



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



INTRODUÇÃO À TEORIA ERGÓDICA DE BILHAR

THIAGO MARCEL DUARTE COENGA

Goiânia

2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

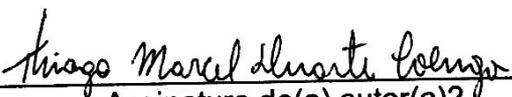
Nome completo do autor: Thiago Marcel Duarte Coenga

Título do trabalho: Introdução à teoria ergódica de bilhar

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 11 / 10 / 2019

1 Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

2 A assinatura deve ser escaneada.

INTRODUÇÃO À TEORIA ERGÓDICA DE BILHAR

THIAGO MARCEL DUARTE COENGA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon

Goiânia - Goiás

Outubro 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Coenga, Thiago Marcel Duarte
INTRODUÇÃO À TEORIA ERGÓDICA DE BILHAR [manuscrito] /
Thiago Marcel Duarte Coenga. - 2019.
ix, 109 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RB), Goiânia, 2019.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. FLUXO DE BILHAR. 2. TEORIA ERGÓDICA. 3. MEDIDA INVARIANTE. 4. BILHAR. 5. APLICAÇÃO DE COLISÃO. I. Alarcon, Eduardo Arbieto, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **04** da sessão de Defesa de Dissertação de **Thiago Marcel Duarte Coenga**, que confere o título de Mestre em Matemática em Rede -PROFMAT , na área de concentração em Matemática profissional.

Aos dezesesseis dias do mês de setembro de dois mil e dezenove, a partir das 14:00h, no LEMAT IME, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “ **Introdução à Teoria Ergódica de Bilhar** ”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Dr. Eduardo Abieto Alarcon, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Bryon Richard Hall - (IME-UFG), Doutor Armando Mauro Vasquez Corro (IME-UFG-suplente), membro titular externo; Júlio César Ferreira (IF-Goiano) presencialmente **sem** o uso de video conferencia. Durante a arguição os membros da banca **não fez** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Dr. Eduardo Abieto Alarcon, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos dezesesseis dias do mês de setembro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Abieto Alarcon, Professor do Magistério Superior**, em 16/09/2019, às 15:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **Júlio César Ferreira, Usuário Externo**, em 11/10/2019, às 19:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **Bryon Richard Hall, Usuário Externo**, em 08/11/2019, às 19:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0830005** e o código CRC **7292E6A1**.

Referência: Processo nº 23070.028881/2019-13

SEI nº 0830005

Criado por sosteneg, versão 6 por sosteneg em 16/09/2019 14:15:06.

Este trabalho é dedicado

*aos meus filhos João Gabriel e Anne Gabriele, pois em
tudo que faço, eles estão sempre em meus pensamentos*

Agradecimentos

Agradeço

Primeiramente a Deus,

À minha esposa Dayane Alves Guimarães que meu deu o suporte para que eu pudesse me dedicar a escrita dessa dissertação,

Aos meus pais Wanderley Edson Sebastião Coenga e Maria de Lourdes Duarte, pelo amor, carinho e por terem me apoiado nos meus estudos,

Ao professor, Eduardo Arbieto Alarcon, pela excelente orientação, pela paciência, pelos conhecimentos transmitidos, pela confiança e atenção,

A todos os professores do departamento de matemática do IME-UFG/GO(Goiânia), em especial aos professores do PROFMAT que contribuíram para minha formação por meio das disciplinas que ministraram.

À banca examinadora, pela revisão e pela contribuição

À CAPES, pelo apoio financeiro,

Aos meus colegas de pós-graduação pelo convívio bastante agradável, pelos momentos de estudos e pelas muitas risadas,

A todos que de alguma forma contribuíram para realização deste trabalho.

Resumo

O trabalho tem como objetivo descrever o movimento de uma partícula no interior de uma mesa bilhar através de uma aplicação bilhar e determinar uma fórmula para variação do movimento dessa partícula. Outro objetivo era mostrar a aplicação desse conhecimento no ensino básico.

Palavras-chave

Bilhar, Fluxo de Bilhar, Aplicação de Colisão, Sistema Dinâmico, Ponto discreto, Curva regular, Teoria Ergódica, Medida invariante do Bilhar.

Abstract

The work aims to describe the movement of a particle inside a pool table through a billiard application and to determine a formula for varying the motion of that particle. Another objective was to show the application of this knowledge in basic education.

Keywords

Billiards, Billiard Flow, Collision Map, Dynamical Systems, Discrete point, Regular curve, Ergodic Theory, Invariant Measure of the Map.

Lista de Figuras

1.1	Mudança nos dados iniciais	3
2.1	Disco aberto de centro $(-2, 3)$ e raio 3	13
2.2	Disco fechado de centro C e raio r	14
2.3	Ponto interior, exterior e fronteira	16
2.4	Curva não-conexa	19
2.5	Reta r que passa por C e paralela a v	23
2.6	Aproximação da circunferência da elipse	31
2.7	Vetor tangente e ortogonal ao círculo f em s	35
2.8	Vetor tangente e ortogonal à parábola f em s	35
2.9	Vetor normal $n(s)$ e vetor $f''(s)$	36
3.1	Curva suave por partes	57
3.2	Semicírculo	61
3.3	Γ com 4 componentes e duas cúspides	62
3.4	Círculos concêntricos	64
3.5	Círculos não-concêntricos	64
3.6	Dupla componente dispersora-flat	67
3.7	Movimento com 3 colisões distintas dentro de um círculo	68
3.8	Relação vetorial numa colisão da partícula pontual com a curva	69

3.9	Ângulos de incidência e reflexão	70
3.10	Vetor velocidade de incidência e de reflexão	72
3.11	Teo 4.4.1: relação entre os vetores de incidência e de reflexão	73
3.12	Vetores componentes	74
3.13	30 graus	75
3.14	45 graus	75
3.15	Círculo unitário com segmento radial removível	75
3.16	Fluxo e fim do movimento	77
3.17	Determinar o próximo ponto colisão no círculo	80
3.18	Fluxo em coordenadas sem colisão	85
3.19	Fluxo em coordenadas com colisão	86
3.20	Fluxo em coordenadas em duas colisões	87
3.21	Ângulos em duas colisões	88
4.1	Reflexão de uma partícula	98
4.2	Reflexão de uma partícula numa mesa circular	98
4.3	Reflexão de uma partícula numa mesa circular	99
4.4	Órbita na mesa circular: Segmento de reta	100
4.5	Órbita triangular na mesa circular	100
4.6	Órbita triangular na mesa circular	101
4.7	Mesa retangular com eixos em AB e AD	102
4.8	Encaçapar sem colidir com a mesa	103
4.9	Encaçapar com uma colisão com a mesa	103

Sumário

Introdução	1
1 História do Modelo Bilhar	2
2 Preliminares	7
2.1 Topologia no \mathbb{R}^n	7
2.1.1 Espaço euclidiano \mathbb{R}^n	7
2.1.2 Produto interno e norma	9
2.1.3 Bolas	12
2.1.4 Conjuntos abertos e fechados	14
2.1.5 Compacto e conexo	17
2.2 Curvas e aplicações diferenciáveis em \mathbb{R}^n	19
2.2.1 Caminho diferenciável	19
2.2.2 Curva Suave no \mathbb{R}^n	22
2.2.3 Comprimento de uma curva	26
2.2.4 Reparametrização por comprimento de arco	32
2.2.5 Vetor normal	33
2.2.6 Curvatura	36
2.2.7 Aplicações diferenciáveis em \mathbb{R}^n	40

2.3	Medida e integração	42
2.3.1	σ -álgebra de Borel	42
2.3.2	Medida	47
2.3.3	Aplicações que preservam medida	49
2.4	Ergodicidade	52
3	Modelo bilhar e suas propriedades ergódicas	56
3.1	Aplicações na mesa de bilhar	56
3.1.1	Partícula pontual	56
3.1.2	Fronteira do bilhar	58
3.1.3	Aplicação colisão	65
3.1.4	Vetor velocidade da colisão	69
3.1.5	Aplicação ângulo da colisão	74
3.2	Aplicação ergódica bilhar	76
3.2.1	Fluxo vetorial do bilhar	76
3.2.2	Aplicação bilhar	79
3.2.3	Derivada da aplicação bilhar	85
3.2.4	Exemplos da Jacobiana	90
3.2.5	Medida invariante	92
4	Aplicação ao ensino básico	93
4.1	1ª aula - partículas dentro de uma região	93
4.2	2ª aula - mesa bilhar	95
4.3	3ª aula - reflexão na fronteira	97
4.4	4ª aula - polígonos regulares	99
4.5	5ª aula - caçapa	102

Introdução

O objetivo inicial deste trabalho era fazer um estudo dos bilhares e aplicá-lo no ensino básico. Depois buscou-se descrever explicitamente a aplicação bilhar de uma partícula. Logo surgiu uma questão, qual a probabilidade de uma partícula colidir com um subconjunto conexo da fronteira da mesa bilhar independente dos dados iniciais?

O capítulo 1 traz um breve histórico do surgimento desse tema. É ilustrado porque em tão pouco tempo houve uma forte e crescente procura pelo tema e quantos ocorreram no Brasil.

O capítulo 2 é voltado a preparar o leitor com toda uma gama de pré-requisitos para que entenda o que é uma mesa de bilhar e o que é necessário para entender o movimento de uma partícula pontual.

O capítulo 3 desenrola a teoria ergódica que nos diz sobre as aplicações que conservam medidas.

O capítulo 4 mostra como funciona o movimento de uma partícula dentro de uma mesa bilhar, como essa mesa deve ser e como as aplicações que envolvem a colisão com a fronteira interfere no seu movimento.

O capítulo 5 traz uma pequena sequência didática para alunos do ensino básico

Capítulo 1

História do Modelo Bilhar

O modelo bilhar trata-se do movimento de partículas no interior de uma mesa bilhar. O movimento das partículas pode ser decomposto nas posições e velocidades dessas partículas relativo a cada instante de tempo. O conjunto de posições e velocidades a cada instante de tempo é chamado em Mecânica Clássica de "estados de um sistema físico".

O matemático francês Joseph Liouville observou em 1838 que todo sistema mecânico que conserva energia (Newtoniana) tem uma medida invariante natural em sua configuração (Oliveira [20]). O matemático e físico alemão Carl Friedrich Gauss em 1845 observou que uma certa transformação no intervalo admite uma medida invariante (Ergódica) que é equivalente à medida de Lebesgue (generalização dos conceitos de medidas de comprimento na reta, área e volume).

No final do século XIX, o francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), observando os escritos de Liouville e interessado no movimento de corpos celestes, tais como planetas e cometas, descreve os corpos celestes como equações diferenciais que resultam da lei da gravitação de Newton e escreve o livro "Os novos métodos da Mecânica Celeste" (Teles [25], Poincaré [21]).

Pouco tempo depois o americano George David Birkhoff (1884-1944) observa os escritos de Poincaré e escreve o livro "Dynamical Systems"(Sistemas Dinâmicos) e o publica em um colóquio "American Mathematical Society Colloquium Publications" Volume IX (Birkhoff [5]). Ao analisar os sistemas dinâmicos de Poincaré, Birkhoff verificou que ao levar em consideração alguns dados iniciais fornecidos (posições e velocidades iniciais), a solução da equação diferencial regressava próximo do estado inicial quando não ia para o infinito, surgindo assim a imprevisibilidade dos resultados. De fato, Birkhoff [25] foi o primeiro a provar qual é a medida invariante dos bilhares.

O Caos clássico surge com a necessidade de estudar fenômenos imprevisíveis. Um fenômeno é imprevisível quando repetido o fenômeno com uma leve mudança em seus dados iniciais, os resultados ao passar do tempo vão ficando cada vez mais distintos.

A figura 1.1 mostra uma partícula que sai de E em direção ao ponto F (perpendicular a CD). Mostra também a mesma partícula percorrendo uma trajetória alternativa em que a partícula sai de E, indo para outra direção, com um ângulo um pouco diferente de 90° . A partícula na segunda trajetória fica cada vez mais longe da segunda trajetória.

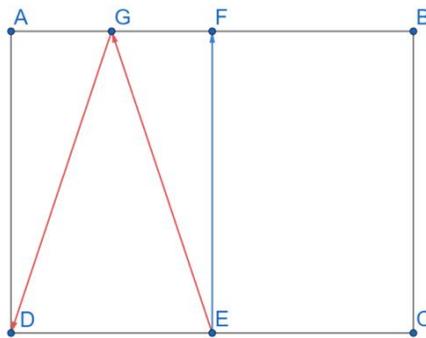


Figura 1.1: Mudança nos dados iniciais

Um exemplo de um fenômeno não-caótico é o da trajetória parabólica de uma bola de futebol. Se a bola for chutada com uma força ou um ângulo um pouco diferente de um chute anterior, é de se esperar que a bola tenha uma trajetória parabólica próxima

a trajetória anterior, assim sendo uma trajetória esperada. Desse modo, um fenômeno caótico é um modelo que assume trajetória não esperada a partir de pequenas alterações nos dados iniciais.

Markarian [17] diz que sistema dinâmico pode ser considerado como todo fenômeno que evolui no tempo. Esse sistema será determinístico se, conhecido o estado desse sistema em um tempo inicial, é possível determinar os estados em qualquer tempo com precisão. Um dos sistemas dinâmicos mais simples que apresentam comportamento caótico é o bilhar. Por causa da sua simplicidade apresentada por esse sistema, têm surgido uma grande quantidade de resultados e muitas vezes com resultados muito relevantes, principalmente nas últimas três décadas do século XX. Os bilhares com movimentos caóticos tornaram-se uma das áreas de pesquisa mais ativa e popular em mecânica estatística.

Markarian também disse que a hipótese ergódica formulada há mais de cem anos pelo físico Ludwig Boltzmann é parte de um modelo mecânico para explicar as propriedades dos gases e que o estudo das dinâmicas desordenadas no bilhar está diretamente relacionado com esta hipótese.

Hipótese ergódica de Boltzmann (1984): "Para grandes sistemas de partículas interagindo em equilíbrio, as médias temporais estão próximas das médias espaciais." Von Neumann provou o primeiro teorema ergódico, o qual estabelece que a média temporal de uma função de uma função f ao longo de uma trajetória que passa por um ponto x tem limite $\tilde{f}(x)$. Birkhoff e Khincin conseguiram provar essa mesma fórmula separadamente (1931).

Sinai [24], em 1970, desenvolveu um aparato matemático para o estudo de sistemas dinâmicos hiperbólicos e propriedades ergódicas. Enunciou uma hipótese ergódica relacionada com Boltzmann: O sistema de 2 ou mais bolas elásticas sobre T^2 ou T^3 é

ergódico. Ele também obteve um fórmula exata para a entropia de bilhar. A teoria do Sinai levou a uma explosão de artigos em revistas de matemática e física dedicadas a vários tipos de bilhares no plano, no espaço e de qualquer dimensão. O notável progresso da teoria do Sinai culminou em uma solução, de alguma forma, de uma hipótese clássica por Boltzmann (declarado em 1880) sobre a ergodicidade de gases de bolas duras. Os avanços no estudo de bilhar também penetraram mecânica estatística de não-equilíbrio e algumas outras ciências.

Após algumas décadas, Lorenz iniciou a pesquisa sobre questões meteorológicas da Terra. Como uma tentativa de entender essas questões tem-se tentado estudar o componente mais básico da meteorologia, o movimento de uma partícula e o seu comportamento após um certo período de tempo. Por isso a necessidade de desenvolver o estudo de bilhar.

A teoria de bilhares é considerada por muitos pesquisadores como sendo aquela com os melhores exemplos de caos determinístico. Muitos sistemas dinâmicos que envolvem choques podem de alguma maneira ser reduzido a um problema de bilhar. (Chernov [7]).

Ainda não é evidente a relevância para a física da hipótese ergódica e dos resultados matemáticos relacionados. Porém o seu significado vem tendo um impacto muito grande tanto na física quanto na matemática. Em geral, houve uma contribuição para o desenvolvimento da mecânica estatística e da teoria ergódica de sistemas dinâmicos e para o estudo formalizado dos movimentos caóticos.

No séc XIX, os físicos Clausius e Maxwell desenvolveram a teoria cinética dos gases e o físico Boltzmann a mecânica estatística baseada em Maxwell.

Embora "Bilhar" e "Teoria Ergódica" sejam assuntos muito estudados atualmente, foram encontrados em português 46 materiais relevantes, entre artigos (3), boletim (3),

teses(2), dissertações(14), livro/apostila/curso(8), trabalho de conclusão de cursos(7), publicações em revista(4) e notas de aula(5).

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Topologia no \mathbb{R}^n

2.1.1 Espaço euclidiano \mathbb{R}^n

Algumas observações feitas pelos autores Lima [13] e Lima [15] para \mathbb{R}^n e Lima [14] para \mathbb{R} . Outras observações feitas por Barbosa [3], Neto [19],

Definição 2.1.1. (*espaço euclidiano*) *Seja n um número natural. O espaço euclidiano n -dimensional é o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbb{R} :*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$

Os pontos de \mathbb{R}^n são todas as n -uplas $x = (x_1, \cdots, x_n)$ cujas coordenadas x_1, \cdots, x_n são números reais. Dados $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , tem-se $x = y$ se, e somente se, $x_1 = y_1, \cdots, x_n = y_n$.

Exemplo 2.1.1. (\mathbb{R}^1) *O espaço euclidiano de unidimensional é denotado por $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. \mathbb{R} é o conjunto dos números reais.*

Exemplo 2.1.2. (\mathbb{R}^2) O espaço euclidiano bidimensional é denotado por $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. \mathbb{R}^2 é o conjunto dos pares ordenados $x = (x_1, x_2)$ de números reais.

As operações em \mathbb{R}^n : Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n e um número real $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a operação soma $x + y$ e o produto de x por um escalar $\alpha \cdot x$ pondo

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

Definição 2.1.2. (espaço vetorial) A terna $V_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ fazem de \mathbb{R}^n um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos reais e seus elementos serão chamados de vetores.

Definição 2.1.3. (vetor) Dado $x, y \in \mathbb{R}^n$ o vetor $x - y$ é um segmento de reta orientado. Geometricamente considerar $x - y$ como vetor significa imaginar uma "seta" que tem origem em y e termina no ponto x . O vetor $u = x - y$ é o único vetor equivalente a esse que tem como origem o ponto $(0, \dots, 0)$.

Exemplo 2.1.3. Sejam $x = (5, 8), y = (3, 5) \in \mathbb{R}^2$. O vetor $x - y = (2, 3)$ é representado pelo seu ponto final $u = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$. O vetor $v = u - (0, 0)$ é equivalente ao vetor $x - y$, logo $v = x - y$.

Definição 2.1.4. (Segmento de reta) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O segmento de reta de extremos x e y é o conjunto

$$[x, y] = \{(1 - s)x + sy : 0 \leq s \leq 1\}$$

Exemplo 2.1.4. Seja o segmento de reta $A = [(-2, 3), (3, 4)]$. O segmento de reta A no plano é o conjunto de pontos $[(-2, 3), (3, 4)] = \{(1 - s)(-2, 3) + s(3, 4) : 0 \leq s \leq 1\}$

Definição 2.1.5. (*elemento neutro*) O vetor nulo é o vetor $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Também pode ser chamado de origem do espaço vetorial euclidiano \mathbb{R}^n . Ao somar $x + \vec{0} = x$, por isso o vetor nulo também é chamado de elemento neutro da soma em \mathbb{R}^n .

Definição 2.1.6. (*vetor simétrico*) O vetor simétrico de $x = (x_1, \dots, x_n)$ é $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$. Note que $x + (-x) = \vec{0}$.

Definição 2.1.7. (*base canônica em \mathbb{R}^n*) A base canônica do espaço vetorial V_n é o conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ formado pelos vetores

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

de maneira que tem 1 (unidade de \mathbb{R}) em uma das coordenadas e 0 (elemento neutro de \mathbb{R}) nas outras coordenadas.

Definição 2.1.8. Todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base canônica. Assim $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n$.

2.1.2 Produto interno e norma

Algumas observações feitos nos escritos de Delgado [10]

Seja uma aplicação $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\langle x, y \rangle$ é uma operação entre os vetores x e y , que multiplica as correspondentes coordenadas e soma todos os resultados.

Definição 2.1.9. (*produto interno canônico*) O produto interno \langle, \rangle canônico de \mathbb{R}^n para os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ é definido como combinação linear dos vetores

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Definição 2.1.10. (*ortogonais*) Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ dizem-se ortogonais quando $\langle x, y \rangle = 0$ e denotamos $x \perp y$.

Exemplo 2.1.5. (vetores ortogonais) Seja $x = (x_1, x_2), y = \delta(-x_2, x_1)$, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}$, assim $\langle x, y \rangle = \langle (x_1, x_2), (-\delta x_2, \delta x_1) \rangle = -\delta \cdot x_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_2 \cdot x_1 = 0$. Portanto para cada vetor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ existe um conjunto de vetores que são ortogonais a x , e denotamos $x \perp \{\delta(-x_2, x_1) : \delta \in \mathbb{R}\}$.

Definição 2.1.11. (norma euclidiana) A norma euclidiana $\| \cdot \|$ advinda do produto interno de \mathbb{R}^n para o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ se define como $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ou

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

. $\|x\|$ é o comprimento do vetor x .

Exemplo 2.1.6. Seja $\vec{x} = (3, 4)$. A norma do vetor \vec{x} é dado por $\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Definição 2.1.12. (distância em \mathbb{R}^n) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$. A distância entre os pontos x e y é dado pela norma euclidiana

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

De fato, $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n), (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) \rangle = (x_1 - y_1) \cdot (x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n) \cdot (x_n - y_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$

Definição 2.1.13. (comprimento de um segmento de reta) Seja o segmento de reta $[x, y] \subset \mathbb{R}^n$ de extremos $x, y \in \mathbb{R}^n$. O comprimento desse segmento é a distância entre x e y , assim:

$$\|[x, y]\| = \|x - y\|$$

Definição 2.1.14. (vetor unitário) O vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é dito unitário quando $\|x\| = 1$.

De fato, dado $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $x = (\frac{x_1}{\|x\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|})$ é unitário, pois

$$\|x\| = \sqrt{\frac{x_1^2}{\|x\|^2} + \dots + \frac{x_n^2}{\|x\|^2}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}{\|x\|} = 1$$

O processo de tornar um vetor unitário é chamado de normalizar, assim dado um vetor $y \in \mathbb{R}^n$, o vetor $x = (\frac{y_1}{\|y\|}, \dots, \frac{y_n}{\|y\|})$ é chamado de vetor normalizado.

Note que se $x = (\frac{y_1}{\|y\|}, \dots, \frac{y_n}{\|y\|}) = \frac{1}{\|y\|} \cdot (y_1, \dots, y_n)$, logo x e y possuem a mesma direção, e x é $\|y\|$ vezes menor que y .

Exemplo 2.1.7. Ao normalizar o vetor $x = (3, 4)$, tem-se $\frac{x}{\|x\|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Para conferir se esse é um vetor normalizado do vetor x , basta calcular sua norma, isto é,

$$\|\frac{x}{\|x\|}\| = \sqrt{\frac{3^2}{5} + \frac{4^2}{5}} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Definição 2.1.15. (S^{n-1}) O conjunto de todos os vetores unitários em \mathbb{R}^n é denotado por $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Exemplo 2.1.8. (S^1) O conjunto de todos os vetores unitários em \mathbb{R}^2 é denotado por $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Definição 2.1.16. (vetor ortonormal) Os vetores x e y são ortonormais quando são unitários e ortogonais.

Um exemplo bem simples de vetores ortonormais são os vetores da base canônica.

Exemplo 2.1.9. Seja $x \in \mathbb{R}^2$ um vetor. O vetor normalizado de x é $\frac{x}{\|x\|} = (\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{x_2}{\|x\|}) \in S^1$. Dado $y \perp x$, tal que $y = (-\frac{x_2}{\|x\|}, \frac{x_1}{\|x\|})$, dizemos que y é um vetor unitário ortogonal a x . Geometricamente, y pode ser encontrado rotacionando x noventa graus à esquerda.

Definição 2.1.17. (ângulo entre vetores) Sejam x e y vetores não-nulos de \mathbb{R}^n e o produto interno entre x e y que é dado por $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta$. O ângulo entre os vetores x e y é dado por $\theta = \cos^{-1}(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|})$, ou seja, θ é o ângulo entre os vetores não-nulos x e y .

Dados x e y são vetores não-nulos, $\langle x, y \rangle = 0$, se, e somente se, $\cos \theta = 0$, o que ocorre quando $\theta = 90^\circ$, ou seja, quando x e y são perpendiculares.

Definição 2.1.18. (rotação positiva) Seja $x \in \mathbb{R}^2$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Uma rotação positiva de x é uma aplicação $R : M(2 \times 2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$R(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

Exemplo 2.1.10. (Rotação positiva) Uma rotação positiva de x por 90° é dada por

$$R(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Bolas

Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Definição 2.1.19. (bola aberta) A bola aberta de centro a e raio r é denotada por $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$.

Na reta, uma bola é chamada de intervalo. No plano, uma bola é chamada de disco.

Exemplo 2.1.11. (intervalo aberto) Seja $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. O intervalo aberto de centro a e raio r é denotado por $(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\}$.

Exemplo 2.1.12. (disco aberto) Seja $a \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$. O disco aberto de centro a e raio r é denotado por $D(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\}$.

Exemplo 2.1.13. A figura 2.1 é a representação no plano do disco $D((-2, 3), 3)$, isto é, o disco aberto de centro $(-2, 3)$ e raio 3.

Definição 2.1.20. (esfera) Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Uma esfera de centro a e raio r é denotado por $S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$.

Uma esfera no plano é chamada de círculo.

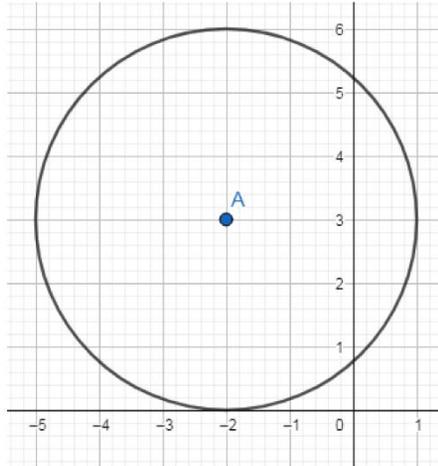


Figura 2.1: Disco aberto de centro $(-2, 3)$ e raio 3

Exemplo 2.1.14. (*círculo*) Seja $a \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$. Um círculo de centro a e raio r é denotado por $S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| = r\}$.

Definição 2.1.21. (*esfera unitária*) Quando a esfera tiver $r = 1$, a esfera é dita unitária. De fato, se $x \in S[a, 1]$, teremos $\|x - a\| = 1$ e assim o vetor $x - a$ é unitário. Note que se $a \neq \vec{0}$, então $\|x\| \neq \vec{1}$.

Definição 2.1.22. (*bola fechada*) Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. O conjunto $S[a, r] \cup B(a, r)$ será chamado de bola fechada de centro a e raio r e denotado por $B[a, r]$.

Exemplo 2.1.15. (*disco fechado*) Seja $a \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$. O disco fechado de centro a e raio r é denotado por $D[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq r\}$.

Exemplo 2.1.16. A figura 2.2 mostra um disco fechado de centro C e raio r .

