UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSÉ CLÁUDIO TOMÉ DE LIMA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Maceió – AL

2019

JOSÉ CLÁUDIO TOMÉ DE LIMA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos

Maceió – AL

2019

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

L732s Lima, José Cláudio Tomé de.
Sistemas de equações lineares na Base Nacional Comum Curricular: uma proposta de ensino / José Cláudio Tomé de Lima. - 2020.
81 f. : il., grafs., tabs. color.

Orientadora: Viviane de Oliveira Santos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 71-73.
Apêndices: f. 74-77.
Anexos: f. 78-81.

1. Base Nacional Comum Curricular. 2. Equações lineares. 3. Sequências didáticas. I. Título.

CDU: 512.644:37

Folha de Aprovação

JOSÉ CLÁUDIO TOMÉ DE LIMA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 13 de dezembro de 2019.

Viviane de Oliveira Santos

Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos – UFAL (orientadora)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra – UFAL (Examinador Interno)

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos – UFPE (Examinador Externo)

Dedico este trabalho a Deus, a meus familiares, e a todas as pessoas do meu ciclo de amizades que acreditaram no meu potencial.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por permitir que todas essas conquistas sejam possíveis, tendo em vista que, apesar de todas as dificuldades, nunca pude perder a fé e deixar de acreditar que ao final tudo iria dar certo.

A minha família e amigos, em especial a meus pais Manoel Tomé de Lima e Maria Nazaré de Lima, que sempre foram e serão a minha fonte de inspiração e incentivo; sem os dois nada disso seria possível.

A minha esposa Jane Ferreira de Araújo pelo incentivo diário, pois foi uma peça fundamental na realização deste mestrado.

Aos meus amigos do curso Profmat/Ufal Herivelton, Humberto, Genivaldo e Jefesson pelo apoio e incentivo, como também pela troca de experiências ao longo de todo o curso.

A minha orientadora Viviane Oliveira, pela confiança, paciência e, sobretudo, pelos ensinamentos e dedicação a mim concedidos.

Enfim, quero dizer que sou e sempre serei grato a todos que contribuíram direta ou indiretamente para finalização desse mestrado.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original”. (Albert Einstein)

RESUMO

O presente trabalho teve o propósito de entender a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) voltada para o ensino médio. Para isso, é necessário fazer apontamentos sobre como o conteúdo de equações lineares está previsto nela, bem como a maneira que os livros didáticos expõem tal conteúdo. Inicialmente, buscou-se uma análise das competências e habilidades específicas de matemática, enfatizando a habilidade relacionada com sistemas de equações lineares. Posteriormente, foi apresentado o resultado de uma pesquisa realizada com professores da 4ª Gerência Regional de Educação focalizado na BNCC. Além disso, foi realizada uma sequência didática com alunos de duas turmas das 2ª séries do ensino médio da Escola Estadual Monsenhor Machado localizada no município de Viçosa-AL, visando à aprendizagem da habilidade EM13MAT301, que tem como propósito o estudo de equações lineares.

Palavras-chave: BNCC. Álgebra Linear. Sequência didática. Equações lineares.

ABSTRACT

The present work had the purpose of understanding the National Common Curricular Base (BNCC) focused on high school. For this, it is necessary to make notes on how the content of linear equations is provided for in it, as well as the way that textbooks expose such content. Initially, an analysis of specific math skills and abilities was sought, emphasizing the skill related to systems of linear equations. Subsequently, the result of a survey conducted with teachers from the 4th Regional Management of Education focused on BNCC was presented. In addition, a didactic sequence was carried out with students from two classes of the 2nd year of high school at the Monsenhor Machado State School located in the municipality of Viçosa-AL, aiming at learning the EM13MAT301 skill, which aims to study linear equations.

Keywords: BNCC. Linear algebra. Didactic sequences. Linear equations

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

DCN - Diretrizes Curriculares Nacionais

MEC - Ministério de Educação e Cultura

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PNE – Plano Nacional de Educação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, tendo em vista a aprovação ocorrida em 2018 da Base Nacional Comum curricular (BNCC), foi realizada uma análise desta em relação às competências e habilidades específicas de matemática dando ênfase ao conteúdo de sistemas de equações lineares com o propósito de verificar em quais competências ou habilidades estava previsto tal conteúdo. Salienta-se ainda que foi realizada uma pesquisa sobre as opiniões de profissionais da área de matemática que atuam na 4ª Gerência Regional de Educação (Gere), com enfoque no conhecimento da aprovação da BNCC, bem como conteúdos de Álgebra Linear (em particular sistemas de equações lineares) referentes ao tema proposto.

A pesquisa está dividida em cinco partes e no Capítulo 2 foi abordada a BNCC e a Álgebra Linear conceituando a Álgebra Linear e relacionando-a com a BNCC. No Capítulo 3, abordam-se as competências específicas de matemática e suas tecnologias, com apresentação de conteúdos ligados às habilidades associadas à Álgebra Linear (sistema de equações lineares). O conteúdo identificado na BNCC foi trazido ao trabalho e usado como referência a abordagem de autores tais como Dante (2016), Sousa e Garcia (2016), verificando a conexão entre esses conteúdos e as habilidades já elencadas da BNCC. Ainda no mesmo capítulo foi apresentado sistemas de equações lineares, conteúdos trabalhados pelos professores de matemática nas 2ª séries do ensino médio, tratando-se, portanto, de um conteúdo que consta como componente curricular de Álgebra Linear na BNCC.

No quarto capítulo, foi apresentado o resultado de uma pesquisa/entrevista realizada com professores efetivos ou não, lotados na 4ª Gere, com sede no município de Viçosa-AL, com o intuito de saber como a BNCC está sendo encarada e de certa forma se eles têm ou não conhecimento da aprovação dela e se eles conseguiram perceber a relação das competências e habilidades com a Álgebra Linear. Para isso, foi aplicado aos professores um questionário composto por duas partes, sendo uma estreitamente ligada à pesquisa e outra parte contendo informações profissionais deles.

Por fim, foi realizada uma sequência didática com a proposta de aprendizagem da habilidade EM13MAT301, que se trata da habilidade 1 e que compõe a terceira competência de matemática do ensino médio e aborda o estudo de sistemas de equações lineares. A fim de trazer uma metodologia de ensino diferenciada foi utilizado *software GeoGebra* como ferramenta facilitadora para compreensão e aprendizagem desse conteúdo.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

O trabalho tem como objetivo geral a verificação do conteúdo de sistemas lineares presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), bem como sua exploração nos livros de ensino médio, procurando fazer uso de uma sequência de atividades (sequência didática), com o propósito de facilitar o ensino-aprendizagem desse conteúdo fazendo uso do *software GeoGebra* como ferramenta didática para facilitar na visualização geométrica das soluções dos problemas a serem trabalhados com os alunos.

1.1.2 Objetivos específicos

- Analisar a BNCC com foco nas competências e habilidades específicas de matemática e suas tecnologias;
- Colher opiniões de professores de matemática em relação à Álgebra Linear no ensino médio;
- Apresentar a abordagem dos sistemas lineares no livro do ensino médio
- Utilizar o método de escalonamento para resolver problemas que versam sobre sistemas de equações lineares;
- Utilizar o *software GeoGebra* em sala de aula;
- Trabalhar uma sequência didática com foco no conteúdo de sistemas de equações lineares que pode ser realizada com turmas do ensino médio.

2 ÁLGEBRA LINEAR E A BNCC

No presente capítulo introduziremos o conceito de Álgebra Linear e seus ramos de estudos e aplicações. Posteriormente falaremos sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), apontando alguns documentos legais que citam a necessidade da elaboração de uma base comum em se tratando de um currículo. Por fim, será mostrado como a BNCC está organizada.

2.1 O que é a Álgebra Linear

Hefez e Fernandez (2016) sintetizam a Álgebra Linear como um campo da matemática que estuda os espaços vetoriais e funções denominadas transformações lineares, as quais pertencem a esses espaços vetoriais. Esse assunto começou a ser mais evidenciado em meados do século XIX, todavia muitas de suas ferramentas estejam datando da antiguidade.

Conforme detalha Lessa (2018)

> Aplicações da álgebra linear podem ser encontradas em registros muito antigos de diversas civilizações como, por exemplo, a utilização de sistemas lineares. Naturalmente, os estudiosos da época não sabiam o que era álgebra linear, mas motivado por suas necessidades em resolver problemas práticos como, medição de terras, distribuição de bens e heranças, levaram os pensadores a produzirem métodos que hoje consideram como parte da álgebra linear [...]. (LESSA, 2018, n.p.)

Para Hefez e Fernandez (2016), a Álgebra Linear é um ramo da matemática que estuda o espaço $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. A diferença apresentada por eles entre os casos $n = 2$, $n = 3$ e os casos para os quais $n \geq 4$ é que, neste, não se dispõe de uma representação gráfica. Por não existir representação geométrica para os pontos de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$, faz-se necessário tratá-lo somente algebricamente sem o recurso que é de suma importância nos espaços de dimensões 2 e 3.

A depender de qual área de atuação ou profissão, a Álgebra Linear estará mais presente do que se possa imaginar, existem diversos campos de aplicação dessa ciência, entretanto, destacando algumas podemos ver em quais casos ela aparece. Autores como Dante (2016), Sousa e Garcia (2016) mostram que na resolução de problemas ligados a circuitos elétricos é necessário dominar a resolução de sistemas lineares. Salienta-se ainda que no ramo da química para balancear equações químicas também se necessita do uso de sistemas lineares.

Celestino (2000) justifica a importância desta disciplina para cursos de graduação em ciências exatas, assim como a importância das pesquisas sobre as metodologias de ensino, pelo fato de hoje ela fazer parte da composição de quase todos os domínios desta ciência.

Segundo Dorier:

> É fato que a Álgebra linear constitui uma parte importante do conteúdo matemático que é ensinado no início da universidade, sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta. Além disso, as dificuldades dos estudantes em álgebra linear parecem, tão importantes e invisíveis quanto em análise. (DORIER, 1998, p. 193)

A importância da Álgebra Linear tem crescido nas últimas décadas. Os modelos matemáticos lineares assumiram um importante papel juntamente com o desenvolvimento da informática e, como era de se esperar, esse desenvolvimento estimulou um notável crescimento de interesse em Álgebra Linear. Inúmeras aplicações foram sendo consolidadas ao longo dos séculos, desde os primeiros indícios do surgimento dos Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes, até os dias atuais em que é possível constatar a consagração da Ciência Matemática, que engloba a Álgebra Linear. Em vista disso, Anton e Rorres (2012) destacam algumas das possibilidades para o uso dos recursos da Álgebra Linear com relação aos campos de aplicação:

- ✓ Construção de curvas específicas por pontos específicos;
- ✓ Programação linear geométrica;
- ✓ Interpolação spline cúbica;
- ✓ Cadeias de Markov;
- ✓ Teoria de grafos;
- ✓ Jogos de estratégias;
- ✓ Modelos econômicos Leontief;
- ✓ Administração florestal;
- ✓ Computação gráfica;
- ✓ Distribuição de temperatura de equilíbrio;
- ✓ Tomografia computadorizada;
- ✓ Fractais;
- ✓ Caos;
- ✓ Criptografia;
- ✓ Genética;
- ✓ Deformações e morfismos.

Convém ressaltar, entretanto, que o autor não esgota todas as possibilidades do uso da Álgebra Linear em termos de aplicações. Ainda relacionado ao uso desta disciplina, Anton e Rorres (2012) apontam alguns dos documentos mais antigos conhecidos pelo homem em se tratando desse conteúdo, um deles é apontado como o mais importante tratado chinês e é dominado *Chiu Chang Suan Shu*, ou “Os Nove Capítulos da Arte Matemática”. Segundo o autor, esse livro contém 178 problemas que levam a sistemas lineares. Anton e Rorres (2012), destacam o problema 1 (um) do oitavo capítulo que está disposto a seguir:

> Há três classes de milho, sendo que três sacos da primeira classe, dois da segunda classe, um da terceira totalizando 39 medidas. Dois da primeira, três da segunda e um da terceira totalizando 34 medidas. E um da primeira, dois da segunda e três da terceira totalizando 26 medidas. Quantas medidas do grão tem cada saco de cada classe? (ANTON; RORRES, 2012, p. 538)

2.2 O que é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Com o propósito de unificar todos os currículos diversificados existentes em todo o país foi idealizada, discutida e sancionada uma base nacional comum curricular. Com o propósito de resolver problemas relacionados às disparidades de conteúdos e das metodologias de ensino em diferentes regiões brasileiras.

A BNCC trata-se de um documento que determina os conhecimentos essenciais que todos os alunos da educação básica vão ter que estudar, todo o currículo de todas as redes de ensino público e particular do país deverão conter esses conteúdos que estão expressos nesse documento.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7)

O Plano Nacional de Educação (PNE) tem a durabilidade de dez anos, foi apresentado em 2014 tendo vigência até 2024. Este documento normatiza metas estabelecidas pelo governo federal para a educação básica e superior a serem cumpridas ao longo de sua vigência. Esse plano foi promulgado pela lei n° 13 500/2014. E conforme relata a BNCC aprovada, efetivamente, em 2018 o PNE reitera a necessidade de:

> Estabelecer e implantar, mediante pactuação interfederativa [União, Estados, Distrito Federal e Municípios], diretrizes pedagógicas para a educação básica e a base nacional comum dos currículos, com direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos(as) alunos(as) para cada

> ano do Ensino Fundamental e Médio, respeitadas as diversidades regional, estadual e local. (BRASIL, 2018, p. 12)

Desta forma, a BNCC afirma que:

> Nesse sentido, consoante aos marcos legais anteriores, o PNE afirma a importância de uma base nacional comum curricular para o Brasil, com o foco na aprendizagem como estratégia para fomentar a qualidade da Educação Básica em todas as etapas e modalidades (meta 7), referindo-se a direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento. (BRASIL, 2018, p. 12).

2.2.1 Embasamento legal da BNCC

A BNCC, como já foi evidenciada anteriormente, é um documento no qual todos os sistemas de ensino devem por ele se nortear. É de observância obrigatória e está prevista na Lei de Diretrizes e Bases (LDB)[1]. Os currículos de todas as redes públicas e particulares devem ter a BNCC como referencial.

