Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Probabilidade e Aplicação à Genética

Thiago dos Santos Vieira

Goiânia

2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Thiago dos Santos Vieira

Título do trabalho: Probabilidade e Aplicação à Genética

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Thiago dos Santos Vieira

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Ewerton R. V.

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 09 / 07 /2019

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Thiago dos Santos Vieira

Probabilidade e Aplicação à Genética

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira

Goiânia

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

vieira, Thiago dos Santos Vieira
Probabilidade e Aplicação à Genética [manuscrito] / Thiago dos Santos Vieira vieira. - 2019.
XCII, 92 f.: il.

Orientador: Prof. Ewerton Rocha Vieira vieira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2019.
Bibliografia.
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Análise Combinatória . 2. Probabilidade. 3. Paradoxo da Probabilidade. 4. Genética. I. vieira, Ewerton Rocha Vieira, orient. II. Título.

CDU 519.6

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **02** da sessão de Defesa de dissertação de Thiago dos Santos Vieira que confere o título de Mestre em Matemática em rede nacional Profmat.

Aos vinte e oito dias do mês de junho, a partir das 16:00h, na sala do Laboratório de Informática do ME, realizou-se a sessão pública de Defesa de dissertação intitulada **"Probabilidade e Aplicação à Genética"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador Professor Doutor Ewerton Rocha Vieira - IME-UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Thaynara Ariely de Lima - IME/UFG e membro titular externo; Professora Doutora Dahisy Valadão de Souza Lime - UFABC, **cuja participação ocorreu através de videoconferência.** Durante a argüição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do **trabalho**. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da dissertação tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Ewerton Rocha Vieira, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e oito dias do mês de junho de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Dahisy Valadão de Souza Lima**, **Usuário Externo**, em 28/06/2019, às 14:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ewerton Rocha Vieira**, **Professor do Magistério Superior**, em 28/06/2019, às 17:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Thaynara Arielly De Lima**, **Professora do Magistério Superior**, em 28/06/2019, às 17:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0714394** e o código CRC **A93AADFA**.

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus primeiramente, a minha esposa que me suportou durante todo o tempo de *stress*, aos meus colegas de classe, aos meus professores, a meu coordenador e a todos os amigos que me ajudaram de alguma forma, quer seja em correção ou sugestões nele.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, à Universidade Federal de Goiás pela oportunidade, a cada professor que se dedicou muito para poder fazer um curso de excelência para todos nós, a cada colega de classe, uma verdadeira família de amigos, aos amigos que me ajudaram em cada parte deste trabalho e, por fim, a minha amada esposa.

Resumo

Trabalho de probabilidade com base inicial de análise combinatória em linguagem simplificada, haja vista que é voltada para professores não matemáticos. Damos uma aplicação à genética do Ensino Médio para supri a carência de trabalhos científicos com esta ênfase.

Palavras-chave

Análise Combinatória, Probabilidade, paradoxo da probabilidade, Genética.

Abstract

Probability work with an initial base of combinatorial analysis in simplified language, since it is aimed at non-mathematical teachers. We give an application to the genetics of High School to fill the lack of scientific work with this emphasis.

Keywords

Combinatorial Analysis, Probability, Probability Paradox, Genetics.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O estudo da probabilidade tem, via de regra, o intuito de desenvolver no estudante a faculdade de aprimoramento na tomada de decisões do cotidiano. Isso porque todas as pessoas, em todos os momentos (consciente ou inconscientemente, com estudo formal ou não) aplicam instintivamente cálculos probabilísticos automáticos como resultado da própria percepção da realidade e de como o cérebro as interpreta.

Segundo Batanero et all (2016)[1], para uma sociedade funcionar adequadamente, os cidadãos precisam adquirir estratégias e formas de raciocínio que os ajudem a tomar decisões adequadas em situações cotidianas e profissionais em que o acaso está presente. Defendendo esse pensamento, os educadores têm incluído cada vez mais a probabilidade e a estatística entre os conteúdos que deverão ter atenção especial na educação básica. É notório que o desenvolvimento da competência, análise crítica e argumentação são privilegiadas pelos conteúdos probabilísticos.

A proposta inicial, neste trabalho, é apresentar a solução de algumas questões interessantes de probabilidade, seja pelos seus aspectos históricos, seja pelas peculiaridades, controvérsias ou paradoxos envolvidos.

O trabalho tem início apresentando no capítulo 1 um estudo sobre os conceitos básicos de contagem, permutações, arranjos e combinações. No capítulo 2 abordar-se-á história da probabilidade, como tudo começou e como esses cálculos se formalizaram. No capítulo 3 conceitos de probabilidade condicional, independência de eventos e eventos exclusivos. No capítulo 4 apresentar-se-á problemas de paradoxos probabilísticos. No capítulo 5 cálculos interessantes no campo da probabilidade.

Além disso, buscou-se o aproveitamento de todo o aparato de recursos já utilizados nos diversos ramos da Matemática para ser aplicado ao estudo da Genética como ferramenta de suporte e auxílio para os professores desta área. Assim sendo, ambas as disciplinas - Probabilidade e Genética - serão sistematizadas mais facilmente pelo educando e mais facilmente assimiladas pelo educado. O intuito é paramentar o docente e proporcionar ao aluno do ensino médio o acesso à informação a partir de algo que ele já conhece e está, ao menos, parcialmente familiarizado com a Probabilidade.

2 Análise Combinatória

Neste capítulo, serão introduzidos conceitos relativos à análise combinatória, que serão importantes para melhor se compreensão dos conceitos de probabilidade descritos neste trabalho. Serão abordados conceitos sobre permutações simples, com repetição e circulares; arranjos e combinações simples e completas.

Cada conteúdo será seguido de um exemplo e um problema que facilite a compreensão, iniciando-se pelos princípios de contagem e suas implicações aditivas e multiplicativas. Será dissertado também sobre o Princípio de Dirichlet, também conhecido como Princípio das Gavetas ou Princípio da Casa de Pombos e sobre o Principio da Preferência. Será mostrada, além disso, a importância de cada conceito e seus raciocínios no ensino e na resolução de problemas que envolvem probabilidade.

Toda construção deste capítulo será baseada nas referências [2], [3] ,[4], [5], [6].

2.1 Princípio Básico de Contagem

Para melhor se entender estes conceitos e, assim, proporcionar uma maior compreensão da análise combinatória, abordar-se-á, neste capítulo, compreensão que, juntamente com a introdução apresentada, vão possibilitar o alicerce necessário para a concepção satisfatória da análise combinatória.

2.1.1 Princípio Aditivo

Proposição 1.[2] Princípio Aditivo: Considerando A e B como conjuntos finitos disjuntos, ou seja, com a intersecção vazia, número de elementos da união é dada por: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, onde:

$n(A \cup B)$ número de elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B;

$n(A)$ é número de elementos do conjunto A;

$n(B)$ é número de elementos do conjunto B.

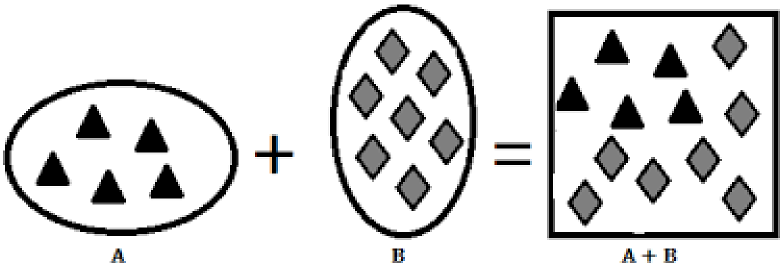


Figura 1: Princípio Aditivo

Exemplo 1: Suponha que, em uma determinada cidade, há estádios de futebol e ginásios desportivos nos quais se disputam campeonatos regionais. Ao se avançarem para a fase final, os jogos entram no estilo mata-mata (fase que em cada jogo o perdedor é eliminado da competição). Os jogos ocorrem em 3 ginásios diferentes, definindo as finais do campeonato de futsal e 4 jogos em estádios diferentes que também irão definir as finais do campeonato estadual de futebol de campo. Todos ocorrerão no mesmo dia, sábado, e no mesmo horário e só existe dinheiro para comprar apenas um ingresso dos 7 jogos possíveis. Quantos são as possibilidades de escolha de jogos que podem ser assistidos?

Solução: Como só existe dinheiro para um ingresso e os jogos são no mesmo horário, ou assiste-se ao jogo 1 de futsal; ou ao jogo 2 de futsal; ou ao jogo 3 de futsal; ou ao jogo 1 de campo; ou ao jogo 2 de campo; ou ao jogo 3 de campo; ou ao jogo 4 de campo. Observe que entre cada evento aparece a palavra "ou", ou escolhe jogo de futsal 1; ou jogo de futsal 2 e assim por diante. Desta forma, o problema é dividido em vários casos, e, como é possível observar que os conjuntos tem elementos diferentes e não possuem um elemento em comum (intersecção e vazia), logo, são conjuntos disjuntos.

Assim, pelo princípio aditivo, tem-se que:

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, $(A \cap B = \emptyset)$, com respectivamente, f e c elementos, então $A \cup B$ possui $f + c$ elementos:

$A = \{f | f$ é um jogo de futsal$\} = \{f_1, f_2, f_3\}$;

$B = \{c | c$ é um jogo de futebol de campo$\} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$;

Logo, $A \cup B = \{f_1, f_2, f_3, c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Assim, ao todo são $3 + 4 = 7$ jogos possíveis.

2.1.2 Princípio Multiplicativo

O princípio básico da contagem será fundamental para todo o trabalho, uma vez que ele, além de ser a idéia inicial para compreender a análise combinatória, vai ajudar a criar o raciocínio necessário para o estudo de probabilidade que se fará.

Dito de forma simples, ele diz que, se um experimento pode levar a qualquer um de $\boldsymbol{m}$ possíveis resultados e um outro experimento qualquer pode ter $\boldsymbol{n}$ possíveis resultados, então os dois experimentos possuem mn resultados possíveis.

Proposição 2.[2] Princípio Multiplicativo: Suponha-se a realização de dois experimentos: se o experimento pode gerar m resultados diferentes e se, para cada um dos resultados do experimento 1 houver n resultados possíveis para o experimento 2, então os dois experimentos possuem conjuntamente mn diferentes resultados possíveis.

Demonstração do princípio:O princípio básico pode ser demonstrado ao serem enumerados todos os possíveis resultados dos dois experimentos. Isto é:

$$\begin{array}{cccc} (1{,}1), & (1{,}2), & \ldots, & (1{,}n) \\ (2{,}1), & (2{,}2), & \ldots, & (2{,}n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (m{,}1), & (m{,}2), & \ldots, & (m{,}n) \end{array}$$

Onde é dito que o resultado é (i, j) se o Experimento 1 levar ao seu i-ésimo resultado possível e o Experimento 2 levar ao seu j-ésimo resultado possível. Portanto, o conjunto dos resultados possíveis consiste de m linhas, cada um contendo n elementos. Isso demonstra o resultado.

Exemplo 2: Supondo-se agora que o dinheiro seja suficiente para dois ingressos e que os jogos agora acontecem em horários diferentes, Quantos são as possibilidades de escolha de jogos que podem ser assistidos, sendo um jogo de futsal e um jogo de futebol de campo?

Diferente do primeiro exemplo, neste tem-se de tomar duas decisões combinadas: quais jogos serão assistidos, tanto de futsal quanto de futebol de campo, 1º decisão:Escolher um jogo de futsal dos três possíveis. 2º decisão: Escolher um jogo de futebol de campo das quatro opções possíveis.

Enumerações possíveis:

1º) jogo de futsal 1 e jogo de futebol campo 1;

2º) jogo de futsal 1 e jogo de futebol campo 2;

3º) jogo de futsal 1 e jogo de futebol campo 3;

4º) jogo de futsal 1 e jogo de futebol campo 4;

5º) jogo de futsal 2 e jogo de futebol campo 1;

6º) jogo de futsal 2 e jogo de futebol campo 2;

7º) jogo de futsal 2 e jogo de futebol campo 3;

8º) jogo de futsal 2 e jogo de futebol campo 4;

9º) jogo de futsal 3 e jogo de futebol campo 1;

10º) jogo de futsal 3 e jogo de futebol campo 2;

11º) jogo de futsal 3 e jogo de futebol campo 3;

12º) jogo de futsal 3 e jogo de futebol campo 4.

Exemplo 3: Em uma pizzaria, existem 15 sabores de pizza (sabor 1, sabor 2,. . . , sabor 15) e três bordas de recheio diferentes. Levando em conta que cada pizza será formada de apenas um sabor e terá apenas um tipo de borda ou nenhuma borda (borda 1, borda 2, borda 3, e sem borda), quantas formas diferentes de pizza são possíveis de serem formadas nesta pizzaria?

Solução : Para as bordas há 4 tipos possíveis (as três citadas e nenhuma borda) Para os sabores há os 15 sabores citados no texto. Logo, aplicando a idéia do principio de contagem, neste caso será usado o princípio multiplicativo. Portanto, têm-se $4 \cdot 15 = 60$ possibilidades de pizzas diferentes.

Exemplo 4: Em outra pizzaria tem-se 4 sabores de recheio (A, B, C e D) e 3 sabores de bordas (1, 2 e 3), listando todas as possibilidades, tem-se o seguinte:

(A,1)	(A,2)	(A,3)
(B,1)	(B,2)	(B,3)
(C,1)	(C,2)	(C,3)
(D,1)	(D,2)	(D,3)

Solução 1: Pela contagem simples na tabela das possíveis combinações temos 12 resultados.

Solução 2: Pelo princípio básico da contagem temos $4 \cdot 3 = 12$ resultados possíveis. A mesma ideia se aplica quando existe mais de dois experimentos.

Generalização *do princípio básico da contagem multiplicativo.* Se r experimentos são tais que o primeiro experimento pode levar a qualquer um de n_1 resultados possíveis e se, para cada um desses n_1 resultados, houver n_2 resultados possíveis para o segundo experimento e se, para cada resultado, um dos dois primeiros experimentos houver n_3 resultados possíveis para o terceiro experimento e se..., então haverá um total de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots, n_r$ resultados possíveis para os r experimentos.

Exemplo 5 Na mesma pizzaria do exemplo anterior, agora, além de escolher entre os 4 sabores de recheio e os 3 de borda, tem-se 8 opções de refrigerante e mais 3 de sobremesa. De quantas maneiras pode-se formar este lanche que é composto de uma pizza com borda, um refrigerante e uma sobremesa?
Solução : Pelo princípio multiplicativo e a sua generalização que acabou de ser demonstrado, tem-se $4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 = 288$ resultados de lanches possíveis.

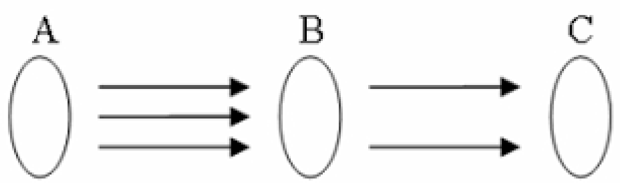


Figura 2: Princípio Multiplicativo

Fonte da figura 2,$http://www.icarito.cl/2012/07/101-9567-9-octavo-basico-principio-multiplicativo-y-diagrama-del-arbol.shtml$

2.1.3 Princípio de Dirichlet, Princípio das Gavetas ou Princípio da Casa de Pombos

O princípio a ser estudado agora foi conceituado pelo alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático, que o enunciou da seguinte forma:

> “Seja dada uma casa de pombos com n buracos e suponha que haja m pombos querendo ocupá-los. Se $m > n$, então algum buraco deverá ser ocupado por mais de um pombo.”[2].

O princípio apelidado como casa dos pombos tem um raciocínio que, de início, parece bem óbvio. Imagine-se o seguinte: têm-se oito casas de pombos e dez pombos. É razoável pensar que se terá, em uma das casas, mais de um pombo, uma vez que todos os pombos precisam estar abrigados. Neste mesmo sentido, tem-se o exemplo das gavetas: suponha-se que têm-se dez camisetas e apenas nove gavetas. É razoável pensar que, em pelo menos uma das gavetas, vai haver mais de uma camiseta, uma vez que todas as camisetas precisam estar em uma gaveta.

O que parece ser extremamente simples, quando se têm enunciados muito grandes, pode confundir bastante a mente. O que será feito é a criação de uma forma eficaz de raciocínio em que seja possível relacionar as variáveis que apareceram nos problemas com os pombos ou camisetas, e a outra variável com a casa de pombos ou com as gavetas, sempre levando em conta que a casa de pombos deve ser maior do que o número de pombos e que o número de gavetas deve ser menor do que o número de camisetas.

Exemplo 6: Qual o número mínimo de jogadores de futebol que devem ser reunidos para garantir que, ao menos dois jogadores jogue na mesma posição (levando-se em conta que no campo temos 11 posições distintas)?

Solução: Deve-se escolher 12 jogadores.

Justificativa: Para este problema, tem-se um típico problema de casa dos pombos.

Casas: Possível posição ocupada pelo jogador (11);

Pombos: Jogadores mínimos (12);

Relação: Associa-se cada jogador a uma posição diferente.

Pelo Princípio da Casa de Pombos, como têm-se 11 casas e 12 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 2 pombos. Ou seja, uma das posições terá pelo menos dois jogadores que a ocupam.

Exemplo 7: Uma gaveta contém 4 tipos de meias (pretas, azuis, verdes e amarelas). Qual o número mínimo de meias que devem-se retirar da gaveta para se garantir que se tenham duas meias da mesma cor?

Solução: Devem-se retirar 5 meias.

Justificativa: Para este problema, tem-se um típico problema de casa dos pombos:

Casas: Gaveta;

Pombos: Meias (5);

Relação: Associa-se a cada meia a gaveta de sua cor.

Pelo Princípio da Casa de Pombos, como se têm 4 casas e 5 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 2 pombos. Ou seja, uma das caixas conterá, pelo menos, duas meias. Dessa forma, pelos menos duas meias retiradas têm a mesma cor.

Teorema 1. *(Princípio da Casa de Pombos:) Se tiverem $n+1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter dois ou mais pombos.*

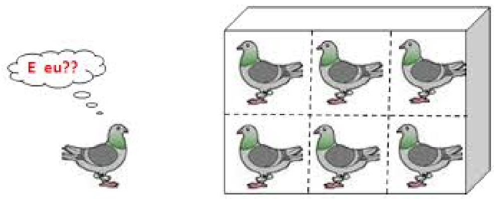


Figura 3: Princípio da casa de pombos

[1]

[1] Fonte da figura 3, $http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_0 02-principio-das-casas-dos-pombos/$

2.1.4 Princípio da Preferência

Se em um experimento que é realizado em diversas etapas, uma ou mais dessas etapas apresentarem alguma restrição, dar-se-á preferência de escolha às possibilidades dessas etapas com restrição para, somente após isso, serem escolhidas as possibilidades das etapas que não apresentam restrição[2].