Definição 2.1.23. (S^{n-1}) Seja $S[\vec{0}, 1]$ uma esfera unitária de centro na origem que é o conjunto dos vetores unitários, também denotado por S^{n-1} . Note que $S[\vec{0}, 1] = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

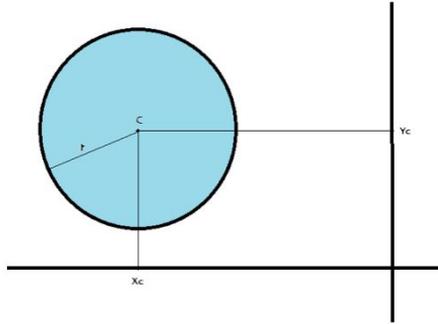


Figura 2.2: Disco fechado de centro C e raio r

Exemplo 2.1.17. (S^1) Seja $S[\vec{0}, 1]$ um círculo unitário de centro na origem que é o conjunto dos vetores unitários, também denotado por S^1 . Note que $S[\vec{0}, 1] = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Exemplo 2.1.18. (vetores unitários) Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $S[a, 1]$. Assim $x \in S[0, 1] \Rightarrow \|x - a\| = 1 = \|a - x\|$ portanto os vetores $a - x, x - a \in S^{n-1}$, isto é, os vetores $x - a$ e $a - x$ são unitários.

2.1.4 Conjuntos abertos e fechados

Definição 2.1.24. (ponto interior) Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^n . Um ponto $a \in X$ chama-se ponto interior a X quando existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$.

Definição 2.1.25. (conjunto interior) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto dos pontos interiores de X é $\text{int } X$.

Definição 2.1.26. (conjunto aberto) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se todos os seus pontos são interiores, ou seja, $\text{int } X = X$.

Exemplo 2.1.19. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ e $r > 0$, assim:

- (1) $B(a, r)$ é um conjunto aberto,
- (2) $\text{int } X$ é um conjunto aberto,

(3) $\text{int}(\mathbb{R}^n \setminus X)$ é aberto e é chamado de conjunto dos pontos exteriores de X , o qual denotaremos de $\text{ext } X$.

Definição 2.1.27. Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $a \in X$ existem três possibilidades:

(1) $a \in \text{int } X$

(2) $a \in \text{ext } X$

(3) $a \in \mathbb{R}^n \setminus (\text{int } X \cup \text{ext } X)$, este é o conjunto dos pontos da fronteira de X , o qual denotaremos de ∂X .

Definição 2.1.28. (ponto da fronteira) Seja um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. $a \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto da fronteira de X , quando toda bola de centro a contém pontos de X e de $\mathbb{R}^n \setminus X$. De outro modo toda bola de centro a contém pontos do interior e do exterior de X .

Exemplo 2.1.20. (fronteira da bola) A esfera $S(a, r)$ é a fronteira de uma bola aberta ou fechada. Note que $S(a, r) = B[a, r] - B(a, r)$, logo $S(a, r)$ não possui pontos interiores e nem exteriores da bola.

Observação 2.1.1. O conceito de bola pode ser reformulado da seguinte forma:

*bola aberta têm somente pontos interiores,
bola fechada têm pontos interiores e da fronteira e
esfera têm somente pontos da fronteira.*

Exemplo 2.1.21. Observe que $\text{int}D[a, r] = D(a, r)$, isto é, o interior de um disco fechado é um disco aberto.

Exemplo 2.1.22. A figura 2.3 mostra os pontos $B(-3, 5)$, $C(1, 3)$ e $D(-5, 1)$ em relação ao disco $G(A(-2, 3), 3)$. Os pontos B, C, D são, respectivamente, interior, fronteira e exterior ao disco G .

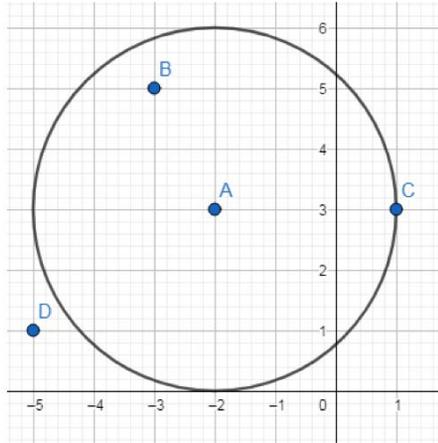


Figura 2.3: Ponto interior, exterior e fronteira

Definição 2.1.29. (*fechado*) Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado se o seu complementar é aberto. Outra maneira de definir: dado um $X \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\text{int}X \cup \partial X \subset X$ então X é fechado.

Definição 2.1.30. (*fecho*) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. O fecho de X é dado por

$$\bar{X} = X \cup \partial X$$

que é um conjunto fechado.

Definição 2.1.31. (*limitado*) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado quando para qualquer $a \in X$ existe $r > 0$, tal que $X \subset B(a, r)$.

Definição 2.1.32. (*relativamente aberto*) Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $X \subset Y$, diz-se que X é aberto em Y ou que é aberto relativamente a Y , se existe um aberto $Z \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X = Z \cap Y$.

Definição 2.1.33. (*relativamente fechado*) Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $X \subset Y$, diz-se que X é fechado em Y ou que é fechado relativamente a Y , quando seu complementar em Y é aberto em Y .

Exemplo 2.1.23. O conjunto $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ é aberto em $[0, 2) \subset \mathbb{R}$, pois $(-1, 1)$ é aberto em \mathbb{R} , mas $[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2)$ não é aberto em \mathbb{R} .

2.1.5 Compacto e conexo

Definição 2.1.34. (*compacto*) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ que é fechado e limitado é denominado compacto.

Caracterizemos agora a compacidade através de coberturas abertas.

Definição 2.1.35. (*família de subconjuntos*) Seja $(A_i)_{i \in L}$ uma família de subconjuntos $A_i \subset \mathbb{R}^m$ com índices em L . Assim

$$(A_i)_{i \in L} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$$

Definição 2.1.36. (*reunião de uma família*) A reunião de uma família de subconjuntos $(A_i)_{i \in L}$ é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos $A_i \subset \mathbb{R}^n$ e é denotado por $\bigcup_{i \in L} A_i$ assim:

$$\bigcup_{i \in L} A_i = \{u \in A_i : i \in L\}$$

Definição 2.1.37. (*cobertura*) Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma família $(A_i)_{i \in L}$ de subconjuntos $A_i \subset \mathbb{R}^n$ tais que $X \subset \bigcup_{i \in L} A_i$, ou seja, para todo $u \in X$ existe algum $i \in L$ tal que $u \in A_i$.

Definição 2.1.38. (*aberta e finita*) Uma cobertura $(A_i)_{i \in L}$ de $X \subset \mathbb{R}^n$ é dita

(1) aberta quando cada conjunto A_i é aberto em \mathbb{R}^n .

(2) finita se L é um conjunto finito e $X \subset A_{L_1} \cup A_{L_2} \cup \dots \cup A_{L_m}$.

Definição 2.1.39. (*subcobertura*) Uma subcobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma subfamília $(A_i)_{i \in L'}$, $L' \subset L$ de subconjuntos $A_i \subset \mathbb{R}^n$ tais que $X \subset \bigcup_{i \in L'} A_i$.

Teorema 2.1.1. (Borel-Lebesgue) $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e só se, toda cobertura aberta $\bigcup_{i \in L} A_i$ de X admite uma subcobertura finita.

Prova(ver teorema 23, secção 12, capítulo 1, Lima [13])

Definição 2.1.40. (cisão) Uma cisão de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A e B são ambos abertos.

Definição 2.1.41. (cisão trivial) Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite pelo menos uma cisão trivial $X = X \cup \emptyset$.

Exemplo 2.1.24. (cisão não-trivial) Note que $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ admite uma cisão $X = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ que não é a cisão trivial.

Definição 2.1.42. (conexo) Um conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ chama-se conexo quando a única cisão for a trivial, isto é, se $X = A \cup B$ onde $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

(desconexo) Se $X = A \cup B$ e A e B são abertos, disjuntos e não-vazios, logo X admite uma cisão não-trivial.

Exemplo 2.1.25. (1)(desconexo) Na figura 2.4, o disco $D_1((-2, 0), 1)$ e o disco $D_2((2, 0), 1)$ são disjuntos. O conjunto $D_1 \cup D_2$ é desconexo.

(2)(conexo) \mathbb{R}^n (espaço euclidiano), $D(u, r)$, $D[u, r]$ e $S(u, r) \subset \mathbb{R}^n$ (bolas e esferas) são todos conexos.

(3)(conexo) O fecho da elipse $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\frac{x_1 - c_1}{a})^2 + (\frac{x_2 - c_2}{b})^2 \leq 1 : a, b \in \mathbb{R}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\}$ é conexa.

(4)(conexo) O fecho do retângulo $[0, a] \times [0, b] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ é conexo.

(5)(conexo) $[0, 1] \cup [1, 2] = [0, 2]$ (embora seja uma união disjuntas, não são abertos).

Note pelo exemplo 5 que todo intervalo real é conexo.

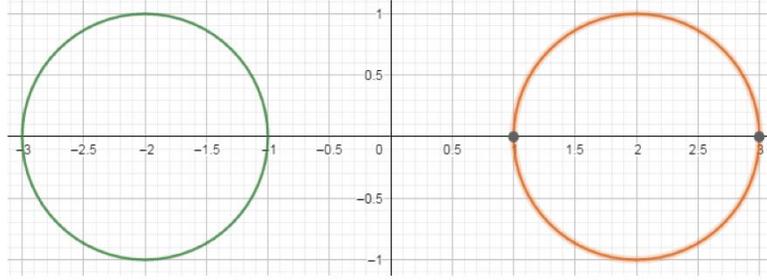


Figura 2.4: Curva não-conexa

2.2 Curvas e aplicações diferenciáveis em \mathbb{R}^n

2.2.1 Caminho diferenciável

Observações feitas a partir dos escritos de Tenenblat [26] e Coimbra [8].

Definição 2.2.1. (*caminho*) Um caminho em \mathbb{R}^n é uma aplicação $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, cujo domínio é um intervalo conexo $I \subset \mathbb{R}$. Para cada $s \in I$, temos que $f(s) = (f_1(s), \dots, f_n(s))$.

(*funções coordenadas*) As n funções $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ são ditas as funções coordenadas de um caminho f .

Definição 2.2.2. (*traço*) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. O conjunto imagem de f , $\text{Imagem}(f) = f(I)$, é chamado de traço de f .

Definição 2.2.3. (*caminho contínuo*) O caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo em s quando qualquer que seja $\epsilon > 0$ dado, é possível achar um $\delta > 0$ tal que $x \in I$ e $|x - s| < \delta$ implicarem que $\|f(x) - f(s)\| < \epsilon$.

Em termo de bola, a continuidade de $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ no ponto s se exprime assim: para toda bola aberta B de centro $f(s) \in \mathbb{R}^n$ existe uma bola A de centro em $s \in \mathbb{R}$ tal que $f(A \cap I) \subset B$.

Proposição 2.2.1. (funções coordenadas contínuas) Um caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo no ponto $s \in \mathbb{R}$ se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas é contínua nesse ponto.

Definição 2.2.4. (vetor velocidade) O vetor velocidade do caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ no ponto $a \in I$ é por definição, o limite

$$f'(a) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}(f(a+s) - f(a))$$

quando tal limite existe. Quando existe é chamado de vetor tangente a curva em a .

Definição 2.2.5. (velocidade escalar) A norma $\|f'(s)\|$ é chamada de norma do vetor velocidade de f no ponto s .

Definição 2.2.6. (diferenciável) Quando o caminho f possui vetor velocidade não-nulo num ponto, dizemos que f é diferenciável nesse ponto. Se existe $f'(s)$ para todo $s \in I$, dizemos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho diferenciável ou uma curva parametrizada diferenciável.

Definição 2.2.7. (reta tangente ao caminho) Seja f um caminho diferenciável, $f, f' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f'(s) \neq \vec{0}$ para todo $s \in I$. A reta L tangente ao caminho de f no ponto $f(\lambda)$ é a reta definida pelo conjunto $L = \{L(\lambda) : L(\lambda) = f(s) + \lambda f'(s) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Exemplo 2.2.1. (derivada da função coordenada) Sejam as coordenadas do vetor secante $\frac{1}{s}(f(a+s) - f(a))$: os números $\frac{1}{s}(x(a+s) - x(a))$ e $\frac{1}{s}(y(a+s) - y(a))$. O caminho f possui vetor tangente no ponto $a \in I$ se, e somente se, cada uma das funções coordenadas $x(s), y(s)$ possui derivada nesse ponto. No caso afirmativo, tem-se

$$f'(a) = (x'(a), y'(a)), a \in I$$

Proposição 2.2.2. (função coordenada diferenciável) O caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável se, e somente se, cada uma das funções coordenadas $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no intervalo I .

Proposição 2.2.3. (diferenciabilidade) Para que o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja diferenciável no ponto $a \in I$, é necessário e suficiente que exista um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que, para $a + s \in I$ se tenha

$$f(a + s) = f(a) + s \cdot v + r(s), \text{ onde } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(s)}{s} = 0.$$

No caso afirmativo, tem-se que $v = f'(a)$.

Exemplo 2.2.2. (círculo de centro p e raio r) Seja um círculo $S[p, r]$ em \mathbb{R}^2 definido pela imagem do caminho $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(s) = p + r(\cos s, \sin s)$. O vetor tangente à curva é dado por $f'(s) = r(-\sin s, \cos s)$. A velocidade escalar é dada por $\|f'(s)\| = r$.

Exemplo 2.2.3. (velocidade escalar de S^1) Seja f um caminho em S^1 tal que $f : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ com $f(s) = (\cos s, \sin s)$. A velocidade escalar em S^1 é dado por $\|f'(s)\| = 1$, sendo que $f'(s) = (-\sin s, \cos s)$.

Exemplo 2.2.4. (elipse) Seja uma elipse de centro p definida pela imagem do caminho $f(s) = p + (a \cos s, b \sin s)$, tal que o vetor tangente é $f'(s) = (-a \sin s, b \cos s)$. Assim a velocidade escalar é dada por $\|f'(s)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s}$.

Exemplo 2.2.5. (retângulo) Seja a fronteira do retângulo $\partial([0, a] \times [0, b])$ definida pela imagem do caminho $f : [0, 2a + 2b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(s) = \begin{cases} (s, 0), & \text{se } s \in [0, a) \\ (a, s - a), & \text{se } s \in [a, a + b) \\ (2a + b - s, b), & \text{se } s \in [a + b, 2a + b) \\ (0, 2a + 2b - s), & \text{se } s \in [2a + b, 2a + 2b) \end{cases} \quad \text{e o vetor velocidade definido pelo}$$

vetor velocidade

$$f'(s) = \begin{cases} (1, 0), & \text{se } s \in [0, a) \\ (0, 1), & \text{se } s \in [a, a + b) \\ (-1, 0), & \text{se } s \in [a + b, 2a + b) \\ (0, -1), & \text{se } s \in [2a + b, 2a + 2b) \end{cases} \quad \text{e assim o vetor escalar é } \|f'(s)\| = 1$$

Exemplo 2.2.6. (*espiral logarítma*) Seja uma espiral logarítma definida pela imagem do caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f : (s) = e^s(\cos s, \sin s)$. De fato $f'(s) = e^s(\cos s - \sin s, \sin s + \cos s)$, assim $\|f'(s)\| = \vec{0} \Leftrightarrow \cos s_0 = \sin s_0$ e $\cos s_0 = -\sin s_0$, ou seja, $f'(s_0) \neq 0$ para todo $s_0 \in I$ e assim f é um caminho regular.

$$\begin{aligned} \text{De fato } \|f'(s)\| &= \|e^s(\cos s - \sin s, \sin s + \cos s)\| \\ &= \sqrt{[e^s(\cos s - \sin s)]^2 + [e^s(\sin s + \cos s)]^2} \\ &= \sqrt{e^{2s}(\cos^2 s - 2 \cos s \sin s + \sin^2 s) + e^{2s}(\sin^2 s + 2 \sin s \cos s + \cos^2 s)} \\ &= \sqrt{2e^{2s}(\cos^2 s + \sin^2 s)} = e^s\sqrt{2} \end{aligned}$$

2.2.2 Curva Suave no \mathbb{R}^n

Definição 2.2.8. (*curva regular*) Um caminho diferenciável $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é regular quando $f'(a) \neq \vec{0}$, para todo $a \in I$.

Isso quer dizer que se uma curva for regular em todo I , então o vetor tangente a curva é não-nulo em todo ponto do traço de f .

Exemplo 2.2.7. (*reta*) Dados um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$, o caminho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(s) = p + sv$$

é diferenciável e o vetor tangente de f em s é dado por $f'(s) = v \neq \vec{0}$, para todo $s \in \mathbb{R}$, por isso $f(\mathbb{R})$ é uma curva regular. O traço de f é a reta paralela ao vetor v que contém o ponto p .

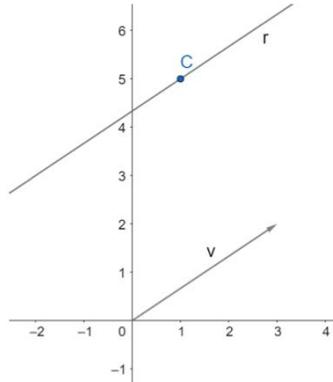


Figura 2.5: Reta r que passa por C e paralela a v

Se o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável, tem sentido considerar o caminho derivado $f' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e indagar se ele é contínuo e diferenciável

Definição 2.2.9. (Classe C^1) Seja $f' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se f' for um caminho contínuo, então é dito que f é um caminho de classe C^1 .

Quando a derivada do caminho f' existe, o vetor $(f')'(a) = f''(a)$ chama-se segunda derivada de f no ponto a , ou o vetor aceleração do caminho f no ponto a , assim o vetor aceleração pode ser definido por $f''(a) = (x''(a), y''(a))$. Se $f''(s)$ existe para todo $s \in I$ diz-se que o caminho f é duas vezes diferenciável e fica definido o caminho $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Quando o caminho f'' é contínuo, dizemos que f é um caminho de classe C^2 ou que f' é um caminho de classe C^1 .

Definição 2.2.10. (Classe C^p) Um caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é p vezes diferenciável no ponto $a \in I$ quando existir $\delta > 0$ tal que f é um caminho de classe C^p no intervalo $J = \{s \in I : |s - a| < \delta\}$ e f^p for diferenciável no ponto a .

Por extensão, se f é um caminho contínuo, então f é dito ser de classe C^0 . Quando existirem as derivadas de todas as ordens do caminho f , será dito que f é um caminho infinitamente diferenciável ou de classe C^∞ .

Para $0 \leq p \leq \infty$, será escrito $f \in C^p$ para indicar que f é um caminho de classe C^p . Como $f = (x, y)$, tem-se que $f \in C^p$ se, e somente se, $x, y \in C^p$ para qualquer $i = 1, \dots, n$.

Definição 2.2.11. (*Curva suave*) Uma curva definida pela imagem de um caminho $f : I \mapsto \mathbb{R}^n$ de classe $C^l, l \geq 3$ é chamada de uma curva suave e f é chamado de caminho suave.

Definição 2.2.12. (*regular por partes*) Seja uma curva $f : I \mapsto \mathbb{R}^n$ que não é derivável em um número finito de pontos $\{s_1, \dots, s_m\}$ e regular nos demais pontos. A curva f será dita regular por partes e pode-se dizer que f é regular em $I - \{s_1, \dots, s_m\}$.

Exemplo 2.2.8. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho de classe $C^l, l \geq 3$ em $[a, b] - \{s_1, \dots, s_m\}$, tal que $f'(s_i) = \vec{0}$ para todo $s_i \in \{s_1, \dots, s_m\}$. Colocando $s_0 = a, s_{m+1} = b$, logo $f : \bigcup_{i=0}^m (s_i, s_{i+1}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho regular por partes.

Definição 2.2.13. (*curva injetiva*) Uma curva definida pela imagem de um caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva quando dados $s_0 \neq s_1 \in I$ então $f(s_0) \neq f(s_1)$. Uma curva injetiva não se intercepta.

Exemplo 2.2.9. (*círculo*) Seja $r > 0$. O círculo $S(p, r) \subset \mathbb{R}^2$ definido pela imagem do caminho $f : [0, 2\pi) \rightarrow S(p, r)$ tal que $f(s) = p + r(\cos s, \sin s), s \in \mathbb{R}$ é diferenciável, tal que $f'(s) = r(-\sin s, \cos s) \neq 0, \forall s \in \mathbb{R}$. Note que $\sin s = 0 \Leftrightarrow s \in \{0, \pi\}$, mas $\cos 0 = 1$ e $\cos \pi = -1$ logo o círculo é uma curva regular. Note que se $f''(s) = -r(\cos s, \sin s) = -f(s)$, assim f é de classe C^∞ e logo f é um caminho suave e o círculo é uma curva suave. Note que f é uma curva injetiva.

Exemplo 2.2.10. (*suave e não-regular*) Seja um caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(s) = (s^3, s^2)$. Como $f'(s) = (3s^2, 2s)$, assim o vetor tangente em $s = 0$ é dado por $f'(0) = \vec{0}$, logo f não é um caminho regular. No entanto $f''(s) = (6s, 2), f'''(s) = (6, 0)$ e

$f^4(s) = (0, 0)$. Note que $f^n(s) = (0, 0), n \geq 4$, assim f é de classe C^∞ e assim f é um caminho suave.

Note que nem todo caminho suave é um caminho regular.

Exemplo 2.2.11. (curva de mesmo traço) Seja $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho tal que $g(s) = (s, s)$. Note que g é de classe C^∞ e logo g é um caminho suave. Como $g'(s) = (1, 1)$, logo g é regular. Perceba que o traço de g é o mesmo traço da $f(s) = (s^3, s^3)$ que não é um caminho regular.

Note que f e g são caminhos com mesmo traço. Embora g seja regular, f não é.

Exemplo 2.2.12. Dados $a, b > 0$ e $c \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^2$ consideremos, com s variando em \mathbb{R} , os caminhos abaixo são regulares e suaves:

(1) (elipse) A elipse definida pela imagem do caminho $f(s) = p + (a \cos s, b \sin s)$.

Como $f'(s) = (-a \sin s, b \cos s)$, $f''(s) = (-a \cos s, -b \sin s)$, $f'''(s) = (a \sin s, -b \cos s) = -f'(s)$, logo a elipse é de classe C^∞

(2) (parábola) A parábola definida pela imagem do caminho $g(s) = (s, cs^2 + bs + a)$.

Como $g'(s) = (1, 2cs + b)$, $g''(s) = (0, 2c)$, $g'''(s) = (0, 0)$, logo a parábola é de classe C^∞

(3) (retângulo) O retângulo definido pela imagem do caminho f no exemplo 2.2.5, tem-se que $f''(s) = (0, 0)$ e que $f'(s) \neq (0, 0)$ e assim o retângulo é uma curva suave, embora não seja regular nos vértices, pois as derivadas laterais são diferentes.

Exemplo 2.2.13. (espiral logarítma) A espiral logarítma definida pela imagem do caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável tal que $f : (s) = e^s(\cos s, \sin s)$. Note que f é de classe C^∞ e assim f é suave. Além disso $f'(s) = e^s(\cos s - \sin s, \sin s + \cos s)$, assim $f'(s_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \cos s_0 = \sin s_0$ e $\cos s_0 = -\sin s_0$, ou seja, $f'(s_0) \neq 0$ para todo $s_0 \in I$ e assim f é um caminho regular e suave.

2.2.3 Comprimento de uma curva

Definição 2.2.14. (*Partição de um intervalo*) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $a < b \in I$. O conjunto de segmentos de retas disjuntos cuja união é um intervalo $[a, b]$ é dito partição de $[a, b]$. Suponha que P tenha n elementos, assim

$$P = \bigcup_{i=0}^{n-1} [s_i, s_{i+1}] = [a, b].$$

em que $a \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n \leq b$.

Definição 2.2.15. (*linha poligonal*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho e $P = \bigcup_{i=0}^{n-1} [s_i, s_{i+1}]$ uma partição de $[a, b]$. A união dos segmentos de reta cujos extremos são os pontos $f(s_{i-1})$ e $f(s_i)$, $i = 1, \dots, n$ é dita a linha poligonal de f por P , ou seja,

$$\bigcup_{i=1}^n [f(s_{i-1}), f(s_i)] = [f(s_0), f(s_1)] \cup [f(s_1), f(s_2)] \cup \dots \cup [f(s_{n-1}), f(s_n)]$$

Definição 2.2.16. (*comprimento de poligonal inscrita no caminho*) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. A cada partição $P = \bigcup_{i=0}^{n-1} [s_i, s_{i+1}]$ do intervalo $[a, b] \subset I$ associaremos o número

$$\begin{aligned} l(f([a, b]); P) &= \left\| \bigcup_{i=1}^n [f(s_{i-1}), f(s_i)] \right\| = \\ &= \|[f(s_0), f(s_1)]\| + \|[f(s_1), f(s_2)]\| + \dots + \|[f(s_{n-1}), f(s_n)]\| = \\ &= \|f(s_1) - f(s_0)\| + \|f(s_2) - f(s_1)\| + \dots + \|f(s_n) - f(s_{n-1})\| = \\ &= \sum_{i=1}^n \|f(s_i) - f(s_{i-1})\| \end{aligned}$$

de maneira que, $l(f; P)$ será dito o comprimento da poligonal inscrita no caminho de $f([a, b])$, com vértices nos pontos $f(s_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Dado duas partições $P \subset R$ ocorre que $l(f([a, b]); P) \leq l(f([a, b]); R)$. Dado o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, pode ser feito o P variar entre todas as partições do intervalo $[a, b] \subset I$, sendo \mathcal{P} o conjunto de todas as partições do intervalo $[a, b]$.

Definição 2.2.17. (*caminho retificável*) Seja o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $[a, b] \subset I$. Se o conjunto $l(f([a, b]); \mathcal{P}) = \{l(f([a, b]); P) : P \in \mathcal{P}\}$ for limitado, diremos que $f([a, b])$ é um caminho retificável.

Todo conjunto real limitado possui supremo, ou seja, dado $S \subset \mathbb{R}$ limitado, assim existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq a$ para todo $s \in S$.

Definição 2.2.18. (*comprimento de arco da curva*) Seja $[a, b] \subset I$, sendo \mathcal{P} o conjunto de todas as partições do intervalo $[a, b]$. $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho retificável e $l(f([a, b])) = \sup l(f([a, b]); \mathcal{P}) = \sup_{P \in \mathcal{P}} l(f([a, b]); P)$. Denotaremos $l(f([a, b]))$, o extremo superior dos comprimentos das poligonais inscritas em f e será dito que $l(f([a, b]))$ é o comprimento de arco $[a, b]$ do caminho f .

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho regular de classe C^k , $k \geq 1$, logo, $l(f)$ é um arco da curva

Teorema 2.2.1. *Todo caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é retificável, com*

$$l(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(s)\| ds.$$

Prova: (ver teorema 6, secção 5, capítulo II de Lima [13])

Definição 2.2.19. (*reparametrização*) Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho regular de classe C^k , $k \geq 1$ e $[c, d] \subset \mathbb{R}$. Uma mudança de parâmetros para o caminho g é uma aplicação $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ bijetiva de classe C^k , tal que $\phi'(s) \neq 0$ para todo $s \in [c, d]$. A reparametrização de g é um caminho $f = g \circ \phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k de g .

Definição 2.2.20. (*reparametrização retificável*) A reparametrização $f = g \circ \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é retificável se, e somente se, o caminho $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é retificável. No caso afirmativo tem-se que $l(f) = l(g)$.

Exemplo 2.2.14. (*comprimento de um segmento de reta*) Seja $A, B \in \mathbb{R}^n$ e $f : [0, 1] \rightarrow [A, B]$ tal que $f(t) = (1-t)A + t(B)$. Note que f é um caminho retilíneo. Para qualquer partição $l(f) = \|B - A\|$.

