Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Refletindo sobre os Números Complexos - da sua História às suas Aplicações

César Lopes de Assis

Goiânia
2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: César Lopes de Assis

Título do trabalho: Refletindo sobre os Números Complexos - da sua história às suas aplicações.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

César Lopes de Assis

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Maria Bethânia S. dos Santos

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 25 / 04 / 2019

---

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

César Lopes de Assis

Refletindo sobre os Números Complexos - da sua História às suas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Lopes de Assis, César
Refletindo sobre os Números Complexos - da sua História às suasAplicações / César Lopes de Assis.
2019.
lxxi, 71 f.

Orientador: Profa. Dra. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2019.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Números Complexos. 2. Trigonometria. I. Bethânia Sardeiro dos Santos, Maria, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno César Lopes de Assis – Aos vinte e cinco dias do mês de março do ano de dois mil e dezenove, às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Profª. Drª. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos – Orientadora, Profª. Dr Jhone Caldeira Silva, Profº. Drº. Flávio Raimundo de Souza, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **"Refletindo sobre os Números Complexos - da sua história às suas aplicações"**, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de César Lopes de Assis, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela presidente da banca, Profª. Drª. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sóstenes Soares Gomes, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Maria Bethânia S. dos Santos

Profª. Drª. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos
Presidente – IME/UFG

Jhone Caldeira Silva

Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva
Membro – IME/UFG

Prof°. Dr°. Flávio Raimundo de Souza
Membro – IFG

César Lopes de Assis

Números Complexos

Refletindo sobre os Números Complexos - da sua História às suas Aplicações

Trabalho de conclusão de curso defendido no Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de Março de 2019, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Profa. Dra. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Goiás - Campos Goiânia - IFETGO

Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva
Universidade Federal de Goiás - UFG

César Lopes de Assis

Licenciado em Ciências com Habilitação Plena em Matemática e Especialista em Educação Matemática pela UEG. Professor da Secretaria de Educação do Estado de Goiás, atuando no Ensino Médio desde 1997.

À minha esposa Elaine Pinto Pontes de Assis e também minhas filhas Sabrina Pontes de Assis e Maria Luísa Pontes de Assis, pela compreensão, carinho, paciência e incentivos à conclusão de mais uma etapa da minha vida. Dedico também à minha mãe, Maria Alves de Assis, mulher de fé, guerreira e professora. Foi através do exemplo e profissionalismo dela que me tornei também um professor.

Agradecimentos

Aos professores, tutores e coordenadores do IME-UFG pelo empenho e dedicação mostrados ao longo do curso, em especial aos Professores Maurílio Melo, Mário José de Souza e Maria Bethânia Sardeiro dos Santos e aos colegas de turma pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudo e à Sociedade Brasileira de Matemática pelo oferecimento desse curso em rede nacional.

Há homens que lutam um dia e são bons, há outros que lutam um ano e são melhores, há os que lutam muitos anos e são muito bons. Mas há os que lutam toda a vida e estes são imprescindíveis.

Bertolt Brecht .

Resumo

de Assis, Cesar Lopes . **Números Complexos**. Goiânia , 2019. 71p. Trabalho de conclusão de curso. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O presente trabalho tem como objetivo ampliar os conhecimentos dos professores e alunos do Ensino Médio sobre os números complexos, destacando a sua importâcia no estudo da Geometria, Trigonometria em uma perspectiva da sua construção e seus conceitos. Inicialmente, apresenta-se os motivos da escolha do tema principal do trabalho, números complexos. Em seguida, o leitor encontra dados obtidos com uma pesquisa com professores do Ensino Médio e Superior, sobre a importância do estudo dos números complexos. Posteriormente aborda-se fatos históricos que foram relevantes no processo de evolução dos números complexos. O trabalho apresenta, também o desenvolvimento das teorias de Gauss e Argand; e aborda a ideia dos números complexos e sua representação no plano cartesiano. Ao final, pontua-se aspectos relevantes da correspondência entre os números complexos, trigonometria e a Geometria Analítica. O trabalho tem o intuito de levar o leitor a refletir sobre as metodologias de ensino dos conteúdos matemáticos e os impactos desses métodos na aprendizagem dos alunos.

Palavras–chave

Números Complexos, Trigonometria

Abstract

de Assis, Cesar Lopes . **<Work title>**. Goiânia , 2019. 71p. Completion of course work. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The present work aims is to increase the knowledge of teachers and students on the complex numbers, highlighting their importance in the study of geometry, trigonometry and providing a perspective on their construction and concepts. Initially, we present the reasons for choosing the main theme of the work, complex numbers. The, the reader will find data obtained with a reserch with secondary and higher education teachers, on the importance of studying complex numbers. Subsequently, historical facts that were relevant in the process of evolution of complex numbers. The paper also presents the theories of Gauss and Argand, and addresses the idea of complex numers and their representation on the Cartesian plane. In the end, relevant aspects of the correspondence are between complex numebers, trigonometry, and analytic geometry. The work is intended to lead the reader to reflect on the methodologies for teaching content and the impacts of these methods on student learning.

Keywords

<complex numbers, trigonometry, etc.>

Sumário

Lista de Figuras

Apresentação dos Capítulos

Este trabalho de conclusão de curso está dividido em 6 capítulos, que estão distribuídos da seguinte forma:
Capítulo 1: Traz alguns aspectos que motivaram o desenvolvimento desse trabalho, faz uma abordagem sobre a situação atual do ensino de números complexos nas escolas brasileiras.
Capítulo 2: Apresenta uma pesquisa com um questionário respondido pelos professores e o resultado dessa pesquisa.
Capítulo 3: Contém alguns aspectos históricos, a definição do conjunto dos números complexos, operações envolvendo números complexos, o plano de Argand-Gauss e as Fórmulas de Moivre.
Capítulo 4: Apresenta um pequeno resumo sobre Trigonometria e algumas relações entre seno, cosseno e também a utilização dos números complexos no Ensino Médio.
Capítulo 5: Traz a aplicação dos números complexos na Geometria Analítica, com definições e exemplos.
As considerações finais acerca do trabalho desenvolvido, indicando outra abordagem à utilização dos números complexos.

Introdução

Ao adotar livros didáticos para o ensino e os estudos dos números complexos, alguns professores comumente introduzem o conteúdo com a resolução de equação quadráticas de raízes não reais como demonstra Juliana Santos Barcellos Chagas [5]

> "Os dados da pesquisa mostraram que 59% e 58% dos pesquisados justificam o estudo dos números complexos no Ensino Médio com a resolução de equações polinomiais e a "ampliação"dos conjuntos numéricos, respectivamente."(Pag.61)

No nosso ponto de vista, o método proposto não estimula o aprofundamento desse conjunto numérico, isso pode ser observado historicamente, no Capítulo 2 deste trabalho. Por outro lado, as equações cúbicas marcaram, desde o princípio, o desenvolvimento do estudo dos números complexos como escreve Carl B. Boyer "História da Matemática"[3].

Consultando o banco de dissertações do PROFMAT verificamos, 79 trabalhos referentes a números complexos até a data de 31/12/2018, cito particularmente os trabalhos de Washington Luiz de França Júnior[8], Marcel Luiz Silva Brum[4] e Maura Araujo Dias[9] porque esses trabalhamos tem temas parecidos com esse trabalho, aplicação dos números complexos no Ensino Médio. Mas ele difere desses outros citados no aspecto da aplicação do conjunto dos números complexos na sala de aula para alunos do Ensino Médio, onde se verifica a utilização dos números complexos na Trigonometria e Geometria Analítica conteúdos que fazem parte do curriculum do Ensino Médio.

CAPÍTULO 1

Desafios para o Ensino dos Números Complexos

Sou professor de Matemática há mais de duas décadas, em outubro de 2008 fui contratado pela Escola SESI de Anápolis, como professor de Ensino Médio para um novo projeto de ensino chamado EBEP (Ensino Básico e Ensino Profissionalizante), onde os alunos teriam aulas regulares do curriculum comum ministrado por professores contratados pelo SESI (Serviço Social da Indústria) e aulas profissionalizante ministradas por professores contratados pelo SENAI (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial). Os alunos tinham aulas regulares do Ensino Básico concomitante com aulas do Curso Técnico dentro das dependências do SENAI.

Ministrando aulas sobre o conteúdo de Números complexos percebi, em conversas com os professores da parte técnica, a utilização deles em um contexto mais abrangente como no ensino de matérias especificas do Curso Técnico de Eletrotécnica, nos cálculos de corrente alternada e eletricidade, mas verificando os livros que tratavam sobre o assunto me deparei com muitas fórmulas e poucas aplicações desprezando o caráter inovador desse conteúdo, com isso me senti tentado a buscar e verificar como poderia utilizar esse conteúdo, números complexos, em outras áreas do conhecimento.

Na coleção Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio, de Elon Lages Lima [13] , oito professores fizeram a análise de algumas obras de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio e chegaram a essa afirmação:

> "A análise dos livros-textos para o ensino da Matemática na Escola Média deve levar em conta, acima de tudo, sua adequação às três componentes básicas desse ensino, a saber: Conceituação, Manipulação e Aplicação."(LIMA, 2001, p. 3)

O conteúdo de números complexos se encaixa perfeitamente nesses três componentes Conceituação, Manipulação e Aplicação.

Especificamente no Ensino Médio, pode-se constatar pela leitura de algumas obras [17],[7] , que o conteúdo de números complexos é apresentado inicialmente apenas para resolução de equações do 2^{o} grau com o discriminante negativo, dando muita ênfase as fórmulas, tornando muitas vezes o conteúdo enfadonho e sem aplicações do mesmo conteúdo.

Essa dificuldade também foi constatada por Raimundo Martins Reis Neto,[18] que discorre sobre a mecanização do ensino, que é, segundo ele, uma das culpadas pela falta de compreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos.

Muitas vezes o estudante é capaz de resolver o problema matemático, mas não sabe o que realmente está fazendo, reflexo da metodologia baseada em técnicas operatórias, resolução de exercícios e memorização de regras e propriedades. Ao final de sua pesquisa, Neto(2009)[18] conseguiu detectar que o obstáculo da aprendizagem se dá devido à falta de base dos alunos, à complexidade do conteúdo e a metodologia empregada pelos professores.

Analisando o Currículo de Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás[1], documento norteador da Secretaria Estadual de Educação de Goiás, que trata dos conteúdos a serem trabalhados em todas as séries do 1º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio a proposta para o ensino de Matemática se baseia em quatro eixos temáticos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação, que tem como finalidade possibilitar o estudante a compreender a sua realidade. Vale ressaltar que o Currículo de Referência ainda esta em formação podendo ser acrescentado alguns conteúdos, destaco também uma observação dos Paramêtros Curriculares Nacionais-PCNs.

> Os conteúdos devem promover a construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos. (PCNs 2001, p.49)

Com relação ao conteúdo especifico de números complexos o Currículo de Referência traz uma pequena abordagem sobre esse tema no 3º bimestre do 3º ano do Ensino Médio (página 166).

As expectativas de aprendizagem pedidas são:

- Identificar e conceituar a unidade imaginária;
- Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica;
- Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica;
- Calcular potências de expoente inteiro na unidade imaginária.

Os números complexos foram renegados a simples representações algébricas, deixando de lado as transformações geométricas como afirma também Juliana(2013) [5]

[1]Disponível em:<http://www.seduc.go.gov.br/imprensa/documentos/arquivos/Currículo Referência/Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás!.pdf>, Acesso em: 20 de ago. de 2018

"a relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio está na ampliação dos conjuntos numéricos tendo em vista a resolução de equações algébricas". Com isso, proponho nesse trabalho uma mudança desse paradigma, além de demostrar algumas aplicações em que os números complexos podem contribuir às outras áreas de estudo, tais como: Geometria Plana, Analítica e Trigonometria. Assim como propõe o professor Salomão Pereira de Almeida[1] em uma nova abordagem dentro da sala de aula, com foco na resolução de exercícios da Geometria Plana, na qual ressalta o vínculo entre os números complexos e a Geometria Plana, além de explicitar a sua aplicabilidade e funcionalidade.

Tanto os alunos do Ensino Médio e alunos do Ensino Superior sofrem uma defasagem no ensino da Matemática, em especial ao conteúdo dos números complexos, como podemos perceber pela pesquisa publicada no XI Encontro Nacional de Educação Matemática realizado em Curitiba no Paraná em julho de 2013 onde um dos temas abordados pelo Professor Mestre Rafael Vassallo Neto. A leitura dessa pesquisa sobre o tema evidencia uma lacuna não preenchida: a interligação entre Álgebra, Geometria, Trigonometria e os Números Complexos. Esse estudo vem para quebrar esse paradigma, fazendo essa relação perdida, devemos fazer o ensino da matemática mais prazeroso para os alunos em qualquer formação. Com essas experiências demonstra-se que a Geometria tem um papel fundamental e o conteúdo que dá com maior clareza e possibilidades de aprendizagem são os números complexos. Por isso defendo que o ensino dos números complexos sejam aplicados aos alunos do Ensino Médio e Ensino Superior como demonstra também esse estudo que os números complexos possuem aplicações importantes na Física: como vetores e na análise de corrente elétrica; na Astronomia: na análise das órbitas de corpos celestes; na Computação Gráfica: onde se inserem e investigam atividades de rotação, translação, homotetias e isometrias; na Cartografia: onde se produz mapas e se inserem vetores e sistemas de pares ordenados e se produz rotas e dados informativos e na própria Matemática.

Segundo o Rafael Vassallo Neto,[16] o papel dos números complexos na grade curricular do Ensino Médio é de auxiliar na reversão das lacunas de aprendizagem, ou melhor, do real fracasso do processo de ensino e assimilação por parte dos alunos, de forma que os estudantes consigam superar a visão fragmentada da matemática que lhes foi apresentada. Ainda segundo o autor, para que a utilização dos números complexos dentro da sala de aula seja bem sucedida, é preciso, repensar o modo de apresentação do conteúdo, mudar a metodologia de ensino e promover maior aprendizagem. Cabe a nós, docentes do Ensino Médio brasileiro, a revisão e renovação dos mecanismos de ensino e aprendizagem para melhor aproveitamento dos conteúdos pelos nossos alunos.

Os números complexos são fundamentais para auxiliar os alunos de Ensino Médio a compreenderem os significados numéricos. Isso porque, eles têm como propriedade a construção do conhecimento pelo fazer pensar. É por meio deles que os estudantes conseguem observar as características e regularidades dos números, operações e, até mesmo, das figuras geométricas.

A maior necessidade é tornar o ensino dos números complexos mais concreto. Assim como na geometria, por exemplo, onde a forte ligação com a realidade torna-se um privilégio entre os diversos conteúdos matemáticos. Para Vassallo Neto, o caminho da concretização dos números complexos está na busca de um conceito numérico que renove a percepção dos alunos em relação às práticas matemáticas do cotidiano.