Exemplo 8: Quantos números pares podem ser formados com três algarismos?

O problema em questão tem duas restrições, a sua primeira restrição seria, um número contendo três algarismos em que o algarismo zero não pode ser considerado como pertencente a ela. Assim sendo, em um universo que se tem os algarismos $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ só existem nove possibilidades para a escolha do primeiro algarismo.

A segunda restrição que se encontra no problema é que o número em questão tenha de ser um numero par. Desse modo, por conceito, para que um número seja par, ele deve terminar por um destes algarismos $\{0, 2, 4, 6, \ 8\}$. Neste caso, há cinco opções e, pelo princípio multiplicativo, têm-se: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ possibilidades de formar números com três algarismos que sejam pares.

Logo, o **princípio da preferência** instrui a começar a contagem levando em conta todas as restrição do problema em estudo. O que faz toda a diferença na construção do raciocínio para a resolução de problemas envolvendo probabilidade.

Definição 1. [2]*(Princípio da Preferência): A contagem deve começar pelas restrições impostas a ele.*

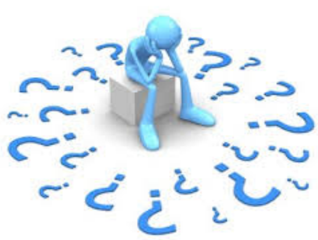


Figura 4: Princípio da Preferência

[2]

[2]Fonte da figura 4, *https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/375640-homem-negocios*

2.2 Permutações

É importante salientar que no decorrer deste trabalho "n" sempre será igual ao número de objetos do conjunto, ao número total de letras ou a soma de números totais de conjuntos: "n" = "n_1" + "n_2" + "n_3", $\cdots$, "n_m" onde "m" é o número de conjuntos existentes no problema.

Quantos possíveis arranjos das letras **(T, H, I)** podem ser formados?

Em uma contagem direta, percebe-se que são seis possibilidades, que serão abordadas a seguir: **(THI, TIH, HIT, HTI, IHT, ITH)** cada combinação é conhecida como uma permutação.

Permutar nada mais é do que trocar algarismos ou objetos e verificar quantas possibilidades de casos diferentes aparecem. No exemplo contendo uma palavra com três letras geraram-se seis permutações possíveis, podendo ser perfeitamente descrita por meio da seguinte fórmula

$$P_n = n! \tag{1}$$

Proposição 3.(Permutações) Considere A como um conjunto com n elementos distintos. Estão as formas de organizar os n elementos de A é igual a $n!$.

Se voltar aos conceitos anteriormente estudados de princípios básico de contagem, é possível perceber que esta questão poderia ser muito bem resolvida pelo princípio multiplicativo, levando em conta que se tenham três letras possíveis e precisa-se formar uma palavra com três letras distintas. Para a primeira letra, há três possibilidades, para a segunda letra, duas possibilidades e para a terceira, apenas a letra que sobrou ficando assim: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades ou permutações possíveis.

Suponha-se agora que se tenha uma palavra com "n" letras distintas ou um conjunto com "m" objetos distintos. É razoável pensar que para uma palavra com "n"distintas letras se tenham "n" possibilidades de escolha para a primeira letra, "$(n-1)$" possibilidades de escolha para segunda e assim por diante, ficando assim: $n(n-1) \cdot (n-2), \ldots, 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ ermutações diferentes de n objetos.

Exemplo 9: Quantas permutações são possíveis formar com o nome **(THIAGO)**?

Solução: Neste caso nosso "n" é 6,pois é o número total de letras do nome

(THIAGO), ficando igual a 6! ou $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ possibilidades.

Exemplo 10: Em uma corrida com 10 atletas, quantas diferentes ordens de classificações são possíveis?

Solução: Neste caso, tem-se "n" igual a 10, pois é o número total de atletas, ficando $10! = 3.628.800$ formas possíveis de classificação nesta corrida.

Exemplo 11: Joãozinho tem 12 livros de matemática, 5 livros de química e 7 de física:

a) De quantas formas Joãozinho pode ordenar esses livros?

b) De quantas formas Joãozinho pode ordenar os livros em uma prateleira de forma que os livros de mesma matéria permaneçam juntos.

Solução a) Neste caso, o "n" será igual à soma dos livros de matemática, química e física, ou seja, 24 livros, e, consequentemente, 24! permutações possíveis.

Solução b) Neste caso, dividem-se em casos:

Matemática: "n_1" $= 12$ ou seja 12! permutações possíveis para os livros de matemática;

Química: "n_2" $= 5$ ou seja 5! permutações possíveis entre os livros de química;

Física "n_3" $= 7$ ou seja 7! permutações possíveis entre os livros de física.

Ainda há de se considerar o caso da ordem em que os livros serão distribuídos na prateleira. Como se têm: (matemática, física e química), o "n_4" $= 3$, ou seja, 3!. Na resolução, usa-se o princípio multiplicativo ficando da seguinte forma:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 12! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 3! \tag{2}$$

2.2.1 Permutações com Repetição

Para se entender melhor o novo conceito, vale começar com um problema aparentemente simples, mas que, por enquanto, ainda não se fornecem ferramentas suficientes para que ele seja resolvido. Por exemplo, quantos possíveis anagramas podem ser formados a partir da palavra OVO?

Na mesma ideia da explicação inicial de permutações, escrever-se-ão agora todos os casos possíveis e diferentes em uma contagem direta. Percebe-se, assim, que se encontram apenas três possibilidades: **(OVO,OOV,VOO)** quando o esperado para este tipo de questão em que "n" $= 3$ seria $3!$. Ou seja, seis possibilidades, o que leva a refletir o porquê desta diferença.

Observa-se que a palavra **OVO** tem duas letras iguais, no caso duas letras "O" o que se conclui que, quando existe repetição de uma letra ou de um elemento de um conjunto, o caso anteriormente estudado não se aplica mais ou, pelo menos, não pode ser aplicado da mesma forma. Vale pensar em uma fórmula para corrigir este erro de repetição.

Observa-se que o resultado esperado era igual a seis possibilidades pois "n" $= 3$ geraria um resultado igual a $3! = 6$ possibilidades. Porém, ao descrever os casos possíveis, só se encontraram três possibilidades, isso ocorre porque, ao permutar as duas letras "O" geram-se exatamente as mesmas permutações. Logo, esse erro pode ser corrigido sem perder as ideias iniciais, dividindo "n" pela repetição encontrada, que será chamada de α.

$$\frac{n!}{\alpha!} = \frac{3!}{2!} = 3. \tag{3}$$

Exemplo 11: Quantas são as permutações possíveis da palavra PARALELEPÍPEDO?

Solução: Ainda considerando "n" como sendo o número total de letras ou de elementos do conjunto, neste caso "n" $= 14$ o que daria um resultado de $14!$ Caso todos os elementos fossem distintos, porém, como fora observado, faz-se necessário tirar as repetições. Neste caso, há três letras "P", duas letras "A", duas letras "L" e três letras "E". Ou seja, quatros letras que se repetem. Para se chegar a um resultado perfeito, é necessário tirar o erro de cada letra que seria a permutação delas entre elas mesmas: três letras"P" resulta em $3!$ para se retirar a repetição da letra "P". O mesmo vai acontecer com as letras "A", "L" e "E", ficando respetivamente $2!$, $2!, 3!$. Para se calcular o resultado desta permutação, calcula-se a permutação normal e dividi-se por cada erro encontrado com as repetições, ficando assim:

$$\frac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}. \tag{4}$$

Deste modo, pode-se entender de forma razoável que permutação com repetição é a permutação simples dividida pelos erros ou repetições encontradas. Ou seja, "n"

continua valendo, porém, agora precisam-se observar as repetições encontradas, colocá-las em fatorial e dividi-las por “$n!$”. Para melhor se compreender a definição a seguir, cada erro será simbolizado por uma letra grega, ou seja, se o elemento repetir 10 vezes para aquele elemento, tem-se um 10! na divisão, se outro repetir 5 vezes, tem-se um 5! na divisão e assim segue.

Proposição 4.(Permutação com Objetos Repetidos) A permutação de n elementos com $\alpha, \beta, ..., \lambda$ deles repetidos resulta em permutação de n objetos divididos por cada repetição fatorial, ficando representado pela seguinte fórmula:

$$P^{n}_{\alpha,\beta,\cdots,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!.,\cdots,\lambda!}.$$

2.2.2 Permutações Circulares

Para melhor entender o que seriam as permutações circulares, usar-se-ão alguns desenhos antes de defini-las. De quantas formas distintas podem-se distribuir as caixas com as cores (verde, vermelho, azul e preto) ao redor dos lados de um retângulo de forma que cada caixa de cores só possa ocupar um lado do retângulo. Note-se que, de acordo com que já foi abordado sobre permutações, tem-se “n” $= 4$ logo, como os elementos são distintos, deveria ficar 4! que é um caso de permutação circular. Verifica-se no desenho abaixo quem esta à esquerda e à direita de cada cor.

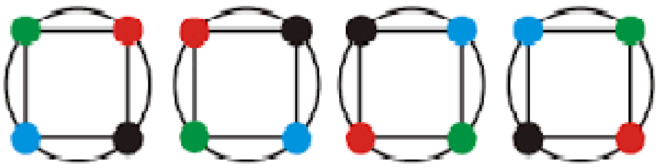


Figura 5: Permutação Circular

[3]

Observe que, independente da cor que seja escolhida nestas figuras, sempre terão os mesmos elementos tanto à esquerda quanto à direita. Portanto, para tirar o erro de

[3]Fonte da figura 5, *https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/analise-combinatoria-e-probabilidade/permutacoes/permutacoes-simples*

permutações circulares é necessário dividir pelo número de figuras igualmente formadas, neste caso ficaria $4!/4$. Porém, em uma figura com cinco elementos que também funciona de forma circular, ficandp-se $5!/5$, logo, em uma figura com n elementos ter-se-á $n!/n$ verifica-se que dividir $n!/n$ é o mesmo que:

$$PC_n = \frac{n.(n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

Proposição 5(Permutação Circular) O número PC_n de permutações circulares de n objetos distintos é dado por: $PC_n = (n-1)!$

Exemplo 12: De quantas formas distintas pode-se distribuir 10 pessoas em uma roda?

Solução: Como se observou-se anteriormente ficará:

$$PC_{10} = \frac{10.(9)!}{10} = (9)!$$

2.3 Arranjos

Começa-se a explicação sobre o que é arranjo com o seguinte exemplo já mencionado anteriormente neste trabalho.

Exemplo 13: Em uma corrida com 10 atletas, quantas diferentes ordens de classificações são possíveis, levando-se em conta que não existe empate nas posições?

Solução: Neste caso, "n" $= 10$ ficando $10! = 3.628.800$ formas possíveis de classificação que pode-se obter nesta corrida.

Agora, levando-se em conta a mesma competição, contando com os mesmos 10 atletas, quantas formas diferentes de vencedores podem-se ter?

Solução: Como se têm apenas 10 atletas e não existe nenhuma restrição, a conclusão é que qualquer um dos 10 atletas poderia ser o ganhador da corrida. Logo, tem-se 10 formas diferentes de ter um vencedor nesta corrida.

Agora, levando-se em conta o mesmo problema, de quantas maneiras as três primeiras posições poderiam ser formadas?

Solução: Para a primeira posição, tem-se que os dez atletas podem ganhar. Para a segunda posição, quaisquer uns dos nove atletas podem chegar, uma vez que um dos dez atletas já ganhou. Logo, ele não pode ganhar como primeiro e como segundo. O mesmo raciocínio se aplica para a terceira vaga, ficando apenas com oito possibilidades de atletas para esta posição. Pelo princípio multiplicativo tem-se:

$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ formas diferentes de formar este pódio.

Chama-se de arranjo os agrupamentos formados em que a ordem dos elementos pode ser mudada e os elementos escolhidos também podem ser diferentes, como no caso anterior, poderia se mudar tanto a ordem de quem fica (em primeiro segundo e terceiro) como os atletas que ficam em primeiro segundo e terceiro.

Definição 2 (Arranjos) Os arranjos são formas de agrupamento em que, além de mudar a ordem dos elementos escolhidos, podem-se mudar os próprios elementos escolhidos.

Um conceito muito importante a ser observado quando se estudam arranjos e combinações é se a ordem sequencial dos elementos influencia como uma nova sequência. No arranjo, a ordem dos elementos faz uma nova sequência e na combinação isso não ocorre. Como no caso do último exemplo, as ordens de chegada formam arranjos diferentes, dependendo da posição de cada atleta.

Exemplo 14: Dar-se-á nome para três atletas, quais sejam: (Pedro, Thiago e João na corrida) mesmo contando com os dez atletas tem-se a informação que estes três atletas foram ao pódio da corrida. Sendo assim, os seguintes casos podem ter acontecido:

1º Colocado Thiago, 2º colocado Pedro e 3º colocado João. Como foi falado anteriormente, em um arranjo, podem-se mudar as posições e, de fato, muda-se a idéia do pódio; em outro caso, por exemplo, tem-se 1º colocado Pedro, 2º colocado João e 3º colocado Thiago.

Nos dois exemplos, há pódios totalmente diferentes. Quando isso acontece, fala-se de arranjo; quando não acontece, fala-se de combinações, um conceito que será estudado com mais detalhes à frente. Aproveitando-se ainda este exemplo, é possível observar a diferença entre os dois conceitos. Se, diferente de uma corrida, fosse um sorteio com dez pessoas, em que os três primeiros sorteado ganhariam uma viagem para Paris. Suponha-se, nesse caso, que o primeiro sorteado foi Thiago, seguido de Pedro e João. Se a pergunta da questão fala de quantas formas distintas podem-se fazer este sorteio para a distribuição destas viagens, é razoável pensar que a sequência Thiago, Pedro e João é a mesma ou gera a mesma premiação para os três que a sequência Pedro João e Thiago. Quando isso acontece, fala-se de uma combinação, não de um arranjo, pois, no arranjo, a ordem importa; na combinação, não. Outro exemplo de arranjo para que o conceito fique claro:

Exemplo 15: O Campeonato Brasileiro de Futebol 2019 será composto por 24 times, entre eles Botafogo, Goiás e Vasco. Responda às questões abaixo de acordo com o texto.

a) Quantas são as possíveis classificações para os seis primeiros colocados?

b) Quantas são as possíveis classificações para os seis primeiros colocados de forma que o Botafogo seja o campeão do torneio?

c) Quantas são as possíveis classificações para os três primeiros colocados de forma que o Goiás esteja entre eles?

d) Quantas são as possíveis classificações para os três primeiros colocados de forma que o Vasco não esteja entre eles?

e) Quantas são as possíveis classificações para os quatro primeiros colocados de forma que o Botafogo e o Goiás estejam entre eles?

f) Quantas são as possíveis classificações para os cinco primeiros colocados de forma que o Botafogo, o Vasco e o Goiás estejam entre eles?

Lembrando-se de que todas as possíveis formas de classificações diferentes deste campeonato seriam igual a 24!.

Solução a): Para a escolha do primeiro colocado do torneio, têm-se 24 possibilidades, para o segundo colocado têm-se 23 possibilidades e para o terceiro, 22 possibilidades e assim sucessivamente. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, têm-se $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 96.909.12$ classificações distintas para os seis primeiros colocadas.

É importante observar que, supondo que existissem n times participando desse campeonato, haveria n possibilidades para o primeiro colocado, $(n-1)$ possibilidades para o segundo colocado e $(n-2)$ possibilidades para o terceiro colocado e assim por diante ate o sexto colocado. Sendo $n.(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)$ o total de possibilidades para os seis primeiros. De um modo ainda mais geral, pode-se imaginar que têm-se n times e que é tangível encontrar as possíveis classificações para os primeiros "p" times. Assim haveriam n possibilidades para o primeiro colocado, $(n-1)$ possibilidades para o segundo colocado, $(n-2)$ possibilidades para o terceiro e assim sucessivamente até se obterem $(n-p+1)$ possibilidades para o $p-simo$ colocado; e, assim: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-p+1)$ possibilidades para os primeiros "p" colocados. Por outro lado, pode-se escrever as expressões: $n.(n-1).(n-2).,\cdots,(n-p+1)$ como:

$$n.(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-p+1)\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)\cdots(1)=n!/(n-p)!$$

Por meio deste raciocínio, pode-se começar a pensar, de uma forma bem razoável, numa maneira de se calcular o número de possibilidades distintas para a escolha de p elementos em um universo dos n possíveis, com $p \leqslant n$ e levando-se em conta o conceito de arranjo que determina que a ordem importe e que não haja repetição entre os elementos escolhidos. Por conceito, simboliza-se esta expressão por An,p e será chamado de arranjo de n elementos tomados p a p, no qual n ainda é o total de elementos e p representa o número de posições ou objetos que se quer arranjar, ficando a seguinte fórmula:

$$An,p=\frac{n!}{(n-p)!}. \tag{5}$$

Definição 3 (Arranjos Simples) São agrupamentos sem repetições em que um grupo se torna diferente do outro pela ordem ou pela natureza dos elementos componentes. Seja A um conjunto com n elementos e p um natural menor ou igual a n. Os arranjos simples p a p dos n elementos de A são os agrupamentos de p elementos distintos que diferem entre si pela natureza ou pela ordem de seus elementos.

Porém, neste trabalho, optar-se-á sempre por raciocínios com o menor número de fórmulas possíveis, uma vez que a idéia de combinatória neste momento é uma introdução para o ensino da probabilidade. Logo, para tomadas de decisões futuras continuar-se-á com os raciocínios de princípio fundamental de contagem.

Solução b) Nesse item, tem-se apenas uma possibilidade para o primeiro colocado deve ser o Botafogo, 23 possibilidades para o segundo e 22 possibilidades para o terceiro. Assim, têm-se $1\cdot 23\cdot 22=506$ classificações distintas.