Na constituição Federal de 1988, a BNCC está expressa em um de seus artigos, mais especificamente no caput do artigo 210, onde traz a seguinte redação: "Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais".

Uma nova situação em que se pode constatar a aparição de uma construção de uma Base Nacional Comum Curricular, tendo em vista a diversidade de culturas existente no país é na redação das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs)[2] para educação básica.

> Entende-se, pois, que o currículo não poderia ser imposto, distribuído em apostilas ou simplesmente publicado no Diário Oficial, porque ele se realiza na produção, na circulação e consumo de significados, com vista a criar identidades dos sujeitos que educam e são educados. Ao associarmos a base nacional comum à parte diversificada (que produzem a integração do currículo de uma escola) temos, ao mesmo tempo, a prática das propostas constitucionais, da LDB e demais leis; mas também a prática das escolas que se identificam com o ambiente metropolitano, rural, florestal, ribeirinho, quilombola, indígena, socioeducativo, no espaço das prisões etc. A base nacional comum é orientada pelo Estado brasileiro, por meio do MEC, do Conselho Nacional de Educação e dos Conselhos Estaduais e Municipais de Educação. A dimensão diversificada é construída pelo diálogo entre a escola e seu espaço social, político, ambiental e cultural. (BRASIL, 1998, p. 7)

[1] Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

[2] As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica que orientam o planejamento curricular das escolas e dos sistemas de ensino.

Em se tratando da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), podemos encontrar amparo legal na redação do Caput do artigo 26, trazendo este artigo a seguinte redação:

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (Redação dada pela Lei nº 12.796, de 2013).

Desta forma, está evidente que a Base Nacional Comum Curricular é de suma importância, tendo em vista a sua aparição em vários documentos legais, visando sempre tornar o ensino público ou privado igualitário em termos de conteúdos, fazendo com que a educação em todo país tenha uma mesma finalidade, seguindo desta forma uma só diretriz em se tratando de conteúdo pedagógico.

2.2.2 Organização da BNCC

A BNCC está organizada por área de conhecimentos, são elas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Cada área do conhecimento tem suas próprias competências específicas que devem ser trabalhadas ao longo de cada etapa de ensino. Toda construção e organização da BNCC resultam em dez competências, as chamadas competências gerais da educação.

Além das dez competências citadas, a sua organização se dá também por competências específicas de cada área do conhecimento, como por exemplo, matemática e suas tecnologias que possui cinco competências específicas, e dentro de cada competência existem as chamadas habilidades, que em sua essência é objetivo de estudo do presente trabalho.

3 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos todas as competências referentes à matemática e suas tecnologias trazidas pela BNCC, dando ênfase a competência 3 e a habilidade 1 desta competência, que menciona o estudo de equações lineares simultâneas, bem como apresentaremos o conteúdo de sistemas de equações lineares da maneira como é abordado no ensino médio.

3.1 Sistemas lineares na BNCC

Para compreendermos o conteúdo de sistemas de equações lineares contido na BNCC, se faz necessário incialmente diferenciar competência e habilidade. A seguir, a BNCC traz uma definição para competência:

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8)

Para Moretto (2002) as habilidades estão associadas ao saber fazer, seja ela uma ação física ou mental; por exemplo; compreender fenômenos, analisar situações-problema, correlacionar e manipular problemas propostos. Por outro lado, ele aponta que as competências são um conjunto de habilidades harmonicamente desenvolvidas e que caracterizam uma função/profissão específica. Para ele a busca pela competência faz-se desenvolver as habilidades.

De posse dos conceitos, podemos prosseguir com a análise desejada. A BNCC traz no seu texto explícito dez competências gerais para educação básica, é com base nessas competências que são estabelecidas habilidades específicas para cada competência. Conforme a proposta da BNCC, cada habilidade é representada por um código alfanumérico, em que cada parte do código representa alguma parte específica, como segue o exemplo a seguir:

EM13MAT103

Seguindo a ordem de cada número ou letra que aparece no código, temos:

EM: Ensino médio.

13: Representam as séries dos níveis do ensino representado pelas primeiras letras, neste caso, refere-se da 1ª a 3ª série do ensino médio.

MAT: Matemática e suas tecnologias.

1: Está associado a competência específica de cada habilidade.

03: Refere-se à habilidade dentro da competência especificada.

Desta forma, o código **EM13MAT103** está se referindo à terceira habilidade proposta na área de Matemática e suas tecnologias relacionada à competência específica de número 1, que pode ser desenvolvida da 1ª a 3ª série do ensino médio.

Tendo ciência das dez competências gerais da educação, segue-se com a apresentação das cinco competências específicas na área de matemática e suas tecnologias com enfoque na habilidade que aborda os sistemas de equações lineares. A seguir expunha-se a redação da competência específica de matemática de número 1:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2018, p. 532)

Dando continuidade apresentaremos a segunda competência específica de matemática que menciona em sua redação o texto a seguir:

> Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2018, p. 534)

Doravante será apresentada uma próxima competência classificada na BNCC como sendo a competência de número três, nesta competência são relacionados diversos ramos da matemática do ensino médio, como por exemplo: álgebra, aritmética, geometria, probabilidade ou até mesmo estatística. A competência será exposta a seguir, logo após, destacaremos a habilidade 1 ligada a essa competência que servirá como estudo principal para a fundamentação do trabalho.

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 535)

Com relação a essa competência, destaca-se incialmente a habilidade identificada como EM13MAT301 que em seu significado nos diz que é específica do ensino médio e pode ser abordada da 1ª à 3ª série do ensino médio e que compõe a terceira competência e representa a primeira habilidade, que em sua redação apresenta o texto a seguir: “Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.” (BRASIL, 2018, p. 536)

A habilidade mencionada tem como foco a resolução de problemas gerados por grandezas que variam de maneira linear. Desta forma, com o domínio da habilidade o aluno terá conhecimento necessário para lidar com sistemas de equações lineares do 1º grau com duas ou três incógnitas, bem como a utilização de gráficos para entender o crescimento linear que as equações descrevem. Conforme Diniz e Ferreira (2019) destacam, essa habilidade amplia o trabalho desenvolvido ao longo do ensino fundamental, principalmente da habilidade EF08MA08, trazendo a possibilidade do uso de recursos tecnológicos para a visualização da variação das grandezas envolvidas na situação.

Tendo em vista a habilidade mencionada, seguiremos apresentando a forma como Dante (2016), Souza e Garcia (2016) fazem a abordagem deste conteúdo nos livros do ensino médio.

Sistemas Lineares

Para escrever sobre sistemas lineares se faz necessário, incialmente abordar equações lineares. As equações lineares também são conhecidas por equações diofantinas lineares, devido a Diofanto de Alexandria [3] ser um dos primeiros a tornar esses tipos de equações conhecidas por todos, por meio dos seus estudos e suas publicações.

As equações diofantinas lineares são também apresentadas em Maier (2005, p. 30), que mostra com riqueza de detalhes como é a aparência de uma dita equação, e posteriormente apresenta como proceder diante delas.

As equações diofantinas lineares (ou equações lineares), são equações nas quais todas as suas variáveis possuem grau 1.

Equações lineares

De acordo com Dante (2016) denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita na forma geral:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = c,$$

na qual,

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ são incógnitas;

---

[3] BOYER (1991) fala que Diofanto viveu em Alexandria por volta do século III d. C. e é considerado o maior algebrista grego.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas;
c é o termo independente.

Exemplos:

$2x + 3y - 2z = 10$ é uma equação linear nas incógnitas x, y e z;
$2x^2 - 3y = 3$ não é uma equação linear pois a incógnita x está elevada ao quadrado.

É interessante citar que essas equações são vistas com muita frequência nas vidas dos alunos, isso pode ser notado no ensino da geometria analítica (quando se lida com uma equação de duas incógnitas apenas), a diferença é que para geometria, essa equação é vista como uma função do primeiro grau ou de outro modo pode também ser chamada de função afim, e convém ressaltar que é representada por uma reta.

Definição de Sistema linear

Conforme Souza e Garcia (2016) denomina-se sistema linear $m \times n$ o conjunto S formado por m equações e n incógnitas, que pode ser indicado da forma apresentada abaixo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

No sistema linear S apresentado acima, tem-se que:

- a_{11} é o coeficiente da incógnita x_1 na 1° equação;
- a_{23} é o coeficiente da incógnita x_3 na 2° equação;
- a_{m2} é o coeficiente da incógnita x_2 na m-ésima equação.

Solução de um sistema linear

A solução de um sistema linear $m \times n$ é a ênupla de números reais ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ que é, simultaneamente, solução de cada uma das m equações lineares componente do sistema.

Sistema linear homogêneo

Denomina-se sistema linear homogêneo aquele em que todas as equações lineares são homogêneas.

Em um sistema linear homogêneo, a ênupla $(0, 0, 0, \dots, 0)$ é uma das soluções, denominada trivial ou nula. Além da trivial, esse tipo de sistema pode ter outras soluções chamadas não triviais.

Matrizes associadas a um sistema linear

De acordo com Souza e Garcia (2016) para todo sistema linear podemos associar uma matriz, de outro modo, pode-se dizer que um sistema linear surge de um produto de matrizes, que de maneira geral podemos fazer a associação da seguinte maneira:

Dado um sistema linear, o mesmo pode ser entendido como um produto de matrizes, como segue:

Dado um sistema linear $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$,

associamos a ele a seguinte equação matricial:

$$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{11} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

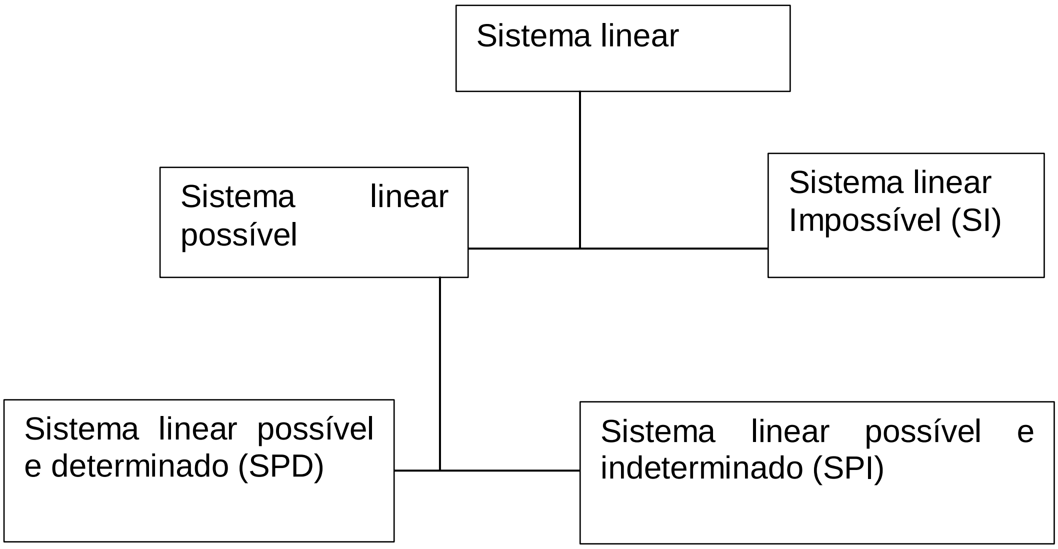
Entende-se como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{11} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Essa maneira de representar um sistema linear é chamada forma matricial do sistema.

Classificação de um sistema linear

Dependendo do número de soluções que um sistema linear apresente, ele pode receber alguma classificação. O conjunto solução de um sistema pode ser vazio, ter um único elemento ou possuir infinitos elementos. O sistema de equações que não possui solução é chamado de impossível. Quando possui uma única solução é possível determinado e, quando possui infinitas soluções, é chamado de possível indeterminado. Essas classificações podem ser representadas em um esquema, como segue:



Resolução de um sistema linear usando escalonamento

Considere um sistema linear da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{11}x_2 + a_{11}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{11}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_1 = b_m \end{cases}$$

Um método eficiente para resolver esse sistema é por meio do processo de escalonamento. Após efetuarmos certas operações nestas equações, encontra-se outro sistema de resolução mais fácil e que tenha o mesmo conjunto de soluções.

As operações usadas são as mesmas apresentadas quando da abordagem de matrizes e são as seguintes:

- Troca de posições de duas equações;
- Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo;
- Substituição de uma equação pela soma desta equação com alguma outra.

Essas operações são denominadas de operações elementares.

Dizemos que dois sistemas de equações a n incógnitas são equivalentes se tiverem as mesmas soluções.

Exemplo: Resolver o problema:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Usando as chamadas operações elementares, transformamos 2ª a 3ª equação, de modo que os coeficientes de x sejam iguais a zeros. Para que isso ocorra basta que:

- Façamos a substituição da 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação;
- Façamos a substituição da 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2;

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \rightarrow l_1 + l_2 \\ 4x + 2y + z = 1 \rightarrow l_3 - 2l_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 8y + 3z = 1 \end{cases}$$

Por fim, no último sistema, podemos substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por 4.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 8y + 3z = 1 \rightarrow l_3 + 4l_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 7z = -35 \end{cases}$$

Notemos que o sistema encontra-se na forma escalonada, para dar continuidade e resolver o sistema, basta que se encontrem os valores de z, y e x respectivamente.

$$7z = -35 \Rightarrow z = -5$$

Substituindo o valor de z na 2° equação, temos:

$$-2y + z = -9 \Rightarrow -2y - 5 = -9$$
$$-2y = -9 + 5 \Rightarrow -2y = -4$$
$$-2y = -4 \ \cdot (-1) \Rightarrow 2y = 4$$
$$y = 2$$

Substituindo o valor de y e z na 1° equação, temos:

$$2x - 3y - z = 0 \Rightarrow 2x - 3(2) - (-5) = 0$$
$$2x - 6 + 5 = 0 \Rightarrow 2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Com isso, o sistema linear é (SPD), pois possui uma única solução e tem como solução a terna $(\frac{1}{2}, 2, -5)$.

Classificação de sistemas lineares escalonados

Para classificar um sistema escalonado, basta observar a última linha, mas é preciso estar atento, pois a última linha em um sistema de n incógnitas é a enésima linha, que, se não existir, deve ser considerada totalmente nula ($0x + 0y + 0z + \ldots = 0$, que equivale a $0 = 0$).

