintes, do curso secundário, pudessem lograr aprovação nos exames de acesso às Academias Militares ou às Escolas Superiores.

O Colégio Pedro II até tentaria prestigiar tanto o ensino das disciplinas clássico-humanísticas quanto o ensino das "novas disciplinas" e assim romper definitivamente com a antiga tradição. Todavia, teríamos o pêndulo ora a favor dessas, ora a favor daquelas. O ensino de Matemática, especificamente, ora seria propedêutico, ora seria aprofundado.

Nesse sentido, ocorreria ainda outra tentativa, que ficaria conhecida como a Reforma Benjamim Constant, e por sua vez seria muito mais abrangente, pois visava não só incutir mudanças no ensino de um único colégio, mas sim em todo país.

Entretanto essa proposta não excluiria do currículo as disciplinas tradicionais, e sim acrescentaria as disciplinas modernas. Dessa forma o currículo no ensino secundário contemplaria as seguintes matérias: Matemática, Física geral, Química geral, Biologia, Sociologia e moral, Noções de direito pátrio e de economia política, Português, Latim, Francês, Inglês (ou Alemão), Grego, Geografia política e econômica, Zoologia, Botânica, Meteorologia, Mineralogia, Geologia, História universal, História do Brasil e da literatura nacional, Desenho, Música e Ginástica.

No entanto a quantidade de assuntos apresentados nessa proposta, acabaria tornando-a irrealizável dentro do tempo previsto, que seria 7 anos ao todo (embora fossem apenas

4 séries, algumas delas seriam divididas em períodos). Não bastasse isso, essa proposta não priorizaria a preparação para os exames de acesso aos cursos superiores, e consequentemente manifestações de descontentamento não tardariam a surgir. Embora esses manifestos não tenham conseguido fazer com que reforma sucumbisse de imediato, aos poucos eles fariam com que ela fosse desfeita. Esse fato pode ser evidenciado no trecho abaixo

> "É pela ação do tempo, podemos dizer, que o *plano monumental de Benjamim Constant, vai sendo desfigurado*, através de cortes e ajustamentos oportunísticos a ideia predominante de um curso secundário voltado à consecução do objetivo de preparo aos cursos superiores." (SILVA, 1969, p. 247 apud MIORIM, 1995, p. 177, "grifo nosso")

A partir daí se intensificaria a disputa entre os que acreditavam que a formação secundária deveria ser literária com aqueles que defendiam que ela deveria ser científica. Várias reformas viriam após a de Benjamim Constant, inclusive uma delas ficaria bastante conhecida no cenário educacional brasileiro a partir da década de 20, o Movimento da Escola Nova. Esse movimento seria proveniente das diversas correntes educacionais surgidas no final do século XIX nos Estados Unidos e na Europa. Essas diferentes e modernas correntes pedagógicas se espalhariam por vários estados brasileiros teriam entre si, ao menos um princípio comum: introduzir nas escolas um ensino voltado para as situações do cotidiano. Todavia suas propostas seriam aplicadas apenas para o ensino primário. Aliás, o ensino secundário não seria modificado de forma considerável por nenhuma dessas mudanças.

E assim permaneceria até 1928, quando a reestruturação do Primeiro Movimento Internacional para Modernização do Ensino de Matemática, faria seus ideais, finalmente, penetrar o ensino secundário brasileiro. Todos esses ideais seriam contemplados numa proposta modernizadora do ensino apresentada pela Congregação do Colégio Pedro II, e teria Euclides Roxo, como principal responsável em sua elaboração, assim confirmaria o próprio Euclides:

> "... o ensino de aritmética, o de álgebra e o de geometria eram feitos separadamente... Em 1928, propusemos à Congregação do Colégio Pedro II, a modificação dos programas de matemáticas, de acordo com orientação do moderno movimento de reforma e a consequente unificação do curso em uma disciplina única sob a denominação de *matemática...*" (ROXO, 1937, p. 73-74, "grifo nosso")

Figura 2.2: *Euclides Roxo (1890-1950)*
Fonte: Separata da Revista VERBUM[4]

Na época, segundo Dassie (2008), Euclides Roxo, seria professor e diretor do Externato do Colégio Pedro II, e influenciado pelos movimentos internacionais de renovação no ensino de Matemática fundamentaria sua proposta de ensino considerando as premissas que Felix Klein usou no "Primeiro Movimento Internacional de Modernização do Ensino de Matemática". As mudanças abordadas nessa proposta já começariam a ser implantadas no Colégio Pedro II, em janeiro de 1929, e se estenderiam para todas as escolas secundárias brasileiras, através da Reforma Francisco Campos, em 1931.

De acordo Miorim (1995), Francisco Campos seria o primeiro ministro do "Ministério da Educação e Saúde Pública", que tomaria como referência em sua reforma todas as recentes mudanças ocorridas no Colégio Pedro II.

Pode parecer estranho que essas ideias tenham demorado duas décadas praticamente para incutirem no Brasil, principalmente quando se observa que o Brasil foi considerado um país associado do ICM, no entanto é importante compreendermos que a primeira e única participação brasileira se deu, de fato, no congresso de Cambridge, em 1912, e mesmo assim de forma muito rápida, e que, embora o Brasil tenha demonstrado interesse em aderir naquela época as ideias do movimento, acompanhar as futuras discussões seria algo bastante complicado, com todos os problemas advindos da 1ª Guerra Mundial.

Esses seriam os motivos principais que levariam o Brasil a modernizar seu ensino secundário tão tardiamente. Todo esse processo de mudança na educação secundária

[4]Foto publicada na Separata da Revista VERBUM, Tomo VIII, Fascículo 1, 1951 apud Dassie, 2008, p. 25.

brasileira naturalmente enfrentaria problemas. Com relação à Matemática, a falta de livros didáticos contemplando a modernização da reforma seria um obstáculo a ser contornado, além disso, a grande quantidade de assuntos previstos no currículo, o sistemas de ciclos e o desmerecimento atribuído a sua apresentação lógica despertaria a oposição de dois grupos, tanto dos defensores do ensino clássico-humanístico, que entendiam que essa nova proposta não contribuiria para a formação da inteligência, ela apenas acarretaria o enciclopedismo superficial e a especialização prematura, e consequentemente, alegariam a importância do seu retorno à hegemonia do ensino, quanto daqueles (principalmente professores de Matemática) que defendiam que o ensino de Matemática deveria voltar a seguir a doutrina euclidiana em contraposição a esse ensino intuitivo. Os comentários abaixo nos ilustram essas discordâncias por parte de cada grupo de opositores:

Apesar do Colégio Pedro II ser considerado o berço dessa Reforma, um de seus professores de Matemática, Almeida Lisboa, não esconderia seu repúdio por esse novo ensino moderno e o criticaria duramente, dizendo que a Matemática havia perdido o que a tornava bela e útil, seu rigor, a lógica formal do pensamento, nem sequer havia mais a necessidade de se justificar os argumentos a partir de demonstrações. O ensino de Matemática havia sido limitado a um conjunto de regras e procedimentos. O aluno veria esses procedimentos associado a alguma situação particular em Matemática, e então não conseguiria empregar essas mesmas ideias para solucionar problemas análogos, pois não teve acesso a teoria que lhe serviria de base para resolver esses e outros problemas. Ou seja, talvez o aluno até possa ter aprendido a resolver um problema particular em Matemática, mas evidentemente isso não significa que ele tenha aprendido Matemática e nem tão pouco a raciocinar. (VIEIRA, 1936 apud MIORIM, 1995)

Entretanto, Almeida Lisboa não seria o único professor de Matemática a expor sua insatisfação com as mudanças geradas pela Reforma. Em subversão às novas orientações, alguns professores militares, entre eles os de Matemática, também se posicionariam, alegando que o novo ensino teria de ser adaptado pois estava prejudicando a formação do intelecto. Tendo como fundamento o positivismo, condenariam principalmente o ensino concomitante da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, argumentando que o ensino dessa forma desfigurava toda e qualquer construção lógica e sequencial, e isso impossibilitava o desenvolvimento do raciocínio. Seria, portanto, necessário tendo por base o positivismo, garantir que o ensino de Matemática preservasse a "ordem natural" dos fatos matemáticos, o respeito à relação de dependência que havia entre eles, pois todo avanço científico e industrial fora conquistado por pessoas que trilharam esse caminho. Além disso, seria urgente também diminuir o número de assuntos previstos nos programas de Matemática, visando trabalhar somente o que fosse essencial e permitir assim que o aluno tivesse mais tempo para assimilar os conceitos tratados. (DASSIE, 2001)

Além desses, não poderíamos deixar de citar o padre Arlindo Vieira, um dos principais defensores do ensino das humanidades clássicas e críticos dessa reforma no ensino secundário, que contestaria a princípio a extensão do currículo, o fato dele contemplar em todas as séries ideias de aritmética, de álgebra, de geometria e trigonometria e a maneira aprofundada e indissociável que eles seriam tratados. Sendo assim, além desse programa de Matemática mostrar-se irrealizável, somar-se-ia a isso o fato dos alunos, em sua maioria, não o compreender. Em seguida, justificaria a necessidade de esses apontamentos serem revistos, comparando nosso programa de Matemática com o de outros países, como por exemplo, a Itália, que apesar de apresentar um currículo muito menos extenso que o nosso, não deixaria de ascender sua cultura matemática e assim se manter no seleto grupo de países que mais dominavam essa ciência. (VIEIRA, 1936 apud MIORIM, 1995)

Euclides Roxo replicaria essas e outras críticas, principalmente através de seu livro "A Matemática na escola secundária". E mais, ele não estaria sozinho, conforme Dassie, (2001) Paulo F. R. Mendes Soares, professor das Escolas Técnicas Secundárias teceria uma obra enaltecendo a Reforma trazida por Euclides, através de seu livro intitulado de "O ensino da Matemática nos cursos secundários: diretrizes e programas". Nessa obra o autor alegaria que o maior problema em toda reforma foi que a maioria dos professores demonstrou não compreender realmente os principais pontos dessa proposta, acharam se tratar de uma simples mudança na ordem dos conteúdos a serem ministrados quando na verdade a maior ênfase incidia sobre a necessidade de novos métodos de ensino, pois somente através destes lograr-se-ia algum êxito.

Contudo, apesar das várias críticas à Reforma, as mudanças geradas por ela permaneceriam influenciando o ensino de Matemática das escolas secundárias brasileiras. Para sermos mais específicos, de acordo com Dassie (2001), as ideias de Euclides Roxo vigorariam em sua totalidade até 1942, porém com a Reforma Gustavo Capanema no ensino secundário, implantada pelo então, "Ministro da Educação" Gustavo Capanema, apesar de Euclides ter defendido arduamente a permanência de todas as suas ideias no ensino secundário de Matemática, os resultados negativos expostos pelo exército e pelo padre Arlindo Vieira em suas experiências e observações durante o período em que vigorou a Reforma Francisco Campos, faria o referido ministro acatar somente um aspecto ou outro de sua proposta, entretanto com algumas mudanças. A esse respeito, as principais seriam o abandono do ensino simultâneo de Aritmética, Álgebra e Geometria e, além disso, com exceção das escolas do exército, o ensino de Matemática perderia seu caráter científico em todas as demais escolas secundárias.

2.3.4 O Movimento da Matemática Moderna, sua origem e abordagens.

Com a reestruturação cultural, social, política e econômica ocorrida em vários países após o fim da 2ª Guerra Mundial, o ensino de Matemática voltaria mais uma vez a ser pauta em diversos países europeus e também nos Estados Unidos e com isso surgiriam preocupações voltadas para a necessidade de se atualizar seus temas e metodologias, visando atender a crescente demanda exigida pelo Ensino Superior, os avanços tecnológicos, o progresso das ciências e a qualificação da mão de obra, tão necessárias para o contínuo desenvolvimento de cada um desses países.

Por conseguinte, conforme nos aponta Kaleff (1989), isso levaria a Organização de Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE)[3], a subsidiar seminários visando promover essa mudança no ensino de Matemática. Ainda segundo o autor, esses seminários ocorreriam em Royaumont, na França em 1959; em seguida em Dubrovnic, na Croácia, em 1960 e novamente na França, dessa vez na capital (Paris), em 1961.

Através desses seminários projetos inovadores seriam criados e acabariam servindo como apontamentos no ensino da Matemática escolar secundária, bem como para aqueles que seguiriam seus estudos nas áreas científicas, como Física e Engenharia. (COSTA, 2014)

Muitas ideias seriam advindas também da "Comission Internationale pour I'Étude ET I'Amélioration de I'Enseignement dês Mathématiques" (Comissão Internacional para Estudo e Aperfeiçoamento de Ensino da Matemática - CIEAEM). Essa Comissão contaria com a participação do psicólogo Jean Piaget, representantes de Nicolas Bour-

[3]Surgiu a princípio como OECE (Organização para a Cooperação Econômica Européia), em 1948, visando restabelecer o continente europeu após os estragos deixados pela guerra. Esse órgão teria os Estados Unidos como um de seus financiadores, que mais tarde juntamente com outros países não europeus, passariam a fazer parte do grupo, tendo em vista se beneficiar dos inúmeros avanços alcançados pelo mesmo. Com essa mudança, o grupo passaria a ser conhecido como OCDE, a partir de 1961, e seria formado pelos EUA, Canadá, países do Mercado Comum Europeu e os da Escandinávia. (KALEFF, 1989)

baki[4], como os matemáticos Jean Dieudonne e Gustave Choquet, educadores como Caleb Gatteno da Universidade de Londres, além de outros pesquisadores que se interessavam pelo assunto e teria como objetivo compreender o ensino de Matemática para contribuir para a melhoraria de sua qualidade. (CIEAEM apud VALENTE, 2007)

Em 1955 seria publicada pela CIEAEM a obra "*L'enseignement des mathématiques*", que reuniria textos de vários educadores matemáticos e de outras várias áreas ligadas à educação. Este trabalho forneceria elementos importantes para a proposta que viria.

Em síntese, todo esse frenesi originaria, entre o final dos anos 50 e inicio dos anos 60, a reforma que ficaria mundialmente conhecida como o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Com caráter bastante abrangente, suas ideias seriam amplamente difundidas em diversos países. (KILPATRICK, 2009 apud COSTA, 2014)

O MMM traria em sua base os fundamentos encontrados nos trabalhos de Nicolas Bourbaki. Esses trabalhos buscavam integrar importantes campos da Matemática - Teoria dos Conjuntos, Álgebra, Topologia Geral, Funções de Variável Real, Espaços Vetoriais, Topologia e Integração - de forma coerente e rigorosa, sendo sempre muito diligentes com o tratamento axiomático, a abstração e a estruturação lógica. Sendo assim, o MMM teria a princípio como meta principal, adaptar essa concepção Bourbakista para o ensino secundário, que a propósito foi desenvolvida durante os seminários promovidos pela OCDE.

2.3.4.1 O MMM no Brasil

Embora o Brasil não tenha sofrido ataques direto ao seu território durante a Segunda Guerra Mundial, ele não ficaria imune aos seus impactos. Como nos expõe Claras (2010), as consequências da segunda guerra incidiriam principalmente sobre a economia brasileira, que sofreria uma súbita mudança, passando de uma base agrícola para uma base industrial, devido ao intenso êxodo rural ocorrido nesse período. Quanto a Educação, todo esse processo repentino acarretaria, na democratização do Ensino Básico, numa busca cada vez mais acentuada pela formação superior, na expansão industrial, que consequentemente, culminaria no aumento da oferta de trabalho, e em seguida, na qualificação da mão de obra, além de uma crescente exigência pela modernização das ciências aliada ao contínuo progresso tecnológico. Nesse novo cená-

[4]De acordo com Boyer (1996), Nicolas Bourbaki foi um pseudônimo usado por um grupo de matemáticos, em sua maioria, franceses, na autoria dos trabalhos que desenvolviam. Esses trabalhos apresentavam os principais assuntos da Matemática de forma integrada, além de contemplar todo rigor necessário ao desenvolvimento lógico-matemático.

rio, a Educação passou a ser importante e então se fez necessário sua reformulação, levando assim a uma intensa discussão sobre a criação da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 4024/61). Desde o início de elaboração da LDB até o momento em que ela entraria em vigor, em 1961, transcorreria mais de uma década.

Esse importante documento concederia a brecha necessária para que as idéias do MMM adentrassem no Brasil, ao afirmar que, a educação tinha por finalidade preparar o indivíduo e a sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos, lhes permitindo assim usufruir de suas possibilidades para superar as dificuldades do meio. (BRASIL, 1961).

Já nessa época, segundo Valente (2007), seriam recorrentes os discursos argumentando sobre a necessidade de se introduzir nas escolas secundárias brasileiras as ideias da Matemática Moderna, e dessa forma possibilitar que os alunos começassem a adquirir o verdadeiro espírito da ciência contemporânea. Esses fatos nos mostram que alguns educadores brasileiros já haviam sido inteirados sobre as mudanças que o MMM andava causando "lá fora".

Contudo, o MMM se espalharia pelo Brasil com abordagens distintas e em anos diferentes, por essa razão como nos diz D'Ambrosio (1987), esse movimento no Brasil pode ser descrito como um misto de ideias de todo o mundo. Ainda nesse sentido reafirma Wielewski (2008), que as ideias do MMM seriam mais bem difundidas nas capitais, ou seja, São Paulo e Rio de Janeiro (Sudeste); Curitiba e Porto Alegre (Sul); Bahia, Fortaleza, Natal e Recife (Nordeste), e de lá seguiriam de forma mais lenta para os outros estados brasileiros. Aliás, os lugares mais afastados dos grandes centros do país só teriam acesso ao MMM, por meio dos livros didáticos que começariam a ser publicados a partir de 1967.

A razão pela qual, constata-se que o MMM tenha tido maior ênfase nas capitais, pode ser atribuída à criação de alguns grupos disseminadores das ideias do movimento nesses locais. Dentre os vários grupos que surgiram, citamos abaixo os principais:

- Em 1961 criou-se o *Grupo de Estudos do Ensino da Matemática* (GEEM), criado no estado de São Paulo, sob a coordenação de Oswaldo Sangiorgi, considerado um pioneiro na repercussão das ideias do MMM no Brasil. Segundo Búrigo (1989), Sangiorgi teria aderido ao MMM após participar de um Curso nos EUA, que abordava as características do movimento, em 1960.

- Em 1962 foi criado o *Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática* (NEDEM), criado no estado do Paraná, sob a coordenação de Osny Antônio Dacol. Segundo Claras (2010), Osny que há algum tempo ansiava por mudanças no ensino de Matemática, veria no MMM sua principal motivação para a criação do NEDEM junto com outros professores, aliás, toda essa iniciativa, seria proveniente de sua participação no Curso de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática, organizado pelo Professor Sangiorgi em 1961, em São Paulo;

➢ Em 1965, o *Centro de Estudos de Ciências da Bahia* (CECIBA), foi criado pelo MEC em parceria com Secretária de Educação e a Universidade da Bahia, que ficaria sob a coordenação de Martha Maria de Souza Dantas e Omar Catunda. Segundo Dias et al. (2013), Martha teria tido seu primeiro contato com o MMM em 1958, em Portugal, após conhecer o professor de Matemática José Sebastião e Silva, principal disseminador das ideias do MMM nesse país. Após se convencer da importância do MMM, Martha voltaria ao Brasil, e acabaria sendo a grande precursora das ideias desse movimento na Bahia.

➢ Em 1970, foi fundado o *Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre* (GEEMPA), no Rio Grande do Sul, que teria como presidente Esther Pillar Grossi. A criação desse grupo ocorreria, no momento em que vários livros abordando o ensino da Matemática Moderna se espalhavam pelas escolas brasileiras (BÚRIGO, 1989). Por esta razão entende-se porque o primeiro contato de Esther com o MMM, conforme relata a mesma, ocorreu através dos trabalhos de Lucienne Félix, as publicações de Zoltan Dienes e os livros de Georges Papy (GROSSI, 2005). Atraída pela proposta de Dienes, Esther o convidaria a aplicar suas ideias nas recém criadas classes experimentais, em 1972, e ele aceitaria. Conforme Bürigo (1989), o GEEMPA teria trilhado seu próprio caminho, e isso acabou fazendo com que ele se afastasse do tema principal do movimento. Entretanto, traços de sua proposta seriam mantidos: a ênfase nos aspectos estruturais envolvidos nos diferentes tópicos, ponto central da proposta de Dienes.

Somente com a análise desses grupos, já podemos perceber realmente a não uniformidade do MMM em nosso país. A propósito o MMM tomaria rumos fora do que se havia se estabelecido já desde o princípio, pois suas ideias formuladas por países membros da OCDE, inicialmente visavam atingir apenas os alunos da escola secundária que tivessem a intenção de prosseguir para o nível superior nesses países, mas ao contrário disso, ela acabou se estendendo a todos os alunos, de todos os níveis de ensino, inclusive o primário, e sua aplicação não ficaria restrita apenas aos países membros da OCDE, como podemos constatar o nosso país já serve de indício para entendermos que isso não aconteceu.

A forma distinta e até mesmo controversa com que as ideias do MMM foram interiorizadas, já nos anuncia a complexidade desse movimento. Entretanto segundo Costa (2014), ele se espalharia pelo mundo de acordo com duas vertentes: a interpretação americana e a apropriação européia. Esses fatos são enfatizados por Kilpatrick (2012), ao afirmar que, enquanto nos Estados Unidos buscava-se rapidamente reformular os conteúdos do ensino secundário, inserindo o uso preciso da linguagem matemática, além de instigar o aluno a fazer generalizações. Na Europa paulatinamente, buscava-se adaptar a linguagem científica da Matemática ao nível de entendimento dos alunos para inserir as ideias da "Matemática Moderna", visando assim abordar os conteúdos de Aritmética, Álgebra e Geometria, a partir de estruturas como anel, grupo e espaço vetorial.