Solução c) Nesse item, deseja-se que um elemento específico (no caso o Goiás) fixe a posição. Isto é, para melhor se entender que, ou ele será o primeiro, igual ao item "a" ou ele será o segundo colocado, ou ele será ou terceiro colocado. Todos eles vão gerar resultados parecidos pelo princípio aditivo. Caso se somem as possibilidades de ele ser o primeiro mais as possibilidades de ele ser o segundo mais as possibilidades de ele ser o terceiro, têm-se as possibilidades de ele estar entre os três primeiros. $1 \cdot 23 \cdot 22 + 23 \cdot 1 \cdot 22 + 23 \cdot 22 \cdot 1 = 3 \cdot 23 \cdot 22 = 1518$ neste item, como ele alternaria entre as três primeiras posições, é razoável multiplicar por três. Caso estivesse alternando entre as dez primeiras posições, multiplicar-se-ía por 10. Logo, é razoável pensar em multiplicar por m quando um número tem m possibilidades de se localizar. Logo, seria razoável resolver a questão da seguinte forma: $3 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22 = 1518$.

Solução d) Para que determinado elemento não esteja entre os escolhidos, basta-nos escolher todos os três primeiros colocados entre os 23 demais times. Assim, têm-se $23 \cdot 22 \cdot 21 = 10.626$ classificações distintas. Observa-se que se poderiam simplesmente subtrair o resultado obtido no item "c" pelo total de possibilidades. Assim, afirmar-se-ia que ele não está entre os três primeiros.

Solução e) Como se desejou que o Botafogo e o Goiás estivesse entre os 4 primeiros colocados, têm-se 4 possibilidades de escolha para a posição que será ocupada pelo Botafogo e 3 possibilidades de escolha para a posição ocupada pelo Goiás. As duas demais posições entre esses 4 primeiros, excluindo as ocupadas por Botafogo e Goiás, devem ser escolhidas entre os 22 times restantes. Assim, têm-se $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 21 = 5.544$ classificações distintas.

Solução f) De modo muito similar ao item "e", têm-se 5 possibilidades para escolher a posição do Botafogo, 4 possibilidades para escolher a posição do Vasco, 3 possibilidades para escolher a posição do Goiás e 21 e 20 possibilidades, respectivamente, para escolher as duas demais posições entre os 5 primeiros. Assim, têm-se $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 20 = 25.200$ classificações distintas.

2.4 Combinações

2.4.1 Combinações Simples

Voltando-se ao exemplo dos 10 atletas, se a pergunta da questão for quantas formas de classificação entre os dez possíveis levando em conta que não existe empate de posições teria-se, como solução, uma permutação simples entre os atletas, ou seja, $10!$

Como resposta, na mesma questão, pergunta-se quantas são as forma de classificações possíveis para as três primeiras posições? A solução seria um arranjo tomados três a três ($A_{10,3}$) ou, pelo princípio da contagem, teriam-se 10 opções para o primeiro colocado, 9 para o segundo colocado e 8 para o terceiro colocado, uma vez que chegar em primeiro é diferente de chegar em segundo ou em terceiro.

Agora, caso se premiassem com 10 mil reais os três primeiros colocados desta corrida, cabe-se indagar de quantas formas diferentes é possível distribuir estes prêmios entre os 10 atletas?

É observável que ser o primeiro colocado da corrida gera um prêmio de 10 mil reais e que ser o segundo ou terceiro colocado desta corrida também gera o mesmo prêmio de 10 mil reais. Sendo assim, quanto à premiação, a ordem de colocação não importa. Percebe-se então que ser contado como primeiro segundo ou terceiro, neste caso, é a mesma coisa, ou seja, não faz a menor diferença.

O raciocínio que se quer trazer aqui, é uma espécie de repetição das posições, gerando o mesmo resultado. Quando se trabalha com permutação com repetição, descobre-se que é necessário contar a repetição e dividir pelo erro apresentado. Neste caso, o erro acontece nas três primeiras posições, logo, o problema sendo resolvido por arranjo ou por princípio de contagem, deve ser dividido por este erro, denominado "t" fatorial.

No caso em questão, o erro é igual a 3, ficando a conta dividida por 3!. Nota-se, assim, que o erro t é exatamente igual à variável p que foi estudada no arranjo, pois está se tratando de três premiações. Pode-se chamar de combinações simples todos os casos em que "t" é igual ao "p", podendo, assim, ser substituída, ficando apenas o "p". No caso estudado dos atletas, "t" = "p" $= 3$, logo, o erro a ser corrigido fica igual a 3!, ficando a conta da seguinte forma:

$\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$, Ou An, p com p de repetição ficando igual a $\dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$

Nota-se que, se chamar o arranjo com repetição de combinação e no local de An, p com repetição colocar a letra "C" de combinação tem-se a fórmula da combinação simples:

$$Cn, p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \tag{6}$$

Onde p pode ser o número de combinações no espaço definido ou de erros possíveis no mesmo espaço antes de conceituar combinação simples de formas mais técnicas resolve-se um outro exemplo para deixar clara esta forma de raciocínio.

Exemplo 16: Em um casa com 5 diferentes de animais **(A,B,C,D,E)** que serão agrupados de três em três para que as vacinas possam ser dadas. A pergunta é: de quantas formas podem-se agrupá-los para esta finalidade?

Nota-se que, ao se formar um grupo com **(A,B,C)** será exatamente o mesmo grupo ou gerar-se-á exatamente os mesmos resultados **(B,C,A)** que é os três animais serem vacinados. Neste caso $n = 5$, pois está se falando de cinco animais $p = 3$, pois estão agrupados de três em três, erro ou repetição "t" $= 3$. Logo, como p e t são iguais à resolução, ficando-se:

$\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ Pelo princípio da contagem $= 10$ casos possíveis. Descrição de cada um dos dez casos:

(A,B,C); (A,B,D); (A,B,E); (A,C,D); (A,C,E);

(A,D,E); (B,C,D); (B,C,E); (B,D,E); (C,D,E).

É notório que, mesmo com conjuntos muito grandes, tudo de que se precisa é descobrir qual seria o n. Ou seja, o número total de elementos deste conjunto. Descobrir p que é como eles estão sendo agrupados, observar se a ordem importa ou não, caso não importe, descobrir as repetições ou o erro t que nas combinações simples sempre serão iguais e aplicar as respectivas fórmulas ou o princípio básico de contagem que é o raciocínio que se quer levar para a resolução de questões envolvendo probabilidade.

Proposição 6(Combinação Simples) Se em um conjunto com n elementos o número de subconjuntos com p elementos é igual ao número de combinações de n elementos tomados p a p dado por:

$$Cn, p = \frac{n!}{(n-p)!p!}. \tag{7}$$

2.4.2 Combinações Completas

O desafio ao se falar de combinação completa ou combinação com repetição é relacionar uma questão de combinação na qual o elemento pode ser repetido com uma permutação, conhecido como sistema de paus e bolas, ou transformar em uma equação.

Imagine-se na seguinte situação na pizzaria: agora se pode escolher a pizza até com três sabores em um universo em que há 3 bordas diferentes e cinco tipos de recheio.

Além de escolher a borda, agora é possível escolher sabor único, dois sabores ou três sabores. Assim sendo, ao considerar apenas o recheio, de quantas formas diferentes pode-se compor esta pizza?

Solução: A forma mais simples de se resolver este tipo de problema, que lembra um combinação ou um arranjo com certo erro, é montar uma equação. Suponha-se que se tenham os seguintes sabores para recheio da pizza (A,B,C,D,E). A seguinte relação ajuda a elucidar o raciocínio:

$X_1 =$ o números de fatias do tipo"A".

$X_2 =$ o número de fatias do tipo "B".

$X_3 =$ o número de fatias do tipo "C".

$X_4 =$ o número de fatias do tipo "D".

$X_5 =$o número de fatias do tipo"E".

Onde $0 \leqslant (x_i) \leqslant 3$ onde i e igual $(1, 2, 3, 4, 5)$ logo temos a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$. Onde o 3 é o total de fatias que a pizza pode possuir.

CASO 1: Se ao ligar, o cliente deseja uma pizza somente do sabor A $(x_1) = 3$, pois haverá três fatias do mesmo sabor "A" e $(x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$, pois não haverá nenhum fatia dos outros sabores, ficando com a seguinte equação: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 3$ neste caso: $3 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3$.

CASO 2: Se ao ligar desta vez, o cliente deseja uma pizza com fatias do tipo (B,C,D), logo $(x_1, x_5) = 0$ e $(x_2, x_3, x_4) = 1$, ficando com a seguinte equação: $0 + 1 + 1 + 1 + 0 = 3$.

Isso pode ser representado por "/" quando tiver algum valor numérico, e quando a variável for igual a zero, não se coloca nada.

CASO 1$= /// + + + + = 3$ é exatamente isso: $3 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3$.

CASO 2 $= +/ + / + /+ = 3$ é exatamente isso: $0 + 1 + 1 + 1 + 0 = 3$.

Em todos os casos, não apenas nos dois exemplificados acima, desde que as variáveis respeitem as regras descritas, sempre haverá três "/" e quatro sinais de "+". Então, é razoável pensar que, para achar todas as possíveis soluções para esse problema, basta fazer a permutação com repetição do seguinte conjunto $(/; /; /; +; +; +; +)$, o qual $n = 7$ e há duas repetições $\alpha = 3$, representando as barras "/", $\beta = 4$, representando a repetição do sinal " + ", ficando a seguinte permutação com repetição:

$$P_{3,4}^{7} = \frac{7!}{3! \cdot 4!}$$

Resultando-se em 35 possibilidades diferentes de pedidos possíveis nesta pizzaria.

Outra forma de se resolver este tipo de problema é pela fórmula de combinação completa.

$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}$ onde n é o total de sabores e p é o número de formas diferentes que se pode combinar. Ficando o caso anterior, por exemplo, da seguinte maneira:

$$C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{((n+p-1)-p)!p!} = C_{5+3-1,3} = \frac{(5+3-1)!}{((5+3-1)-3)!3!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!}. \tag{8}$$

Ou seja, como visto anteriormente, resultou-se em 35 possibilidades de pizzas diferentes. Porém, nem todo problema é tão simples para se transformar em equação e, por isso, a fórmula se faz necessária.

A grande diferença de combinação completa para combinação simples é que na combinação simples os elementos combinados precisam ser diferentes, enquanto que na combinação completa, eles poderão ser diferentes ou iguais. Em um conjunto com n elementos, pode-se ter "n" elementos iguais, $(n-1), \cdots$, até o caso em que todos os elementos são diferentes. Ou seja, se pode ter um elemento que seja igual, o caso deve ser tratado como uma combinação completa.

Exemplo 17: *(Questão* 25 *prova do ITA de* 2014*)* diz o seguinte: Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de forma que as medidas de suas arestas sejam um número inteiro positivo e não exceda 10:

Solução: Veja que, em um caso em que não existe uma igualdade, não é possível montar uma equação. É simplesmente uma permutação com repetição. Logo, a recomendação, nesse tipo de problema, é seguir pela fórmula. Assim, observa-se que em paralelepípedo tem 12 arestas, porém só três delas podem assumir valores diferentes. Se isso acontecesse, uma simples $C_{10,3}$ resolveria o problema, porém, eles poderiam ser iguais. Neste caso, tem-se uma combinação com repetição ou combinação completa, em que não é possível montar a equação. Logo, o mais simples é recorrer a fórmula, ficando:

$$C_{n+p-1,p} = C_{10+3-1,3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220. \tag{9}$$

Logo, tem-se 220 formas diferentes de paralelepípedos com lados que não exceda 10.

3 História da Probabilidade

Neste capítulo, apresentar-se-á um pouco da história da probabilidade e como se começaram a formalizar os cálculos envolvendo probabilidades com exemplificando com fatos históricos

Toda construção deste capítulo será baseada nas referências [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13].

3.1 Como Tudo Começou

Embora nem sempre aceitos ou reconhecidos como tais, os mecanismos de acaso são usados desde a antiguidade para dividir propriedades, delegar privilégios ou responsabilidades civis, resolver disputas entre vizinhos, escolher a estratégia a ser adotada durante a batalha e determinar o lance em jogos de azar.

Nas escavações arqueológicas em Ur, terra dos caldeus, na região da Mesopotâmia, descobriram vários jogos de tabuleiros originários da antiga Babilônia. Um deles, datado de cerca de 2700 a.C., foi achado com as peças ou “pedras” para jogar.

Os historiadores acreditam que estes jogos obedeciam algum mecanismo de acaso. No sítio do palácio de Cnossos em Creta, foi descoberto um tabuleiro com um trabalho bem complexo de marchetaria (arte do encaixe ou técnica de ornamentar superfícies planas de móveis) da civilização minoica de 2400-2100 a.C. Embora nenhuma Tábula ou dado tenham sido encontrados, acredita-se que o jogo era uma espécie de gamão.

Tabuleiros encontrados em sítios arqueológicos mais recentes da Babilónia, da Assíria, da Palestina entre outros, assemelham-se a um jogo originário no Egito antigo *CRIBBAGE*.

Figura 6: Cribbage

[4]

[4] Fonte da figura 6, *https : //portuguese.alibaba.com/product − detail/jj − crafts − three − track −*

Outro jogo achado foi Pinos que se encaixam em furos marcam o caminho pelo tabuleiro. Um jogo de tabuleiro semelhante a *Snakes and Ladders*trata-se de um jogo no qual o jogador recua quando cai em uma casa de serpente (Snake) e avança quando cai numa casa de escadas (Ladders).

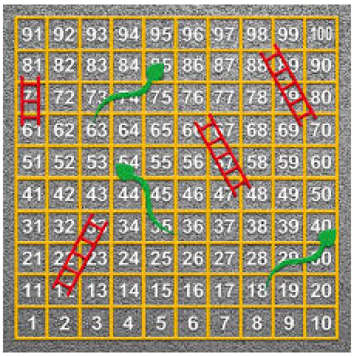


Figura 7: Snakes and Ladders

[5]

É importante salientar que na maioria destes jogos antigos não se constatou a presença de dados de tabuleiro, ou por não existirem ou por existirem e não terem sido encontrados. O mais provável é que se usassem outros tipos de implemento mais antigos e esses objetos não sejam hoje identificados como tais. Os arqueólogos ainda não estabeleceram se outros objetos como conchas, seixos, pedras, ossos ou outros objetos achados eram usados como dados ou se eles foram feitos de madeiras ou plantas que com o tempo se decompuseram.

Os dados mais antigos de seis faces conhecidos vieram do Oriente, feitos de barro cozido e datados de cerca de 2750 a.C. foram encontrados em Tepe Gawra, durante escavações da antiga Mesopotâmia no norte do Iraque. E acharam dados datados aproximadamente do mesmo período e feitos do mesmo material em todos os estratos das escavações de Mohenjo-Daro no vale do indo, inclusive dados alongados de secção retangular e triangular, bem como dados cúbicos. Mesmo sem um sistema de notação numérica em ambos os sítios, eles já eram marcados por pontos muito semelhantes aos dados modernos.

---

wooden − cribbage − board − with − free − deck − of − playing − cards − 60758940577*.html*

[5]Fonte da figura 7, *https : //www.thermapply.co.uk/product/snakes − ladders −* 1 − 100 *− outline*

3.2 O Início do Cálculo de Probabilidade

Os jogos greco-romanos de azar eram disputados com quatro astrágalos. [6] Os lances de menor valor conhecidos como os "cães", resultados da jogada de quatro uns. No maior lance conhecido como a jogada de Vênus, cada dado caía com uma face diferente voltada para cima. O osso astrágalo era imitado em marfim, bronze, vidro e ágata e era usado tanto em cerimônias religiosas quanto em jogos, entre outros que vieram no decorrer da história.

Na antiguidade, quer os mecanismos de sorteio fossem usados para tomar decisões importantes, quer para jogos de azar, existia uma sólida crença de que os deuses controlavam os seus resultados.

Os métodos, para assegurarem a aleatoriedade de um sorteio, já eram mencionados na época de Homero (cerca de 850 a.C.) em sua obra A Ilíada, em sorteios para ver quem deveria atirar a primeira lança num duelo entre Menelau e Paris. Nas literaturas antigas, não é raro ver referências aos objetos de sorteios como se fossem animados, escrevendo muitos séculos depois de Homero destaca em seus livros a importância destes jogos.

Em muitas religiões antigas resultados probabilísticos, ajudava na tomada de decisões sendo considerados muitas vezes como profecias ou adivinhações. Porém mesmo desta forma, esses resultados ou profecias eram aceitos como resposta de alguma divindade pelo povo.

O procedimento para tirar a sorte era sempre o mesmo. Eles arrancavam um galho de árvore de castanhas e os cortam em tiras; marcam essas tiras com sinais diferentes e as jogavam aleatoriamente sobre um pano branco. Então o sacerdote do estado, se a consulta for pública, ou o pai de família se for particular, oferece uma oração para os deuses e olhando para o céu, recolhe três tiras, uma por vez, e lê seu significado a partir dos sinais anteriormente marcados nelas de acordo com [7].

O fato de olhar para o céu antes de tirar a sorte poderia ter várias interpretações, mas todas buscando mostrar uma imparcialidade do sacerdote, quer seja por uma escolha divina ou mero acaso, é importante mostrar ao público que ele não interfere no resultado.

Até na bíblia temos referência da sorte sendo lançada, Provérbios 16:33 diz "A

[6] era um jogo da bugalha praticado na Grécia Antiga.

sorte se lança no regaço, mas do Senhor procede toda a determinação", em Atos 1:26 mostra isso na escolha para um outro apóstolo no lugar de Judas os cristãos da época também jogaram a sorte.

Nos tempos bíblicos jogar a sorte era uma forma consensual de tomar muitas decisões, porque encerrava a disputa entre as partes envolvidas quase sempre relacionando a vontade do Deus todo poderoso.

Os participantes dos primeiros sorteios europeus, tais como os povos da antiga Mesopotâmia, frequentemente invocavam a ajuda de Deus e de seus santos. Uma febre de sorteios parece ter dominado a população no princípio do século XVI; e os sorteios continuaram a prosperar no séculos seguintes. Com isso começa a surgir interesse de estudar essas áreas a fim de garantir maior chance de ganho.

Paciolo, Tartaglia e Cardano foram os primeiros italianos a tentar fazer cálculos de cunho probabilístico através de comparações de frequências. Eles conseguiram estimar que, por esse método, havia mais chances de se ganhar em um jogo de azar, mas esses estudos não chegaram a ser formalizados com designação, axiomas ou teoremas.

A obra (Summa), publicada em 1494 de Paciolo, propunha um estudo conhecido por problema de pontos [7] e também por outros nomes bem populares na época, mesmo que a solução proposta pelo autor fosse incorreta. A partir daí, vários outros pensadores se inspiraram. Coutinho (2007) [9] afirma que isso foi a mola propulsora nesse viés de cálculo probabilístico, pensadores como Tartaglia e Cardano também se evolveram na tentativa destas resoluções.