Generalizando, a última linha de um sistema escalonado em que a_n é o coeficiente, x_n é a incógnita e k_n é o termo independente, podemos ter três situações:

- ✓ se $a_n \neq 0$, então a solução é única: sistema possível e determinado;
- ✓ se $a_n = 0$ e $k_n = 0$, então temos infinitas soluções: sistema possível e indeterminado;
- ✓ se $a_n = 0$ e $k_n \neq 0$, então não temos soluções: sistema impossível.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -6 \\ \quad 4y - 2z = 0 \\ \qquad 5z = 10 \end{cases}$

Sistema 3×3 já escalonado (número de equações igual ao número de incógnitas).

Da 3ª equação tiramos $z = 2$.

Da 2ª equação, fazendo $z = 2$, temos $4y - 2 \cdot 2 = 0$ e daí $y = 1$.

Fazendo $y = 1$ e $z = 2$ na 1ª equação, temos $3x - 2(1) + 2 = -6$ e daí $x = -2$.

Podemos concluir que o sistema é **possível e determinado**, com $S = \{(-2, 1, 2)\}$.

b) $\begin{cases} 9x - 2y + 3z - w = 1 \\ \quad y - 2z + 4w = 6 \\ \qquad 5z + 2w = 3 \\ \qquad\quad 0w = 9 \end{cases}$

Sistema 4×4 já escalonado.

A partir da 4ª equação podemos concluir que o **sistema é impossível**, logo $S = \emptyset$

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \ 3y - 6z = 0 \end{cases}$

Sistema 2×3 já escalonado (número de equações menor que número de incógnitas).

Quando um sistema escalonado tem mais incógnitas do que equações e pelo menos um coeficiente não nulo em cada equação, ele é **possível e indeterminado**, pois as equações que faltam podem ser consideradas $0 = 0$.

A incógnita que possui coeficiente igual a 0 (zero) é chamada incógnita livre. Quando for interessante, ela pode ser omitida na equação.

Tendo finalizado a primeira habilidade da terceira competência e a forma como o conteúdo descrito por ela é trabalhado no ensino médio, podemos a partir de agora apresentar a penúltima competência específica de matemática, que é a competência de número 4, que trás no seu texto a importância do aluno saber:

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, 2018, p. 538)

Adiante, segue-se com a apresentação da última competência de matemática que compõe a estrutura da BNCC, a competência de número 5. A quinta competência em sua redação, informa que o aluno ao chegar nessa etapa da educação básica deve:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 540)

Por fim, percebe-se que após feito uma análise da BNCC a única competência pertinente ao assunto de sistemas de equações lineares é a competência 3 especificamente na habilidade 1, em que destaca a forma de abordagem com o foco na aprendizagem desse conteúdo para a aquisição do conhecimento necessário para desenvolver essa habilidade.

4 UMA ANÁLISE DA 4ª GERE EM RELAÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR PRESENTE NA BNCC

Como foi enfatizado ao longo da construção do presente trabalho, um dos objetivos é fazer uma análise da BNCC com relação à disciplina de matemática no ensino médio, em particular, o tratamento do conteúdo de Álgebra Linear. Nessa parte do trabalho serão apresentados os resultados da pesquisa realizada com vinte e cinco de um total de trinta e nove profissionais da área de matemática que atuam na rede pública estadual pertencente à 4ª Gerência Regional de Educação que fica localizada em Viçosa-AL. A 4ª Gere é composta em sua totalidade por onze escolas, sendo elas distribuídas em sete cidades.

Na cidade de viçosa, onde se encontra a gerência, estão também localizadas as escolas: Escola Estadual Joaquim Diégues com um quadro de dois professores dos quais, um é efetivo; Escola Estadual Monsenhor Machado com um quadro de três professores dos quais dois são efetivos e a Escola Estadual 13 de outubro com um professor monitor[4]. Na cidade de Cajueiro está localizada a Escola Estadual Inaura Casado Costa com um quadro de oito professores dos quais, um é efetivo. Em Capela estão situadas duas dessas escolas estaduais são elas: Escola Estadual Professora Edite Machado e Escola Estadual Torquato Cabral, ambas com três professores, sendo apenas um deles efetivo. Em Mar vermelho tem a Escola Estadual Professor Silvério Lins com dois professores, sendo um deles efetivo. Em Atalaia tem-se a Escola Estadual Floriano Peixoto com oito professores sendo metade deles efetivos. Na cidade de Paulo Jacinto situa-se a Escola Estadual Deputado José Medeiros com quatro professores sendo um deles efetivo na rede pública estadual de ensino. Em Chã Preta encontra-se a Escola Estadual Isidro Teixeira que se encontra na mesma situação da escola anterior em se tratando do número de professores. Por fim, no município de Pindoba, está localizada a Escola Estadual professora Maria Cândida da Silva com quadro de um professor efetivo.

Em busca de informações para levantar dados sobre o assunto, foi elaborado um questionário para ser aplicado à maior quantidade possível de professores de matemática lotados na 4ª Gere que atuam na rede estadual de ensino nas escolas mencionadas anteriormente. O referido questionário é composto basicamente por duas partes: A primeira é uma parte que foi elaborada com um propósito de

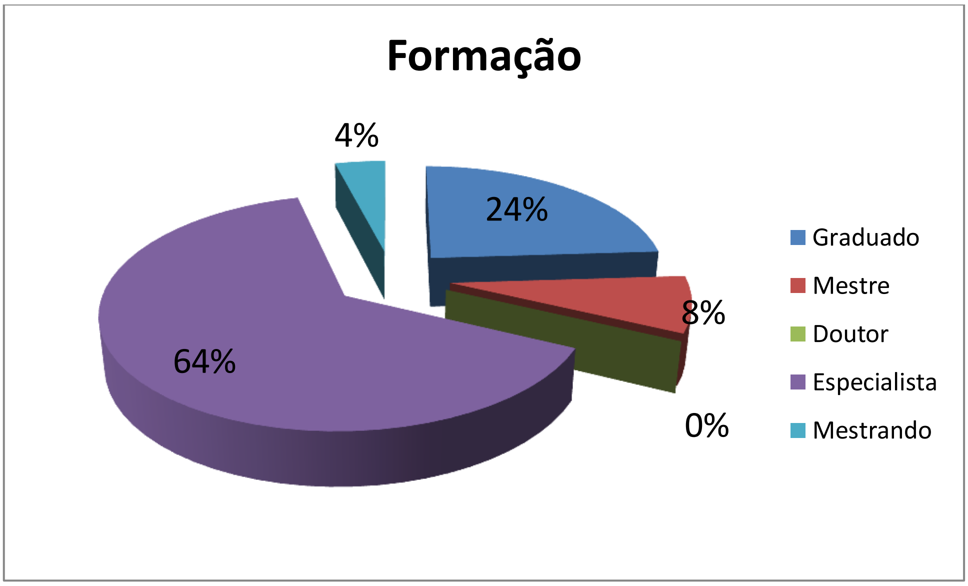
[4] São professores contratados pela Secretaria de Educação-SEDUC através de processo seletivo simplificado.

identificar o profissional, como por exemplo, conhecer a sua formação acadêmica; a segunda parte está estreitamente ligada à parte mais importante da pesquisa, onde se objetiva saber até onde vai o conhecimento destes profissionais em relação à BNCC e Álgebra Linear com a ideia de saber como a BNCC está sendo vista pelos professores da área. Desta forma, sobre cada questionamento levantado na pesquisa foi feita uma análise individual e que doravante está sendo apresentada.

4.1 Apresentação dos dados profissionais dos respectivos entrevistados

Em conformidade com o questionário aplicado aos professores de matemática que atuam na 4ª Gere, serão apresentados, a seguir, os resultados obtidos através de suas respostas e sintetizadas por meio de gráficos.

Gráfico 1 - Formação profissional

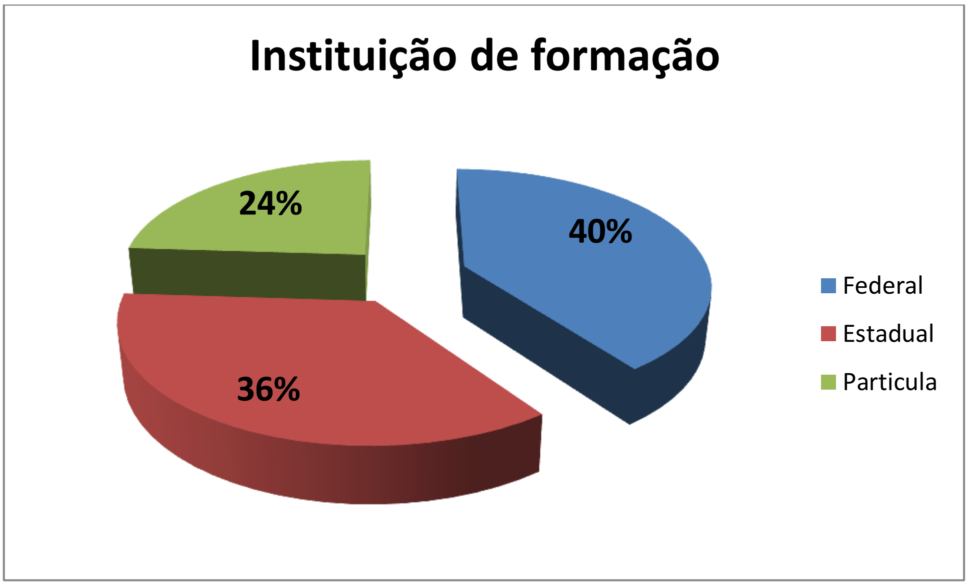


Fonte: Autor, 2019.

Como pode ser visto no Gráfico 1, a formação dos professores de matemática da 4ª Gere tem em sua maioria professores especialistas com um total de 64% de todos entrevistados e, ao indagar sobre suas especializações notou-se que alguns deles tinham dupla especialização, como por exemplo, especialização no ensino de matemática e física. Em se tratando de mestrado, pode-se perceber que 4% dos entrevistados ainda estão com o mestrado em curso, enquanto que 8% já possuem diploma de mestrado. Ainda de acordo com o gráfico, nota-se que apenas 24% do total possuem somente graduação, levando em conta os demais percentuais esse resultado é excelente, pois se percebe que esses respectivos professores estão gradativamente buscando aperfeiçoar-se. Também se infere do gráfico que uma realidade atual do quadro desses professores é a falta de professores doutores nos quadros do estado, em particular na 4ª Gerência Regional de Educação, pois o percentual obtido na pesquisa foi de 0% isso informa que dos entrevistados não há nenhum professor com doutorado.

A seguir, está disponível um novo resultado sobre a mesma pesquisa. Desta vez, foram interrogados sobre sua instituição de formação. Segue o resultado abaixo:

Gráfico 2 - Instituição de formação



Fonte: Autor, 2019.

Como se pode notar, do contingente de entrevistados 40% foram formados por instituições federais, no entanto não foi levado em consideração se essas instituições são no estado de Alagoas ou não, assim não ficou claro se algum deles são ex-discentes da Universidade Federal de Alagoas. Dando continuidade aos 60% restantes, vê-se que 24% tem no seu currículo uma formação de instituição particular, por outro lado, os demais 36% são graduados na rede estadual de ensino.

Indagados sobre suas experiências profissionais obteve-se o resultado apresentado a seguir:

Gráfico 3 - Tempo de experiência profissional

Fonte: Autor, 2019.

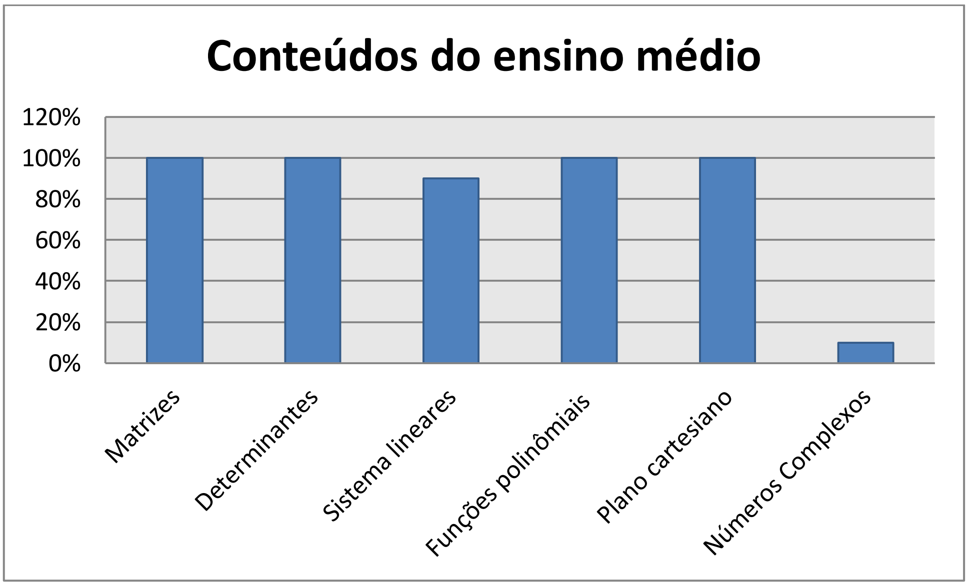
Ao que se pode acompanhar no gráfico, todo profissional de matemática das escolas da 4ª Gere detêm certa experiência em sua área de atuação, pois nenhum dos entrevistados possui menos de um ano que atuam na área. Assim, o percentual total distribui-se entre 24% com menos de 5 anos de docência e 76% possuem uma vasta experiência pois estão com atuação de mais de cinco anos de atividades docentes.

4.2 Análise das respostas dos professores entrevistados

Enquanto que a primeira parte do questionário está intrinsicamente ligada a questões pessoais de cada docente entrevistado, a segunda faz o papel central de um dos objetos de pesquisa, pois é através desta que se pode fazer uma análise da visão dos profissionais da área, relacionado à BNCC para o ensino médio em relação aos conteúdos de Álgebra Linear.

Da primeira pergunta feita no questionário aplicado construiu-se o gráfico a seguir:

Gráfico 4 - Quais conteúdos de Álgebra Linear você aborda ou já abordou na Educação Básica?