No Brasil, a abordagem dada ao MMM sofreria muito mais a influência americana do que a européia, tanto em relação aos conteúdos quanto em relação à didática (COSTA, 2014). Além disso, diversas produções visando orientar a reforma empreendida seriam elaboradas, sendo que umas dariam ênfase ao pensamento abstrato enquanto outras seriam voltadas para conceitos mais concretos e os tipos de metodologia que deveriam ser empregadas nas aulas.

Ainda sobre essa dispersão do MMM em nosso país, vemos que essa presença tão marcante da concepção estadunidense, talvez seja explicada pelas ações intensas que seriam promovidas pelo grupo GEEM. Afinal, a liderança de Sangiorgi sob esse grupo, já traria consigo essa concepção, pois como já mencionamos, ele se familiarizaria com as ideias desse movimento durante um curso realizado nos EUA. Além dos vários cursos que Sangiorgi ofereceria aos professores de vários estados ele também repassaria essa concepção através de seus livros didáticos, que segundo Villela (2009), seriam os mais vendidos, por todo o país, durante todo o período de auge do MMM.

Já a parca influência européia, seria traçada, de acordo com Costa (2014), principalmente seguindo os ideais do professor Zoltan Dienes, apesar de alguns lugares terem se baseados nas ideias de três integrantes do CIEAEM: Lucienne Félix, Caleb Gattegno, além do belga, Georges Papy. Este último menos apontado que todos os outros, forneceu o suporte teórico que, ao nosso parecer e ainda segundo a visão dessa autora, serviria de base para a experiência (1969-2000) mais bem sucedida do MMM no Brasil. Pois mesmo após o declínio do movimento, ela ainda perduraria por cerca de duas décadas. Trata-se da aplicação da proposta de Georges Papy em um colégio particular do Rio de Janeiro no final da década de 60.

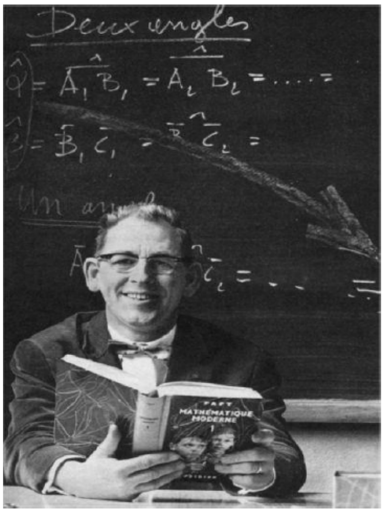


Figura 2.3: *Georges Papy (1920-2011)*
Papy com uma cópia de Mathématique Moderne, vol. 1, 1963.
Fonte: Blog do IMACS (Institute For Mathematics & Computer Science)[5]

Tendo em vista algumas positividades ocorridas durante essa experiência, daremos a seguir uma prévia sobre a mesma, particularmente sobre os aspectos que merecem, a nosso ver, uma especial atenção. Contudo, alertamos que o leitor interessado em mais detalhes sobre o fato, poderá encontrá-los na dissertação de Costa (2014).

Por volta dos anos 50, enquanto o grupo Bourbaki, além de outros importantes matemáticos acadêmicos, buscavam incessantemente pela melhoria da qualidade do ensino de Matemática na França, logo ao lado, um dos países vizinhos compartilhava do mesmo desejo, a Bélgica. Em busca desse propósito, surgiria então nesse cenário, como líder belga, o matemático Georges Léopold Anatole Papy. Motivado pelas ideias do MMM, Papy fundaria, em 1961, o Centro Belga de Pedagogia da Matemática (CBPM) esse centro, teria como meta promover o estudo e o aprimoramento do ensino de Matemática, além de disseminar as ideias da Matemática Moderna, proporcionando aos professores, de vários países, que por ali passavam a oportunidade de aprender sua metodologia. Assim, a importância dos estudos desenvolvidos pelo CBPM seria notoriamente reconhecida por muitos países. (VÁZQUEZ, 2008)

Ainda nesse sentido, como nos evidencia Costa (2014), as obras desenvolvidas por Georges Papy eram regidas segundo três convicções, que estariam ancoradas de modo geral, nos princípios da concepção bourbakista:

[5]Disponível em: https://www.eimacs.com/blog/2012/01/georges-papy-mathematics-educator-gifted-math-curriculum/ Acesso em: 25 de agosto de 2019.

- A Matemática deveria ser apresentada de forma unificada;
- Os programas de Matemática deveriam ser pensados de modo a favorecer a descoberta das estruturas matemáticas e na posterior, matematização das situações;
- As novas metodologias deveriam considerar a abstração como parte essencial no ensino de Matemática, além de valorizar os novos conteúdos que porventura fossem inseridos no currículo.

Com base nessas convicções, Papy publicaria sua obra mais conhecida durante o MMM, a coleção de livros do ensino secundário "Mathématique Moderne". Essa coleção apresentaria uma organização singular, desenvolvida segundo as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas e, teria como alicerce a Teoria de Conjuntos. Essa maneira de conceber a Matemática seria totalmente aversa ao ensino euclidiano. (PAPY, 1964 apud COSTA, 2014)

Vázquez (2008) reforça que o uso dessas estruturas assegurava a unicidade da Matemática em detrimento da falta de conexão que aparentemente havia entre suas várias teorias. Dessa forma, Papy conseguira com sua proposta curricular associar a Aritmética, a Álgebra e a Geometria continuamente.

Se por um lado, a abstração era considerada por Papy, como sendo indispensável para que o aluno se apropriasse dos conhecimentos matemáticos, em contrapartida, a intuição também teria papel fundamental em todo o processo, uma vez que ela serviria para desenvolver o raciocínio do aluno, e mais do que isso, o levaria a compreender os axiomas e em como estes são escolhidos não a bel-prazer, mas por uma questão de necessidade, pois eles fornecem o suporte essencial para o desenvolvimento de toda uma teoria.

Todo esse zelo de Papy pode ser percebido quando o mesmo ressalta que "o professor deve evitar dar aos alunos a impressão de que a Matemática é um jogo gratuito de axiomas escolhidos por um capricho." (PAPY, 1967, p. X apud COSTA, 2014, p.28)

Cabe-nos ainda acrescentar que Papy não só se preocuparia em atribuir a Matemática sua feição propriamente científica, mas, além disso, ele também estaria focado em propor uma metodologia de ensino que viabilizasse a efetiva aprendizagem do aluno, para tanto, seria fundamental oportunizar ao aluno ser, em meio à construção do "Edifício da Matemática" (como ele intitulava), bem mais do que um mero observador.

Figura 2.4: *Dom Ireneu Penna (1916-2010)*
Fonte: Revista Aquinate, nº 5, 2007, p. 332

2.3.4.2 A Matemática Moderna no Colégio de São Bento e seu Precussor

As contribuições de Papy chegariam, em 1967, ao conhecimento do monge e renomado professor de Matemática do Colégio de São Bento do Rio de Janeiro, Weimar Penna, vulgo Dom Ireneu Penna. Dom Ireneu a algum tempo andava insatisfeito com maneira que a Matemática vinha sendo apresentada nos livros nacionais, em particular, os de Ary Quintela, adotados pelo colégio, pois estes não contemplavam as ideias do MMM.

Nas escolas brasileiras, a Matemática Moderna vinha sendo ensinada como se não houvesse correlação entre as suas diversas áreas. E mais do que isso, os livros didáticos disponíveis, eram extremamente descuidados ao introduzir os assuntos voltados para a Matemática enquanto ciência e isso causava no aluno a estranha impressão de que ele estava se deparando com uma “outra Matemática”. Esse sentimento de Dom Ireneu pode ser notado no trecho de uma circular que ele escreveria aos pais esclarecendo sobre a adoção por um novo método de ensino no colégio

> Como a totalidade de manuais brasileiros disponíveis começou a introduzir os novos métodos e conceitos, sem porém alterar substancialmente a ordem das matérias e pontos tradicionalmente abordados, à medida que íamos expondo os conceitos fundamentais de Matemática pelos novos métodos, a própria necessidade de coerência nos foi distanciando desses manuais, obrigando-nos a fornecer aos alunos textos mimeografados das lições de exercícios. Na verdade, não era nossa intenção inicial enveredar por esses caminhos, quanto mais não fosse pelo maior trabalho que daí nos adviria. (PENNA, [1967-1970] apud COSTA, 2014, p. 81)

Esta foi a grande razão que levou Dom Ireneu a se sentir obstinado em encontrar uma forma de introduzir as concepções do MMM no Colégio de São Bento de forma mais harmoniosa, e por conseguinte, após examinar livros didáticos de Matemática de outros países, em especial os livros franceses, acabaria finalmente encontrando nos livros Mathématique Moderne de Georges Papy, o método de ensino, que para ele seria o mais coerente com os ideais do movimento e que conforme vimos acima acabaria sendo implantado no colégio.

Cabe ressaltar que Dom Ireneu, além de professor no Colégio de São Bento, exercia paralelamente também o papel de coordenador da Matemática no ensino ginasial (hoje denominado de Ensino Fundamental II). Esse cargo certamente contribuiu para que Dom Ireneu recebesse do então reitor do colégio, Dom Lourenço de Almeida Prado, carta branca para introduzir no ensino ginasial o método Papy. Infelizmente o método Papy seria aplicado somente nessa fase do Ensino Básico, não por falta de esforço de Dom Ireneu, em estender também ao ensino científico. Dois fatores podem ter sido decisivo para a não adesão do novo método também no científico: o primeiro, é que a maioria dos professores que atuavam no ensino científico, não acreditou no método Papy como Dom Ireneu, e preferiram continuar com o ensino tradicional que vinha sendo feito; o segundo pode ser atribuído ao vestibular, exame que os alunos concluintes do ensino científico se submeteriam, e que obviamente não seguiria a linha de raciocínio estabelecida pelo Método Papy. Contudo é importante comentar que os professores do ensino científico, não se oporiam a aplicação do método no ensino ginasial, mesmo cientes dos ajustes que provavelmente teriam de fazer, lá na frente, ao receber os alunos desse ensino.

Estando ciente de toda riqueza que o método Papy tinha a oferecer, Dom Ireneu juntamente a direção do colégio estabeleceriam algumas mudanças em função da adoção desse novo método:

- Os alunos só seriam admitidos no início de cada ano letivo e apenas na turma da 1º série ginasial (6º ano).

- Para suprir a grande procura pelo ensino no colégio, processos seletivos seriam instaurados para a admissão de novos alunos, mediante a aplicação de provas que abordariam as disciplinas de Português e Matemática.

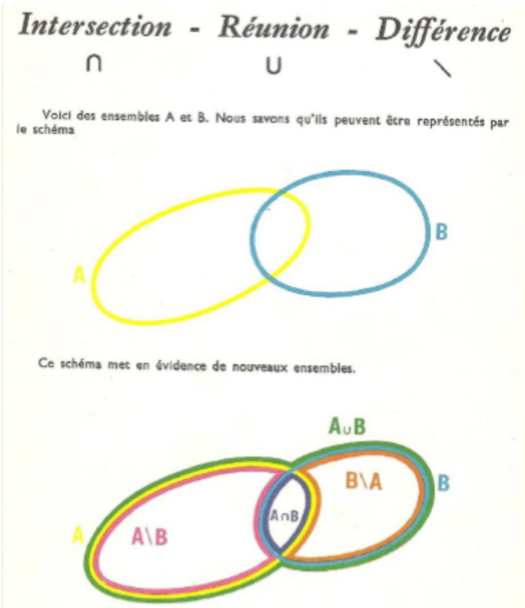
Apesar do total apoio recebido pelo reitor, Dom Ireneu sabia ainda que teria que lidar não só com a desconfiança dos alunos, mas principalmente com a dos pais. Além disso, devido à notoriedade que o colégio possuía, ele também teria de lidar com a mídia que o criticaria por abster-se dos manuais brasileiros. Assim, para resolver esses impasses uma das primeiras iniciativas tomadas por ele no início de cada ano letivo, seria esclarecer para ambos as possíveis vantagens que poderiam ser obtidas através do método Papy e alertar para as prováveis dificuldades, que naturalmente, surgiriam no decorrer do processo de ensino. O reconhecimento e prestígio que recaíam tanto sobre o colégio quanto sobre Dom Ireneu seriam suficientes para que tanto os pais quanto a mídia, mesmo desconhecendo o método Papy, optassem por dar um voto de confiança.

Entretanto, essas dificuldades que os alunos viriam a ter, acabariam sendo um grande incômodo em razão da adoção desse novo método de ensino no colégio, e seria sentida principalmente pelos pais que não saberiam como ajudar os seus filhos. A esse respeito, Dom Ireneu, se posicionaria, aconselhando-os a não tentar ajudar seus filhos, principalmente buscando ajuda externa, como contratar os clássicos professores particulares, pois estes certamente não sendo familiarizados com o método Papy, em nada contribuiriam, e mais, todas essas dificuldades eram naturais, parte do processo de aprendizagem, e o aluno precisaria aprender a confrontá-las. Ainda, sobre esse obstáculo, pensava Dom Ireneu

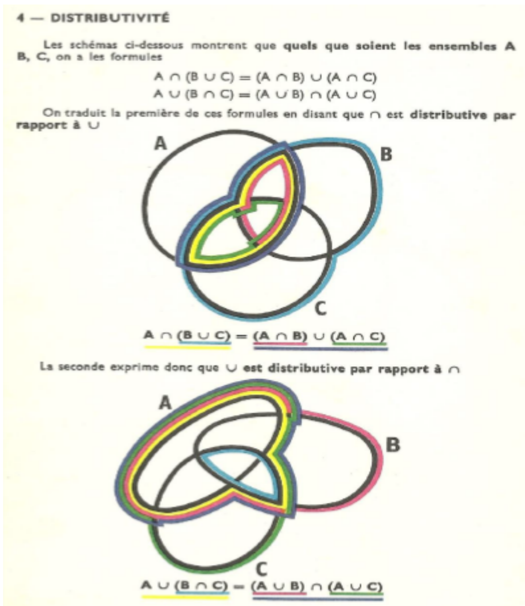
> [V]istos sob certo ângulo, alguns [...] inconvenientes passam a ser verdadeiras vantagens: o auxílio direto dos pais nos estudos das crianças é raramente desejável (prolonga ou agrava a maturidade); a instituição do "professor particular" é quase sempre um mero paliativo para adiar os fracassos, ou uma muleta para quem tem pernas." (PENNA, [1967 - 1970] apud COSTA, 2014).

Haveria ainda uma preocupação de Dom Ireneu em garantir que os professores, que juntamente com ele aplicariam o método Papy, estivessem capacitados para conduzir de maneira eficiente essa nova forma de ensino, por isso Dom Ireneu faria questão de ministrar aos colegas uma "formação contínua" demonstrando que não se tratava apenas de expor os assuntos aos alunos, mas, também de buscar a maneira mais assertiva de se portar, para permitir que os alunos pudessem, de fato, construir o "Edifício da Matemática".

Além disso, outros obstáculos ainda seriam enfrentados: um deles seria porque não havia tradução dos livros Mathématique Moderne para o português e a versão traduzida em espanhol estaria repleta de erros. Por essa razão Dom Ireneu produziria ele mesmo apostilas, denominadas de "Apontamentos de Matemática", que seguiriam quase em sua totalidade os livros de Papy. Em relação à parte que não seria fiel aos livros de Papy tratar-se-ia de alguma adaptação que Dom Ireneu faria ou mesmo estaria relacionada à algum acréscimo de conteúdo, não abordado pelos livros de Papy, que Dom Ireneu julgaria ser relevante. Outro problema a ser contornado residiria no fato, das apostilas elaboradas por Dom Ireneu terem sido impressas em preto e branco[6], pois sendo o método Papy bastante expressivo, o uso de muitas cores durante as exposições dos assuntos, acabava sendo uma de suas características mais marcantes, como podemos ver nas figuras 2.5(a) e 2.5(b) a seguir:



(a) Operações entre dois conjuntos



(b) Propriedade distributiva

Figura 2.5: *Uso das cores para auxiliar nas demonstrações em Teoria dos Conjuntos.*

Nesse sentido, ressalta Costa (2014, p. 39) que, o uso intenso das cores não serviriam

[6]Na época a reprografia do Colégio de São Bento não dispunha de recursos técnicos para fazer a impressão a cores. (COSTA, 2014)

somente para alegrar os livros de Papy, além disso, elas constituiriam um importante papel na metodologia desenvolvida pelo autor. A saída encontrada para manter esse importante recurso pedagógico do método Papy, seria sempre durante as aulas, tornar indispensável o uso de muito giz colorido por parte do professor e de muitas canetinhas por parte dos alunos. É importante salientar que todo esse apelo ao lúdico não seria feito em nenhum momento em detrimento do rigor e da lógica que cada assunto exigia. (CARELLI, 2013 apud COSTA, 2014)

Apesar de todo o cuidado demonstrado por Dom Ireneu, dois pontos desfavoráveis foram destacados por Costa (2014):

➢ O primeiro, observa que os conteúdos abordados seguindo o método Papy deixariam a desejar, no que diz respeito à Geometria, pois alguns tópicos deixariam de ser vistos, em comparação ao currículo tradicional.

➢ O segundo, relatado unanimemente, por vários professores, é que os alunos oriundos do método Papy embora fossem ágeis para enxergar a solução de problemas, em contrapartida, não conseguiriam ser também ágeis nos cálculos.

Contudo, todos esses inconvenientes que surgiriam durante essa experiência seriam previstos por Dom Ireneu, sendo que para alguns, medidas preventivas seriam tomadas de modo a amenizá-los, enquanto outros por falta de alternativa teriam de ser remediados. Enfim, embora o método Papy não tenha sido perfeito, sua aplicação não deixou dúvidas de todas as vantagens que ele proporcionou e os resultados satisfatórios que dele surgiram.

Assim reafirma Soares (2001), mesmo lidando com alguns pequenos problemas, a experiência do Colégio de São Bento com a Matemática Moderna resistiria até o início desse século, e isso não seria possível se não fosse um trabalho muito bem organizado, reconhecidamente bem feito e, portanto, bem sucedido. Essa experiência perdurou até o final do ano letivo de 2002, ou seja, persistiu por 33 anos, e seu fim tem uma relação direta com a morte de Dom Lourenço, em 2001, uma vez que o novo reitor, Dom Matias Fonseca de Medeiros, decidiu não dar mais continuidade à aplicação do método no Colégio de São Bento.

Estes ganhos proporcionados pelo método Papy seriam evidenciados também fora da escola, pois conforme relata Soares (2001, p. 98), os alunos do São Bento em comparação com os alunos de outras escolas, não só desenvolviam o raciocínio matemático muito mais precocemente como também mostravam ter um pensamento muito mais avançado. Consequentemente, os alunos do Colégio acabavam sendo facilmente distinguido dos demais por apresentar raciocínio ágil e melhor desempenho na resolução de problemas nos exames que prestavam.

Obviamente, é nossa obrigação, enquanto educadores, mais uma vez, enfatizar a importância das atitudes que tomou Dom Ireneu, sua ousadia e determinação; pois delas adviriam toda uma revolução, que culminariam nos benefícios que expusemos. Falecido em 2010, Dom Ireneu, no que tange a Matemática, será sempre lembrado por mudar a maneira de se ensinar e praticar essa disciplina. Em Costa (2014), se encontra vários depoimentos relatando a paixão que ele demonstrava por essa ciência e o quão numerosos foram os esforços empreendidos por ele para que seus alunos pudessem se apropriar, de fato, dos conhecimentos matemáticos. Mesmo após sua morte, ele continua inspirando o prazer pelo “saber fazer” Matemática, assim com o intuito de homenageá-lo e manter viva a sua memória o Colégio de São Bento do Rio de Janeiro realiza todos os anos, desde o ano posterior a sua morte, a Olimpíada de Matemática Dom Ireneu Penna (OMDIP), cuja principal meta é despertar nos alunos o “espírito matemático”.

Figura 2.6: *Logo da ODIMP*
Fonte: Site do Colégio de São Bento[7]

As experiências abordadas até este momento, nos levaram a perceber o quanto é essencial o papel que recai sobre o livro didático, pois sendo ele, uma importante ferramenta na disseminação de conceitos e repercussão de ideias, toda e qualquer mudança que se proponha para o ensino precisa ser cuidadosamente representada nele.

Por essa razão é que a partir daqui buscamos refletir sobre que tipos de abordagens estão sendo adotadas pelos livros de Matemática pensados para a Educação Básica e no quanto essas abordagens têm se distanciado das abordagens observadas em textos universitários.

[7] Disponível em: http://www.csbrj.org.br/novo/acontece-no-csb/eventos/?postID=11605/ efi-e-efii-participam-da-olimpiada-dom-ireneu-penna. Acesso em: 26/08/2019.

Capítulo 3

Análise das abordagens: Matemática escolar x Matemática Científica e o programa PIC-OBMEP como uma linguagem intermediária

3.1 A importância do livro didático no ensino e seu de delicado processo de escolha

Os livros didáticos sempre tiveram um importante papel no ensino e embora não sejam a única ferramenta pedagógica a ser considerada, nesse processo, pelo professor, eles acabam muitas vezes direcionando não só quais os conteúdos que serão trabalhados mas também condicionam a forma como estes serão apresentados, além disso, não podemos deixar de mencionar que eles tendem a refletir as tendências educacionais contemporâneas que visam acompanhar as necessidades da sociedade.

Em nosso país, essa relação intrínseca entre o livro didático e o processo de ensino e aprendizagem, principalmente em Matemática, é percebida desde a inserção dessa disciplina nos currículos escolares. Aliás, a esse respeito o professor Wagner Rodrigues

Valente mediante uma análise histórica, constata que

> Desde os seus primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. (VALENTE, 2008, p. 141)

Portanto o uso do livro didático sempre se constituiu como um recurso indispensável no ensino da Matemática na Educação Básica. Mesmo hoje, em plena "era digital", principalmente na rede pública de ensino, nota-se que os livros didáticos ainda representam um papel bastante significativo dentro do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que, um livro pode servir de suporte para complementar o assunto ministrado pelo professor, pode fornecer aos alunos o contato com problemas interessantes e questões instigantes da Matemática, e principalmente, favorecer a consolidação da aprendizagem que o aluno começou com o professor. Além disso, um livro adequado é capaz ainda de auxiliar o professor a trabalhar os conteúdos de forma interdependentes, contribuindo dessa forma para que a construção dos conceitos matemáticos ocorra segundo uma sequência lógica e estrutural.