Tempos depois, a solução para tal problema (o problema dos pontos) foi proposta por dois homens que ficaram bastante conhecidos, Fermat e Pascal. Vale salientar que a obra deles foi o marco do início da teoria da probabilidade. Tartaglia e Paciolo continuaram publicando obras com a finalidade de questionar, e em 1663 Cardano teve o intuito de orientar a tomada de boas decisões referente aos jogos de azar que já havia no tempo.

[7] Imaginem que duas pessoas estão a jogar um jogo que consiste em lançar um dado, um aposta que sai número par, o outro aposta que sai número ímpar (50% de hipóteses para cada um). O jogo é composto por várias "rodadas? (rounds), quem ganhar três primeiro, fica com o prémio. Contudo, os jogadores têm que interromper o jogo quando um deles ainda só ganhou 2 rounds e o outro ganhou 1. Qual a forma justa de dividir o prémio?

De acordo com Viali (2008)[8], Cardano pode ser considerado como o pioneiro do cálculo de probabilidade, ao afirmar:

> [...] foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele, também, conhecia a ideia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles. Seus estudos, no entanto, ficaram limitados a casos concretos de jogos de azar principalmente o de dados. (VIALI, 2008, p. 146-147).

No século XVI, embora Galileu Galilei tenha demonstrado alguns sinais de cálculos realizados em jogos que envolvam dados, não há registro de pensadores matemáticos que ponderaram sobre questões probabilísticas. Galileu tinha ideia, ainda que incipiente, do que hoje se conhece por "equiprobabilidade". Isso pode ser detectado quando afirma: "um dado honesto tem seis faces e, quando jogado, pode cair igualmente sobre qualquer destas fases" (GALILEU,1623)[13]. Ao publicar sua obra, Sopra Le Scoperte dei Dali, Galileu demostrou que utilizava conceitos de resultados semelhantes prováveis isso já no século XVII.

A probabilidade entrou no pensamento europeu após metade do século XVII de duas formas, através de um método determinando as situações presumíveis da fé e também no processo de chances. Houve um grande marco na história entre Pascal e Fermat, que foi a troca de correspondência de cartas relacionadas à teoria das probabilidades. As cartas tratavam sobre o jogo de dados como também o problema de pontos, que foram demonstrados a Pascal por Gombauld, conhecido por cavaleiro de Méré. Viali (2008)[8].

Coutinho (2007)[10] faz uma ponderação importante sobre a troca de correspondência exposta entre Pascal e Fermat:

Observa-se aqui os primeiros indícios de uma dualidade da noção de probabilidade. Dualidade essa que é devida ao conflito entre a apreensão perceptiva das chances de realização de um evento (grau de credibilidade) e a relação entre resultados favoráveis e possíveis. (COUTINHO, 2007, p. 60) [10]

Segundo Viali (2008)[8], em 1655 o holandês Christiaan Huygens começou a ter interesse pelas cartas que estavam sendo trocadas por Fermat e Pascal e dedicou-se a solucionar problemas semelhantes aos propostos nas trocas de correspondência. Em sua obra, De Ratiociniis in Ludo Aleae - primeira obra impressa sobre o cálculo de probabilidades -, Wussing (1998) exemplifica as questões argumentadas por Pascal e

Fermat e vai além, estudando problemas similares e mais complexos.

Katz (2009)[11], por sua vez, destaca que Huygens na obra De Ratiociniis in Ludo Aleae, indaga que, apesar da incerteza dos resultados em jogo de azar, a chance de ganhar ou perder vai depender de um determinado valor. Assim, surge a ideia de Esperança matemática. Então, estima-se o valor médio que um jogador tinha chance de ganhar, caso jogasse muitas vezes, em conformidade com David (1998).

Ao se tratar de processo de sistematização da probabilidade, entende-se que o seu propulsor foi Jacques (Jacob) Bernoulli, com a publicação de sua obra (Ars Conjectandi) em 1973. Ele aborda, de forma bem exemplificada, permutações e combinações e, ainda, propõe a utilização da teoria das probabilidades nas situações econômicas.

A "Lei dos Grandes Números" apresentou os primeiros e principais teoremas da probabilidade, que fora exposta, primeiramente, por Jacques Bernoulli. Iniciava-se então uma visão frequentista que, de modo geral, vislumbra a probabilidade de um evento pela frequência observada quando o experimento é repetido grande número de vezes, [12].

Algumas publicações como The Doctrine of Chance e Miscellanea Analytica, de Abraham de Moivre, La Doctrine des Chances, de Thomas Bayes, Essai sur "Application de" Analyse à la Probabilité des Decisions Rendues à la Pluralité des Voiix, do Marquês de Condorcet, e The Nature and Laws of Chance, de Thomas Simpson foram publicadas nesse período. Entretanto, a obra clássica desta fase foi Théorie Analytique des Probabilités, de PierreSimon Laplace, publicada em 1812. Laplace publicou ainda Essai philosophique sur les probabilités, em 1814, que "discutia os princípios da teoria e, principalmente, aplicações nos jogos de azar, filosofia natural, ciências morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade." (VIALI, 2008, p. 150)[8].

Laplace expôs o problema da agulha de Buffon, [8]

Esse método simples, que servia basicamente para transformar uma equação diferencial com condições inicias, conhecido por Laplace, contribuiu para o estudo das probabilidades. Entre eles, pode-se destacar Chebysshev, von Mises, Keynes e o, hoje, considerado pai da probabilidade moderna, Kolmogorov, que em 1933, publicou a mo-

[8] O método consiste basicamente em gerar aleatoriamente N sucessivas amostras em termos de custo ou tempo (variável aleatória) que serão então "testadas"em um modelo estatístico, que vem a ser na verdade uma distribuição de probabilidade.

nografia denominada Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, que em inglês foi batizada de Foundations of Probability Theory, que deu início à etapa moderna da teoria. Segundo Viali (2008), a partir de então, ela foi sendo refinada (matematizada) e hoje é parte de uma disciplina mais geral denominada de teoria da medida. Kolmogorov axiomatizou a teoria da probabilidade da mesma forma que a Geometria fora, por Euclides (Euclides de Alexandria 325 ac a 265 ac) nos Elementos,Ver p.152 [8].

4 Probabilidade

Neste capítulo, são introduzidos conceitos relativos à probabilidade, que são importantes para melhor se compreenderem os conceitos de probabilidade aplicados à genética descritos neste trabalho. São abordados conceitos sobre eventos certos, impossíveis e aleatórios; conceitos com espaço amostral e eventos; probabilidade de eventos independentes; probabilidade de eventos exclusivos; probabilidade misturando os eventos e probabilidade condicional.

Cada conteúdo será seguido de um exemplo e um problema que facilite a compreensão. Será mostrada, além disso, a importância de cada conceito e seus raciocínios no ensino e na resolução de problemas que envolvem probabilidade.

Toda construção deste capítulo será baseado nas referências: [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21].

4.1 Eventos Certos, Impossíveis e Aleatórios

Para se entender o que seria o conceito de probabilidade, o qual, por sua vez, não é um conceito muito simples, a ciência, na base da observação e da experimentação, formula leis que ajudam a compreender o fenômeno em estudo. O esquema mais simples e largamente estudado de tais leis é o seguinte:

Cada vez que um certo conjunto de condições "ϑ" é realizado, o evento "A": sempre ocorre. Isso é chamado de eventos certos. Ou seja, se todas as condições forem preenchidas, aquele evento vai acontecer.

Exemplo 1: Jogar um objeto da janela de um apartamento situado no planeta Terra, no qual as forças da gravidade atuam, onde a resistência do ar ou qualquer outra resistência sejam desprezíveis, o evento esperado é que o objeto caia. Ou seja, se estas condições "ϑ" sempre forem preenchidas (planeta Terra, gravidade atuando, resistência do ar ou qualquer outra resistência desprezível) o evento "A" (o objeto cair) sempre vai ocorrer.

Cada vez que um certo conjunto de condições "ϑ" é realizado, o evento "A" nunca ocorre, chama-se a de evento impossível. Ou seja, todas as condições foram obedecidas, porém, aquele evento não vai ocorrer.

Exemplo 2: Se a água na pressão atmosférica de 760mmHg é aquecida acima de $100°C$ (conjunto de condições, "ϑ"), ela se torna gelo (evento A). Sabe-se que, nestas condições, a água deveria se tornar vapor e não gelo. Como o evento esperado é que ela se torne gelo, com as ditas condições, esse é um evento impossível.

Cada vez que um certo conjunto de condições "ϑ" é realizado, o evento "A": pode ocorrer ou não. Chama-se de evento aleatório. Ou seja, cumprindo todos as condições "ϑ", existe forte possibilidade de o evento "A" ocorrer. Mas existe também a possibilidade dele não ocorrer. Quando isso acontece, é chamado de aleatório. No estudo das probabilidades aqui proposto, o único evento que importa são os aleatórios, uma vez que tanto o certo quanto o impossível já se sabe previamente as probabilidades: o certo é de 1 que ele ocorra e o impossível tem 0 de chance de ocorrer. Tudo neste intervalo é conhecido como evento de 0 a 1. Ou seja, considerado como evento aleatório.

Definição 1(Experimento Aleatório) Considerando-se o experimento como sendo aleatório, quando se obedecem as mesmas condições "ϑ", o evento "A" a ser repetido gera resultados diferentes.

Exemplo 3:

a) Um lançamento de um dado honesto.

b) As cartas de um baralho em um jogo de Poker.

c) Um lançamento de uma moeda e a observação da face para cima.

d) Possibilidade de chover ou fazer sol.

e) Chance de um candidato ganhar uma eleição.

f) Possibilidade de um time ganhar um campeonato.

h) Chance de ser aprovados no ENQ (Exame Nacional de Qualificação).

Para tais fenômenos, é possível não apenas enunciar que o evento é aleatório, mas também estimar em termos quantitativos as chances de sua ocorrência. Esta estimativa é traduzida em proposição do tipo:

Cada vez que um certo conjunto de condições "ϑ" é realizado, a probabilidade de que o evento "A" ocorra será igual p. Falar-se-á mais sobre isso à frente.

4.2 Espaço Amostral e Eventos

Para explicar a idéia de espaço amostral, pensar-se-á em experimentos aleatórios que, embora não seja possível descrever ou prever com certeza qual resultado será gerado, pode-se prever os possíveis resultados. Os resultados deste experimento chamar-se-á de espaço amostral e será representado pelo símbolo Ω.

Definição 2(Espaço Amostral) O espaço Amostral denotada por (Ω) é o conjunto cujos elementos são todos os possíveis resultados que podem ser obtidos na realização de um experimento. Onde "#" é igual a cardinalidade do conjunto.

Exemplo 4: a) Um lançamento de um dado honesto com os números de 1 a 6. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 6$ elementos.

b) Os naipes de um baralho em um jogo de poker que.

$\Omega = \{Ouro, Espada, Paus, Copas\}$, $\#\ \Omega$=4 elementos.

c) O lançamento de uma moeda e a observação da face para cima.

$\Omega = \{Cara, Coroa\}$, $\#\ \Omega$ =2 elementos.

d) Lançamento de duas moedas:

$\Omega = \{(Cara, Cara); (Cara, Coroa); (Coroa, Cara); (Coroa, Coroa)\}$, $\#\ \Omega$ =4 elementos.

e) Resultado de um candidato quanto a uma eleição.

$\Omega = \{Ganhar, perder\}$, $\#\Omega$ =2 elementos.

f) Sexo de um filhote de Cachorro. $\Omega = \{Macho, Fmea\}$, $\#\ \Omega$ =2 elementos.

g) Resultado final no ENQ (exame nacional de qualificação).

$\Omega = \{Aprovado, Reprovado\}$, $\#\Omega$ =2 elementos.

4.2.1 Eventos com Reposição e sem Reposição

É importante observar essas possíveis variações que se podem ter dentro de um espaço amostral. Imaginando-se o caso de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50 nas quais o desejo é sortear 5 bolas. É observável que o espaço amostral nunca será alterado, uma vez que, logo após a retirada de uma bola, esta é colocada novamente na urna. Logo, para todas as 5 bolas retiradas, sempre se terão 50 bolas na urna. Quando isso acontece, chamar-se-á de eventos com reposição. Se elas fossem retiradas simultaneamente, também seria considerado o espaço amostral com 50 bolas. Levando-se em conta que todas as bolas têm exatamente a mesma chance de serem sorteadas, o que pode ser representada pela seguinte resolução:

$$\frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50}$$

Agora, ao se pensar no mesmo caso, mas, desta vez, retirando-se uma das bolas, e se, após a verificação do seu número, ela for retirada da urna, antes do sorteio da segunda bola, é razoável pensar que, neste momento, já não há mais as 50 bolas iniciais do sorteio, mas sim 49 bolas. Ou seja, todas as vezes que o espaço amostral diminui exatamente o mesmo número de elementos que foram retirados, será chamado de chamamos de eventos sem reposição e pode ser representado da seguinte forma:

$$\frac{1}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{47} \cdot \frac{1}{46}.$$

Figura 8: Eventos com e sem Reposição

[9]

[9] Fonte da figura 8, $https://www.casinotop10.com.br/como-ganhar-no-bingo$

4.2.2 Evento

Chamar-se-á de *eventos* "A" todo subconjunto de espaço amostral Ω. Ou seja, no exemplo 4 há vários espaços amostrais dentre, dentre os quais vale citar um evento para exemplificar o conceito:

a) Evento "A" sair o número 2 no dado.

b) Evento "A" tirar uma carta com naipe de ouro.

c Evento "A" a moeda cair com a face "cara" para cima.

d) Evento "A" a moeda cair "cara" e "cara".

e) Evento "A" um candidato ganhar uma eleição.

f) Evento "A" o filhote ser macho.

g) Evento "A" ser aprovado no Exame Nacional.

De acordo com [17], uma das definições clássicas da probabilidade reduz o conceito dela ao conceito de equiprobabilidade (igual verosimilhança) de eventos, que é considerado como um conceito primitivo e, portanto, não sujeito à definição formal. Por exemplo, ao se jogar um único dado cúbico, feito de material perfeitamente homogênico, os eventos igualmente verossímeis serão constatados pelo aparecimento de qualquer um dos números específicos de pontos (de 1 até 6), marcados nas sua faces, pois, em virtude da simetria, nenhuma das faces possui preferências objetivas sobre a outra.

No caso geral, considerar-se-á um grupo "G", levando-se em conta n número de eventos mutuamente exclusivos por pares igualmente verossímeis (equiprováveis) -estes serão os eventos elementares- e considerando-se também os futuros exemplos deste tópico inseridos nestes conceitos, pode-se formular a probabilidade da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}. \tag{10}$$

Com n definido anteriormente, é possível ler a fórmula supracitada assim: probabilidade de A acontecer é igual ao número de eventos que se deseja sobre o número de elementos do espaço amostral Ω.

Exemplo 5: Em um lançamento de um dado normal (não viciado), qual é a probabilidade de sair um número par?

Solução: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 6 elementos. O evento que se deseja é um número par, $n(A) = \{2, 4, 6\}$ 3 elementos. Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0,5 = 50\%.$$

Exemplo 6: Qual é a probabilidade de se lançarem dois dados e a soma de suas faces serem iguais a sete?

Solução: para melhor se compreender a questão, far-se-á a contagem do espaço amostral por meio de uma tabela, lembrando-se de que os princípios que foram aprendidos na Análise Combinatória podem ser usados para a resolução deste tipo de problema. Neste caso, usar-se-á simplesmente o Princípio da Contagem, aplicado em uma tabela.

	dado 1=1	dado 1=2	dado 1=3	dado 1=4	dado 1=5	dado 1=6
dado 2=1	1+1= 2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	6+1=7
dado 2=2	2+1=3	2+2=4	2+3=5	2+4=6	2+5=7	2+6=8
dado 2=3	3+1=4	3+2=5	3+3=6	3+4=7	3+5=8	3+6=9
dado 2=4	4+1=5	4+2=6	4+3=7	4+4=8	4+5=9	4+6=10
dado 2=5	5+1=6	5+2=7	5+3=8	5+4=9	5+5=10	5+6=11
dado 2=6	6+1=7	6+2=8	6+3=9	6+4=10	6+5=11	6+6=12

Continuando a solução: $\Omega = \{36\}$ elementos. Todos estas descritos na tabela. O evento desejado é a soma das faces dos dados resulta igual a 7, $n(A) = \{6\}$ elementos, descritos na diagonal da tabela. Logo,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

4.3 Probabilidade de Eventos Independentes

Eventos independentes são aqueles que acontecem sem a dependência da ocorrência de outros. Por exemplo, ao se jogar uma moeda e um dado, espera-se que no dado dê o número 2 e na moeda dê “coroa”. Para a resolução deste tipo de probabilidade, basta calcular os eventos separadamente e usar o Princípio da Multiplicação. Ou seja, basta multiplica as probabilidades de cada evento separadamente.

Exemplo 7: Qual a probabilidade de se lançar uma moeda para o alto e, ao observá-la após a sua queda, a face voltada para cima ser "cara" e, aplicando-se o mesma situação a um dado, o número observado ser "3"?

Exemplo 8: Após este lançamento, qual a probabilidade de se obter a face "cara" voltada para cima, o número observado no dado ser o número "3" e o lançamento de um outro dado ser 3 novamente.

Solução 7: Observe que o conectivo "e" foi usado e que, como se viu, tratam-se de dois eventos independentes.

Chamar-se-á de Evento "A" a probabilidade de sair "cara" no lançamento de uma moeda.

Chamar-se-á de Evento "B" a probabilidade de sair o número "3"em um dado.

Logo, a probabilidade de sair uma face "cara" e a probabilidade de sair o numero "3" no dado são, respectivamente:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} \text{ ; } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

Pelo Princípio Multiplicativo tem-se

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Solução 8: Nesta questão, o conectivo "*e*" é utilizado duas vezes, ficando da seguinte forma: Chamar-se-á de evento "A" a probabilidade de sair"cara" no lançamento de uma moeda.

Chamar-se-á de evento "B" a probabilidade de sair o número"3" em um dado.

Chamar-se-á de evento "C" a probabilidade de Sair o número"3" no lançamento do outro dado.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} \text{ ; } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \text{ ; } = P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

Pelo princípio multiplicativo fica

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}.$$

Observa-se a importância do conectivo "*e*" para a classificação do evento como independente:

Definição 3 (Eventos Independentes) Dois eventos distintos A e B são considerados independentes quando a probabilidade do evento A"e"B ou $(A \cap B)$, é dado por:

$$P(A\text{“}e\text{”}B) = P(A) \cdot P(B)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

.