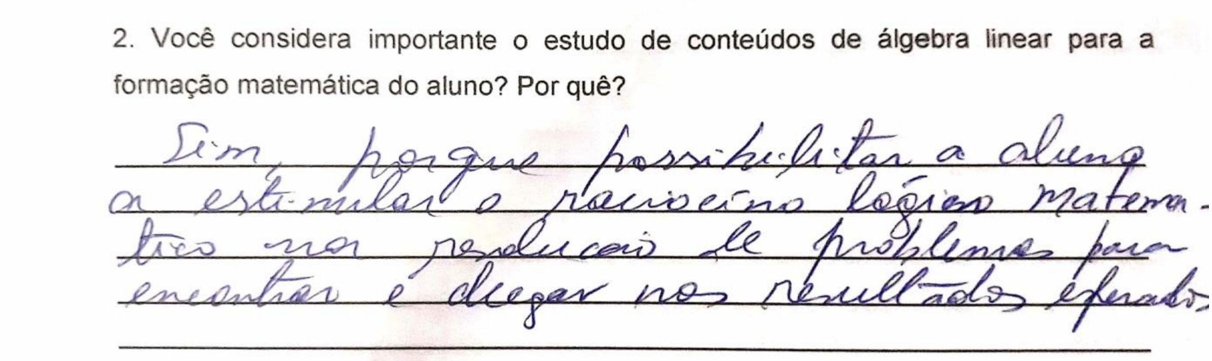


Fonte: Autor, 2019.

Para ser mais claro sobre o gráfico, naturalmente cada docente pôde fazer a análise e deduzir por contra própria sob sua ótica, quais conteúdos são componentes curricular de Álgebra Linear e quais eles já abordaram na educação básica, podendo ter, inclusive, coincidido suas respostas. Os conteúdos presentes nos questionários estão apresentados no gráfico acima, e conteúdos como matrizes, determinantes, funções polinomiais e plano cartesiano estão com incidência de 100% na ótica desses profissionais. Já sistemas de equações lineares aparecem com uma frequência menor, mas que se aproxima dos 100% do total de entrevistados.

2. Você considera importante o estudo de conteúdos de Álgebra Linear para a formação matemática do aluno? Por quê?

Doravante, estão apresentadas algumas respostas obtidas com o questionário em relação à pergunta apresentada.


2. Você considera importante o estudo de conteúdos de álgebra linear para a formação matemática do aluno? Por quê?

Sim, porque possibilitar a aluno a estimular o raciocínio lógico matemático nos resolução de problemas para encontrar e chegar nos resultados esperados.

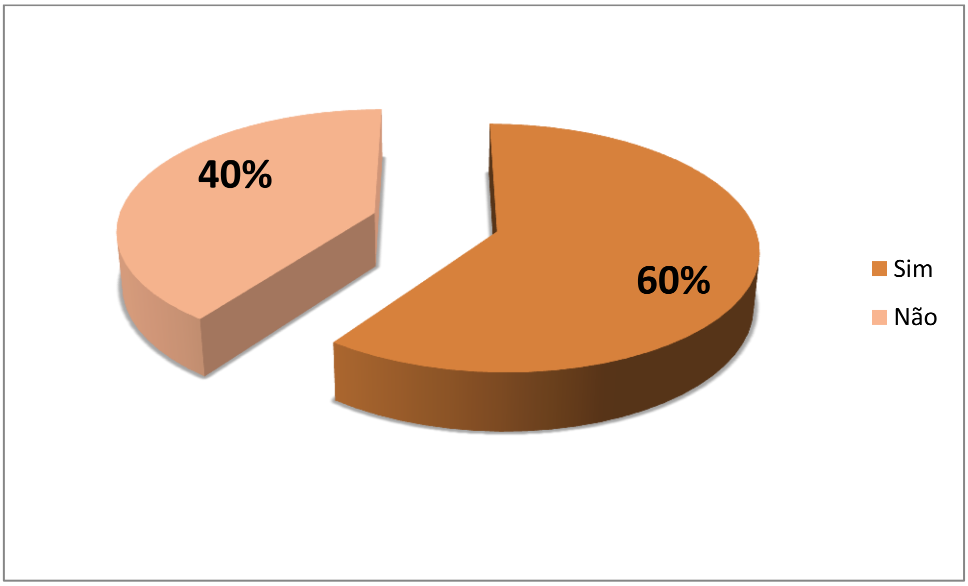
“Conteúdos de Álgebra Linear são de grande importância, pois desenvolvem o raciocínio e a criatividade”

“Sim. Porque entendo ser uma aplicação belíssima de dois conteúdos bem interessantes: matrizes e sistema de equações lineares”.

“Sim, pois estamos preparando nosso (sic) educandos para um mercado muito competitivo e para uma prova que exige muito deles ENEM.”

Quando questionados sobre o conhecimento que detinham sobre a BNCC em discursão, as respostas foram as seguintes:

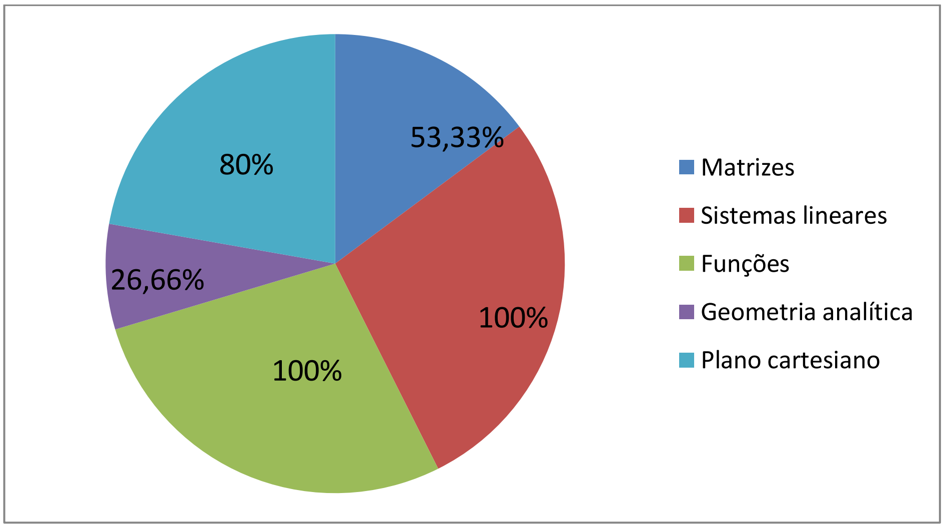
Gráfico 5 - Você conhece a proposta da BNCC?



Fonte: Autor, 2019.

Como pode ser avaliado no gráfico, do total de entrevistados 40% responderam que não conhecia a BNCC, esse percentual corresponde a um total de 10 pessoas. Sendo este um resultado bastante previsível, pois é sabido que a BNCC para o ensino médio é algo que só teve sua aprovação ao final de 2018, sendo plausível essa situação, contudo a BNCC para o ensino fundamental já havia sido regulamentada e já estava vigorando. Assim, conclui-se que 60% dos professores já têm algum conhecimento dessa proposta, e que totalizam 15 pessoas das vinte e cinco entrevistadas.

Gráfico 6 - Quais conteúdos conseguiu identificar referentes à Álgebra Linear na proposta da BNCC?



Fonte: Autor, 2019.

Ao analisar o gráfico podemos constatar que do total de 15 pessoas (considerando como 100%) que afirmaram conhecer a BNCC, quando questionados sobre quais conteúdos eles conseguiram identificar nesse documento. 100% responderam que sistemas lineares e funções têm referência nesse documento. Já 80% das 15 pessoas identificaram plano cartesiano. Alguns entenderam que matrizes também fazem parte, totalizando 53,33% dos 15 entrevistados. E por fim, apenas 26,66% falam que geometria analítica esta presente na BNCC.

4. Se você identificou os conteúdos de Álgebra Linear na proposta da BNCC, o que achou da abordagem?

Seguem abaixo, algumas das respostas dos profissionais entrevistados que atuam na 4ª Gere, em relação ao que eles acham da forma como a BNCC no ensino médio aborda Álgebra Linear.

“Uma abordagem muito intensa mais carente da participação dos profissionais que estão em sala de aula, para que a mesma seja mais adequada aos educando.”

“Gostei. Achei interessante.”

“Eles são abordados de maneira correta, desta forma dando ênfase no estímulo para o ensino aprendizagem da matéria lecionada.”

4. Se você identificou os conteúdos de álgebra linear na proposta da BNCC, o que achou da abordagem dos mesmos?

Na verdade ela aborda a algebra como uma ferramenta e estimulo ao raciocinio lógico matemático, aplicado no cotidiano do aluno.

4. Se você identificou os conteúdos de álgebra linear na proposta da BNCC, o que achou da abordagem dos mesmos?

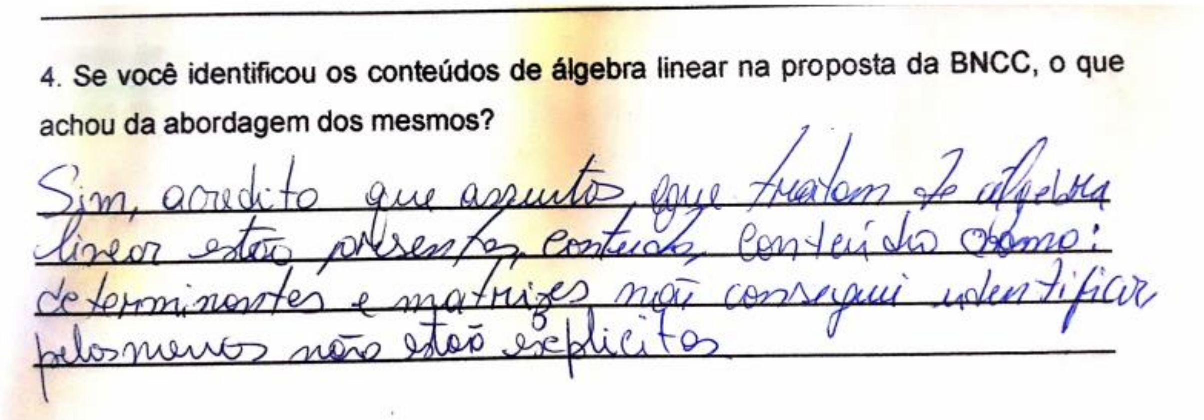
SIM, UM FATO INTERESSANTE EM RELAÇÃO AOS MESMO SE DAR PELO FATO DE SEMPRE EXIGIR-SE UMA MAIOR CONTEXTUALIZAÇÃO E TAMBÉM O USO DAS TECNOLOGIAS.

4. Se você identificou os conteúdos de álgebra linear na proposta da BNCC, o que achou da abordagem dos mesmos?

Achei interessante, embora alguns conteúdos não estejam expresso no texto da BNCC, como por exemplo matrizes, porém sabe-se que este seja um conteúdo essencial para lidar com sistema linear que por sua vez esta presente.

4. Se você identificou os conteúdos de álgebra linear na proposta da BNCC, o que achou da abordagem dos mesmos?

Sim, porém o único que eu consegui identificar foi equações lineares, e gostei como está escrito na BNCC

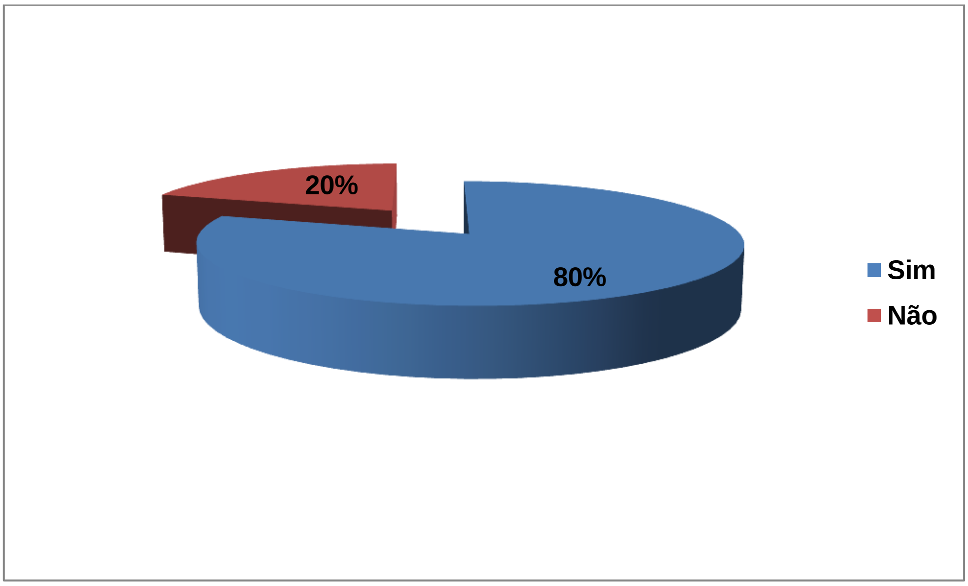

4. Se você identificou os conteúdos de álgebra linear na proposta da BNCC, o que achou da abordagem dos mesmos?

Sim, acredito que assuntos que tratam de álgebra linear estão presentes conteúdos, Conteúdos como: determinantes e matrizes não consegui identificar pelos menos não estão explícitos

Avaliando algumas das respostas desses profissionais entrevistados, nota-se que alguns deles acreditam que os conteúdos previstos nas competências e habilidades deveriam ser mais bem especificados ao invés de serem subjetivos. Já outros acreditam que a abordagem é boa e falam que se exige sempre uma contextualização e que as ferramentas computacionais devem sempre se fazer presente ao trabalhar com determinados conteúdos.

Com relação à pergunta 5 do questionário, temos o gráfico a seguir:

Gráfico 7 - Em se tratando dos conteúdos de Álgebra Linear, em sua opinião, essa nova proposta da BNCC é mais benéfica para o ensino? Justifique.



Fonte: Autor, 2019.