Sendo assim, devemos nos ater as afirmações de Luckesi (1994) ao nos alertar que, mesmo sendo o livro didático uma das principais fontes de informação dentro do processo de ensino e aprendizagem, sua adoção deve ser feita com cautela, dessa forma torna-se imprescindível a priori efetuar sua seleção com consciência, e ainda assim, posteriormente é necessário assumir frente a ele um pensamento crítico, pois só assim, poderemos evitar que ele acabe transmitindo conteúdos, metodologias e ideias que sejam incoerentes e/ou mesmo defasadas com as perspectivas que pretendemos alcançar.

Toda essa criteriosa seleção inicia-se a partir de dois programas do Governo Federal: o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), que tem como finalidade básica, a obtenção, a avaliação e a distribuição gratuita dos livros didáticos, entre outros materiais, para os alunos das escolas públicas do Ensino Fundamental; e o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), que tem como finalidade a distribuição gratuita dos livros didáticos para o Ensino Médio público do país, sendo ambos regulamentados pelo Ministério da Educação (MEC).

Sendo assim, as diversas obras que são elaboradas no intuito de atender a Educação Básica, precisam primeiramente se submeter à aprovação do MEC. Para tanto, as obras, nessa etapa, serão julgadas em conformidade com os critérios pré-estabelecidos no edital do PNLD para o qual se inscreveram.

As obras aprovadas no PNLD são então encaminhadas para as escolas juntamente com o guia do PNLD, uma produção textual, que comporta resenhas dessas obras apresentando as características gerais de cada uma delas, e cuja principal meta é auxiliar os professores no processo de escolha do livro didático. Após análise das obras, os professores entram em consenso e informam ao MEC que coleção gostariam de receber, juntamente com a indicação de uma 2ª opção, caso a primeira escolha não esteja disponível.

Somente após a conclusão dessas etapas é que o MEC inicia a distribuição dos livros, tentando a princípio, atender as solicitações de cada escola. Entretanto, é importante esclarecer que nem todas as escolas têm suas solicitações atendidas, aliás, algumas delas acabam recebendo uma obra que não condiz com sua primeira escolha e tampouco com a segunda. Este fato evidencia pontos que precisam ser repensados nesse processo.

Ainda no que diz respeito ao livro didático, informamos que o MEC realiza essa distribuição de livros didáticos, para cada nível da Educação Básica, em anos diferentes, estabelecendo desse modo, a repetição do processo por meio de ciclos. Assim, os livros distribuídos, só serão substituídos por novas obras após o vencimento do ciclo, que geralmente é de 3 anos. Dessa forma, durante o ciclo os livros são reutilizados, isto é, repassados de uma turma para outra, com exceção dos 1º e 2º anos do Ensino Fundamental: Anos Iniciais, onde os livros são todos consumíveis, no período de 1 ano.

Mesmo em posse dessas informações, ainda tínhamos um interesse maior em todo esse processo, compreender principalmente, sob quais orientações esses livros são elaborados, e para tanto, aproveitamos que esse ano o MEC divulgou o resultado da avaliação das obras inscritas no PNLD-2020, que avaliou obras referentes aos Anos finais do Ensino Fundamental, e contanto buscamos analisar nas 11 obras aprovadas, as abordagens dadas a alguns conteúdos, cientes que essas serão as obras utilizadas pelas escolas, nos próximos três anos. Antecipemos que essa análise não se daria de forma isolada (como veremos a frente).

A partir do Guia do livro didático, que havíamos mencionado anteriormente, ficou claro que o processo avaliativo do PNLD-2020 conduziu sua avaliação de forma a garantir que as obras aprovadas pudessem contribuir para o desenvolvimento das competências e habilidades envolvidas no processo de aprendizagem dos anos finais do Ensino Fundamental, estabelecidas pela BNCC. (BRASIL, 2019, p. 3)

Partindo desse pressuposto, a avaliação foi realizada com base em dois conjuntos de critérios, previamente estabelecidos no edital do PNLD-2020: os critérios eliminatórios comuns e os critérios eliminatórios específicos. Os critérios eliminatórios comuns aplicavam-se aos três tipos de obras didáticas admitidas nesse processo: as Obras disciplinares, as Obras interdisciplinares e os Projetos integradores. Já, os critérios eliminatórios específicos, como o próprio nome sugere, julgavam a consistência e coerência nas propostas de cada tipo de obra didática, conforme as suas especificidades. Foge ao nosso interesse descrever todos esses critérios, porém caso seja de interesse do leitor, os mesmos podem ser encontrados no Guia digital do PNLD-2020.

Apesar das considerações feitas pelo guia do PNLD-2020 sobre as obras de Matemática aprovadas, consideramos relevante ainda para nossa pesquisa analisar essas obras sob outra perspectiva, agora, discutindo as abordagens que essas obras dão a alguns assuntos, que previamente escolhemos, para posteriormente confrontá-los com relação às abordagens desses mesmos assuntos, no projeto PIC-OBMEP e em textos universitários. Nosso principal objetivo é evidenciar que a abordagem da Matemática adotada pela OBMEP e seu projeto PIC, de fato, aproxima-se muito mais da abordagem matemática observada na Educação Superior do que da abordagem ínfima que vem sendo adotada para a Educação Básica, e mais do que isso mostrar que apesar de recorrer a uma linguagem mais rigorosa, o PIC consegue adaptar as ideias mais formais, ao nível de compreensão do aluno, tornando dessa forma a aquisição dos conhecimentos matemáticos, significativa para os mesmos.

3.2 As distintas abordagens matemáticas: considerações iniciais

O livro como já abordamos é um componente essencial, dentro do processo ensino-aprendizagem, ipso facto, se faz necessário que ele seja um texto que, apesar de levar em consideração a realidade do aluno, de respeitar seu desenvolvimento cognitivo, não apresente somente abordagens propedêuticas, que impossibilitam o aluno de adquirir uma compreensão mais sólida sobre o assunto, e que não reduza a Matemática a um conjunto de regras e definições que não apresentam ligações lógicas entre si.

Tomando essa perspectiva como pressuposto, iniciamos nossa discussão observando a priori as abordagens de alguns conteúdos que selecionamos, em sua maioria, como já dissemos, com base nos assuntos que são vistos inicialmente no PIC, mais especificamente na área de Aritmética, e nos atentando que, normalmente, um aluno ingressante nesse programa, estará cursando na Educação Básica, pelo menos o 7º ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, sem mencionar, a impossibilidade e na falta de objetividade que seria tentar abordar os diversos assuntos dessa Ciência. Além disso, esse primeiro contato do aluno com a Matemática é extremamente importante, pois, já a partir dele é possível começar também a apresentar algumas ideias introdutórias da Matemática Científica, e dessa forma favorecer o desenvolvimento do raciocínio e a construção dos conhecimentos matemáticos.

As abordagens iniciais do programa PIC retomam o conceito de "Números Naturais", certamente porque de maneira geral este é o primeiro contato que as pessoas têm com a Matemática. Aliás, apesar desse conteúdo ser visto, na Educação Básica, com maior ênfase no 6º ano, o professor, geralmente, costuma retomá-lo no início do 7º ano, com o intuito de obter um diagnóstico acerca dos conhecimentos prévios adquiridos pelos alunos sobre o assunto, antes de começar o estudo sobre o Conjunto dos números inteiros determinado na sequência pelo currículo. Com base nisso, optamos por iniciar nossa discussão exatamente por esses assuntos.

Sendo assim nossa abordagem contemplará os seguintes conteúdos:

➢ Os naturais e a relação de ordem

➢ Operações nos naturais e suas propriedades

➢ Múltiplos e divisores

➢ Números primos e números compostos

➢ Mínimo múltiplo comum (MMC)

➢ Máximo divisor comum (MDC)

➢ Algoritmo da divisão

Para facilitar a análise que será feita posteriormente a abordagem desses assuntos, eles serão divididos em duas partes, porém essa divisão, não necessariamente, será feita do mesmo modo para cada abordagem, devido à ordem específica que cada abordagem faz para estes conteúdos.

Todas as ideias matemáticas que forem relatadas a partir daqui, em cada uma das abordagens, serão baseadas nas referências mencionadas a seguir:

- **Abordagem da Matemática na Educação Básica**

  No intuito de expor como é feita a abordagem inicial da Matemática na Educação Básica procuramos observar a maneira como os conteúdos são abordados nas 11 obras aprovadas pelo PNLD-2020, mesclando os diferentes pontos de vista, que podem ser constatados tanto a partir dos textos propostos por essas obras quanto ainda nas orientações que elas direcionam ao professor. Sendo assim, nossas afirmações se baseiam nas referências [3],[4],[5], [17], [19], [26], [37], [53], [74], [79] e [82].

- **Abordagem da Matemática no Programa de Iniciação Científica**

  Para possibilitar ao leitor ter uma noção de como é feita a abordagem inicial de Matemática pelo programa PIC, nos baseamos na apostila 1: Iniciação à aritmética, de Hefez (2015) (ver referência [40]) e nas videoaulas, referentes aos assuntos discutidos, que são disponibilizadas pelo programa no canal do PIC no youtube (ver referência [70]), uma vez que elas visam complementar o ensino ao aluno, já que o programa é oferecido nas modalidades: semi-presencial ou E.A.D.

- **Abordagem da Matemática na Educação Superior**

  Embora sejam incontáveis os livros universitários que tratam desses assuntos, nos parece ser bastante pertinente adotar como principal referência o material do PROFMAT (referências [41], [42], e [62]), bem como as vídeo aulas oferecidas por esse programa de mestrado em seu canal no youtube (ver referência [70]).

Uma última observação deve ser feita ao leitor. Devido às prováveis semelhanças que surgirão na abordagem de um assunto ou outro, pelos diferentes programas, procuraremos não ser redundantes, e para tanto, aprofundaremos esses assuntos, em apenas uma das abordagens, como será percebido adiante. Uma vez feita todas essas considerações, podemos agora começar...

3.3 Os naturais: Relação de ordem, operações e algumas propriedades

3.3.1 Abordagem da Matemática na Educação Básica: Parte I

Os livros da Educação Básica analisados nesse estudo, unanimemente, iniciam sua abordagem, apresentando um breve histórico sobre o surgimento dos números em função de sua utilidade para a humanidade, seguido da exposição de alguns sistemas de numeração que antecederam o nosso, entre eles, quase sempre, o Sistema Egípcio e o Sistema Romano, e posteriormente o nosso Sistema de numeração decimal (também conhecido como Sistema Indo-arábico).

Figura 3.1: *Representação de um número no Sistema de Numeração Egípcio*
Fonte: Livro virtual - Introdução a computação (UFPB) [1]

Embora a maioria das obras, procure mostrar para o aluno que houveram várias civilizações e que cada uma delas percebeu a necessidade de se construir um sistema de numeração, uma vez que os números passaram a ter fundamental importância na organização da sociedade, deixa-se a desejar quanto à explicação do porque, dentre sistema tao distintos e com características tão próprias, optou-se ao final, pela adoção de um único sistema: o Sistema de numeração decimal? Quais as principais semelhanças e diferenças entre esses sistemas? Perguntas como essas parecem ser deixadas a cargo do professor.

[8]As figuras 3.1, 3.2 e 3.3 estão disponível em: http://producao.virtual.ufpb.br/books/camyle/introducao-a-computacao-livro/livro/livro.chunked/ch03s01.html. Acesso em: 30/08/2019.

Numeração romana antiga Princípio aditivo	Numeração romana modern Princípio subtrativo
I I I I 1 + 1 + 1 + 1 = 4	I V 5 – 1 = 4
V I I I I 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9	I X 10 -1 = 9

	Princípio aditivo	Princípio subtrativo e aditivo
Nossa numeração	Numeração romana antiga	Numeração romana moderna
1	I	I
2	II	II
3	III	III
4	IIII	IV
5	V	V
6	VI	VI
7	VII	VII
8	VIII	VIII
9	VIIII	IX
10	X	X
11	XI	XI
12	XII	XII

	Princípio aditivo	Princípio subtrativo e aditivo
Nossa numeração	Numeração romana antiga	Numeração romana moderna
16	XVI	XVI
17	XVII	XVII
18	XVIII	XVIII
19	XVIIII	XIX
20	XX	XX
40	XXXX	XL
50	L	L
90	LXXXX	XC
100	C	C
400	CCCC	CD
500	D	D
1000	M	M

Figura 3.2: *Representação de um número no Sistema de Numeração Romano*
Fonte: Livro virtual - Introdução a computação (UFPB)

Figura 3.3: *Sistema de numeração Indo-Arábico*
Fonte: Livro virtual - Introdução a computação (UFPB)

Em geral, é somente após essas primeiras considerações, que o "Conjunto dos Números Naturais" é apresentado então como uma sequência numérica sem muitos mistérios e já bem conhecida por todos. Sempre iniciada pelo 0, em algumas obras, menciona-se como essa sequência é construída, dizendo que a partir do 0, os números seguintes são obtidos acrescentando-se uma unidade ao número anterior e então as ideias de sucessor, antecessor, consecutivo e a própria infinidade do conjunto são comentadas.

Apesar de toda suposta familiaridade que os alunos têm com os "Números naturais", entendemos que o número 0 deveria ser melhor discutido, afinal ele nem sempre existiu e sua invenção causou uma verdadeira revolução na Matemática. O zero surgiu de forma independente, com um sentido diferente do que usamos hoje e em diferentes civilizações, algumas como os romanos sequer o representaram. Por essa razão seu percurso foi conturbado até que se consolidasse como elemento-chave da Matemática. (KAPLAN, 2001)

Nesse sentido, entendemos que o zero não só causou como continua causando muitas inquietações, quase sempre devido, a falta de uma interpretação correta de seu significado. Citemos alguns exemplos comumente percebidos no ensino: dúvidas sobre a paridade do zero; dificuldades na representação de números que o possuem; problemas em operar corretamente com este número; associação exclusiva do zero ao nada, e consequentemente a não compreensão da existência dos números negativos, já que são menores que o nada (0); entre outros. Essas simples observações já servem para nos alertar que o número zero nem sempre pode ser tratado de forma tão intuitiva.

Dando continuidade, todas as obras sem exceção, estabelecem a representação desses números na reta numérica seguida da noção de ordem, que é feita por meio da comparação entre os valores dos números envolvidos, utilizando para tanto os símbolos de $<$ (menor que) ou $>$ (maior que). A reta nesse sentido é usada para identificar na comparação entre dois números qual deles se encontra a esquerda do outro, e portanto qual deles é o menor.

Em seguida, começa-se a trabalhar as quatro operações fundamentais, sem atribuir nenhuma definição, identifica-se apenas um tratamento de maneira informal. Em geral, os livros iniciam cada um desses assuntos ilustrando com exemplos situações que elas costumam ser associadas. Nesse sentido, todos eles buscam evidenciar aos alunos à quais ideias essas operações podem ser relacionadas e quais "processos" podem ser utilizados para a resolução de cada operação, conforme citamos abaixo:

Adição: está associada à ideias que envolvem *juntar* quantidades ou *acrescentar* uma dada quantidade a outra. A realização dessa operação pode ser feita usando-se o algoritmo usual ou a decomposição;

Subtração: está relacionada à ideias que necessitam *tirar* uma quantidade de outra, comparar duas quantidades, no intuito de descobrir quanto uma tem a mais (ou a menos) do que a outra ou ainda *completar* o que falta a uma quantidade para atingir a outra. De forma semelhante a adição, a subtração pode ser efetuada através do algoritmo usual ou por meio da decomposição;

Multiplicação: é utilizada para *adicionar parcelas iguais*, contar elementos em uma *organização retangular*, determinar *quantas combinações* são possíveis em uma situação que envolve varias opções, além disso, essa operação pode ser aplicada com a ideia de *proporcionalidade*. Também de forma não muito diferente da adição expõe-se que essa operação pode ser efetivada tanto a partir do algoritmo usual como a partir da decomposição.

Divisão: envolve a noção de *dividir* uma quantidade *em partes iguais* ou ainda a ideia de *medida* para saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra. Para resolver a divisão pode-se recorrer ao emprego do algoritmo usual ou uso de estimativas, além disso, sempre que o resto for zero na divisão de dois números naturais ela será chamada de *divisão exata*, caso o resto seja diferente de zero, teremos o que denominamos de *uma divisão não exata*.

A seguir são expostas cada uma das propriedades da adição após a verificação delas em um exemplo. Vejamos um exemplo e sua solução apresentada pela referência [5], antes de definir a propriedade comutativa da adição:

"Para ir à escola, Adara gasta, em média, 10 minutos andando e 35 minutos no ônibus. Para voltar da escola, ela gasta, em média, 35 minutos no ônibus e 10 minutos andando. Adara leva mais tempo na ida ou na volta da escola?"

A solução apresentada, começa dizendo ao aluno sobre a necessidade de se adicionar os tempos gastos na ida e na volta, conforme abaixo:

Tempo gasto na ida: $10 + 35 = 45$

Tempo gasto na volta: $35 + 10 = 45$

E assim conclui que, em média, o tempo gasto é o mesmo, 45 minutos.

Essa única observação parece ser suficiente para então realizar a seguinte afirmação:

"Em uma adição de dois números naturais, a ordem das parcelas não altera a soma. Essa propriedade é a *propriedade comutativa da adição*."

Vejamos agora o exemplo e a solução apresentada pela referência [26], antes definir a propriedade associativa da adição:

"Considere três cédulas: uma de 2 reais, uma de 5 reais e outra de 10 reais. Como podemos calcular a quantia total dessas três cédulas juntas?"

Observemos formas diferentes de realizar esse cálculo:

$$(10 + 5) + 2 = 15 + 2 = 17$$
$$10 + (5 + 2) = 10 + 7 = 17$$
$$(10 + 2) + 5 = 12 + 5 = 17$$

Alerta o aluno que mesmo associando as parcelas de modos diferentes, o total é sempre o mesmo (17). E portanto, pode-se escrever:

$$(10 + 5) + 2 = 10 + (5 + 2) = (10 + 2) + 5$$

Essa observação é o que se denomina de *propriedade associativa da adição*, definida da seguinte forma:

“Em uma adição de três ou mais parcelas, associando as parcelas de diferentes maneiras, o resultado permanece o mesmo.”

Encerrando as propriedades da adição, expomos como a referência [82] apresenta a propriedade do elemento neutro da adição. Primeiramente define-se:

“Em uma adição de duas parcelas, quando uma dela é zero, a soma é igual a outra parcela. O *zero* é o *elemento neutro da adição*.”

Então após essa definição, apresenta-se um exemplo:

$$27 + 0 = 27 \text{ ou } 0 + 27 = 27$$

Cabe ressaltar que embora tenhamos usado diferentes referências, a abordagem feita pelas demais é similar as que foram apresentadas, isto é, os livros trazem suas definições antes ou após a verificação de um exemplo. As propriedades da multiplicação são apresentadas de maneira análoga as propriedades da adição, desse modo deixaremos para apresentá-las na abordagem feita pelo programa PIC, que parece tomar um cuidado maior, antes de propor que os alunos as admitam como verdadeiras.

Contudo devemos salientar que, tendo em vista, o fato das propriedades da adição serem bastante intuitivas, até concordamos que, nessa etapa, seja desnecessário perder tempo tentando justificá-las. No entanto, algo que nos chama a atenção é que as obras, em sua maioria, se limitam a apresentar essas definições, apenas por extenso, evitando assim a representação dessas definições a partir da equivalência entre expressões algébricas, além disso, percebemos ainda ausência de explicação sobre a importância dessas propriedades. A “riqueza” delas precisa ser enfatizada, principalmente, para o desenvolvimento do cálculo mental, porém, mais uma vez isto parece ter sido deixado a cargo do professor.

Quanto às operações de subtração e divisão, enfatiza-se ainda em suas abordagens, suas relações fundamentais, evidenciando que a partir delas as operações de subtração e divisão são percebidas como operações inversas da adição e da multiplicação, respectivamente.

A abordagem exposta a seguir trata, com mais ênfase, algumas das propriedades mencionadas anteriormente, e outras que, embora sejam passíveis de serem vistas, não são abordadas pelos livros didáticos.

3.3.2 Abordagem da Matemática no programa PIC: Parte I

De maneira não muito diferente da abordagem vista anteriormente, a abordagem feita pelo PIC, inicia-se também com a apresentação dos números naturais, como um conjunto ordenado, que começa do número um, simbolizado por 1, e que representa a unidade, e com uma lei, simbolizada pelas flechas, que a cada número, começando pelo 1, fornece o seu sucessor, isto é, o número que lhe segue, conforme a representação abaixo:

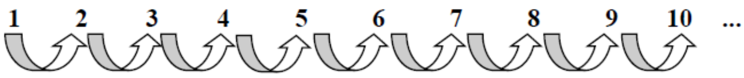


Figura 3.4: *Representação dos números naturais*
Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, alerta sobre à impossibilidade de representar todos os elementos do conjunto, devido ao fato do conjunto ser infinito. E a partir daí começa a discutir com o aluno que embora o conjunto lhe seja bastante familiar, demoraria muito tempo para que ele fosse apresentado da forma como o conhecemos, antes dele haveria várias outras representações, todas iniciadas com um símbolo para representar a unidade e a partir desse símbolo os demais eram criados. Mas havia uma desvantagem nas representações anteriores, e esta pesava, principalmente, sobre suas limitações e a grande quantidade de símbolos que precisavam ser utilizados para a representação de certos valores. Porém, duas brilhantes ideias acabariam simplificando tudo: o conceito de valor posicional e a invenção do 0.