Quando se têm mais de um conectivo do tipo "*e*" (como no exemplo 2) deve ser aplicado o mesmo Princípio Multiplicativo. Assim, é permitido generalizar para "n" eventos.

$$P(A\text{“}e\text{”}B\text{“}e\text{”}C \cdots \text{“}e\text{”}n) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdots P(n)$$

.

ou

$$P(A \cap B \cap C \cdots \cap n) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdots P(n)$$

.

4.4 Probabilidade de Eventos Exclusivos

Eventos Exclusivos são eventos que não podem acontecer simultaneamente. Por exemplo, ao se jogar uma moeda e um dado, espera-se que no dado dê o número 2, "ou" na moeda dê “coroa”. Para resolução deste tipo de probabilidade, basta calcular os eventos separadamente e usar o Princípio Aditivo. Logo, somam-se as probabilidades de cada evento.

Exemplo 9: Qual a probabilidade de se lançar uma moeda e que, ao observar a face voltada para cima seja “coroa” ou, ao lançar um dado e observar o número “2” ?

Solução 9: Observa-se que o conectivo “ou” foi usado e que, como se viu, tratam-se de dois eventos independentes.

Chamar-se-a de Evento “A” a probabilidade de sair “*coroa*” no lançamento de uma moeda.

Chamar-se-á de Evento “B” a probabilidade de sair o número “2” em um dado

Logo, a probabilidade de sair uma “coroa” e a probabilidade de sair o número “2” no dado são respectivamente:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} \ ; \ P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

Pelo Princípio Aditivo fica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12}.$$

Exemplo 10: Após este lançamento, busca-se observar a probabilidade de que a face voltada para cima seja “coroa” ou o número observado no dado seja o número“2”, ou observar no lançamento de um outro dado o número “5”.

Solução 10: Nesta solução, o conectivo “ou” é utilizado duas vezes, ficando da seguinte forma:

Chamar-se-á de evento “A” a probabilidade de sair “*cara*” no lançamento de uma moeda.

Chamar-se-á de evento “B” a probabilidade de sair o número “3”em um dado.

Chamar-se-á de evento “C” a probabilidade de sair o número “3” no lançamento do outro dado.

Temos que a probabilidade de cada evento separadamente é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} \ ; \ P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \ ; = P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

Pelo Princípio Aditivo fica

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{60}{72}.$$

Observe a importância do conectivos "ou" para a classificação do evento como exclusivo.

Definição 4 (Eventos Exclusivos) Dois eventos A e B são considerados mutuamente exclusivos quando a probabilidade (A"ou"B) ou $(A \cup B)$, eventos distintos é dado por:

$$P(A\text{"}ou\text{"}B) = P(A) + P(B)$$

.

ou

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

.

Quando se têm mais de um conectivo do tipo "ou" (exemplo 10), deve ser aplicado o mesmo Princípio Aditivo. Assim, é permitido generalizar para "n" eventos.

$$P(A\text{"}ou\text{"}B\text{"}ou\text{"}C\cdots\text{"}ou\text{"}n) = P(A) + P(B) + P(C) + \cdots + P(n)$$

.

ou

$$P(A \cup B \cup C \cdots \cup n) = P(A) + P(B) + P(C) + \cdots + P(n)$$

.

4.4.1 Observações Interessantes

Acerca de eventos independentes e eventos exclusivos, vale observar que no evento independente, quanto mais eventos independentes, existem menor chance de ocorrência deles simultaneamente. A probabilidade tende a cada vez um número de menor. Em contra partida, quando se trata de eventos exclusivos, quanto mais eventos existem, maior a probabilidade ou percentual de acontecer.

Isso ocorre porque nos eventos exclusivos usam-se conceitos de complementar (conceitos de não-ocorrência). Por exemplo: busca-se uma "cara" e um número 3 (moeda e dado respectivamente), quando são independentes, ou seja, seguidos do conectivo "e" o espaço amostral é o mesmo para os dois casos. Porém, na independência de eventos que é quando se quer a probabilidade deles simultaneamente, apenas uma possibilidade é aceita. Porém, quando se tem a exclusividade seguida do conectivo "ou" (a não ocorrência do número 3 por exemplo) permite a ocorrência dos números $\{1,2,4,5,6\}$, desde que na moeda a face desejada ocorra.

4.5 Misturando os Eventos

Agora, pensando em um exemplo onde se tenham, ao mesmo tempo, Eventos Independentes e Eventos Exclusivos, como no exemplo a seguir:

Exemplo 11: Em um jogo de baralho (52 cartas de espaço amostral), deseja-se obter a seguinte sequência: (2 de copas e 3 de ouro); ou(4 de copas e 5 ou 6 de ouros). Qual é a probabilidade de que o evento mencionado ocorra, retirando-se apenas duas cartas simultaneamente?

Solução 11: Observa-se que os conectivos que aparecem no problema 2 de copas "e"3 de ouros; "ou" 4 de copas "e" 5"ou" 6 de ouros, transformando os conectivos nos Princípios Multiplicativos e Aditivos e, obedecendo Princípios Matemáticos, tem-se a seguinte operação: (lembrando que se trata de um Evento com Reposição)

Probabilidade de um 2 de copas $1/52$;

Probabilidade de um 3 de ouros $1/52$;

Probabilidade de um 4 de copas $1/52$;

Probabilidade de um 5 ou 6 de ouros $2/52$;

$$\frac{1}{52} \cdot \frac{1}{52} + \frac{1}{52} \cdot \frac{2}{52}. \tag{11}$$

Exemplo 12: Em um jogo de baralho (52 cartas de espaço amostral), deseja-se obter a seguinte sequência: 2 de copas e 3 de ouro ou 4 de copas e 5 ou 6 de ouros. Qual é a probabilidade de que o evento mencionado ocorra, retirando-se apenas duas cartas, uma de cada vez?

Solução 12: Vamos observar os conectivos que aparecem no problema 2 de copas "e" 3 de ouros; "ou" 4 de copas "e" 5 "ou"6 de ouros. Transformando nossos conectivos nos princípios multiplicativos e aditivos e obedecendo princípios matemáticos temos a seguinte equação e observando que se trata de eventos sem reposição:

probabilidade de um 2 de copas 1/52;

probabilidade de um 3 de ouros 1/51;

probabilidade de um 4 de copas 1/52;

probabilidade de um 5 ou 6 de ouros 2/51;

$$\frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} + \frac{1}{52} \cdot \frac{2}{51} \tag{12}$$

4.6 Probabilidade Condicional

Neste tópico, apresentar-se-á o conceito de probabilidade condicional. Este refere-se à probabilidade de um evento ocorrer com base em um evento anterior. Evidentemente, esses dois eventos precisam ser conjuntos não vazios pertencentes a um espaço amostral finito.

Sejam A e B dois eventos associados ao experimento E. Denotar-se-á por $P(B|A)$ a probabilidade do evento B ocorrer dado que o evento A já aconteceu.

Exemplo 13: Considerando-se duas urnas com bolas totalmente idênticas, numeradas de 1 a 8, onde serão registrados os resultados da urna 1 e os resultados ocorridos da urna 2, tendo, assim, um espaço amostral com 64 possibilidades igualmente prováveis. Considerar-se-á o seguinte evento: a soma das bolas igual a 10, sendo que a bola retirada na urna 1 foi maior que a bola retirada na urna 2. Chamar-se-á de x_1 a bola retirada na primeira urna e x_2 a bola retirada na segunda urna.

Dado o conjunto A, sendo a soma do número retirado na urna 1 com o número retirado da urna 2.

Dado o conjunto B, sendo o número retirado na urna 1 maior que o número retirado na urna 2.

$A = (x_1, x_2)|x_1 + x_2 = 10$, $B = (x_1, x_2)|x_1 > x_2$. O espaço amostral é exibido na tabela.

Solução 13:

•	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8
7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8
8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8

Assim, $A = (2,8), (3,7)(4,6), (5,5)(6,4), (7,3)(8,2)$;

e $B = (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3) \cdots , (8,7)$.

Portanto, $P(A) = \dfrac{7}{64}$ e $P(B) = \dfrac{28}{64}$.

Percebe-se que, uma vez que o número da urna 1 é maior que o número da urna 2, o espaço amostral deixa de ser 64 possibilidades e se tornam 28 possibilidades. Logo, destas 28 possibilidades que sobraram, há 7 possibilidades para a soma de ambas as urnas serem 10. Porém, no novo espaço amostral, no qual $x_1 > x_2$ só há 3 possibilidades que se encaixem com tal requisito. Logo, neste exemplo, a probabilidade é igual $\dfrac{3}{28}$.

Uma outra possibilidade de resolver o exercício é usar a fórmula de Probabilidade Condicional que se segue:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{64} \text{ e } P(B) = \frac{28}{64};$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{64}}{\frac{28}{64}} = \frac{3}{64} \cdot \frac{64}{28} = \frac{3}{28}.$$

Definição 5 (Probabilidade Complementar) Em teoria da probabilidade, o complementar de qualquer evento A é o evento o complemento de A é denotado por [não A], $(\sim A)$ é o evento B tal que $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$, onde Ω é o espaço amostral.

Exemplo 14 : Para avaliar se um aluno do PROFMAT está apto para se tornar um mestre, uma comissão de três professores são necessários para compor a banca examinadora, que será escolhida, ao acaso. Entre as possibilidades, tem-se os seguintes pós-doutores: Alarcon, Maria, Paulo César, Bethy e Elisabete. Se Bethy não pertence à comissão, qual a probabilidade de Paulo César pertencer?

Solução 14: Ao todo, tem-se $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 5.2 = 10$ possíveis comissões de três pessoas, levando-se em consideração os cinco candidatos.

O primeiro evento é $P(\backsim B)$: comissões sem Bethy, isto é, $C_{4,3} = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$, portanto, $P(\backsim B) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

O segundo evento é P: comissões com Paulo César, ou seja, $C_{4,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 2.3 = 6$, logo, $P(C) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

$P(\backsim B \bigcap P)$ é ter Paulo César e não ter Bethy, assim, $C_{3,2} = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$, por conseguinte, $P((\backsim B) \bigcap P) = \dfrac{3}{10}$.

$P(\backsim B \bigcap P) = \dfrac{3}{10}$; $P(C) = \dfrac{6}{10}$ e $P(\backsim B) = \dfrac{4}{10}$. Assim, $P(B|A) = \dfrac{P(\backsim B \bigcap P)}{P(\backsim B)} =$

$$\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{4} = \frac{3}{4}.$$

5 Probabilidade e seus Paradoxo

Neste capítulo, serão introduzidos conceitos relativos à análise e interpretação de textos que envolvem probabilidade. Descrever-se-ão famosos paradoxos da probabilidade, tais como: a probabilidade de termos aniversariantes no mesmo dia, o problema dos filhos que, dependendo da forma de como se interpretam, podem-se ter probabilidades bem distintas como respostas; o problema do carcereiro; o problema da roleta e o paradoxo do Simpson.

Cada paradoxo será seguido de um exemplo e um problema que facilite a compreensão e a importância de cada conceito e seus raciocínios no ensino e na resolução de problemas que envolvem probabilidade.

Toda construção deste capítulo será baseada nas referências [22], [23] ,[24], [25], [?].

5.1 Paradoxo da Probabilidade

Tratando-se de matemática, os paradoxos acontecem por toda parte, mas eles ocorrem com maior frequência num nível bastante sofisticado. Em probabilidade, entretanto, os paradoxos e as situações não intuitivas ocorrem num estágio relativamente simples. Talvez seja por isso que a intuição das pessoas para a probabilidade não seja tão aguçada quanto suas intuições para a geometria ou aritmética. O renomado educador de matemática George Polya salientou que a intuição nos chega naturalmente e que os argumentos formais (matemáticos) deveriam legitimar essa intuição.

Contudo, os educadores que pesquisaram, Veja [22], as dificuldades do ensino de probabilidade confirmam o quanto, mesmo as probabilidades mais simples, podem ser não intuitivas.

5.2 Aniversariantes no Mesmo Dia

Ilustrando como exemplo, a maioria das pessoas considera um fato extraordinário encontrar alguém que compartilhe consigo a mesma data de nascimento. Entretanto, num grupo de 25 pessoas ou mais, chega a mais de 50% a probabilidade de que duas ou mais pessoas tenham a mesma data de aniversario.

A razão pela qual esse resultado é tão surpreendente é que, normalmente, tende-se a concentrar-se em um determinado aniversário (normalmente ao seu próprio). Costuma-se pensar também que a pergunta é: qual a probabilidade de que uma ou mais pessoas de determinado grupo tenha a mesma data de nascimento de quem está fazendo a indagação? A probabilidade de que isso ocorra (se o grupo for de 25 pessoas) é de aproximadamente $0,064$ ou menos de 7% ou seja, está longe de 50%.

Mas, quando a pergunta não é sobre uma pessoa em particular ou uma determinada data de nascimento, e sim sobre quaisquer duas ou mais pessoas com a mesma data de aniversário, as chances são, de fato, maiores que 50%.

Cabe responder a seguinte pergunta: qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário na mesma data (dia e mês) em um grupo com n pessoas?

Seja σ_1 a probabilidade de que não haja duas pessoas fazendo aniversário na mesma data (dia e mês). Logo, para um grupo com n pessoas tem-se:

para n igual a 2

$$\sigma_1 = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} = 0,99726$$

Chamando de ϱ_1 a probabilidade de que pelo menos duas pessoas do grupo façam aniversario na mesma data, essa probabilidade é dada pela diferença entre 1 e σ_1, ou seja,

$$\varrho_1 = 1 - \sigma_1.$$

$$\varrho_1 = 1 - 0,99726 = 0,00274$$

para $n = 5$ tem-se

$$\sigma_1 = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} = 0,97286$$

$$\varrho_1 = 1 - 0,97286 = 0,002713$$

generalizando tem-se

$$\sigma_1 = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}.$$

A tabela a seguir, construída com auxílio de uma planilha eletrônica, exemplifica melhor o que se está em pauta:

Nº de pessoas	Prob. de não ter coincidência	Prob. de ter coincidência
1	100	0
2	99,726	0,274
3	99,179	0,821
10	88,305	11,695
20	58,856	41,144
21	55,631	44,369
22	52,430	47,570
23	49,270	50,730
25	43,13	56,87
30	29,368	70,632
40	10,876	89,124
50	2,963	97,037
60	0,813	99,187
65	0,103	99,897
70	0,0023	99,9977

5.3 Problemas dos Filhos

Outro paradoxo clássico da probabilidade é normalmente enunciado da seguinte forma: dado que numa família há duas crianças e que, pelo menos uma delas é menina, qual é a probabilidade de que haja duas meninas na família?

O que se supõe normalmente é que, em qualquer nascimento, a chance de ser uma menina ou um menino equiprovável. Entretanto, esse problema em particular é paradoxal, pois é possível construir narrativas baseada no enunciado que parecem alterar muito pouco as informações do texto, mas que alteram totalmente a resposta à pergunta. Examine o problema colocando da seguinte forma:

(1) Imaginando-se uma pesquisa qualquer em que se pergunta a uma mulher se ela tem filhos. Supondo que a resposta seja afirmativa e que sejam duas crianças, pergunta-se: alguma delas é menina? ela responde que sim. Qual a probabilidade de ambas serem meninas: Resposta: um terço.

Como no lançamento de duas moedas, que pode resultar nas possibilidades equiprováveis CARA-CARA, CARA-COROA, COROA-CARA ou COROA-COROA, o nascimento de duas crianças pode resultar em MENINA-MENINA, MENINA-MENINO, MENINO-MENINA ou MENINO-MENINO.

Como se sabe que, pelo menos uma das crianças é menina, a última situação provável (MENINO-MENINO) é impossível. Portanto, MENINA-MENINA (duas meninas) é um resultado dos três resultado equiprováveis. Assim, a probabilidade é de um terço. Em outros termos, tem-se um clássico problema de probabilidade condicional

$$P(MENINA|MENINA) = \frac{P(MENINA \cap MENINA)}{P(MENINA)}$$

$$P(MENINA \cap MENINA) = \frac{1}{4} \text{ e } P(MENINA) = \frac{3}{4};$$

$$P(MENINA|(MENINA) = \frac{P(MENINA \cap (MENINA)}{P(MENINA)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Considera-se agora o mesmo problema com a história elaborada da seguinte forma:

(2) Alguém faz uma nova amiga e pergunta a ela se tem algum filho. Ela responde: sim, dois - com seis e dez anos de idade. Então a pessoa pergunta também: a mais velha é menina? Sim, responde ela. Qual é a probabilidade de ambas a crianças serem meninas?

Resposta: um meio. A pergunta, na verdade, agora é: se seu primeiro filho é uma menina, qual é a probabilidade de seu segundo filho ser menina? A probabilidade do nascimento de uma menina ou de um menino é a mesma, isto é 50%.

Sob outro ponto de vista, os resultados possíveis para o nascimento de duas crianças por ordem de nascimento agora só podem ser MENINA-MENINA ou MENINA-

MENINO, dois resultados equiprováveis antes de se obter a informação adicional sobre o sexo da criança mais velha. Eles ainda são equiprováveis. Como MENINA-MENINA é uma de duas ocorrência possíveis equiprováveis, a probabilidade de duas meninas é de 50%.

E, finalmente, considera-se uma terceira versão do problema:

(3) Alguém faz uma nova amiga e pergunta se tem filhos. Ela responde: sim, dois. Alguma menina? Sim. No outro dia você a vê com uma garota. Você pergunta: é esta sua filha? sim, ela responde. Qual a probabilidade de seus filhos serem meninas? Resposta: metade.

Isso parece estranho porque aparentemente não se tem nenhuma informação a mais do que no primeiro exemplo; e, ainda assim, as probabilidades são diferentes. Antes de a vir pela segunda vez, já era sabido que um dos seus filhos era uma menina; e, no segundo encontro, não sabia nada a respeito da ordem dos nascimentos. Mas, novamente, a pergunta mudou. A pergunta agora é: qual a probabilidade de uma criança que você não conhece ser menina? e essa probabilidade é a mesma do nascimento de uma menina? Em outras palavras, os resultados possíveis são o que você está vendo uma menina e não está vendo a outra menina (MENINA-MENINA), ou que você está vendo uma menina e não está vendo a outra criança, um menino (MENINA-MENINO).

Como duas meninas é, novamente, uma das possibilidades entre duas equiprováveis, qual a probabilidade de duas meninas?