CAPÍTULO 2

A Aprendizagem dos Números Complexos e sua Importância no Ensino Médio - Opinião dos Professores

O objetivo deste capítulo foi descobrir a opinião dos professores de Matemática em relação à importância do ensino dos números complexos na formação dos alunos do Ensino Médio e de que forma o ponto de vista do professor influenciaria a abordagem metodológica dos números complexos na sala de aula. Inicialmente foi feita uma pesquisa quantitativa-descritiva entre professores de Matemática que lecionam em turmas do Ensino Médio. O método é uma vertente da pesquisa empírica que possibilita traçar características, fatos e fenômenos, avaliar semelhanças e isolar variáveis chave.

O método quantitativo-descritivo coleta dados numéricos de amostragem e verifica, através da descrição, algumas características quantitativas da população estudada. Como a pesquisa em questão pretendeu abortar a opinião dos docentes. Colhemos também dados qualitativos que foram empregados em escalas que permitem a quantificação dos dados.

Através deste estudo, desejava-se respostas que refletissem o ponto de vista de uma parcela heterogenia de professores que atuam em diferentes contextos do Ensino Médio. Por isso, o questionário foi aplicado entre professores da rede SESI, da rede Pública de Ensino e profissionais do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Mesmo buscando profissionais que lecionam em âmbitos distintos, apenas participaram da pesquisa aqueles que se dispuseram voluntariamente a responder o questionário.

Para a coleta e quantificação dos dados foi enviado um convite via e-mail a diversos professores na qual foi pedido para responderem um questionário *on-line* com 13 questões, com perguntas de múltiplas escolhas e discursivas, inseridas na plataforma do *Google forms*. Optou-se por tal método pois, além da facilidade e rapidez na aplicação, ele abrange um grande número de pessoas já que não tem barreiras geográficas, possibilita o anonimato dos candidatos pesquisados e menor interferência do pesquisador.

Descrição do Questionário Aplicado aos Professores

O entrevistado teve a oportunidade de se identificar.

Nome

Essa pergunta diferenciava os professores que trabalham na rede pública ou privada.

Leciona na rede:

( ) Pública

( ) Particular

As quatro primeiras perguntas aborda o tema principal do trabalho e teve o objetivo de identificar quais dos entrevistados lecionam ou lecionaram a matéria de números complexos em sala de aula.

Questão 1. Já lecionou Números Complexos?

( ) Sim

( ) Não

Questão 2. Se respondeu sim a questão anterior, por favor, indique quantas vezes lecionou esse conteúdo.

( ) Uma única vez

( ) Mais de três vezes

( ) Mais de cinco vezes

( ) Muitas vezes, mas não me recordo o tanto

Questão 3. Você acredita que esse conteúdo - Números Complexos - é importante para o aluno do Ensino Médio?

( ) Sim

( ) Não

( ) Não sei

Questão 4. Se você ensinou esse conteúdo, que recursos utilizou para motivar a sua aprendizagem?

Essa questão teve o objetivo de identificar se o entrevistado estava a par das mudanças e atualizações do plano de ensino nacional.

Questão 5. Você sabia que esse conteúdo foi retirado do BNCC?
( ) Sim
( ) Não

A questão 6, é subjetiva, tem o propósito de compreender o ponto de vista do entrevistado em relação ao tema dessa pesquisa.

Questão 6. Qual a sua opinião com relação a essa retirada dos Números Complexos do Ensino Médio?

Com as perguntas 7, 8 e 9 pretendíamos entender um pouco da formação do entrevistado. Queremos saber se o licenciado percebe o estudo dos números complexos como um pré-requisito ao estudo das Funções de Váriáveis Complexas, bem como averiguar a importância dada por ele a essa disciplina do Ensino Superior.

Questão 7. Você estudou Funções de Variáveis Complexas na sua Licenciatura em Matemática?
( ) Sim
( ) Não

Questão 8. Se respondeu - sim - à questão anterior, responda: você viu relações entre Funções de Variáveis Complexas e os números complexos?
( ) Sim
( ) Não
( ) Não me lembro

Questão 9. Ainda com relação a disciplina - Funções de Variáveis Complexas - Você julga que ela contribui para que você pudesse ensinar os números complexos com mais propriedade?
( ) Sim
( ) Não

As quatro últimas perguntas do questionário tem a intenção de verificar o método de ensino dos números complexos de cada entrevistado, por isso, são subjetivas e descritivas.

Questão 10. Descreva como foi, para você, ensinar os números complexos.

Questão 11. Ao olhar retrospectivamente para aulas que você ministrou, como você julga a aprendizagem dos alunos com relação a esse conteúdo?

Questão 12. No seu ponto de vista, quais as maiores dificuldades em se trabalhar com esse conteúdo?

Questão 13. Use esse espaço para acrescentar algum aspecto relacionado ao ensino e aprendizagem de números complexos que não foi contemplado nesse questionário.

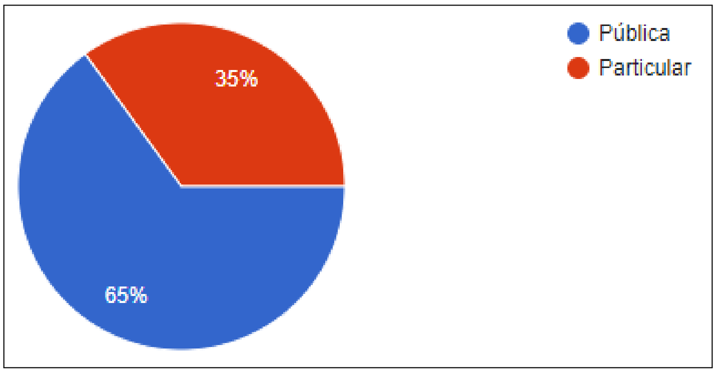
Resultado e Análise do Questionário Aplicado aos Professores

A pesquisa foi realizada durante o mês de dezembro de 2018, com 22 professores de Matemática inseridos em diferentes contextos do Ensino Médio brasileiro. Os entrevistados são identificados de acordo com a ordem em que suas respostas foram recebidas, por exemplo, **E1** corresponde ao entrevistado cuja resposta foi a primeira a ser recebida, **E2** corresponde ao entrevistado cuja resposta foi a segunda a ser recebida e assim por diante.

Com o primeiro gráfico (Figura 2.1) percebemos que a maioria dos professores entrevistados lecionam na rede pública de ensino.

Essa questão é importante pois, existem algumas diferenças nos planos de ensino das escolas públicas e particulares, exemplo quantidade de aulas dedicadas a matéria de Matemática, por isso sentiu-se a necessidade de dividir os entrevistados entre esses dois grandes grupos.

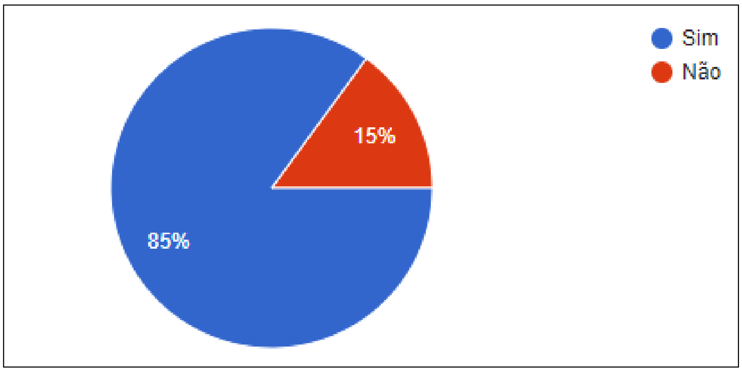
Figura 2.1: *Leciona na Rede*



Fonte:Autor

Os três gráficos subsequentes (Figura 2.2), abordam o tema central da pesquisa e têm o intuito de identificar professores aptos a contribuir efetivamente com os resultados desse trabalho. No entanto, os professores que não lecionaram números complexos em sala de aula colaboraram para construção desse trabalho, já que todos eles estudaram Funções de Variáveis Complexas na Graduação.

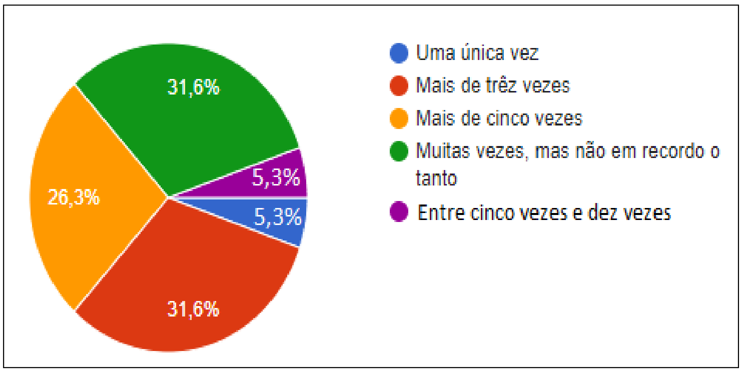
Figura 2.2: *Figura Relacionada à Questão 1.*



Já lecionou Números Complexos?

Fonte: Autor

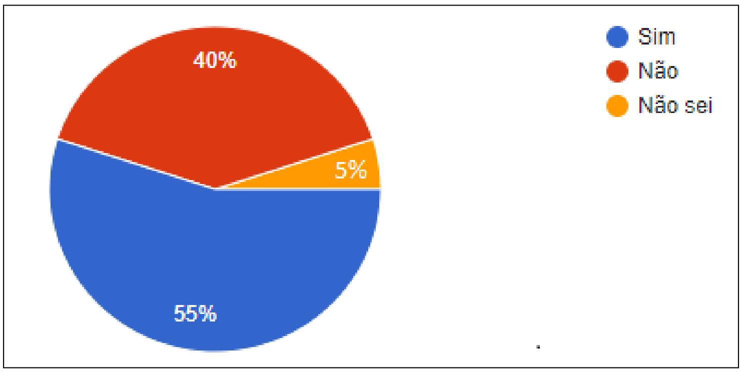
Figura 2.3: *Figura Relacionada à Questão 2.*



Se respondeu sim a questão anterior, por favor, indique quantas vezes lecionou esse conteúdo.

Fonte: Autor

Figura 2.4: *Figura Relacionada à Questão 3.*



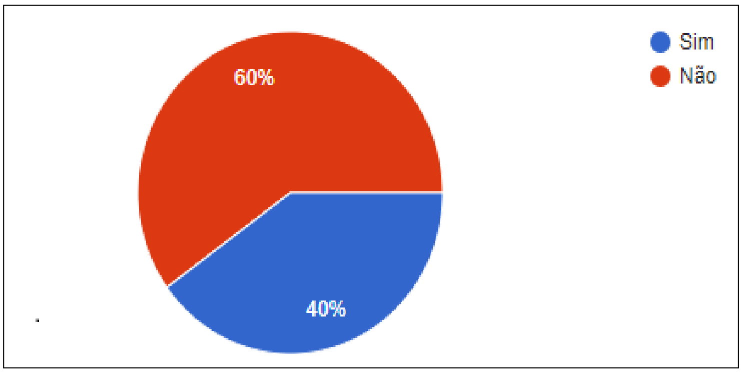
Você acredita que esse conteúdo - Números Complexos - é importante para o aluno do Ensino Médio?

Fonte: Autor

Sobre a **Questão 4.** Se você ensinou esse conteúdo, que recursos utilizou para motivar a sua aprendizagem?, 17 entrevistados responderam de forma subjetiva. Seis professores demonstraram preferência por formas tradicionais de ensino (resolução de exercícios, pincel e quadro branco). Percebe-se também o uso de tecnologias como Software de geometria dinâmica Geogebra e vídeos. Além disso alguns entrevistados indicaram esse conteúdo de números complexos direcionados à Engenharia Elétrica como expressou o entrevistado **E8** *"Quando falo de Números Complexos motivo os alunos que irão fazer cursos na área de Engenharia Elétrica, por exemplo, com aplicações em soluções de Equações Diferenciais é Função Transferência na Teoria de Sinais."*.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) é um documento que orienta o novo Ensino Médio do Brasil, por isso a pergunta é importante. Através dela observamos quais dos professores estavam atentos a mudança dos conteúdos abordados no novo Ensino Médio.

Figura 2.5: *Figura Relacionada à Questão 5.*



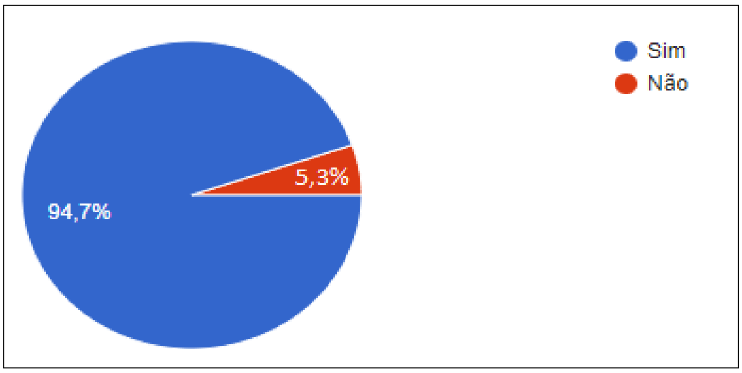
Você sabia que esse conteúdo foi retirado da BNCC?

Fonte: Autor

Na **Questão 6.** Qual a sua opinião com relação a essa retirada dos Números Complexos do Ensino Médio?, observamos uma disparidade nas respostas. Nove professores que concordam com a retirada dos números complexos do Ensino Médio afirmam que o conteúdo não tem muita relevância para alunos nesse nível de ensino. Um dos entrevistados **E13** escreveu: *"Uma medida acertada, pois tem pouca aplicação e quase não era cobrado no Enem"*. Já os que discordam que é a maioria, 13 entrevistados alegam que a mudança é prejudicial à formação dos alunos. Isso vem de encontro com a finalidade deste trabalho, além de ser uma mecanização do ensino, como pontuou o entrevistado **E5**: *"Acredito que será uma grande perca para os nossos alunos. É um conteúdo de extrema importância para o entendimento Matemática Moderna."*.

As questões 7, 8 e 9 abordam a formação dos entrevistados e a importância deste conteúdo no Ensino Superior.

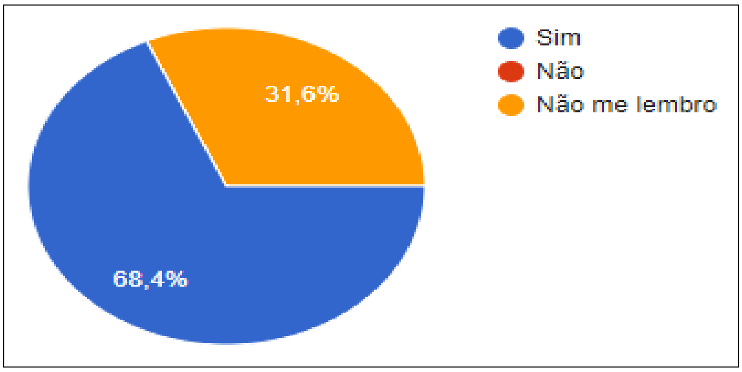
Figura 2.6: *Figura Relacionada à Questão 7.*



Você estudou Funções de Variáveis Complexas na sua Licenciatura em Matemática?