Em análise ao gráfico, e levando em conta os participantes da pesquisa sobre a BNCC, percebe que um total de 20 pessoas, que gera um percentual de 80% das 25 pessoas entrevistadas considera a mudança mais benéfica. Diante disso, percebe-se que mesmo alguns que não detém conhecimento da BNCC ainda assim aprovam a BNCC (considera mais benéfica). Supõe-se que isso ocorra pelo fato de entenderem que toda mudança tem seu aspecto positivo. Logo a seguir, podemos analisar algumas justificativas dos entrevistados:

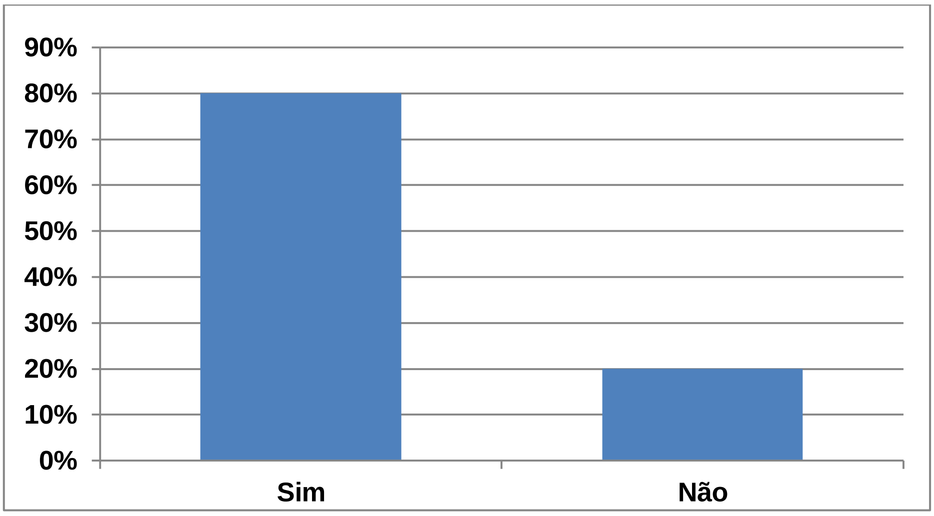
“A proposta é muito boa, mais não beneficia (sic) tanto o ensino justamente pela falta da participação dos professores que estão em sala de aula, e não apenas dos técnicos que formam e jogam a proposta sem conhecer as realidades regionais, estaduais e municipais.”

“Não, pois deveria haver mais competências explorando tais conteúdos.”

“Pode ser benéfica. Acredito que proposta de mudanças no ensino pode sempre ter seu lado positivo.”

Com relação à pergunta 6 do questionário, dividimos ela em duas partes, estabelecemos um gráfico para a primeira, quando eles afirmam que sim ou não. E para a segunda também estabelecemos um novo gráfico com os conteúdos que eles acreditam que devem ter alguma prioridade.

Gráfico 8 - Em sua opinião dentre os conteúdos pertinentes à Álgebra Linear há algum que deveria ter prioridade dentro da nova proposta da BNCC?



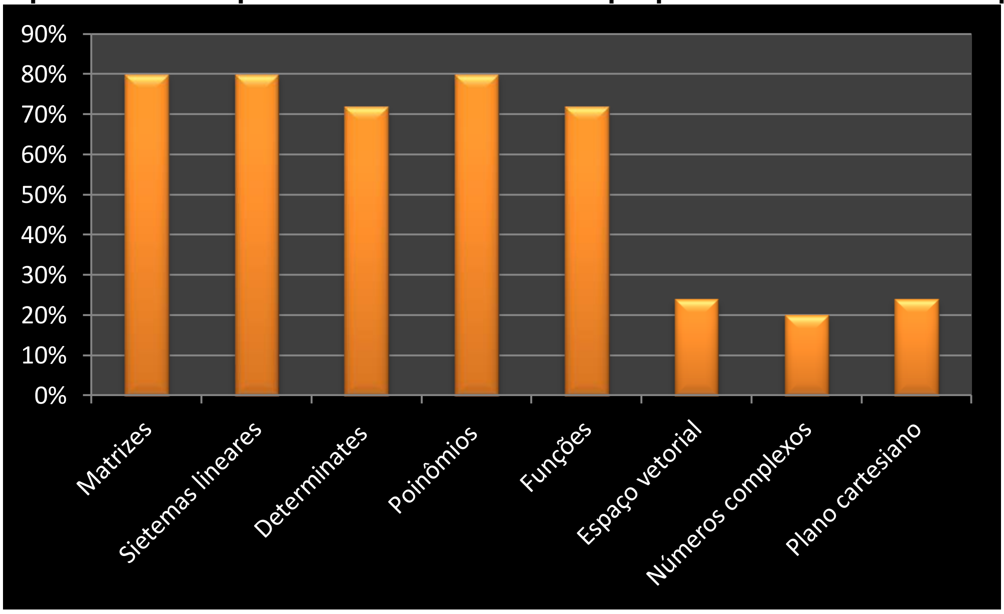
Fonte: Autor, 2019.

É notório, conforme o gráfico, que o maior percentual acredita que existe sim algum conteúdo que deveria ter prioridade sobre os demais. Desta forma, a seguir, estão elencados no gráfico, alguns conteúdos que os participantes julgaram ser importantes e que de alguma forma sejam indispensáveis no ensino médio. Vale salientar que essa pergunta feita aos professores independe deles terem ou não conhecimento da BNCC.

Respostas dos professores sobre quais conteúdos deveriam ter prioridade na elaboração da BNCC

.

Gráfico 9 - Em sua opinião dentre os conteúdos pertinentes à Álgebra Linear há algum que deveria ter prioridade dentro da nova proposta da BNCC? Justifique.



Fonte: Autor, 2019.

A situação do gráfico acima evidencia os conteúdos conforme a coleta dos resultados, com isso se percebe que matrizes é um conteúdo que os profissionais da área julgam ser um dos mais importantes para BNCC em se tratando de Álgebra Linear no ensino médio, já que está com 80% das opiniões, outro com um percentual bastante elevado são os determinantes, estando com 72% das opiniões. Pode-se ver com um percentual de 80% o conteúdo de sistemas lineares e polinômios. Logo abaixo desse percentual têm-se funções totalizando 72% das opiniões, em seguida observa-se com um percentual de 24% para plano cartesiano e espaço vetorial, e por fim, números complexos ocupam a última posição com apenas 20% do total de entrevistados. Quando questionados sobre a importância de priorizar algum conteúdo em detrimento de outros, alguns professores falaram que nenhum conteúdo deveria ter prioridade sobre outros (mais especificamente 5 pessoas), visto que cada um teria sua singularidade própria.

5 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA HABILIDADE EM13MAT301

A seguir, será apresentada uma sequência didática com a finalidade de que o ensino de sistemas lineares, parte componente da Álgebra Linear, venha se tornar algo mais prazeroso para os discentes do ensino médio. O foco desta sequência didática é mostrar aos professores interessados, uma forma de poder apresentar aos alunos e tentar despertar o interesse deles, fazendo com que se tenha um melhor aprendizado da Habilidade de código EM13MAT301 e que trás a seguinte redação: “Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais”. (BRASIL, 2018, p. 536)

A habilidade em discussão compõe, em conjunto com outras habilidades, a competência de número 3, que afirma que o aluno deve:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 534)

5.1 Diagnóstico

Com o propósito de apresentar uma forma metodológica de abordar o conteúdo de sistemas de equações lineares, pertinente à habilidade de código EM13MAT301 presente na BNCC, foi realizada com turmas das 2ª séries do ensino médio da Escola Estadual Monsenhor Machado, uma sequência de atividades, que aqui denominamos sequência didática, como forma de organização e sistematização das aulas em que seriam trabalhados os conceitos, definições, resolução de problemas envolvendo o conteúdo de sistemas lineares e problemas aplicados a situações cotidianas. A seguir, Zabala (1998) afirma que a sequência didática tem por objetivo:

> [...] introduzir nas diferentes formas de intervenção aquelas atividades que possibilitem uma melhora de nossa atuação nas aulas, como resultado de um conhecimento mais profundo das variáveis que intervêm do papel que cada uma delas tem no processo de aprendizagem dos meninos e meninas. (ZABALA, 1998, p. 54)

Ainda para este autor, a definição de sequência didática é tida como sendo “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. (ZABALA, 1998, p. 18).

Tendo em vista que o conteúdo de matrizes já havia sido trabalhado nas turmas as quais a sequência didática foi aplicada, ficou razoável dar prosseguimento ao conteúdo de sistemas lineares, pois matrizes era conteúdo de fundamental importância. Para tanto, foram utilizadas oito horas aulas, que correspondem a duas semanas completas de aulas, sendo que essas aulas foram divididas em três momentos de encontro com o público alvo (turmas da 2ª série C, do ensino médio e D, do turno vespertino da Escola Estadual Monsenhor Machado).

Em se tratando de sequência didática, Peretti e Costa (2013) afirmam que:

> Ao iniciar a sequência didática, é necessário efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados, jogos, análise e reflexão. Aos poucos, faz-se necessário aumentar a complexidade dos desafios e orientações permitindo um aprofundamento do tema proposto. (PERETTI; COSTA, 2013, p. 6)

Baseando-se nas afirmações dos autores supracitados, em um primeiro momento iniciou-se uma avaliação com o propósito de se conhecer as dificuldades dos alunos com relação à matemática básica, utilizando questões de álgebra, equação do primeiro grau e sistemas lineares. Desta forma foi aplicado o questionário do apêndice B, aos alunos da 2ª série do ensino médio C, (com 32 alunos) e da 2ª série do ensino médio D, (com 33 alunos) da Escola Estadual Monsenhor Machado, escola localizada em Viçosa-AL e pertencente a 4ª Gere, a fim de verificar os conhecimentos matemáticos básicos mínimos e necessários para compreensão do projeto a ser trabalhado, bem como constatar suas dificuldades nos conteúdos estudados. A avaliação foi composta de problemas com conteúdos básicos e necessários para dar-se prosseguimento ao estudo dos sistemas lineares.

Critério de Avaliação

- Reconhecer pontos no plano cartesiano, pois tem sua fundamental importância para construção de retas no plano ou até mesmo no espaço (Questão 1);
- Sabe encontrar o valor desconhecido numa Equação do 1º Grau (Questão 2);
- Traduzir (equacionar) para linguagem matemática, problemas que envolvem equações do 1º grau (Questão 3);
- Saber equacionar problemas lineares (sistemas lineares) com duas incógnitas (Questão 4);
- Saber equacionar problemas (sistemas lineares) com três incógnitas (Questão 5).

Como o ambiente da sala de aula usada pela escola não era grande o suficiente para se trabalhar com todos ao mesmo tempo, fez-se necessário aplicar o teste em cada turma individualmente, em seus respectivos horários de aulas.

O resultado obtido com a aplicação do questionário apresenta-se sintetizado em um quadro a seguir com cada especificidade.

Tabela 1 - Resultado do diagnóstico

Questões	Aprendizagem constatadas	N° de acertos da turma C	N° de acertos da turma D	Percentual de acertos da turma C	Percentual de acertos da turma D
1-a	Sabem localizar pontos no plano cartesiano	26	29	81.25%	87.87%
1-b	Sabem localizar pontos no plano cartesiano	26	29	81.25%	87.87%
1-c	Sabem localizar pontos no plano cartesiano	26	27	81.25%	81.81%
2-a	Sabem encontrar um valor desconhecido numa equação do 1° grau	24	27	75%	81.81%
2-b	Sabem encontrar um valor desconhecido numa equação do 1° grau	24	26	75%	78.78%
2-c	Sabem encontrar um valor desconhecido numa equação do 1° grau	24	27	75%	81.81%
3	Traduzem para linguagem matemática, problemas que envolvam equações do 1° grau	10	15	31.25%	45.45%
4-a	Sabem escrever matematicamente um sistema linear com duas incógnitas	8	12	25%	36.36%
4-b	Resolver um sistema linear	16	14	50%	42.42%
5	Equacionar e resolver um sistema linear com três incógnitas	5	8	15.62%	24.24%
	TOTAL DE ALUNOS	32	33		

Fonte: Autor, 2019.

Em uma análise preliminar, percebe-se que os alunos da turma D, na maioria das situações apresentadas tiveram um melhor desempenho em relação aos alunos da 2ª série do ensino médio C, e de fato, isso evidencia que são turmas em graus e níveis de dificuldades e aprendizagens diferentes. É notório, pelo item a, b e c do problema 1 que tanto os alunos da 2ª série do ensino médio C, quanto o da 2ª série do ensino médio D, não apresentam um grau elevado de dificuldades em trabalhar coordenadas cartesianas, visto que em ambas as turmas os percentuais de acertos foram acima de 80%. Ao que se pode notar do item 2, a turma da 2ª série do ensino médio D, teve um percentual de 81,81% de acertos (nos itens (a) e (c)), já na turma C, o desempenho teve um percentual de 75% nos três itens (a), (b) e (c), com isso podemos afirmar que as duas turmas tiveram um bom desempenho em se tratando de resolver problemas simples que envolvam equações do 1°grau.

Ao analisar o item 3, o qual aborda a tradução de problemas do 1° grau escritos literalmente para a escrita matemática, podemos concluir que as dificuldades dos alunos das duas turmas avaliadas foram maiores que nos problemas anteriores, visto que os percentuais de acertos caíram para valores próximos da metade do item anterior, que aborda o mesmo tipo de problema, porém com uma linguagem algébrica já expressa. Da turma da 2ª série C, pode-se ver o percentual de acertos de 31,25% já da outra turma foi de 45,45%. No item 4 parte (a), aumentando mais o grau de dificuldade, foi trabalhado o entendimento dos alunos sobre a modelagem matemática de um sistema linear, tendo em vista que o problema foi expresso literalmente, com isso o resultado foi ainda menor, com percentuais das turmas da 2ª série do ensino médio C e D, sendo 25% e 36,36% respectivamente. Na parte (b) do item 4, tópico que aborda resolução de sistemas lineares, os acertos subiram consideravelmente sendo na 2ª série do ensino médio C o valor de 50% e na 2ª série do ensino médio D o valor foi de 42,42%. Disso podemos concluir que as duas turmas tiveram um melhor desempenho em se tratando da resolução de sistemas lineares com duas variáveis. Na resolução do problema 4 item (b), alguns alunos não utilizaram os métodos tradicionais tais como o método da adição ou da substituição, eles usaram uma forma alternativa baseada no raciocínio e deduções. Algumas perguntas foram feita pelos alunos ao tentar resolver esse item:

Aluno: - Professor, pode usar a lógica?