A resposta que se obtém depende da história contada; depende de como você fica sabendo que pelo menos uma das crianças é de sexo feminino. Considerando o quanto a formulação do problema afeta a resposta nesse simples exemplo, não é de se admirar que a probabilidade seja uma ciência que deixa muita gente perplexa.

5.4 Problema do Carcereiro

José, Paulo e Carlos estão presos. O carcereiro é o último a saber qual deles está condenado à morte e quais são os outros dois que serão libertados. José, que tem uma probabilidade 1/3 de ser executado, escreveu uma carta para sua mãe e quer que ela seja entregue por Paulo ou Carlos, o que for libertado.

Quando José pergunta ao carcereiro se deve entregar sua carta a Paulo ou a

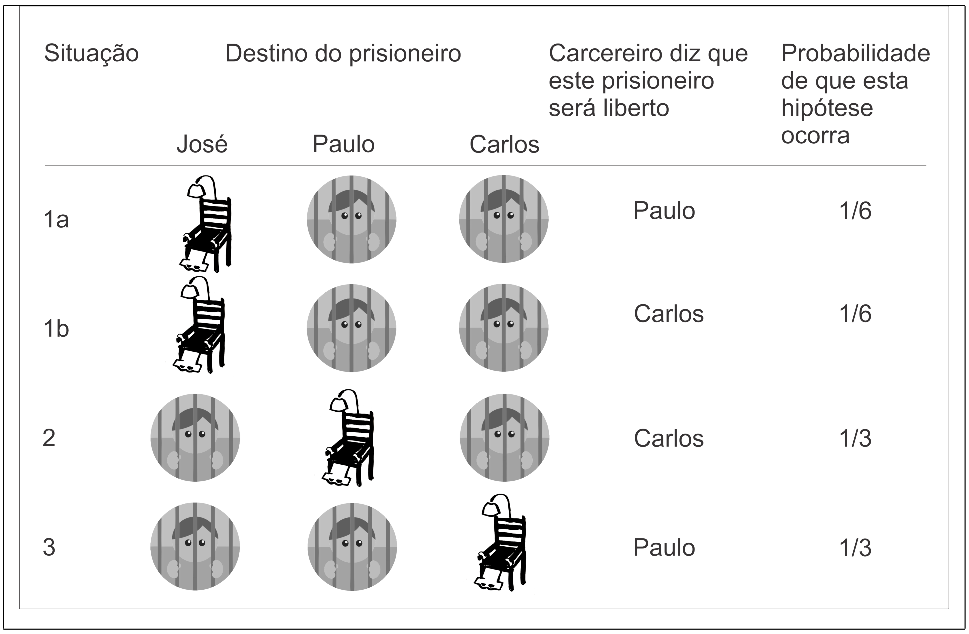
Carlos, ele, um homem compassivo, vê-se diante de dilema. Se relevar a José o nome do homem que será libertado, pensa ele, então José terá uma probabilidade de $\frac{1}{2}$ de ser condenado à morte, já que, ou José ou o outro homem restante será executado.

Se ele ocultar a informação, as chances de José continuam sendo de $\frac{1}{3}$. Como José já sabe que um dos dois outros homens será libertado, como suas chances de ser executado podem ser afetadas por saber o nome do homem, a resposta mais curta é que as chances de José não mudam e que a preocupação do carcereiro é equivocada. Mesmo que José venha a conhecer o nome do homem que será libertado, ele ainda terá uma probabilidade de $\frac{1}{3}$ de ser executado.

O homem que não foi indicado tem agora uma probabilidade de $\frac{2}{3}$ de ser executado! Como isso pode ser possível?

O paradoxo do carcereiro é: caso ele divulgue o nome de um dos dois prisioneiros que será libertado, isso mudará a probabilidade dos outros dois de serem executados?

De início, cada uma das situações (1), (2) ou (3) abaixo é equiprovável, cada uma com a probabilidade de $\frac{1}{3}$ de acontecer.



Situação	Destino do prisioneiro: José	Paulo	Carlos	Carcereiro diz que este prisioneiro será liberto	Probabilidade de que esta hipótese ocorra
1a				Paulo	1/6
1b				Carlos	1/6
2				Carlos	1/3
3				Paulo	1/3

Se a situação verdadeira for a (1) (isto é, se José estiver sido condenado à morte), Então (1a) e (1b) são equiprováveis, pois o carcereiro tem a opção de indicar Paulo ou Carlos. Metade das vezes o carcereiro irá selecionar Paulo; e a outra metade, selecionar

Carlos. Como a situação (1), há uma probabilidade de $\frac{1}{3}$ e (1a), por exemplo, irá ocorrer metade das vezes em que se der essa situação, então, a probabilidade de ocorrer (1a) é de metade de $\frac{1}{3}$, ou que equivale a $\frac{1}{6}$. Uma análise semelhante é válida também para (1b).

Agora, se o carcereiro contar a José que Paulo será libertado, somente poderá ocorrer a situação (1a) ou (3); ou José, ou Carlos, será executado. A princípios, o resultado (3) era duas vezes mais provável que o (1a), com a probabilidade de $\frac{1}{3}$ contra $\frac{1}{6}$, e (3) ainda é mais provável duas vezes que (1a). Assim, José tem uma probabilidade duas vezes maior de ser libertado do que ser condenado. Ele tem 2 chances em 3 de ser libertado e apenas 1 chance em 3 de ser executado.

Observa-se que agora Paulo foi indicado, Carlos tem o dobro de possibilidades de ser executado. Nas situações (2) e (3), o carcereiro não pode escolher quem indicar. Esse fenômeno é conhecido como *escolha restrita.*

Suponha-se que alguém esteja em um programa de sorteios e que lhe permitam escolher entre três portas: atrás de uma delas, há um automóvel e atrás das outras, cabras. Escolhendo-se uma porta, por exemplo a n^o1, e o apresentador, por saber o que há atrás das portas, abra outra, a de n^o3, por exemplo, onde há uma cabra. Então ele lhe diz: quer escolher a porta n^o2? Nesse momento, é interessante pensar: há vantagem em mudar de opção? A resposta mais mais vantajosa deve ser mudar sua opção de porta.

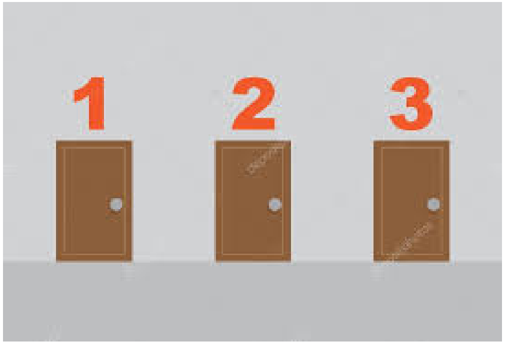


Figura 9: Escolhas de Portas

Originalmente, as chances de você escolher a porta com o automóvel era de 1 em 3, ou $\frac{1}{3}$. Da mesma forma que não se muda a chance de José ser executado, por ser-lhe informado o nome de um dos outros dois prisioneiros que seria libertado, também não mudou sua probabilidade de selecionar a porta atrás da qual havia o carro, agora que já viu a cabra. Portanto, se o indivíduo confirmar a mesma escolha, depois de uma porta ter sido eliminada, sua chance de conseguir o carro é de $\frac{1}{3}$. Porém, se mudar essa escolha depois de uma porta ter sido eliminada, suas chances de ganhar o carro passam a ser de $\frac{2}{3}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Seja P(A) a probabilidade de achar o carro na primeira escolha.
- Seja P(B) a probabilidade de achar o carro uma vez que uma porta foi aberta.

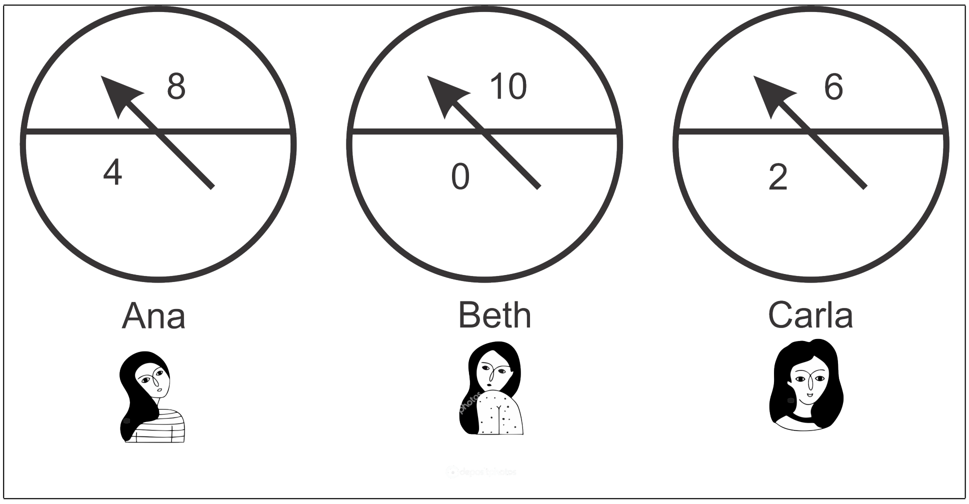
$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \text{ e } P(B) = \frac{1}{2};$$

$$P(A|(B) = \frac{P((A \cap (B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

Ou seja, com a mudança de porta o jogador passa a ter 67% de chance de ganha o carro.

5.5 Problema da Roleta

O próximo paradoxo é o caso das roletas intransitivas. Imagina-se um jogo entre dois indivíduos, cada um com uma roleta que, ao ser girada livremente, pode apontar para um de dois números equiprováveis; o jogador que conseguir o número maior vence. São três as jogadoras: Ana, que tem uma roleta com os números 8 e 4; Beth, com uma roleta com os números 0 e 10; Carla, com uma roleta com os números 2 e 6.



Se Ana jogar com Beth, cada uma tem a mesma probabilidade de ganhar, pois Beth sempre perde com 0 e sempre ganha com 10. A roleta de Ana pode dar 4 ou 8, mas isso não importa. O que importa é o resultado da roleta de Beth: Se Beth jogar com Carla, cuja roleta pode dar 2 ou 6, cada uma tem uma probabilidade de 50% de ganhar; novamente, Beth sempre perde com 0 e sempre ganha com 10. Ana e Beth tem as mesmas condições de ganhar, assim como Beth e Carla. Podemos então concluir que Ana e Carla também tem as mesmas condições de ganhar?

Intuitivamente, podemos ter a sensação de que a resposta correta é sim. Mas na verdade não é. Se Ana jogar com Carla, existem quatro resultados possíveis, equiprováveis.

Se o resultado forem 8 e 6, Ana ganha; 8 e 2 Ana ganha; 4 e 2 Ana ganha; 4 e 6, Carla ganha, Carla consegue ganhar somente se sua roleta der 6 e de Ana der 4. A probabilidade de Ana vencer Carla e de 75%. Ana e Carla não tem as mesmas condições de ganhar.

Agora considere a seguinte situação: um jogo simultâneo entre as três jogadoras, como fica as probabilidades de ganho de cada uma e qual seria a melhor roleta a ser escolhida?

Uma forma equivocada de pensar é que a melhor roleta seria da Ana, uma vez que, em um jogo contra Beth ela tem 50% de chance de vencer, e em, um jogo contra Carla ela tem 75% de chance de vencer, o que não seria a escolha errada se as roletas forem jogadas duas a duas, porém em um jogo com as três roletas, a melhor escolha seria a roleta que está com a Beth, como será descrito na tabela a seguir:

Ana	Beth	Carla	Vencedora
8	10	6	Beth
8	0	6	Ana
8	10	2	Beth
8	0	2	Ana
4	10	6	Beth
4	0	6	Carla
4	10	2	Beth
4	0	2	Ana

Ana tem 37,5% de ganhar, Beth tem 50% de chance de ganhar e Carla tem 12,5% de chance de ganhar.

5.6 Paradoxo de Simpson

O exemplo final da natureza não intuitiva da probabilidade é o chamado Paradoxo de Simpson. Descobriu-se que em uma faculdade, estavam matriculando uma proporção menor de mulheres do que homens. Os administradores queriam descobrir se havia um departamento responsável pela distorção nas estatísticas gerais.

Durante as investigações, coletaram dados de matrículas de cada departamento da instituição. Na esperança de encontrar o departamento culpado por prejudicar sua imagem, descobriram, na verdade, que em todos os departamentos a proporção de matrículas de mulheres era mais alta que as de homens.

Aparentemente, estava faltando alguma informação ou talvez ela tivesse sido mal computada. Se cada departamento é contado apenas uma vez e não há sobreposição, como e possível ter uma proporção maior de mulheres em cada departamento e uma proporção menor no conjunto total?

Vamos supor que a faculdade tem uma taxa de matrícula de $\frac{50}{60}$ ou aproximadamente 56% para mulheres em comparação com $\frac{60}{100}$, ou 60% para homens, e tenha dois departamentos (ver Tabela abaixo).

No departamento 1, 50 mulheres inscreveram-se e 20 são aceitas, 30 homens inscreveram-se e 10 são aceitos. A proporção de matrícula de $\frac{20}{50}$, ou 40%, é comparativamente favorável as mulheres em relação a proporção de matrículas de homens, $\frac{10}{30}$, aproximadamente 33%.

No departamento 2, 40 mulheres inscrevem-se e 30 são aceitas; 70 homens inscrevem-se e 50 são aceitos. A proporção de matrícula de mulheres é $\frac{30}{40}$, ou 75%, comparada com a proporção de matricula de homens de $\frac{50}{70}$, ou aproximadamente 71%. Apesar disso, quando os dois conjuntos de estatísticas são combinados, a proporção de matrícula de mulheres, $\frac{50}{90}$, é menor que a de homens $\frac{60}{100}$.

O maior obstáculo ao desenvolvimento da probabilidade sempre foi a falta de compreensão dos resultados equiprováveis em todos os eventos com exceção dos mais simples, associado a crenças supersticiosas no destino ou na sorte.

Há comprovação que, para um simples sorteio ou lançamento de dados, qualquer que seja o número de faces, a noção de equiprovável era bem compreendida desde os tempos antigos. Com o astrágalo [10], entretanto, que não tem faces com probabilidade iguais caírem voltadas para cima e em jogos com dois dados ou mais, o conceito de resultado equiprovável torna-se extremamente difícil de compreender.

Embora alguns dados antigos fossem muito bem feitos e exatos, sem uma grande experiência ou uma intuição aguçada, é dificílimo identificar os resultados equiprováveis de um evento composto, como o lançamento de dois ou três dados de seis faces.

[10](Astrágalo) Em anatomia, chama-se astrágalo (português europeu) ou tálus (português brasileiro) ao osso do pé dos mamíferos (nas extremidades inferiores dos bípedes ou nas patas traseiras dos tetrápodes) quearticula com os ossos da perna (tíbia e fíbula), formando o tornozelo. O tálus tem o formato de um cubo e, por esse motivo, foi muito utilizado em jogos de azar na Antiguidade como uma espécie de precursor dos dados modernos, principalmente na Grécia e na Mesopotâmia, $https://pt.wikipedia.org/wiki/TC3A1lus$

	Mulheres	Mulheres	Homens	Homens
Departamento	Inscrições	Matrículas	Inscrições	Matrículas
1	50	20 (40%)	30	10 (33%)
2	40	30 (75%)	70	50 (71%)
Total	90	50(56%)	100	60 (60%)

O paradoxo de Simpson: se uma proporção de matrícula de mulheres é maior do que a de homens em cada departamento da faculdade, como pode a proporção de matrícula de mulheres para o total da faculdade ser menor do que a de homens?

Essa compreensão falha, aliada as concepções equivocadas a respeito da probabilidade de curto prazo em comparação com aquelas de longo prazo, incentivou uma crença de período de boa ou má sorte, possivelmente provocado por alguma divindade.

Os antigos gregos parecem ter concluído, do seus encontros com o acaso, que a precisão e a lei residiam somente no reino dos deuses, e que o caos e a irregularidade caracterizavam o mundo dos homens. Por não serem capazes de conciliar suas noções idealizadas das leis naturais com as mesmas evidências de um mundo físico imperfeito, eles não conseguiram desenvolver a ciência da probabilidade.

Durante a idade média, entretanto as ideias sobre o acaso fossem imprecisas, não foi impossível à mente medieval captar noções corretas sobre a probabilidade.

O historiador Edmund Byrne [25] destaca que o povo da idade média, como nós, "estava com contato diário com as confusas incertezas do inesperado, do acidental, do evento aleatório". Por que as teorias a respeito dos jogos de azar, da frequência, da aleatoriedade e da probabilidade apareceram muito tarde?

Inúmeras explicações para essa lenta evolução foram apresentadas por uns e refutadas por outros. Entre elas, está a heresia de inserir o acaso numa decisão divina; a obsessão com o determinismo e a necessidade, a falta de exemplos empíricos de alternativas equiprováveis; a inexistência de um problema econômico que a ciência da probabilidade resolvesse; a falta de um sistema adequado de notação numérica; a inexistência de análise combinatória; a superstição dos jogadores; e as barreiras morais ou religiosas, particularmente na Igreja Cristã, que acreditava que tudo, mesmo as pequenas coisas, acontecia por vontade de Deus.

M.G Kendall, [25], afirma que "a humanidade parece ter levado centenas de anos para acostumar-se a um mundo onde alguns acontecimentos não tinham causa; ou pelo menos, onde eventos de vastos setores eram determinados por uma causalidade tão remota que poderia ser representado por um modelo não casual. É, de fato, a humanidade como um todo ainda não se acostumou à ideia.

O homem na sua infância ainda tem medo do escuro, e poucas perspectivas são tão sombrias quanto a do futuro de um universo sujeito apenas à lei mecanicista e à sorte cega".

A curto prazo, o acaso pode parecer inconstante e injusto. E embora as experiências com frequências a longo prazo possam ajudar a modificar alguns de nossos comportamentos desajustados baseado em uma incompreensão aleatória e da probabilidade, um prazo muito longo pode ser necessário.

Considerando-se as concepções equivocadas, as inconsistências, os paradoxos e os aspectos não intuitivos da probabilidade, não deveria ser surpresa que, como civilização, levamos muito tempo para desenvolver intuições corretas. Na realidade, todos os dias podemos ver sinais de que a espécie humana ainda não tem um senso de probabilidade altamente desenvolvido. Talvez, a curto prazo, seja melhor que todos nós abordemos com cautela nossos encontros inesperados com o acaso.