Fonte: Autor

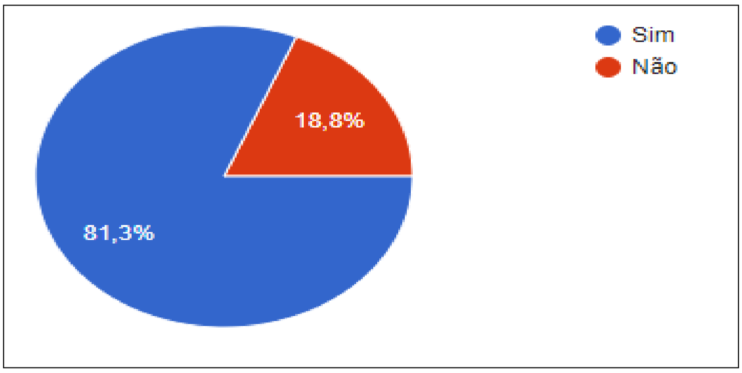
Figura 2.7: *Figura Relacionada à Questão 8.*



Se respondeu - sim - à questão anterior, responda, você viu relações entre Funções de Variáveis Complexas e os números complexos?

Fonte: Autor

Figura 2.8: *Figura Relacionada à Questão 9.*



Ainda com relação a disciplina - Funções de Variáveis Complexas - Você julga que ela contribuiu para que você pudesse ensinar os números complexos com mais propriedade?

Fonte: Autor

Questão 10. Descreva como foi, para você, ensinar os números complexos. Grande parte dos professores apontaram a falta de aplicabilidade do conteúdo como a maior dificuldade de ensino dos números complexos. Em geral, os profissionais não aprofundam muito na abordagem do conteúdo e sentem certa desmotivação por parte dos alunos, como observa um dos entrevistados **E12**: *"Como tem pouca aplicabilidade, me senti desmotivada com tal conteúdo , mas apesar disso , os alunos não tiveram grande dificuldade!"*.

Questão 11. Ao olhar retrospectivamente para aulas que você ministrou, como você julga a aprendizagem dos alunos com relação a esse conteúdo? Como observado na resposta anterior os professores sentiram dificuldades em aplicar o conteúdo na sala de aula, por isso, ao referirem a aprendizagem dos alunos a maioria dos entrevistados não chegaram a um ponto satisfatório, talvez pela falta da contextualização do conteúdo mas um dos entrevistados **E14**, trouxe um ponto de atenção: *"Quando houve aplicações mais concretas, a aprendizagem foi mais proveitosa."*.

Questão 12. No seu ponto de vista, quais as maiores dificuldades em se trabalhar com esse conteúdo? As principais dificuldades apontadas pelos entrevistados foram: Falta de aplicabilidade do conteúdo, utilização prática, pouca cobrança no ENEM e vestibulares e falta conhecimento prévio do aluno, como pontuou um dos entrevistados **E14**: *"A pouca cobrança desse conteúdo no ENEM e em Vestibulares deixam os alunos desmotivados."*.

Questão 13. Use esse espaço para acrescentar algum aspecto relacionado ao ensino e aprendizagem de números complexos que não foi contemplado nesse questionário. O principal aspecto apontado pelos entrevistados foi a ligação dos números complexos com a Geometria Analítica como pontou o entrevistado **E11** : *"Interpretação geométrica dos complexos e sua ligação com Geometria Analítica "*.

Ao final da análise das respostas dos entrevistados percebe-se a importância do trabalho em questão, visto que o intuito deste é provar a aplicabilidade dos números complexos na sala de aula.

Entrevista com Professor da UFG

Para complementar a pesquisa, no dia 09/11/2018, realizou-se uma entrevista com o Professor Doutor da UFG Alacyr José Gomes, a conversa durou cerca de duas horas e tudo que foi dito pelo professor foi transcrito e utilizado como fonte de estudo e pesquisa para execução deste trabalho. O professor Doutor Alacyr José Gomes foi escolhido para entrevista por apresentar um vasto conhecimento na área de interesse deste trabalho e ser um grande defensor da manutenção da matéria de Variáveis Complexas no Ensino Superior na UFG para Licenciatura porque para o Bacharelado ela já se manteria.

É importante destacar que todo esse trabalho de pesquisa foi concebido no momento da discussão e implementação da BNCC. Por isso foram colocadas essas questões tanto para os professores - no questionário - quanto para o professor entrevistado porque essas mudanças não foram realizadas de maneira consensual. Houve muitos embates e a finalização do documento não agradou vários setores da educação.

Durante o bate papo o entrevistado foi questionado sobre os desafios dos números complexos no Ensino Superior e Ensino Médio. A seguir, são expostas as perguntas e as respostas que estruturaram a entrevista:

1) *Qual a importância da aprendizagem dos números complexos?*

- Os professores devem estar além dos alunos, temos um conteúdo que possui grande aplicação em várias áreas e principalmente na resolução de polinômios.

2) *Como motivar esse estudo no Ensino Médio?*

- Não se perde em ensinar e conhecer, o aluno não aplica diretamente e os professores podem contextualizar a aplicação, mostrando essa aplicação nas áreas como engenharia, física e outras.

3) *Se esse estudo é importante porque foi retirado do BNCC? Qual a sua opinião?*

- Como disse anteriormente a aplicação desse conteúdo tem muita utilidade, não podemos desmerecê-lo, imaginemos uma reta se você está no meio de duas pessoas não vai conseguir enxergar muito bem o horizonte, agora imagine você fora dessa reta enxergando por cima, você conseguiria visualizar muito além daquele que está entre os dois.

4) *Qual seria a melhor motivação para o aluno aprender números complexos?*

- *Considerando os números complexos como ponto no plano, fica natural a relação com a trigonometria, os professores poderiam considerar esse fato como ponto de partida para a contextualização desse conteúdo.*

Através desta entrevista percebe a importância deste conteúdo, números complexos tanto para o Ensino Médio como para o Ensino Superior, onde vemos aplicações importantes que não podem simplesmente deixarem de ser ensinadas.

CAPÍTULO 3

Números Complexos

Neste capítulo apresentamos o conjunto dos números complexos, uma parte da história de sua descoberta, suas operações e conceitos com destaque no conteúdo geométrico utilizarei como referências Livro História da Matemática Carl B. Boyer [3] e um artigo publicado na Revista do professor de Matemática número 24 pelo professor titular do IME-USP César Polcino Milies [15].

É interessante destacarmos alguns pontos relevantes que colaboram para que os números complexos no século XVIII, os "imaginários", como eram conhecidos, adquirissem importância de número que observamos atualmente. Constatamos a partir desse estudo que, historicamente, a narrativa une-se ao desenvolvimento de um conceito e da evolução da Matemática.

Aspectos Históricos

Em 1545, a resolução, não só das equações cúbicas mas também das equações quárticas tornaram-se conhecimento comum pela publicação da *Ars Magna* de Gerônimo Cardano (1501 - 1576). Um progresso tão notável que o ano de 1545 é tomado como marco inicial da Matemática Moderna. Porém Cardano não foi o descobridor da solução das equações cúbicas e quárticas, admitiu em seu livro *Ars Magna* (1545) que a sugestão para resolver as equações cúbicas tinha sido dado por Tartaglia (Niccolo Fontana Tartaglia, 1499-1557) que convencido por Cardano sob juramento de que não publicaria antes que Tartaglia o fizesse, além de resolver as equações do tipo $x^3 + ax = b$, também achou uma fórmula geral das equações do tipo $x^3 + ax^2 = b$ e a solução das equações quárticas pelo antigo amanuense Ludovico Ferrari (1522-1565).

Em 1543, Cardano descobriu que o professor de matemática em Bolonha uma das mais antigas universidades medievais Del Ferro (Scipione Del Ferro 1465 - 1526), como e quando Del Ferro fez sua descoberta não se sabe, ele não publicou a solução algébrica das equações do tipo $x^3 + ax = b$, mas antes de sua morte ele a revelou a seu estudante Antonio Maria Fior. Na visão de Cardano este se sentiu desobrigado do juramento feito a Tartaglia. Ele havia jurado não revelar a Fórmula de Tartaglia, mas não a de Del Ferro [3].

O mais importante resultado das descobertas publicadas na *Ars Magna* foi o enorme impulso dado às pesquisas em Álgebra, incluindo as resoluções das equações polinomiais de qualquer ordem e em particular às equações quínticas. Um resultado imediato da resolução das equações cúbicas foi a observação de uma nova classe de números, que são chamados de números complexos. Essa nova descoberta causou uma certa estranheza aos matemáticos, mas como os números irracionais já tinham sido aceitos no tempo de Cardano, os números negativos causaram dificuldades maiores porque não são aproximáveis por números positivos, mas a noção de sentido sobre uma reta tornou-os plausíveis. Se um algebrista desejava negar a existência de números irracionais ou negativos, dizia simplesmente por exemplo, que as equações $x^2 = 2$ e $x+2 = 0$ não tinham solução. Porém, com a solução das equações cúbicas a situação mudou radicalmente, sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero a Fórmula de Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente as raízes quadradas de números negativos.

Fórmula de Tartaglia-Cardano

Seja uma equação cúbica da forma $x^3 + px + q = 0$, com p e $q \in \mathbb{R}$, suas raízes são do tipo:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2}}.$$

Um outro importante algebrista italiano, Rafael Bombelli (1526 - 1573), estudou profundamente o trabalho de Cardano, principalmente os casos irredutíveis das equações cúbicas, que levavam às raízes de números negativos. Bombelli achava que a explicação da *Ars Magna* não era muito clara, publicou *l´Algebra*, expondo de maneira mais simples as resoluções das equações de 3º grau. A solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ utilizando a Fórmula de Tartaglia-Cardano obtém-se $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Por substituição direta Bombelli obteve que $x = 4$ é uma raiz da equação, mas ele também demonstrou este fato aplicando as regras usuais da Álgebra.

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

Logo,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e analogamente,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Portanto, o valor de $x = 2+1\sqrt{-1}+2-1\sqrt{-1} = 4.$, sendo as outras raízes em notação atual $-2+\sqrt{3}$ e $-2-\sqrt{3}$

Com essa demonstração Bombelli [3] mostrou o papel importante que os números imaginários conjugados iriam desempenhar no futuro.

Após Bombelli vários outros matemáticos contribuiram para a aceitação dos números complexos entre eles destacamos:

John Wallis (1616 - 1703), professor da Universidade de Oxford, deu interpretação de direção aos números negativos ao propor que os números negativos seriam distâncias em sentido oposto ao positivo à esquerda de um dado ponto, fez a primeira tentativa de legitimar os números complexos por meio de uma interpretação geométrica do plano. Em seu tratado intitulado Álgebra em 1673, sugeriu que os números imaginários puros seriam representados numa reta perpendicular ao eixo real.

Caspar Wessel (1745 - 1818), agrimessor noruguês, também percebeu associação entre os números complexos e os pontos reais no plano, formulou pela primeira vez a adição de vetores e publicou um artigo "Representação Analítica de Direção"que tratava da interpretação geométrica dos números complexos, publicado pela Real Academia Dinamarquesa em 1799.

Jean Robert Argand (1768 - 1822), contabilista suiço que em 1806 contribuiu para o entendimento do aspecto geométrico dos números complexos. Publicou o libro "Esair sur ia manière de représenier les quantités imaginaires dans les constructions geométriques"[1], no que verifica-se que se multiplicarmos $+1$ por i, teremos i e o produto i por i, obtém-se -1, podemos representar i por uma rotação de 90 graus no sentido anti-horário.

No século XVIII, os trabalhos de D´Alembert e Euler já consideravam a importância dos números imaginários. Criaram uma teoria mais completa a respeito deles e de suas relações com as equações.

Só a partir do século XIX, quando Gauss (Carl Friederich Gauss 1777 - 1855) divulgou sua representação geométrica em sua tese de doutorado (1799), onde tornou aceita a interpretação no plano dos complexos, que incluem os reais e os imaginários, passaram a ser aceitos e usados sem restrições [15] .

3.1 Introdução

Dentre os conjuntos numéricos vamos apresentar o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

[1] Ensaio sobre como representar quantidades imaginárias em construções geométricas.

No conjunto dos números naturais as operações de adição e multiplicação estão bem definidas, porém a operação de subtração não, para que a subtração fosse sempre possível, foi criado o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, que é obtido a partir da representação do conjunto dos números naturais em uma reta numerada, tomando a cada elemento o seu oposto, com exceção o elemento zero:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Para que também a divisão fosse possível, estendemos o conjunto dos números inteiros e obtém-se o conjunto dos números racionais, que são números que podem ser escritos na forma de fração, com denominador inteiro não nulo:

$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{a}{b}, a \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ e b} \neq 0\}.$$

A equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida no conjunto dos números racionais, a solução não pode ser escrita na forma de uma fração com fatores inteiros, surge então o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$[12].

Da união dos conjunto dos números racionais com os números irracionais temos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \bigcup \mathbb{I}.$$

No conjunto dos números naturais, inteiros e reais as operações de soma e produto possuem propriedades fundamentais, que são as seguintes:

(P_1) <u>Comutativa</u>

A adição e a multiplicação são comutativas, isto é, se a e b são números reais, então:

$$a + b = b + a \text{ e } a \cdot b = b \cdot a.$$

(P_2) <u>Associativa</u>

A adição e a multiplicação são associativa, isto é, se a, b e c são números reais, então:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ e } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(P_3) <u>Elemento Neutro</u>

Existem e são únicos os números 0 e 1 satisfazendo às condições:

$$a + 0 = a \text{ e } a \cdot 1 = a,$$

para todo real a.

(P_4) Elemento oposto e inverso

A todo real a corresponde um único número real $(-a)$, e se $a \neq 0$, um único real $\frac{1}{a}$ tais que

$$a + (-a) = 0 \text{ e } a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

(P_5) Distributiva

A multiplicação é distributiva relativamente à adição, isto é se a e b e c são números reais,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

A razão pela qual estas propriedades são consideradas fundamentais, é que a partir delas podemos deduzir todas as operações com números reais.

Observações

Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1},$$

e não existe um número real x que elevado ao quadrado resulte -1. Uma situação como está, demonstra a necessidade de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado o conjunto dos números complexos.