Diferente da abordagem anterior, esta procura levantar pontos interessantes que evidenciam, que apesar dos alunos estarem "habituados"a esse conjunto, é necessário entender que seu desenvolvimento e mais do que isso as características que o fizeram destacar sobre os demais.

Então, comenta-se que embora nosso sistema utilize a base decimal, as ideias matemáticas não se limitam a ela, e nesse sentido aproveita para relembrar como representar um número na base decimal e aproveita a oportunidade para mostrar como converter um número escrito na base binária, que tão essencial é para a linguagem dos computadores, para o nosso sistema.

Vejamos alguns exemplos apresentados:

Exemplo 3.1 (Base decimal).

$$147 = 1.10^2 + 4.10^1 + 7.10^0$$

Note que o número que multiplica 10^2 *representa as centenas, o número que multiplica* 10^1 *representa as dezenas e o número que multiplica* 10^0 *representa as unidades.*

Exemplo 3.2 (Base binária). *Agrupa de* 2 *em* 2 *e utiliza apenas os algarismos* $\{0, 1\}$.

Observe:

$[1101]_2 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 1.8 + 1.4 + 0.2 + 1.1 = 8 + 4 + 1 = 13$

Note que a decomposição de um número na base binária é feita de maneira similar a representação de um número na base decimal, ou seja, cada algarismo indica quantas vezes cada potência de 2 *aparece.*

Por conseguinte, apresenta-se a relação de ordem, e após, menciona-se algumas de suas propriedades, o que não foi abordado anteriormente, como estamos prestes a ver. Além disso, veremos ainda que, o que foi evitado pela abordagem anterior nas definições e propriedades, aqui é usado constantemente, as incógnitas, para reforçar a ideia de generalização dessas propriedades.

Para explicar a ideia de *ordem* considera a sequência dos números naturais e propõe ao aluno observar que quando um número a aparece antes de um número b, ou seja, à esquerda de b, representamos $a < b$ e dizemos que a é menor do que b, ou ainda, escrevemos $b > a$ e dizemos que b é maior do que a.

$$\cdots \to a \to \cdots \to b \to \cdots$$

Essa relação que ordena os números naturais tem claramente a seguinte *propriedade transitiva* mencionada abaixo:

Se a aparece antes de b e b aparece antes de c, então a aparece antes de c.

$$\cdots \to a \to \cdots \to b \to \cdots \to c \to \cdots$$

Em símbolos: Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

Escreveremos também $a \leq b$ para representar a situação: $a < b$ ou $a = b$.

A ordem nos naturais é *total,* o que significa que dados dois números naturais a e b temos verificada uma e apenas uma das três seguintes possibilidades (*tricotomia*):

$$a < b, \ a = b, \quad \text{ou } a > b.$$

Sejam dados dois números naturais a e b com a < b. Definimos os seguintes conjuntos:

➢$[a, b]$ o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x \leq b$,

➢(a, b) o conjunto dos números naturais x tais que $a < x < b$,

➢$(a, b]$ o conjunto dos números naturais x tais que $a < x \leq b$,

➢ $[a, b)$ o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x < b$.

O primeiro e o segundo conjunto são chamados, respectivamente, de *intervalo fechado* e *intervalo aberto.* Os dois outros conjuntos são chamados indiferentemente de intervalos *semiabertos*, ou *semifechados.*

Outra importante propriedade abordada seria o Princípio da Boa Ordem: "Todo subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais possui um *menor elemento.* A afirmação acima significa que dado um subconjunto A de $\mathbb{N}$, não vazio, existe um elemento a de A tal que $a \leq b$, para todo elemento b de A."

Estabelecidas essas noções de ordem, começa-se então, definir as operações.

Dado um número natural a, o sucessor de a, será também representado por $a + 1$:

$$\cdots \to a \to a + 1 \to \cdots$$

Dados dois números naturais a e b, quaisquer. Podemos deslocar a de b posições para a direita, obtendo um número que será denotado por $a + b$. Essa operação entre números naturais é chamada de *adição* e o número $a + b$ é chamado soma de a e b.

$$\cdots \to a \to a + 1 \to a + 2 \to \cdots \to a + b \to \cdots$$

Após essa definição, as propriedades da adição começam a ser apresentadas. A primeira propriedade é a comutativa que é apresentada como válida após um exemplo, seguida de sua definição:

Quaisquer que sejam naturais a e b, temos que:

$$a + b = b + a.$$

Em seguida, apresenta o 0 como um número que servirá para representar o não deslocamento de outro. E com isso há duas consequências:

A primeira é que o conjunto dos naturais, passaria a começar do 0, como mostrado abaixo:

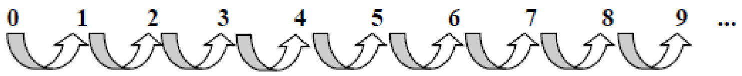


Figura 3.5: *Representação dos números naturais com o zero*
Fonte: Elaborada pelo autor

E a segunda, seria a definição da propriedade do elemento neutro:

Para todo $a \in \mathbb{N}$, temos que:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

E assim após um exemplo, seria definida a última propriedade da adição, a propriedade associativa:

Quaisquer que sejam naturais a, b e c temos que:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

A justificativa para todas essas propriedades serem apresentadas de maneira tão óbvia é que elas não fogem daquilo que nos é intuitivo, e desse modo não tem porque ficar perdendo tempo com algo que possa ser aceito sem ferir o nosso bom senso. Então dando continuidade, comentava-se a relação de compatibilidade existente entre a ordem e a adição de números naturais, que é a seguinte:

Propriedade 3.3. *Dados três números naturais a, b e c quaisquer, se $a < b$, então $a + c < b + c$.*

A justificativa para tal resultado é argumentada da seguinte forma:

Demonstração. De fato, se a está à esquerda de b, então ao deslocarmos a e b simultaneamente de c posições à direita, não é difícil aceitar que $a + c$ se mantém à esquerda de $b + c$. □

Admitindo-se essa última propriedade como válida e a propriedade da tricotomia poderia se provar a recíproca dessa propriedade. E assim se faz a primeira demonstração (por absurdo) matemática. Contudo antes, explica-se o que significa hipótese (ou ainda premissa) e tese (ou ainda conclusão). Vejamos então a propriedade e sua demonstração.

Propriedade 3.4. *(Lei do cancelamento) Dados três números naturais a, b e c quaisquer, se $a + c < b + c$, então $a < b$.*

Demonstração. De fato, suponhamos que $a + c < b + c$. Pela tricotomia, temos uma das três possibilidades:

$$b < a, \ b = a, \text{ ou } a < b.$$

A primeira possibilidade não pode ser verificada, pois se $b < a$, teríamos $b + c < a + c$, pela propriedade já provada, o que está em contradição com a nossa hipótese $a + c < b + c$. (Absurdo!) A segunda possibilidade também não pode ser verificada, pois se $a = b$, teríamos $a + c = b + c$, o que também está em contradição com a nossa hipótese. (Absurdo!) Só resta, portanto a única possibilidade: a < b. □

Visando propiciar ao aluno ter contato com esta ideia de demonstração, dois exercícios iniciais são propostos:

Problema 3.5. *Mostre que dados três números naturais a, b e c, quaisquer, se $a + c = b + c$, então $a = b$.*

Antes de iniciar a demonstração propões que se observe que:
Hipótese: $a + c = b + c$; Tese: $a = b$.

Demonstração. Pela tricotomia sabemos que dado dois naturais a e b somente uma, e apenas uma, das três alternativas pode acontecer:

$$a < b, \ a > b \text{ ou } a = b.$$

Podemos então começar supondo que $a < b$. Logo, pela Propriedade 3.4, segue que $a + c < b + c$ o que contraria a nossa hipótese. Então, suponhamos que $a > b$, mas já sabemos que se deslocarmos para a direita tanto a quanto b c posições a relação de ordem se mantém, ou seja, teremos $a + c > b + c$, o que novamente contraria nossa hipótese. E portanto, pela tricotomia só nos resta concluir que $a = b$. □

Problema 3.6. *Mostrar que dados três números naturais a, b e c quaisquer, se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.*

Demonstração. Se $a < b$, somando c a ambos os membros dessa desigualdade segue da propriedade de compatibilidade da adição com a ordem que

$$a + c < b + c. \quad (I)$$

De forma análoga, se $c < d$ então somando b em ambos os membros da desigualdade obtemos

$$b + c < b + c. \quad (II)$$

Logo por transitividade de (I) em (II) segue que $a + c < b + d$. $\square$

De posse desses conceitos e propriedades sobre ordem entre os números define-se uma nova operação: Dados dois números naturais a e b tais que $a \leq b$ (ou $b \geq a$), o número de deslocamentos para a direita partindo de a para atingir b será representado por $b - a$ e será chamado de *diferença* entre b e a. Portanto, dessa definição de $b - a$, temos que

$$a + (b - a) = b. \tag{3.1}$$

O número $b - a$ também representa o quanto devemos deslocar b para a esquerda para alcançar a, ou ainda pode ser interpretado como o quanto falta a a para atingir b. Portanto, da Equação (3.1) e do Problema 3.5, seque que se tivermos uma igualdade entre números naturais do tipo $a + c = b$, então $c = b - a$.

Ainda sobre a subtração outras observações são apontadas: Não é necessário deslocar a para atingir a e assim sendo temos que: $a - a = 0$. Além disso, notamos ainda que falta a a zero posições para atingir a, o que matematicamente significa que $a - 0 = a$.

Algo que não pode deixar de ser comentado é que no conjunto dos números naturais, a diferença $b - a$ só está bem definida quando $b \geq a$, pois se $b < a$, $b - a$ não faria sentido, uma vez que não há como deslocar b para a esquerda para atingir a, ou ainda, deslocar a para a direita para alcançar b. Então a diferença $b - a$, entre b e a, será definida por uma operação sobre pares de números naturais (a, b), denominada *subtração* sempre que a condição $a \leq b$ for garantida.

Notemos agora que, ao deslocarmos a para a direita de b posições encontramos $a + b$, depois ao deslocarmos $a + b$ para a esquerda de b posições voltamos para a, ou seja,

$$(a + b) - b = a.$$

Por outro lado, se deslocarmos b para a esquerda de a posições encontramos $b-a$, depois ao deslocarmos $b-a$ para a direita de a posições encontramos b. Em símbolos:

$$(b-a)+a=b.$$

Logo percebemos que da forma como a operação de subtração foi definida, ela é a operação inversa da adição.

Considerando agora a sequência:

$$a+0, a+1, a+2, a+3, ..., a+(b-a)=b,$$

notamos que, quando $b>a$, o número $b-a$ nos ajuda a contar quantos números naturais maiores ou iguais a a e menores ou iguais a b existem. E assim contando esse números constata-se que se $a<b$, o intervalo $[a,b]$ possui $b-a+1$ elementos.

E assim encerramos aqui a primeira parte feita pela abordagem PIC, já com a percepção de que apesar de trabalhar os mesmos assuntos, ela aborda a Matemática com maior rigor, a maneira própria e construtiva de apresentar os assuntos de modo interdependentes, já começa a se distinguir bastante da abordagem feita pelos livros da Educação Básica, principalmente em relação a ordem dos assuntos, e como veremos a seguir começa a se aproximar da abordagem feita na Educação Superior.

3.3.3 Abordagem da Matemática na Educação Superior: Parte I

Os textos universitários adotados, sem se aprofundar na história, buscam iniciar os assuntos tratado anteriormente ressaltando o quão lento foi esse processo de civilização humana e sua consequente necessidade de adotar um modelo de contagem tão abstrato (um, dois, três, ...) como os números naturais. Pode ser intrigante pensar que esse assunto apresentado hoje de maneira tão “corriqueira” na educação básica, seja referido por livros universitários ainda como um modelo “abstrato”, mas a razão para tal fato talvez se justifique, principalmente, porque somente muitos anos após sua adoção, é que o matemático italiano Giuseppe Peano, já no final do século XIX, conseguiria idealizar uma axiomática e partir dela descrever o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais de maneira concisa e precisa.

Nessa nova caracterização, todo o conjunto dos números naturais, seria obtido, admitindo-se, apenas a noção de "sucessor de um natural" como um termo primitivo, e mais, os quatro axiomas (ideias intuitivas) descritos a seguir:

I. "Todo número natural tem um único sucessor". Este primeiro axioma nos garante a existência e unicidade do sucessor de um número natural, isto é, ele nos diz que um número natural não pode admitir dois sucessores distintos.

II. "Números naturais diferentes têm sucessores diferentes". Já o segundo axioma visa nos garantir que um número natural não pode ser sucessor de dois números naturais distintos.

III. "Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro". Este terceiro axioma nos garante que o conjunto dos números naturais não pode ser representado por duas sequências independentes, cada uma partindo de um ponto distinto.

IV. "Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$". Este quarto e último axioma nos diz que se um subconjunto dos números naturais contém o 1 e além disso se considerado qualquer elemento desse subconjunto observarmos que o seu sucessor também pertence a esse subconjunto então esse subconjunto é o próprio conjunto dos números naturais.

Considerando a veracidade dessas afirmações, denominadas de "Axiomas de Peano", tudo que se sabe sobre o conjunto dos números naturais, poderia ser demonstrado. Ainda sobre estes axiomas, há que se dar ênfase ao quarto axioma, intitulado como "Axioma de Indução", ou ainda "Princípio de Indução", pois do ponto de vista operacional ele certamente é o mais importante, devido a sua notabilidade em grande parte das demonstrações referentes a este conjunto. E mais, ressaltar a relação de equivalência existente entre esse último axioma e o "Princípio da Boa Ordenação" mencionado anteriormente, pois há textos que assumem esse último, conforme exposto aqui, como o quarto axioma de Peano, assim conforme a adoção feita, um deles pode ser demonstrado, como consequência do outro. Conforme, veremos a seguir:

Proposição 3.7. *O Princípio de Indução e o Princípio da Boa Ordenação são equivalentes.*

Demonstração. Primeiro vamos considerar o Princípio de Indução e provaremos o Princípio da Boa ordenação. Suponha que A é um conjunto não vazio dos naturais. Provaremos que A possui um menor elemento n_0. De fato, Se $1 \in A$ não há o que demonstrar, basta tomarmos $n_0 = 1$. Suponha que $1 \notin A$ e considere o conjunto X formado por todos os elementos naturais que não estão em A,

$$X = \{n \in \mathbb{N} : I_n \subset \mathbb{N} - A\},$$

onde $I_n = \{p \in \mathbb{N} : p \leq n\}$. Note que $A \neq \emptyset$ e $A \subset \mathbb{N}$. Assim, $X \neq \mathbb{N}$. Além disso, $1 \in X$ pois $1 \notin A$. Sendo assim podemos supor que existe $p \in X$ tal que $p+1 \notin X$, caso contrário, pelo Princípio de Indução, teríamos $X = \mathbb{N}$. Logo $p + 1 \in A$. Afirmamos que $n_o = p + 1$. De fato, se existisse $c \in A$ tal que $c < p + 1$, teríamos $c \leq p$, ou seja, $c \in X$ o que é um absurdo já que $c \in A$.

Reciprocamente considere o Princípio da Boa Ordenação e provaremos o Princípio de indução, ou seja, se X é um conjunto que contém 1 e sempre que $a \in X$, implica que $a + 1 \in X$, então $X = \mathbb{N}$. A prova desta afirmação se faz por absurdo. Suponhamos então que existam números naturais, maiores do que a, não pertencentes ao conjunto X. Seja b o menor desses números. Como $b > a$, podemos escrever $b = c + 1$, onde, pela definição de b, tem-se necessariamente que $c \in X$. Assim, $b = c + 1 \in X$, uma contradição. Logo, $X = \mathbb{N}$. □

Na sequência, exprimem-se as definições de adição e multiplicação e as propriedades válidas para cada uma delas. No conjunto dos números naturais duas operações fundamentais podem ser bem definidas: a adição e a multiplicação, como poderemos perceber.

Definição 3.8. *Dados n, $p \in \mathbb{N}$, recorrendo a ideia de indução, definimos:*

$$\textit{Adição:} \begin{cases} n + 1 = \text{ sucessor de } n \\ n + (p + 1) = (n + p) + 1. \end{cases} \qquad \textit{Multiplicação:} \begin{cases} n.1 = n \\ n.(p + 1) = n.p + n. \end{cases}$$

Desse modo para a adição na primeira igualdade estamos dizendo como a partir de um número obter o seu sucessor somando-lhe 1 unidade; e na segunda igualdade como a partir de $n + p$ se obtém o valor de $n + (p + 1)$, a soma $n + (p + 1)$ é simplesmente o sucessor $(n + p) + 1$ de $n + p$. Quanto à multiplicação estamos dizendo primeiro que multiplicar um número n por 1 não o altera, e em seguida como a partir de $n.p$ obter o número $n.(p + 1)$, basta acrescentar n a $n.p$.

Vejamos algumas das propriedades que foram admitidas nas abordagens anteriores e demonstrar por que elas são válidas.

Propriedade 3.9. *(Associatividade da adição) Dados m, n e $p \in \mathbb{N}$, temos que:*

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre p. Para $p = 1$ temos que $m + (n + 1) = (m + n) + 1$. A propriedade é válida e segue direto da definição de adição. Supondo que a propriedade é válida para $p = k$, $k \in \mathbb{N}$, isto é, que $m + (n + k) = (m + n) + k$, mostremos que a afirmação é verdadeira para $p = k + 1$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} m + [n + (k + 1)] &= m + [(n + k) + 1] \text{ (essa igualdade segue da definição de adição)} \\ &= [m + (n + k)] + 1 \text{ (também segue da definição de adição)} \\ &= [(m + n) + k] + 1 \text{ (pela hipótese de indução)} \\ &= (m + n) + (k + 1) \text{ (segue do caso } p = 1) \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, $m + (n + p) = (m + n) + p$, para todos m, n e $p \in \mathbb{N}$. □

Propriedade 3.10 (Comutatividade da adição)**.** *Dados m, $n \in \mathbb{N}$, temos que:*

$$m + n = n + m.$$

Demonstração. Nesta demonstração fixaremos n e provaremos o resultado para m fazendo indução sobre n e m. Tomemos $n = 1$ e mostremos que $m + 1 = 1 + m$. Para demonstrar que essa última afirmação é verdadeira faremos indução sobre m. Para $m = 1$ o resultado é óbvio. Supondo que a afirmação é verdadeira para $m = k$, $k \in \mathbb{N}$, isto é, que $k + 1 = 1 + k$, mostremos que a afirmação é válida para $m = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} (k + 1) + 1 &= (1 + k) + 1 \text{ (por hipótese de indução)} \\ &= 1 + (k + 1) \text{ (usando a associatividade da adição)} \end{aligned}$$

Agora suponhamos, por indução, que seja válido para $n = k$, ou seja, $m + k = k + m$. Mostremos que vale para $n = k + 1$. Assim temos:

$$\begin{aligned} m + (k + 1) &= (m + k) + 1 \text{ (pela associatividade da adição)} \\ &= (k + m) + 1 \text{ (usando a hipótese de indução)} \\ &= k + (m + 1) \text{ (pela associatividade da adição)} \\ &= k + (1 + m) \text{ (pelo caso n = 1)} \\ &= (k + 1) + m \text{ (pela associatividade da adição)} \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução, $m + n = n + m$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$. $\square$

E assim encerramos essa parte com a abordagem dada à relação de ordem pelos textos universitários.

A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades. A primeira delas apenas é definida, as duas próximas são demonstradas.

Propriedade 3.11 (Tricotomia). *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas:*

$$m = n, \; m < n \quad ou \; n < m.$$

Propriedade 3.12 (Transitividade). *Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.*

Demonstração. Se $m < n$ e $n < p$, então existem naturais r e s tais que:

$$n = m + r \qquad \text{e } p = n + s$$

Logo, temos que $p = (m + r) + s$. Pela propriedade associativa da adição segue que $p = m+(r+s)$. Como a adição está bem definida em $\mathbb{N}$ temos que $r+s \in \mathbb{N}$ e portanto, segue-se da relação de ordem que $m < p$. $\square$

Propriedade 3.13 (Monotonicidade). *Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $m.p < n.p$.*

Demonstração. Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + r$ (I). Logo, temos que

$$\begin{aligned} n + p &= (m + r) + p \text{ (pela igualdade } (I)) \\ &= m + (r + p) \text{ (pela associatividade da adição)} \\ &= m + (p + r) \text{ (pela comutatividade da adição)} \\ &= (m + p) + r \text{ (pela associatividade da adição)} \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} n.p &= (m + r).p \text{ (pela igualdade (I))} \\ &= m.p + r.p \text{ (pela distributividade)} \end{aligned}$$

Como a multiplicação está bem definida em $\mathbb{N}$ temos que $(r.s) \in \mathbb{N}$ e portanto segue-se da relação de ordem que $m + p < n + p$ e $m.p < n.p$. $\square$

3.4 Números naturais: Múltiplos, divisores, MMC, MDC, divisibilidade, números primos e compostos

3.4.1 Abordagem da Matemática na Educação Básica: Parte II

Voltando nosso olhar para a abordagem adotada pelos livros na Educação Básica algumas definições começariam a ser dadas. Assim retomamos nossa discussão observando que os próximos conceitos que veremos apresentam-se por vezes em ordem diferentes nas obras, alternando o estudo de múltiplos e divisores ou ainda as ideias sobre MMC e MDC. Assim sendo, optamos por manter a ordem adotada pela maioria.

Assim sendo falemos então sobre os *múltiplos*. Estes são apresentados sempre com um exemplo estabelecendo a ideia de que os múltiplos de um número natural podem ser obtidos multiplicando-se esse número pelos números naturais. A partir de então procura-se expressar sua definição, que em geral é apresentada de duas formas:

1ª forma: "Dizemos que um número natural é *múltiplo* de outro caso o primeiro seja resultado da multiplicação do segundo por um natural qualquer."
2ª forma: "Um número natural será *múltiplo* de outro número natural (não nulo) quando a divisão entre o primeiro e o segundo, for exata."