Definição 2.2.21. *O comprimento de um caminho fechado será dito perímetro. Se esse caminho for de um círculo ou elipse chamaremos de circunferência.*

Exemplo 2.2.15. (*perímetro de um retângulo*) Considere o retângulo do exemplo 2.2.5. Então o comprimento do retângulo é dado por:

$$\begin{aligned} l(f[0, 2a + 2b]) &= l(f(0, a)) + l(f(a, a + b)) + l(f(a + b, 2a + b)) + l(f(2a + b, 2a + 2b)) \\ &= \int_0^a 1 r ds + \int_a^{a+b} 1 r ds + \int_{a+b}^{2a+b} 1 r ds + \int_{2a+b}^{2a+2b} 1 r ds \\ &= a + (a + b - a) + (2a + b - (a + b)) + (2a + 2b - (2a + b)) = a + b + a + b \end{aligned}$$

logo o perímetro do retângulo $l(f[0, 2a + 2b]) = 2a + 2b$

Exemplo 2.2.16. (*Circunferência de um círculo*) Seja um círculo de centro p e raio r , definida pela imagem do caminho $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(s) = p + r(\cos s, \sin s)$. Então a circunferência do círculo é:

$$l(f[0, 2\pi]) = \int_0^{2\pi} \|f'(s)\| ds = \int_0^{2\pi} r ds = r(2\pi - 0) = 2\pi r$$

Exemplo 2.2.17. (*comprimento de um semicírculo*) Seja um semicírculo de centro p e raio r , definida pela imagem do caminho $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(s) = p + r(\cos s, \sin s)$, assim o comprimento do arco da curva parametrizada $f([0, \pi])$ é

$$l(f([0, \pi])) = \int_0^\pi \|f'(s)\| ds = \int_0^\pi r ds = r(\pi - 0) = \pi r$$

Exemplo 2.2.18. (*comprimento de um arco do círculo*) Seja um arco do círculo de centro p e raio r , definida pela imagem do caminho $f : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(s) = p + r(\cos s, \sin s)$. Então o comprimento do arco do círculo é

$$l(f[\theta_1, \theta_2]) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|f'(s)\| ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r ds = (\theta_2 - \theta_1)r$$

Exemplo 2.2.19. (arco da parábola) A parábola de equação $y = \frac{x^2}{2}$ é definido pela imagem do caminho $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $g(s) = (s, \frac{s^2}{2})$. Note que $g'(s) = (1, s)$ e assim g é regular e $\|g'(s)\| = \sqrt{1+s^2}$. Determinaremos o comprimento do arco da parábola $g([0, 1])$ dado por: $l(g([0, 1])) ds = \int_0^1 \sqrt{1+s^2} ds$.

Seja $\phi : [0, \sinh^{-1}1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi(u) = \sinh u$ um aplicação bijetiva. Note que $\phi'(u) = \cosh u = 0 \Leftrightarrow \frac{e^u + e^{-u}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2u} = -1$, logo $\phi'(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

Reparametrizando g por $f = \phi \circ g : [0, \sinh^{-1}1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $\phi(u) = \sinh u$, assim $\phi(0) = \sinh 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$ e $\phi(\sinh^{-1} 1) = \sinh(\sinh^{-1}1) = 1$. Note que $1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$, assim $l(g([0, 1])) = l(f([0, \sinh^{-1} 1])) =$

$$\int_{u=\phi^{-1}(0)}^{u=\phi^{-1}(1)} \sqrt{1+\phi^2(u)} du = \int_0^{u_0} \sqrt{1+\sinh^2 u} du = \int_0^{u_0} \sqrt{\cosh^2 u} du = \int_0^{u_0} \cosh u du = \sinh u_0 - \sinh 0 = 1 - 0 = 1$$

Exemplo 2.2.20. (arco da parábola) Seja uma parábola de equação $y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$, $a \neq 0$ definida pela imagem do caminho $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(s) = (s, \frac{a}{2}s^2 + bs + c)$. Note que $g'(s) = (1, as + b)$, assim g é regular e $\|g'(s)\| = \sqrt{1+(as+b)^2}$. Determinaremos o comprimento do arco da parábola $g([0, d])$ dado por $l(g([0, d])) = \int_0^d \sqrt{1+(as+b)^2} ds$.

Seja $\phi : [b, ad + b] \rightarrow [0, d]$ tal que $\phi(u) = \frac{u-b}{a}$ uma aplicação bijetiva. Note que $\phi'(s) = \frac{1}{a} \neq 0$, para todos $s \in \mathbb{R}$.

Reparametrizando g por $f = \phi \circ g : [b, ad + b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $\phi(u) = \frac{u-b}{a}$, assim $\phi(b) = 0, \phi(ad + b) = d$, logo:

$$l(g([0, d])) = l(f([b, ad + b])) = \int_{u=\phi^{-1}(0)}^{u=\phi^{-1}(d)} \sqrt{1+(a\phi(u)+b)^2} du = \frac{1}{a} \int_b^{ad+b} \sqrt{1+u^2} du.$$

No cálculo há a regra:

$$\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C, \text{ logo}$$

$$l(f([b, ad + b])) = \int_b^{ad+b} \sqrt{1^2 + u^2} du =$$

$$= \frac{ad+b}{2} \sqrt{1 + (ad + b)^2} + \frac{1}{2} \ln ||ad + b + \sqrt{1 + (ad + b)^2}|| - \frac{b}{2} \sqrt{1 + b^2} - \frac{1}{2} \ln ||b + \sqrt{1 + b^2}||$$

Exemplo 2.2.21. (circunferência de uma elipse) Seja uma elipse definida pelo caminho $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(s) = p + (a \cos s, \text{sen } s)$, assim $f'(s) = (-a \text{sen } s, b \cos s)$. Então o comprimento de $f([0, 2\pi])$ é dado por:

$$l(f[0, 2\pi]) = \int_0^{2\pi} ||f'(s)|| ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \text{sen}^2 s + b^2 \cos^2 s} ds.$$

Seja c a distância do centro p da elipse até os focos. A excentricidade da elipse é dada por $e = \frac{c}{a}$, e como $a^2 = b^2 + c^2$, logo $a^2 = b^2 + a^2 e^2$ e assim $b^2 = a^2(1 - e^2)$, então:

$$l(f[0, 2\pi]) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \text{sen}^2 s + a^2(1 - e^2) \cos^2 s} ds$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\text{sen}^2 s + \cos^2 s - e^2 \cos^2 s)} ds,$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 s} ds = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^2 \cos^2 s)^{\frac{1}{2}} ds.$$

O binômio de Newton é dado por:

$$(1 + u)^n = 1 + \frac{nu}{1!} + \frac{n(n-1)u^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)u^3}{3!} + \dots \text{ logo } \int_a^b (1 + u)^n du =$$

$$\int_a^b 1 du + \int_a^b \frac{nu}{1!} du + \int_a^b \frac{n(n-1)u^2}{2!} du + \int_a^b \frac{n(n-1)(n-2)u^3}{3!} du + \dots + \int_a^b \frac{n!u^m}{(n-m)!m!} du + \dots$$

Seja $u = -e^2 \cos^2 s$ e $n = \frac{1}{2}$, logo $l(f[0, 2\pi]) =$:

$$= 4a \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 ds + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \frac{-e^2 \cos^2 s}{1!} ds + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2}\right) \frac{e^4 \cos^4 s}{2!} ds + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) \frac{-e^6 \cos^6 s}{3!} ds + \right.$$

$$\left. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) \left(\frac{-5}{2}\right) \frac{e^8 \cos^8 s}{4!} ds + \dots \right]$$

$$= 4a \left[\frac{\pi}{2} - \frac{e^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s ds - \frac{e^4}{2^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s ds - \frac{e^6}{2^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 s ds - \frac{5e^8}{2^7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 s ds + \dots \right]$$

No cálculo $\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\text{sen } u \cos u}{2}$ e $\int \cos^n u du = \frac{\cos^{n-1} u \text{sen } u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$,

logo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) du = \frac{\pi}{4} + \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right) du = \frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4} + \frac{3 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{8} + \frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\left(\frac{\pi}{2}\right) du = \frac{\cos^5\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} + \frac{5 \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{24} + \frac{5 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{16} + \frac{5\pi}{32} = \frac{5\pi}{32}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8\left(\frac{\pi}{2}\right) du = \frac{\cos^7\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{8} + \frac{7 \cos^5\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{48} + \frac{35 \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{192} + \frac{35 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{128} + \frac{35\pi}{256} = \frac{35\pi}{256}$$

e assim

$$l(f[0, 2\pi]) = 4a\left[\frac{\pi}{2} - \frac{e^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{e^4}{2^3}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{e^6}{2^4}\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \frac{5e^8}{2^7}\left(\frac{35\pi}{256}\right) + \dots\right], \text{ portanto}$$

$$l(f[0, 2\pi]) \approx 2a\pi\left[1 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{2^6} - \frac{5e^6}{2^8} - \frac{175e^8}{2^{14}}\right] = 2a\pi i(e).$$

Como $e \in (0, 1]$ logo $i(e) \in \left(\frac{7}{10}; 1\right)$, assim a circunferência aproximado da elipse

$$l(f([0, 2\pi])) \in \left(\frac{7}{5}a\pi; 2a\pi\right)$$

Observe que pela figura 2.6 a aproximação tomada já é suficiente. Quanto maior for a excentricidade, maior será o erro, por isso, quanto maior for a excentricidade, maior deverá ser a aproximação.

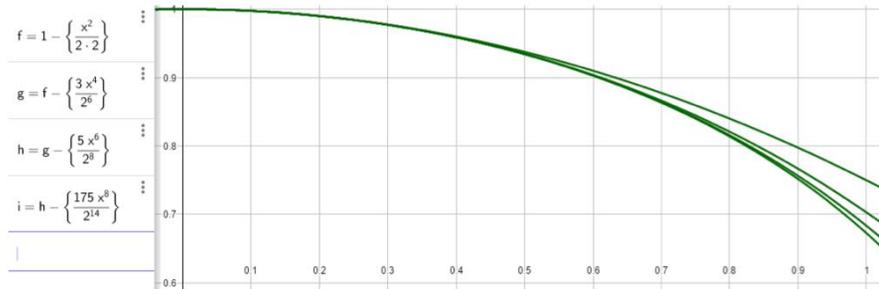


Figura 2.6: Aproximação da circunferência da elipse

Exemplo 2.2.22. (exemplo numérico) Seja uma elipse definida pelo caminho $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(s) = p + (5 \cos s, 4 \text{sen } s)$, assim $f'(s) = (-5 \text{sen } s, 4 \cos s)$. Então a circunferência da elipse dada é:

$$l(f[0, 2\pi]) = \int_0^{2\pi} \|f'(s)\| ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 \text{sen}^2 s + 16 \cos^2 s} ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 9 \cos^2 s} ds.$$

$$= 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{9}{25} \text{sen}^2 s} ds$$

$$\text{Seja } u = -e^2 \cos^2 s, e = \frac{3}{5} \text{ e } n = \frac{1}{2},$$

$$\text{logo } l(f[0, 2\pi]) \approx 10\pi\left[1 - \frac{9}{10^2} - \frac{3^5}{2^2 \cdot 10^4} - \frac{3^6}{10^5 \cdot 2^3} - \frac{175 \cdot 3^8}{10^8 \cdot 2^6}\right] = .$$

$$l(f[0, 2\pi]) \approx 10\pi(1 - 0,09 - 0,006075 - 0,00091125 - 0,00017940234375) = 28,36337...$$

Exemplo 2.2.23. (*espiral logarítima*) Seja $f : [-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho tal que $f(s) = e^s(\cos s, \sin s)$. O comprimento da espiral logarítima é apresentado no exemplo 2.2.6

$$l(f) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b \|f'(s)\| ds = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b e^s \sqrt{2} ds = \sqrt{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^b - e^a) = \sqrt{2} e^b$$

2.2.4 Reparametrização por comprimento de arco

Definição 2.2.22. (*função comprimento de arco*) Seja $f : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe $C^k, k \geq 1$ e $s_0 \in I$. A função $S : [s_0, \infty) \cap I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$S(s) = \int_{s_0}^s \|f'(u)\| du$$

é chamada função comprimento de arco da curva f a partir do ponto s_0 .

Definição 2.2.23. (*parametrizada pelo comprimento de arco*) Uma curva regular $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^k, k \geq 1$ está parametrizada pelo comprimento de arco quando $\|f'(s)\| = 1$, para todo $s \in I$. Neste caso $S(t) = t - t_0$

Exemplo 2.2.24. (*comprimento de um arco de S^1*) S^1 é o círculo unitário ($r=1$) com centro na origem, que é a imagem de um caminho $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(s) = (\cos s, \sin s)$. Note que $f'(s) = (-\sin s, \cos s)$ e que $\|f'(s)\| = 1$ para todo $s \in [a, b]$, assim f está parametrizada por comprimento de arco. Portanto $l(f([a, b])) = \int_a^b 1 ds = b - a$. Em particular $l(f([0, 2\pi])) = 2\pi$

Exemplo 2.2.25. (*reparametrização do círculo por comprimento de arco*) Seja $r > 0$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(s) = p + r(\cos s, \sin s)$ uma parametrização do círculo de centro p e raio r . Como $\|g'(s)\| = r$, logo o caminho g não está parametrizado por comprimento de arco.

Seja $\phi : [0, 2\pi r] \rightarrow [0, 2\pi]$ tal que $\phi(u) = \frac{u}{r}$ uma aplicação bijetiva. Note que $\phi'(u) = \frac{1}{r} \neq 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Reparametrizando g por $f = \phi \circ g : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $\phi(u) = \frac{u}{r}$, assim $\phi(0) = 0$ e $\phi(2\pi r) = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Como $f(u) = g(\phi(u)) = p + r(\cos \phi(u), \sin \phi(u)) = p + r(\cos(\frac{u}{r}), \sin(\frac{u}{r}))$, então $f'(u) = r(-\frac{1}{r}\sin(\frac{u}{r}), \frac{1}{r}\cos(\frac{u}{r})) = (-\sin(\frac{u}{r}), \cos(\frac{u}{r}))$, assim $\|f'(u)\| = 1$, logo f é uma reparametrização de g por comprimento de arco.

Exemplo 2.2.26. (parametrização do retângulo por comprimento de arco) No exemplo 2.2.5 observe que $\|f'(s)\| = 1$, assim f está parametrizada por comprimento de arco.

Exemplo 2.2.27. (reparametrização da espiral logaritma por comprimento de arco) Seja $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(s) = e^s(\cos s, \sin s)$ uma parametrização de uma espiral logaritma. Como $g'(s) = e^s(\cos s - \sin s, \sin s + \cos s)$, logo $\|g'(s)\| = e^s\sqrt{2}$ (exemplo 2.2.6). Embora o caminho g não está parametrizado por comprimento de arco, o comprimento da espiral é $S(s) = \sqrt{2}(e^s - e^{s_0}) = u$.

Seja $S : \mathbb{R} \rightarrow (-\sqrt{2}e^{t_0}, \infty)$ uma aplicação bijetiva tal que $e^s = \frac{\sqrt{2}}{2}u + e^{s_0}$, assim $s = \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}u + e^{s_0})$. Seja $\phi = S^{-1} : (-\sqrt{2}e^{t_0}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(u) = \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}u + e^{s_0})$. Note que $\phi'(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}u + e^{s_0})^{-1} \neq 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Reparametrizando g por $f = \phi \circ g : (\frac{\sqrt{2}}{2}u + e^{s_0}) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $f(u) = g(\phi(u)) = e^{\phi(u)}(\cos(\phi(u)), \sin(\phi(u))) = (\frac{\sqrt{2}}{2}u + e^{s_0})(\cos(\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}u + e^{s_0})), \sin(\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}u + e^{s_0})))$.

2.2.5 Vetor normal

Definição 2.2.24. (vetor unitário tangente à curva) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho de classe $C^k, k \geq 1$. Denota-se $T(s) = \frac{1}{\|f'(s)\|} \cdot f'(s)$ e diz-se que $T(s)$ é o vetor unitário tangente ao caminho f no ponto $f(s) \in \mathbb{R}^n$. Assim $T(s) \in S^{n-1}$. Note que dado um caminho $f(s) = (x(s), y(s))$, assim $f'(s) = (x'(s), y'(s))$, logo

$$T(s) = \left(\frac{x'(s)}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}, \frac{y'(s)}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}} \right)$$

Seja $n(s)$ o vetor obtido de $T(s)$ por meio de uma rotação positiva de 90 graus, isto é, se $T(s) = (a, b)$ então $n(s) = (-b, a)$, assim $\|n(s)\| = \|T(s)\| = 1$, logo $n(s) \in S^1$. $n(s)$ é dito o vetor normal unitário ao caminho f no ponto $f(s)$.

Definição 2.2.25. (*vetor normal unitário*) Um vetor normal unitário à curva definida pelo caminho $f : I \mapsto \mathbb{R}^n$ regular e suave é o vetor

$$n(s) = \left(\frac{-y'(s)}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}, \frac{x'(s)}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}} \right)$$

De fato, $\|f'(s)\| \cdot n(s) = (-y'(s), x'(s)) = N(s)$.

O vetor $n(s)$ será dito apenas vetor normal, assim não será necessário dizer que é unitário, pois sempre o será. Para determinar um vetor $N(s) = \overrightarrow{PN}$ ortogonal à curva saindo de $P = f(s)$, basta tomar o ponto $N = N(s) + f(s)$.

Exemplo 2.2.28. (*vetor tangente e normal à reta*) Seja uma reta definida pela imagem do caminho $f(s) = (s, as + b)$ regular e suave. Assim $f'(s) = (1, a)$ e $\|f'(s)\| = \sqrt{1^2 + a^2}$, logo $T(s) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}(1, a)$ é o vetor tangente unitário ao caminho f em $f(s)$. Observe que $T(s)$ é constante. O vetor normal é $n(s) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{1+a^2} \cdot (-a, 1)$.

Exemplo 2.2.29. (*vetor tangente e normal ao retângulo*) Considere o retângulo defi-

$$nido \text{ no exemplo 2.2.5, assim } T(s) = \begin{cases} (1, 0), & \text{se } s \in [0, a) \\ (0, 1), & \text{se } s \in [a, a + b) \\ (-1, 0), & \text{se } s \in [a + b, 2a + b) \\ (0, -1), & \text{se } s \in [2a + b, 2a + 2b) \end{cases} \quad e$$

$$n(s) = \begin{cases} (0, 1), & \text{se } s \in [0, a) \\ (-1, 0), & \text{se } s \in [a, a + b) \\ (0, -1), & \text{se } s \in [a + b, 2a + b) \\ (1, 0), & \text{se } s \in [2a + b, 2a + 2b) \end{cases}$$

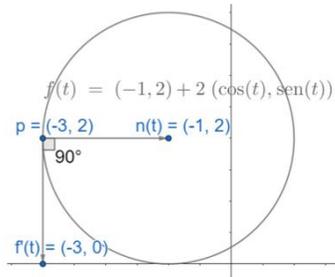


Figura 2.7: Vetor tangente e ortogonal ao círculo f em s

Exemplo 2.2.30. (*vetor tangente e normal ao círculo*) Seja um círculo definido pela imagem do caminho $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(s) = p + r \cdot (\cos s, \sin s)$ e o ponto $f(\pi) = (p_1 - 1, p_2)$. Como $f'(s) = r \cdot (-\sin s, \cos s)$, logo $T(s) = (-\sin s, \cos s)$ e assim $T(\pi) = (0, -1)$. Como $n(s) = (-\cos s, -\sin s)$, então $n(\pi) = (1, 0)$. O vetor aceleração no caminho de f é dado por $f''(s) = r(-\cos s, -\sin s) = r \cdot n(s)$, assim $f''(\pi) = r \cdot n(\pi) = (r, 0)$.

Note que o vetor normal tem a mesma direção e sentido do vetor de aceleração centrípeta (nome dado a um vetor aceleração no círculo).

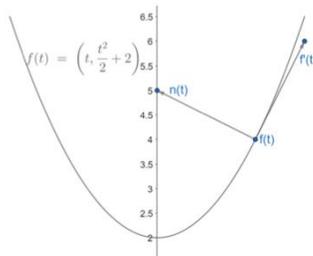


Figura 2.8: Vetor tangente e ortogonal à parábola f em s

Exemplo 2.2.31. (*parábola*) Seja uma parábola definida pela imagem do caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(s) = (s, \frac{1}{2}s^2 + 2)$ e o ponto $f(2) = (2, 4)$. Como $f'(s) = (1, s)$, logo $T(s) = \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s^2} \cdot (1, s)$ e assim o vetor tangente unitário à parábola em $s = 2$ é o vetor $T(2) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (1, 2)$. Como $n(s) = \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s^2} \cdot (-s, 1)$, assim $n(2) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (-2, 1)$.

Como $N(s) = (-s, 1)$, logo $N(2) = (-2, 1)$. Deve existir um ponto $N \in \mathbb{R}^2$ tal que $N = N(2) + f(2) = (-2, 1) + (2, 4) = (0, 5)$.

Exemplo 2.2.32. (vetor tangente e normal à parábola) Seja uma parábola definida pela imagem do caminho $f(s) = (s, as^2 + bs + c)$. Como $f'(s) = (1, 2as + b)$ e assim $T(s) = \frac{\sqrt{1^2+(2as+b)^2}}{1^2+(2as+b)^2} \cdot (1, 2as + b)$ e $n(s) = \frac{\sqrt{1^2+(2as+b)^2}}{1^2+(2as+b)^2} \cdot (-2as - b, 1)$.

Exemplo 2.2.33. (vetor tangente e normal à elipse) Seja uma elipse definida pela imagem do caminho $f(s) = (x_0 + a \cos s, y_0 + b \sin s)$. Como $f'(s) = (-a \sin s, b \cos s)$, logo $T(s) = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s}}{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s} \cdot (-a \sin s, b \cos s)$ então $n(s) = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s}}{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s} \cdot (-b \cos s, -a \sin s)$

Exemplo 2.2.34. (vetor tangente e normal à espiral logaritma) Seja uma espiral logaritma definida pela imagem do caminho $f(s) = e^s(\cos s, \sin s)$ tal que $f'(s) = e^s(\cos s - \sin s, \sin s + \cos s)$. Como $\|f'(s)\| = e^s\sqrt{2}$ (exemplo 2.2.6), logo $T(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos s - \sin s, \sin s + \cos s)$ e $n(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sin s - \cos s, \cos s - \sin s)$

2.2.6 Curvatura

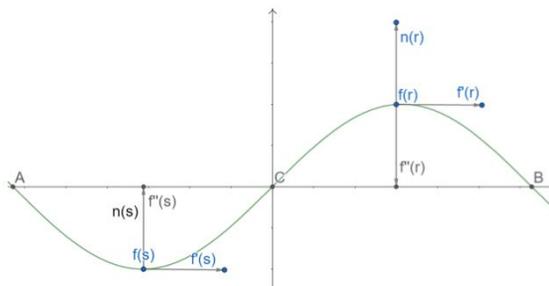


Figura 2.9: Vetor normal $n(s)$ e vetor $f''(s)$

O vetor $f''(a) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f'(a+s) - f'(a)}{s}$ é o vetor aceleração de f em a que pode ser visto como a variação do vetor velocidade f' que é um vetor que aponta para direção do

percurso da curva. O vetor aceleração $f''(a)$ tem a mesma direção do vetor $f'(a+s) - f'(a)$ para um s muito pequeno. Quando s tende a zero, o vetor $f'(a+s) - f'(a)$ tende a ser ortogonal ao vetor $f'(a)$, apontando para direção da concavidade da curva, como na figura 2.9.

Assim o vetor $f''(s)$ é perpendicular a $f'(s)$. Mas $f'(s)$ têm a direção de $T(s)$ que é perpendicular a $n(s)$ por definição, logo $f''(s)$ e $n(s)$ têm a mesma direção e terão mesmo sentido quando $T(s)$ estiver rotacionando para esquerda em $[s, s + \delta]$ e sentidos contrários quando $T(s)$ estiver rotacionando para direita em $[s, s + \delta]$.

Seja f um caminho suave parametrizado por comprimento de arco. Assim o vetor tangente unitário tem norma 1, ou seja,

$$\begin{aligned} \|T(s)\| = 1 &\Leftrightarrow \|T(s)\|^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \langle T(s), T(s) \rangle = 1 &\Leftrightarrow \langle T(s), T(s) \rangle' = 1' \Leftrightarrow \\ \langle T'(s), T(s) \rangle + \langle T(s), T'(s) \rangle &= 0 \Leftrightarrow \\ 2 \langle T'(s), T(s) \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle T'(s), T(s) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Como $\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$, logo qualquer vetor em \mathbb{R}^2 pode ser dado por uma combinação linear entre T e n , assim:

$$\begin{aligned} T'(s) &= \langle T'(s), T(s) \rangle \cdot T(s) + \langle T'(s), n(s) \rangle \cdot n(s) \Leftrightarrow \\ T'(s) &= \langle T'(s), n(s) \rangle \cdot n(s) \end{aligned}$$

Definição 2.2.26. (*curvatura*) Seja f um caminho suave parametrizado por comprimento de arco. O número $k(s) = \langle T'(s), n(s) \rangle$ é chamado de curvatura de f em s .

Definição 2.2.27. (*1ª Equação de Frenet*) A equação $T'(s) = k(s) \cdot n(s)$ é chamada de 1ª equação de Frenet.

Definição 2.2.28. (*senal da curvatura*) Seja $k(s)$ a curvatura do caminho f no ponto $f(s)$. O valor absoluto da curvatura $k(s)$ mede a rapidez com que f muda de direção; seu sinal indica a "concauidade" ou a "convexidade" do caminho. Isto é,

(1) se $k(s) > 0$ então o vetor f' e a o vetor n têm a mesma direção.

(2) se $k(s) < 0$ então o vetor f' e a o vetor n têm direções opostas.

Quando $f''(s) = 0$, denominamos $f(s)$ um ponto de inflexão no caminho de f .

Teorema 2.2.2. A curvatura de um caminho regular e suave $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por

$$k(s) = \frac{\langle T'(s), n(s) \rangle}{\|T'(s)\|^3} = \frac{\det(f'(s), f''(s))}{\|f'(s)\|^3} = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Prova: (ver Costa [9] na sua proposição 2.7 e Coimbra [8] pág 31)

Exemplo 2.2.35. (*curvatura do círculo parametrizado por comprimento de arco*) (ver exemplo 2.2.25) Seja o círculo parametrizado por comprimento de arco definido pela imagem do caminho $f : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(s) = (a + r \cos(\frac{s}{r}), b + r \sin(\frac{s}{r}))$. Como $f'(s) = (-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})) = T(s)$, logo $n(s) = (-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r}))$ e $f''(s) = \frac{1}{r} \cdot (-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r}))$, então $f''(s) = \frac{1}{r} \cdot n(s)$ e portanto um círculo de raio r tem curvatura constante, igual a $\frac{1}{r}$.