3.2 O Conjunto dos Números Complexos.

Definição 3.1 *O conjunto dos números complexos, denominado por $\mathbb{C}$, constituem uma extensão dos números reais. Munido com operações de adição e multiplicação obtidas através de uma ampliação das operações dos números reais e também possibilita a extração da raiz quadrada de números negativos com as propriedades, (P_1); (P_2);(P_3); (P_4) e (P_5) , o conjunto adquire uma estrutura algébrica de $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*

Primeiramente, recordaremos algumas propriedades sobre pares ordenados. Considerando o produto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = (x, y)|x, y \in \mathbb{R}$ pegando dois elementos quaisquer (a, b) e (c, d), podemos estabelecer três propriedades:

(P_6) *Igualdade* $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ *e* $b = d$

(P_7) *Adição* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

(P_8) *Multiplicação* $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Observações:

a) Todo número complexo pode ser escrito de maneira única na forma $z = x + yi$, onde x e y são números reais, x é chamado *parte real* e y é chamado *parte imaginária* do complexo z. Tem-se que i representa a *unidade imaginária*, e é definido como $i = \sqrt{-1}$.

b) Usa-se a notação $Re(z) = x$ para designar a parte real e $Im(z) = y$ para designar a parte imaginária do número complexo $z = x + yi$.

c) Dois números complexos são iguais se, e somente se, as partes real e imaginária de um são iguais, respectivamente, às do outro.

3.2.1 Operações com Números Complexos

Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, define a soma e o produto, denotados por $z_1 + z_2$ e $z_1 z_2$:

Definição 3.2 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$

Exemplo 3.1 *Se* $z_1 = 1 + 2i$ *e* $z_2 = 3 - 4i$*, então:*

$z_1 + z_2 = (1 + 3) + (2 - 4)i = 4 - 2i.$

Definição 3.3 $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$

Exemplo 3.2 *Se* $z_1 = 2 - 3i$ *e* $z_2 = 1 + 4i$*, então:*

$z_1 . z_2 = (2.1) - (-3.4) + [2.4 + (-3).1]i = 2 + 12 + [8 - 3]i = 14 + 5i.$

Podem-se definir duas outras operações sobre os números complexos, a subtração que é a inversa da adição e a divisão que é a inversa da multiplicação.

Definição 3.4 $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$

Exemplo 3.3 *Se* $z_1 = 2 + 5i$ *e* $z_2 = 4 - 3i$*, então:*

$z_1 - z_2 = (2 - 4) + [5 - (-3)]i = -2 + 8i.$

Definição 3.5 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \left(\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) i \; z_2 \neq 0.$

Exemplo 3.4 *Se* $z_1 = 2 - 3i$ *e* $z_2 = 1 + 2i$*, então:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2.1) + (-3.2)}{1^2 + 2^2} + \frac{[1.(-3) - 2.2]}{1^2 + 2^2} i = \frac{2 - 6}{1 + 4} + \frac{-3 - 4}{1 + 4} i = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5} i$$

ou

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} . \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2 - 4i - 3i + 6i^2}{1^2 - (2i)^2} = \frac{-4 - 7i}{1^2 - 4i^2} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5} i$$

3.2.2 Forma Algébrica de um Número Complexo

Podemos fixar um sistema de coordenadas no plano para o complexo $z = x + yi$ representado pelo ponto $Z(x,y)$. O ponto Z representação geométrica do complexo z e associamos os complexos a suas representações geométricas, escrevendo $(x,y) = x + yi$, e o plano complexo é chamado de *Plano de Argand-Gauss* ou simplesmente de *plano-z*.

Os números representados no eixo x são da forma $(x,0) = x + 0i = x$, isto é, são os números reais, por esse motivo, o eixo x é chamado de *eixo real*.

Os números representados no eixo y são da forma $(0,y) = 0 + yi = yi$, são chamados de *imaginários puros*, o eixo y é chamado de *eixo imaginário*.

Por outro lado, o número $z = x + yi$ pode ser representado como o vetor que liga a origem a este ponto (x,y), isto é, o complexo z pode ser representado pelo vetor $\overrightarrow{OZ}$ como pode ser observado pela Figura (3.1).

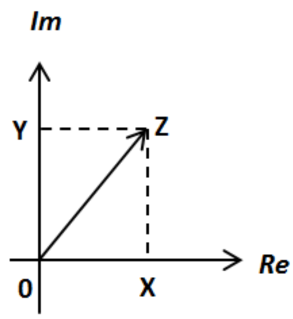


Figura 3.1: *Representação Vetor no Plano Argand-Gauss.*

Exemplo 3.5 *Se* $z_1 = -3 + i$*, então* $z_1 = (-3,1)$.
Se $z_2 = -5i$*, então* $z_2 = (0,-5)$.
Se $z_3 = 4$*, então* $z_3 = (4,0)$.
Se $z_4 = 1 - 3i$*, então* $z_4 = (1,-3)$.

A representação vetorial e pontos dos números complexos são muito úteis. O número complexo z é considerado frequentemente como ponto z ou como vetor z. Deve-se tomar o cuidado que o produto de dois números complexos z_1 e z_2 é um número complexo, e não considerar que o produto de dois números complexos é um produto escalar nem um produto vetorial.

Vamos ver como se traduzem as operações de soma e subtração, quando pensamos nos complexos como vetores no plano.

De acordo com a definição da soma de dois números complexos, z_1 e z_2, essa soma corresponde ao ponto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Este ponto, por sua vez, corresponde ao vetor cujas componentes são as coordenadas do ponto. Assim, o número $z_1 + z_2$ é representado pela soma vetorial dos vetores z_1 e z_2 observe a Figura (3.2).

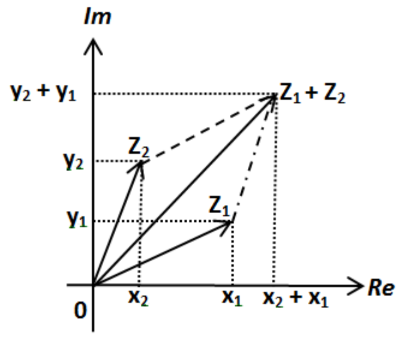


Figura 3.2: *Vetor Soma de Dois Números Complexos*

Exemplo 3.6 *Se $z_1 = 1+2i$ e $z_2 = 3-4i$, então:*
$z_1 + z_2 = (1+3, 2-4) = (4, -2)$.

ou

$z_1 + z_2 = 4 - 2i$.

A diferença $z_1 - z_2$ é representada pelo vetor $\overrightarrow{z_1 z_2}$ conforme a Figura (3.3).

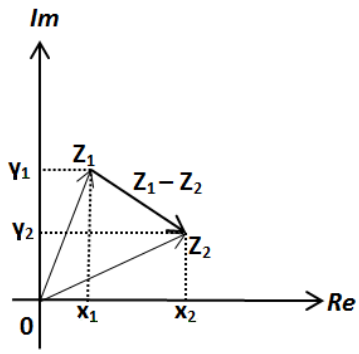


Figura 3.3: *Vetor Diferença de Dois Números Complexos*

Exemplo 3.7 *Se $z_1 = 2+5i$ e $z_2 = 4-3i$, então:*
$z_1 - z_2 = (2-4, 5-(-3)) = (-2, 8)$.
ou
$z_1 - z_2 = -2 + 8i$.

3.2.3 Conjugado de um Número Complexo

Chama-se conjugado de um número complexo $z = x + yi$ ou simplesmente *conjugado de* z ao número complexo $\bar{z} = x - yi$. Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ é representado pelo simétrico de z relativamente ao eixo Ox Figura (3.4).

Exemplo 3.8 *Se $z_1 = 1+5i$, então $\bar{z}_1 = 1 - 5i$.*

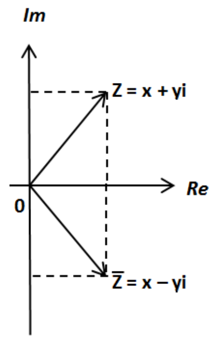


Figura 3.4: *Representação Gráfica do Conjugado de um Número Complexo*

Se $z_2 = 4 - i$*, então* $z_1 = \overline{z}_2 = 4 + i$.
Se $z_3 = 3i$*, então* $z_1 = \overline{z}_3 = -3i$.
Se $z_4 = 10$*, então* $z_1 = \overline{z}_4 = 10$.

3.2.4 Módulo de um Número Complexo

Dado um número complexo $z = x + yi$ chama-se módulo de z cuja notação é $|z|$ o número real não negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geometricamente, o módulo mede a distância da origem O ao ponto Z, ou seja, mede o módulo do vetor que representa o complexo z Figura (3.5).

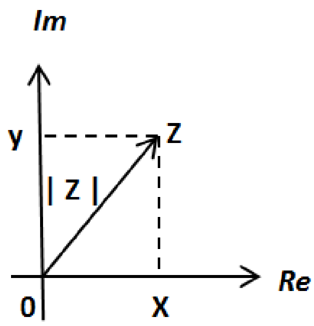


Figura 3.5: *Representação do Módulo de um Número Complexo.*

Exemplo 3.9 *Se* $z_1 = -2 - 3i$*, então* $|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.
Se $z_2 = 3 + 4i$*, então* $|z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
Se $z_3 = 2i$*, então* $|z_3| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$.
Se $z_4 = -5$*, então* $|z_4| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$.

Propriedades Envolvendo Módulo

Se z é um número complexo, então:

Propriedade 3.1 $z\bar{z} = |z|^2$.

Demonstração 3.1 *Sabemos que:*

$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2$, *e* $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Logo: $|z|^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2+y^2 = z\bar{z}$.

Portanto, $z\bar{z} = |z|^2$.

Propriedade 3.2 $|z| = |\bar{z}|$.

Demonstração 3.2 *Dado* $z = x+yi$, *temos* $\bar{z} = x-yi$:

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, *então* $|\bar{z}| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$.

Portanto: $|z| = |\bar{z}|$.

Exemplo 3.10 *Se* $z_1 = -4-5i$, *então* $|z_1| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$.

Por outro lado,

$\bar{z}_1 = -4+5i$, *logo* $|\bar{z}_1| = \sqrt{(-4)^2+5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$.

Portanto: $|z_1| = |\bar{z}_1|$.

Propriedade 3.3 $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\cdot(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$.

Demonstração 3.3 *Dados* $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ *temos* $\bar{z}_1 = a-bi$ *e* $\bar{z}_2 = c-di$. *Segue que* $z_1+z_2 = (a+c)+i(b+d)$ *e* $\bar{z}_1+\bar{z}_2 = (a+c)-i(b+d)$.

Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade que desejamos provar obtemos:

$|z_1+z_2|^2 = |(a+c)+i(b+d)|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2$.

Desenvolvendo o segundo membro da igualdade que desejamos provar obtemos:

$(z_1+z_2)\cdot(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = [(a+c)+i(b+d)]\cdot[(a+c)-i(b+d)] = (a+c)^2-i^2(b+d)^2 = (a+c)^2+(b+d)^2$.

Portanto, $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\cdot(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$.

De maneira análoga, podemos demonstrar que $|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)\cdot(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$.

3.2.5 Potências de i

Seja i a unidade imaginária definida por $i = \sqrt{-1}$. Vamos calcular i^n, para alguns valores naturais de n. Temos:

$i^0 = 1$;
$i^1 = i$;
$i^2 = -1$;
$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$;
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$;
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

Como vemos, os resultados de i^n, com o expoente n variando, repetem-se de quatro em quatro unidades. Notemos que, para i^n:

$i^{4n} = (i^4)^n = 1$.

O expoente *4n* representa os números que são divisíveis por 4.

$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i^1 = 1 \cdot i^n = i$.

O expoente *4n + 1* representa números que são divisíveis por 4 e deixam resto 1.

$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

O expoente *4n + 2* representa números que são divisíveis por 4 e deixam resto 2.

$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$.

O expoente *4n + 3* representa números que são divisíveis por 4 e deixam resto 3.

Logo, para calcular i^n basta calcular i^r, sendo r o resto da divisão de n por 4.

Exemplo 3.11 $i^{1000} = i^0 = 1$, *pois o resto da divisão de 1000 por 4 é igual a 0.*
$i^{49} = i^1 = i$, *pois o resto da divisão de 49 por 4 é igual a 1.*
$i^{202} = i^2 = -1$, *pois o resto da divisão de 202 por 4 é igual a 2.*
$i^{183} = i^3 = -i$, *pois o resto da divisão de 183 por 4 é igual a 3.*

3.2.6 Forma Trigonométrica dos Números Complexos

Sabemos que um número complexo $z = x + yi$ é representado por um ponto do plano, de coordenadas (x, y), vemos que esse mesmo ponto pode ser representado por suas coordenadas polares, que são:

1ª) O módulo $\overrightarrow{OZ}$, indicado por $|z|$ ou ρ, representando a distância do ponto Z à origem do plano (supondo $|z| \neq 0$). Se for $|z| = 0$, a distância é zero.

2ª) O ângulo θ, em que $0 \leq \theta < 2\pi$, que o vetor $\overrightarrow{OZ}$ forma com o *eixo real positivo* (eixo x). Esse ângulo θ é chamado *argumento de z* é indicado por $arg(z)$, conforme a Figura (3.6).

Se θ é o argumento de $z = x + yi$ então, aplicando relações trigonométricas na Figura (3.6), temos $x = \rho cos\theta$ e $y = \rho sen\theta$, o que permite escrever: $z = x + yi =$

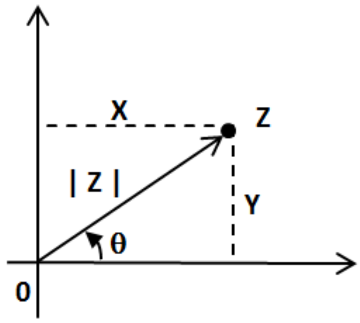


Figura 3.6: *Representação Gráfica da Forma Trigonométrica do Número Complexo.*

$\rho cos\theta + i\rho sen\theta = \rho(cos\theta + isen\theta)$, que é chamada *forma trigonométrica* ou *polar* do complexo z.

Exemplo 3.12 *Se* $z_1 = \sqrt{3} + i$, *então*

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$
$$sen\theta = \frac{1}{2} \ e \ cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^o$$

Portanto, a forma trigonométrica de z_1 *é:*

$$z_1 = 2(cos30^o + isen30^o).$$

A seguir vemos que as operações com números complexos, exceto a adição e subtração, se fazem mais facilmente na forma polar do que na algébrica.

Definição 3.6 *Se* $z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ *e* $z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$,

então:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)].$$

Se z_2 *for diferente de zero temos:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)].$$

Exemplo 3.13 *Sendo* $z_1 = 4(cos60^o + isen60^o)$ *e* $z_2 = 3(cos240^o + isen240^o)$, *calcular* $z_1 \cdot z_2$.

$$z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot 3[cos(60^o + 240^o) + isen(60^o + 240^o)] = 12(cos300^o + isen300^o).$$

Exemplo 3.14 *Sendo* $z_1 = 6(cos120^o + isen120^o)$ *e* $z_2 = 2(cos30^o + isen30^o)$, *calcular* $\frac{z_1}{z_2}$ *e* $\frac{z_2}{z_1}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}[cos(120^o - 30^o) + isen(120^o - 30^o)] = 3(cos90^o + isen90^o) = 3i.$$
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{6}[cos(30^o - 120^o) + isen(30^o - 120^o)] = \frac{1}{3}[cos(-90^o) + isen(-90^o)] = -\frac{1}{3}i.$$

Fórmula de De Moivre.