Professor: - Pode, desde que você anote o que está fazendo.

E finalizando a abordagem do questionário, analisando o item 5, podemos perceber que o resultado para a resolução de sistemas lineares foi muito baixa, visto que do total de 32 pessoas, somente cinco tiveram acertos nesse item, totalizando um percentual de 15,62% e na turma da 2ª série do ensino médio D, de um total de

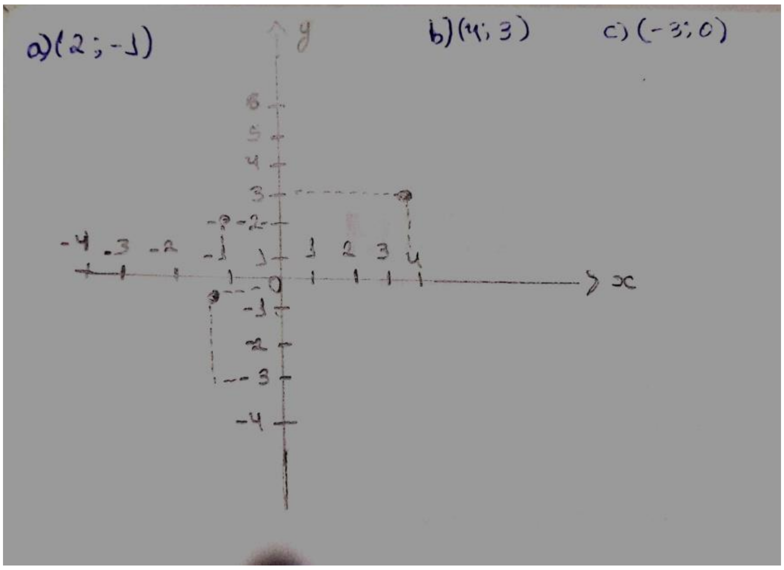
33 pessoas somente 8 pessoas tiveram êxito, o que resulta em 24,24% dos alunos desta referida turma.

Alguns erros constatados nas resoluções dos problemas feitos pelos alunos podem ser visto adiante:

<u>Problema 1.</u> Desenhe o plano cartesiano e localize os pontos apresentados a baixo:

a) (2; -1) b) (4; 3) c) (-3; 0)

Imagem 1 - Resposta para o problema 1



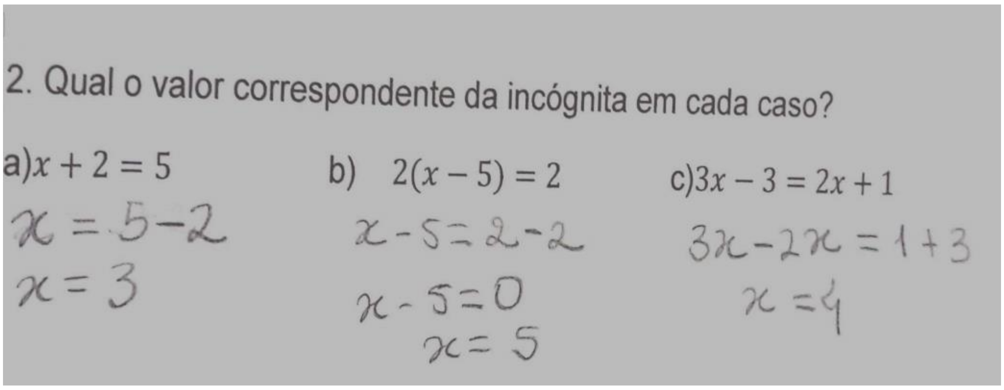
Fonte: Respostas dos alunos

Essa é uma das resoluções feita pelos alunos, e nessa resolução o erro está no item (a), pois o discente inverteu as coordenadas x e y, diferentemente no item (b) ainda que com mesmo grau de dificuldade, ele localizou o ponto corretamente no plano cartesiano. Já o item (c) é um ponto de coordenadas com pouco mais de dificuldade para localizá-lo, nota-se que o discente criou um ponto abaixo do eixo x, e com isso fez uma tentativa de unir $y = -3$ à origem, estando essa localização errada.

<u>Problema 2</u>. Qual o valor correspondente da incógnita em cada caso?

a) $x + 2 = 5$ b) $2(x - 5) = 2$ c) $3x - 3 = 2x + 1$

Imagem 2 - Resposta para o problema 2



2. Qual o valor correspondente da incógnita em cada caso?

a) $x + 2 = 5$

$x = 5 - 2$

$x = 3$

b) $2(x - 5) = 2$

$x - 5 = 2 - 2$

$x - 5 = 0$

$x = 5$

c) $3x - 3 = 2x + 1$

$3x - 2x = 1 + 3$

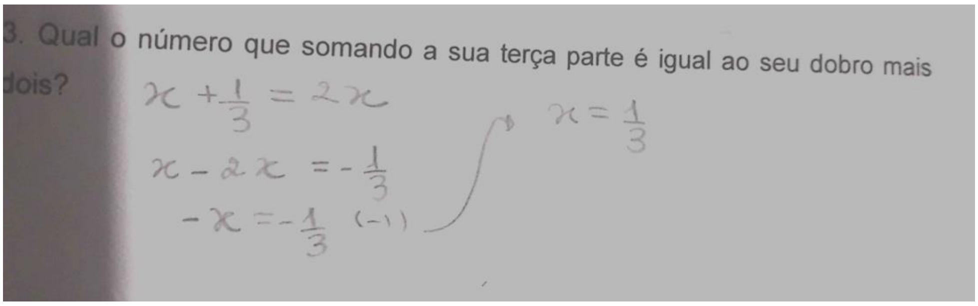
$x = 4$

Fonte: Respostas dos alunos

Um dos erros constatados foi o da imagem acima, nesse problema o aluno resolveu corretamente o item (a) e (c), porém cometeu um erro ao resolver o item (b) quando leva o número 2 que está no primeiro membro para segundo membro sem aplicar antes a distributividade da multiplicação. Fazendo uma análise dessa situação, entende-se que aluno tem um bom domínio dessas resoluções, dá para acreditar que passou despercebido (pelo aluno) o fato que o 2 do primeiro membro, está multiplicando todos parênteses.

Problema 3. Qual o número que somando à sua terça parte é igual ao seu dobro mais dois?

Imagem 3 - Resposta para o problema 3



3. Qual o número que somando a sua terça parte é igual ao seu dobro mais dois?

$x + \frac{1}{3} = 2x$

$x - 2x = -\frac{1}{3}$

$-x = -\frac{1}{3} \quad (-1)$

$x = \frac{1}{3}$

Fonte: Respostas dos alunos

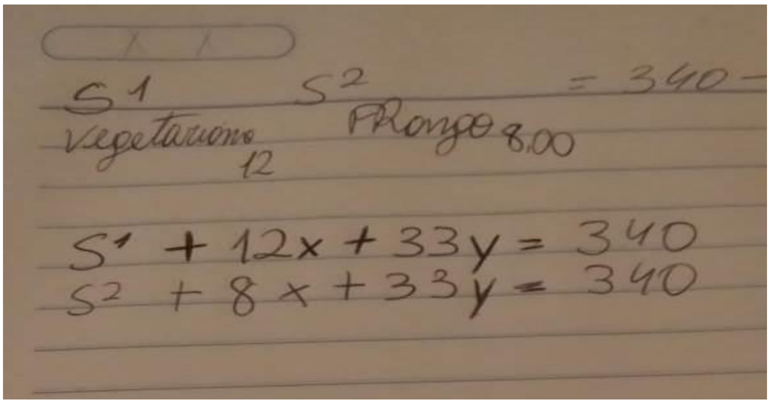
Um dos erros vistos foi na forma de traduzir matematicamente um problema escrito literalmente para sua forma algébrica, como pode ser notado ao montar a equação o aluno desconsiderou o termo $\frac{x}{3}$ e ao invés disso o aluno colocou apenas $\frac{1}{3}$, além disso ele não escreveu a expressão do segundo membro da igualdade de maneira correta, pois faltou adicionar o 2 ao termo $2x$. Com isso acredita-se que tenha ocorrido por uma interpretação feita de maneira errada, e assim a resposta final também não está correta.

Problema 4. Na cantina de uma escola, são oferecidos dois tipos de sanduíches, frango e vegetariano, cujos preços estão indicados abaixo. Em um determinado dia, essa cantina arrecadou R$324,00 na venda de 33 sanduíches. Sabendo que o sanduíche de frango custa R$8,00, e o vegetariano custa R$12,00. Responda os itens a seguir: (SOUSA; GARCIA, 2016)

a) Escreva um sistema de equação que represente a situação apresentada.

b) Quantas unidades de cada sanduíche foram vendidas naquele dia?

Imagem 4 - Resposta 1 para o problema 4 (incorreta)

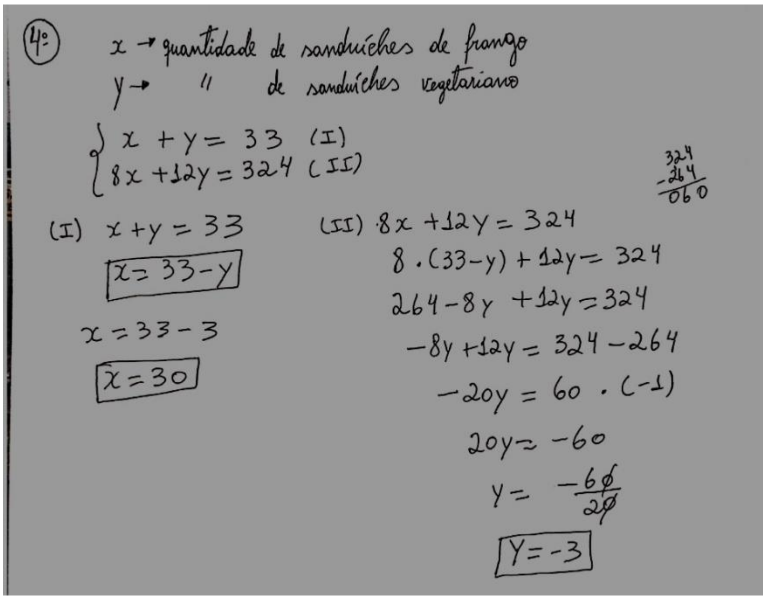


Fonte: Respostas dos alunos

A forma como foi feito esse problema aparentemente é uma tentativa de resolução do item (a), nela foi feita a montagem do sistema, porém de forma errada. Não dá pra identificar bem a maneira como o aluno raciocinou para chegar a essa montagem, por outro lado nota-se que o aluno entendeu que esse seria um problema ligado a sistemas de equações de duas incógnitas x e y (pensamento correto, caso tenha pensado assim). Já o item (b) não foi feita por esse aluno, o que seria inviável já que a letra (a) não foi feita de forma correta.

A seguir está disposta uma resposta efetuada de maneira incorreta do problema 4.

Imagem 5 - Resposta 2 para o problema 4 (incorreta)

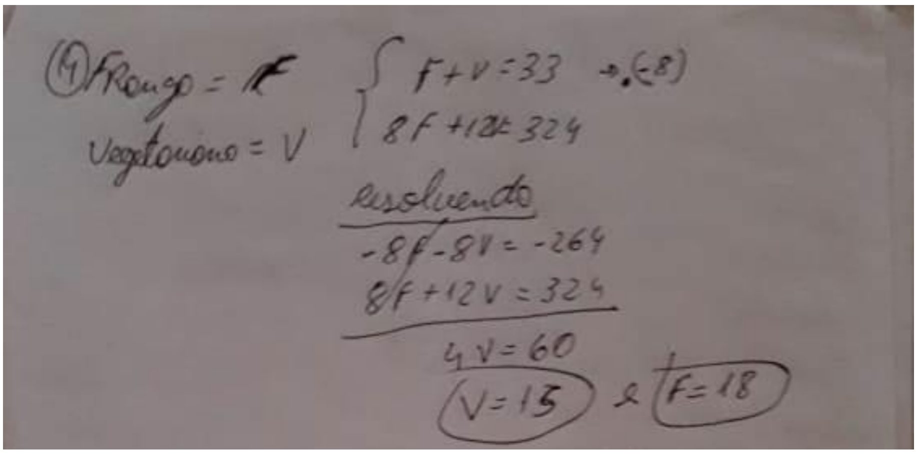


Fonte: Respostas dos alunos

Nessa resolução, a montagem foi feita de maneira correta, porém a resposta final não está correta. Pelo que se nota, o erro cometido pelo aluno encontra-se ao somar $-8y$ com $12y$, que teria como resultado $4y$ e ao invés disso ele dá como resultado $20y$, e desta forma chega a um resultado final errado.

A imagem a seguir mostra uma solução feita de maneira correta do problema 4.

Imagem 6- Resposta 3 para o problema 4(correta)



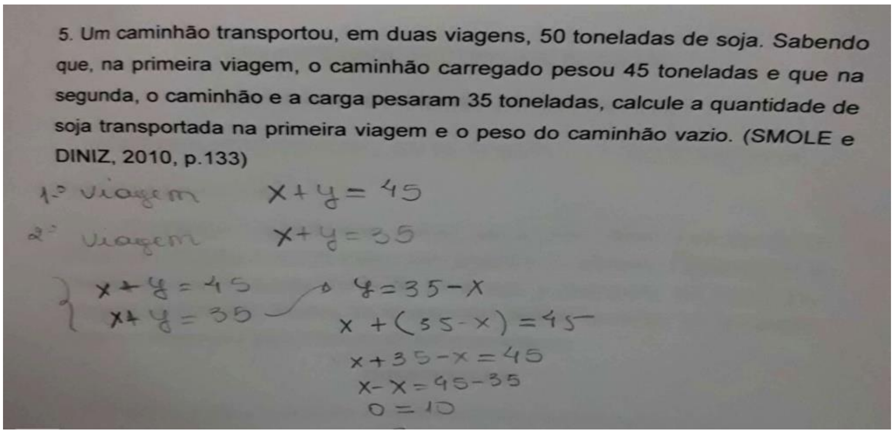
Fonte: Respostas dos alunos

Nessa outra, a forma como foi montado o sistema está de maneira correta, visto que na primeira equação a soma dos sanduíches de frango e vegetariano somam 33 unidades, e que da segunda equação sabe-se que os valores pagos nas somas de todos os sanduíches vendidos resultam em 324 reais. O método de resolução utilizado foi o método da adição, outra forma que aluno poderiam ter utilizado seria o método da substituição.