Exemplo 2.2.36. (*ponto de inflexão*) Na figura 2.9, esboçamos a imagem de um senoide definida pela imagem do caminho $f(s) = (s, \sin s)$. Como $f'(s) = (1, \cos s)$,

$$T(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 s}}, \frac{\cos s}{\sqrt{1+\cos^2 s}} \right), n(s) = \left(\frac{-\cos s}{\sqrt{1+\cos^2 s}}, \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 s}} \right) \text{ e}$$

$$T'(s) = -\left(\frac{-2 \sin s \cdot \cos s}{2\sqrt{(1+\cos^2 s)^3}}, \frac{\sin s \cdot \sqrt{1+\cos^2 s} - 2 \sin s \cdot \cos^2 s}{2\sqrt{(1+\cos^2 s)^2}} \right) = \frac{-\sin s}{1+\cos^2 s} \cdot n(s), \text{ assim } k(s) = \frac{-\sin s}{1+\cos^2 s}.$$

Logo:

(1) $k > 0$ quando $\sin s < 0$, ou seja, se $s \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}} [k\pi, (k+1)\pi]$

(2) $k < 0$ quando $\sin s > 0$, ou seja, se $s \in \bigcup_{k \in 2\mathbb{Z}} [k\pi, (k+1)\pi]$

(3) O ponto de inflexão ocorre quando $\sin s = 0$, ou seja, quando $s \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
 Analisando a figura 2.9, temos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $f(a) = A$, $f(b) = B$ e $f(c) = C$, $a < c < b$. No trecho AC , temos $k > 0$, enquanto que $k < 0$ no trecho CB . No ponto C , temos $k = 0$ e esse ponto é chamado de ponto de inflexão.

Exemplo 2.2.37. (curvatura da parábola) Seja uma parábola definida pela imagem do caminho $f(s) = (s, as^2 + bs + c)$. Como $f'(s) = (1, 2as + b)$ e $f''(s) = (0, 2a)$, logo f é regular, suave e não está parametrizada por comprimento de arco. Pelo teorema 2.2.2, $k(s) = \frac{1 \cdot 2a - 0 \cdot (2as + b)}{(1^2 + (2as + b)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{\sqrt{(1 + (2as + b)^2)^3}}$

Exemplo 2.2.38. (curvatura da elipse) Seja uma elipse definida pela imagem do caminho $f(s) = (x_0 + a \cos s, y_0 + b \sin(s))$. Como $f'(s) = (-a \sin(s), b \cos(s))$ e $f''(s) = (-a \cos(s), -b \sin(s))$, logo f é regular, suave e não está parametrizada por comprimento de arco. Pelo teorema 2.2.2, $k(s) = \frac{-a \sin(s) \cdot -b \sin(s) + a \cos(s) \cdot b \cos(s)}{\sqrt{(a^2 \sin^2(s) + b^2 \cos^2(s))^3}}$, assim $k(s) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2(s) + b^2 \cos^2(s))^3}}$

Exemplo 2.2.39. (curvatura da reta) Seja uma reta definida pela imagem do caminho $f(s) = (s; as + b)$. Como $f'(s) = (1, a)$ e $f''(s) = (0, 0)$, logo f é regular, suave e não está parametrizada por comprimento de arco. Pelo teorema 2.2.2, $k(s) = \frac{1 \cdot 0 - 0 \cdot a}{(1^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, assim $k(s) = 0$.

Exemplo 2.2.40. (curvatura da espiral logaritma) Seja uma espiral logaritma definida pela imagem do caminho $f(s) = e^s(\cos s, \sin s)$. Por 2.2.34 $T(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos s - \sin s, \sin s + \cos s)$ e $n(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sin s - \cos s, \cos s - \sin s)$, tem-se $T'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sin s - \cos s, \cos s - \sin s)$, logo $k(s) = \langle T'(s), n(s) \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sin s - \cos s, \cos s - \sin s), \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sin s - \cos s, \cos s - \sin s) \right\rangle \Rightarrow k(s) = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$

2.2.7 Aplicações diferenciáveis em \mathbb{R}^n

Definição 2.2.29. (*diferenciável no ponto*) A aplicação de $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a+v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$$

Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, é diferenciável no ponto $a \in U$ então, dado qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^m$ temos

$$f'(a) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right)$$

Definição 2.2.30. (*derivada direcional num ponto*) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. A derivada direcional de f num ponto $a \in U$, relativamente a um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, é por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^n$$

quando tal limite existe.

A transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui em relação às bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , uma matriz $n \times m$ chamada matriz jacobiana de f no ponto a , designada por $Jf(a)$. Suas m colunas são os vetores $f'(a) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right)$. Assim

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix},$$

onde $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções-coordenada de f . Cada uma das n linhas $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \right)$ é a matriz $1 \times m$ do funcional linear $df_i(a)$, o diferencial da i -ésima função coordenada f_i . Para todo $v \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\begin{aligned} f'(a) \cdot v &= \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right) = \\ &= (df_1(a) \cdot v, \dots, df_n(a) \cdot v) \end{aligned}$$

onde as n aplicações $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, definidas no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, são diferenciáveis no ponto $a \in U$. As diferenciais das aplicações f_i no ponto são os funcionais lineares $df_i(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, cujo valor no vetor $v \in \mathbb{R}^m$ são dados por

$$df_i(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \right) = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a).$$

Quando as n aplicações f_i são diferenciáveis em todo ponto de U , obtêm-se n aplicações $df_i : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, que associam a cada ponto de $x \in U$ os funcionais lineares df_i , cuja matriz é

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(x) \right)$$

Definição 2.2.31. (*aplicação diferenciável*) Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ quando é diferenciável em todos os pontos de U .

Proposição 2.2.4. (*Diferencial contínua e de classe C^1*) As n aplicações df_i são contínuas se, e somente se, cada uma das suas m funções coordenadas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, isto é, cada uma das n aplicações f_i é de classe C^1 .

O espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é formado pelas transformações lineares $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.32. (*aplicação derivada*) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação derivada $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ que associa a cada ponto $x \in U$ a transformação linear $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivada em f em x .

Definição 2.2.33. (*aplicação derivada direcional*) Seja f uma aplicação diferenciável e $U \subset \mathbb{R}^m$. Para cada $v \in \mathbb{R}^m$, a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujo valor num ponto $x \in U$ é a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = f'(x) \cdot v$.

Definição 2.2.34. (*superfície parametrizada regular*) Uma superfície é uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $m < n$ onde U é um aberto de \mathbb{R}^m , tal que:

a) f é diferenciável de classe C^∞ ;

b) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de f em q , $df(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetora, onde u e v são parâmetros.

Exemplo 2.2.41. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície de parâmetros u e v . Assim $f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$. Para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $f(u, v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 . O Jacobiano de f é dado por:

$$Jf(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.2.42. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(x_1, x_2) = (m_1x_1 + m_2x_2, m_3x_1 + m_4x_2, m_5x_1 + m_6x_2)$, $m_i \in \mathbb{R}$. Note que F é diferenciável para todo ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e a matriz jacobiana é dada por:

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \\ m_5 & m_6 \end{bmatrix},$$

2.3 Medida e integração

2.3.1 σ -álgebra de Borel

As observações abaixo foram feitas a partir dos escritos de Azevedo [2] e Boer [6]. Markarian e Chernov [7] mostraram como aplicações em σ -álgebras preservam medida e como as transformações ergódicas se aplicam no bilhar.

Definição 2.3.1. (Topologia) Uma família \mathcal{B} de subconjuntos de um conjunto Ω é denominada uma topologia em Ω se \mathcal{B} possui as seguintes propriedades:

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{B}$.

(2) A união dos conjuntos de qualquer subfamília de \mathcal{B} (finita, enumerável ou não-enumerável) pertence a \mathcal{B} , ou seja, se $U_1, \dots, U_i \in \mathcal{B}$ então $\bigcup_{j=1}^i U_j \in \mathcal{B}$.

(3) A intersecção dos conjuntos de toda subfamília finita de \mathcal{B} pertence a \mathcal{B} , ou seja, se $U_1, \dots, U_i \in \mathcal{B}$ então $\bigcap_{j=1}^i U_j \in \mathcal{B}$.

Exemplo 2.3.1. (topologia trivial) $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ é uma topologia para qualquer que seja Ω e \mathcal{B}_0 é chamado de topologia trivial.

Exemplo 2.3.2. Seja $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Assim $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ e $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \Omega\}$ são topologias enquanto que $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$ não é uma topologia. Pois $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{C}$.

Definição 2.3.2. (espaço topológico) (Ω, \mathcal{B}) será chamado de espaço topológico se existir uma topologia \mathcal{B} em Ω .

Os elementos de \mathcal{B} são conjuntos abertos/semi-abertos em Ω . Um subconjunto U de Ω é aberto/semi-aberto, se $U \in \mathcal{B}$

Definição 2.3.3. (espaço topológico separável) Os espaços topológicos que admitem um subconjunto denso enumerável denominam-se separáveis.

Definição 2.3.4. (transformação contínua) Sejam (Ω_1, \mathcal{A}) e (Ω_2, \mathcal{B}) espaços topológicos e $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ uma aplicação. A aplicação f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é um aberto/semi-aberto em \mathcal{A} para todo aberto/semi-aberto U em \mathcal{B} .

Definição 2.3.5. (álgebra) Seja \mathcal{B} uma família de subconjuntos de Ω . \mathcal{B} é uma álgebra se, e só se, $\Omega \in \mathcal{B}$, \mathcal{B} é fechado para o complementar e união finita, ou seja,

(1) $\Omega \in \mathcal{B}$,

(2) Se $U \in \mathcal{B}$ então $\Omega \setminus U \in \mathcal{B}$, e

(3) Se $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{B}$ então $\bigcup_{i=1}^n U_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (\Omega \setminus U_i) \in \mathcal{B}$.

Exemplo 2.3.3. Seja $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Observe que $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \Omega\}$ é uma topologia, no entanto \mathcal{B} não é uma álgebra, pois $\Omega \setminus \{1\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{1\} = \{2, 3\} \notin \mathcal{B}$.

Teorema 2.3.1. Toda álgebra é uma topologia.

Demonstração. A propriedade (1) de topologia: Seja \mathcal{B} uma álgebra, logo $\Omega \in \mathcal{B}$ e $\Omega \setminus \Omega = \emptyset \in \mathcal{B}$; A propriedade (2) de topologia coincide com a propriedade (3) de álgebra; A propriedade (3) de topologia coincide com a segunda parte da propriedade (3) de álgebra. \square

Considera-se que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$, ou seja, o conjunto dos números naturais inicia no zero.

Definição 2.3.6. (σ -álgebra) Seja \mathcal{B} uma família de subconjuntos de Ω . \mathcal{B} é uma σ -álgebra se, e só se, $\Omega \in \mathcal{B}$, \mathcal{B} é fechado para o complementar e união enumerável, ou seja,

(1) $\Omega \in \mathcal{B}$,

(2) Se $U \in \mathcal{B}$ então $\Omega \setminus U \in \mathcal{B}$, e

(3) Se existe $f : \mathbb{N} \rightarrow U_i$, com $f(i) = U_i \in \mathcal{B}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus U_i) \in \mathcal{B}$.

Definição 2.3.7. Seja \mathcal{B} uma família de subconjuntos de Ω .

(1) $\sigma(\mathcal{B})$ será definida como a menor σ -álgebra de Ω que contém \mathcal{B} .

(2) $\sigma(\mathcal{B})$ é dita a σ -álgebra gerada por \mathcal{B} .

(3) $\sigma(\mathcal{B})$ pode ser definido como a intersecção de todas σ -álgebras que contém \mathcal{B} .

(4) A menor σ -álgebra de Ω é $\mathcal{B}_0 = \sigma(\emptyset) = \sigma(\Omega) = \{\emptyset, \Omega\}$, também chamada de

σ -álgebra trivial com cardinalidade 2, ou seja, $\#(\sigma(\emptyset)) = 2$.

(5) A maior σ -álgebra de subconjuntos de Ω contendo Ω é $\mathcal{P}(\Omega)$, a família de todos os subconjuntos de Ω com cardinalidade $2^{\#(\Omega)}$, ou seja, $\#(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\|\Omega\|}$.

Definição 2.3.8. (traço de uma σ -álgebra) Se $U \subset \Omega$ então o traço de U é a σ -álgebra $\sigma(U) = \{\emptyset, U, \Omega \setminus U, \Omega\}$. $\sigma(U)$ é a menor σ -álgebra de Ω que contém U .

Exemplo 2.3.4. Seja $\Omega = (0, 1]$ um intervalo unitário, ou seja, de comprimento 1. Nesse intervalo toma-se uma família de subintervalos $I = (a, b]$ de forma que os intervalos sejam abertos à esquerda e fechados à direita, ou seja, $(B) = \{(a, b] : 0 \leq a < b \leq 1\}$.

De fato seja $(0, \frac{1}{2}] \subset (0, 1]$, assim $\sigma((0, \frac{1}{2}]) = \{\emptyset, (0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1], (0, 1]\}$ é a menor σ -álgebra de $(0, 1]$ que contém $(0, \frac{1}{2}]$.

Teorema 2.3.2. Seja $\Omega = (0, 1]$, e $0 < a_i \leq b_i \leq 1, i \in \mathbb{N}$ e $I_i = (a_i, b_i]$ com $\|I_i\| = b_i - a_i$. Considere os conjuntos $U = \bigcup_{i=1}^n I_i$ onde os intervalos I_i são disjuntos e contidos em Ω . Seja \mathcal{B} uma família de subconjuntos U de Ω , fechada para união finita, incluindo o vazio. \mathcal{B} é uma álgebra de subconjuntos de $(0, 1]$.

Demonstração. (1) Seja $U = (0, 1] = \Omega$, logo $\Omega \in \mathcal{B}$,

(2) Seja $U = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \dots \cup (a_n, b_n]$, com $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Se os $(a_i, b_i]$ são disjuntos, então $\Omega \setminus U = (0, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup \dots \cup (b_{n-1}, a_n] \in \mathcal{B}$, onde alguns desses intervalos podem ser vazios, e

(3) Sejam $U = \bigcup_{i=1}^n I_i$ e $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n J_i$ então $U \cap \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n I_i \cap \bigcup_{j=1}^n J_j = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n (I_i \cap J_j) \in \mathcal{B}$ é a união finita de todas as intersecções entre os intervalos I_i e J_j , onde cada parcela é um intervalo disjunto ou vazio. \square

Teorema 2.3.3. Seja \mathcal{B} uma álgebra de subconjuntos de $(0, 1]$. \mathcal{B} não é uma σ -álgebra de subconjuntos de $(0, 1]$.

Demonstração. Seja $U = \bigcap_{i=1}^{\infty} (x - \frac{1}{n}, x] = \{x\} \notin \mathcal{B}$. Pela definição 3.1.5, item 3', $U \in \mathcal{B}$. □

Exemplo 2.3.5. *A união de σ -álgebras nem sempre é uma σ -álgebra. Sejam as σ -álgebras $\sigma(\mathcal{A})$ e $\sigma(\mathcal{B})$ disjuntas e não complementares em relação a Ω . A união delas é o conjunto $\{\emptyset, A, B, \Omega \setminus A, \Omega \setminus B, \Omega\}$ que por regra não é uma álgebra e nem uma σ -álgebra.*

Observação 2.3.1. *Sejam $U, V \subset \Omega$ e \mathcal{B} é uma σ -álgebra de Ω . Observe que:*

- (1) $U \subset \sigma(U)$,
- (2) Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ então $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$,
- (3) Se U é uma σ -álgebra, então $\sigma(U) = U$,
- (4) Se $U \subset V$, então $\sigma(U) \subset \sigma(V)$,
- (5) Se $U \subset V$ e $V \in \sigma(U)$, então $\sigma(U) = \sigma(V)$.

Definição 2.3.9. *(conjuntos de Borel de Ω)* Seja $\mathcal{B}(\Omega)$ a σ -álgebra gerada pelos subconjuntos abertos/semi-abertos de Ω . Os conjuntos pertencentes a $\mathcal{B}(\Omega)$ são chamados de conjuntos de Borel de Ω ou de borelianos de Ω .

Exemplo 2.3.6. *(Conjuntos de Borel)* Seja \mathcal{A} uma família de subintervalos semi-abertos do intervalo unitário $\Omega = (0, 1]$. Os elementos da σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ são chamados de conjuntos de Borel do intervalo unitário $\Omega = (0, 1]$.

Exemplo 2.3.7. *(σ -álgebra de Borel)* Seja \mathcal{A} uma família formada por subintervalos do intervalo unitário $\Omega = (0, 1]$ e \mathcal{C} uma álgebra formado pela união dos elementos de \mathcal{A} , logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Como \mathcal{C} não é uma σ -álgebra, logo $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Assim a álgebra \mathcal{C} satisfaz $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$. Pela observação 2.3.1(5), implica que $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{C})$. $\sigma(\mathcal{C})$ é dita a σ -álgebra de Borel ou um Boreliano. Observe que $\sigma(\mathcal{C})$ não contém todos os subconjuntos de $\Omega = (0, 1]$.

Exemplo 2.3.8. *Seja \mathcal{A} a família de todos os subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n , assim $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ é a menor σ -álgebra que contém \mathcal{A} e também é a menor σ -álgebra que contém todos os subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n .*

2.3.2 Medida

Algumas definições aqui foram baseadas nos escritos de Markarian [7], Fernandes [11], Billingsley [4], Rudin [22], Fomin [12] e Mañé [16].

Definição 2.3.10. *(espaço mensurável) Seja Ω um conjunto e \mathcal{B} uma σ -álgebra sobre Ω . (Ω, \mathcal{B}) é dito espaço mensurável.*

Definição 2.3.11. *(conjunto mensurável) Seja (Ω, \mathcal{B}) um espaço mensurável e $U \in \mathcal{B}$. O conjunto aberto U é dito mensurável.*

Definição 2.3.12. *(medida) Seja (Ω, \mathcal{B}) um espaço mensurável. Uma medida é uma aplicação $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ tal que:*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) *(aditividade) se A_1, A_2, \dots são conjuntos disjuntos de \mathcal{B} e se $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$ então*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(3) *se $(A_i)_{i \in L}$ é uma família de subconjuntos de Ω dois a dois disjuntos, se $C \subset \Omega$ e se $\bigcup_{i \in L} A_i \subset C$ então $\sum_{i \in L} \mu(A_i) \leq \mu(C)$.*

Exemplo 2.3.9. *O exemplo mais padrão de σ -álgebra de Borel é a medida de Lebesgue no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um cubo em \mathbb{R}^n é o produto cartesiano $Q = J_1 \times \dots \times J_n$ onde J_i é um intervalo aberto/semi-aberto e o volume de Q é definido por*

$$\text{Vol}(Q) = ||J_1|| \cdot ||J_2|| \cdot \dots \cdot ||J_n||$$

Teorema 2.3.4. *(medida de Lebesgue) Existe uma única medida λ na σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n tal que $\lambda(Q) = \text{Vol}(Q)$ para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.3.10. (medida de Lebesgue em \mathbb{R}^2) Seja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ é a σ -álgebra dos boreleanos de \mathbb{R}^2 . Existe uma única medida $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \rightarrow [0, \infty)$ tal que, se $U = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$,

$$\lambda(U) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

Exemplo 2.3.11. Seja $\mathcal{B}((0, 1])$ uma σ -álgebra de Borel dos subconjuntos de $(0, 1]$ que são uniões finitas de intervalos disjuntos, $U \in \mathcal{B}((0, 1])$, isto é, $U = \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]$. Assim

$$\mu(U) = \sum_{i=1}^n |I_i| = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i), U \in \mathcal{B}((0, 1]).$$

Definição 2.3.13. (medida de probabilidade) Uma aplicação de conjuntos $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ definida em um espaço métrico (Ω, \mathcal{B}) é uma medida de probabilidade se:

- (1) $0 \leq \mu(U) \leq 1$, para todo $U \in \mathcal{B}$,
- (2) $\mu(\emptyset) = 0, \mu(\mathcal{B}) = 1$
- (3) (enumeravelmente aditivo) se U_1, U_2, \dots são conjuntos disjuntos \mathcal{B} -mensuráveis, e se $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{B}$ então $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i)$

Definição 2.3.14. (espaço de medida de probabilidade) Se μ é uma medida de probabilidade definida no espaço métrico (Ω, \mathcal{B}) então a trinca $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ é dita um espaço de medida de probabilidade.

Definição 2.3.15. (conjunto de medida zero) Seja $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ e $U \in \mathcal{B}$. U tem medida zero se $\mu(U) = 0$.

Exemplo 2.3.12. (segmentos de reta) Seja $((a, a+n), \mathcal{B}((a, a+n)), \mu)$ um espaço de medida de probabilidade de maneira que $\mu(U) = \frac{|U|}{n}$, onde $|(b, c)| = c - b$ para $a \leq b < c \leq a+n$. Observe que $(a, a+1) \subset \mathcal{B}((a, a+n))$ para todo $a \in \mathbb{R}$. A medida do segmento $(a, a+n)$ é dado por $|(a, a+n)| = 1$. Observe que $(a, a+n) \setminus \bigcup_{i=1}^n (a+i-1, a+i) =$

$\{a + 1, a + 2, \dots, a + n - 1\} = V \subset \mathcal{B}(a, a + n)$. Note que a medida de V ou de seus subconjuntos é zero.

De fato, se $\bigcup_{i=1}^n (a + i - 1, a + i)$ é disjunto de V , logo $1 = \mu(a, a + n) = \mu(\bigcup_{i=1}^n (a + i - 1, a + i)) + \mu(V) \leq 1$, e como a $\mu(\bigcup_{i=1}^n (a + i - 1, a + i)) = 1$, logo $\mu(V) = 0$.

Definição 2.3.16. (*μ -quase todo ponto*) Seja $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, $x \in \Omega$, $U \in \mathcal{B}$ e $\mu(U) = 0$. Se uma regra r é válida para todo $x \in \Omega \setminus A$ é dito que a regra vale para μ -q.t.p. de $x \in \Omega$.

2.3.3 Aplicações que preservam medida

Observações feitas a partir dos escritos de Santiago [23] e de Markarian [7].

Definição 2.3.17. (*aplicação mensurável*) Sejam (Ω_1, \mathcal{A}) e (Ω_2, \mathcal{B}) espaços mensuráveis. Uma aplicação $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ é dita mensurável com respeito as σ -álgebras \mathcal{A}, \mathcal{B} se $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ para todo $U \in \mathcal{B}$.

Teorema 2.3.5. (*aplicação mensurável num boreliano*) Sejam (Ω_1, \mathcal{A}) e (Ω_2, \mathcal{B}) espaços topológicos e $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ uma aplicação tal que $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ é um conjunto de Borel de Ω_1 , para todo subconjunto aberto U de Ω_2 , então f é mensurável.

(*contínua mensurável*) Toda função $g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ contínua, é mensurável.

Prova feita na proposição I.3.1 Markarian [7]

Definição 2.3.18. (*Aplicações que preservam medida*) Sejam $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mu)$ e $(\Omega_2, \mathcal{B}, \lambda)$ espaços de medida. A aplicação $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ preserva medida se

$$U \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \text{ e } \mu(f^{-1}(U)) = \lambda(U)$$

Exemplo 2.3.13. (*translação de \mathbb{R}^n*) Para todo $k, x \in \mathbb{R}^n$, a translação $L_k : \mathbb{R}^n$ tal que $L_k(x) = (k_1 + x_1, \dots, k_n + x_n)$

Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação que preserva medida num espaço métrico compacto $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$. Note que $T^{-1}(\mathcal{B}(\Omega)) \subset \mathcal{B}(\Omega)$, pelo fato do conjunto $\{U \in \mathcal{B}(\Omega) : T^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\Omega)\}$ ser uma σ -álgebra e conter todos os conjuntos abertos.

Definição 2.3.19. (*T-invariante*) Seja $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida de probabilidade e uma aplicação $T : \Omega \rightarrow \Omega$ que preserva medida.

(1) Uma medida $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ é *T-invariante* se, para todo $U \in \mathcal{B}$, sua pré-imagem $T^{-1}(U)$ também pertence a \mathcal{B} e $\mu(U) = \mu(T^{-1}(U))$.

(2) Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é *T-invariante* se $f(T(x)) = f(x)$ para q.t.p. $x \in \Omega$

(3) Um conjunto $U \in \mathcal{B}$ é *T-invariante* se $T^{-1}(U) = U$.

Exemplo 2.3.14. (*Volume de uma bola aberta trasladada*) Seja $\Omega = \{B(a, r) : a \in \mathbb{R}^3, r > 0\}$ o conjunto de todas as bolas abertas de \mathbb{R}^3 . Seja $\beta(\Omega)$ a menor σ -álgebra de Borel que contém Ω e V uma medida sobre Ω , sendo $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com $V(B(x, r)) = \frac{4}{3}\pi r^3$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Considere $L_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $L_u(B(y, r)) = B(y + u, r)$ uma translação da bola $B(a, r)$ no \mathbb{R}^3 pelo vetor $u \in \mathbb{R}^3$, assim $L_u(B(a, r))$ é uma bola de centro $a + u$ e raio r . Note que a medida V é L_u -invariante para todo $u \in \mathbb{R}^3$, ou seja, $V(L_u(B(a, r))) = V(B(a, r))$.

Exemplo 2.3.15. (*rotação de disco*) Seja uma rotação no plano $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $R(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Note que a rotação de qualquer disco com centro na origem é o próprio disco, ou seja, $R^{-1}(a) = a$. Assim qualquer disco com centro na origem é um conjunto R -invariante.

Exemplo 2.3.16. (*Área do disco*) Seja $\Omega = \{D(a, r) : a \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ o conjunto de todos os discos abertos de \mathbb{R}^2 e $\mathcal{B}(\Omega)$ a menor σ -álgebra de Borel que contém Ω e A uma medida sobre Ω , sendo $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $A(D(x, r)) = \pi r^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Considere $L_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $L_u(D(y, r)) = D(y + u, r)$ uma translação do disco $D(a, r)$ no \mathbb{R}^2

pelo vetor $u \in \mathbb{R}^2$, assim $L_u(D(a, r))$ é um disco de centro $a + u$ e raio r . Note que a medida A é L_u -invariante para todo $u \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $A(L_u(D(a, r))) = A(D(a, r))$.

Exemplo 2.3.17. (rotação de elipse) Seja uma rotação de 180° no plano dada por

$R(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Note que a rotação de qualquer elipse com centro na origem é a própria elipse. Assim essa elipse é um conjunto R -invariante.

Teorema 2.3.6. Seja T uma aplicação que preserva medida de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Dado $U \subset \mathcal{B}$, seja $U_0 = \{x \in U : T^n(x) \in U : n \geq 0\}$. Então U_0 faz parte de \mathcal{B} , e $\mu(U) = \mu(U_0)$.

Prova: Teorema I.5.1 de Markarian [7].

Na verdade, a situação mais frequente é quando T tem infinitas probabilidades invariantes. Quando T tem finitas probabilidades invariantes tem apenas uma (porque se tem duas, digamos μ_1 e μ_2 , então todas as combinações lineares $\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, seriam medidas de probabilidades invariantes), e então T tem uma propriedade ergódica extremamente forte.

Definição 2.3.20. (convexo) Um conjunto U é convexo se

$$\{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\} \subset U \text{ para todo } x, y \in U$$

Definição 2.3.21. (unicamente ergódica) Seja T uma aplicação contínua que preserva medida de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Se o espaço métrico compacto (Ω, \mathcal{B}) possui exatamente uma medida de probabilidade T -invariante, a aplicação T é chamada de unicamente ergódica

A classe de aplicações unicamente ergódicas de \mathbb{R}^n é bem restrita. Os exemplos clássicos são de translações em \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.3.18. (*disco*) Sejam $\Omega = \{B[a, r] : a \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}\}$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $f(x) = x$ uma aplicação que preserva medida de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), A)$, sendo $A(U)$ a área de $U \subset \mathcal{B}(\Omega)$. A área de U , $A(U) = A(f^{-1}(U))$. Logo A é uma medida de probabilidade f -invariante.

2.4 Ergodicidade

Definição 2.4.1. (*ergódica*) Seja T uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$. $T : \Omega \rightarrow \Omega$ é dita ergódica se todo conjunto T -invariante tem medida 0 ou 1.