Se n é inteiro,

$$[\rho\cdot(cos\theta+isen\theta)]^n=\rho^n\cdot[cos(n\theta)+isen(n\theta)].$$

Demonstração 3.4 *Para $n=0$ e $n=1$, a fórmula e óbvia. Para n inteiro maior que 1, a fórmula decorre da aplicação da técnica de indução na fórmula da multiplicação:*

$z_1z_2\cdots z_n=\rho_1\rho_2\cdots\rho_n[cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+isen(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].$

Consequentemente, se $z=\rho(cos\theta+isen\theta)$ e n é um número inteiro positivo, temos:

$$z^n=[\rho\cdot(cos\theta+isen\theta)]^n=\rho^n\cdot[cos(n\theta)+isen(n\theta)].$$

Exemplo 3.15 *Sendo $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ calcular z^{20}:*

Inicialmente vamos escrever z na forma trigonométrica:

$$\rho=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$
$$cos\theta=-\frac{1}{2}\ e\ sen\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ então\ \theta=120^o.$$

Usando a fórmula de Moivre, temos:

$$z^{20}=1^{20}\cdot[cos(20\cdot120^o)+isen(20\cdot120^o)]=cos2400^o+isen2400^o.$$

Como

$2400^o=6\cdot360^o+240^o$,

então

$$z^{20}=cos240^o+isen240^o=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Raízes n-ésimas de um Número Complexo.

Extrair as raízes n-ésimas de um número complexo $z=\rho(cos\alpha+isen\alpha)(I)$ é determinar os complexos $w=r(cos\theta+isen\theta)(II)$ tais que:

$$z^n=w(III).$$

Demonstração 3.5 *Substituindo (I) e (II) em (III) teremos:*

$(\rho[cos\alpha+isen\alpha])^n=r.[cos\theta+isen\theta].$

Pela Fórmula de De Moivre,

$$\rho^n[cos(n\alpha)+isen(n\alpha)] = r(cos\theta+isen\theta).$$

Como complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes, teremos: $\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$ *e* $n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, *mas para que,* $0 \leq \alpha < 2\pi$ *é necessário que* $0 \leq k \leq n-1$. *Portanto,*

$$w_k = \sqrt[n]{r}.[cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isen\frac{\theta+2k\pi}{n}] \text{ para } k = 0,1,2,...,n-1. \text{ C.Q.D.}$$

Após $k = n-1$, *os valores começam a se repetir, então de* 0 *a* $n-1$, *temos* n *raízes distintas.*

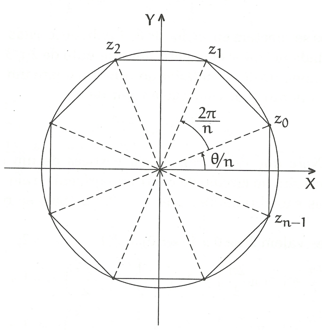


Figura 3.7: *Representação das n Raízes de um Número Complexo.*

Observe que essa fórmula pode ser escrita assim: $w_k = \sqrt[n]{r}.[cos\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}] + [isen\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}]$, *as raízes têm todas o mesmo módulo,* $\sqrt[n]{r}$. *Se* $r \neq 0$, *as representações geométricas dessas raízes se situam em uma circunferência de centro na origem e raio* $\sqrt[n]{r}$ *como podemos observar na Figura (3.7), e atribuindo valores a k, os argumentos crescem em progressão aritmética de razão* $\dfrac{2\pi}{n}$, *o que mostra que essas raízes estão uniformemente espaçadas na circunferência e as representações geométricas dessas raízes são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito nesta circunferência . Se* $r = 0$, *todas as raízes são iguais a* 0.

Interpretação Geométrica da Multiplicação de Complexos.

Como podemos observar (figura 3.8) quando multiplicamos um número complexo z por $cos\theta + isen\theta$, o vetor que representa z sofre uma rotação de um ângulo θ em torno da origem, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos. Como $cos\theta + isen\theta$ tem módulo 1, $z \cdot [cos\theta + isen\theta]$ tem o mesmo módulo que z. O argumento de $z \cdot [cos\theta + isen\theta]$ é o argumento de z aumentado de θ . Logo, o vetor que representa $z \cdot [cos\theta + isen\theta]$ é o resultado da rotação do vetor que representa z de um ângulo θ em torno da origem.

Esse fato se torna muito importante na aplicação dos números complexos na Trigonometria e Geometria Analítica.

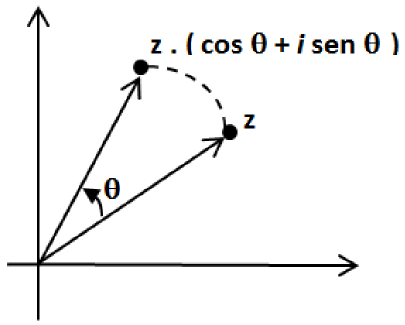


Figura 3.8: *Multiplicação de um Número Complexo por* $[cos\theta + isen\theta]$.

Fórmula de Euler

O objetivo é demonstrar que $e^z = e^x(cosy + iseny)$ de um número complexo z. Admitindo que o leitor tenha familiaridade com as definições de séries convergentes, de Maclaurin[2] e de Taylor[3] (como sugestão para aprofundamento sobre as séries veja o livro Introdução ao Cálculo, Geraldo Ávila, Editora LTC) e a constante de Euler[4] e.

As séries de Maclaurin, válidas para todos os valores reais da variável x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{3-1}$$

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots \tag{3-2}$$

$$senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots \tag{3-3}$$

A constante de Euler e, que é um número irracional compreendido entre 2 e 3 $(e \approx 2,71828\cdots)$, é dada pela série

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

que se obtém fazendo $x = 1$, em (3-1).

Demonstração 3.6 *Queremos demonstrar que* $e^z = e^x(cosy + iseny)$. *Para isso, inicialmente vamos considerar que* $z = yi$, *imaginário puro.*

Substituindo x *por* iy *onde* i *é a unidade imaginária em (3-1) temos:*

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \cdots$$

[2]Colin Maclaurin (1698 - 1746) matemático inglês nascido na Escócia.
[3]Brook Taylor (1683 - 1731) matemático inglês nascido em Londres.
[4]Leonhard Euler (1707 - 1783), matemático suíço nascido na Basiléia.

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \cdots$$

$$= (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots). \quad (3\text{-}4)$$

Para concluir a demonstração deve-se considerar a expansão do cosx em (3-2) e do senx em (3-3). Substituindo x por y na equação (3-4):

$$e^{iy} = cosy + iseny. \quad (3\text{-}5)$$

Podemos definir a exponencial e^z quando $z = x + iy$, utilizando as propriedade aditiva da exponencial real:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}.$$

Então, a exponencial e^z para um número complexo qualquer:

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(cosy + iseny). \quad (3\text{-}6)$$

CAPÍTULO 4

Aplicação no Ensino Médio - Trigonometria

Neste capítulo será apresentamos uma pequena história da Trigonometria. É importante para os alunos conhecerem um pouca da história dos conteúdos que são trabalhados para perceberem que os conteúdos não são descobertos ao acaso por uma pessoa mas por vários matemáticos, logo em seguida traz aplicações dos números complexos em sala de aula para alunos do Ensino Médio nos conteúdos de Trigonometria. Esses contéudos foram escolhidos por pertecerem ao curriculum comum.

4.1 Introdução à Trigonometria

A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: *tri* = três, *gonos* = ângulos e *metron* = medir. Daí o seu significado: medida dos triângulos. Dizemos, então, que a trigonometria é a parte da Matemática que tem como objetivo o cálculo das medidas dos elementos de um triângulo (lados e ângulos).

Como a Trigonometria procura estabelecer relações entre as medidas de ângulos e de segmentos, foi considerada originalmente como uma extensão da Geometria.

A Trigonometria, como outros ramos da Matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados dos triângulos semelhantes tinham sido conhecidos pelos antigos egípcios e babilônios, que a usavam para resolver problemas práticos de Navegação, de Agrimensura e de Astronomia. Hoje, sabemos que a Astronomia foi a grande impulsionadora do desenvolvimento da Trigonometria, principalmente entre os gregos e os egípcios. Aliás, foram os astrônomos que estabeleceram os fundamentos da Trigonometria.

Sabe-se que foi o astrônomo grego Hiparco (190 a.C. - 125 a. C.), que por volta de 140 a.C compilou uma tabela trigonométrica. Ele sabia que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180^o para 0^o, aproximando do limite 1; considerado o pai da astronomia foi o precursor da Trigonometria.

Graças a Cláudio Ptolomeu (125 a.C.), o mais celebre astrônomo da Antiguidade, surge o documento mais antigo que trata da Trigonometria: *O Almagesto*, baseado nos trabalhos de Hiparco. Na *Síntaxe Matemática*, Ptolomeu apresenta um verdadeiro tratado de Trigonometria retilínea e esférica.

Importantes trabalhos hindus foram traduzidos para o árabe, no fim do século VII, mostrando quanto aquele povo estava familiarizado com esse ramo da Matemática, e foram os responsáveis pelas notáveis descobertas atribuídas aos matemáticos árabes.

No século XV grande parte do desenvolvimento da Trigonometria é devido aos alemães, destacando George Peurbach (1423 - 1461), um matemático nascido na Baviera que procurou restabelecer a obra de Ptolomeu *O Almagesto* traduzindo diretamente do grego, livrando-o de erros, introduzindo o seno e a tangente na Trigonometria e construindo a primeira tábua trigonométrica.

O primeiro tratado de Trigonometria feito de maneira sistemática com uma exposição dos métodos para resolver triângulos é chamado *De triangulis omnimodis* ou *Tratado dos Triângulos* e foi escrito pelo matemático alemão Johann Muller, chamado *Regiomontanus*, e que foi discípulo de Peurbach.

Hoje em dia a Trigonometria não se limita a estudar somente os triângulos; sua aplicação se estende a vários campos da Matemática, Física e muito outros campos de atividades, aplicações essas envolvidas em que conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria [7].

4.2 As Funções Trigonométricas

As funções cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas *função cosseno* e *função seno*, respectivamente, são definidas pondo-se para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = (cost, sent).$$

Então, a abscissa $(x = cost)$ e a ordenada $(y = sent)$ são as coordenadas do ponto $E(t)$ da circunferência unitária. Segue-se imediatamente desta definição, para todo $t \in \mathbb{R}$, a relação fundamental trigonométrica

$$cos^2 t + sen^2 t = 1.$$

As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π; e ainda, a função cosseno é uma função par, ou seja, $cos(-t) = cos(t)$ e a função seno e uma função ímpar, ou seja, $sen(-t) = -sen(t)$.

Observação:

Algumas relações importantes:

a) $cos(t+\pi) = -cos(t)$ e $sen(t+\pi) = -sen(t)$.

b) $cos(t+\frac{\pi}{2}) = -sen(t)$ e $sen(t+\frac{\pi}{2}) = cos(t)$.

c) $cos(\frac{\pi}{2}-t) = sen(t)$ e $sen(\frac{\pi}{2}-t) = cos(t)$.
d) $cos(\pi - t) = -cos(t)$ e $sen(\pi - t) = sen(t)$.

4.3 Fórmulas da Adição e Subtração de Dois Arcos ou Ângulos

Para determinamos as fórmulas da adição e subtração de dois arcos ou ângulos primeiramente vamos definir a distância entre dois pontos distintos no plano cartesiano é a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades Figura (4.1).

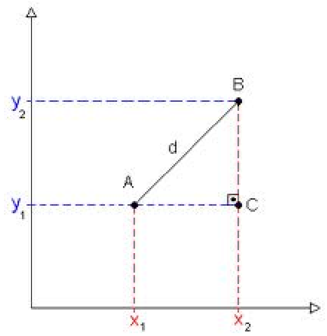


Figura 4.1: *Distância entre Dois Pontos*

Vamos determinar, na figura a distância entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC. Vejamos:

$$d^2 = (AC)^2 + (BC)^2.$$

Mas,

$$AC = x_2 - x_1 \text{ e } BC = y_2 - y_1,$$

Assim,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

4.3.1 Cosseno da Soma

Sejam os pontos P, Q e R as representações geométricas dos números reais a, $a+b$ e $-b$, respectivamente, como mostra o ciclo trigonométrico da Figura ()4.2).

Os arcos $\widehat{APQ}$ e $\widehat{RAP}$ possuem a mesma medida $(a+b)$ e consequentemente, as cordas $\overline{AQ}$ e $\overline{PR}$ também têm as medidas iguais. Desse modo, podemos afirmar que a distância entre os pontos A e Q é igual a distância entre os pontos P e R, isto é, $d_{AQ} = d_{PR}$.

Observando a Figura ()4.2), podemos escrever as coordenadas dos pontos A, P, Q e R como sendo:

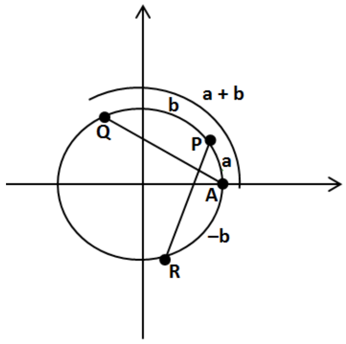


Figura 4.2: *Cosseno da Soma de Dois Arcos*

$A(1,0)$; $P(cosa, sena)$; $Q(cos(a+b), sen(a+b))$ e
$R(cos(-b), sen(-b)) = R(cosb, -senb)$.