<u>Problema 5</u>. Um caminhão transportou, em duas viagens, 50 toneladas de soja. Sabendo que, na primeira viagem, o caminhão carregado pesou 45 toneladas e que na segunda, o caminhão e a carga pesaram 35 toneladas, calcule a quantidade de soja transportada na primeira viagem e o peso do caminhão vazio. (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 133)

Adiante trazemos uma forma (incorreta) como foi resolvido o problema 5.

Imagem 7 - Resposta 1 para o problema 5 (incorreta)


5. Um caminhão transportou, em duas viagens, 50 toneladas de soja. Sabendo que, na primeira viagem, o caminhão carregado pesou 45 toneladas e que na segunda, o caminhão e a carga pesaram 35 toneladas, calcule a quantidade de soja transportada na primeira viagem e o peso do caminhão vazio. (SMOLE e DINIZ, 2010, p.133)

1° viagem $x+y=45$

2° viagem $x+y=35$

$$\begin{cases} x+y=45 \\ x+y=35 \end{cases} \quad y=35-x$$

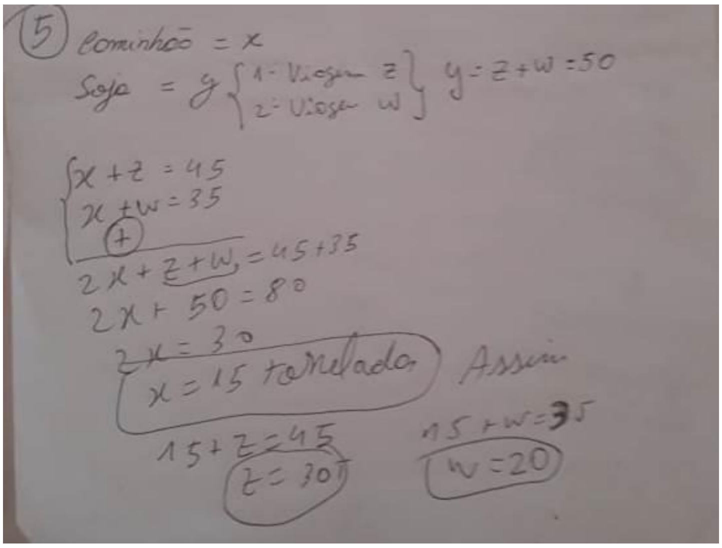
$$x+(35-x)=45$$
$$x+35-x=45$$
$$x-x=45-35$$
$$0=10$$

Fonte: Respostas dos alunos

Nessa resolução do problema 5, um dos erros está apresentado acima, e nota-se que no entendimento do aluno que esse é um problema de sistema equação linear com duas incógnitas, porém na realidade esse problema está associado a um sistema linear de três incógnitas, desta forma a montagem não foi feita de maneira correta chegando no final da resolução a uma resposta duvidosa e incorreta. O erro na resolução desse problema se deu pelo fato do aluno ter considerado o peso da carga na primeira viagem igual ao peso da carga na segunda, o que na realidade não acontece, pois na primeira viagem o peso do caminhão junto com o peso da carga somam 45 toneladas. Já na segunda viagem o peso do caminhão continua sendo o mesmo, tendo em vista que se trata do mesmo caminhão e o peso da carga é que é diferente já que os dois juntos pesam agora 35 toneladas. Assim, a montagem do problema foi feita de maneira errada, deste modo chegando a um resultado incorreto.

A seguir está disposta uma resposta efetuada de maneira correta do problema 5.

Imagem 8 – Resposta 2 para o problema 5 (Correta)

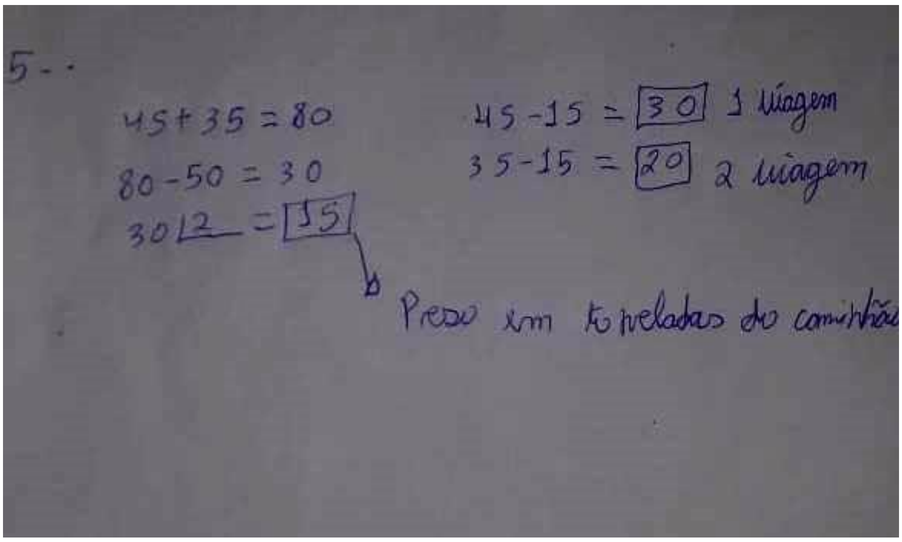


Fonte: Respostas dos alunos

A resolução apresentada acima foi realizada por um aluno e está efetuada de maneira correta, visto que as incógnitas em questão são sempre levadas em conta de maneira correta, por exemplo, o fato do caminhão nas duas viagens ter sempre o mesmo peso (no qual ele denomina o peso do caminhão de x), e que as cargas são consideradas como diferentes nas duas viagens (na primeira ele denomina a carga como sendo z e na segunda ele denomina a carga como sendo w).

A seguir está apresentada mais uma resposta para o problema 5.

Imagem 9 - Resposta 2 para o problema 5 (correta)



Fonte: Respostas dos alunos

Nessa resolução o aluno não usou o auxílio de variáveis para montagem do sistema, mas usando um método alternativo. O aluno também conseguiu chegar a um resultado correto. A princípio ele somou o peso das duas viagens (incluindo o peso do caminhão nas duas viagens), em seguida o aluno sabia que a carga total a ser carregada era de 50 toneladas, e desta forma ele subtraiu esse valor do montante inicial que era de 80 toneladas. Com raciocínio anterior, ao fazer a subtração o aluno entendeu que só sobraria o peso do caminhão nas duas viagens e entende-se que ele considerou o peso do caminhão igual nas duas viagens (o que está correto) e dividiu o resultado por 2, com isso chegando a todas as conclusões corretamente.

5.2 Segundo momento

Feita a análise das respostas obtidas com o questionário, partiu-se para um segundo momento, onde se fez necessário fazer uma revisão e trabalhar com mais contextualização os problemas que envolviam sistemas de equações lineares com duas variáveis, pois foi notável a dificuldade dos alunos em problemas do cotidiano, como se pode perceber no questionário aplicado. Para fazer abordagem da resolução optou-se por usar o método da adição, com o intuito de minimizar as dificuldades posteriores quando fossem abordados sistemas de equações com três variáveis, contudo, essa parte não se tornou tanto um problema visto que funcionou mais como uma revisão do que já tinha sido visto por eles, durante o 8° ano do ensino fundamental. Esse momento também foi usado para se fazer discussões coletivas sobre as respostas obtidas pelos alunos para os problemas abordados, para que desta forma pudéssemos discutir os erros e acertos cometidos pelos alunos ao responderem o questionário inicial.

Imagem 10 - Foto 1 das discursões coletivas do questionário aplicado

Fonte: Autor, 2019.

Imagem 11 - Foto 2 das discursões coletivas do questionário aplicado

Fonte: Autor, 2019.

Na terceira aula, continuando a segunda fase da sequência foi trabalhada a noção de plano cartesiano como forma de revisão e, posteriormente, foi abordada a noção geométrica de sistemas de equações lineares com duas incógnitas, para que, com isso, os alunos pudessem perceber o que na prática seria uma solução de um sistema linear. Ainda trabalhando a noção geométrica foi possível falar com mais clareza, tendo como foco a visualização das retas referente a cada equação do sistema, as definições do que é um sistema Possível Determinado (SPD); Sistema Possível e Indeterminado (SPI) e Sistema Impossível (SI), baseando-se nas soluções geométricas. Toda essa abordagem foi feita, ate então, por aulas expositivas e convencionais.

Para a quarta aula, foi concluído o que havia sido feito na aula anterior e posteriormente feita uma ampliação dos sistemas lineares de duas variáveis para sistemas com três variáveis, para só assim poder trabalhar a resolução destes sistemas por meio da regra de escalonamento, visto que eles já haviam estudado durante o ano corrente, matrizes e determinantes.

Durante a quinta aula, foi dada continuidade ao que foi visto no encontro anterior e trabalhou-se também a noção geométrica de sistemas de equações lineares com três incógnitas (com auxílio do livro didático adotado pela rede estadual de ensino) para que desta forma toda noção de sistemas lineares estivesse, em grande parte, enrijecida nos conhecimentos dos discentes.

5.3 Terceiro momento

Para o terceiro momento, fez-se necessário deslocar ambas as turmas, das 2ª séries do ensino médio para uma sala específica que se pudesse usar o *Data Show* e o computador, ao mesmo tempo fazendo uso da internet como ferramenta didática, usou-se esse encontro para abordar o *software* matemático *GeoGebra.* Neste momento, foi apresentado o máximo de ferramentas possíveis (dentro do horário da aula) desse programa, para que até em outros momentos, de alguma forma, este viesse a ser útil. Como já é sabido, o uso de jogos, aplicativos ou outra ferramenta computacional tem sido constantemente utilizada como instrumentos potencialmente motivacionais para o ensino aprendizagem, como relata o recorte a seguir:

> Computador e internet na sala de aula nas mãos de professores treinados formam um importante instrumento de ensino. Ter acesso à internet não é mais uma questão de aumentar a capacidade de raciocínio. Passou a ser vital. É saber ler escrever nos anos 50. (SCHWARTZ, 1999, p. 32).

Em se tratando de aprendizado, os autores Mamede-Neves e Duarte, afirmam que:

> O uso de tecnologias, associado a propostas pedagógicas concebidas/ implementadas a partir de concepções de ensino ancoradas na lógica da produção/distribuição centralizada (de um para muitos) de informações e de conteúdos e que entendem a aprendizagem como etapas a serem controladas passo-a-passo, fundadas basicamente na memorização e na repetição, certamente não vão produzir bons resultados, independente dos recursos que essas tecnologias possam vir a oferecer. (MAMEDE-NEVES e DUARTE, 2008, p. 284)

Desta forma, com o *GeoGebra*[5] disponível como ferramenta metodológica, foi feito um aprofundamento na parte sobre equações lineares (retas e plano cartesiano). Com isso, voltou-se a analisar os problemas trabalhados nos encontros iniciais, com o propósito de resolvê-los novamente e assim poder visualizar geometricamente, desta vez com o auxílio de uma ferramenta computacional.

Os problemas analisados com auxílio do *GeoGebra* foram dos mais diversos possíveis tanto dos sistemas com duas, quanto os de três incógnitas. Com tudo isso, pode-se notar o quanto uma ferramenta simples, porém eficaz pode mudar a compreensão dos alunos, desde então percebemos uma mudança de postura dos alunos, que se mostravam muito mais interessados neste novo conteúdo e participaram com entusiasmo inclusive perguntando e tirando dúvidas. Como forma

---

[5] O *GeoGebra* é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação.

de melhorar o entendimento, foi pedido para que os alunos providenciassem para o próximo e último momento, a resolução de dois sistemas lineares contextualizados, resolvidos e expusessem suas soluções geométricas no *GeoGebra*, o resultado foi muito gratificante, pois notou-se a participação da maioria dos alunos público alvo da sequência didática, com exceção dos faltosos.

Nas informações colhidas a respeito do trabalho, os alunos alegaram ser interessante ver o *GeoGebra* funcionando, seja no plano em duas dimensões quanto no plano tridimensional. Os problemas analisados foram inseridos de forma mais contextualizada, pois desta forma, além de utilizar um recurso computacional acredita-se que essa contextualização faz com que haja uma maior interação, os procedimentos resolvíveis do problema não se tornem de certa forma tão mecânicos, aguçando assim, o raciocínio dos alunos desenvolvendo certas habilidades e consequentemente havendo uma maior aprendizagem.