Definição 2.4.2. Sejam $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $U \subset \mathcal{B}$. χ_U é a denotação de uma função característica de U que é definida como:

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus U \\ 1, & \text{se } x \in U \end{cases}$$

Definição 2.4.3. (*função simples*) Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é simples quando é possível escrevê-la na forma $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_{\mathcal{A}_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, onde $\mathcal{A}_i = \{x : f(x) = \lambda_i\} \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$ e $\mu(\mathcal{A}_i) < \infty$ quando $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \vec{0}$, tal que $g_{\mathcal{A}_i}$ é a função característica de \mathcal{A}_i . f é mensurável se, e somente se, cada conjunto \mathcal{A}_i é mensurável.

Definição 2.4.4. (*integral de uma função*) Seja $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função é simples quando pode ser escrita da forma

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(\mathcal{A}_i).$$

Uma função simples é integrável se a série converge absolutamente

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(A_i) < +\infty$$

e neste caso a integral de f é definida como:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(A_i)$$

Definição 2.4.5. *Sejam $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto conexo, $K = [0, \frac{\pi}{2}] \times \Gamma$ um sólido e uma aplicação $T : K \rightarrow K$. Denote λ_p a medida de Lebesgue em Γ (uma medida sobre os boreleanos de Γ tal que se $U \subset \Gamma$ é um arco suave então $\lambda_p(U)$ é o comprimento de U). Denotemos por λ a medida de Lebesgue em \mathbb{R} . Então $\lambda_p \times \lambda$ é uma medida em K .*

Definição 2.4.6. *Birkhoff demonstrou que a medida μ em K definida por:*

$$\mu(A) = \int_A \text{sen}\theta d(\lambda_p \times \lambda)$$

é invariante sob T .

Definição 2.4.7. *(Ergodicidade de uma órbita) Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Uma órbita de $x \in \Omega$ é denotada pelo conjunto $\mathcal{O}(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. De fato, $T^{-1}(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{O}(x)$, logo $\mathcal{O}(x)$ é um conjunto T -invariante e $\mu(\mathcal{O}(x)) = 0$*

Definição 2.4.8. *(média dos segmentos de órbitas) Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável, considere a média dos segmentos de sua órbita,*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j(x))$$

Um dos resultados fundamentais da teoria ergódica é o teorema de Birkhoff que estabelece que a sequência das médias de funções integráveis sobre segmentos de órbita converge, para quase todo ponto (q.t.p.) de $x \in \Omega$ a um número denominado média orbital do ponto x no conjunto $A \subset \Omega$ calculado pela função \tilde{f} .

Teorema 2.4.1. (Birkhoff-Khinchin) *Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável, o limite*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j(x))$$

existe para q.t.p. $x \in \Omega$, e a função \tilde{f} é T -invariante, integrável e

$$\int_{\Omega} \tilde{f} d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \quad (2.1)$$

Um caso interessante é quando f é a função característica f_A de um conjunto $A \in \mathcal{B}$.

Para cardinalidade de um conjunto finito ou enumerável usa-se o símbolo $\#$.

Definição 2.4.9. (tempo médio de estadia) *Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. O tempo médio de estadia em A é a quantidade de elementos do conjunto $\mathcal{O}(x) \cap A$, que é dado por*

$$\tilde{f}_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{j : 0 \leq j \leq n-1 : T^j(x) \in A\}.$$

O teorema de Birkhoff afirma que o limite existe para q.t.p. $x \in \Omega$ e que $\tilde{f}_A(x)$ é uma função integrável dada por

$$\int_{\Omega} \tilde{f}_A(x) d\mu(x) = \mu(A).$$

Note que \tilde{f} é T -invariante, isto é, $\tilde{f}_A(x) = \tilde{f}_A(T(x))$ para q.t.p. $x \in \Omega$.

Definição 2.4.10. (Aplicação Ergódica) *Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. T é uma aplicação ergódica se todas as funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ forem T -invariantes e constantes para q.t.p. $x \in \Omega$. Então \tilde{f} deve ser constante e integrável para q.t.p. $x \in \Omega$. Então:*

$$\tilde{f}_A(x) = \mu(A) \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

Teorema 2.4.2. *(Teorema de recorrência de Poincaré) Seja $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ um espaço de medida de probabilidade e $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação mensurável que preserva medida de probabilidade $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ e $A \subset \mathcal{B}(\Omega)$, com $\mu(A) > 0$. Então q.t.p de A retorna para A infinitas vezes sob iterações positivas de T .*

Capítulo 3

Modelo bilhar e suas propriedades ergódicas

3.1 Aplicações na mesa de bilhar

3.1.1 Partícula pontual

"Bilhares são modelos matemáticos para muitas situações físicas onde uma ou mais partículas se movem livremente (sem fricção) em uma região (mesa) delimitada, sofrendo colisões elásticas em sua fronteira e/ou com as outras partículas."(TELES [25], 2012/MARKARIAN, 2001)

"Em certa medida, este modelo se assemelha a um popular jogo de bilhar (sinuca), onde algumas bolas são empurradas por meio de uma força externa (tacos) ao modelo, a fim de conduzi-las em bolsos de rede nos cantos da mesa (caçapas). Mas esse modelo parece muito mais simples - só há uma bola, a bola é apenas uma adimensional partícula pontual, move-se sem atrito, e a mesa não tem bolsos, apenas bordas. Por outro lado, a forma da mesa não é necessariamente retangular."(MARKARIAN, 2001)

Uma partícula é definida num sistema físico como um corpo que ocupa uma região R no espaço (\mathbb{R}^3) e que possui um centro de massa. Afim de tornar o estudo de bilhar mais simples, é observado o movimento da projeção do centro de massa C no plano $z = 0$, e assim há uma relação entre o movimento da partícula e do movimento da projeção do seu centro de massa, isto é, $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}, C = (x_c, y_c, z_c) \mapsto (x_c, y_c, 0)$.

Desta maneira um problema no espaço é estudado como se fosse um problema no plano $z = 0$ (Será usado apenas o plano \mathbb{R}^2 ao invés de usar o plano no espaço $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$). O movimento da projeção da partícula no plano $z = 0$ é visualizado como um ponto se movimentando no plano, pela qual será chamado de partícula pontual. Observe que ela é desprovida de comprimento, largura e altura.

O movimento da partícula pontual ocorrerá no fecho de uma região conexa $Q \subset \mathbb{R}^2$, com colisões na fronteira suave ∂Q (ou suave por partes). A fronteira da região ∂Q pode ser definida por uma curva suave (ex: elipse, círculo, parábola) ou por várias partes de curvas suaves (ex: segmento de reta, parte de uma curva suave).

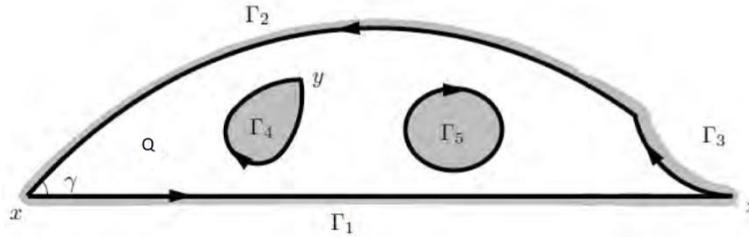


Figura 3.1: Curva suave por partes

Definição 3.1.1. (*momento linear*) Na mecânica clássica, momento linear é o produto da massa pela velocidade de um objeto.

Ao se considerar a massa unitária de uma partícula pontual e seu vetor velocidade unitário $v \in S^1$, seu momento será o próprio vetor velocidade unitário, $m = v_N \in S^1$.

Definição 3.1.2. *(lei de colisão perfeitamente elástica) A energia cinética da partícula que colide com a fronteira é conservada. A energia cinética é dada por $\frac{m \cdot v^2}{2}$. Como a partícula conserva a massa, vai conservar a velocidade escalar.*

A partícula pontual muda sua posição $p(t)$ com o passar do tempo, assim a sua posição é variada. Conforme move-se mantém seu vetor velocidade $v(t)$ até que colide com a mesa bilhar e muda a direção do seu movimento, mudando também seu vetor velocidade. Assim destacam-se duas equações que dependem do tempo, ou seja, um sistema dinâmico.

$$\frac{dp(t)}{dt} = v(t) \quad e \quad \frac{dv(t)}{dt} = 0.$$

O conjunto $\{(p(t), v(t)) : p(t) \in \mathbb{R}^2, v(t) \times S^1, t > 0\}$ é o chamado espaço de estados do sistema dinâmico bilhar. Será estudado uma componente do espaço de estados de cada vez.

3.1.2 Fronteira do bilhar

Nessa seção será estudado o conjunto de posições $\{p(t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$. A partícula pontual está limitada a se mover dentro de um conjunto conexo.

Segundo Markarian [17] e Andrade [1],

Definição 3.1.3. *Bilhar plano é o sistema dinâmico que descreve o movimento de uma partícula pontual em um conjunto conexo $Q \in \mathbb{R}^2$, chamada mesa de bilhar, cuja fronteira ∂Q é uma união finita de curvas suaves Γ_i , chamadas de componentes da fronteira da mesa bilhar ∂Q . Isto é,*

$$\partial Q = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i = \Gamma,$$

ou quando a curva é única, $\partial Q = \Gamma$.

Assim está definido que a partícula pontual irá mover-se dentro um conjunto conexo Q , podendo colidir em sua fronteira Γ .

Definição 3.1.4. (*caminho em Γ_i*) Seja $\Gamma_i \subset \partial Q$ uma componente da fronteira de Q . Uma parametrização da curva Γ_i é dada pelo caminho suave $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que é localmente injetora em $[a_i, b_i]$. O domínio de f_i é dado por $\text{Dom}(f) = [a_i, b_i]$ significa que o caminho percorrerá no sentido de a_i para b_i , ou seja, o caminho por Γ começa em $f(a_i)$ indo até $f(b_i)$, de maneira que o interior da mesa Q sempre fique a esquerda do vetor $T(s)$ unitário e tangente ao caminho suave f no ponto $f(s)$.

Note que as componentes externas da fronteira serão parametrizadas no sentido anti-horário e as componentes internas da fronteira serão parametrizadas no sentido horário para que o interior da mesa fique sempre à esquerda do vetor tangente.

Definição 3.1.5. (*arco*) Seja uma curva Γ_i definida pela aplicação $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se $f_i(a) \neq f_i(b)$ para todo $a, b \in I$ então

$$f_i(I) = \Gamma_i = \{f(x) : x \in I\}$$

é um arco.

(*curva fechada*) Se $f_i(a_i) = f_i(b_i)$ então Γ_i é uma curva fechada que é inteiramente suave se, e só se, não tiver vértice.

A componente da mesa bilhar será um arco quando o seu ponto de fronteira for ponto de fronteira de outra componente. Se o ponto de fronteira de uma componente for do próprio componente, a componente será uma curva fechada.

A fronteira da mesa deverá ter ser uma curva regular (definição 2.2.8) para que seja possível calcular a trajetória que a partícula terá após colidir-se, usando o vetor de reflexão $v(t+0)$.

Exemplo 3.1.1. *Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(s) = (\cos s, \sin s)$ que é uma aplicação regular em $(0, \pi)$. Note que f é um arco.*

Exemplo 3.1.2. *Seja $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(s) = (\cos s, \sin s)$ que é uma aplicação regular em $(0, 2\pi)$. Note que f é uma curva fechada.*

Esse ponto por não ser regular significa que o vetor tangente nesse ponto é nulo e assim não é possível encontrar o vetor de reflexão indicando para onde a partícula deverá ir. Esse ponto é chamado de vértice.

Definição 3.1.6. *(vértice de uma componente) Seja uma curva Γ_i definida pela aplicação $f : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Os vértices da componentes são os extremos, ou seja,*

$$\partial\Gamma_i = \{f(a_i), f(b_i)\}$$

Exemplo 3.1.3. *Na figura 3.1 Γ_4 têm um vértice y e por isso não é inteiramente suave e Γ_5 não têm vértice e por isso é inteiramente suave. Assim $\partial\Gamma_4 = \{y\}$ e $\partial\Gamma_5 = \{\}$.*

Note que um vértice pode pertencer a uma única curva ou a várias. Note também que existem curvas que não possuem vértice.

Definição 3.1.7. *(vértices da mesa bilhar) Seja $\Gamma_V = \cup \partial\Gamma_i$ o conjunto dos vértices de Γ .*

Cada componente Γ_i pode encontrar outra componente Γ_j somente nos extremos, isto é $\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j$.

Exemplo 3.1.4. *Na figura 3.1 $\Gamma_V = \{w, x, y, z\}$ o conjunto dos vértice de Γ , onde $w \in \Gamma_2 \cap \Gamma_3$.*

Definição 3.1.8. *(ângulo entre os vetores tangentes) Considera-se o ângulo $\gamma \in [0, \pi]$ feito pelos vetores tangentes em $V \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$ tal que $f(x_V) = V$, assim γ é o ângulo*

entre $f'_i(x_V)$ e $f'_j(x_V)$.

(*cúspide*) Caso $\gamma = 0$ o vértice é chamado de *cúspide*.

(*vértice regular*) Caso $\gamma = 2\pi$ o vértice é *regular*.

(*vértice não-regular*) Caso $\gamma \in (0, 2\pi)$ o vértice não é *regular*.

Em todo vértice para se calcular o ângulo entre dois vértices, calcula-se o produto interno entre os vetores tangentes pela definição 2.1.2.

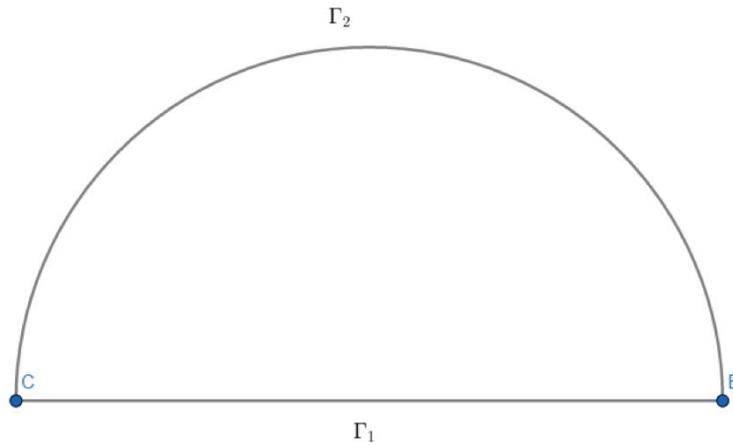


Figura 3.2: Semicirculo

Exemplo 3.1.5. (*Semicírculo*) Seja um $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, tal que $\Gamma_1 = [(-4, 0), (4, 0)]$ seja um segmento de reta e $\Gamma_2 = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 4 : y \geq 0\}$ o semicírculo de raio 4 acima do eixo y . Assim $\Gamma_V = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{B, C\}$

Exemplo 3.1.6. (*vértice e cúspide*) Seja um $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$, tal que $\Gamma_1 = [(-4, 0), (-4, 4)]$ e $\Gamma_3 = [(4, 0), (4, 4)]$ sejam segmentos de reta; $\Gamma_2 = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 4 : y \geq 0\}$ e $\Gamma_4 = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|v - (0, 4)\| = 4 : y \geq 4\}$ semicírculos de raio 4 tomando a parte superior. Assim $\Gamma_V = \{B, C, D, E\}$, sendo que B e C são cúspides.

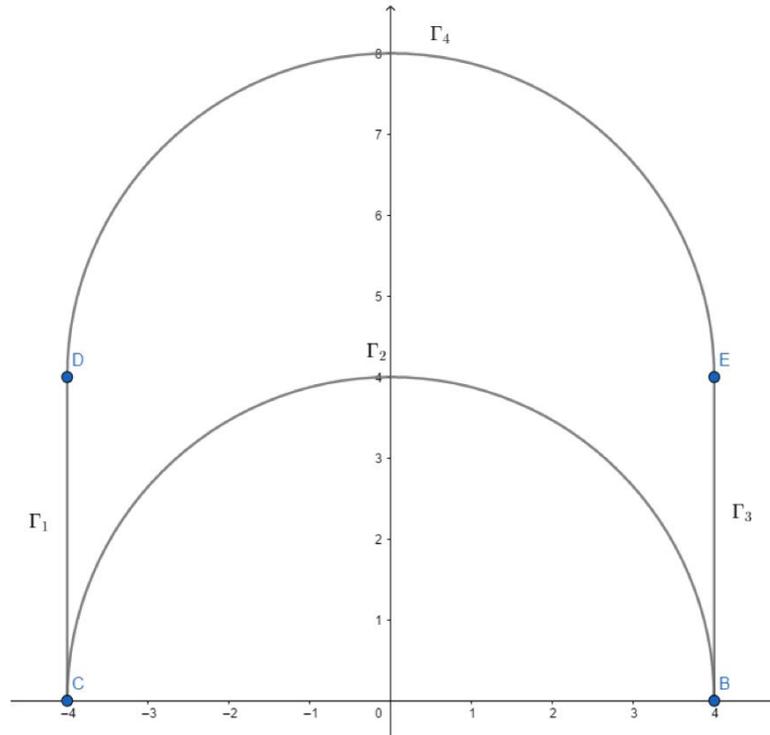


Figura 3.3: Γ com 4 componentes e duas cúspides

Note que a reta tangente ao Γ_2 em $(-4, 0)$ é a reta que passa por $[C, D]$ e em $(4, 0)$ é a reta que passa por $[B, E]$.

Observação 3.1.1. Note que (1) na figura 3.2 que $f'_1(B) \neq f'_2(B)$ e assim Γ não é derivável em B .

(2) na figura 3.3 embora $f'_2(B) = f'_3(B)$, B é uma cúspide e Γ não é suave em B .

(3) na figura 3.3, $f'_1(D) = f'_4(D)$ e Γ é suave em D .

(4) Na figura 3.3 Γ é derivável em D e E , assim sabemos onde a partícula irá se tocar nesses vértices, logo para que D e E faça parte do caminho que a partícula passará podemos juntar $\Gamma_5 = \Gamma_1 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_3$ como uma única curva e formar uma função única para esse componente, $f_5 : [B, C] \rightarrow \mathbb{R}^2$, de forma que D e E deixem de serem vértices. Assim se $\Gamma = \Gamma_5 \cup \Gamma_2$, logo $\Gamma_V = \{B, C\}$, as cúspides.

Definição 3.1.9. (*fronteira suave da mesa de bilhar*) Seja $\Gamma_i \in C^l, l \geq 3$ as componentes suaves de Γ e $\Gamma_R = \Gamma \setminus \Gamma_V$ o conjunto dos pontos regulares de Γ .

A fronteira por ser suave, significa que é possível calcular o vetor normal a curva e por isso é possível encontrar o vetor reflexão indicando para onde a partícula deverá ir.

Exemplo 3.1.7. (*Segmento regular*) Seja o segmento de reta $[A, B] \subset \mathbb{R}^2$ e um caminho $f : [a, b] \rightarrow [A, B]$ tal que $f(a) = A$ e $f(b) = B$. Os vértices do segmento de reta $[A, B]$ é descrito por $[A, B]_V = \{A, B\}$. Assim $[A, B]_R = (A, B)$ é o conjunto dos pontos regulares de $[A, B]$.

Observe a definição 2.2.26. Os tipos de componentes dependerão da f'' e do vetor normal e por isso podemos relacioná-la com a curvatura:

Definição 3.1.10. (*tipo de componente*) Seja Γ_i uma componente de Γ regular e suave e $A, B \in \Gamma_i$ tomados arbitrariamente. Se o segmento de reta regular (A, B) estiver contida:

- (1) em Γ_i , então o componente é chamado de flat. A curvatura é zero, ou seja, $k = 0$;
- (2) no int Q , então o componente é chamado de focalizadora e $k(s) > 0$. O vetor $f'' \neq \vec{0}$ aponta para dentro de Q ;
- (3) no ext Q então o componente é chamado de dispersora e $k(s) < 0$. O vetor $f'' \neq \vec{0}$ aponta para fora de Q .

Exemplo 3.1.8. (*Reta*) A reta no plano $y - ax - b = 0$ parametrizada por s é definida pela aplicação $f(s) = (s, as + b)$ tem derivadas $f'(s) = (1, a) \Rightarrow f''(s) = (0, 0)$ com curvatura $k(s) = 0$. Logo toda reta é flat.

(*Segmento de reta*) Seja Γ_i um segmento de reta definido por um caminho $f : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$, cuja imagem seja $[f(a_i), f(b_i)]$. Sejam $A, B \in [f(a_i), f(b_i)]$. Assim $[A, B] \subset \text{Im}(f) \Rightarrow (A, B) \subset [f(a_i), f(b_i)]$. Logo todo segmento de reta é flat.

Exemplo 3.1.9. Na figura 3.1 observe que Γ_1 é flat, Γ_2 é focalizadora, $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ são dispersoras.

Exemplo 3.1.10. (Círculos concêntricos) Sejam dois círculos concêntricos, um de raio a e outro de raio $3a$ e a região Q , a região entre as duas, região na qual a partícula se moverá. Como $f(s) = r(\cos s, \sin s) \Rightarrow f'(s) = r(-\sin s, \cos s) \Rightarrow f''(s) = r(-\cos s, -\sin s) = r \cdot n(s), \forall s \in \mathbb{R}$. Tome $s = \pi \Rightarrow n(\pi) = (1, 0)$ é o vetor unitário no ponto $f(\pi) = (-1, 0)$ apontando para dentro do círculo. Por isso o círculo de fora é uma curva focalizadora e a de dentro será dispersora. Observe a figura 3.4.

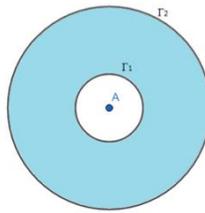


Figura 3.4: Círculos concêntricos

Os círculos não são obrigados a ser concêntricos, observe a figura 3.5.

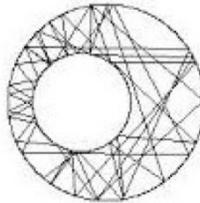


Figura 3.5: Círculos não-concêntricos

Exemplo 3.1.11. (elipse) Seja uma elipse Γ definida pela imagem do caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(s) = p + (a \cos s, b \sin s)$. Γ é focalizadora.

3.1.3 Aplicação colisão

Para estudar o movimento da partícula pontual dentro da mesa de bilhar, deve ser construído um conjunto de aplicações que relacionam a posição da partícula com o tempo de movimento. Como as colisões irão mudar o sentido do vetor velocidade, será construído uma aplicação relaciona a posição de colisão com o tempo de colisão e a partir disso poderá ser construído o vetor velocidade.

Definição 3.1.11. (*aplicação posição*) *Seja a aplicação posição $p : \mathbb{R} \rightarrow Q$, tal que $p(t) = (x(t), y(t))$ relaciona a coordenada cartesiana de cada posição da partícula pontual em Q com o tempo de movimento da partícula, sendo $x(t)$ e $y(t)$ as posições-coordenadas da partícula pontual.*

Seja $p(t)$ a posição da partícula pontual após t segundos do início do movimento. O início do movimento, $t = 0$, da partícula pontual se dará no interior de Q em $p(0) = (x_0, y_0) \in \text{int } Q$. Após $t > 0$ segundos do início do movimento a partícula pontual estará na posição $p(t) \in \bar{Q} = \text{int } Q \cup \Gamma$.

A partícula irá percorrer um caminho linear até colidir com a fronteira da mesa bilhar. O tempo que a partícula leva para colidir com a fronteira pela primeira vez é chamado de t_1 e a n ésima vez de t_i . Esse primeiro ponto de colisão é chamado de P_1 e o n ésimo ponto de colisão é chamado de P_n .

A partícula só irá parar o seu movimento caso colida com um vértice não-regular ou com uma cúspide. Se a partícula colidir com um vértice regular, ela refletirá e continuará se movendo. Assim caso o vértice $V \in \partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j$,

(1) (vértice não-regular ou cúspide) se $f'_i(s) \neq f'_j(s)$, então o vetor $f'(s)$ não existe, assim não é possível calcular o vetor normal e portanto não é possível calcular a próxima trajetória da partícula (como se ela tivesse caído numa caçapa de uma sinuca, que não é o caso).

(2) (vértice regular) se $f'_i(s) = f'_j(s)$, logo a $f'(s)$ existe e o movimento continua, como na figura 3.3 que nos vértices D e E é possível calcular a próxima trajetória da partícula.

Caso a partícula colida na fronteira da mesa bilhar próxima da vizinhança de um vértice, essa partícula pode sair da vizinhança ou não. Há apenas um caso em que fará a partícula ir para o vértice, a dupla componente focalizadora-dispersora com vértice cúspide. Andrade [1] mostrou que nas outras duplas componentes a partícula sai após uma quantidade de colisões.

Proposição 3.1.1. *Suponha que a partícula do bilhar entre na vizinhança de um vértice da mesa de bilhar com ângulo interior positivo, $\gamma > 0$, e colida com ambos os lados do vértice. Então a partícula deve deixar essa vizinhança após no máximo $\lceil \frac{\pi}{\gamma} \rceil + 1$ colisões tal que a partícula saia da vizinhança.*

Demonstração: prop 2.2 (Andrade [1])

Definição 3.1.12. *(reflexão de uma colisão perfeitamente elástica) O ângulo de incidência com o vetor normal ao ponto de colisão coincide com o ângulo de reflexão com o vetor normal ao ponto de colisão.*

Observe a figura 3.6 que possui uma partícula entrando na vizinhança de um vértice com componentes dispersora-flat. A partícula colide com a dispersora em E, depois colide com a flat em I, depois com a dispersora em K, depois com a flat em Q. A partir de Q ela começa a sair da vizinhança. Como $\gamma = 9^\circ$, a partícula deveria sair em no máximo $\frac{\pi}{9^\circ} + 1 \approx 21$ colisões. Note que a partícula colidiu apenas 6 vezes na dupla componente (a figura mostra apenas quatro, falta uma na dispersora e outra na flat).

Proposição 3.1.2. *Se a partícula do bilhar entra em uma cúspide com dois lados dispersores ou um lado dispersor e o outro flat, então ela deve sair da cúspide após um número finito de colisões, de modo que a partícula saia da vizinhança.*

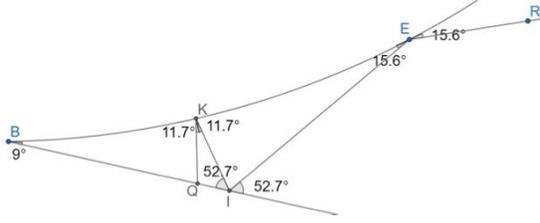


Figura 3.6: Dupla componente dispersora-flat

Demonstração: prop 2.3 (Andrade [1])

O conjunto $\mathcal{T} = p^{-1}(\Gamma)$ (a imagem inversa da aplicação posição nos pontos da fronteira da mesa bilhar Γ) é o subconjunto dos reais positivos dos momentos em que a partícula pontual colide com a fronteira da mesa bilhar Γ , assim $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R}_+^* : p(t) \in \Gamma\} = \{t_1, t_2, \dots\}$. Reescreve-se $p(t_i) = (p_1(t_i), p_2(t_i)) = P_i$, assim $p(\mathcal{T}) = \{P_1, P_2, \dots\} \subset \Gamma$ é o conjunto dos pontos do plano em que a partícula pontual colide com a Γ . $p(\mathcal{T})$ é finito ou $p(\mathcal{T}) = \Gamma$.