Utilizando a expressão da distância entre dois pontos:
$d_{AQ} = \sqrt{[1-cos(a+b)]^2 + [0-sen(a+b)]^2}$
$= \sqrt{1-2cos(a+b)+cos^2(a+b)+sen^2(a+b)}$
$= \sqrt{2-2cos(a+b)}$
$d_{PR} = \sqrt{(cosa-cosb)^2 + [sena-(-senb)]^2}$
$= \sqrt{(cosa-cosb)^2 + (sena+senb)^2}$
$= \sqrt{cos^2a - 2cosa.cosb + cos^2b + sen^2a + 2.sena.senb + sen^2b}$
$= \sqrt{1+1+2sena.senb-2cosa.cosb}$
$= \sqrt{2+2sena.senb-2cosa.cosb}$
Como $d_{AQ} = d_{PR}$ temos também que $d_{AQ}^2 = d_{PR}^2$, isto é,
$2-2cos(a+b) = 2+2sena.senb-2cosa.cosb$
$2[1-cos(a+b)] = 2[1+sena.senb-cosa.cosb]$
então,
$cos(a+b) = cosa.cosb - sena.senb.$

Podemos demonstrar a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos utilizando números complexos. Inicialmente vamos definir $0 \leq a < 2\pi$ e $0 \leq b < 2\pi$. Dados dois números complexos $z_1 = cosa + i \cdot sena$ e $z_2 = cosb + i \cdot senb$, tem-se:

$$z_1 \cdot z_2 = cos(a+b) + i \cdot sen(a+b). \tag{4-1}$$

Mas, por outro lado, temos

$$z_1 \cdot z_2 = (cosa + i \cdot sena)(cosb + i \cdot senb) \tag{4-2}$$
$$z_1 \cdot z_2 = cosa \cdot cosb + (cosa \cdot senb)i + (sena \cdot cosb)i + (sena \cdot senb)i^2 \tag{4-3}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (cosa \cdot cosb - sena \cdot senb) + (sena \cdot cosb + senb \cdot cosa)i. \tag{4-4}$$

Igualando (4-1) e (4-4) temos,

$cos(a+b)+i\cdot sen(a+b)=(cosa\cdot cosb-sena\cdot senb)+(sena\cdot cosb+senb\cdot cosa)i$

Então,

$cos(a+b)=cosa\cdot cosb-sena\cdot senb$

e

$sen(a+b)=sena\cdot cosb+senb\cdot cosa.$

4.4 Lei dos Cossenos

É comum na maioria das vezes usar o Teorema de Pitágoras para calcular o terceiro lado de um triângulo, ele sendo retângulo. Mas, acontece algumas vezes de o triângulo não ser retângulo, daí pode-se utilizar a Lei dos Cossenos, desde que sejam conhecidos a medida de dois lados e o ângulo formado entre eles.

Proposição 1 *Em um triângulo A, B, C qualquer, temos que*

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos\,\hat{A},$$

onde a, b e c são os lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente.

Demonstração 4.1 *Escolhendo um sistema de coordenadas Figura (4.3) $x0y$ de modo que A coincida com a origem 0 e $0B$ coincida com o eixo $0x$. Seja $z_1=r_1$ o número complexo representado por B e $z_2=r_2(cos\alpha+isen\alpha)$ o número complexo representado por C. Então, $|z_2-z_1|^2=a^2$ e*

$|z_2-z_1|^2=(z_2-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_1)=z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1-(z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2)\cdot$

Como

$z_2\bar{z}_1=r_1r_2(cos\alpha+isen\alpha),$

$z_1\bar{z}_2=r_1r_2(cos\alpha-isen\alpha),$

temos que

$z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2=r_1r_2(2cos\alpha)$

portanto

$|z_2-z_1|^2=a^2\Rightarrow|z_2|^2+|z_1|^2-2r_1r_2cos\alpha=a^2\Rightarrow b^2+c^2-2bccos\alpha=a^2.$

4.5 Cálculo de $cos(nx)$ e $sen(nx)$

A partir da fórmula De Moivre (3.2.6), obtem-se $cos(nx)$ e $sen(nx)$, sem o uso da fórmula da adição. Pois,

$$(cosx+isenx)^n=cos(nx)+isen(nx).$$

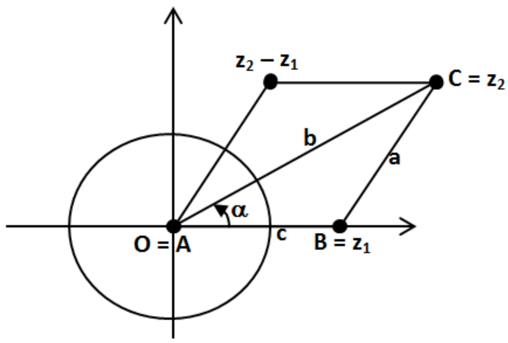


Figura 4.3: *Lei dos Cossenos*

Exemplo 4.1 *Calcular o sen3x e cos3x.*

Temos, $cos3x + isen3x = (cosx + isenx)^3$

$cos3x + isen3x = cos^3x + 3 \cdot cos^2x \cdot isenx + 3 \cdot cosx \cdot i^2sen^2x + i^3sen^3x$

$cos3x + isen3x = cos^3x + 3 \cdot cos^2x \cdot isenx - 3 \cdot cosx \cdot sen^2x - isen^3x$

$cos3x + isen3x = cos^3x - 3 \cdot cosx \cdot sen^2x + i(3 \cdot cos^2x \cdot senx - sen^3x).$

Igualando parte real com real e imaginária com imaginária, temos

$$cos3x = cos^3x - 3 \cdot cosx \cdot sen^2x$$

$$e$$

$$sen3x = 3 \cdot cos^2x \cdot senx - sen^3x.$$

CAPÍTULO 5

Aplicação no Ensino Médio - Geometria Analítica

5.1 Geometria Analítica

Neste capítulo é apresentado alguns problemas relacionados com a Geometria Analítica. Eles foram escolhidos por serem conteúdos pertencentes ao curriculum do Ensino Médio utilizarei como referências [2], [7] e [10] .

A Geometria Analítica no plano pode ser refeita, com certas vantagens, utilizando-se a estrutura mais rica dos números complexos. Depois vemos alguns exemplos.

Ao final deste capítulo ainda é apresentado a aplicação dos números complexos na resolução de equações binômias e trinômias.

5.2 Equação da Circunferência

O módulo do número complexo $z = x + yi$ é dado por $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Observe que

$$z.\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2 = |z|^2.$$

A distância entre os números complexos $z = x+yi$ e $z_o = x_o+y_oi$, é dada por

$$d(z,z_o) = |z-z_o| = \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}.$$

De modo que uma equação da circunferência de centro z_o é raio r é

$$|z-z_o| = r.$$

Observação:
$|z-z_o| < r$ representa o *interior* da circunferência de centro z_o é raio r.
$|z-z_o| > r$ representa o *exterior* da circunferência de centro z_o é raio r.

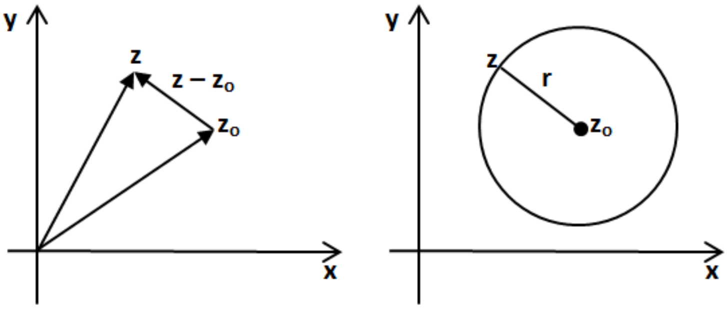


Figura 5.1: *Circunferência e Números Complexos.*

5.3 Equação da Parábola

Sejam d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d, define-se a *parábola* P como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa d, chamada de *diretriz*, e de um ponto F, não pertencente a diretriz chamado de *foco*. Considerando o plano complexo temos quatro caso a serem demonstrados.

Demonstração 5.1 *Primeiro caso: O vértice da parábola está na origem e a parábola é simétrica em relação ao eixo x, que é o eixo da parábola. Fazendo o foco $F(k,0)$ para a diretriz $d(x=-k)$ e D um ponto qualquer da diretriz, temos:*

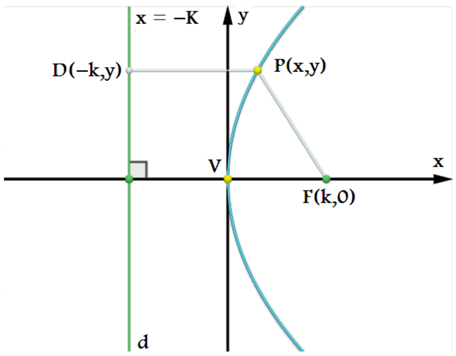


Figura 5.2: *Parábola:* $y^2 = 4kx$

$$
\begin{gathered}
|P-F| = |P-D| \\
\sqrt{(x-k)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+k)^2+(y-y)^2} \\
x^2-2kx+k^2+y^2 = x^2+2kx+k^2 \\
y^2 = 4kx.
\end{gathered}
$$

Demonstração 5.2 *Segundo caso: O vértice da parábola está na origem e a parábola é simétrica em relação ao eixo x, que é o eixo da parábola. Fazendo o foco $F(-k,0)$ para a diretriz $d(x=k)$ e D um ponto qualquer da diretriz, temos:*

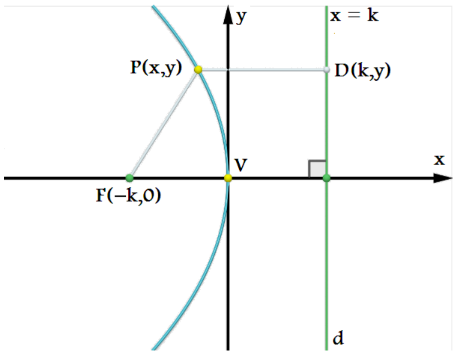


Figura 5.3: *Parábola:* $y^2 = -4kx$

$$
\begin{gathered}
|P-F| = |P-D| \\
\sqrt{(x+k)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-k)^2+(y-y)^2} \\
x^2+2kx+k^2+y^2 = x^2-2kx+k^2 \\
y^2 = -4kx.
\end{gathered}
$$

Demonstração 5.3 *Terceiro caso: O vértice da parábola está na origem e a parábola é simétrica em relação ao eixo y, que é o eixo da parábola. Fazendo o foco* $F(0,k)$ *para a diretriz* $d(y=-k)$ *e D um ponto qualquer da diretriz, temos*

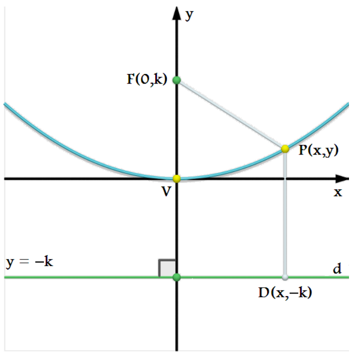


Figura 5.4: *Parábola:* $x^2 = 4ky$

$$
\begin{gathered}
|P-F| = |P-D| \\
\sqrt{(x-0)^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+k)^2} \\
x^2+y^2-2ky+k^2 = y^2-2ky+k^2 \\
x^2 = 4ky.
\end{gathered}
$$

Demonstração 5.4 *Quarto caso: O vértice da parábola está na origem e a parábola é simétrica em relação ao eixo y, que é o eixo da parábola. Fazendo o foco* $F(0,-k)$ *para a diretriz* $d(y=k)$ *e D um ponto qualquer da diretriz, temos*

$$
\begin{gathered}
|P-F| = |P-D| \\
\sqrt{(x-0)^2+(y+k)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-k)^2} \\
x^2+y^2+2ky+k^2 = y^2-2ky+k^2 \\
x^2 = -4ky.
\end{gathered}
$$

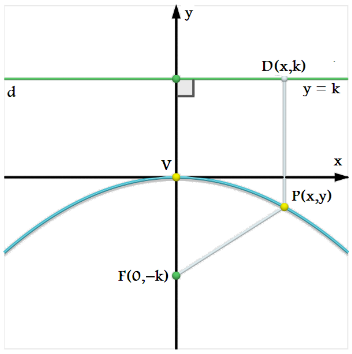


Figura 5.5: *Parábola:* $x^2 = -4ky$

5.4 Equação da Elipse

Uma *Elipse* ξ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$ Figura (5.6).

$$\xi = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

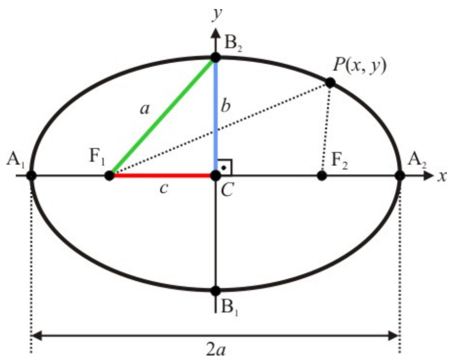


Figura 5.6: *Elipse*

Da Figura (5.6), destacamos:

- F_1 e F_2 são focos da elipse e a distância entre ele á a *distância focal* $2c$;

- $\overline{A_1A_2}$ é o *eixo maior* da elipse e sua medida é a soma que consta da definição $2a$;

- $\overline{B_1B_2}$ é o *eixo menor* da elipse cuja medida é $2b$;

- C é o *centro* da elipse (intersecção dos eixos da elipse e o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$);

- o número $e = \dfrac{c}{a}$ chama-se *excentricidade* da elipse (note que $e < 1$ pois $c < a$);

- do triângulo retângulo CF_1B_2, temos $a^2 = b^2 + c^2$.

Pode-se então, estender a definição da *Elipse* ξ para plano complexo sejam os pontos Z_1, Z_2 e Z, representando números complexos Figura (5.7), sua equação escrita na forma de números complexos é

$$\xi = \{P \,||Z - Z_1| + |Z - Z_2| = 2a\}.$$

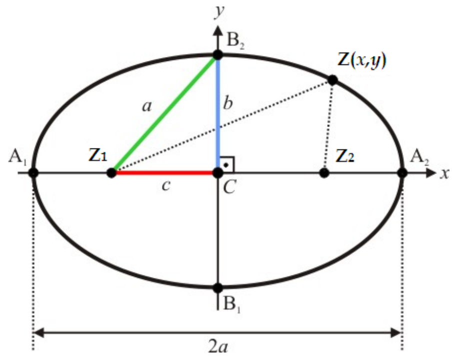


Figura 5.7: *Elipse Plano Complexo.*

Considerando a elipse com focos no eixo x (eixo real) $Z_1(-c,0)$ e $Z_2(c,0)$ e centro na origem $C(0,0)$ e as extremidades do eixo maior nos pontos $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$, do eixo menor em $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$ e $Z(x,y)$ um ponto qualquer da curva, temos

Demonstração 5.5 $|Z - Z_1| + |Z - Z_2| = 2a$

Então,

$$|Z - Z_1| = \sqrt{(x + x_1)^2 + (y - y_1)^2} \text{ } e \text{ } |Z - Z_2| = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Segue que,

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a,$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois termos ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\
&(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
&4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2 \\
&4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 - x^2 - 2cx - c^2 \\
&4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \\
&4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4(a^2 - cx) \\
&a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = (a^2 - cx).
\end{aligned}$$

Elevando os dois termos ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}
&(a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 = (a^2-cx)^2\\
&a^2[(x-c)^2+y^2] = a^4-2a^2cx+c^2x^2\\
&a^2[x^2-2xc+c^2+y^2] = a^4-2a^2cx+c^2x^2\\
&a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 = a^4-2a^2cx+c^2x^2\\
&a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2\\
&(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).
\end{aligned}$$

Na elipse temos

$$a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow a^2-c^2 = b^2.$$

Substituindo na equação $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$, *obtemos*

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2.$$

Como $ab \neq 0$, *segue que*

$$\begin{gathered}
\frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{gathered}$$

Essa equação é denominada equação reduzida da elipse.