6 Cálculos Interessantes de Probabilidade

O objetivo desta parte é mostrar alguns cálculos de probabilidades relevantes e nem tão relevantes assim para nossa vida, porém com complexidades matemática. Como por exemplo, o problema do casamento, mostrando que existem várias ferramentas matemáticas e estatísticas para a resolução dos mais diversos problemas.

Toda construção deste capítulo será baseada nas referências, [26], [27], [28].

6.1 Problema do Funcionário

O problema clássico conhecido como Problema do Funcionário (e algumas vezes chamado de Problema da Secretária ou do Casamento) é um problema apresentado da seguinte forma:

1) Um homem deseja contratar um novo funcionário para sua empresa.

2) O número de pessoas interessadas é conhecido e igual a n.

3) As pessoas interessadas serão entrevistadas em ordem aleatória (não necessariamente os melhores candidatos a funcionário serão os primeiros a serem entrevistados).

4) Supõe-se que depois que cada um dos interessados é analisado, você consegue dizer claramente qual deles é o melhor.

5) Analise é feita durante o primeiro encontro. E durante o encontro a contratação do funcionário deve ser feito ou a dispensa do mesmo deve acontecer, depois de rejeitá-lo, você NÃO pode mais chamá-lo novamente.

6) Você fica satisfeito apenas com a melhor escolha de Funcionário. Ou seja, você ganha 1 ponto se encontrar o melhor funcionário e 0 se contratar qualquer outro que não seja o melhor.

Com o objetivo de simplificar a apresentação do problema, associar-se-á cada pretendente a funcionário a um número inteiro. Aquela que possui o menor número inteiro é o melhor no rank.

Exemplo:

Considere que existam apenas 3 candidatas a funcionária com os seguintes nomes: Ana, Bia e Carla, onde Ana é a melhor, seguida de Bia e depois Carla. Qual a chance de Ana (a melhor candidata) ser a primeira a ser a se apresentar e a contratação da funcionária ser feita? Como elas são apresentadas aleatoriamente a chance é $1/3$. Se você escolher a primeira interessada, com $1/3$ de chance você vai escolher a funcionária correta. Será que você pode fazer melhor?

Considere a seguinte heurística: Escolha a segunda interessada se ela for melhor que a primeira e, em caso contrário, escolha a terceira.

Qual a probabilidade de se escolher a funcionária desejada usando essa heurística .Olhar-se a as sequências de eventos possíveis:

Caso 1: Ana, Bia, Carla [Não escolho a melhor funcionária]

Caso 2: Ana, Carla, Bia [Não escolho a melhor funcionária]

Caso 3: Bia, Ana, Carla [Escolho a melhor funcionária (na segunda rodada), pois Ana é melhor que Bia]

Caso 4: Bia, Carla, Ana [Escolho a melhor funcionária (na terceira rodada), pois Carla é pior que Bia]

Caso 5: Carla, Ana, Bia [Escolho a melhor funcionária (na segunda rodada), pois Ana é melhor que Carla]

Caso 6: Carla, Bia, Ana [Não escolho o melhor funcionária (pois seguindo a lógica escolheria Bia por ser melhor que Carla]

Logo, usando essa heurística, escolhe-se a corretamente com probabilidade $1/2$ que é muito melhor que escolher aleatoriamente a primeira, a segunda, ou a terceira.

Generalizando essa ideia, é a solução para um número maior de n, seguindo essa ideia bem simples verificar-se a o que acontece a seguir.

Suponha que P_i seja a probabilidade de vencer (escolher a funcionária correta) usando uma estratégia ótima que considera apenas as funcionárias que foram apresentadas em:

$$\{i+1, \cdots, n\} \text{ e } P_{i+1}.$$

Seja a probabilidade de vencer (escolher a funcionária correta) usando uma estratégia ótima que considera apenas as funcionárias que foram apresentadas em:

$$\{i+2, \cdots, n\}.$$

Note que $P_i \geq P_{i+1}$, pois no primeiro conjunto tem mais candidatas a funcionárias e estamos usando a mesma estratégia em ambos os casos.

Note também que é ótimo parar na funcionária i, se $i/n > P_i$, pois a probabilidade de a funcionária correta estar no conjunto é maior que a probabilidade de a funcionária correta estar no conjunto $\{1, \cdots, i\}$. Logo, é ótimo parar quando $i/n > P_i$.

Logo, podemos considerar a seguinte estratégia:

Rejeitar as primeiras $s-1$ candidatas a funcionária para estabelecer um benchmark [11], e depois escolher a primeira funcionária que for melhor que aquelas rejeitadas. Se ela não for melhor que as anteriores, simplesmente ficamos com a última e, consequentemente, bem insatisfeitos.

[11] (benchmark) Consiste no processo de busca das melhores práticas numa determinada indústria e que conduzem ao desempenho superior. É visto como um processo positivo e através do qual

Por que a primeira?

Note que qualquer outra estratégia que não escolha a primeira estratégia, estará fazendo a escolha em um conjunto menor e, portanto, terá a mesma ou uma pior probabilidade de estar escolhendo corretamente.

Álgebra:

Seja $\pi(s,n)$ a probabilidade de escolher a funcionária desejada rejeitando as $s-1$ primeiras interessadas e escolhendo a partir daí a primeira funcionária que seja melhor que todas as outras já rejeitadas.

Logo, usando o teorema de Bayes, o teorema de Bayes (alternativamente, a lei de Bayes ou a regra de Bayes) descreve a probabilidade de um evento, baseado em um conhecimento a *priori* que pode estar relacionado ao evento. O teorema mostra como alterar as probabilidades a priori tendo em vista novas evidências para obter probabilidades a *posteriori*

$$\pi(s,n) = \sum_{k=s}^{n} P(\text{k-esima ser a melhor e ser selecionada})$$

$$= \sum_{k=s}^{n} P(\text{k-esima ser a melhor})\text{P(k-esima ser selecionada / Ela ser a melhor)}$$ Note que

(1)P(k-ésima ser a melhor) $= 1/n$

(2)P(k-ésima ser selecionada/Ela ser a melhor)

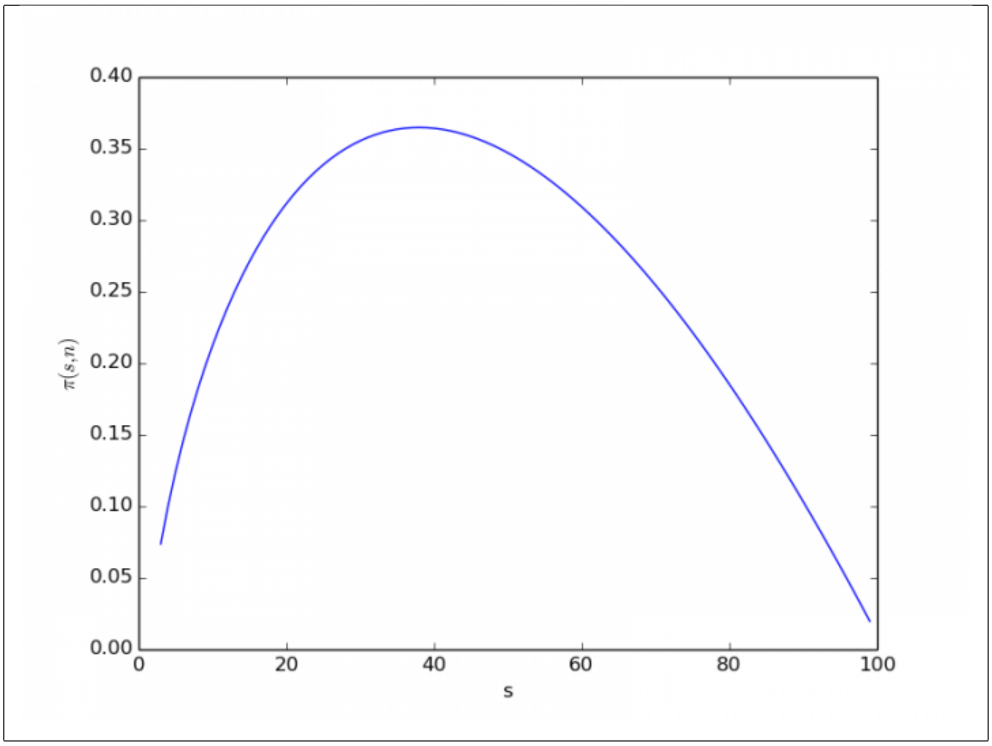
Pode ser calculada percebendo o seguinte. Se $k < s$, então essa probabilidade vale 0, pois a melhor funcionária estava na região de experimentação e nunca poderá ser selecionada. Para $k \geqslant s$, a estratégia irá funcionar se uma das $s-1$ primeiras interessadas for à melhor entre as $k-1$ interessadas. Ou seja, você vai justamente escolher a k, pois seu conjunto de experimentação formado pelas $s-1$ possui as melhores funcionárias dentre aquelas $k-1$ que você não deve selecionar.

uma empresa examina como outra realiza uma função específica a fim de melhorar a forma como realiza a mesma ou uma função semelhante. O processo de comparação do desempenho entre dois ou mais sistemas é chamado de benchmarking e as cargas usadas são chamadas de benchmarks, $https://pt.wikipedia.org$

Logo,

$$\pi(s,n) = \frac{1}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{s-1}{k-1} = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}, 1 < s \leqslant n \tag{13}$$

Para o caso de $n = 100$, veja a distribuição de $\pi(s,n)$ na figura abaixo:



O valor ótimo s^* é igual o menor valor de s (inteiro) que satisfaz a desigualdade:

$$\frac{s}{n} > \pi(s+1,n).$$

Ou seja,

$$\frac{s}{n} > \pi(s+1,n) = \frac{s}{n}(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}).$$

que implica que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} < 1.$$

Aproximação para n grande:

Uma aproximação importante para $\pi(s,n)$ ocorre quando n (o número de funcionárias é muito grande). Nesse caso,

$$\pi(s,n) = \frac{s}{n} log(n/s).$$

Existem referências interessantes em que se pode conhecer extensões desse problema [26].

7 Probabilidade Aplicada à Genética Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar de forma resumida alguns conceitos de genética assim como algumas resoluções de problemas usando cálculos de probabilidade, serão mostradas também as pesquisas que influenciaram na escrita desta temática, e as possíveis aplicações da pesquisa. Toda construção deste capitulo será baseada nas referências [29], [30], [31], [32], [33], [34].

7.1 Probabilidade Aplicada à Genética

A probabilidade, principalmente quando aliada à estatística, é indispensável para que se possa projetar um futuro em que o ensino da matemática não se restrinja à manipulação de números, mas também com a análise crítica dos resultados obtidos.

O porquê desta temática?

Verifica-se, no Brasil, apesar dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), uma preocupação de apenas cumprir o currículo, simplesmente acrescentando um tópico a mais a ser estudado, sem permitir o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

Nos dias atuais, cada vez mais cedo, os alunos se deparam com situações em que é necessário o confronto com situações do mundo real, em que é preciso analisar, questionar, relacionar e ponderar, pois a escolha correta dos caminhos a serem tomados é decisiva. A probabilidade pode proporcionar tudo isso ao aluno.

Mendoza e Swift (1981)[24], destacam a importância do ensino de probabilidade e estatística para ajudar nas tomadas de decisões inerentes às situações da vida social e econômica, ao desenvolver as capacidades de análises, comparações, sondagens e escolhas amostrais.

Alem disso, esse trabalho tem por objetivo investigar mais a hipótese de que professores de biologia tem dificuldades para ensinar a genética quando se envolvem cálculos interpretativos na área da probabilidade. Para tentar chegar a alguma conclusão, serão analisados alguns fatores no curso de formação dos futuros biólogos.

A motivação da pesquisa partiu de uma conversa com professores da área das Ciências Biológicas na qual foi constatada a dificuldade que eles enfrentam durante as ministrações de aulas nos cursinhos por conta da Probabilidade dentro do estudo genética. Nesse contexto, diversas vezes, observou-se situações constrangedoras em que o professor de matemática precisou ministrar a matéria de genética porque os professores de biologia não dominavam a parte de probabilidade com esta aplicação.

Diante disso, foi feito um levantamento de dados bibliográfico na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no banco de Dados do Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT) e verificou-se o seguinte sobre a temática:

Local	Tema	Quantidade
BDTD	Probabilidade	8.978
PROFMAT	Probabilidade	108
BDTD	Probabilidade no Ensino Médio	413
PROFMAT	Probabilidade no Ensino Médio	10
BDTD	Probabilidade no ensino da Genética	183
PROFMAT	Probabilidade no ensino da Genética	0

Após uma pesquisa feita na Universidade Católica de Brasília no curso de Ciências Biológicas no ano de 2019, verificou-se o índice de aprovação dos cursos de biologia nos anos de 2010 a 2017 referentes às matérias envolvendo genético com aplicação de cálculos de probabilidade, tais dados são exibidos na tabela a seguir.

Ano	Semestre	I.A.G	I.A.O.M	N.M.G	N.M.C
2010	1º	77%	92%	7,0	9,0
2010	2º	83%	95%	7,5	9,2
2011	1º	85%	97%	7,0	9,5
2011	2º	76%	90%	7,2	8,5
2012	1º	90%	96%	8,0	8,6
2012	2º	75%	94%	7,8	8,2
2013	1º	83%	95%	8,2	9,2
2013	2º	79%	96%	7,5	9,4
2014	1º	79%	92%	7,3	9,6
2014	2º	79%	98%	7,4	9,0
2015	1º	84%	91%	7,6	9,5
2015	2º	74%	98%	7,9	8,7
2016	1º	92%	95%	8,5	8,5
2016	2º	90%	96%	8,6	8,9
2017	1º	83%	94%	7,4	8,5
2017	2º	78%	95%	7,4	8,9

- I.A.G = índice de aprovação de alunos de biologia referente ao semestre, na matéria de genética.
- I.A.O.M = índice de aprovação dos alunos de biologia referente ao semestre em que os mesmos cursaram genética (sem incluir os alunos desistentes).
- N.M.G = Notas médias de Genética.
- N.M.C = Notas médias do mesmo semestre dos alunos, não incluindo desistentes nem a matéria de genética.

Através da análise dos dados podemos verificar facilmente que tanto as notas quanto os índices no que se trata a genética são menores que quando levamos em conta o geral das matérias cursadas no semestre.

Pesquisa realizada através da análise do banco de dados do coordenador do curso de ciências biológicas referentes aos anos 2010 a 2017.

Comprovou que existe indícios de que a hipótese da pesquisa informal pode esta correta, a hipótese que era, as matérias relacionadas com cálculos matemáticos são as de maiores índices de reprovação e de menores notas, quando pegamos a genética como exemplos de pesquisa os índices até que não são baixos comparadas com outras matérias que também envolvem cálculos, contudo se compararmos com matérias que não envolve cálculos são bem expressivos, porém em entrevista feita com alguns alunos recém aprovados, não existe uma total segurança para ensinar o assunto uma vez que o mesmo quem em cálculos matemático. Neste trabalho com objetivo de facilitar o ensino de uma matéria com altos índices de reprovação vai mostrar como aplicar a probabilidade na genética de uma forma bem simples e intuitiva.

7.2 Uma Breve Introdução sobre Genética

As Leis de Mendel são um conjunto de fundamentos que explicam o mecanismo da transmissão hereditária durante as gerações.

Os estudos do monge Gregor Mendel foram a base para explicar os mecanismos de hereditariedade. Ainda hoje, são reconhecidos como uma das maiores descobertas da Biologia. Isso fez com que Mendel fosse considerado o “Pai da Genética”.

7.2.1 Experimentos de Mendel

Para conduzir os seus experimentos, Mendel escolheu as ervilhas-de-cheiro (Pisum sativum). Essa planta é de fácil cultivo, realiza autofecundação, possui um curto ciclo reprodutivo e apresenta muita produtividade.

A metodologia de Mendel consistiu em realizar cruzamentos entre diversas linhagens de ervilhas consideradas “puras”. A planta era considerada pura por Mendel quando, após seis gerações, ainda apresentava as mesmas características.

Após encontrar as linhagens puras, Mendel começou a realizar cruzamentos de polinização cruzada. O procedimento consistia, por exemplo, em retirar pólen de uma planta com semente amarela e depositá-lo sob o estigma de uma planta com sementes verdes.

As características observadas por Mendel foram sete: cor da flor, posição da flor no caule, cor da semente, textura da semente, forma da vagem, cor da vagem e altura da planta.

Ao longo do tempo, Mendel foi realizando diversos tipos de cruzamentos, com objetivo de verificar como as características eram herdadas ao longo das gerações. Com isso, ele estabeleceu as suas Leis, que também ficaram conhecidas por Genética Mendeliana.

A Primeira Lei de Mendel, que também recebe o nome de Lei da Segregação dos Fatores ou Moibridismo, ela possui o seguinte enunciado:

> Cada caráter é determinado por um par de fatores que se separam na formação dos gametas, indo um fator do par para cada gameta, que é, portanto, puro.

Essa Lei estabelece que cada característica é determinada por dois fatores, que se separam na formação dos gametas. Mendel chegou a essa conclusão quando percebeu que linhagens diferentes, com os diferentes atributos escolhidos, sempre geram sementes puras e sem alterações ao longo das gerações. Ou seja, plantas de sementes amarelas sempre produziam 100% dos seus descendentes com sementes amarelas.

Assim, os descendentes da primeira geração, denominada de geração F1, eram 100% puros.

- Seja “A o alelo dominante.
- Seja “a” o alelo recessivo.

	A	A
A	AA	AA
a	Aa	Aa

Como todas as sementes geradas eram amarelas, Mendel realizou a autofecundação entre elas. Na nova linhagem, geração F2, surgiram sementes amarelas e verdes, na proporção 3:1 (amarelas:verdes).

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Em virtude disso, Mendel concluiu que a cor das sementes era determinada por dois fatores: um fator dominante, que condiciona sementes amarelas; e o outro era recessivo, que determina sementes verdes.

A Primeira Lei de Mendel se aplica para o estudo de uma única característica. Porém, Mendel ainda estava interessado em saber como ocorria a transmissão de duas ou mais características em simultâneo.

A Segunda Lei de Mendel, que também recebe o nome de Lei da Segregação Independente dos Genes ou Diibridismo, ela possui o seguinte enunciado:

As diferenças de uma característica são herdadas independentemente das diferenças em outras características.

Nesse caso, Mendel também realizou o cruzamento de plantas com diferentes características. Ele cruzou plantas com sementes amarelas e lisas com plantas de sementes verdes e rugosas.