Ao restringir a aplicação posição ao subdomínio \mathcal{T} , é possível escrever outra aplicação "c" (aplicação restrição de p), em que nela muda-se apenas o domínio, de forma que $p(t_i) = c(t_i), \forall t_i \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1.13. (aplicação colisão) O caminho $c : \mathcal{T} \rightarrow \Gamma$, tal que $c(t_i) = P_i \in \Gamma$ é a aplicação que relaciona o i -ésimo momento e a i -ésima posição da colisão da partícula pontual com a Γ . O conjunto imagem do caminho c é o conjunto $c(\mathcal{T}) = \{P_1, P_2, \dots\} \subset \Gamma$, ou seja, os pontos de colisão da partícula pontual com a Γ .

Podem ocorrer que essa partícula colida duas vezes no mesmo ponto da fronteira da mesa bilhar Γ , $c(t_i) = c(t_j)$ com $i \neq j$, repetindo os demais pontos seguintes, e assim é dito que esse movimento é periódico. De um modo mais formal, existe um $i \neq j \in \mathbb{N}$ tal que $P_{i+k} = P_{j+k}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Definição 3.1.14. (Período) Período do movimento de uma partícula é dado pela

cardinalidade de $c(T)$. Nesse caso se o período de uma partícula é de n , assim existem n posições em Γ e $c(T) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ e $P_i = P_j \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{n}$.

Observe que $P_0 \notin c(T)$ e $P_n \in \Gamma, n > 0$, ou seja, P_0 é a posição da partícula no interior de Q enquanto que P_n é a posição da n -ésima colisão da partícula com Γ .

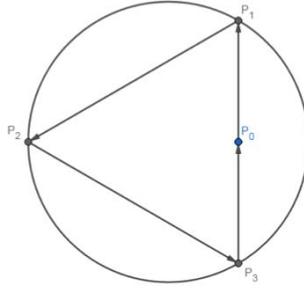


Figura 3.7: Movimento com 3 colisões distintas dentro de um círculo

Na figura 3.7 observa-se que $P_0 \notin c(T)$, que $P_1 = P_4 = P_{4+3k}, \forall k \in \mathbb{N}$, que $P_2 = P_5 = P_{5+3k}, \forall k \in \mathbb{N}$ e que $P_3 = P_6 = P_{6+3k}, \forall k \in \mathbb{N}$. Como $c(T) = \{P_1, P_2, P_3\}$, logo o movimento dessa partícula pontual é de período 3, por ter 3 pontos distintos na Γ .

A aplicação posição restrita a um domínio discreto faz a função colisão ser discreta, de maneira que dado t_i e t_{i+1} , temos que $c((t_i, t_{i+1})) = \emptyset$, ou seja, não ocorrerá o caso em que a partícula pontual sairá rolando pela borda da mesa bilhar.

Definição 3.1.15. (*composição da aplicação próxima posição*) Seja uma aplicação $P : Q \rightarrow Q$ e $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots\}$. A aplicação P será discreta, pois $x \in Q$ ocorre no tempo zero, $P(x)$ no tempo t_1 , $P(P(x)) = P^2(x)$ no tempo t_2 , e assim $P^n(x)$ ocorre no tempo t_n .

Restringindo essa aplicação as colisões com a fronteira da mesa bilhar, tem-se:

Definição 3.1.16. (*aplicação próxima colisão*) A aplicação $C : c(T) \rightarrow c(T)$, de maneira que $C(P_i) = P_{i+1}$ faz com que C seja uma aplicação que relacione um ponto

de colisão da partícula pontual com o próximo ponto da colisão da partícula pontual com a Γ .

Se $C(P_0) = P_1, C(P_1) = P_2$ e em geral $C(P_i) = P_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$, onde $C^j(P_i) = P_{i+j}$. Se for um movimento de período n , então $C^j(P_i) = P_{[i+j \bmod n]}$.

Seja $c(\mathcal{T}) \subset \Gamma$ um movimento de período n , tal que $C(P_n) = P_1$. A $\mathcal{O}(P_i) = \{B \in \Gamma : B = C^n(P_i) : n \in \mathbb{N}\} = c(\mathcal{T})$ é a chamada órbita de P_i , qualquer que seja $P_i \in c(\mathcal{T})$. O período da órbita de P_i é a cardinalidade de $c(\mathcal{T})$.

Definição 3.1.17. (órbita das colisões) O conjunto $\mathcal{O} = \{x, C(x), C^2(x), \dots, C^n(x), \dots\}$ é chamado de órbita de x .

3.1.4 Vetor velocidade da colisão

A partícula pontual ao se colidir com a curva Γ em $P_i \in \Gamma_j$ estabelece relações vetoriais com a curva Γ_j definida por $f_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^2$, de forma que os vetores $P_{i+1} - P_i$ (reflexão) e $P_i - P_{i-1}$ (incidência) se relacionam com os vetores $T(s_i) = T_i$ (tangente) e $n(s_i) = n_i$ (normal).

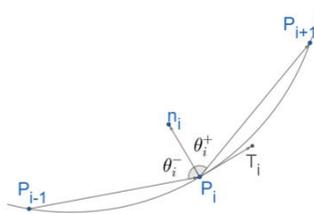


Figura 3.8: Relação vetorial numa colisão da partícula pontual com a curva

Markarian [17] diz que dentro de Q o movimento da partícula pontual é uniforme (velocidade constante) e a reflexão na Γ é elástica (ângulo de saída(reflexão) igual ao de entrada(incidência)).

Definição 3.1.18. (*ângulo de incidência e reflexão*) O ângulo de incidência da i -ésima colisão da partícula é o ângulo $\theta_i^- \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entre n_i e o vetor $P_{i-1} - P_i$. O ângulo de reflexão da i -ésima colisão da partícula é o ângulo $\theta_i^+ \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entre n_i e o vetor $P_{i+1} - P_i$. Como a fronteira é perfeitamente elástica, vale a lei da reflexão que conserva o ângulo de incidência, ou seja, $\theta_i^+ = \theta_i^-$ e pode-se chamar a ambos de θ_i .

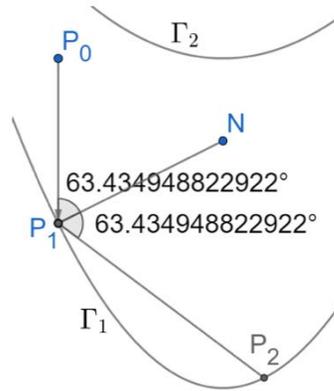


Figura 3.9: Ângulos de incidência e reflexão

Exemplo 3.1.12. A figura 3.9 mostra Q uma mesa de bilhar cuja fronteira é o traço da união de duas curvas suaves Γ_1 e Γ_2 , tal que Γ_1 seja definida pela imagem do caminho $f_1(t) = (t, \frac{1}{4}t^2)$ e Γ_2 definida pela imagem do caminho $f_2(t) = (t, \frac{1}{8}t^2 + 8)$. Tem-se que $f_1'(t) = (1, \frac{1}{2}t)$ e pela definição 2.2.25, tem-se $N(t) = (-\frac{1}{2}t, 1)$. Seja $P_0 = (-4, 8)$ e $P_1 = (-4, 4)$, logo $t = -4$, então $N(-4) = (2, 1) = \overrightarrow{P_1N}$. Seja $N = (-4, 4) + 2 \cdot (2, 1) = (0, 6)$, logo $N(-4) = (0, 6) - (-4, 4)$. Assim $\angle(P_0P_1N) = 63,43\dots^\circ$ é o ângulo de incidência que é igual ao de reflexão pelo que se acha o $P_2 = (1, \frac{1}{4})$:

(1) (com o uso do geogebra) rotacionando no sentido horário o segmento P_1N , com P_1 fixado encontra-se um ponto $Q = (-0,42\dots, 1,31\dots)$ e encontra-se P_2 pela intersecção de $f_1(t)$ com a semirreta $\overrightarrow{P_1Q}$.

(2) (uso de geometria) Tome A o ponto de intersecção do círculo $S(P_1, \|P_1 - P_0\|) = \Gamma_3$

com a semirreta $\overrightarrow{P_1N}$ e o círculo $\Gamma_4 : S(A, \|A - P_0\|)$. Tome B o novo ponto de intersecção dos círculos Γ_3 e Γ_4 (os pontos de intersecção são P_0 e B). Tome P_2 o ponto de intersecção entre a semirreta $\overrightarrow{P_1B}$ e $f_1(t)$.

Obs: Pode-se criar um algoritmo computacional numa planilha para determinar os outros pontos tomando o cuidado de verificar quando a colisão alterna entre as curvas Γ_1 e Γ_2 .

A velocidade média de uma partícula é definida na física como a razão entre as diferenças entre suas posições e seus respectivos tempos, assim

$$v_m([A, B]) = \frac{1}{t_B - t_A} \cdot p(t_B) - p(t_A).$$

Se $f(A)$ for a posição da partícula da i -ésima colisão com a Γ e $f(B)$ for a posição da partícula da $i+1$ -ésima colisão com a Γ , então a velocidade média será

$$v_m f([s_i, s_{i+1}]) = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \cdot (P_{i+1} - P_i)$$

$$v(t_i)\Delta t = P_{i+1} - P_i \Rightarrow P_{i+1} = P_i + v_i\Delta t \quad (3.1)$$

Um vetor na mesa bilhar Q de $f(s_i)$ até $f(s_{i+1})$ terá o mesmo sentido que o vetor $P_{i+1} - P_i$, assim seja um $0 < \delta < 1$ tal que $v = \delta \cdot (P_{i+1} - P_i)$ e assim quando $\delta = 0$, $v = P_i$ e quando $\delta = 1$, $v = P_{i+1}$ e assim temos um vetor velocidade para partícula pontual.

Definição 3.1.19. (vetor velocidade) Os vetores velocidade v_i^- e v_i^+ serão ditos de incidência e de reflexão, respectivamente, ao ponto de colisão $f(s_i)$ da partícula pontual com a Γ de forma que para qualquer $\delta \in \mathbb{R}$, o vetor velocidade em de $f(s_i)$ até $f(s_{i+1})$ é o vetor $v_i^+ = \delta \cdot (P_{i+1} - P_i)$.

Observe na figura 3.10 que o vetor v_0 é o vetor de incidência no ponto P_1 enquanto que v_1 é o vetor de reflexão de P_1 bem como o vetor de incidência de P_2 .

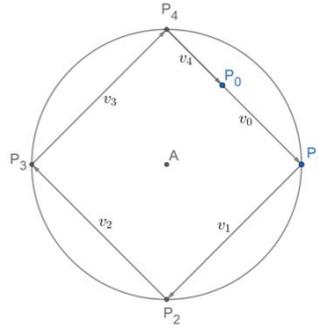


Figura 3.10: Vetor velocidade de incidência e de reflexão

Em relação ao ponto de colisão da partícula pontual com a Γ em P_i ocorre que o vetor velocidade de incidência $v_i^- = \delta \cdot (P_i - P_{i-1})$ e o vetor velocidade de reflexão $v_i^+ = \delta \cdot (P_{i+1} - P_i)$. Observe que por rotação, se $v_i^- = ((v_1)_i^-, (v_2)_i^-)$, $v_i^+ = ((v_1)_i^+, (v_2)_i^+)$:

$$v_i^+ = \begin{bmatrix} \cos(\pi - 2\theta_i) & -\text{sen}(\pi - 2\theta_i) \\ -\text{sen}(\pi - 2\theta_i) & -\cos(\pi - 2\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v_1)_i^- \\ (v_2)_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(v_1)_i^- \cos(2\theta_i) + (v_2)_i^- \text{sen}(2\theta_i) \\ -(v_1)_i^- \text{sen}(2\theta_i) - (v_2)_i^- \cos(2\theta_i) \end{bmatrix}$$

Teorema 3.1.1. *Os vetores de incidência e reflexão se relacionam pela regra*

$$v_i^+ = v_i^- - 2 \langle v_i^-, n_i \rangle \cdot n_i,$$

onde n_i é o vetor normal unitário à curva Γ no i -ésimo ponto de colisão P_i .

Demonstração. Tome n_i o vetor normal unitário, ortogonal à curva em s_i . Nota-se que

$$\begin{aligned} w_i &= \text{proj}_{-n_i}(v_i^-) \\ &= \frac{\langle v_i^-, -n_i \rangle}{\|n_i\|^2} \cdot -n_i \\ &= \langle v_i^-, n_i \rangle \cdot n_i. \end{aligned}$$

Mas pela regra do paralelogramo

$$u = \langle u, T \rangle \cdot T + \langle u, n \rangle \cdot n$$

Seja $u = P_{i+1} - P_i$, assim $P_{i+1} - P_i = \langle P_{i+1} - P_i, T \rangle \cdot T + \langle P_{i+1} - P_i, n \rangle \cdot n$ e assim

$$P_{i+1} = P_i + \langle P_{i+1} - P_i, T \rangle \cdot T + \langle P_{i+1} - P_i, n \rangle \cdot n$$

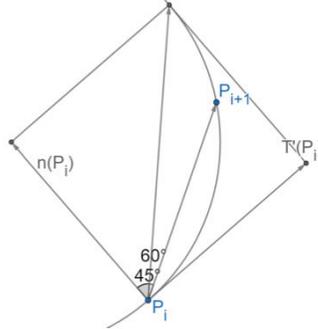


Figura 3.12: Vetores componentes

3.1.5 Aplicação ângulo da colisão

Definição 3.1.21. (*aplicação angular*) Considere $\Theta : \mathcal{T} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tal que $\Theta(t_i) = \theta_i$ a aplicação que relaciona o tempo t_i e o ângulo θ_i (def 3.1.18). O conjunto $\Theta(\mathcal{T}) = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ é o conjunto dos ângulos de incidência ou reflexão das colisões da partícula com o vetor normal em Γ . O ângulo $2 \cdot \theta_i = \angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$, assim o ângulo θ_i pode ser associado com a colisão da partícula pontual em P_i .

Exemplo 3.1.14. (*triângulo retângulo*) Seja $P_0 = (0, 2)$ o ponto de início do movimento da partícula e $P_1 = (\frac{7}{2}, 2)$ o primeiro ponto de colisão. Note que $t_i = t_{i+3}$ para todo i . Além de que $\theta_i = \frac{\pi}{6}$ para todo $i \geq 1$. Logo $\Theta(\mathcal{T}) = \{\frac{\pi}{6}\}$ como na figura 3.13.

Exemplo 3.1.15. (*quadrado*) Seja $P_0 = (0; 2, 8)$ o ponto de início do movimento da partícula e $P_1 = (2, 8; 2, 8)$ o primeiro ponto de colisão. Note que $t_i = t_{i+4}$ para todo i . Além de que $\theta_i = \frac{\pi}{4}$ para todo $i \geq 1$. Logo $\Theta(\mathcal{T}) = \{\frac{\pi}{4}\}$ como na figura 3.14.

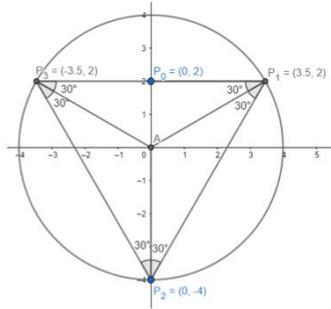


Figura 3.13: 30 graus

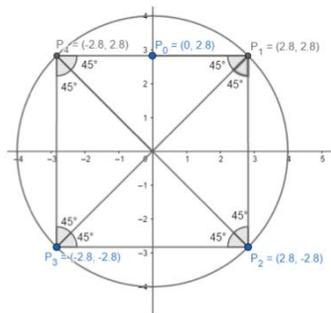


Figura 3.14: 45 graus

Definição 3.1.22. (*aplicação angular*) Através da aplicação $\Psi : \Theta(\mathcal{T}) \rightarrow \Theta(\mathcal{T})$ relaciona-se θ_i com θ_{i+1} , assim: $\Psi(\theta_0) = \theta_1, \Psi(\theta_1) = \theta_2$ e em geral $\Psi(\theta_i) = \theta_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$, onde $\Psi^j(\theta_i) = \theta_{i+j}$.

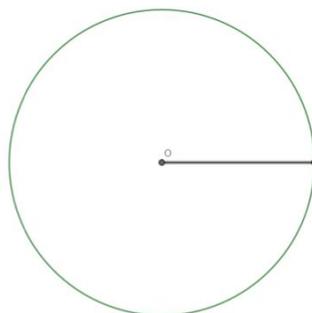


Figura 3.15: Círculo unitário com segmento radial removível

Exemplo 3.1.16. Na figura 3.15 mostra um domínio Q em coordenadas polares ρ, θ , sendo $Q = \{(\rho, \theta) : 0 < \rho < 1 : \theta \neq 0\}$. Este é um círculo unitário com um segmento radial removível. Neste caso $\Gamma = \{\rho = 1\} \cup \{\theta = 0\}$ consistindo em duas curvas suaves e Γ_V consiste de dois pontos: a origem $\rho = 0$ e o ponto $(\rho = 1; \theta = 0)$. Note que a linha $\theta = 0$ é um “limite interno” (flat) - trajetória de bilhar que reflete ambos os lados.

3.2 Aplicação ergódica bilhar

3.2.1 Fluxo vetorial do bilhar

Definição 3.2.1. (dinâmica ou inércia em um bilhar) A posição de uma partícula pontual no bilhar Q após sair da posição $P_0 \in Q$ é dada por $p(t) \in Q$ e seu movimento pode ser descrito pelo seu vetor velocidade $v(t) \in \mathbb{R}^2$ no tempo $t \in \mathbb{R}$. A posição e o vetor velocidade de reflexão da partícula pontual na i -ésima colisão com a Γ são dadas respectivamente por $c(t_i) = P_i \in \Gamma$ e $v_i^+ = \delta_i \cdot \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$, para algum $\delta_i \in \mathbb{R}$. Assim, se $q \in Q, t \in \mathbb{R}$, ocorre uma:

- (1) $q_t = p(t) \in \text{int}(Q)$ com $v(t) = \delta(P_{i+1} - P_i), \delta \in (0, 1)$.
- (2) $q_{t_i} = c(t_i) = P_i \in \Gamma_R$ com $v_i^+ = v_i^- - 2 \langle v_i^-, n_i \rangle \cdot n_i$
- (3) $q_{t_V} = p(t_V) \in \Gamma_V$ (a partícula tem seu movimento interrompido ao se colidir com um vértice (como numa caçapa de uma sinuca)). t_{V_i} é o tempo que a partícula leva para chegar ao vértice V_i e $q_t = V_i$ para todo $t \geq t_{V_i}$.

Note que os vértices em geral são definidos em pontos cuja derivada não existe, assim não há como calcular o vetor normal à curva e assim o ângulo de reflexão.

Observe na figura 3.16 que $c(t_5) = V_4$, ou seja, quando a partícula pontual toca o $V_4 \in \Gamma_V$ a partícula para de se mover, como se tivesse caído numa caçapa de sinuca e a partícula $P = V_4$ para todo $t \geq t_5 \in \mathbb{R}$, aqui $t_5 = 2t_3 - t_1$.

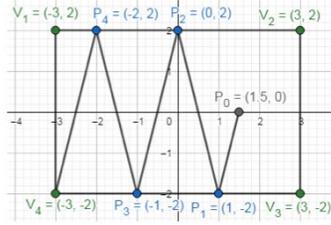


Figura 3.16: Fluxo e fim do movimento

Definição 3.2.2. (*colisão regular ou tangencial*) Seja $q_{t_i} \in \Gamma_R$. A colisão é regular se $v_i^- \neq v_i^+$ (só não ocorre em Γ_V). A colisão é tangencial se $v_i^- = v_i^+$ (ocorre só num componente dispersor), ou seja, quando $\theta_i = \frac{\pi}{2}$.

O estado de uma partícula pontual em movimento para qualquer tempo é especificado por sua posição $q \in D$ e seu vetor velocidade unitário $v \in S^1$

Definição 3.2.3. (*Espaço de fase do Bilhar*) O conjunto $\Omega = \bar{Q} \times S^1$, é o espaço de fase do sistema bilhar, com bordo $\partial\Omega = \Gamma \times S^1$

Definição 3.2.4. Seja $\tilde{\Omega}$ o conjunto dos estados em que a dinâmica do movimento da partícula pontual está definida em todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto de todas as trajetórias em que a partícula não colide com uma cúspide.

Definição 3.2.5. (*posição futura*) Por 3.1, tem-se que uma partícula movendo-se numa reta sua posição futura é calculado pela fórmula

$$q_t = q_0 + t \cdot v_t^- \tag{3.2}$$

Como $v_t^- \in S^1$, logo $\|q_t - q_0\| = \|t \cdot v_t^-\| = |t|$ (sempre que andar em linha reta)

Cada estado $(q, v) \in \Omega$ da partícula, para cada instante de tempo $t \in \mathbb{R}$ induz uma aplicação $\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$.

Definição 3.2.6. (*Fluxo de Bilhar*) A aplicação $\Phi^t, t \in \mathbb{R}$ será chamada de *fluxo do bilhar* no espaço de fase de $[0, t]$. A aplicação $\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2.7. (*Fluxo de Bilhar é contínuo*) Seja $\Phi^0 = I_\Omega = (q_0, v_0^-) \in \Omega$ a posição inicial do fluxo. Como na mesa de bilhar Q o movimento é retilíneo e $f(t_i)$ é o i -ésimo ponto de colisão, logo,

(1) Suponha que $t < t_1$, ou seja, não haja colisões no intervalo $[0, t]$, assim $\Phi^t(q_0, v_0^-) = (q_0 + tv_1^-, v_1^-)$ e, portanto Φ^t é contínua.

(2) Suponha que $t_1 < t < t_2$, isto é, há uma colisão no intervalo $[0, t]$, assim

$$\Phi^{t_1}(q_0, v_0^-) = (q_0 + t_1 v_1^- + (t - t_1) v_1^+, v_1^+) = (q_{t_1} + (t - t_1) v_1^+, v_1^+) = (q_t, v_1^+),$$

onde v_1^+ é o vetor velocidade após a colisão em t_1 . Houve uma mudança instantânea na direção do movimento da partícula pontual ao colidir com o bordo Γ , causando uma descontinuidade da aplicação Φ^t . Para remover essa descontinuidade, faremos a identificação dos vetores

$$(q_0 + t_1 v_1^-, v_1^-) \approx (q_0 + t_1 v_1^-, v_1^+),$$

ou seja, identificando os vetores v_i^- e v_i^+ . Como no intervalo (t_1, t) o movimento é retilíneo teremos então

$$\Phi^t(q_0, v_1^-) = (q_0 + t_1 v_1^- + (t - t_1) v_1^+, v_1^+).$$

Com essa identificação a aplicação Φ^t torna-se contínua.

(3) Suponhamos que haja n colisões no intervalo $(0, t)$ com $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$.

Neste caso o fluxo é dado por

$$\Phi^t(q_i) = \Phi^{t-t_n} \circ \Phi^{t_n-t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi^{t_2-t_1} \circ \Phi^{t_1}(q_i)$$

Para qualquer $t, r \in \mathbb{R}$ dizer que a aplicação Φ^t é um fluxo denota que

$$\Phi^{r+t} = \Phi^r \circ \Phi^t = \Phi^t \circ \Phi^r,$$

onde v_i^- é o vetor velocidade de incidência.

3.2.2 Aplicação bilhar

Definição 3.2.8. (*transversal ao fluxo*) Dado $\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ um fluxo. Seja $M \subset \tilde{\Omega}$ uma transversal ao fluxo tal que cada trajetória do fluxo cruza M infinitas vezes.

O fluxo induz uma aplicação de retorno $F : M \rightarrow M$ e um tempo de retorno

$$\tau(x) = \min\{t > 0 : \Phi^t(x) \in M\}$$

tal que $F(x) = \Phi^{\tau(x)}(x)$.

Num bilhar, uma seção transversal em $\tilde{\Omega}$ é geralmente construída na fronteira da mesa de bilhar $\Gamma \times S^1$, assim a seção transversal pode ser definida como o conjunto de todos os estados com vetores após a colisão, ou seja,

$$\mathcal{M} = \bigcup_i \mathcal{M}_i, \text{ com } \mathcal{M}_i = \{(q, v) \in \tilde{\Omega} : q \in \Gamma_i : \langle v, n(q) \rangle \geq 0\}$$

O conjunto \mathcal{M} é chamado de espaço de colisão. Denota-se $\tau(x)$ o primeiro tempo $t > 0$ no qual a órbita $\Phi^t(x)$ intersecta $\Gamma \times S^1$, denominado de tempo de retorno. Considere $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap \tilde{\Omega}$, definindo uma aplicação de retorno

$$\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}} \text{ dada por } \mathcal{F}(x) = \Phi^{\tau(x)+0}(x),$$

onde $\tau(x) + 0$ significa que está sendo tomado um tempo próximo de $\tau(x)$ pela direita. A aplicação \mathcal{F} é dita aplicação do bilhar e \mathcal{M} é dito espaço de fase da aplicação bilhar \mathcal{F} .

Definição 3.2.9. (*aplicação colisão do bilhar*) Seja $f(s)$ uma parametrização da fronteira da mesa do bilhar pelo parâmetro s , tal que $f(s) : [a_1, b_n] \rightarrow \Gamma$, onde L é a soma do comprimento das n componentes da fronteira de Γ . A aplicação $\mathcal{F} : \Gamma_R \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \Gamma_R \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é dita aplicação do bilhar de maneira que dado um ponto $f(s_i)$ da fronteira do bilhar e um ângulo θ_i de reflexão, determina pela \mathcal{F} o próximo ponto $f(s_{i+1})$ de colisão e o próximo ângulo θ_{i+1} de reflexão, tal que $\mathcal{F}(s_i, \theta_i) = (s_{i+1}, \theta_{i+1})$.

Uma mesa de bilhar Γ descrita por $f(s)$ de componentes Γ_i descritas pelo caminho $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\Gamma_V = \{f_i(a_i), f_i(b_i) : i\}$. A aplicação bilhar $\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ visto por cada componente $\tilde{\mathcal{M}}_i$ do seu espaço de fase $\tilde{\mathcal{M}} = \bigcup_i \tilde{\mathcal{M}}_i$ como o interior de $(a_i, b_i) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \tilde{\mathcal{M}}_i$ é um

(1) (retângulo): quando \mathcal{F} não pode ser definida na $\partial([a_i, b_i] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$, pois $f(a_i), f(b_i)$ são vértices, enquanto que em $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$ a partícula pontual ao tangenciar a componente da mesa dispersora ou flat deve continuar o movimento, sem reflexão, isto é, sem mudar a direção do seu movimento;

(2) (cilindro): quando \mathcal{F} não pode ser definida somente em $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

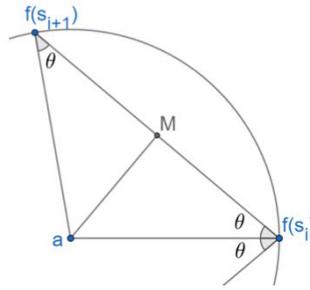


Figura 3.17: Determinar o próximo ponto colisão no círculo

Exemplo 3.2.1. *Seja um círculo de centro a e raio r definido pela imagem do caminho $f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ tal que $f(s) = (a_1 + r \cos s, a_2 + r \sin s)$. A aplicação bilhar $\mathcal{F} : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dada (s_i, θ_i) uma colisão com Γ em $f(s_i)$ tem-se*

$$\text{que } \mathcal{F}(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (s_i - \pi - 2\theta_i, \theta_i), & \text{se } s_i \in (0, \pi + 2\theta_i), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (s_i + \pi - 2\theta_i, \theta_i), & \text{se } s_i \in (\pi + 2\theta_i, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

De fato, como o triângulo de vértices $a, f(s_i)$ e $f(s_{i+1})$ é isósceles, logo $\theta_i = \theta_{i+1}$. O ângulo em a por construção é $\pi - 2\theta_i$ e como o ângulo s_i é o ângulo anti-horário entre o vetor $f(s_i) - a$ e o vetor $(1, 0)$, logo o ângulo s_{i+1} é a rotação do vetor $f(s_i) - a$ em $\pi - 2\theta_i$, resultando assim:

$$s_{i+1} = \begin{cases} s_i - \pi - 2\theta_i, & \text{se } s_i \in (0, \pi + 2\theta_i) \\ s_i + \pi - 2\theta_i, & \text{se } s_i \in (\pi + 2\theta_i, 2\pi) \end{cases}$$

Note que $\tilde{\mathcal{M}}$ é um cilindro.