Nota-se que, essa 2ª forma, bem menos utilizada que a 1ª forma, aparece apenas nas obras que abordaram a ideia de divisibilidade antes dos múltiplos, inclusive apenas quando há essa inversão na apresentação dos assuntos é que se constata ainda a seguinte afirmação: "ser *múltiplo de* é o mesmo que ser *divisível por*".

No mais, orienta o professor a fazer algumas afirmações:

➢ O zero é múltiplo de qualquer número natural.

➢ Um número natural diferente de zero tem infinitos múltiplos.

➢ Todo número natural é múltiplo de si mesmo.

Após os múltiplos costuma-se abordar a noção de divisores, iniciada sempre com um exemplo, procura-se diferenciar o significado entre os termos "divisor" e "divisível". E então, define-se:

“Um número é divisor do outro quando o segundo número for divisível pelo primeiro número.”

Ainda a respeito dos divisores algumas observações são feitas:

➢ O número 0 não divide nenhum número natural.

➢ O número 1 é divisor de todo número natural.

➢ Todo número natural diferente de zero é divisor dele mesmo.

Esse último conceito (divisores) costuma ser assumido como pré-requisito, para se apresentar as regras (ou critérios) de divisibilidade, conforme veremos abaixo:

O primeiro critério é o de divisibilidade por 2, que costuma ser apresentado diretamente ou após a chamar a atenção para o resto de algumas divisões de números pares e ímpares por 2. Como um número natural ou é par ou é ímpar, conclui-se com os exemplos que apenas os números pares deixam resto 0 na divisão por 2, e portanto conclui-se que um número natural será divisível por 2 quando for par, isto é, terminar em $\underline{0}$, $\underline{2}$, $\underline{4}$, $\underline{6}$ ou $\underline{8}$.

Em geral, na sequência apresenta-se o critério de divisibilidade por 3, observando alguns números divisíveis por 3, e em seguida mostrando que ao somar os algarismos desses números o resultado será também um número divisível por 3, fato que não ocorre em números que não são divisíveis por 3, e portanto essa constatação é adotada como o referido critério.

Notamos que para evidenciar uma certa relação de dependência, expõe-se então, o critério de divisibilidade por 6, como sendo a junção dos dois últimos critérios vistos, isto é, afirmando que um número só será divisível por 6 quando for divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo.

Entendemos ainda que para aproveitar a similaridade com ideia explorada no critério de divisibilidade por 3, apresenta-se o critério de divisibilidade por 9, mostrando que a soma dos algarismos de um número divisível por 9 também será divisível por 9.

Então aborda-se na sequência o critério de divisibilidade por 4, revelando que todo os números divisíveis por 4 ou terminam em $\underline{00}$ ou seus dois últimos algarismos formam um número também divisível por 4.

De maneira análoga ao realizado com os critérios de 3 e 9, apresenta-se então o critério de divisibilidade por 8 devido sua semelhança com o critério de divisibilidade por 4, declarando que os números divisíveis por 8 ou terminam em $\underline{000}$ ou seus três últimos algarismos formam um número também divisível por 8.

Para finalizar, dois últimos critérios costumam ser apresentados, primeiramente o critério de divisibilidade por 5, levando o aluno a perceber que todo número divisível por 5 ou termina em 0 ou termina em 5, e em seguida, que um número divisível por 10 deve ser divisível ao mesmo tempo por 2 e por 5, e dessa forma conclui-se que todo número divisível por 10 deve necessariamente terminar em 0.

Notamos que mesmo que o critério de divisibilidade por 7, possa ser facilmente apresentado (como veremos na abordagem Superior), nenhuma das obras o menciona.

Cabe ressaltar que a ordem em que esses critérios são expostos nas obras observadas nem sempre é feita conforme aqui expusemos, no entanto, as ideias, a relação ou mesmo a semelhança entre uma e outra, em todas essas obras, são facilmente constatadas.

Além disso, embora essas obras mencionem que esses critérios tornam mais prática a verificação da divisibilidade de um número por outro, percebemos que a sua principal utilidade mesmo parece ser evidenciada quando se apresenta o conceito de números primos, mais especificamente, quando se constrói o "crivo de Eratóstenes", como um procedimento eficiente para encontrar os primeiros desses números, como se poderá constatar a seguir.

A abordagem desse estudo inicia-se observando quantos são os divisores de cada um dos primeiros números naturais, o que nos permite observar ainda que alguns desses números possui apenas dois divisores: o número 1 e ele próprio, por essa razão julgou-se conveniente que recebessem uma denominação especial para que distinguíssemos dos demais os números que apresentam essa característica, surgia assim o que chamamos de *números primos*.

Ainda com relação a esses números, duas afirmações são feitas:

➢ O único número natural par que é primo é o 2;

➢ Os números primos são infinitos.

A primeira afirmação é bastante intuitiva, afinal qualquer outro número par é múltiplo de 2 e assim sendo terá consequentemente, mais do que dois divisores. Já a segunda afirmação não é de forma alguma tão óbvia assim, e portanto não poderia deixar de ser justificada, já que sua demonstração apenas se apoia em conceitos que já foram abordados, como veremos na abordagem PIC.

Após essas definições e afirmações o crivo de Eratóstenes é apresentado como um método que nos permite identificar os primeiros números primos. Por exemplo, a maioria das obras mostra como usar o método, para encontrar os números primos menores que 100, bastando apenas realizar os passos seguintes:

1º passo: Escreva os números de 1 até 100;

2º passo: Risque o número 1, pois ele não é primo (e nem composto, de acordo com a próxima definição);

3º passo: Risque todos os múltiplos de 2, exceto ele próprio;

4º passo: Risque todos os múltiplos de 3, exceto ele próprio;

5º passo: Risque todos os múltiplos de 5, exceto ele próprio;

6º passo: Risque todos os múltiplos de 7, exceto ele próprio;

7º passo: Destaque os números que não foram riscados, pois eles são todos números primos.

Caso esses passos sejam seguidos corretamente, obteremos o resultado apresentado na tabela abaixo, onde os números em destaque são os números primos procurados:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Figura 3.6: *Crivo de Eratóstenes*
Fonte: Elaborada pelo autor

Ainda sobre o método, lamentamos que em momento algum se procure dizer como encontrar os números primos além de 100, ou então que se argumente porque os números primos menores que 100 podem ser encontrados retirando-se os múltiplos dos números primos menores ou iguais a 7. Esse tipo de omissão retira do aluno a possibilidade dele compreender como o método pode ser extendido.

Posteriormente a essas ideias, os *números compostos* são definidos como sendo todos os números que não são primos (exceto o 0 e o 1), ou seja, números naturais maiores que 1 e que possuem mais de dois divisores.

Surge assim na sequência, a noção de decomposição de um número em fatores primos e a seguinte afirmação é feita:

“Todo número natural maior que 1 ou é um número primo ou pode ser escrito na forma fatorada completa, isto é, ser decomposto em um produto no qual os fatores são números primos.”

Ainda a esse respeito, o livro orienta o aluno que para realizar a *decomposição de um número natural em fatores primos*, pode-se recorrer ao seguinte procedimento:

➢ dividir o número inicialmente dado por seu menor divisor primo;

➢ dividir o quociente obtido por seu menor divisor primo;

➢ repetir o procedimento até obter o quociente 1.

A ideia de decomposição revela-se fundamental para os estudos de Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo comum (MMC). Ambos os estudos iniciam-se com exemplo, seguido de sua definição, conforme veremos.

Começando pelo MDC, sua definição é apresentada da seguinte maneira:

"O *Máximo Divisor Comum* de dois (ou mais) números naturais é o maior número que é divisor de todos esses números".

Depois disso, dois modos de obter MDC entre dois (ou mais) números são apresentados: o primeiro seria por meio da comparação dos divisores de ambos; já o segundo seria usando a decomposição simultânea dos números em fatores primos.

Em relação a esse conteúdo percebemos que as obras atuais não abordam mais o cálculo do MDC, usando o algoritmo de Euclides (mais conhecido como "método das divisões sucessivas"), que ao nosso ver, é muitas vezes mais prático que os dois descritos anteriormente.

De maneira semelhante ao MDC o MMC seria primeiramente definido:

"O *Mínimo Múltiplo Comum* de dois ou mais números naturais é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo desses números."

Posteriormente, apresenta-se o procedimento para o cálculo do MMC de dois ou mais números, mostrando que basta efetuar a multiplicação de todos os fatores primos que aparecem na decomposição simultânea desses números, ou ainda, a partir da comparação de seus múltiplos.

E assim encerramos a abordagem feita pelos livros didáticos constatando que as ideias matemáticas tem sido pouco aprofundadas, sempre generalizadas com base em casos particulares ou simplesmente impostas como válidas. Dessa forma os livros não contribuído para que os alunos realizem a dedução dos resultados matemáticos.

Aliás nesse sentido, lamentávelmente de acordo com Lima (2007), a maioria dos alunos estão concluindo a Educação Básica sem ver sequer uma única demonstração. Dando continuidade a abordagem PIC, felizmente veremos que esses mesmos conceitos têm sido abordados de uma maneira cada vez mais diferente.

3.4.2 Abordagem da Matemática no programa PIC: Parte II

Retomando a abordagem feita pelo PIC, notemos que ao contrário dos livros didáticos apenas as operações de adição e subtração foram trabalhadas até então. O porque dessa diferença ficará evidente nos próximos assuntos.

A apostila inicia o estudo dos *múltiplos* de um número natural a partir da seguinte definição:

Dado $a \in \mathbb{N}$, os múltiplos de a são:
0 vezes a (nenhuma vez a), uma vez a, duas vezes a, três vezes a, ..., obtendo assim a sequência:

$$0 \times a = 0, 1 \times a = a, 2 \times a = a + a, 3 \times a = a + a + a, ...$$

Observando os múltiplos de 2, notamos que eles são os números chamados de *pares*:

$$0 = 2.0, 2 = 2.1, 4 = 2.2, 6 = 2.3, 8 = 2.4, 10 = 2.5, ...$$

E dessa maneira pode se pensar em uma representação geral, para se referir a um número natural par, logo:

$$2.n, \text{ com } n \in \mathbb{N}, \text{é um número par.}$$

Temos ainda que todo número que não é par é chamado de *ímpar*. Então se observarmos que no conjunto dos números naturais os números ímpares são na verdade os sucessores dos números pares, também é possível usar uma representação geral para se referir a um número natural ímpar, logo

$$2.n + 1, \text{ com } n \in \mathbb{N}, \text{é um número ímpar.}$$

É interessante notar que o programa aproveita desse fato bastante simples para introduzir a ideia de generalização e mais para argumentar que a importância de se utilizar letras em Matemática, ou seja, usar expressões algébricas, serve para nos ajudar a mostrar que determinados resultados não se aplicam apenas a casos particulares, mas com o uso das letras podemos provar que esses resultados funcionam sempre.

Considerando agora os múltiplos de 3, é possível afirmar que qualquer número natural pertence a um dos três conjuntos abaixo:

Múltiplo de 3 ➔ $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$ ➔ $3.n$, $n \in \mathbb{N}$ (resto 0);
Múltiplo de 3, + 1 deslocamento ➔ $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...\}$ ➔ $3.n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ (resto 1);
Múltiplo de 3, + 2 deslocamentos ➔ $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...\}$ ➔ $3.n + 2$, $n \in \mathbb{N}$ (resto 2).

Levando a concluir que um número natural ou é múltiplo de 3, ou na divisão por 3 deixa resto 1 ou resto 2.

Os exemplos a seguir nos permitirão concluir algo bastante interessante sobre os restos numa deixados numa divisão por 3.

Exemplo 3.14. *Sejam* $A = 3.n + r$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $B = 3.k + s$, $k \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$\begin{aligned} A + B &= 3.n + r + 3.k + s \\ &= 3.n + 3.k + r + s \\ &= 3.(n + k) + (r + s). \end{aligned}$$

O que nos permite concluir que o resto deixado pela soma de dois números na divisão por 3 é igual a soma de seus restos na divisão por 3.

Exemplo 3.15. *Sejam* $A = 3.n + r$, $n, r \in \mathbb{N}$ *e* $B = 3.k + s$, $k, s \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$\begin{aligned} A.B &= (3.n + r).(3.k + s) \\ &= 9.n.k + 3.n.s + 3.r.k + r.s \\ &= 3.(3.n.k + n.s + r.k) + r.s \end{aligned}$$

Portanto, o resto deixado pelo produto de dois números na divisão por 3 é igual ao produto de seus restos na divisão por 3.

Tomar múltiplos define nos números naturais uma operação: a multiplicação, representada por $a \times b$, que se lê a vezes b, representando o múltiplo a vezes b de b. Assim,

$$a \times b = \begin{cases} 0 \text{ se } a = 0 \\ b \text{ se } a = 1 \\ \underbrace{b + \ldots + b}_{\text{a parcelas}} \text{ se } a > 1 \end{cases}$$

O número $a \times b$ será chamado o produto de a por b e será também denotado por ab, quando não houver risco de confusão.

A seguir as propriedades dessa operação são apresentadas. Procedendo da mesma maneira que os livros da Educação Básica o programa PIC apresenta exemplos em que se verifica a validade das propriedades comutativa e associativa, e em seguida menciona-se que não se trata de uma coincidência, aliás, ocorre de maneira semelhante as propriedades comutativa e associativa da adição, e portanto seria natural e tranquilo admitir sua validade.

Notemos que a propriedade do elemento neutro da multiplicação segue direto da definição de multiplicação.

Para definição da última propriedade, o autor convida o aluno a perceber a forte relação que existe entre as operações de adição e multiplicação, já que a definição da multiplicação $a \times b$, em última instância, consiste em somar a parcelas iguais b sucessivamente.

E então começaria a discutir a propriedade que relaciona essas duas operações a *propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição*:

Propriedade 3.16. *Dados os números naturais a, b e c, tem-se que*

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c.$$

Esta não seria uma propriedade tão obvia quanto as outras, então logicamente fazia-se necessário algum comentário antes de admiti-la.

Inicialmente, verifica-se a validade dessa propriedade particularizando os valores de a, b e c.

Tomemos então $a = 3$ e b e c naturais quaisquer, temos:

$$\begin{aligned} 3 \times (b+c) &= (b+c)+(b+c)+(b+c) \text{ (definição de multiplicação)} \\ &= (b+b+b)+(c+c+c) \text{ (comutatividade e associatividade da adição)} \\ &= 3 \times b + 3 \times c \text{ (definição de multiplicação)} \end{aligned}$$

A propriedade continua sendo válida se particularizarmos apenas o valor de a.

Sejam a, b e c naturais quaisquer, é no mínimo razoável pensar, que usando a definição de multiplicação, a comutatividade e a associatividade da adição é possível generalizar o resultado e obtermos:

$$\begin{aligned}
a \times (b+c) &= \underbrace{(b+c) + \ldots + (b+c)}_{\text{a vezes}} \\
&= \underbrace{b + \ldots + b}_{\text{a vezes}} + \underbrace{c + \ldots + c}_{\text{a vezes}} \\
&= a \times b + a \times c.
\end{aligned}$$

De maneira semelhante, considerando agora a, b, c e d naturais quaisquer, temos:

$$\begin{aligned}
(a+b) \times (c+d) &= \underbrace{(a+b) + \ldots + (a+b)}_{\text{(c+d) vezes}} \\
&= \underbrace{a + \ldots + a}_{\text{(c+d) vezes}} + \underbrace{b + \ldots + b}_{\text{(c+d) vezes}} \\
&= a \times (c+d) + b \times (c+d) \\
&= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d.
\end{aligned}$$

Observação 3.17. *Apesar das conclusões acima não terem admitido uma prova rigorosa, o que poderia ter sido feito usando o Principio de Indução, que será visto mais a frente, ela nos fornece indícios de que essa propriedade é válida. Então por ora vamos admiti-la.*

Essa propriedade também é válida para a subtração, como mostraremos abaixo:

Propriedade 3.18 (Propriedade distributiva da multiplicação com relação à subtração)**.** *Dados a, b e $c \in \mathbb{N}$, com $a < b$, então*

$$c \times (b-a) = c \times b - c \times a$$

Demonstração. De fato, como $a < b$, temos que

$$c \times a + c \times (b-a) = c \times [a + (b-a)] = c \times b.$$

Assim, pela definição da subtração, temos que

$$c \times (b - a) = c \times b - c \times a.$$

□

Observe ainda mais uma importante propriedade: Se $a \times b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Argumentação: Sua validade consiste em notar que o único múltiplo de 0 é somente o próprio 0. Além disso, sabemos que todos os números são múltiplos de 1 e de si próprios, e mais segue da definição de múltiplo, que um múltiplo de um número $a > 0$ é sempre maior ou igual do que a. Portanto, $a \times b = 0$ só ocorre se $a = 0$ ou $b = 0$.

Notemos ainda, que se $a = 0$ e $b = 0$ são números naturais não nulos, então sabemos por definição que o número $\times b$ é um múltiplo não nulo de b. Por outro lado, pela propriedade comutativa da multiplicação, pode-se afirmar que ele é também um múltiplo de a. Assim, o conjunto dos múltiplos comuns de a e b, além de conter o número 0, contém também o número $a \times b \neq 0$. Essas observações satisfazem o princípio da Boa Ordem que nos garantirá a existência da próxima definição.

Definição 3.19. *O menor múltiplo comum não nulo de dois números naturais não nulos a e b é denotado por $mmc(a, b)$ e será chamado de mínimo múltiplo comum de a e b (ou abreviadamente mmc).*

Definição 3.20 (Potenciação)**.** *Dados dois números naturais $a \neq 0$ e n qualquer, definimos a operação de potenciação como segue:*

$$a^n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0; \\ a \text{ se } n = 1; \\ \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fatores}} \text{ se } n > 1. \end{cases}$$

Define-se também $0^n = 0$, para todo $n \neq 0$.

A potenciação possui as seguintes propriedades:

Propriedade 3.21. *Dados a, n e $m \in \mathbb{N}$ temos que* *(a)* $1^n = 1$;

(b) $a^n a^m = a^{n+m}$;

1. *(c)* $(a^n)^m = a^{nm}$;

(d) $a^n b^n = (ab)^n$.

Retomando a ideia dos critérios de multiplicidade (que são os mesmos critérios de divisibilidade apresentados pelos livros didáticos) que começamos quando abordamos a noção de múltiplos

Vamos começar pelo critério de multiplicidade (divisibilidade) por 2.

Suponhamos um número natural n é par, ou seja, $n = 2.m$, onde $m \in \mathbb{N}$.

Podemos escrever m da forma $k.10 + k_0$, onde k_0 é o algarismo das unidades de m. Sendo assim, temos:

$$n = 2(k.10 + k_0) = 2.10.k + 2k_0.$$

Sendo $2k_0$ um dos números: 0 ,2 , 4, 6 ou 8, logo temos que n é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8 e, portanto, o seu algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6, ou 8. Em outras palavras um número natural n só será divisível por 2 se o seu algarismo das unidades for um número par.

Os critérios de multiplicidade nos permitem concluir de maneira prática se um dado número é múltiplo de algum outro prefixado.

Os outros critérios abordados são feitos exatamente da mesma forma em que é exposto no livro de Aritmética do PROFMAT, e assim deixaremos para abordá-las posteriormente.

Como a definição de MDC já foi abordada pelos livros da Educação Básica, partiremos daí para discutir algumas propriedades.

Observação 3.22. *Seja d um divisor comum de a e b ($a > b$). Isso significa dizer que: $a = d.k_1$, para algum k_1 natural e $b = d.k_2$, para algum k_2. Logo, se subtrairmos $a - b$, temos:*

$$a - b = d.k_1 - d.k_2 = d.(k_1 - k_2)$$

Mas isso nos permite concluir que d é um divisor de $a - b$, em outras palavras, se d divide a e d divide b então d divide a diferença entre a e b, ou seja: Se $d|a$ e $d|b$ então $d|a - b$.

Suponhamos agora que existe r tal que $r|a$ e $r|a-b$, logo existem naturais k_1 e k_2 tais que:

$$a = r.k_1 \text{ e } a - b = r.k_2,$$

logo,

$$r.k1 - b = r.k_2 \Rightarrow r.k_1 - r.k_2 = b \Rightarrow r.(k1 - k2) = b$$

Mas isso nos permite concluir que r é um divisor de b, em outras palavras, se r divide a e r divide $a-b$ então r divide b, ou seja: Se $r|a$ e $r|a-b$ então $r|b$.

E portanto temos que

$$x|a \text{ e } x|b \Leftrightarrow x|a \text{ e } x|a-b.$$

O resultado acima nos permite concluir que qualquer divisor comum de a e b será também um divisor comum de a e $a-b$, portanto isso nos permite concluir que o maior divisor comum de a e b será também o maior divisor comum de a e $a-b$, ou seja

$$mdc(a, b) = mdc(a, a-b).$$

Exemplo 3.23.

$$mdc(16, 12) = mdc(12, 4) = mdc(8, 4) = mdc(4, 4) = 4.$$

De posse desse resultado podemos agora utilizar o algoritmo de Euclides, um procedimento que nos permite calcular o MDC de forma rápida e fácil.

Vejamos calcular o mdc (16, 12), utilizando esse método:

Dividimos o 16 pelo 12 e anotamos o resto, em seguida dividimos o 12 pelo resto obtido na ultima divisão e anotamos o novo resto e assim procedemos até o resultado dar zero.

Assim o mdc será o último resto obtido antes do 0.

16	12	4	0

Logo o $mdc(16, 12) = 4$.

A justificativa para tal procedimento consiste em observar que a divisão é o mesmo que subtrair sucessivas vezes.