5.5 Equação da Hipérbole

Uma *Hipérbole* H de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre focos $2c > 0$. Ou seja, sendo $0 < a < c$ e $d(F_1,F_2) = 2c$ Figura (5.8).

$$H = \{P \mid |d(P,F_1)-d(P,F_2)| = 2a\}.$$

Da Figura (5.8), destacamos:

- F_1 e F_2 são *focos* da elipse e a distância entre ele á a *distância focal* 2c;

- A_1 e A_2 os *vértices* da hipérbole, sendo $A_1A_2 = A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$ constante da definição 2a;

- O é o centro da *hipérbole* e o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$);

- o número $e = \dfrac{c}{a}$ chama-se *excentricidade* da hipérbole (Note que $e > 1$, pois $c > a$);

- do triângulo retângulo OB_1A_2, temos $c^2 = a^2+b^2$.

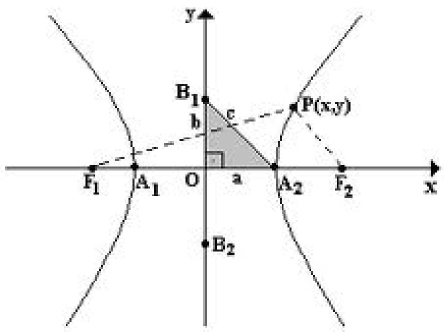


Figura 5.8: *Hipérbole.*

Podemos estender a definição da Hipérbole H para plano complexo. Sejam Z_1, Z_2 e Z pontos do plano, representando números complexos, sua equação escrita na forma de números complexos Figura (5.9):

$$H = \{P \mid ||Z - Z_1| - |Z - Z_2|| = 2a\}.$$

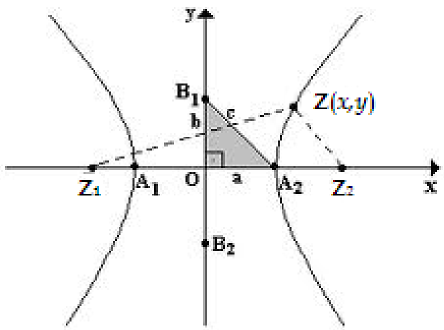


Figura 5.9: *Hipérbole Plano Complexo*

Considerando a hipérbole com focos no eixo x (eixo real) $Z_1(-c,0)$ e $Z_2(c,0)$ e centro na origem $O(0,0)$ e $Z(x,y)$ um ponto qualquer da curva, temos

Demonstração 5.6 $||Z - Z_1| - |Z - Z_2|| = 2a.$

Então, visto que

$|Z - Z_1| = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$ *e* $|Z - Z_2| = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$, *temos* $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$, *segue que*

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 = (\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a)^2 \\
&(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2 \\
&(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2-4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
&x^2+2xc+c^2+y^2-x^2+2xc-c^2-y^2-4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
&4xc-4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
&4(xc-a^2) = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
&xc-a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos

$$
\begin{aligned}
&(xc-a^2)^2 = (\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 \\
&x^2c^2-2a^2xc+a^4 = a^2[(x-c)^2+y^2] \\
&x^2c^2-2a^2xc+a^4 = a^2[x^2-2xc+c^2+y^2] \\
&x^2c^2-2a^2xc+a^4 = a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 \\
&x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4 \\
&x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).
\end{aligned}
$$

Na hipérbole, temos

$$c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow c^2-a^2 = b^2.$$

Substituindo na equação $x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$, *obtemos*

$$\Rightarrow x^2b^2-a^2y^2 = a^2b^2.$$

Como $ab \neq 0$, *segue que*

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2b^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \\
\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}
$$

Essa equação é denominada equação reduzida da hipérbole.

5.6 Mediatriz de um Segmento de Reta

Mediatriz é a reta que passa pelo ponto médio do segmento de reta que liga os pontos Z_1 ao Z_2 e é perpendicular a reta que passa pelos pontos Z_1 e Z_2. Isto é,

$$|z-z_1| = |z-z_2|.$$

Exemplo 5.1 *Dado dois pontos* $M_1 = (-2,3)$ *e* $M_2 = (2,5)$ *encontre a mediatriz do segmento* M_1M_2*.*

Vamos escrever os pontos M_1 *e* M_2 *na forma algébrica dos números complexo* $z = x + yi$*. Segue que*

$z_1 = -2+3i$ *e* $z_2 = 2+5i$*. Assim,*

$|z - z_1| = |z - z_2|$

$|x + yi + 2 - 3i| = |x + yi - 2 - 5i|$

$|(x+2)+(y-3)i| = |(x-2)+(-5+y)i$

$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(-5+y)^2}$

$x^2+4x+4+y^2-6y+9 = x^2-4x+4+25-10y+y^2$

$8x+4y-16 = 0(:4)$.

Logo,

$2x+y-4 = 0$ *é a equação da mediatriz.*

5.7 Equação da Reta usando Números Complexos.

Toda reta tem uma equação cartesiana da forma $Ax+By+C=0$, vamos escrever esta equação usando números complexos. As partes real e imaginária do número $z = x+yi$ podem ser escritas em função de z e seu conjugado $\bar{z} = x - yi$:

$x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

e

$y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

Substituindo estes valores na equação cartesiana, temos

$A\dfrac{z+\bar{z}}{2} + B\dfrac{z-\bar{z}}{2i} + C = 0$

$A\dfrac{z+\bar{z}}{2} + B\dfrac{z-\bar{z}}{2i} + C = 0(x2)$

$A(z+\bar{z}) + B\dfrac{z-\bar{z}}{i} + 2C = 0$

$Az + A\bar{z} - Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0$

$Az - Biz + A\bar{z} + Bi\bar{z} + 2C = 0$

$z(A-Bi) + \bar{z}(A+Bi) + 2C = 0$

Podemos também escrever a equação na forma:

$$az + b\bar{z} + c = 0.$$

5.8 Equação da Lemniscata

A **lemniscata** Figura (5.12) é uma curva definida como sendo o conjunto dos pontos cujo produto das distâncias a dois pontos fixos de coordenadas cartesianas $(a,0)$ e $(-a,0)$ tem valor constantes a^2. Podemos representar, a sua equação no plano complexo:

$$|Z-Z_1|\cdot|Z-Z_2| = a^2.$$

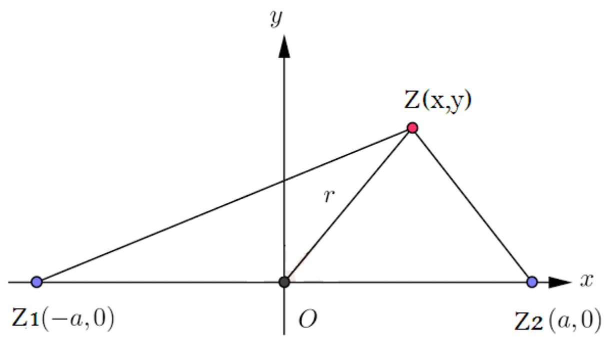


Figura 5.10: *Lemniscata e o Plano Complexo.*

Demonstração 5.7 *Considerando os pontos no eixo x (eixo real) $Z_1(-a,0)$ e $Z_2(a,0)$ focos da curva e simétricos em relação a origem $O(0,0)$ e $Z(x,y)$ um ponto qualquer da curva. Segue que*

$$|Z-Z_1|\cdot|Z-Z_2| = a^2.$$

Então,

$$|Z-Z_1| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \text{ e } |Z-Z_2| = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

e

$$\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = a^2.$$

Elevando-se os dois membros ao quadrado, obtemos

$$(\sqrt{(x+a)^2+y^2}.\sqrt{(x-a)^2+y^2})^2 = (a^2)^2$$
$$[(x+a)^2+y^2].[(x-a)^2+y^2] = a^4$$
$$[x^2+2ax+a^2+y^2].[x^2-2ax+a^2+y^2] = a^4$$
$$x_4 - 2ax^3 + a^2x^2 + x^2y^2 + 2ax^3 - 4a^2x^2 + 2a^3x + 2axy^2 + a^2x^2 - 2a^3x + a^4 + a^2y^2 + x^2y^2 - 2axy^2 + a^2y^2 + y^4 = a^4$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 = 0.$$

Então a equação cartesiana da lemniscata é:

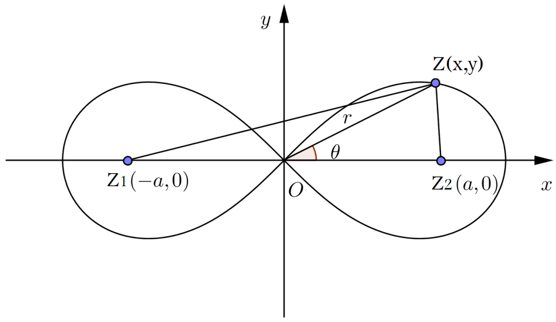


Figura 5.11: *Lemniscata.*

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

Podemos também representar a equação da Lemniscata utilizando coordenadas polares, por meio das relações

$$x = rcos\theta$$
$$y = rsen\theta,$$

obtemos assim

$$r^2 = 2a^2cos2\theta,$$

que é a equação da lemniscata em coordenadas polares. Para esboçar o gráfico, observamos que $cos2\theta$ é negativo nos intervalos

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \text{ e } \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}.$$

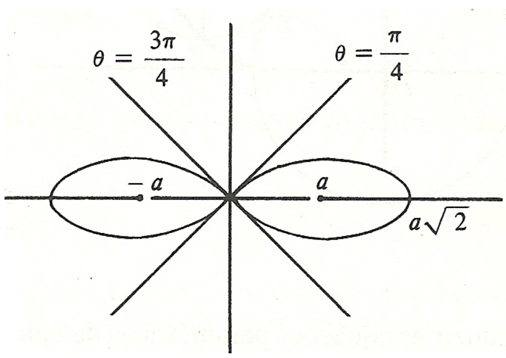


Figura 5.12: *Lemniscata em Coordenadas Polares.*

5.9 Inversão geométrica

A inversão geométrica é a função:

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$
$$z \to w = f(z) = \frac{1}{z}.$$

A inversão estabelece uma bijeção de $\mathbb{C}$ entre os pontos dos planos, exceto para os pontos $z = 0$ e $w = 0$; o primeiro não tem imagem e o último não é imagem de nenhum ponto.

Vamos estabelecer algumas relações. Sendo $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, $w = u + iv$ e $\overline{w} = u - iv$. Então,

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \tag{5-1}$$
$$z + \overline{z} = 2x \Rightarrow x = \frac{z + \overline{z}}{2} \tag{5-2}$$
$$z - \overline{z} = 2iy \Rightarrow y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \tag{5-3}$$
$$w \cdot \overline{w} = u^2 + v^2 \tag{5-4}$$
$$w + \overline{w} = 2u \Rightarrow u = \frac{w + \overline{w}}{2} \tag{5-5}$$
$$w - \overline{w} = 2iv \Rightarrow v = \frac{w - \overline{w}}{2i} \tag{5-6}$$

Consideremos o círculo (c_1):

$$c_1 : a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \tag{5-7}$$

que pode ser representado na forma complexa substituindo (5-1), (5-2) e (5-3) na equação (5-7):

$$c_1 : az\overline{z} + b\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right) + c\left(\frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + d = 0.$$

Aplicando a inversão $z = \dfrac{1}{w}$, então

$$c_2 : a\frac{1}{w\overline{w}} + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}}\right) + \frac{c}{2i}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\overline{w}}\right) + d = 0.$$

Multiplicando a igualdade por $w\overline{w}$, tem-se:

$$c_2 : a + b\left(\frac{w + \overline{w}}{2}\right) - c\left(\frac{w - \overline{w}}{2i}\right) + dw\overline{w} = 0$$

ou

$$c_2 : d(u^2+v^2) - cv + bu + a = 0. \tag{5-8}$$

Podemos afirmar que a inversão transforma retas ou circunferências em retas ou circunferências.

Reciprocamente, se u e v satisfazem à equação (5-8), então x e y são soluções da equação (5-7). Portanto, se a e d são distintos de zero, a curva e sua imagem são ambas círculos, isto é, círculos que não passam pela origem $z = 0$ são transformados em círculos que não passam pela origem $w = 0$.

De modo análogo, as equações (5-7) e (5-8) mostram que todo círculo passando pela origem $z = 0$ é transformado numa linha retal no plano-w. Retas no plano-z, por sua vez, se transformam em círculos passando pela origem $w = 0$, a menos que a reta passe pela origem $z = 0$, quando, então, a imagem é uma reta passando pela origem $w = 0$. [2]

Exemplo 5.2 *Determine a imagem da circunferência $c_1 : x^2+y^2 = 9$ pela inversão $w = \frac{1}{z}$:*

$x^2+y^2-9 = 0$, então $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = -9$, aplicando em (5-8) temos uma nova circunferência.

$-9(u^2+v^2)+1 = 0$, então $u^2+v^2 = \frac{1}{9}$, é uma circunferência centrada na origem e com raio igual a $\frac{1}{3}$.

Exemplo 5.3 *Determine a imagem da circunferência $c_1 : x^2+y^2-8x = 0$ pela inversão $w = \frac{1}{z}$:*

$x^2+y^2-8x = 0$, então $a = 1$, $b = -8$, $c = 0$ e $d = 0$, aplicando em (5-8) temos uma reta.

$0(u^2+v^2)-8u+1 = 0$, então $8u = 1$, é uma reta não passando pela origem.

5.10 Resolução de Problemas usando as Propriedades dos Números Complexos

A seguir, resolvemos alguns problemas usando as propriedades dos números complexos.

Problema 1 *Dados dois números complexos α e β, prove que*

$$|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2.$$

Demonstração 5.8 $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta).(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+(\alpha-\beta).(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$ *(Propriedade:3.3).*

$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$
$\Rightarrow |\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2\alpha\overline{\alpha}+2\beta\overline{\beta}$ *(Propriedade:3.1).*

Então

$$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2|\alpha|^2+2|\beta|^2.$$

Problema 2 *Ache a imagem da hipérbole $x^2-y^2=1$ pela transformação $w=\frac{1}{z}$.*

Para $x^2-y^2=1$ substituindo x por (5-2) e y por (5-3)
$\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2=1$ *aplicando a inversão* $w=\frac{1}{z}$;
$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{\overline{w}}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}}\right)^2=1$
$\frac{(w+\overline{w})^2}{(w.\overline{w})^2}+\frac{(\overline{w}-w)^2}{(w.\overline{w})^2}=4$
$(w+\overline{w})^2+(\overline{w}-w)^2=4(w.\overline{w})^2$ *substituindo* $(w+\overline{w})$ *por (5-5) e* $(\overline{w}-w)$ *(5-6) e* $w.\overline{w}=\rho^2$;
$(2u)^2+(-2vi)^2=4(\rho^2)^2$
$4u^2-4v^2=4\rho^4$
$u^2-v^2=\rho^4$. *Em coordenadas polares $u=\rho cos\varphi$ e $v=\rho sen\varphi$. Logo,*
$\rho^2cos^2\varphi-\rho^2sen^2\varphi=\rho^4$ *dividindo por* ρ^2, *temos*
$cos^2\varphi-sen^2\varphi=\rho^2$
$cos2\varphi=\rho^2$.
Assim, $\rho=\pm\sqrt{cos2\varphi}$, *representa uma lemniscata com $cos2\varphi\geq 0$, então* $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$ *e* $\frac{3\pi}{4}\leq\varphi\leq\pi$.