Exemplo 3.2.2. Considere a fronteira de uma mesa de bilhar retangular $Q = [0, a] \times [0, b]$ definida pela imagem do caminho $f : [0, 2a + 2b] \rightarrow \partial Q$

$$f(s) = \begin{cases} (s, 0), & \text{se } s \in [0, a) \\ (a, s - a), & \text{se } s \in [a, a + b) \\ (2a + b - s, b), & \text{se } s \in [a + b, 2a + b) \\ (0, 2a + 2b - s), & \text{se } s \in [2a + b, 2a + 2b) \end{cases}$$

Como $f(\{0, a, a + b, 2a + b\}) = \Gamma_V$ e não deve haver colisões nos vértices, o espaço de fase da função aplicação bilhar é dado por $\tilde{\mathcal{M}} = (0, a) \cup (a, a + b) \cup (a + b, 2a + b) \cup (2a + b, 2a + 2b) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ assim a aplicação bilhar $\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ é dada por

$$\mathcal{F}(s_i, \theta_i) = \begin{cases} \mathcal{F}_1(s_i, \theta_i), & \text{se } (s_i, \theta_i) \in \tilde{\mathcal{M}}_1 = (0, a) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \mathcal{F}_2(s_i, \theta_i), & \text{se } (s_i, \theta_i) \in \tilde{\mathcal{M}}_2 = (a, a + b) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \mathcal{F}_3(s_i, \theta_i), & \text{se } (s_i, \theta_i) \in \tilde{\mathcal{M}}_3 = (a + b, 2a + b) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \mathcal{F}_4(s_i, \theta_i), & \text{se } (s_i, \theta_i) \in \tilde{\mathcal{M}}_4 = (2a + b, 2a + 2b) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

a componente $\mathcal{F}_1 : \tilde{\mathcal{M}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ é dada por

$$\mathcal{F}_1(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (a + (a - s_i) \text{ctg } \theta_i, \frac{\pi}{2} - \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (\tan^{-1}(\frac{a-s_i}{b}), \frac{\pi}{2}) \\ (2a + b - s_i - b \tan \theta_i, \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (0, \tan^{-1}(\frac{a-s_i}{b})) \\ (2a + b - s_i + b \tan \theta_i, \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (\tan^{-1}(\frac{-s_i}{b}), 0) \\ (2a + 2b - s_i \text{ctg } \theta_i, \frac{\pi}{2} - \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \tan^{-1}(\frac{-s_i}{b})) \end{cases}$$

a aplicação colisão $\mathcal{F}_2 : \tilde{\mathcal{M}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ é dada por

$$\mathcal{F}_2(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (a + b + (a + b - s_i) \operatorname{ctg} \theta_i, \frac{\pi}{2} - \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (tg^{-1}(\frac{a+b-s_i}{a}), \frac{\pi}{2}) \\ (3a + 2b - s_i - a \tan \theta_i, \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (0, tg^{-1}(\frac{a+b-s_i}{a})) \\ (3a + 2b - s_i + a \tan \theta_i, \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (tg^{-1}(\frac{a-s_i}{a}), 0) \\ (a - (s_i - a) \operatorname{ctg} \theta_i, \frac{\pi}{2} - \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, tg^{-1}(\frac{a-s_i}{a})) \end{cases}$$

a aplicação colisão $\mathcal{F}_3 : \tilde{\mathcal{M}}_3 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ é dada por

$$\mathcal{F}_3(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (2a + b + (2a + b - s_i) \operatorname{ctg} \theta_i, \frac{\pi}{2} - \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (tg^{-1}(\frac{2a+b-s_i}{b}), \frac{\pi}{2}) \\ (2a + b - s_i - b \tan \theta_i, \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (0, tg^{-1}(\frac{2a+b-s_i}{b})) \\ (2a + b - s_i + b \tan \theta_i, \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (tg^{-1}(\frac{a+b-s_i}{b}), 0) \\ (a + b - (s_i - a - b) \operatorname{ctg} \theta_i, \frac{\pi}{2} - \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, tg^{-1}(\frac{a+b-s_i}{b})) \end{cases}$$

a aplicação colisão $\mathcal{F}_4 : \tilde{\mathcal{M}}_4 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ é dada por

$$\mathcal{F}_4(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (2a + 2b - s_i) \operatorname{ctg} \theta_i, \frac{\pi}{2} - \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (tg^{-1}(\frac{2a+2b-s_i}{a}), \frac{\pi}{2}) \\ (3a + 2b - s_i - a \tan \theta_i, \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (0, tg^{-1}(\frac{2a+2b-s_i}{a})) \\ (3a + 2b - s_i + a \tan \theta_i, \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (tg^{-1}(\frac{2a+b-s_i}{a}), 0) \\ (2a + b - (s_i - 2a - b) \operatorname{ctg} \theta_i, \frac{\pi}{2} - \theta_i), & \text{se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, tg^{-1}(\frac{2a+b-s_i}{a})) \end{cases}$$

Note que $\tilde{\mathcal{M}}_i$ são retângulos.

Exemplo 3.2.3. (*semicírculo e segmento de reta*) Considere uma mesa de bilhar com duas componentes formando a fronteira: semicírculo ($y = \sqrt{4 - x^2}$ com $y \geq 0$) definida pela imagem do caminho $f : [0, \pi + 4) \rightarrow [0, \pi + 4)$

$$f(s) = \begin{cases} (2 \cos(s), 2 \operatorname{sen}(s)), & \text{se } s \in [0, \pi) \\ (s_i - 2 - \pi, 0), & s \in [\pi, \pi + 4) \end{cases}$$

A aplicação bilhar $\mathcal{F} : (0, \pi) \cup (\pi, \pi + 2) \cup (\pi + 2, \pi + 4) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \pi) \cup (\pi, \pi + 2) \cup (\pi + 2, \pi + 4) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ determina o próxima colisão bilhar, sendo

$$\mathcal{F}(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (s_i - \pi + 2\theta_i, \theta_i, \theta_i), & \text{se } s \in (0, \pi), \text{ se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-s_i}{2}) \\ (\pi + 2 + \frac{2 \operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}(s_i)}, \theta_i + s_i - \pi), & \text{se } s \in (0, \pi), \text{ se } \theta_i \in (\frac{\pi-s_i}{2}, 0) \\ (\pi + 2 - \frac{2 \operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}(s_i-\theta_i)}, \theta_i - s_i), & \text{se } s \in (0, \pi), \text{ se } \theta_i \in (0, \frac{s_i}{2}) \\ (s_i + \pi - 2\theta_i, \theta_i), & \text{se } s \in (0, \pi), \text{ se } \theta_i \in (\frac{s_i}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (\frac{\pi}{2} - \theta_i + \operatorname{sen}^{-1}(\alpha), \operatorname{sen}^{-1}(\alpha)), & \text{se } s_i \in (\pi, \pi + 2), \text{ se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (\frac{\pi}{2} + \theta_i + \operatorname{sen}^{-1}(\alpha), -\operatorname{sen}^{-1}(\alpha)), & \text{se } s_i \in (\pi + 2, \pi + 4), \text{ se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

com $\alpha = \frac{(\pi+2-s_i) \cos\theta_i}{2}$

Exemplo 3.2.4. (círculos concêntricos) Sejam dois círculos de raios $R > r$, Γ_1 e Γ_2 respectivamente, com centro em a definidas pela imagem do caminho $f : [0, 4\pi] \rightarrow [0, 4\pi]$ tal que

$$f(s) = \begin{cases} (a_1 + R \cos s, a_2 + R \operatorname{sen} s), & \text{se } s \in [0, 2\pi) \\ (a_1 + r \cos s, a_2 - r \operatorname{sen} s), & \text{se } s \in [2\pi, 4\pi) \end{cases}.$$

A aplicação bilhar $\mathcal{F} : [0, 2\pi) \cup [2\pi, 4\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 2\pi) \cup [2\pi, 4\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dada (s_i, θ_i) uma colisão com Γ em $f(s_i)$ tem-se que

$$\mathcal{F}(s_i, \theta_i) = \begin{cases} \mathcal{F}_1, & \text{se } s_i \in [0, 2\pi), \theta \in (\frac{\pi}{2}, \gamma) \cup (\gamma, \frac{\pi}{2}) \\ \mathcal{F}_2, & \text{se } s_i \in [0, 2\pi), \theta \in (-\gamma, \gamma) \\ \mathcal{F}_3, & \text{se } s_i \in [2\pi, 4\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Seja $\mathcal{F}_1 : [0, 2\pi) \times (\frac{\pi}{2}, \gamma) \cup (\gamma, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [0, 2\pi) \times (\frac{\pi}{2}, \gamma) \cup (\gamma, \frac{\pi}{2})$ a partícula vai de Γ_1 para Γ_1 , assim

$$\mathcal{F}_1(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (1)(s_i - \pi + 2\theta_i, \theta_i), \text{ se } (s_i, \theta_i) \in (0, 2\delta] \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{s_i - \pi}{2}) \\ (2)(s_i + \pi + 2\theta_i, \theta_i), \text{ se } (s_i, \theta_i) \in [0, 2\delta] \times [\frac{s_i - \pi}{2}, -\gamma) - \{(0, -\frac{\pi}{2})\} \\ (3)(s_i - \pi + 2\theta_i, \theta_i), \text{ se } (s_i, \theta_i) \in (2\delta, 2\pi) \times (\frac{-\pi}{2}, -\gamma) \\ (4)(s_i + \pi - 2\theta_i, \theta_i), \text{ se } (s_i, \theta_i) \in [0, 2\pi - 2\delta] \times (\gamma, \frac{\pi}{2}) \\ (5)(s_i - \pi - 2\theta_i, \theta_i), \text{ se } (s_i, \theta_i) \in (2\pi - 2\delta, 2\pi) \times (\gamma, \frac{s_i - \pi}{2}] - \{(2\pi, \frac{\pi}{2})\} \\ (6)(s_i + \pi - 2\theta_i, \theta_i), \text{ se } (s_i, \theta_i) \in [2\pi - 2\delta, 2\pi) \times (\frac{s_i - \pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

com $\gamma = \text{sen}^{-1}(\frac{r}{R})$ e $\delta = \text{cos}^{-1}(\frac{r}{R})$. Note que o $\Delta(f(s_i), f(s_i + 2\pi + \delta), a)$ é retângulo (com ângulo reto em $f(s_i + 2\pi + \delta)$).

Seja $\mathcal{F}_2 : (0, 2\pi) \times (-\gamma, \gamma) \rightarrow (2\pi, 4\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a partícula vai de Γ_1 para Γ_2 , assim

$$\mathcal{F}_2(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (7)(3\pi - s_i - \theta_i - \alpha, \pi - \alpha), \text{ se } s_i \in [0, \delta], \text{ se } \theta_i \in [-\gamma, -\epsilon] \\ (8)(5\pi - s_i - \theta_i - \alpha, \pi - \alpha), \text{ se } s_i \in [0, \delta], \text{ se } \theta_i \in (-\epsilon, 0] \\ (9)(5\pi - s_i - \theta_i - \alpha, \pi - \alpha), \text{ se } s_i \in (\delta, 2\pi), \text{ se } \theta_i \in [-\gamma, 0] \\ (10)(5\pi - s_i - \theta_i - \alpha, \pi - \alpha), \text{ se } s_i \in [0, 2\pi - \delta], \text{ se } \theta_i \in (0, \gamma] \\ (11)(3\pi - s_i + \theta_i + \alpha, \pi - \alpha), \text{ se } s_i \in [2\pi - \delta, 2\pi), \text{ se } \theta_i \in [0, \epsilon) \\ (12)(5\pi - s_i + \theta_i + \alpha, \pi - \alpha), \text{ se } s_i \in [2\pi - \delta, 2\pi), \text{ se } \theta_i \in [\epsilon, \gamma] \end{cases}$$

com $\alpha = \text{sen}^{-1}(\frac{R \text{sen}\theta_i}{r})$, $\epsilon = \text{sen}^{-1}(\frac{r}{\sigma} \text{sen}s_i)$.

Seja $\mathcal{F}_3 : [2\pi, 4\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a partícula vai de Γ_2 para Γ_1 , assim

$$\mathcal{F}_3(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (13)(s_i - 2\pi + \theta - \lambda, \lambda), & \text{se } s_i \in (0, 2\pi - \delta), \text{ se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ (14)(s_i - 2\pi + \lambda - \theta, \lambda), & \text{se } s_i \in (0, \delta), \text{ se } \theta_i \in (0, \pi - \epsilon) \\ (15)(s_i - \theta + \lambda, \lambda), & \text{se } s_i \in (0, \delta), \text{ se } \theta_i \in [\pi - \epsilon, \frac{\pi}{2}) \\ (16)(s_i - 2\pi - \theta + \lambda, \lambda), & \text{se } s_i \in (\delta, 2\pi), \text{ se } \theta_i \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ (17)(s_i - 4\pi + \theta - \lambda, \lambda), & \text{se } s_i \in (2\pi - \delta, 2\pi), \text{ se } \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \pi - \beta) \\ (18)(s_i - 2\pi + \theta - \lambda, \lambda), & \text{se } s_i \in (2\pi - \delta, 2\pi), \text{ se } \theta_i \in [\pi - \beta, 0) \end{cases}$$

com $\lambda = \text{sen}^{-1}(\frac{r \text{sen}\theta}{R})$ e $\beta = \text{sen}^{-1}(\frac{-R \text{sen}s_i}{\sigma})$.

3.2.3 Derivada da aplicação bilhar

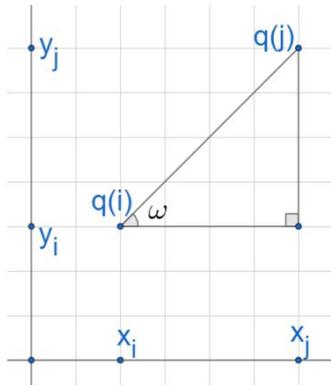


Figura 3.18: Fluxo em coordenadas sem colisão

Será dado uma representação do fluxo em coordenadas, assim $\Phi^t(q_-) = q_+$. Os estados de fase $q_- = (x_-, y_-, \omega_-)$, $q_+ = (x_+, y_+, \omega_+) \in \tilde{\Omega}$ definem que (x_-, y_-) , $(x_+, y_+) \in D$ e $\omega_-, \omega_+ \in [0, 2\pi]$ (o ângulo no sentido anti-horário entre os vetores $(1, 0)$ e o vetor velocidade v_-, v_+ respectivamente).

Seja $\delta : \bar{Q} \times \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ a distância entre dois momentos da partícula pontual na mesa de bilhar, assim $\delta(q, q_+) = \delta$. Na figura 3.18, pelo triângulo retângulo formado retira-se as equações

$$x_+ - x_- = \delta \cos \omega_-$$

$$y_+ - y_- = \delta \sin \omega_-$$

Suponha que não há uma colisão no intervalo $(0, t)$, isto é, $t < t_1$. Assim o fluxo em $(0, t)$ é $\Phi^t(q_-) = (x_-, y_-, \omega_-) = (x_+ + \delta \cos \omega_-, y_- + \delta \sin \omega_-, \omega_-)$

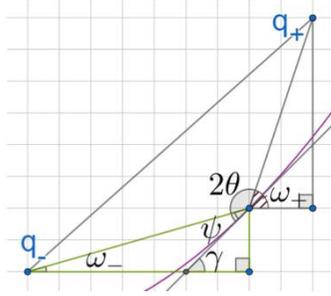


Figura 3.19: Fluxo em coordenadas com colisão

Suponha agora que há uma colisão em $(0, t)$, isto é, $0 < t_1 < t < t_2$. Assim o fluxo em $(0, t_1)$ é $\Phi^{t_1}(q_-) = (\bar{x}, \bar{y}, \omega_-) = \bar{q}$ percorrendo uma linha reta de q_- até colidir com Γ em \bar{q} :

$$x_- = \bar{x} - \delta_- \cos \omega_- \quad (3.3)$$

$$y_- = \bar{y} - \delta_- \sin \omega_- \quad (3.4)$$

$$\omega_- = \gamma - \psi \quad (3.5)$$

O fluxo em (t_1, t) é $\Phi^{t-t_1}(\bar{q}) = (x_+, y_+, \omega_+) = q_+$ percorre uma linha reta de \bar{q} até q_+ , logo

$$x_+ = \bar{x} + \delta_+ \cos \omega_+ \quad (3.6)$$

$$y_+ = \bar{y} + \delta_+ \sin \omega_+ \quad (3.7)$$

$$\omega_+ = \gamma + \psi \quad (3.8)$$

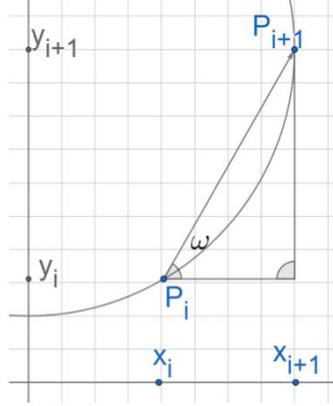


Figura 3.20: Fluxo em coordenadas em duas colisões

Será dado uma representação do fluxo em coordenadas, assim $\Phi^{t_{i+1}-t_i}(q_i) = q_{i+1}$. Os estados de fase $q_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \omega_i)$, $q_{i+1} = (\bar{x}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \omega_i) \in \tilde{\Omega}$ definem que $(\bar{x}_i, \bar{y}_i), (\bar{x}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) \in \Gamma$ e $\omega \in [0, 2\pi]$ (o ângulo no sentido anti-horário entre os vetores $(1, 0)$ e o vetor velocidade). Na figura 3.20, pelo triângulo retângulo formado retira-se as equações

$$\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i = \delta_+ \cos \omega \quad (3.9)$$

$$\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i = \delta_+ \sin \omega \quad (3.10)$$

Seja r o parâmetro de comprimento de arco, assim cada componente da fronteira de Γ , Γ_i está definida pela imagem do caminho suave $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_i(r) = (x_i(r), y_i(r))$ parametrizado por comprimento de arco, de maneira que $\|f'_i(r)\| = 1$, para todo $r \in I$ tal que $f'_i(r) = (\frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dr})$. Note que $T(r) = (\cos \gamma, \sin \gamma)$ é o vetor tangente unitário à curva e assim

$$d\bar{x} = \cos \gamma dr \quad e \quad d\bar{y} = \sin \gamma dr \quad (3.11)$$

Quando Γ_i é focalizadora, o ângulo γ cresce quando r cresce, ou seja, $\frac{d\gamma}{dr} > 0$ e

a curvatura $k(r) = -\|f''(r)\|$. Quando Γ_i é dispersora, o ângulo decresce quando r cresce, isto é, $\frac{d\gamma}{dr} < 0$ e a curvatura $k(r) = \|f''(r)\|$. Portanto

$$d\gamma = -\mathcal{K}dr, \mathcal{K} = k(r). \quad (3.12)$$

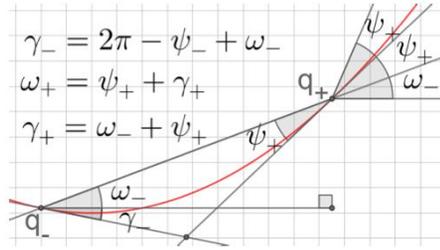


Figura 3.21: Ângulos em duas colisões

Note que ω_- leva o ponto q_- ao ponto q_+ , assim ω_- será dito somente ω , assim pela figura ?? temos que

$$\omega = \gamma_- + \psi_- - 2\pi = \gamma_+ - \psi_+ \quad (3.13)$$

diferenciando 3.9, 3.10 e 3.13 tem-se respectivamente:

$$d\bar{x}_+ - d\bar{x}_- = \cos \omega d\delta - \delta \operatorname{sen} \omega d\omega$$

$$d\bar{y}_+ - d\bar{y}_- = \operatorname{sen} \omega d\delta + \delta \cos \omega d\omega$$

$$d\omega = d\gamma_- + d\psi_- = d\gamma_+ - d\psi_+$$

e substituindo 3.11 e 3.12 ocorrem respectivamente

$$\cos\gamma_+dr_+ - \cos\gamma_-dr_- = \cos\omega d\delta - \delta \operatorname{sen}\omega d\omega \quad (3.14)$$

$$\operatorname{sen}\gamma_+dr_+ - \operatorname{sen}\gamma_-dr_- = \operatorname{sen}\omega d\delta + \delta \cos\omega d\omega \quad (3.15)$$

$$d\omega = -\mathcal{K}_-dr_- + d\psi_- = -\mathcal{K}_+dr_+ - d\psi_+ \quad (3.16)$$

multiplicando 3.14 por $\operatorname{sen}\omega$ e 3.15 por $-\cos\omega$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\omega \cos\gamma_+dr_+ - \operatorname{sen}\omega \cos\gamma_-dr_- &= \operatorname{sen}\omega \cos\omega d\delta - \delta \operatorname{sen}^2\omega d\omega \\ -\operatorname{sen}\gamma_+\cos\omega dr_+ + \operatorname{sen}\gamma_-\cos\omega dr_- &= -\operatorname{sen}\omega \cos\omega d\delta - \delta \cos^2\omega d\omega \end{aligned}$$

somando ambas as equações tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\omega \cos\gamma_+dr_+ - \operatorname{sen}\gamma_+\cos\omega dr_+ - \operatorname{sen}\omega \cos\gamma_-dr_- + \operatorname{sen}\gamma_-\cos\omega dr_- &= \\ \operatorname{sen}\omega \cos\omega d\delta - \operatorname{sen}\omega \cos\omega d\delta - \delta \operatorname{sen}^2\omega d\omega - \delta \cos^2\omega d\omega &\Leftrightarrow \\ (\operatorname{sen}\omega \cos\gamma_+ - \operatorname{sen}\gamma_+\cos\omega)dr_+ + (-\operatorname{sen}\omega \cos\gamma_- + \operatorname{sen}\gamma_-\cos\omega)dr_- &= \\ (\operatorname{sen}\omega \cos\omega - \operatorname{sen}\omega \cos\omega)d\delta + (-\delta \operatorname{sen}^2\omega - \delta \cos^2\omega)d\omega &\Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}(\omega - \gamma_+)dr_+ + \operatorname{sen}(\gamma_- - \omega)dr_- &= -\delta d\omega \end{aligned}$$

por 3.13 tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\psi_+)dr_+ + \operatorname{sen}(2\pi - \psi_-)dr_- &= -\delta d\omega \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}(\psi_+)dr_+ + \operatorname{sen}(\psi_-)dr_- &= \delta d\omega \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_- = \frac{\pi}{2} - \theta_-$ e $\psi_+ = \frac{\pi}{2} - \theta_+$ e 3.16($d\omega = -\mathcal{K}_-dr_- + d\psi_-$) tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_+\right)dr_+ + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_-\right)dr_- &= \delta(-\mathcal{K}_-dr_- - d\theta_-) \Leftrightarrow \\ \cos(\theta_+)dr_+ + \cos(\theta_-)dr_- &= -\delta\mathcal{K}_-dr_- - \delta d\theta_- \end{aligned}$$

e

$$-\mathcal{K}_+dr_+ + d\theta_+ = -\mathcal{K}_-dr_- - d\theta_-$$

implicam que

$$-\cos(\theta_+)dr_+ = (\cos(\theta_-) + \delta\mathcal{K}_-)dr_- + \delta d\theta_- \quad (3.17)$$

$$dr_+ = \frac{1}{\mathcal{K}_+}(d\theta_+ + \mathcal{K}_-dr_- + d\theta_-) \quad (3.18)$$

substituindo a segunda na primeira tem-se

$$\begin{aligned} -\cos(\theta_+)\left[\frac{1}{\mathcal{K}_+}(d\theta_+ + \mathcal{K}_-dr_- + d\theta_-)\right] &= (\cos(\theta_-) + \delta\mathcal{K}_-)dr_- + \delta d\theta_- \Leftrightarrow \\ -\cos(\theta_+)d\theta_+ - \mathcal{K}_-\cos(\theta_+)dr_- - \cos(\theta_+)d\theta_- &= (\mathcal{K}_+\cos(\theta_-) + \delta\mathcal{K}_-\mathcal{K}_+)dr_- + \delta\mathcal{K}_+d\theta_- \Leftrightarrow \\ -\cos(\theta_+)d\theta_+ &= (\delta\mathcal{K}_-\mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-\cos(\theta_+) + \mathcal{K}_+\cos(\theta_-))dr_- + (\delta\mathcal{K}_+ + \cos(\theta_+))d\theta_- \end{aligned}$$

a equação anterior junto com 3.17 escritos em forma matricial

$$\begin{bmatrix} dr_+ \\ d\theta_+ \end{bmatrix} = \frac{-1}{\cos(\theta_+)} \begin{bmatrix} \delta\mathcal{K}_- + \cos(\theta_-) & \delta \\ \delta\mathcal{K}_-\mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-\cos(\theta_+) + \mathcal{K}_+\cos(\theta_-) & \delta\mathcal{K}_+ + \cos(\theta_+) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dr_- \\ d\theta_- \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Note que, como $\cos(\theta_+) \neq 0$ e $\cos(\theta_-) \neq 0$, assim esta matriz é definida e não é singular (não é a matriz nula). Além disso, como a primeira derivada de \mathcal{F} envolve a curvatura $\mathcal{K} = k(r)$ de Γ (relacionado à segunda derivada dos componentes Γ_i 's), então a suavidade de \mathcal{F} deve ser pelo menos C^{k-1} .

É fácil verificar que $\| \det D\mathcal{F}(x) \| = -(\cos\theta_-)$

3.2.4 Exemplos da Jacobiana

Definição 3.2.10. *Seja a aplicação colisão $\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ tal que $\mathcal{F}(r_i, \theta_i) = (r_{i+1}, \theta_{i+1})$.*

A derivada de \mathcal{F} é dado pela matriz jacobiana 3.19 tal que:

$$J_{\mathcal{F}}(r_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial r_i} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial r_i} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \theta_i} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\cos(\theta_{i+1})} \begin{bmatrix} \delta k(r_i) + \cos(\theta_i) & \delta \\ \delta k(r_i)k(r_{i+1}) + k(r_i)\cos(\theta_{i+1}) + k(r_{i+1})\cos(\theta_i) & \delta k(r_{i+1}) + \cos(\theta_{i+1}) \end{bmatrix}$$

onde $\delta = ||r_{i+1} - r_i||$, $k(r)$ é a curvatura da j -ésima componente Γ_j da fronteira da mesa Q onde $f_j(r)$ esteja.