Uma das propriedades mais importantes dos números naturais é a possibilidade de dividir um número por outro com resto pequeno. Essa é a chamada *divisão euclidiana.*

Teorema 3.24 (Algoritmo da divisão)**.** *Sejam a, $b \in \mathbb{N}$ com $a > 0$. Então, existe um único par $(q, r) \in \mathbb{N}$, tais que $b = qa + r$, com $0 \leq r < a$.*

Demonstração. Sejam dados dois números naturais a, $b \in \mathbb{N}$ com $a > 0$. Queremos comparar o número natural b com os múltiplos do número a. Para isto, considere todos os intervalos da forma $[na, (n+1)a)$, para n um número natural qualquer. Isto nos dá uma partição de $\mathbb{N}$, ou seja,

$$N = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup ... \cup [na, (n+1)a) \cup ...$$

e os intervalos acima são dois a dois sem elementos em comum.

Portanto, o número b estará em um e apenas um dos intervalos acima. Digamos que $b \in [qa, (q+1)a)$.

Logo, existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que $b = aq + r$, com $0 \leq r < a$. □

O número b é chamado *dividendo*, o número a *divisor*, os números q e r são chamados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão de b por a.

Note que dados dois números naturais a e b, nem sempre b é múltiplo de a, este será o caso se, e somente se, $r = 0$. Como determinar os números q e r na divisão euclidiana?

Caso $b < a$, como $b = 0 \times a + b$, temos que $q = 0$ e $r = b$.

Caso $b = a$. Neste caso, tomamos $q = 1$ e $r = 0$.

Caso $b > a$. Podemos considerar a sequência:

$$b - a, b - 2a, ..., b - na,$$

até encontrar um número natural q tal que $b - (q+1)a < 0$, com $b - qa \geq 0$. Assim, obtemos $b = qa + r$, onde $r = b - qa$ e, portanto, $0 \leq r < a$.

Chama-nos atenção o comentário feito no inicio do estudo dos números primos, ao dizer que esses números são muito especiais, pois além de serem importantes ao desenvolvimento da teoria, pensando-se especificamente no conjunto dos números naturais, cada um de seus elementos pode ser obtido a partir do produto de números primos.

Já vimos o conceitos de números primos, dessa forma não há necessidade de discuti-los novamente, no entanto, demonstraremos a seguir, uma afirmação que apenas foi admitida pela abordagem anterior.

Teorema 3.25. *O conjunto formado pelos números primos é infinito.*

Demonstração. Suponhamos que exista somente uma quantidade finita de números primos, digamos: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Consideremos o número $k = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$. Como k é inteiro e $k > 2$, existe um primo p tal que $p \mid k$. Segue então que $p = p_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Logo $p_i \mid k$. Mas $p_i | p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$. Assim $p_i | k - p_1 p_2 p_3 \ldots p_n = 1$, o que é um absurdo. □

E por aqui finalizamos nossas observações e discussões sobre essa abordagem, entendendo que ela visa propiciar ao aluno um conhecimento mais sólido em relação aos fatos matemáticos, favorecendo o aspecto dedutivo dessa disciplina sempre que estiver ao seu alcance.

Na abordagem seguinte, buscaremos contemplar algumas ideias sobre os assuntos discutidos anteriormente, com maior ênfase, ou ainda, apresentar algum resultado que não vimos.

3.4.3 Abordagem da Matemática na Educação Superior: Parte II

Nessa parte iniciamos provando os critérios de multiplicidade que havíamos comentado. Em seguidas demonstraremos alguns resultados relacionados aos assuntos abordados.

Proposição 3.26. *Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 5 (respectivamente por 10) é que r_0 seja 0 ou 5 (respectivamente 0).*

Demonstração. Sendo $a = 10(r_n \cdots r_1) + r_0$, temos que a é divisível por 5 se, e somente se, r_0 é divisível por 5, e, portanto, $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$. Por outro lado, a é divisível por 10 se, e somente se, r_0 é divisível por 10, o que somente ocorre se $r_0 = 0$. □

Proposição 3.27. *Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 ou por 9 é que $r_n + \cdots + r_1 + r_0$ seja divisível por 3 ou por 9, respectivamente.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} a - (r_n + \cdots + r_1 + r_0) &= r_n 10^n + \cdots + r_1 10 + r_0 - (r_n + \cdots + r_1 + r_0) \\ &= r_n(10^n - 1) + \cdots + r_1(10 - 1). \end{aligned}$$

Como o termo à direita nas igualdades acima é divisível por 9, temos, para algum número q, que

$$a = (r_n + \cdots + r_1 + r_0) + 9q :$$

Assim, fica claro que a é divisível por 3 ou por 9 se, e somente se, $r_n + \cdots + r_1 + r_0$ é divisível por 3 ou por 9. □

Ainda sobre os critérios de divisibilidade, já havíamos alertado que um critério não apresentado é o critério de divisibilidade por 7, por sua simplicidade optamos por discutí-lo a seguir.

Divisibilidade por 7: Um número é divisível por 7 se o dobro do último algarismo, subtraído do número sem o último algarismo, resultar em um número divisível por 7. Se o número obtido ainda for grande, repete-se o processo até que se possa verificar a divisão por 7.

Vejamos um exemplo para compreender melhor sua ideia.

Exemplo 3.28. *Sabemos que 561421 é divisível por 7 (pois* $561421 = 7 \times 80203$*), assim vamos utilizá-lo para verificar o critério acima. Temos que:*

$$\begin{aligned} 7|561421 &\Leftrightarrow 7|56142 - 2 \cdot 1 = 56140 \\ &\Leftrightarrow 7|5614 - 2 \cdot 0 = 5614 \\ &\Leftrightarrow 7|561 - 2 \cdot 4 = 553 \\ &\Leftrightarrow 7|55 - 2 \cdot 3 = 49 \end{aligned}$$

Como sabemos, 49 é um múltiplo de 7 bem conhecido, e portanto o critério se aplica a esse exemplo.

No entanto, vamos então demonstrar que não se trata de uma coincidência, mas que essa ideia vale sempre a partir da seguinte proposição:

Proposição 3.29. *(Critério de divisibilidade por 7) Sejam a e b números naturais. Temos que* $10a + b$ *é múltiplo (ou divisível) de 7, se, e somente se,* $a - 2b$ *é múltiplo* *de 7.*

Demonstração. Notemos que:

$$\begin{aligned} 10a + b &= (7a + 3a)(7b - 6b) \\ &= 7(a + b) + 3(a - 2b) \end{aligned}$$

Como $7|10a + b$ e $7|7(a + b)$, temos da Observação 3.22 que:

$$7|(10a + b) - 7(a + b) = 3(a - 2b)$$

Logo, $7|3(a - 2b) \Leftrightarrow 7|a - 2b$, já que $mdc(3, 7) = 1$
E portanto, temos que

$$7|(10a + b) \Leftrightarrow 7|(a - 2b)$$

□

Vale a pena ainda comentar sobre outra forma, bastante similar, a esse critério, recentemente divulgada por um estudante do Reino Unido, o nigeriano Chika Ofili, de apenas 12 anos. Segundo Larnioh (2019), o estudante teria "descoberto" a "nova versão" devido a ausência do critério de divisibilidade por 7 no livro em que estava estudando. Vejamos então como pode ser enunciada a ideia de Chika:

(Teste Chika - Divisibilidade por 7) Um número é divisível por 7 se o quíntuplo do último algarismo, adicionado ao número sem o último algarismo, resultar em um número divisível por 7. De maneira análoga ao processo anterior este processo pode ser repetido.

Verifiquemos este teste a partir de um exemplo.

Exemplo 3.30. *Notemos que 30380 é divisível por 7 (pois* $2996 = 7 \times 4340$*), usando o método acima, temos que:*

$$\begin{aligned} 7|30380 &\Leftrightarrow 7|3038 + 5 \cdot 0 = 3038 \\ &\Leftrightarrow 7|303 + 5 \cdot 8 = 343 \\ &\Leftrightarrow 7|34 + 5 \cdot 3 = 49 \end{aligned}$$

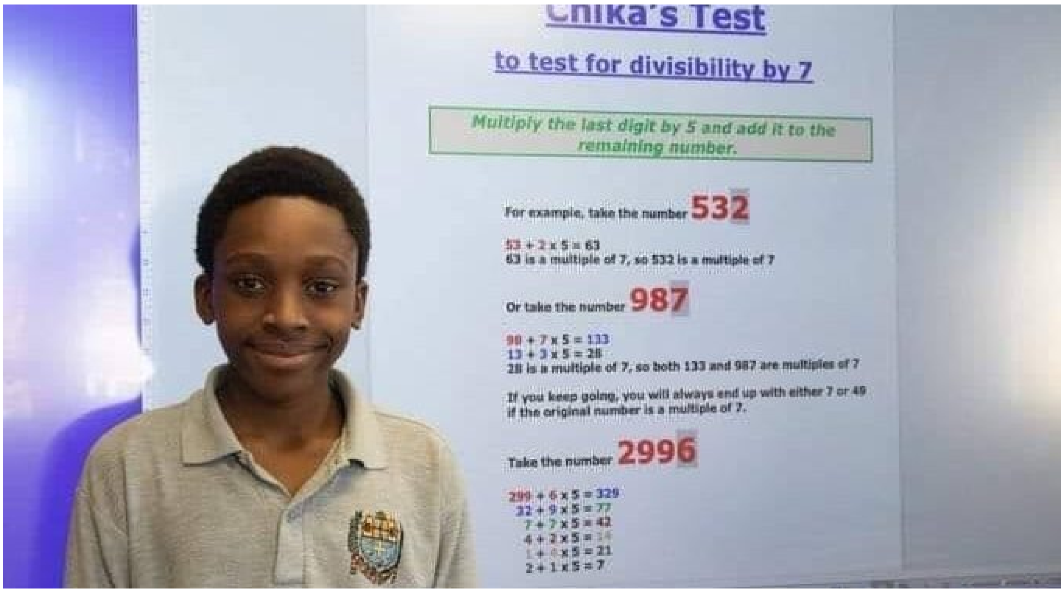


Figura 3.7: *Chika e seu teste de divisibilidade por 7*
Fonte: Portal do Rapmais [2]

A verificação da validade do "Teste Chika" nesse último exemplo nos motivou a enunciar e demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 3.31. *(Critério de multiplicidade por 7) Sejam a e b números naturais. Temos que $10a + b$ é múltiplo (ou divisível) de 7, se, e somente se, $a + 5b$ é múltiplo de 7.*

Demonstração. Provemos primeiro a ida, ou seja:

$$\begin{aligned}
(\Rightarrow)\ 10a + b = 7k \quad &\Leftrightarrow \quad 10a + (50b - 49b) = 7k \\
&\Leftrightarrow \quad 10a + 50b = 7k + 49b = 7k' \\
&\Leftrightarrow \quad 10(a + 5b) = 7k' \\
&\Leftrightarrow \quad a + 5b = 7k''
\end{aligned}$$

Esta última equivalência justifica-se pelo fato do mdc (10, 7) = 1, e assim provamos a

[9]Disponível em: https://portalrapmais.com/nigeriano-de-12-anos-e-premiado-apos-descobrir-uma-nova-formula-de-dividir-na-matematica/. Acesso em: 30/12/2019.

primeira parte. Mostremos agora a recíproca, ou seja:

$$\begin{aligned}
(\Leftarrow)\ a + 5b = 7k \ &\Leftrightarrow\ a + 5b = 7k \\
&\Leftrightarrow\ 10a + 50b = 10 \cdot 7k = 7k' \\
&\Leftrightarrow\ 10a + 50b - 49b = 7k' - 49b = 7k'' \\
&\Leftrightarrow\ 10a + b = 7k''
\end{aligned}$$

E portanto, temos que

$$7|(10a + b) \Leftrightarrow 7|(a + 5b)$$

□

No próximo resultado apresentamos uma demonstração diferente para a Divisão Euclidiana, daquela que vimos, na abordagem PIC.

Teorema 3.32 (Divisão Euclidiana)**.** *Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que $b = aq + r$, com $r < a$.*

Demonstração. Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido nos naturais, os números

$$b, b - a, b - 2a, ..., b - na, ...$$

Pela Propriedade da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - qa$. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < a$. Se $a|b$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar. Se, por outro lado, a $6|b$, então $r6 = a$, e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo $r = c + a = b - qa$, teríamos $c = b - (q + 1) \in S$, com $c < r$, contradição com o fato de r ser o menor elemento de S. □

Mostremos agora um resultado utilizado na abordagem anterior, conhecido como "Teorema dos restos".

Teorema 3.33. *Se b_1 e b_2 deixam restos r_1 e r_2 na divisão por a, respectivamente, então $b_1 + b_2$ deixa o mesmo resto que $r_1 + r_2$ na divisão por a e $b_1 \cdot b_2$ deixa o mesmo resto que $r_1 \cdot r_2$ na divisão por a.*

Demonstração. Sejam a_1, b_1 e b_2 números naturais com $0 < a < b_1$ e $0 < a < b_2$, então pela divisão euclidiana existem dois únicos números naturais q_1 e r_1 tais que $b_1 = aq_1 + r_1$, com $r_1 < a$ e existem dois únicos números naturais q_2 e r_2 tais que $b_2 = aq_2 + r_2$, com $r_2 < a$. De modo análogo existem q e r tais que $r_1 + r_2 = aq + r$, com $0 \leq r < a$

Logo, temos que:

$b_1 + b_2 = a(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 = a(q_1 + q_2 + q) + r$ O que prova nossa primeira afirmação.

De forma análoga concluímos que existem naturais k e s tais que $r_1 \cdot r_2 = ak + s$, com $0 \leq s < a$

Logo, temos que:

$b_1 \cdot b_2 = (aq_1 + r_1)(aq_2 + r_2) = (q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1)a + (r_1r_2) = (kq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1)a + s$

O que conclui nossa demonstração. □

Vamos provar agora um resultado fundamental da Aritmética que foi apenas mencionado na abordagem da Matemática na Educação Básica:

Teorema 3.34. *"Todo número natural é primo ou é um produto de fatores primos." Para demonstrarmos esta afirmação, usaremos o Principio da Boa Ordenação (PBO) que provamos na parte I.*

Demonstração. Seja X o conjunto dos números naturais que são primos ou produtos de fatores primos. Observemos que se m e n pertencem a X então o produto mn pertence a X. Seja Y o complementar de X. Assim, Y é o conjunto dos números naturais que não são primos nem são produtos de fatores primos. Mostremos que Y é vazio. Por absurdo suponhamos que Y seja um conjunto não vazio, logo como Y é um subconjunto do conjunto dos naturais o PBO nos garante que existe um elemento a em Y tal que a é o menor elemento de Y. Segue disso que todos os números menores do que a pertencem a X. Como a não é primo, sendo a composto existem $m, n < a$ tal que $a = mn$, logo m pertence a X e n pertence a X e assim sendo assim temos que mn pertence a X. Mas $mn = a$, o que significaria que a pertence a X, uma contradição. Segue-se que Y é vazio, e assim concluímos nossa demonstração. □

Outro fato bastante utilizado, quando se estuda os números primos, diz respeito ao Crivo de Eratóstenes, no entanto nenhuma justificativa sobre o porque de sua validade ou como ele funciona costuma ser dada na Educação Básica. Felizmente, o teorema a seguir preencherá essa lacuna.

Teorema 3.35. *Se um número natural $n > 1$ não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que n não seja divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$ e que não seja primo. Seja q o menor número primo que divide n; então, $n = q \cdot t$, com $q \leq t$. Segue daí que $q^2 \leq q \cdot t = n$. Logo, n é divisível por um número primo q tal que $q^2 \leq n$, absurdo. □

Observação 3.36. *Com base neste último teorema, notamos que no exemplo ilustrado pela figura 3.6, usando no "método de Eratóstenes" apenas os números primos menores ou iguais a 7 seria possível encontrar na verdade todos os números primos menores que 120, e não só até o 100 como foi desenvolvido (ver p.80).*

Um último resultado extremamente importante para o desenvolvimento da teoria dos números primos E assim encerramos esta seção. Contudo é importante ressaltar que, para analisar estas abordagens, optamos por realizar uma análise do tipo qualitativa, recorrendo para tanto a alguns referenciais entre eles, à Teoria das abordagens à aprendizagem, teoria no qual discorremos a seguir.

3.5 Teoria das abordagens à aprendizagem

O desenvolvimento da Teoria das abordagens à aprendizagem iniciou-se a partir dos estudos de Marton e Säljö (1976a, 1976b), e posteriormente foi aperfeiçoada com as contribuições de outros autores, como Biggs (1987, 1988, 1993) e de Entwistle (1988), que identificaram que o aprendizado do aluno ocorre baseado na percepção que o indivíduo possui acerca do assunto (a motivação recebida) e nas estratégias envolvidas em seu ensino (métodos de aprendizagem utilizados), além disso, perceberam que esse processo de ensino e aprendizagem restringe-se basicamente compreendendo dois tipos de abordagens: a abordagem superficial e a abordagem profunda.

Segundo Fontes (2016), essas abordagens são extremamente opostas, enquanto a abordagem superficial consiste em oferecer um mecanismo como estímulo para o uso de um método mais perfunctório, nesse sentido, o aluno tem interesse em entender apenas o necessário que lhe garanta obter êxito momentaneamente na aprendizagem, e dessa forma, busca por processos que favoreçam a memorização e reprodução da informação, sem se preocupar em relacionar o conteúdo visto com outras ideias. Ou seja, lida com o conteúdo de maneira frívola. Já a abordagem de profundidade se baseia um tipo de motivação intrínseca e uma noção mais aprofundada, assim sendo, o aluno busca satisfazer se anseio pelo conhecimento através da compreensão e aprofundamento dos mesmos. Procura relacionar as várias ideias pertinentes a um mesmo assunto além de investigar a aplicação dessas ideias à outras situações. Ou seja, apreende o significado do que estuda e entende a ideia fundamental por trás do conteúdo visto.

Contudo, é importante alertar que estudos posteriores aos de Marton e Säljö (1976a, 1976b), mencionados anteriormente, identificariam outros tipos de abordagem, que em resumo, seriam derivadas dessas duas, e por essa razão acabariam se mostrando pouco relevantes.

Esta teoria parte do princípio da investigação para compreender a aprendizagem dos estudantes e analisa a participação ativa do estudante na seleção, interpretação e aplicação do conhecimento acadêmico através da interação deste com a aprendizagem (GOMES, 2010).

Ainda pouco difundida em nosso país, talvez possa despertar dúvida ao leitor sobre sua validade, nesse sentido argumentamos que esta encontra-se bem fundamentada, tendo como pressupostos a noção de níveis de aprendizagem, considerando todos os fatores que a norteiam, e isso inclui considerar tanto aqueles que geram a aprendizagem, quanto aqueles que afetam a aprendizagem, e mais ela busca o equilíbrio entre os aspectos cognitivo e motivacional, utilizando-se de argumentos teóricos sólidos, e na prática, suas considerações para análise das aprendizagens tem apontado nortes para a melhoria do ensino. (FONTES, 2016)

Nessa perspectiva, a construção da aprendizagem esta intimamente relacionada com o tipo de abordagem adotada. O princípio dessa teoria assegura a participação do educando na escolha, interpretação e aplicação de determinado conhecimento acadêmico através do processo de ensino-aprendizagem.

E portanto, tendo em vista sua aplicação não só a Psicologia, mas também, as áreas da educação como um todo, entre outras, além dos vários estudos, que apontam uma melhoria significativa no ensino a partir da investigação das abordagens à aprendizagem, recorremos a seus fundamentos para nos auxiliar a analisar qualitativamente as abordagens que constatamos.

Além disso, como as obras didáticas foram baseadas na BNCC, observamos duas competências dentre as dez que ela aborda, para guiar nossos apontamentos:

Competência 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Competência 4. Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital -, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

De maneira geral, procuramos analisar nas obras com que profundidade os assuntos são tratados e se os mesmos da forma como foram expostos contribuem para que o aluno desenvolva o seu potencial matemático.

3.6 Análise comparativa entre as distintas abordagens

O intuito de nossa análise buscou principalmente confrontar a maneira como os conteúdos iniciais da Matemática na Educação Básica, especificamente, os conteúdos relativos ao Conjunto dos Números Naturais, estão sendo abordados: de forma aprofundada ou apenas de maneira superficial, em relação à abordagem dada para esses mesmos conteúdos no Programa PIC-OBMEP, também direcionado à Educação Básica, e no Ensino superior, através do PROFMAT. Dessa forma, pudemos compreender até que ponto cada uma dessas abordagens tem estado presente no Ensino Básico, em que momento cada uma delas se faz necessária e de que forma elas tem influenciado na qualidade do ensino.

E mais, cabe ainda ressaltar que, tomamos como pressuposto que a abordagem matemática feita pelo Ensino Superior seria sempre feita de maneira aprofundada, acabaríamos, utilizando-a como referência para que compreendêssemos também com que profundidade os assuntos estavam sendo abordados e que demonstrações seriam cabíveis na Educação básica.

Entretanto, antes de apresentarmos nossas reflexões, a partir de agora como precisaremos nos referir constantemente as distintas abordagens para compará-las, informamos ao leitor que adotaremos a seguintes abreviações em nosso texto: ALD: Abordagem matemática feita pelos Livros Didáticos na Educação Básica; APP: Abordagem matemática feita pelo Projeto PIC; AES: Abordagem matemática feita pelo Ensino

Superior.

No início do estudo sobre o Conjunto dos Números Naturais, tanto a ALD quanto a APP começariam atribuindo o surgimento dos números em função da necessidade que o homem teve de começar a realizar contagens.

Entretanto, logo começaríamos a perceber essa similaridade no tratamento matemático feito pela ALD e APP deixariam de ser freqüentes.