Problema 3 *Determinar o vértice C_1 do triângulo equilátero ABC_1, onde são dados os vértices $A=(1,3)$ e $B=(3,-1)$*

Uma das maneiras de encontrar o vértice C_1 Figura (5.13) . Por se tratar de um triângulo equilátero, o vetor $\overrightarrow{AC_1}$ é obtido quando giramos o vetor $\overrightarrow{AB}$ em 60^o em torno da origem, ou seja:

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}(cos60^o+isen60^o)$$

Se O é a origem do nosso sistema de coordenadas, temos
$\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\overrightarrow{OC_1}-(1+3i)=[(3-i)-(1+3i)]\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

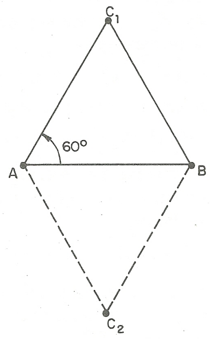


Figura 5.13: *Triângulo Equilátero.*

$$\overrightarrow{OC_1} = (2-4i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1+3i$$
$$\overrightarrow{OC_1} = 1+\sqrt{3}i-2i+2\sqrt{3}+1+3i$$
$$\overrightarrow{OC_1} = (2+2\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i.$$

Então

$$C_1 = (2+2\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}).$$

Problema 4 *Seja ABCD um quadrado Figura (5.14). Se $A=(1,2)$ e $B=(2,5)$, determine as coordenadas dos pontos C e D.*

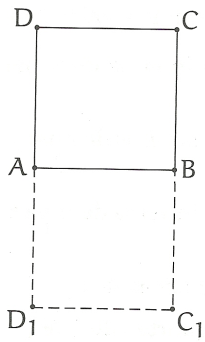


Figura 5.14: *Quadrado.*

Observe que $\overrightarrow{AD}$ é obtido de por uma rotação de $+90^o$ em relação $\overrightarrow{AB}$.
Portanto,
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}[cos90^o + isen90^o]$$
$$(D-A) = (B-A)[cos90^o + isen90^o]$$
$$D-(1+2i) = (1+3i)\cdot i$$
$$D = 1+2i+i+3i^2 = -2+3i = (-2,3).$$

Logo,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
$D - A = C - B$
$C = B + D - A$
$C = 2 + 5i - 2 + 3i - 1 - 2i = -1 + 6i = (-1, 6).$

Problema 5 *Prove que se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, então z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo de centro na origem.*

Resolução:

Inicialmente vamos demonstrar que as distâncias entre os pontos são iguais, ou seja $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$.

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \qquad \textbf{(1)}$$

pela equação $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ temos $z_2 = -z_1 - z_3$

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - (-z_1 - z_3) = |z_1 + z_1 + z_3| = |2z_1 + z_3| \qquad \textbf{(2)}$$
$$|z_2 - z_3| = | - z_1 - z_3 - z_3 = |(-1).(z_1 + z_3 + z_3)| = |2z_3 + z_1| \qquad \textbf{(3)}$$

*vamos elevar ao quadrado e depois aplicar as propriedades (3.3), (3.1) as expressões **(2)** e **(3)**, então*

$$|2z_1 + z_3|^2 = (2z_1 + z_3).(2\bar{z}_1 + \bar{z}_3) = 4z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3 + z_3\bar{z}_3 = 5 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3$$
$$e$$
$$|2z_3 + z_1|^2 = (2z_3 + z_1).(2\bar{z}_3 + \bar{z}_1) = 4z_3\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_1 + 2\bar{z}_3 z_1 + z_1\bar{z}_1 = 5 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3$$

portanto $|2z_1 + z_3| = |2z_3 + z_1|$,logo $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$ aplicando a propriedade(3.3), temos

$z_1\bar{z}_1 = z_3\bar{z}_3$, *logo* $|z_1| = |z_3|$.
De maneira análoga temos que $|z_1| = |z_2|$ então $|z_2| = |z_3|$.
Logo as distâncias entre os números complexos z_1, z_2 e z_3 são iguais.

Falta mostrar que os ângulos formados entre os números complexos z_1, z_2 e z_3 são iguais.

Demonstração 5.9 *Vamos supor que $z_1 = r$ é real então $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow 1 = |z_2| = |z_3|$ escrevendo z_2 e z_3 em coordenadas polares temos $z_2 = r(cos\alpha + isen\alpha)$ e $z_3 = r(cos\beta + isen\beta)$ substituindo em $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ temos:*

$$r + r(cos\alpha + isen\alpha) + r(cos\beta + isen\beta) = 0$$
$$r(1 + cos\alpha + isen\alpha + cos\beta + isen\beta) = 0$$
$$(1 + cos\alpha + cos\beta) + i(sen\alpha + sen\beta) = 0$$
$$1 + cos\alpha + cos\beta = 0 \text{ é } sen\alpha + sen\beta = 0$$

$$sen\alpha + sen\beta = 0$$
$$sen\alpha = -sen\beta$$
elevando os dois termos ao quadrado temos:
$$sen^2\alpha = sen^2\beta$$
pela relação fundamental trigonométrica $sen^2x + cos^2x = 1$ temos:
$$cos^2\alpha = cos^2\beta$$
isto implica que os cossenos são iguais ou opostos eles não podem ser iguais pela equação $1 + cos\alpha + cos\beta = 0$ logo $cos\alpha = cos\beta$;
$$\Rightarrow 1 + cos\alpha + cos\beta = 0$$
$$\Rightarrow 1 + cos\alpha + cos\alpha = 0$$
$$\Rightarrow 1 + 2cos\alpha = 0$$
$$\Rightarrow cos\alpha = -\frac{1}{2};$$
logo $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$. Se $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ então $\beta = \frac{4\pi}{3}$.

Com isso conclui-se a demonstração, pois as distâncias entre os módulos dos complexos são iguais e que os ângulos entre os complexos z_1, z_2 e z_3 tem mesma medida, e todas iguais a 120^o.

5.11 Resolução de Equações Binômias e Trinômias

5.11.1 Equações Binômias

Chama-se *equação binômia* toda equação redutível à forma

$$ax^n + b = 0.$$

Onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ e n $\in \mathbb{N}$.

Para resolver uma equação binômia basta calcular o valor de x^n e aplicar a definição de radiciação em $\mathbb{C}$. Isto é,

$$ax^n + b = 0 \Leftrightarrow x^n = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}.$$

Observe que a equação binômia admite n raízes que são os valores $\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.

Exemplo 5.4 *Resolver a equação $3x^6 + 192 = 0$.*

Temos
$x = \sqrt[6]{-\frac{192}{3}}$
$x = \sqrt[6]{-64}$.
Fazendo $z = -64$, vem $\rho = |z| = 64$ e $\theta = \pi$.
Logo, $z_n = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

Então

$$
\begin{aligned}
&z_k = \sqrt[6]{64}\left(cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + isen\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\\
&= 2\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)\right], \textit{ onde } k = 0,1,\ldots,5. \textit{ Assim,}\\
&k = 0 \Rightarrow z_o = 2\cdot\left(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i\\
&k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\cdot\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) = 2i\\
&k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\cdot\left(cos\frac{5\pi}{6} + isen\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i\\
&k = 3 \Rightarrow z_3 = 2\cdot\left(cos\frac{7\pi}{6} + isen\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-i\\
&k = 4 \Rightarrow z_4 = 2\cdot\left(cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right) = -2i\\
&k = 5 \Rightarrow z_5 = 2\cdot\left(cos\frac{11\pi}{6} + isen\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}-i
\end{aligned}
$$

Portanto, o conjunto solução da equação $3x^6 + 192 = 0$ *é*

$S = \{\sqrt{3}+i, 2i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i, -2i, \sqrt{3}-i\}$, *que pode ser representado pelos vértices do hexágono regular Figura (5.15).*

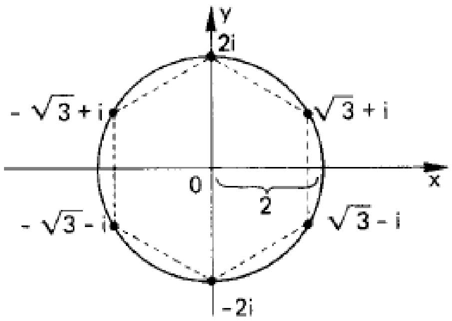


Figura 5.15: *Representação das Raízes da Equação* $3x^6 + 192 = 0$.

5.11.2 Equações Trinômias

Chama-se *equação trinômia* toda equação redutível à forma

$$ax^{2n} + b^n + c = 0.$$

Onde a, b, $c \in \mathbb{C}$, e $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para resolver uma equação trinômia deve-se atribuir $x^n = y$ e obtém-se y_1 e y_2 raízes da equação $ay^2 + by + c = 0$ e finalmente, recai-se nas equações binomiais $x^n = y_1$ e $x^n = y_2$ determinando as $2n$ raízes.

Exemplo 5.5 *Resolver a equação* $x^6+7x^3-8=0$.

Fazendo $x^3=y$, *resulta* $y^2+7y-8=0$.

Para $y^2+7y-8=0$, *temos*

$(y-1)\cdot(y+8)=0 \Rightarrow y_1=1$ *e* $y_2=-8$.

Resolvendo a equação binômia $x^3=y_1=1$*:*

$x^3=1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1}$.

Logo $z=1$ *tem módulo* 1 *e argumento* 0. *Segue que,*

$z_k=1\cdot\left(cos\dfrac{2k\pi}{3}+isen\dfrac{2k\pi}{3}\right)$, *com* $k=0,1,2$. *Assim,*

$k=0 \Rightarrow z_0=cos0+isen0=1$.

$k=1 \Rightarrow z_1=cos\dfrac{2\pi}{3}+isen\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$k=2 \Rightarrow z_1=cos\dfrac{4\pi}{3}+isen\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Resolvendo a equação binômia $x^3=y_2=-8$*:*

$x^3=-8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-8}$.

Logo $z=-8$ *tem módulo* 8 *e argumento* π. *Segue que,*

$z_k=\sqrt[3]{8}\cdot\left[cos\left(\dfrac{\pi+2k\pi}{3}\right)+isen\left(\dfrac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right]$, *com* $k=0,1,2$. *Assim,*

$k=0 \Rightarrow z_0=2\cdot\left(cos\dfrac{\pi}{3}+isen\dfrac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$.

$k=1 \Rightarrow z_1=2\cdot(cos\pi+isen\pi)=-2$.

$k=2 \Rightarrow z_2=2\cdot\left(cos\dfrac{5\pi}{3}+isen\dfrac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}$.

Portanto, o conjunto solução da equação trinômia $x^6+7x^3-8=0$ *é dado por*
$S=\{1,-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2},1+i\sqrt{3},2,1-i\sqrt{3}\}$.

CAPÍTULO 6

Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo apresentar uma abordagem para tema dos números complexos para o Ensino Médio, desmistificando a ideia que os números complexos servem apenas para resolução de equações quadráticas com discriminante menor que zero, mas sim para uma infinidade de situações, que vão desde da resolução de equações cúbicas e quárticas até a representação da equação da Lemniscata.

Conceitos e propriedades aritméticas foram utilizados na definição das operações com números complexos e apresenta uma forma de transição entre números reais, complexos e Trigonometria. De maneira geral, a forma trigonométrica simplifica as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação nos números complexos.

Outra excelente utilização dos números complexos é na Geometria Analítica, pois sugere uma forma de apresentar as equações cartesianas da parábola, elipse e hipérbole.

Com a conclusão deste trabalho verifiquei a importância desse conteúdo para o Ensino Médio com reflexos no Ensino Superior, mesmo neste momento onde as mudanças na grade curricular com advento do BNCC que faz a retirada desse conteúdo Números Complexos do Ensino Médio, causando uma perda na aprendizagem dos alunos no ensino da Matemática.

Espera-se que este trabalho seja uma fonte de pesquisa para professores e alunos do Ensino Médio, que tenham interesse em dar uma nova abordagem no ensino e/ou estudo dos números complexos bem como apresentar outras aplicações, além das que são apresentadas na maioria dos livros do Ensino Médio no Brasil.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, S. P. **Números Complexos Para o Ensino Médio: uma Abordagem com História, Conceitos Básicos e Aplicações.** Belo Horizonte (Dissertação de mestrado), 2009.

[2] ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicacões**. LTC, Rio de Janeiro, 2000.

[3] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1974.

[4] BRUM, M. L. S. **A distribuição do Ensino dos Números Complexos nas Séries do Ensino Médio: uma Proposta na Contramão do Ensino Tradicional.** Juiz de Fora (Dissertação de mestrado), 2015.

[5] CHAGAS, J. S. B. **A Relevâcia do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio na Opinião dos Professores de Matemática**. Campos dos Goytacazes - RJ (Dissertação de mestrado), 2013.

[6] CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. Mcgraw-Hill, São Paulo, 1975.

[7] DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. Editora Ática, São Paulo, 2004.

[8] DE FRANÇA JÚNIOR, W. L. **Números Complexos: uma Proposta de Ensino.** Niterói - RJ (Dissertação de mestrado), 2013.

[9] DIAS, M. A. **Representação Geométrica dos Números Complexos: Aplicações e Possibilidades Didáticas.** Santo Andre (Dissertação de mestrado), 2013.

[10] DO CARMO, M. P. **Trigonometria e Números Complexos**. SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[11] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, volume 6**. Atual Editora, São Paulo, 1977.

[12] IEZZI, G. **Matemática Ciência e Aplicação, volume 1**. Atual Editora, São Paulo, 2004.

[13] LIMA., E. L. **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio.** IMPA/SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[14] LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio volume 1 e 3**. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[15] MILIES, C. P. **A Emergência dos Números Complexos Revista do Professor de Matemática Número 24**. SBM, Rio de Janeiro, 1993.

[16] NETO, R. V. **O Ensino de Números Complexos - Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática ISSN 2178 034X.** SBM, Curitiba, 2013.

[17] PAIVA, M. **Matemática - Ensino Médio volume 2 e 3**. Moderna, São Paulo, 2009.

[18] REIS NETO, R. M. **Alternativa Metodológica para Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: uma Experiência com Professores e Alunos**. Belo Horizonte (Dissertação de mestrado), 2009.