Mendel já esperava que a geração F1 seria composta por 100% de sementes amarelas e lisas, pois essas características apresentam caráter dominante.

Por isso, fez o cruzamento dessa geração, pois imaginava que iriam surgir sementes verdes e rugosas, e ele estava certo.

Os genótipos e fenótipos cruzados eram os seguintes:

V: Dominante (cor Amarela)

R: Dominante (forma Lisa)

vv: Recessivo (cor Verde)

rr: Recessivo (forma Rugosa)

Mendel descobriu diferentes fenótipos na geração F2, nas seguintes proporções: 9 amarelas e lisas; 3 amarelas e rugosas; 3 verdes e lisas; 1 verde e rugosa.

	RR	Rr	Rr	rr
VV	Amarela lisa	Amarela lisa	Amarela lisa	Amarela Rugosa
Vv	Amarela lisa	Amarela lisa	Amarela lisa	Amarela Rugosa
Vv	Amarela lisa	Amarela lisa	Amarela lisa	Amarela Rugosa
vv	Verde lisa	Verde lisa	Verde lisa	Verde Rugosa

7.2.2 Breve Biografia de Gregor Mendel

Nascido no ano de 1822, em Heinzendorf bei Odrau, na Áustria, Gregor Mendel era filho de pequenos e pobres fazendeiros. Por esse motivo, ingressou como noviço no mosteiro de agostiniano da cidade de Brünn, em 1843, onde foi ordenado monge.

Posteriormente, ingressou na Universidade de Viena em 1847. Ali, estudou matemática e ciências, realizando estudos meteorológicos sobre a vida das abelhas e o cultivo de plantas. A partir de 1856, iniciou seu experimento procurando explicar as características hereditárias.

Seu estudo fora apresentado à “Sociedade de História Natural de Brünn”, em 1865. Todavia, os resultados não foram compreendidos pela sociedade intelectual da época. Mendel morreu em Brünn, em 1884, amargurado por não obter reconhecimento acadêmico de sua obra, a qual só foi valorizada décadas depois.

7.2.3 Resoluções de Exercícios Primeira e Segunda Lei de Meldel

1) A probabilidade de um casal albino ter uma criança do sexo feminino, também albina é:

Resolução: O albinismo é uma condição recessiva, logo os possíveis alelos de gens são expressos, conforme na tabela abaixo:

	a	a
a	aa	aa
a	aa	aa

Com a tabela, conclui-se que $\frac{4}{4}$ dos casos vão gerar alelos do tipo aa, isto é, 100% dos filhos nascerão albinos, porém como o exercício requer uma pessoa albina do sexo feminino, logo a probabilidade de nascer uma mulher é dada pela a tabela abaixo: Sendo os alelos xx, geradores de uma mulher, e os alelos xy, geradores de um homem

	x	x
x	xx	xx
y	xy	xy

Pode-se observar que $\frac{2}{4}$ dos resultados possíveis são mulheres, ou seja, há 50% de chance de nascer uma mulher e 50% de nascer um homem.

Pelo Princípio Multiplicativo, juntamente com a Probabilidade de Eventos Independentes descritos nos capítulos anteriores, tem-se:

$$\frac{4}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ ou seja } 50\%$$

2) Qual a percentagem de descendentes com o seguinte par de alelos "Aa", nascidos de uma mãe também com os mesmos pares de alelos "Aa"?

Resolução: Sendo a mãe Aa, o Pai pode ser, AA, Aa e aa, analisar-se a e será calculado para todos os três casos possíveis:

	A	a
A	AA	**Aa**
A	AA	**Aa**

Tabela 1

	A	a
A	AA	**Aa**
a	**Aa**	aa

Tabela 2

	A	a
a	**Aa**	aa
a	**Aa**	aa

Tabela 3

Independente do Pai tem-se $\frac{2}{4}$ ou seja 50% em cada caso.

3) O Gene Autossômico que condiciona pêlos curtos em cobaias, é dominante em relação ao gene que determina pêlos longos. Do cruzamento de cobaias heterozigotas nasceram 240 cobaias, das quais 180 tinham pêlos curtos. Entre as cobaias de pêlos curtos, o número esperado de heterozigotos é:

Resolução: Uma questão envolvendo números mais que usaremos as mesmas ideias, como ele é dominante pode ser representados pelos seguintes alelos AA e Aa, pela tabela 2 do exercício anterior temos que $\frac{3}{4}$, apresenta a característica dominante o que equivale no exercício a 180 cobaias, com alelos Aa temos 120 cobaias o cálculo é bastante simples; tenho $\frac{2}{4}$ dos alelos do tipo Aa em um total de 240

$\frac{2}{4}$ de $240 = 120$ casos.

4) Juliana, cuja avó materna e avô paterno eram albinos, preocupada com a possibilidade de transmitir o alelo para o albinismo a seus filhos, deseja saber qual a probabilidade de ela não ser portadora deste alelo, uma vez que nenhum de seus pais eram albinos?

Resolução: O albinismo é uma condição recessiva, logo os alelos da avó materna quanto do avô paterno são aa. Os alelos dos outros avós podem ser tanto AA quanto Aa.

	a	a
A	Aa	**Aa**
A	Aa	**Aa**

Tabela 1

	a	a
A	Aa	**Aa**
a	**aa**	aa

Tabela 2

Dividi-se a por casos: Tanto na tabela 1 quanto na 2 os alelos do avô materno, quanto da avó paterna, podem ser AA ou Aa, uma vez que, o texto nos afirma que os filhos não são albinos, independente dos alelos dos avós tanto a mãe quanto o pai de Juliana terão necessariamente os alelos Aa (ver tabelas), ou seja ao gerar Juliana ele pode ter a seguinte carga genética.

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

A probabilidade dela não ser portadora do alelo do albinismo é $\frac{1}{4} = 25\%$.

5) Numa população em equilíbrio Hardy-Weinberg a frequência do alelo dominante para um dado locus autossômico e dialélico é 0,6. Portanto, a frequência dos heterozigotos para este locus será:

Resolução: A soma da frequência dos alelos será sempre 100% ou 1. Como o texto diz que a frequência do alelo dominante é 0,6, e portanto a frequência do alelo recessivo será de 0,4.

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Alelos heterozigotos Aa aprecem duas vezes, “A” tem frequência de 0,6 e “a” frequência de 0,4 portanto fica:

$$2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48.$$

7.3 Sistema ABO

O sistema ABO são classificações do sangue humano nos quatro tipos existentes: A, B, AB e O. Enquanto que o Fator Rh é um grupo de antígenos o qual determina se o sangue possui o Rh positivo ou negativo. A herança sanguínea, ou seja, o tipo sanguíneo de uma pessoa, é determinada geneticamente, sendo um caso de alelos múltiplos, pelos genes I^A , I^B e i.

- Seja I^A representa genótipo que contém aglutinogênio A .
- Seja I^B representa genótipo que contém aglutinogênio B .
- Seja i representa genótipo que não contém aglutinogênio.

7.4 descobertos os Sistemas ABO e Rh

O sistema ABO foi descoberto no início do século XX, pelo biólogo austríaco Karl Landsteiner (1868-1943) e sua equipe de cientistas. Eles constataram algumas diferenças no sangue dos indivíduos, o que, certamente, esclareceu a morte de muitas pessoas após transfusões de sangue. Assim, a descoberta do Sistema ABO foi um marco importante da história da medicina, sendo o médico e biólogo Karl Landsteiner agraciado pelo (Prêmio Nobel de Fisiologia), em 1930.

Segundo os cientistas, a propriedade da incompatibilidade dos tipos sanguíneos foi corroborado por meio da reação imunológica entre as substâncias presentes no plasma sanguíneo e nas hemácias. Com isso, o sangue que sofreu aglutinação a partir de determinados antígenos presentes nas membranas das hemácias ficaram conhecidos por aglutinogênios (A e B). Enquanto que as substâncias aglutinadoras, anticorpos, encontradas no plasma sanguíneo, foram denominadas de aglutininas (anti-A e anti-B).

Sistema ABO				
Aglutinogênio	A	B	A e B	Nenhuma
Anticorpo	anti-B	Anti-A	Nenhuma	Anti-A e B
Fenotipo	A	B	AB	O
Genótipo	I^AI^A ou I^Ai	I^BI^B ou I^Bi	I^AI^B	ii
Pode Receber	Tipo A ou O	Tipo B ou O	Tipo A,B ,O a AB	Tipo O
Pode Doar	Tipo A ou AB	Tipo B ou AB	Tipo AB	Tipo A,B AB O

Além de desvendar a tipologia sanguínea, Karl Landsteiner (1868-1943) descobriu o Fator Rh (anticorpos), derivado do nome do “macaco do gênero Reshus”, animal o qual foi utilizado como cobaia nas investigações para o avanço do sistema ABO. As pesquisas demostraram que determinados tipos de sangue possuem ausência do fator Rh, uma vez que os indivíduos que apresentaram as hemácias aglutinadas pelo anticorpo Rh, foram classificadas como Rh positivas (Rh^{+}), enquanto que as hemácias dos que não se aglutinaram, foram chamadas de Rh negativas (Rh^{-}).

Sistema Rh	
Genótipo	Fenótipo
Rh^{-}	rr
Rh^{+}	RR ou Rr

1) Jorge, que tem tipo sangüíneo A, Rh^{-} e é filho de pai tipo A e mãe tipo B, recebeu transfusão de sangue de sua mulher Tânia, que é filha de pai e mãe do tipo B. Sabe-se que Tânia teve eritroblastose fetal ao nascer, a probabilidade do casal ter uma criança do tipo A, Rh^{+} é:

Resolução: O tipo sanguíneo (sistema ABO) e o fator Rh, são dois eventos independentes. Logo foi apresentado anteriormente, como calcular probabilidade de eventos independentes. De acordo com o tópico 4.3 deste trabalho, sabe-se que para resolver tal calculo basta considerar os eventos de forma separada e após suas resoluções multiplica-se os resultados.

Evento 1: A ideia é descobrir a probabilidade do filho de Jorge com Tânia nascer com tipo sanguíneo A.

Como Jorge tem pai do tipo A e mãe do tipo B e ele nasceu do tipo A. pode-se concluir que seu genótipo é do tipo $I^{A}i$

Tânia, por sua vez, é filha de pais do tipo$B$, logo pode-se concluir pela tabela a seguir seus possíveis genótipos.

	I^{B}	i
I^{B}	I^{B}, I^{B}	I^{B}, i
i	I^{B}, i	i, i

Como sabemos pelo fato de ela ter feito uma transfusão de sangue para o marido o único genótipo que isso seria possível é i, i, logo cruzando os genótipos dos pais temos as seguintes possibilidades para a criança:

	I^A	i
i	I^A, i	i, i
i	I^A, i	i, i

Logo temos $\frac{2}{4}$ ou 50% de chance de a criança nascer com genótipo A.

Evento 2: Fator Rh, Jorge tem fator Rh negativo representado por rr, e como Tânia teve eritroblastose fetal [12] ao nascer seu fator Rh positivo será representado pelo genótipo Rr.

	r	r
R	Rr	Rr
r	rr	rr

Ou seja, probabilidade de $\frac{2}{4}$ ou 50% do evento 2 ocorrer (Criança nascer com Rh^+).

Pelo princípio multiplicativo, juntamente com a probabilidade de eventos independentes descritos nos capítulos anteriores, tem-se:

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ ou seja } 25\%.$$

[12]Eritroblastose fetal é uma doença hemolítica causada pela incompatibilidade do sistema Rh do sangue materno e fetal. Ela se manifesta, quando há incompatibilidade sanguínea referente ao Rh entre mãe e feto, ou seja, quando o fator Rh da mãe é negativo e o do feto, positivo.

8 Considerações finais

A hipótese levantada neste trabalho, a respeito da dificuldade dos professores de Biologia ministrarem a matéria de Genética no Ensino Médio, quando os cálculos envolvem probabilidade, não pode ser comprovada por meio de aplicação de questionário. Entretanto, após a apuração dos dados, referentes (I.A.G); (I.A.O.M); (N.M.G) e (N.M.C) [13].

É possível observar que as notas no curso de genética comparadas com as outras notas do curso de ciências biológicas é menor e que a reprovação nos semestres que se cursam a genética é maior em relação aos outros semestres do curso de biologia.

Com isso, pode-se verificar que, mesmo que não gere reprovações nos dados analisados, existe indícios de um possível déficit dos estudantes, futuros professores na matéria de genética, quando comparada a outras matérias.

Foi feita uma pesquisa e apresentado um questionário. O questionário foi aplicado e não foi capaz de comprovar a hipótese levantada. Entretanto, quando analisado o banco de dados, pôde-se perceber que os alunos reprovavam acima da média quando se cursavam a matéria de genética, ainda que a quantidade dessas reprovações não fossem um número tão expressivo e significativo, era o semestre que havia mais reprovações.

E a nota dos que passavam era também uma nota inferior à média do curso. Ou seja, a nota dos que conseguiam passar ficava, normalmente, aquém do que era normal e esperado e boa parte não conseguia nota nem para aprovação.

No que se refere à probabilidade, o número de trabalhos acadêmicos com esse

---

[13]

- I.A.G = índice de aprovação de alunos de Biologia referente ao semestre, na matéria de genética.
- I.A.O.M = índice de aprovação dos alunos de Biologia referente ao semestre em que os mesmo cursaram Genética (sem incluir os alunos desistentes).
- N.M.G = Notas médias de Genética.
- N.M.C = Notas Médias do mesmo semestre dos alunos, não incluindo desistentes sem a matéria de Genética.

tema já mostra a importância de se aperfeiçoar este assunto. Conhecer sua historia, seus paradoxos e cálculos interessantes que envolvem probabilidade pode ajudar na tomada de decisões no dia a dia, pois estes fatores possuem aplicações na genética, na economia, na medicina e em muitas outras áreas do conhecimento. Logo, é pertinente conhecer mais de temas com tamanha relevância.

Referências

[1] BATANERO, C., *Research on Teaching and Learning Probabilit*, Springer, 2016.

[2] Seheldon..c., *Probabilidade um Curso moderno com Aplicações*, Livro curso de probabilidade, BOOKMAN, vol. 8 (2010), Capítulo 1.

[3] Elon.l.l., *Temas e Problemas*, Coleção, SBM, vol. 1 , Capítulo 6.

[4] Tizziotti, J.G., *Matemática 2º grau* , Volume II, 4ª edição - SP (1944), Capitulo 10.

[5] Plínio, J.O.S., *Introdução à análise combinatória*, 3ª edição SP: Unicamp, 2002.

[6] Morgado, a.c., *Matemática Discreta*, SBM, 1ª Edição. Rio de Janeiro, 2014,Capitulo 1-3.

[7] Tácito, p.c., *Germania*, Ebook, 1ª Edição. Alemanha, 1970, Capítulo 1-3.www.ebooksbrasil.org

[8] Viali, l.c., *Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades*, Revista Brasileira de História da Matemática. n. 16, v. 8, p. 143-153. Out. 2008.

[9] COUTINHO, C.Q.S., *Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta* , Revista Eletrônica de Educação Matemática.V2.3, 2007.

[10] COUTINHO, C. Q. S. e GONÇALVES, M. C., *O Livro Didático e a Formação do Professor de Matemática para o Ensino de Probabilidades*, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2, 2003, Santos. Anais. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003.

[11] SKATZ, V. J., *A History of Mathematics*,an introduction. Boston: AddisonWesley, 2009. capítulo 2

[12] SILVEIRA, J. F. P., *Início da matematização das probabilidades*, Versão 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/histo2c.html> Acesso em: 19 de Novembro de 2018.

[13] Galileo.G., *sopra le scoperte dei dadi*, 1623. In vol 8 , opere di Galileo Çalilei.TRad.E.H Thorne.Florença,Edizione Nationale ,1898. Reed.em David, 1962, pp 192-5.

[14] SEHELDON..C., *Probabilidade um Curso moderno com Aplicações*, Livro curso de probabilidade, BOOKMAN, vol. 8 (2010), Capitulo 2-4.

[15] DANTAS,C.A.B., *Probabilidade:Um Curso Introdutório*,2. ed. SãoPaulo, SP:Edusp ,2004.

[16] DANTAS, E. A., *Probabilidade: Uma reflexão teórico-prática no ensino da Matemática*,2.ed.SãoPaulo,SP:Edusp,2004

[17] ISAAC, R., *The Pleasures of Probability* New York: Springer-Verlag, 1995

[18] MEYER, PAUL L., *Probabilidade - Aplicações Estatística* Rio de Janeiro, LTC, 2013.

[19] MKOLMOGOROV, A. N., *Foundations of the Theory of Probability* New York: Dover, 2018.

[20] MAGALHAES, M. N, *Probabilidade e Variáveis Aleatórias* São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2006.

[21] REVISTA DO PROFESSOR., *Revista do professor de matemática* SBM, v. 25, 1994

[22] D. J. BENNETT, M., *Aleatoriedade*, Volume 1, São Paulo 2003, páginas 20 a 31 .

[23] COUTINHO, C. Q. S. E GONÇALVES, M. C., *O Livro Didático e a Formação do Professor de Matemática para o Ensino de Probabilidades*, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2, 2003, Santos. Anais. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003.

[24] MENDOZA, L. P., *Why Teach Statistics and Probability*, Nova York: Yearbook, 1981.

[25] SHULTE, A P.; SMART, J. R., *Teaching Statistics and Probability*, Nova York: Yearbook, 1981.

[26] BEARDEN, J.N., *A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoff*, Journal of Mathematical Psychology, v. 50, p 58-59, 2006.

[27] CHOW, Y., ROBBINS, H. E SIEGMUND, D., *the theory of optimal stopping*, Dover, 1991.

[28] Revista cientifica., *Matemática Universitária*, edição nº 48 e nº49, SBM, 2012

[29] Delia.L., *Ler e Escrever na Escola, o Real, o Possível e o Necessário*, 128 págs., Ed. Penso.

[30] Myriam.M., *O Ensino da Linguagem Escrita*, 159 págs., Ed. Artmed

[31] AMABIS, J. M.; MARTHO, G. R, *Biologia: Biologia das Populações*, 3. ed. v. 3. São Paulo: Moderna, 2010.

[32] FREIRE-MAIA, N, *Gregor Mendel: vida e obra.*, T. A. Queiroz, 1995.

[33] GIOVANNY, J. R.; BONJORNO, *Matemática Completa.*, 2. ed. v. 2. São Paulo: FTD, 2005.

[34] LINHARES, S.; GEWANDSZNAFDER., *Biologia hoje*, 2.ed. v. 3. São Paulo: Ática, 2010.