Na ALD, haveria uma preocupação em se apresentar exemplos de sistemas de numeração que foram utilizados pela humanidade inicialmente. Sistemas que foram se sucedendo, até que finalmente acabaríamos adotando o Sistema de numeração decimal, No entanto, ao não se dar muita ênfase sobre o porquê da substituição de um sistema por outro a apresentação dos sistemas anteriores acabaria ficando vaga. Ao apresentar o o "Conjunto dos Naturais" ambas as abordagens se refeririam a ele como uma sequência que se inicia a partir de um símbolo originário, representado por 0 na ALD e por 1 na APP, e a partir daí os próximos números (termos) dessa sequência seriam obtidos acrescentando-se uma unidade ao número anterior.

Apesar da suposta familiaridade que os alunos tem com esse conjunto acreditamos que seria importante a ALD enfatizar o quanto ele demorou para chegar a forma como o conhecemos, e mais, não se diz que o zero nem sempre esteve ali ou tão pouco evidencia a importância de sua criação, pois afinal ele não é "tão natural assim".

Nossa ultima afirmação pode ser entendida através das palavras de Vomero (2001) o símbolo"0" e o nome zero sempre estiveram associados a ideias como: nada, nenhum, não-existente ou nulo. No entanto, o que mais nos intriga sobre esse número é o fato dele ao mesmo tempo conseguir representar o nada e ainda trazer embutido em si algum conteúdo. E infelizmente, toda essa complexidade a seu respeito tende a permanecer, já que até hoje ele continua sendo muito pouco explorado.

Embora esse mesmo assunto ao ser tratado na APP, não seja visto também de maneira aprofundada, a inserção do 0 no "Conjunto dos Naturais", só surge após esse número ter sido utilizado para representar o não deslocamento de um número, ou seja, como uma consequência da definição de adição, o que na ALD seria visto por meio da propriedade do elemento neutro da adição.

Aliás, a operação de adição acabaria juntamente com as outras três operações básicas recebendo na ALD um tratamento extremamente supérfluo, praticamente não se perceberia nenhuma definição, haveria apenas uma grande ênfase ao uso de seus algoritmos, e quanto às propriedades relacionadas a essas operações, acabariam simplesmente sendo impostas como válidas, depois de uma exposição medíocre de exemplos. Entretanto, isso só ocorreria após transparecer que a ideia de ordem tem como único fim apenas a comparação entre dois números, não seria mencionado as propriedades que ela possui ou sequer sua intensa relação com a adição.

Ao considerarmos a APP, constatamos que essas mesmas ideias ainda de maneira não tão formal começariam a ser justificadas. A definição de adição seria apresentada como uma conseqüência direta da construção dos "Naturais", seguida de suas propriedades, e embora não tenha se provado nenhuma delas, conforme se faz na AES, seria nítida a preocupação em se argumentar o porquê da validade de cada uma, e como elas seriam passíveis de serem admitidas (naquele momento), já que corresponderiam ao nosso bom senso.

Nesse sentido, relembramos as orientações de Lima (2007), ao dizer que, nessa etapa do ensino, não devemos insistir em detalhes formais para justificar afirmações que, além de verdadeiras, são intuitivamente óbvias e aceitas por todos sem discussão nem dúvidas. Aliás, como vimos nas demonstrações feitas pela AES, a ferramenta que permitiria verificá-las ainda não havia sido apresentada.

Ainda analisando a APP, percebemos que o conceito de ordem também seria apresentado juntamente com suas propriedades, só que agora não sendo essas tão obvias quanto às anteriores, seria passível justificá-las, usando a noção de tricotomia. Ao contrário da ALD, se exploraria a relação de compatibilidade entre a adição e a ordem, e para tanto, algumas ideias de demonstração, como por exemplo, demonstrações por absurdo começariam a ser realizadas.

Conforme íamos prosseguindo algumas semelhanças entre APP a AES começavam a ser evidenciadas. A própria organização dos conteúdos em função da construção matemática que estava sendo verificada na APP deixaria de seguir a mesma ordem de apresentação dos conteúdos tratados pela ALD.

Enquanto a ALD já tinha exposto as quatro operações, somente agora após as ideias que mencionamos, é que na APP, surgiria a operação de subtração em decorrência da relação de ordem existente nos números naturais. Aliás, é somente através da relação de ordem que essa operação se torna bem definida nesse conjunto. Em momento algum esse cuidado foi constatado na ALD e, é por essa razão, que por vezes se depara com alunos tentando usar o algoritmo da subtração colocando o número menor como minuendo e o maior como subtraendo.

Já a AES promoveria também a construção dos naturais, porém, por meio da axiomatização proposta por Peano. E a partir dessa axiomatização todos os resultados abordados pelas ALD e APP, seriam demonstrados. Em seguida, as operações de adição e multiplicação seriam definidas nos "Naturais" e após isso a relação de ordem existente entre os números desse conjunto seria abordada em seguida, e ainda essa mesma relação com as operações definidas.

Retomando a ALD percebemos que após as quatro operações, ela trabalha a ideia de potenciação, seguida dos conceitos de múltiplos e divisores e dos critérios de divisibilidade. Novamente opta-se por tentar mostrar a utilidade desses conceitos para resolver certas situações, o que certamente é importante, mas a forma como é feito, acaba no fundo apenas evocando a transmissão de conceitos, quanto aos exercícios em sua maioria chegam a ser mera aplicação do que foi apresentado, quase não há problemas. Para encerrar apresenta-se os conceitos de números primos, números compostos e o Crivo de Eratóstenes.

Na APP, a partir da operação de adição define-se o conceito de múltiplos, e estes por sua vez definem a operação de multiplicação, que define o conceito de potência, toda exposição nesse sentido é visivelmente planejada para que todas essas ideias possam ser interligadas. A partir dos múltiplos explora ainda a ideia de paridade e o teorema dos restos que foi demonstrado na AES. Quanto à multiplicação, apresenta as suas propriedades: comutativa e associativa argumentando de maneira semelhante ao que foi feito para as propriedades da adição. No entanto ao falar sobre a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição procura demonstrar (não formalmente) a validade do resultado usando argumentos lógicos que sejam inteligíveis para os alunos e ainda evidencia que essa propriedade distributiva da multiplicação também é válida para a subtração.

Para encerrar seu tratamento ao Conjunto dos números naturais a APP trabalha os critérios de multiplicidade, e diferente da ALD, que simplesmente apresenta esses critérios, ela procura demonstrar os que enuncia. Logo após são abordados os números primos e compostos. Assim como na ALD apresenta-se o Crivo de Eratóstenes e em seguida o Teorema Fundamental da Aritmética. Diferente da ALD em todos os assuntos se propôs a resolução de problemas.

No tocante, a Teoria das abordagens a aprendizagem, nossas averiguações confirmam que a ALD têm sido apenas superficial, e embora, em algumas situações ela seja necessária ao ensino, esse tipo de abordagem não pode ser exclusiva, o que nesse sentido não favorece a apreensão dos conceitos por parte do aluno, pois o mesmo se vê apoiado por regras e algoritmos que utilizará nos exercícios a que for submetido, por um curto período. Esse tipo de abordagem dificulta a compreensão do conteúdo, pois, favorece a memorização e a reprodução da informação. (FONTES, 2016)

De acordo com Lima (2007), constatamos que a ALD acaba influenciando o uso do método peremptório no ensino, uma vez que os resultados matemáticos são em sua totalidade, apresentados sem nenhuma justificativa. Ainda segundo o autor compreendemos que essa abordagem apenas recorre às componentes de manipulação e aplicação, entretanto, ao não contemplar a conceituação, as aplicações não poderão ser bem sucedidas. Nesse sentido, já discutimos em nosso texto, que apenas contextualizar o ensino, mostrar que ele pode ser usado fora do ambiente escolar, embora sejam ações necessárias, não são suficientes para se obtenha êxito no processo de ensino e aprendizagem.

Somente considerando a ALD não será possível o aluno desenvolver competências como: melhorar sua capacidade intelectual, investigar, a refletir, a analisar criticamente, a imaginar e a criar, conforme propõe a BNCC. (BRASIL, 2018).

Mas contudo, embora a ALD tenha grande influencia sobre o ensino, quem o conduz de fato, é o professor, e assim sendo, compete a ele preencher as falhas que apontamos nessa abordagem.

Já a APP, em relação à Teoria das abordagens a aprendizagem, contempla os dois tipos de abordagens: a abordagem superficial e a abordagem profunda, há uma predominância da segunda abordagem o que a princípio evidenciam que a APP está muito mais próxima da AES do que da ALD, e nessa perspectiva essa abordagem de contribuído embora mesmo que ainda muito pouco para diminuir a descontinuidade entre o ensino de Matemática nos níveis médio e superior. Sobre o uso da abordagem superficial, temos ainda que ressaltar que essa se fará necessária sempre que os resultados trabalhados forem muito intuitivo (LIMA, 2007) ou sempre que sua justificativa depender de argumentos que não condizem com o nível de aprendizagem cognitiva do aluno.

Segundo Fontes (2016), a abordagem profunda privilegiada pela APP permite o estudante extrair sentido no está aprendendo, a partir da compreensão que adquire a medida que vai aprofundando seus conhecimentos. E mais, essa abordagem é essencial para que esse estudante não so seja capaz de relacionar os conceitos entre si mas lhe dará subsídios para compreender as aplicações em seu cotidiano. Ainda nessa acepção, ao comparar a AES com a APP, percebemos que a APP procura abordar o ensino de Matemática de forma gradativa, propiciando ao aluno construir os conceitos matemáticos, provocando com problemas interessantes, mas, sobretudo, tem possibilitado ao educando ter contato com a Matemática Cientifica.

Ao contrário da ALD, a AES ao priorizar uma abordagem exclusivamente profunda tem impedido que os alunos percebam como relacionar os conteúdos vistos no ensino superior com os conteúdos exigidos na educação básica e conforme aponta Lima (2007) tem-se favorecido o desenvolvimento das componentes de conceituação e manipulação, mas a falta de aplicação é outro problema que precisa ser resolvido.

Considerações finais

Primeiramente gostaria de começar concluindo, como é árduo o trabalho do pesquisador! Realizar uma pesquisa científica, tendo em vista todos os cuidados que ela exige, visando garantir, tanto sua credibilidade quanto um mínimo de excelência, principalmente em educação, e ainda mais, especificamente na área de Matemática, é tão desafiador como tratar com absoluta eficiência o tema que se decide adotar.

Felizmente, mesmo cientes dessas dificuldades, não são poucos os pesquisadores que ousam seguir por esses caminhos, ainda que motivados de formas diferentes e adotando muitas vezes perspectivas totalmente contrárias, eles tendem a convergir para um ponto comum: a busca pela melhoria do ensino. Além disso, por melhor que seja uma proposta de ensino, não existe uma solução única (utopia), capaz de abranger todas as variáveis que interferem nesse processo tão complexo que é o âmbito educacional, mas a despeito disso ainda continuamos, tentando contribuir, certos de que o segredo para a melhoria no ensino de Matemática se encontra no esforço e sucesso de todas essas ações conjuntas.

E nessa perspectiva, nossa discussão buscou refletir sobre as orientações de nossos documentos norteadores, e isso nos possibilitou concluir que, um de seus grandes anseios, com relação ao ensino de Matemática, consiste em propiciar ao aluno um ensino que lhe seja, antes de tudo, mais "útil à vida", ou em outras palavras, um ensino diretamente relacionado com as necessidades práticas de nosso cotidiano, o que evidentemente, denuncia a falta de *aplicações* no ensino.

Não discordando, da necessidade iminente de se sanar esse déficit, contudo, ainda relembramos dois fatos, apontados por Lima (2007), que certamente pesam a favor de um ensino de Matemática com qualidade, o primeiro deles nos afirma que, o bom êxito no ensino depende da abordagem equilibrada das três componentes (*conceituação, manipulação e aplicações*) que constituem o processo de ensino e aprendizagem, pois quando o ensino de Matemática respeita esse balanceamento, tende a despertar o interesse do aluno, não apenas preparando-lhe para empregar as técnicas aprendidas no ensino, mas sobretudo, ajudando-lhe a adquirir habilidades como as de: discernir, organizar, pensar e agir; o segundo, e não menos importante visa reforçar, em síntese, o que temos enfatizado nesse estudo, o sucesso das aplicações no ensino dependem intimamente da conceituação, pois os problemas em nosso dia a dia não aparecerão junto com fórmulas.

Mas infelizmente, ao considerar o ensino de Matemática na Educação Básica, constata-se que esse, já há algum tempo têm dado ênfase à manipulação dos resultados, sem se preocupar antes em justificar sua validade, e dessa maneira têm cada vez mais, internalizado nas práticas de ensino, o "método peremptório", o que segundo Lima (2007, p. 158) consiste em declarar verdadeiras certas afirmações sem justificá-las, e um dos graves problemas como já temos dito, é que com isso, retira-se do ensino de Matemática, nessa etapa, um de seus maiores méritos: a capacidade de apresentar argumentações lógicas e convincentes que possibilitam ao usuário da Matemática partir de hipóteses para chegar à conclusão.

Ainda nesse sentido, relembramos que esse tipo de conduta não só exclui o pensamento dedutivo, característica tão específica da Matemática e que a torna única, em relação às outras, como também impossibilita, independentemente da metodologia adotada, enxergar realmente um sentido para aquilo que se está estudando, uma vez que dificulta a apreensão dos conceitos. Além disso, esse tipo de ensino contribui negativamente para o aprendizado, pois ele no máximo, favorece a memorização indiscriminada de fórmulas, algoritmos e procedimentos. (BRASIL, 2002)

E mais do que isso, os impactos negativos desse ensino atingem, principalmente e profundamente, o estudante que opta por ingressar no curso de Matemática, quando este percebe a falta de conexão entre a Matemática escolar que o "preparou para a vida" e a Matemática científica presente apenas no meio acadêmico. Consequentemente, para esse estudante, lidar com as seguintes pautas, pelo menos a priori, será inevitável:

➢ Por que o rigor Matemático que em momento algum lhe fora exigido antes, agora é ponto de partida, para qualquer que seja a sua afirmação?

➢ Quanto à segurança que sentia ao lidar com problemas matemáticos, já não existiria mais, já que as incumbências do curso lhe remeteriam ao confinamento em sua zona de desconforto?

➢ Como admitir essa Matemática: algo completamente novo ou apenas uma faceta desconhecida da Matemática escolar?

Todos esses fatores nos fizeram colocar em evidência, mais uma vez na história, o problema da falta de continuidade entre o ensino de Matemática na Educação básica e o ensino de Matemática no Ensino superior. Esse problema já havia sido pauta por duas vezes na história, e como consequência, várias mudanças, em nível internacional, seriam feitas no ensino de Matemática da Educação Básica. Mas antes, de expormos nossas últimas considerações sobre esses ocorridos, fazia-se necessário também evidenciar que ações estão sendo desenvolvidas no intuito de amenizar esse problema.

E nesse sentido enxergamos o Programa da OBMEP, que tem atuado na Educação Básica, a partir de projetos que visam, de maneira geral, incentivar alunos e professores a aprofundarem seus conhecimentos em Matemática. Além do PROFMAT, que tem oportunizado aos professores da Educação Básica, se qualificarem a partir de uma formação matemática aprofundada e relevante para o exercício de sua docência.

O programa OBMEP tem sido avaliado positivamente, principalmente porque seus projetos tem contribuído de forma incisiva na melhoria do ensino de Matemática das escolas públicas que "abraçaram" o programa. Contudo, estudos como o de Soares (2014) evidenciam que o progresso alcançado no ensino dessa disciplina está intimamente relacionado com o tempo de envolvimento dessas escolas com o Projeto, o que nos leva a concluir que ações desse tipo precisam não só ser mais valorizadas, mas, também expandidas e realizadas de forma contínua no processo de ensino aprendizagem. Desse modo, têm se atentado que políticas como a do programa precisam ser inseridas nas escolas brasileiras, afim de se despertar nos alunos o gosto pela Matemática e consequentemente evocar a melhoria do aprendizado dos alunos.

Ainda nesse sentido, mesmo mantendo seu principal objetivo de encontrar alunos talentosos nessa área, o projeto, precisa ainda ser muito mais abrangente. E dessa forma há que se pensar em ações que favoreçam, o desenvolvimento dos alunos em geral. É certamente um grande desafio, mas o ensino de Matemática carece hoje mais do que nunca, que sua importância seja evidenciada. Há que se admitir, que voltar nosso olhar somente para dentro da própria Matemática certamente não será suficiente para a melhoria do ensino, mais ainda assim se faz, no mínino, necessário. Para encerrarmos nossas considerações sobre a OBMEP, deixamos por último o projeto PIC, pois suas iniciativas têm contribuído eficazmente para amenizar o principal problema que abordamos nesse estudo, articulando o ensino da Matemática escolar com a Matemática Científica.

O programa tem buscado construir os conhecimentos matemáticos de maneira fundamentada, logicamente com cautela, sem sobrecarregar os alunos com demonstrações de resultados óbvios, conforme ressalta Lima (2007), nesse nível, não se deve perder tempo provando resultados intuitivamente evidentes, isto é, provar a validade de algo que todos já se convenceram, (como por exemplo, a propriedade comutativa da adição). Além disso, o programa tem usado uma linguagem precisa, sem ser demasiadamente carregada, tendo ainda o cuidado de expressá-la de maneira inteligível tendo em vista o nível de desenvolvimento cognitivo do aluno. Para tanto, o programa vai gradativamente apresentando aos alunos os principais elementos que constituem a Matemática Científica.

No entanto, como já dissemos, as ações desse projeto beneficiam apenas uma minoria: os alunos medalhistas na prova da OBMEP. Essa forma seletiva, que condiciona os alunos que poderão participar do PIC, não está de, sobremaneira, isenta de falhas, e nos leva a concluir, que o compromisso que a escola tem para com o preparo dos alunos para realização da prova, acaba sendo extremamente relevante, e nesse sentido como bem sabemos muitos são prejudicados, pois tem faltado informação sobre a competição e suas premiações e principalmente incentivo, já que o aluno não tem sido preparado para a competição, e o único contato deste realmente o com a abordagem matemática feita pela OBMEP ocorre somente no dia da prova. (ALVES, 2010)

Ressaltamos ainda que este preparo poderia ser feito utilizando-se os "Bancos de questões", já que foram elaborados com essa finalidade, e que tem se mostrado extremamente relevantes para o bom desempenho dos alunos nas avaliações da OBMEP. (BIONDI; VASCONCELOS; MENEZES, 2009). Portanto, é necessário que haja uma parceria mais sólida entre a OBMEP e a escola. Trata-se de realmente estreitar os laços entre as duas, isso tanto possibilitará a OBMEP atuar de forma mais incisiva na escola e ainda enxergar os talentos que permanecem escusos, mas também possibilitará a escola implementar ações da OBMEP em seu Projeto Político Pedagógico (PPP) e dessa forma não só assumir o compromisso de aderir ao projeto, como se beneficiar da qualidade que ele tem propiciado ao ensino de Matemática.

Além da OBMEP, desconhecemos hoje outras ações que hajam de encontro com nossa perspectiva sobre o ensino de Matemática na Educação Básica. Mas, no entanto, cabe-nos informar, ao leitor, que já em vias de conclusão deste trabalho, chegou ao nosso conhecimento o Projeto Klein, um projeto idealizado pela Comissão Internacional de Ensino da Matemática (ICMI) e pela União Internacional de Matemática (IMU) que tem como princípio estabelecer conexões entre os tópicos e as abordagens dos professores do ensino médio ou de cursos de graduação e a área da Matemática, levantando discussões em torno deste enfoque. Os primeiros comentários parecem seguir nossa linha de discussão, entretanto sobre o caminho pelo o qual o mesmo tem sido conduzido, nada sabemos afirmar, pois não tivemos tempo para nos aprofundar sobre o assunto, e assim o deixamos como sugestão para futuras pesquisas (ver referência [77]).

Como já antecipamos não seria suficiente compreender só o hoje, e assim decidimos embarcar numa viagem ao tempo que nos propiciou adquirir um melhor entendimento sobre nossa problemática, as tentativas promovidas para saná-la, mas principalmente, que lições aprendemos com elas. Como procuramos mostrar agora...

Quando se pensa em inserir no ensino de Matemática da Educação Básica aspectos da Matemática Científica, não se pode deixar de considerar o Movimento da Matemática Moderna, cujo auge ocorreu entre as décadas de 60 e 70, pois entender como a escola se apropriou das ideias desse movimento, atribuindo importância à teoria dos conjuntos, a axiomatização, às estruturas algébricas e à lógica, faz-se tão necessário ontem como hoje pois grandes são suas lacunas, o que aliás, tem sido uma preocupação recente de muitos pesquisadores na área da Educação Matemática.

Embora muitos estudos considerem que o Movimento da Matemática Moderna teve sua origem a partir das reivindicações de Félix Klein e que o mesmo se dividiu em duas etapas: uma antes da 2ª guerra Mundial e outra após, este estudo não só considerou, como também se convenceu, principalmente, em análise ao estudo de Miorim (1995), que realmente se trataram de dois movimentos distintos. Certamente a causa que levaram ambos a promover suas reformas foi a mesma: estabelecer uma conexão entre o ensino de Matemática nos níveis médio e superior, a partir, da "modernização" desse ensino na Educação Básica, entretanto os objetivos estabelecidos para atingir tal fim comum não seriam os mesmos, conforme evidenciamos a seguir.

Enquanto o Primeiro Movimento Internacional de Modernização do Ensino de Matemática buscou com afinco erradicar do ensino secundário a visão excessivamente rigorosa e lógica na abordagem dos conteúdos; o Movimento da Matemática Moderna faria exatamente o contrário abusaria do rigor e silogismo em sua abordagem. Além disso, se por um lado, o "Primeiro Movimento" considerava as aplicações matemáticas indispensáveis à formação dos estudantes; por outro lado, no MMM haveria muita conceituação em excesso, pouca manipulação e praticamente nenhuma aplicação (LIMA, 2007).