Exemplo 3.2.5. *Considere um círculo de centro a e raio r , parametrizado por comprimento de arco, de parâmetro s , pela aplicação $f(s) : [0, 2\pi r] \rightarrow [0, 2\pi r]$ tal que $f(s) = (a_1 + r \cos(\frac{s}{r}), a_2 + r \sin(\frac{s}{r}))$. A aplicação colisão é dada por $\mathcal{F} : [0, 2\pi r] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 2\pi r] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que*

$$\mathcal{F}(s_i, \theta_i) = \begin{cases} (s_i - \pi r + 2\theta_i r, \theta_i), & \text{se } s_i \in (0, \pi r), \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi - s_i}{2}) \\ (s_i + \pi r + 2\theta_i r, \theta_i), & \text{se } s_i \in (0, \pi r), \theta_i \in (\frac{\pi - s_i}{2}, 0) \\ (s_i + \pi r - 2\theta_i r, \theta_i), & \text{se } s_i \in (0, \pi r), \theta_i \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ (s_i - \pi r + 2\theta_i r, \theta_i), & \text{se } s_i \in (\pi, 2\pi r), \theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ (s_i - \pi r - 2\theta_i r, \theta_i), & \text{se } s_i \in (\pi, 2\pi r), \theta_i \in (0, \frac{s_i - \pi}{2}) \\ (s_i + \pi r - 2\theta_i r, \theta_i), & \text{se } s_i \in (\pi, 2\pi r), \theta_i \in (\frac{s_i - \pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

de maneira que o conjunto $[0, 2\pi r] \times [0, 2\pi r]$ é invariante sobre \mathcal{F} . A jacobiana é dada por:

$$J_{\mathcal{F}}(s_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 2r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A Jacobiana pode ser encontrada pela fórmula 3.19. Seja $k(s) = \frac{1}{r}$. Pela lei dos senos, $\delta = \frac{r \sin(\pi - 2\theta)}{\sin \theta} \Rightarrow \delta = 2r \cos \theta$. logo:

$$J_{\mathcal{F}}(s_i, \theta_i) = \frac{-1}{\cos(\theta_i)} \begin{bmatrix} -2 \cos(\theta_i) + \cos(\theta_i) & -2r \cos(\theta_i) \\ \frac{-2}{r} \cos(\theta_i) + \frac{1}{r} \cos(\theta_i) + \frac{1}{r} \cos(\theta_i) & -2 \cos(\theta_i) + \cos(\theta_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.5 Medida invariante

Seja $\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ uma aplicação contínua que preserva medida de probabilidade $(\tilde{\mathcal{M}}, \beta(\tilde{\mathcal{M}}), \mu)$, sendo $\mu : \beta(\tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow [0, 1]$ uma medida de probabilidade com $\mu(\tilde{\mathcal{M}}) = 1$. \mathcal{F} é ergódica se todo conjunto \mathcal{F} -invariante tem medida 0 ou 1.

Seja $\mathcal{O}(x)$ uma órbita periódica de $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, assim $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{O}(x)$ e assim $\mathcal{O}(x)$ é um conjunto \mathcal{F} -invariante. Note que $\mathcal{O}(x)$ têm medida zero ou 1.

Exemplo 3.2.6. *Considere uma mesa de bilhar circular. Seja $D(0, 1)$ um disco de raio 1. Seja $\tilde{\mathcal{M}} = \Gamma \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dado um ponto $(s_i, \theta_i) \in \tilde{\mathcal{M}}$, a próxima reflexão é dada pela aplicação de bilhar do exemplo 3.2.5 e a n -ésima colisão por $\mathcal{F}^n(s_i, \theta_i) = ((s_i + n(\pi - 2\theta_i), \theta_i)$. Note que θ é invariante sobre \mathcal{F} .*

Observe que \mathcal{F} age como uma rotação circular de (s, θ) , resta saber se volta para mesma posição, ou seja, se $\mathcal{F}^n(s, \theta) = (s, \theta)$, ou seja, se existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n(\pi - 2\theta_i) = 2m\pi \Leftrightarrow \frac{\pi - 2\theta_i}{2\pi} = \frac{m}{n}$, e assim $\pi - 2\theta$ (ângulo de rotação circular) é um múltiplo racional de π . Se tal m não existir, ocorrerá que $\mathcal{O}(x) = \Gamma$.

Note que $\mathcal{O}(x)$ têm medida 0 quando a rotação é periódica e têm medida 1 quando a rotação é não-periódica. Assim $\mathcal{O}(x)$ são conjuntos \mathcal{F} -invariantes. Mesmo assim \mathcal{F} não é uma aplicação ergódica, pois dado um ângulo de 90° e a órbita de $[0, \frac{\pi}{6}]$, tem-se que $J = [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{6}] \cup [\pi, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{10\pi}{6}]$. De fato $\mathcal{F}(J \times \frac{\pi}{2}) = J \times \frac{\pi}{2}$ e assim $J \times \frac{\pi}{2}$ é um conjunto \mathcal{F} -invariante, mas não têm medida 0 nem 1.

A medida de J é $\frac{2\pi}{3}$. Por isso \mathcal{F} não é ergódica.

Capítulo 4

Aplicação ao ensino básico

O modelo bilhar pode ser ensinado aos alunos observando conceitos que estão ao alcance deles, adequando cada informação às séries correspondentes. A seguir apresentamos cinco instruções didáticas para que o professor use na aula de acordo com o nível de conhecimento da turma.

4.1 1ª aula - partículas dentro de uma região

Um modelo que busca melhorar a previsão do tempo é o da meteorologia que ganhou importância no último século. Essa área de estudo já conta com cursos de graduação e pós-graduação em várias universidades do Brasil e do mundo. Mesmo contando com avançadas técnicas, ainda se faz necessário aperfeiçoar conceitos básicos que diminuem os erros da previsão do tempo.

O modelo bilhar estuda o deslocamento e a velocidade de uma partícula dentro de uma região. Espera-se aperfeiçoar esse modelo para que outros evoluam, tais como modelos que envolvem força de atrito, força gravitacional, pressão do ar, correntes de ar, influencia da temperatura e etc. E assim melhorar a previsão de chuvas e mudanças

climáticas.

Serão narradas algumas experiências para entender melhor alguns modelos práticos que envolvem partículas.

* Experiência 1

Segundo a superinteressante [18] os refrigerantes ou líquidos gaseificados possuem as bolhas do dióxido de carbono não dissolvidas na bebida. As bolhas estão separadas pela solução de água e xarope e continuarão assim desde que o refrigerante esteja guardado refrigerado ou em temperatura ambiente. Existe um equilíbrio entre o gás e o líquido mantido pela pressão interna da garrafa fechada.

Esse equilíbrio pode ser quebrado facilmente abrindo a tampa (trocando gás interno pelo ar), balançando a garrafa antes de abrir a tampa (aumentando a pressão interna dos gases) ou adicionando uma bala de Mentos (aumentando rapidamente a formação e expansão do gás carbônico em grande quantidade). Essas experiências surtem mais efeito em refrigerantes light e diet, pois o refrigerante tradicional é mais denso por causa do açúcar retendo a expansão do gás carbônico.

* Experiência 2:

Encha um balão com ar (não use gás hélio) e outro com um pouco de água e com ar. Peça a um adulto para usar um isqueiro ascender um fósforo e colocar fogo debaixo dos dois balões. O balão só com ar irá explodir na hora que o fogo encostar por baixo. O balão com água não explode nos primeiros minutos porque a água absorve o calor que o plástico recebe. A experiência do balão com água não deve ser feita por muito tempo, pois corre-se o risco da água quente espirrar e ocorrerem queimaduras. Então um minuto é suficiente para essa experiência.

O objetivo dessa aula é entender que as partículas podem se deslocar e adquirir grandes velocidades em segundos.

Atividade:

1 - Encha um balão e solte-o. Observe que o ar que saiu dos pulmões e foi colocado no balão sairá com muita velocidade do balão, fazendo-o se mover pelo ar. Descreva o movimento do ar que sai do balão.

2 - Pesquise como um balão de ar quente sobe e se move pelo ar. Descreva o movimento do ar quente.

3 - Encha um balão de água e amarre-o. Gire o balão até a água girar sozinha. Descreva o movimento das partículas de água dentro do balão.

4 - Dentro de uma vasilha de água coloque um pedaço pequeno de isopor ou outro objeto que não afunde. Faça um redemoinho na água por pouco tempo e observe o comportamento desse objeto. Descreva o movimento do objeto.

4.2 2ª aula - mesa bilhar

O modelo bilhar plano é um sistema dinâmico que descreve a posição e a velocidade de uma partícula em cada instante, dentro de uma região plana conexa. Uma região é dita conexa se é sempre possível percorrer toda a região sem sair dela.

Exemplo de uma região não-conexa: Desenhe dois círculos distantes e tente colocar o lápis dentro de um e arrastar o lápis até entrar no outro sem ter saído do primeiro. Impossível! Isso mostra que a região contendo o interior de dois círculos distantes não é conexa, pois numa região conexa será sempre possível arrastar o lápis sem sair da região.

Exemplo de uma região conexa: Desenhe um círculo dentro do outro. A região entre os dois círculos concêntricos é conexa, pois é possível percorrer toda a região sem tirar o lápis do papel e sem sair da região.

O movimento de uma partícula é semelhante ao movimento de uma bola(futebol, gude, borracha, bilhar), disco (hóquei), etc. Para entender o modelo bilhar, serão observados modelos semelhantes e analisados as suas diferenças.

Uma partida de futebol é um modelo único que descreve o movimento de uma bola que recebe aplicações de forças em seu movimento de muitos agentes por um tempo determinado em uma região retangular, denominada campo de futebol. Diferente do modelo bilhar que recebe uma única força de um agente. E que a componente da fronteira de uma região bilhar podem ser curvas regulares ou segmentos de reta.

O movimento da bola em um jogo de futebol pode ser visto como se não houvessem jogadores. Sendo visto como se ela percorresse caminhos e velocidades aleatórios dentro de um terreno retangular. Nesse modelo, se a bola sair para fora do retângulo, considera-se que a bola está no ponto mais próximo da borda do campo retangular. O movimento dela sem os penalts será chamado de modelo futebol. Embora ele seja diferente do modelo bilhar em alguns aspectos é um modelo muito próximo dos fenômenos naturais, a qual tentamos entender através do estudo do modelo bilhar.

Atividade:

1 - Narre uma história de uma partida de futebol em que foi feito um gol nos três primeiros minutos do jogo.

2 - Desenhe um campo de futebol com os traços da pequena área do goleiro. Desenhe nesse campo com um lápis de cor claro o movimento da bola da história da questão anterior até ela entrar no gol.

3 - Desenhe usando linhas curvas e linhas retas como você gostaria que fosse uma quadra de futebol no futuro.

4 - Pesquise como é o campo de hóquei no gelo e desenhe o campo de hóquei no gelo.

5 - Faça uma narrativa de um gol feito no hóquei de gelo em três minutos.

6 - Desenhe o campo de hóquei no gelo e a trajetória da bola com um lápis de cor claro da narrativa feita na questão anterior.

4.3 3ª aula - reflexão na fronteira

O modelo bilhar é um sistema dinâmico em que se analisa o movimento (posição e velocidade) de uma partícula a partir de um certo momento t_0 no interior da mesa. A partícula movimenta-se no interior da mesa de forma linear, mesmo após cada colisão com a fronteira da mesa perfeitamente elástica. Conservando o ângulo de reflexão e sua velocidade escalar, e como consequência nunca vai parar, a menos que atinja um vértice que não seja regular, onde não pode fazer reflexão.

Para entender a reflexão de uma partícula na mesa bilhar pode-se analisar reflexões naturais em outros modelos. Num jogo de hóquei no gelo, o disco após bater na parede continua seu movimento em outra trajetória. A parede perfeitamente elástica absorve a energia cinética do disco e a devolve completamente. O mesmo efeito pode ser visto numa mesa de bilhar quando as bolas batem na parede da mesa e continuam se movendo em outra direção.

Uma mesa bilhar possui borrachas nas bordas internas entre a madeira e o tecido. Quanto melhor a qualidade da borracha melhor a conservação de energia da colisão (conservando a velocidade) e quanto mais liso é a borracha mais o ângulo de reflexão se identifica com o ângulo de incidência.

Observe na figura 4.1 que a partícula está indo do ponto C até o ponto A, refletindo no ponto A. O ângulo de incidência é o ângulo entre o vetor de chegada da partícula no ponto A, o vetor \vec{CA} e o vetor perpendicular a fronteira, o vetor \vec{AE} . Na figura 4.1 o ângulo \hat{CAE} é igual a 59° . Numa mesa de bilhar a borracha de alta qualidade tem

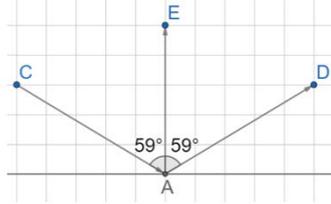


Figura 4.1: Reflexão de uma partícula

como objetivo deixar o ângulo de reflexão ficar próximo do ângulo de incidência.

Existe uma maneira fácil de construir um caminho de uma partícula através de reflexões em mesas circulares sem fazer cálculos. Vamos precisar de uma régua, um lápis e um compasso.

Com o lápis, faça um ponto no papel (ponto A) e com o compasso faça um círculo de centro no ponto A. Construimos uma mesa bilhar circular.

Escolha um ponto dentro do círculo diferente do centro, marque-o e chame-o de P_0 . Traçe uma reta secante (uma reta que intercepte o círculo duas vezes) que passe pelo ponto P_0 , mas não passe pelo ponto A. Um dos pontos de intersecção chame de P_1 e o outro de B. A partícula começou em P_0 o seu movimento é em direção ao ponto P_1 .

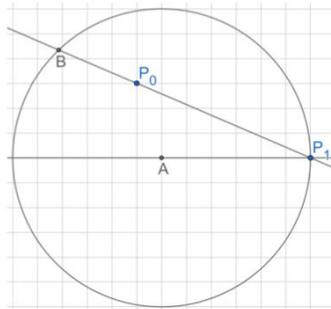


Figura 4.2: Reflexão de uma partícula numa mesa circular

Com o compasso centrado no ponto P_1 , faça um arco que passe por B até outra parte do círculo e chame a outra intersecção de P_2 . Com uma régua, traçe um segmento de reta de P_1 até P_2 como na figura 4.3.

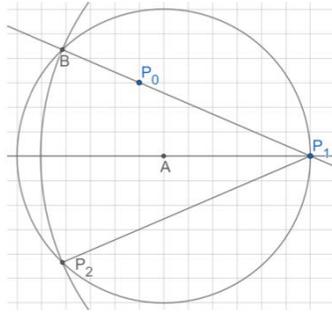


Figura 4.3: Reflexão de uma partícula numa mesa circular

Atividade:

- 1 - Continue o movimento da partícula até o ponto P_5 .
- 2 - Construa outra mesa circular e faça até o ponto P_{10} .

4.4 4ª aula - polígonos regulares

O conjunto dos pontos de uma trajetória da partícula é chamado de órbita da partícula. Se a órbita não coincide com toda a mesa bilhar, então a órbita é periódica.

Podemos construir facilmente órbitas periódicas em mesas circulares. Essas órbitas podem ter formato de polígono regular, de um segmento de reta ou de figuras não poligonais.

Exemplo 4.4.1. *Para construir uma órbita com formato de segmento de reta.*

- 1-Marque o ponto A no papel.
 - 2-Construa um círculo com centro em A com o compasso.
 - 3-Marque um ponto P_0 interno ao círculo, diferente do ponto A .
 - 4-Com uma régua passe uma reta secante que passa pelos pontos A e P_0 interceptando dois pontos do círculo, chame um de P_1 e outro de P_2 .
 - 5-O segmento de reta P_1P_2 é uma órbita periódica que passa por P_0 .
- Esse segmento de reta como passa pelo centro é chamado de diâmetro.*

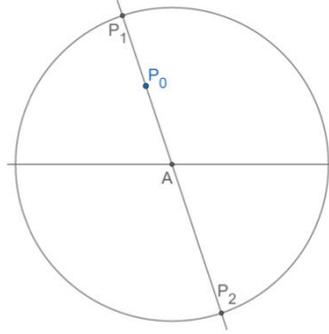


Figura 4.4: Órbita na mesa circular: Segmento de reta

Exemplo 4.4.2. *Para construir uma órbita triangular.*

- 1-Marque um ponto do papel como ponto A .
 - 2-Construa um círculo com centro em A com um compasso.
 - 3-Marque um ponto do círculo e chame de B .
 - 4-Construa uma reta que passe por A e B .
 - 5-Chame de P_1 a interseção da reta AB com o círculo.
 - 6-Construa um círculo com centro em B que passe por A .
 - 7-Chame os pontos de P_1 e P_2 .
- O triângulo $P_1P_2P_3$ é equilátero.

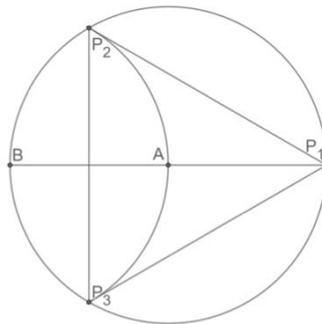


Figura 4.5: Órbita triangular na mesa circular

Exemplo 4.4.3. *Para construir uma órbita quadrangular.*

- 1-Marque um ponto do papel como ponto A .
 - 2-Construa um círculo com centro em A com um compasso.
 - 3-Marque um ponto do círculo e chame de P_1 .
 - 4-Traça uma reta que passe por A e P_1 .
 - 5-Denomine de P_2 a intersecção da reta AP_1 com o círculo de centro A .
 - 6-Traça dois círculos, um com centro em P_1 que passe por P_2 e outro com centro em P_2 que passe por P_1 .
 - 7-Um dos pontos de intersecção dos dois círculos nomeie de B .
 - 8-Traça a reta que passa por A e B (mediatriz de P_1 e P_2).
 - 9-Chame os pontos da reta AB que interceptam o círculo de P_3 e P_4 .
- O quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é quadrado.

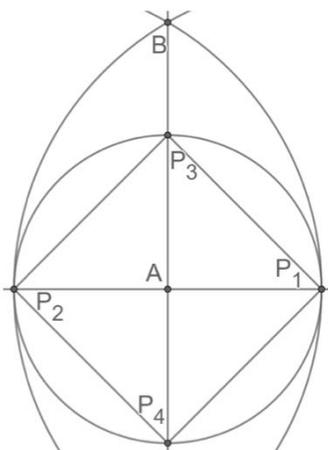


Figura 4.6: Órbita triangular na mesa circular

Atividade

- 1 - Construa uma órbita que seja um triângulo equilátero inscrito a um círculo de raio 5 cm.
- 2 - Construa uma órbita que seja um segmento de reta inscrito num círculo de raio 6 cm.

- 3 - Construa uma órbita que seja um quadrado inscrito a um círculo de raio 7 cm.
- 4 - Construa uma órbita que seja um hexágono regular inscrito a um círculo de raio 8 cm.(procedimento similar ao do triângulo no passo 6 repita com P_1)
- 5 - Construa uma órbita que seja um octógono regular inscrito a um círculo de raio 9 cm.(procedimento similar ao do quadrado, faça a mediatriz de P_1 e P_3)

4.5 5ª aula - caçapa

Existem no modelo bilhar trajetos da partícula que não são orbitais. Esses encerram o seu movimento em algum vértice da fronteira.

Já em alguns jogos que são jogados na mesa de bilhar tal como a sinuca, mata-mata, par ou impar, têm como objetivo derrubar bolas nas caçapas ou acertar as outras bolas. Em campeonatos é comum os jogadores fazerem cálculos matemáticos para encaçapar bolas.

Como exemplo, serão tomados mesas retangulares com caçapas nos vértices do retângulo. Consideremos uma mesa de bilhar de 10 metros de comprimento por 4 metros de largura. Nomeia-se os vértices no sentido anti-horário como A,B,C,D. Toma-se o eixo x a reta \overrightarrow{AB} e o eixo y a reta \overrightarrow{AD} , sendo a AB e CD de medidas 10 metros e AD e BC de medidas 4 metros.



Figura 4.7: Mesa retangular com eixos em AB e AD

O conjunto das posições de uma bola dessa mesa é $[0, 10] \times [0, 4]$, ou seja, a projeção

ortogonal da bola no eixo x é um valor entre 0 e 10 e a projeção ortogonal da bola no eixo y é um valor entre 0 e 4.

Considere uma bola na mesa na posição $E(8, 2)$. Pode-se encaçapar sem haver colisões, fazendo a bola ir direto pra caçapa. Por exemplo tacar a bola direto no vértice B, para isso deve-se tacar a bola na direção do vetor $\overrightarrow{(2, -2)}$.

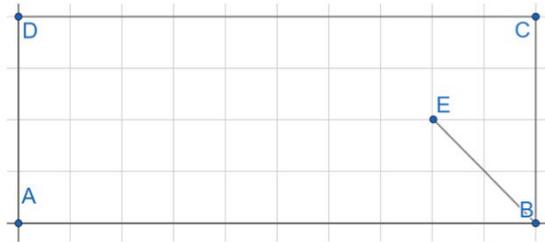


Figura 4.8: Encaçapar sem colidir com a mesa

Considere uma bola na mesa na posição $E(6, 2)$. Para encaçapar no vértice A após uma colisão em F com a fronteira deve-se ter o ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão. Toma-se "a" a distância horizontal entre E e F e "b" a distância vertical entre E e F. Também tem-se "c" a distância horizontal entre D e F e "d" a distância entre D e A. Sabe-se que $d = 4, a + c = 6, b = 2$.

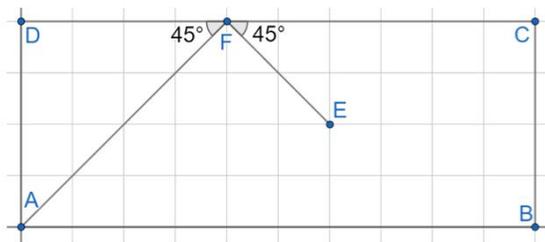


Figura 4.9: Encaçapar com uma colisão com a mesa

Considere um ponto G como projeção ortogonal do ponto E no segmento CF. Assim observa-se a semelhança dos triângulos $FGE \cong FDA$, logo a medida dos lados opostos aos ângulos congruentes são proporcionais. Portanto $\frac{FD}{FG} = \frac{FA}{FE} = \frac{DA}{GE} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \Rightarrow 2c =$

$4a \Rightarrow c = 2a$. Como $a + c = 6$ logo $3a = 6$ e assim $a = 2$ e $c = 4$. Todavia $\text{tg}GFE = 1$ por consequência os ângulos GFE e DFA são iguais a 45° .

Portanto a bola inicia o movimento na posição $E(6, 2)$ indo ao ponto $F(4, 4)$ pela direção do vetor $\overrightarrow{(-2, 2)}$, colidindo a 45° com a mesa, refletindo com o mesmo ângulo, indo para o ponto $A(0, 0)$ pela direção do vetor $\overrightarrow{(-4, -4)}$.

Atividade

1 - Considere a mesa $[0, 10] \times [0, 4]$ e o ponto $E(6, 2)$. Determine o ponto de colisão no segmento AB para que atinja o vértice D.

2 - Considere a mesa $[0, 10] \times [0, 4]$ e o ponto $E(5, 1)$. Determine duas maneiras da bola atinja o vértice a) C. b) D.

3 - Considere a mesa $[0, 10] \times [0, 4]$ e o ponto $E(5, 2)$. Descreva como a bola atinja qualquer um dos vértice: a) sem colisão. a) com uma colisão. b) com duas colisões.

Considerações finais

Esse trabalho teve como objetivo entender o modelo bilhar. Consequentemente chegou-se na demonstração da derivada de uma aplicação ergódica bilhar.

O primeiro capítulo contém um relato histórico mais objetivo. Históricos mais detalhados sobre aspectos mais gerais podem ser vistos em Coimbra [8].

O segundo capítulo prepara o leitor para entender vetores tangentes e normais, o movimento da partícula e uma aplicação bilhar. Como foi meu primeiro contato com a área, achei importante fazer algumas observações específicas para que os leitores interessados pudessem degustar melhor desse trabalho.

O terceiro capítulo prepara o leitor para entender medidas num conceito mais amplo. O conceito de medida de probabilidade é importante para entender aplicações que preservam medida e assim aplicações ergódicas.

O quarto capítulo exhibe o movimento de uma partícula pontual definida por uma aplicação bilhar. Um espaço de fase finito define uma medida zero, mas um conjunto \mathcal{F} -invariante infinito que não é todo o domínio da aplicação bilhar nos retorna que essa aplicação não têm uma propriedade ergódica.

Embora as aplicações que envolvam o modelo bilhar tenham conceitos avançados para um aluno do ensino médio, a aplicação bilhar do movimento de uma partícula pode ser toda construída com conceitos básicos, usando semelhança de triângulos.

Assim o capítulo cinco prepara o professor para instruir um aluno do ensino básico

para entender o modelo bilhar, sem envolver os detalhes que cabe ao ensino superior.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, R. M. D. *Billhares planares. São José do Rio Preto* (2012).
- [2] AZEVEDO, C. A. D. S. *Progressões Aritméticas em Subconjuntos de \mathbb{Z} : Uma visão ergódica*. UFRB, 2017.
- [3] BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [4] BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*. John Wiley & Sons, 1995.
- [5] BIRKHOFF, G. D. *Dynamical systems*, vol. 9. American Mathematical Soc., 1927.
- [6] BOER, E. D. S. *Tcc: Medida de lebesgue em \mathbb{R} e integração*. Santa Maria, RS (2016).
- [7] CHERNOV, N., AND MARKARIAN, R. *Introduction to the ergodic theory of chaotic billiards*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [8] COIMBRA, J. D. R. V. E. O. *Uma introdução a geometria diferencial*. Campinas: UNICAMP.
- [9] COSTA, A. E. D. M. *Tcc:curvatura de cônicas*. Campina Grande (2017).
- [10] DELGADO, J., FRENSEL, K., AND CRISSAFF, L. *Geometria analítica*. Coleção PROFMAT, Editora SBM, Rio de Janeiro (2017).

- [11] FERNANDES, W. T. R. Propriedades geométricas de bilhares planares. *Juiz de Fora: UFJF* (2014).
- [12] KOLMOGOROV, A. N., FOMIN, S. V., AND DOMBROVSKY, M. *Elementos da teoria das funções e de análise funcional*. 1982.
- [13] LIMA, E. L. Curso de análise, projeto euclides. *Rio de Janeiro: IMPA 2* (2006).
- [14] LIMA, E. L. Curso de análise. *Rio de Janeiro: Projeto Euclides 1* (2016).
- [15] LIMA, R. F. D. Introdução à geometria diferencial. *Macapá: SBM-UNIFAP* (2016).
- [16] MAÑÉ, R. *Introdução à teoria ergódica*, vol. 14. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [17] MARKARIAN, R. Bilhares. a hipótese ergódica de boltzmann. *Matemática Universitária*, nro 29 (2000), 45–74.
- [18] MOTOMURA, M. "<https://super.abril.com.br/mundo-estranho/por-que-a-mistura-de-coca-light-e-mentos-provoca-uma-explosao/>".
- [19] NETO, A. C. M., AND CAMINHA, A. *Geometria-Coleção Profmat*. SBM, 2013.
- [20] OLIVEIRA, K., AND VIANA, M. Fundamentos da teoria ergódica. *IMPA, Rio de Janeiro* (2005).
- [21] POINCARÉ, H., AND MAGINI, R. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Il Nuovo Cimento (1895-1900)* 10, 1 (1899), 128–130.
- [22] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Internacional Edition, 1987.

- [23] SANTIAGO, E. B. Existência de medidas invariantes em transformações contínuas. *São José do Rio Preto* (2015).
- [24] SINAI, Y. G. Dynamical systems with elastic reflections. ergodic properties of dispersing billiards. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 25, 2 (1970), 141–192.
- [25] TELES, R. D. S., ET AL. Bilhares: aspectos clássicos e quânticos. *Campinas-São Paulo* (2012).
- [26] TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. Edgard Blucher, 2008.