Mas haveria também semelhanças, pois ambos buscariam unificar as várias áreas da Matemática, o "Primeiro Movimento" justificaria essa possibilidade a partir, da inserção do estudo de Funções na Educação Básica; já o MMM procuraria unificar os diversos assuntos da Matemática, na mesma linha que o outro movimento, porém, buscaria fazê-lo com maior profundidade, defendendo assim a introdução da Teoria de conjuntos no ensino escolar. Ainda sobre isso, assegurava Papy (1967), seria a partir do "universo dos conjuntos" que a Matemática reencontraria sua unidade.

As diferenças nas propostas dos dois Movimentos reforçam nossa afirmação. No entanto ainda nos permite concluir que, principalmente no Brasil, essa visão de um único movimento é compreensível, já que as ideias do "Primeiro Movimento" apenas chegaram em nosso país momentos antes em que as ideias que guiaram o MMM começavam a florescer e consequentemente as discussões realizadas pelos congressos de Matemática ocorridos em nosso país não tiveram que mudar o "objetivo geral (modernizar o ensino de matemática na Educação Básica" mas apenas reformular de maneira bastante significativa os "objetivos específicos (que meios seriam usados para atingir esse fim)". (MIORIM, 1995)

Aliás nosso estudo revelou, mesmo olhando para momentos específicos, o quanto todos os avanços no ensino chegaram ao Brasil tão tardiamente. Um país que por muito tempo dominado pela doutrina jesuítica, tratou a Matemática com desdenho, sendo esta uma disciplina que sequer fazia parte do currículo nas escolas secundárias, em um período curto de tempo, acabou assumindo como disciplina indispensável a formação do cidadão. Tudo reflexo das mudanças provocadas pelas 1ª e 2ª guerras mundiais, que levaria vários países no mundo, a buscar incessantemente por avanços científicos e tecnológicos, e sempre atrás, buscaríamos por esse objetivo influenciado pelas ideias de outros.

O "Movimento da Matemática Moderna" de forma muito mais abrangente que o "Primeiro Movimento" faria eclodir suas ideias por todo o mundo, de modo que as mesmas em muitos lugares não chegariam a ser assimiladas, mas apenas seriam impostas como uma nova tendência a ser seguida, e isso geraria interpretações variadas para sua aplicação no ensino, o que obviamente contribuiu para o seu declínio, como foi apontado por Kline (1976).

Essas ideias, conforme mencionamos no capitulo 2, seguiriam duas vertentes: a americana e a européia e mesmo dentro de cada uma delas se encontraria abordagens diferentes. No Brasil, prevaleceriam as ideias advindas da vertente americana (MIORIM, 1995). E desse modo, quando Morris Kline, em sua relutância ao movimento, apresentou em sua obra argumentos convincentes sobre o fracasso do MMM, isso culminaria no fim do movimento não só nos Estados Unidos, mas também aqui.

E, posteriormente essa queda do MMM seria percebida em todo o mundo.

Uma das principais críticas de Kline seria relacionada ao exagero do método dedutivo na abordagem dos conteúdos, aliado ao excessivo formalismo e simbolismo empregado na linguagem de conjuntos, despertava nos alunos aversão pela Matemática e empobrecia o espírito da disciplina. (KLINE, 1976)

Mas nem todas as iniciativas desse movimento foram um fracasso total. O movimento em si é marcado por grandes lacunas o que tem dificultado compreender as diferentes assimilações e praticas de ensino. No entanto como abordamos neste trabalho, uma experiência evidenciada por Costa (2014) foi bem sucedida: a abordagem do MMM no Colégio de São Bento do Rio de Janeiro.

Como vimos nesse colégio o MMM resistiu mesmo após o seu declínio no país e só veio a ser destituído do ensino de Matemática no colégio já no início deste século. O sucesso que podemos observar esteve associado principalmente a uma ação que levou em consideração não só a importância do rigor matemático mas, a escolha adequada da didática que facilitaria a aprendizagem matemática nessa perspectiva.

Toda fundamentação teórica se basearia na proposta de ensino para o MMM, de Georges Papy, que enfatizou a importância do ensino da teoria de conjunto a partir de uma construção conceitual da noção de conjunto, que favorecesse a participação do aluno. Essa visão de Papy estaria intimamente relacionada à teoria psicogenética de Jean Piaget, o que nesse sentido, estaria em concordância as ideias de Kline, quando este afirmou o que faltou ao MMM. (PINTO, 2008)

Mas certamente o sucesso observado nessa experiência teve ainda como personagem principal o monge e professor de Matemática do colégio Dom Ireneu, que não só estaria apto a abraçar as ideias de Papy, mas também tomaria todas as medidas preventivas que garantiriam esse resultado, conforme relembramos algumas abaixo:

- ➢ Convencer as pessoas (gestão escolar, pais dos alunos e mídia) sobre os possíveis ganhos com a inserção do método Papy;
- ➢ Preparar os professores para conduzir esse novo método de ensino;
- ➢ Adequar as orientações de Papy à realidade brasileira.

Essa experiência nos mostra que o envolvimento de toda comunidade escolar durante um processo de mudança como o que foi descrito aumentam as chances de sucesso. E mais, elas evidenciam que é possível sim abordar conceitos da Matemática Científica na Educação Básica, desde que se entenda que essa abordagem seja feita de maneira cautelosa.

O capítulo anterior nos permitiu concluir que o ensino de Matemática hoje assim como ontem exige mudanças. Aliás, a aprendizagem matemática encontra-se em decadência mais do que antes, a última avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), realizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) revelou que o ensino de Matemática, além de ficar muito abaixo da média dos países considerados referência em qualidade de educação, ainda piorou em relação ao desempenho obtido na ultima avaliação. (VILARDAGA, 2019)

Em todo esse cenário certamente a abordagem superficial que identificamos na ALD, não é a única responsável por esse resultado, mas de certa forma tem sim a sua parcela de culpa. Nesse sentido Paiva (2008) relata que a adoção de uma abordagem à aprendizagem de superfície se encontra estatisticamente associada sempre a rendimentos escolares inferiores.

Contudo, em nossa luta por convencer o leitor da extrema urgência em atribuir à Matemática escolar alguns aspectos da Matemática Científica, acabamos percebendo paulatinamente ao longo dessa pesquisa, o quanto o professor é uma "peça chave" em todo esse processo. Isso nos mostra o papel fundamental do educador em todo esse processo de ensino e aprendizagem, e que não basta se basear em uma ótima metodologia de ensino ou promover uma abordagem mais aprofundada no ensino, ou ainda, ter um excelente livro didático se faltar capacitação ao professor.

E assim, mais uma vez, reafirmamos tudo quanto temos discutido, a Matemática escolar precisa ser justificada não só por sua utilidade no dia a dia, mas também por si própria, pois esse é pelo menos um dos suportes que poderão propiciar, de fato, uma aprendizagem significativa. Porém, concluímos que nada do que almejamos poderá ser viabilizado se os professores primeiramente não se conscientizarem sobre a importância de uma formação contínua, e então num segundo momento começarmos a exigir dos órgãos competentes cursos de formação.

Encerramos acreditando ter proporcionado ao leitor, em vários momentos deste trabalho, uma leitura prazerosa, e dessa forma ter contribuído para que ele acompanhasse com tranquilidade nossa discussão. Esperamos ter sido claros, e mesmo não abordando tudo o quanto tínhamos planejado para este trabalho, como por exemplo: "Quais conteúdos da Matemática Científica são passíveis de serem trabalhados na Educação Básica?", deixamos também como sugestão para outros trabalhos, julgamos ter argumentado o suficiente para o alcance de nossos objetivos.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, W. J. S. *O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública.* Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUCSP, 2010.

[2] ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N. *Uma leitura sobre as origens do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil.* Tópicos Educacionais, Recife, n.2, jul/dez. 2016.

[3] ARARIBÁ, M.M. *Araribá - Mais Matemática.* Ensino Fundamental: Anos finais, Moderna, São Paulo, 2018.

[4] BALESTRI,R. E PATARO, P. M. *Matemática Essencial.* Ensino Fundamental: Anos finais, Scipione S.A., São Paulo, 2018.

[5] BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini.* Ensino Fundamental: Anos finais, Moderna, São Paulo, 2018.

[6] BIGGS, J. *The Study Process Questionnaire (SPQ) Manual.* Hawthorn: Australian Council for Educational Research, 1987.

[7] BIGGS, J. *The role of the metacognition in enhancing learning.* Australian Journal of Education, nº. 32, p. 127-138, 1988.

[8] BIGGS, J. *What do inventories os students ´learning processes really measure? A theoretical review and clarification.* British Journal of Educational Psychology, nº. 63, p. 3-19, 1993.

[9] BIONDI, R. L. ; VASCONCELLOS, L. M. ; MENEZES-FILHO, N. *Avaliando o Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas no*

desempenho de matemática nas avaliações educacionais. In: 31º Encontro da Sociedade Brasileira de Econometria, 2009, Foz do Iguaçu. Anais... Encontro Brasileiro de Econometria - SBE, 2009.

[10] BOYER, C. B. *História da matemática.* Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[11] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 26 ago. 2019.

[12] BRASIL. *Lei n. 9.394, de 1996. Diretrizes e bases da Educação Nacional.* Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 26 ago. 2019.

[13] BRASIL. *Guia digital do PNLD 2020: Matemática.* Ministério da Educação. Brasília: MEC. Disponível em: <https://pnld.nees.com.br/pnld_2020/componente-curricular/pnld2020-matematica> Acesso em: 01 out. 2019.

[14] BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: nº 4.024/61.* Senado Federal. Brasília: 1961.

[15] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* MEC/Secretaria de Educação Básica. Brasília: 2002.

[16] BÚRIGO, E. Z. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60.* Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Sul, Porto Alegre, 1989.

[17] CASTRUCCI, B. e GIOVANNI J., J. R. *A conquista da Matemática.* Ensino Fundamental: Anos finais, FTD, São Paulo, 2018.

[18] CGEE. *Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas - OBMEP 2010.* Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE), 2011.

[19] CHAVANTE, E. *Convergências Matemática.* Ensino Fundamental: Anos finais, SM, São Paulo, 2018.

[20] CLARAS, A. F. *A teoria dos conjuntos proposta pelo NEDEM: do ideário do MMM às práticas escolares.* Dissertação (Mestrado em Educação). Centro de Teologia e Ciências Humanas, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba-PR, 2010.

[21] CLARAS, A. F.; PINTO, N. B. *O Movimento da Matemática Moderna e as iniciativas de formação docente.* 2008. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2008/anais/pdf/863_662.pdf>. Acesso em 30 de ago. 2019.

[22] COSTA, L. M. F. *O Movimento da Matemática Moderna no Brasil - o caso do Colégio de São Bento do Rio de Janeiro.* Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática - UFRJ, 2014.

[23] D'AMBROSIO, B. S. *The dynamics and consequences of the Modern Mathematics Reform Movement for Brazilian Mathematics Education.* 1987. Tese (Doutorado). Indiana University. Indiana, 1987.

[24] D'AMBROSIO, B. S. *Como ensinar Matemática hoje?* Temas e debates, SBEM, Ano 2, nº 2, p. 15-19, 1989.

[25] D'AMBRÓSIO, U. *A Álgebra Moderna e a Escola Secundária.* Atualidades Pedagógicas, nº 49, p. 15-19, 1961.

[26] DANTE,L. R. *Teláris Matemática.* Ensino Fundamental: Anos finais, Ática, São Paulo, 2018.

[27] DASSIE, B. A. *Euclides Roxo e a constituição da Educação Matemática no Brasil.* Tese de Doutorado. Departamento de Educação - PUC-RJ, 2008.

[28] DASSIE, B. A. *A Matemática do curso secundário na Reforma Gustavo Capanema.* Dissertação de Mestrado. Departamento de Educação - PUC-RJ, 2001.

[29] DIAS, A.L.M. *Da profissionalização dos professores à Matemática Moderna na Bahia: as contribuições de Isaías Alves e de Martha Dantas.* In: BURIGO, E.Z., FISCHER, M.C.B., SANTOS, M.B. (Orgs.) A matemática moderna nas escolas do Brasil e Portugal: novos estudos. 2008.

[30] DIAS, A.L.M. et al. *Educadoras matemáticas: memórias, docência e profissão.* Martha Dantas. In: VALENTE, W. R. (Org.) São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

[31] ENTWISTLE, N. J. *Motivational factors in students' approaches to learning.* In Schmeck, R. R. (Org.), Learning strategies and learning styles, p. 21-51. New York: Plenum Press, 1988.

[32] FERREIRA, M. C. C. *Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica: a álgebra na escola e na formação do professor.* Tese de Doutorado em Educação Matemática. Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, 2014.

[33] FERREIRA, N. C. *Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática.* Tese de Doutorado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2017.

[34] FONSECA, J. J. S. *Metodologia da pesquisa científica.* Fortaleza: UEC, 2002.

[35] FONTES, M. A. *Motivação e estratégias de aprendizagem segundo a teoria das abordagens à aprendizagem: implicações para a prática de ensino-aprendizagem. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação* Araraquara/SP, v. 11, n. esp. 3, p.1727-1744, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.21723/riaee.v11.n.esp3.9081>. Acesso em: 25 out. 2019.

[36] GATTI, B. A. *Formação de professores e carreira: problemas e movimentos de renovação.* Campinas, SP: Autores Associados, 1997. 135 p.

[37] GERAÇÃO, A. M. *Geração Alpha Matemática.* Ensino Fundamental: Anos finais, SM, São Paulo, 2018.

[38] GIL, A. A. *Métodos e técnicas de pesquisa social.* 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2007.

[39] GOMES, C. M. A. *Perfis de estudantes e a relação entre abordagens de aprendizagem e rendimento escolar.* Psico, v. 41, n. 4, p. 503-509, 2010.

[40] GROSSI, E. P. *Uma arqueologia dos saberes do Geempa.* Revista GEEMPA (35 anos). Porto Alegre, n. 10, p. 11-39, set. 2005.

[41] HEFEZ, A. *Iniciação à Aritmética.* IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

[42] HEFEZ, A. *MA-14 Aritmética.* IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[43] HEFEZ, A. *MA-14 Aritmética.* IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[44] KALEFF, A. M. M. R. *Matemática Moderna - sua origem e aspectos de seu desenvolvimento em alguns países ocidentais.* Boletim- GEPEM, Rio de Janeiro, v. 25, p. 03-09, 1989.

[45] KAPLAN, R. *O nada que existe - uma história natural do zero.* Rio de Janeiro: Rocco, 2001.

[46] KILPATRICK, J.; RICO, L. *Educación Matemática y investigación.* Madrid: Editorial Sintesis, 1992.

[47] KILPATRICK, J. *The new math as an international phenomenon.* ZDM, n.. 44, p. 563-571, 2012.

[48] KLEIN, F. *Matemática elemental desde um punto de vista superior.* Trad. Alberto Araújo. Madrid: Nuevas Graficas, 1927.

[49] KLEIN, F. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Aritmetics, Algebra, Analysis.* USA: Breinigsville, 2009.

[50] KLINE, M. *O fracasso da Matemática Moderna.* São Paulo: IBRASA, 1976.

[51] LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. *Fundamentos de metodologia científica.* 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2003.

[52] LARNIOH, M. T. *Chika Ofili: 12-year-old Nigerian awarded for making mathematics easy to learn.* Disponível em:https://www.pulse.com.gh/bi/lifestyle/chika-ofili-12-year-old-nigerian-awarded-for-making-mathematics-easy-to-learn/w246s09. Acesso em: 30 dez. 2019.

[53] LIMA, E. L. *Matemática e ensino.* 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[54] LONGEN, A. *Apoema.* Ensino Fundamental: Anos finais, Editora do Brasil, São Paulo, 2018.

[55] LUCKESI, C. C. *Filosofia da Educação.* São Paulo: Cortez, 1994.

[56] MARTON, F.; SALJO, R. *On qualitative differences in learning: I Outcome and Process.* British Journal of Educational Psychology, nº 46, p. 4-11, 1976a.

[57] MARTON, F.; SALJO, R. *On qualitative differences in learning: II. Outcome as a function of the learner's conception of the task.* British Journal of Educational Psychology, nº 46, p. 115-127, 1976b.

[58] MENDES, I. A.; SILVA, C. A. F. *Pesquisa en Historia de la Matemática. geneaolgías, conexiones y difusiones: el ejemplo del grupo GHEMAT.* Revista Paradigma, Vol. XXXIX, Nro. Extra 1, p. 1-30, 2018.

[59] MIORIM, M. A. *O ensino de matemática: evolução e modernização.* Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 1995.

[60] MONROE, P. *História da educação.* São Paulo: Nacional, 1939.

[61] MOREIRA, P. C. *O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica.* Tese do Programa de Pós-Graduação. Faculdade de Educação - UFMG, 2004.

[62] MOREIRA, P .C. *"3+1 e suas (In)variantes (reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na licenciatura em matemática)".* Bolema, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, 2012.

[63] MORGADO, A. C. E CARVALHO, P. C. P. *MA-12 Matemática Discreta.* IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[64] *OBMEP. Apresentação.* Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 24 ago. 2019.

[65] *OBMEP. Regulamento.* Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.html>. Acesso em: 02 de out. 2019.

[66] *OBMEP. Candidatos Habilitados.* Disponível em: <http://www.obmep.org.br/exibirCandidatosHabilitados2019.htm#GO>. Acesso em: 10 de dez. 2019.

[67] PAIVA, M.O.A. *Abordagens à aprendizagem e abordagens ao ensino: Uma aproximação à dinâmica do aprender no Secundário.* Tese de Doutorado, Universidade do Minho, Braga, 2008.

[68] PIC. *Aritmética.* Disponível em:<https://www.youtube.com/playlist?list=PLrVGp617x0hC8WkPHtM3IjoOiiyJs-hHh>. Acesso em: 15 ago. 2019.

[69] PINTO, N. B. *Marcas e implicações da Matemática Moderna nas práticas escolares.* Revista Educação e Linguagem (Online), vol. 2, p. 1-15, 2008.

[70] PONTE, J. P. *A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática.* Educação Matemática em Revista, Nº 11A, p. 3-8, 2002.

[71] PROFMAT. *PROFMAT.* Disponível em: <https://www.youtube.com/channel/UCVRVgVxJw4JzSm6f0lRqUyA>. Acesso em: 12 set. 2019.

[72] ROSA, C. M. E SANTOS, F. F. T., *Evasão no IME/UFG: o ponto de vista dos alunos excluídos.* Cotidianos, Políticas e Avaliação, Revista Teias, vol. 19, n. 54, 478-494, Jul./Set., 2018a.

[73] ROSA, C. M. E SANTOS, F. F. T., *A retenção nos cursos de graduação do IME/UFG.* Revista Horizontes, vol. 36, n. 3, 200-216, Set./Dez., 2018b.

[74] ROXO, E. *A matemática na escola secundária.* São Paulo: Nacional, 1937.

[75] SAMPAIO, F. A. *Trilhas da Matemática.* Ensino Fundamental: Anos finais, Saraiva, São Paulo, 2018.

[76] SAGI; MDS *Talentos escondidos: os beneficiários do Bolsa Família medalhistas das Olimpíadas de Matemática.* Caderno de Estudos: Desenvolvimento Social em Debate nº30, Secretaria de Avaliação e Gestão da Informação, Ministério de Desenvolvimento Social, 2018. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Caderno_de_Estudos_30_OBMEP.pdf>. Acesso em: 12 set. 2019.

[77] SBM. *Projeto Klein de Matemática.* Disponível em: <https://klein.sbm.org.br/>. Acesso em: 02 dez. 2019.

[78] SEDUC. *Escolas em Goiás.* 2019. Disponível em: <http://www.seduc.go.gov.br/escolas/>. Acesso em: 10 dez. 2019.

[79] SILVA, J. P. *Álgebra na escola básica versus álgebra na licenciatura: onde se encontra o x da questão?* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-SP, 2015.

[80] SILVEIRA, E. *Matemática: compreensão e prática.* Ensino Fundamental: Anos finais, Moderna, São Paulo, 2018.

[81] SOARES, F. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso?* Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática - PUC-RJ, 2001.

[82] SOARES, C. M. M.; CIPRIANO, E. L. G.; SOARES, J. F. *Impacto da Olimpíada Brasileira de Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho em matemática na Prova Brasil, ENEM e PISA.* 2014. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/420951.o > Acesso em: 12 set. 2019.

[83] SOUZA,J. *Matemática: Realidade e Tecnologia.* Ensino Fundamental: Anos finais, FTD S.A, São Paulo, 2018.

[84] TECNOMETRICA. *OBMEP e PICJr: Análise de dados históricos OBMEP e ENEM.* Tecnometrica, 2015. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/988528.o> Acesso em: 12 set. 2019.

[85] VALENTE, W. R. *História da educação matemática: interrogações metodológicas.* Florianópolis: UFSC. Revista Eletrônica de Educação Matemática. p. 28-49, 2007.

[86] VALENTE, W. R. *Livro didático e educação matemática: uma história inseparável.* Zetetike (UNICAMP), vol. 16, p. 149-171, 2008.

[87] VÁZQUEZ, M. S. *El Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (1958-1973): nota histórica.* Revista Diálogo Educacional, v.8, n. 23, p. 633-645, set./dez., 2008.

[88] VILARDAGA, V. *A tragédia da educação* Disponível em: <https://istoe.com.br/a-tragedia-da-educacao/>. Acesso em: 05 dez. 2019

[89] VITTI, C. M. *Movimento da Matemática Moderna: Memória, Vaias e Aplausos.* Tese de Doutorado. Universidade Metodista de Piracicaba. Piracicaba-SP, 1998.

[90] VOMERO, M. F. *A importância do número zero.* 2001. Disponível em: <https://super.abril.com.br/ciencia/a-importancia-do-numero-zero/>. Acesso em: 03 dez. 2019.

[91] WIELEWSKI, G.D. *Políticas educacionais e a oficialização da Matemática Moderna no Brasil.* In: BURIGO, E.Z., FISCHER, M.C.B., SANTOS, M.B. (ORGS.) *A matemática moderna nas escolas do Brasil e Portugal: novos estudos.* 2008.