Conforme afirma os PCNs+,

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p.111)

Quanto aos problemas e a forma como foram apresentados aos alunos, procederam da forma explicitada adiante:

Problema 1. Paulo sacou R$ 240,00 num caixa eletrônico em cédulas de 20 e 30 reais. Ao todo foram sacadas 9 cédulas. Chamando de x e y as quantidades de cédulas de 20 e 30 reais, respectivamente, escreva um sistema linear e determine quantas cédulas de cada tipo foram sacadas. (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 79)

Solução. Inicialmente foi apresentado aos alunos, como que se deveria proceder para a montagem do sistema linear enunciado no problema.

$$\begin{cases} x + y = 9 \quad (1) \\ 20x + 30y = 240 \quad (2) \end{cases}$$

Em seguida, usando o método da substituição foi feita a resolução do sistema:

$$x + y = 9$$

$$\Rightarrow x = 9 - y$$

(foi usado x em função de y para substituir na equação 2)

$$\Rightarrow 20(9 - y) + 30y = 240$$

$$\Rightarrow 180 - 20y + 30y = 240$$

$$\Rightarrow -20y + 30y = 240 - 180$$

$$\Rightarrow -20y + 30y = 240 - 180$$

$$\Rightarrow 10y = 60$$

$$\Rightarrow y = \frac{60}{10}$$

$$\Rightarrow y = 6$$

Assim, a quantidade de nota de 30 reais, neste montante, é um total de 6 notas. Para achar a quantidade de notas de 20 reais, usa-se a equação (1), para fazer a devida substituição, como segue abaixo:

$$x = 9 - y$$

$$\Rightarrow x = 9 - 6$$

$$\Rightarrow x = 3$$

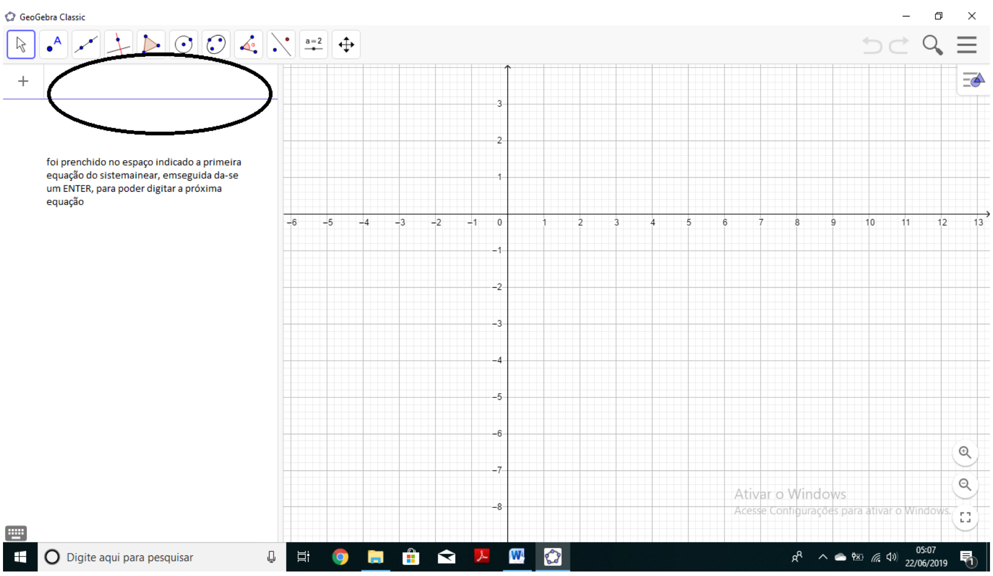
Portanto, havia 3 notas de 20 reais

Depois de apresentada a resolução aos alunos, por meio do método da substituição, utilizou-se o *GeoGebra* para visualizar a solução encontrada com o propósito de facilitar o entendimento do que seria, de fato, essa solução encontrada. Com isso, pode-se apresentar a solução geométrica do sistema trabalhado com alunos usando, desta forma, uma excelente ferramenta computacional.

Apresentação da solução no *GeoGebra:*

1° passo: Foi baixado o aplicativo e posteriormente abriu-se a página do programa.

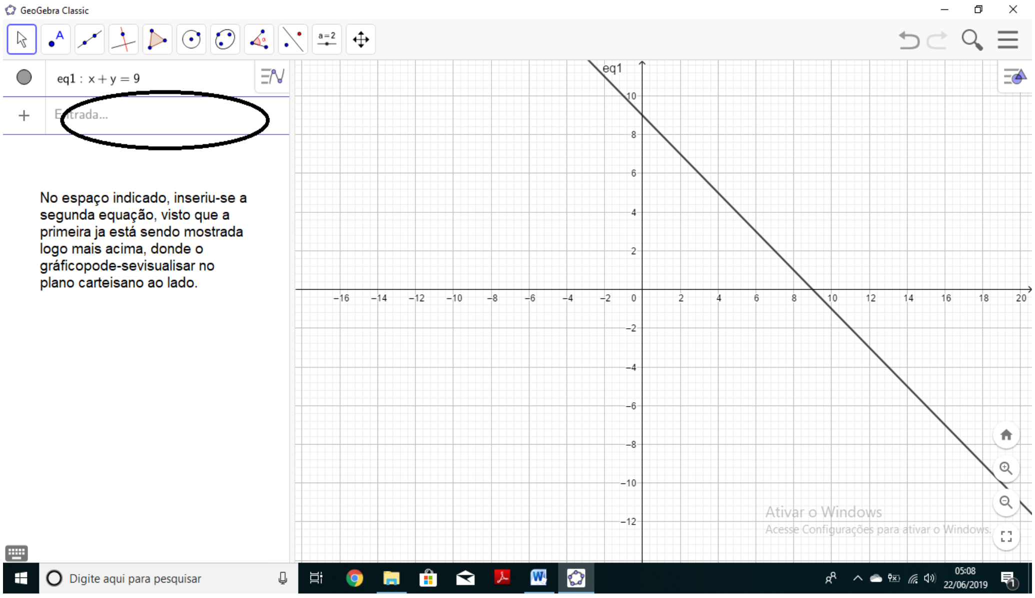
Figura 1 - 1° procedimento com o uso do *GeoGebra* em um sistema de duas equações



Fonte: Autor, 2019.

2° Passo: Logo após ser inserida a primeira equação, foi digitada a segunda equação no campo destacado na figura, com isso a cada procedimento realizado o gráfico foi aparecendo automaticamente no plano cartesiano ao lado.

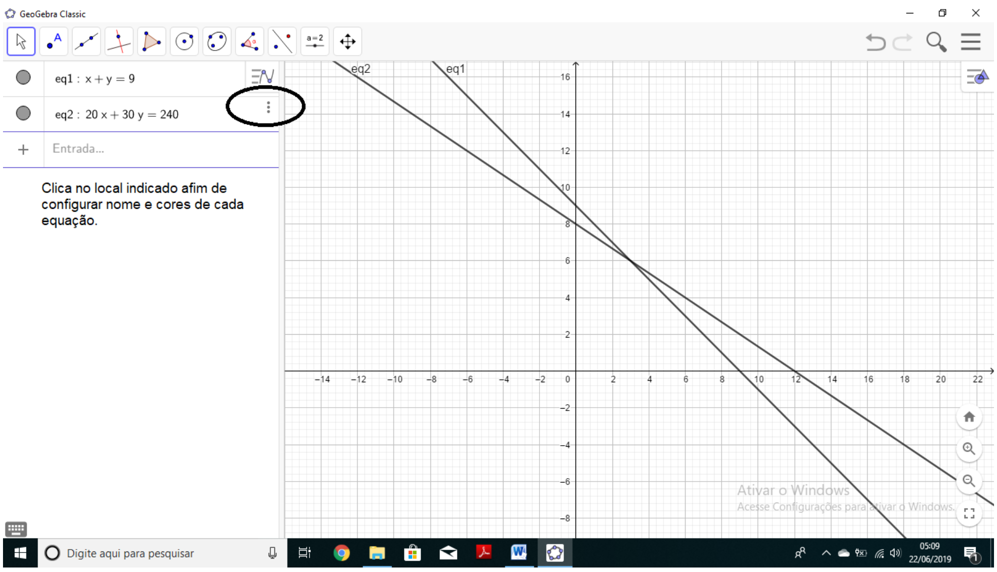
Figura 2 - 2° procedimento com o uso do *GeoGebra* em um sistema de duas equações



Fonte: Autor, 2019.

3° passo: Clica no local indicado a fim de fazer os devidos ajustes em se tratando de cor das equações, nomes de cada uma delas e até mesmo com o objetivo de determinar a solução do sistema, caso exista.

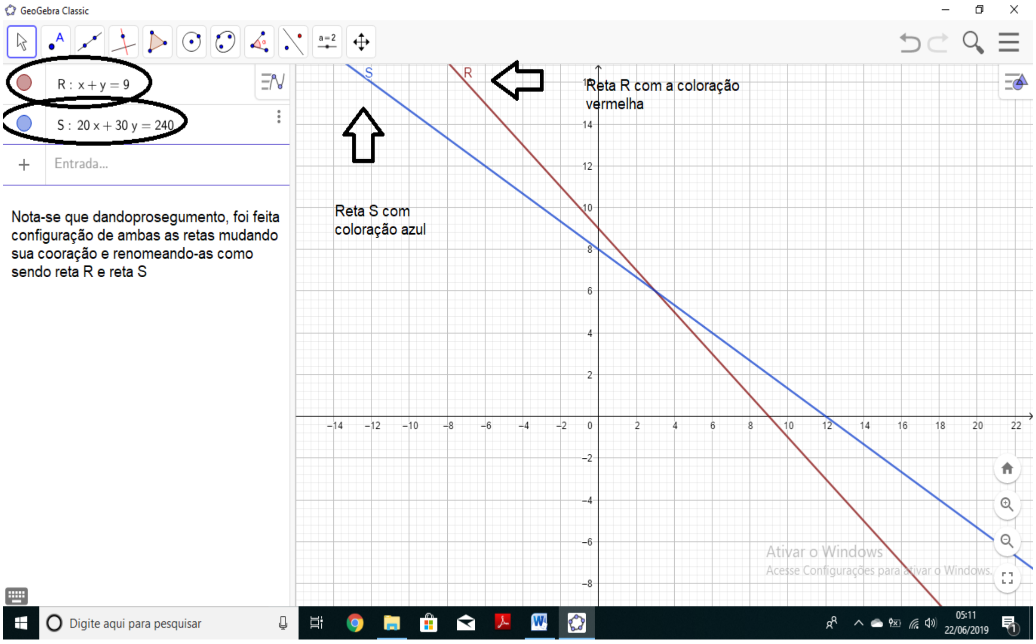
Figura 3 - 3° procedimento com o uso do *GeoGebra* em um sistema de duas equações



Fonte: Autor, 2019.

4° passo: No prosseguimento a seguir, foi feita a configuração de cada um dos gráficos que representam as duas equações, sendo nesta configuração modificado o nome destas respectivas retas, denominadas agora de R e S, e suas respectivas cores.

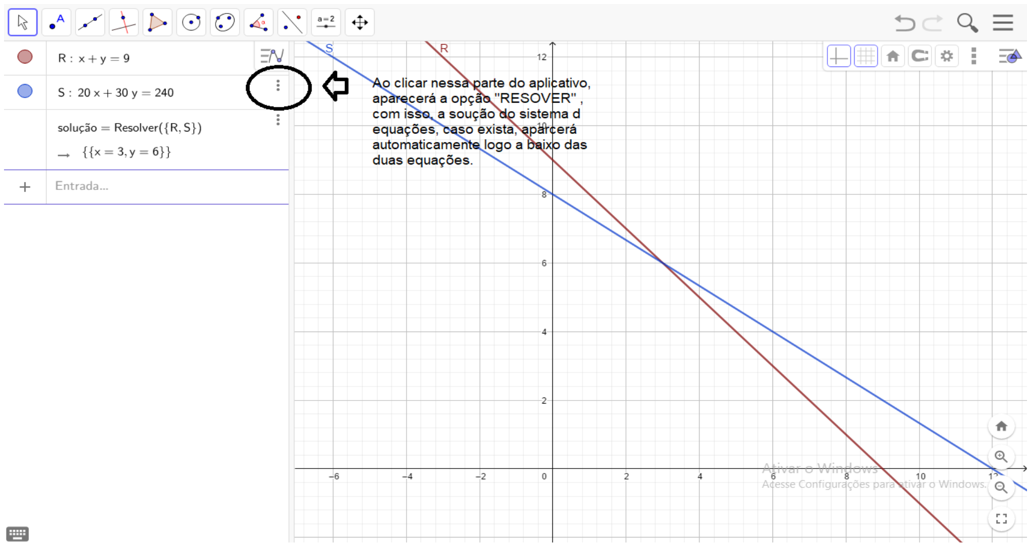
Figura 4 - 4° procedimento com o uso do *GeoGebra* em um sistema de duas equações



Fonte: Autor, 2019.

5° passo: Como o próprio texto da figura afirma, ao clicar na opção em destaque na figura, uma das opções para que se possa escolher é a palavra *resolver,* com isso ao escolher esta referida opção, o programa apresentará automaticamente a solução do sistema desejado, caso ela exista.

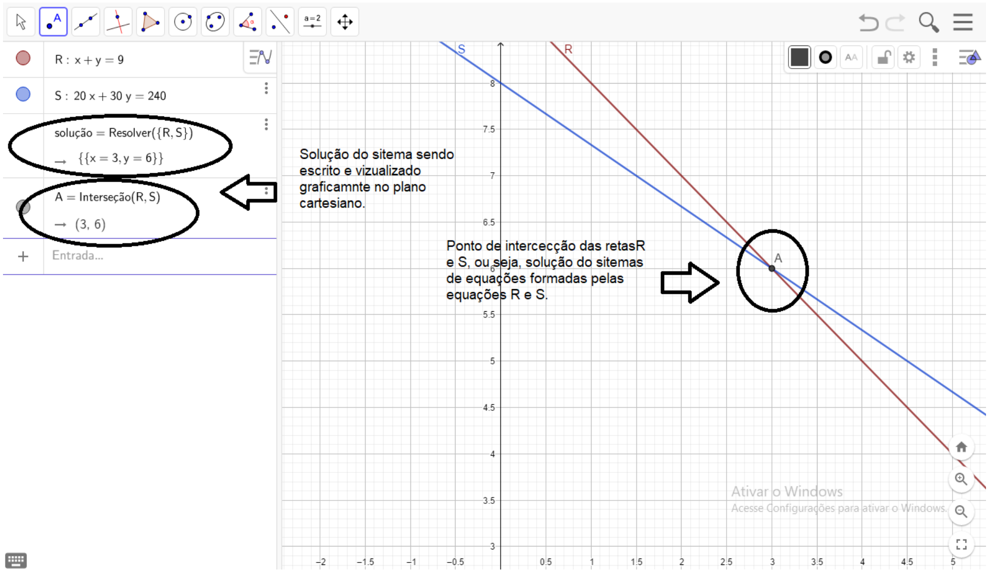
Figura 5 - 5° procedimento com o uso do *GeoGebra* em um sistema de duas equações



Fonte: Autor, 2019.

6° passo: A seguir, apresenta-se a solução geométrica do sistema de equação linear com duas variáveis trabalhado algebricamente, e agora visualizado, com o propósito de mostrar o que significa ser uma solução de um sistema.

Figura 6 - Apresentação da solução geométrica do sistema de duas equações



Fonte: Autor, 2019.

Vale salientar que todos esses procedimentos foram realizados com os alunos das turmas da 2ª série C e 2ª série D, da Escola Estadual Monsenhor Machado, localizada em Viçosa-AL.

Problema 2. O organismo humano, bem como o de outros animais, para seu bom funcionamento necessita de vários tipos de substâncias, sais minerais, vitaminas, proteínas etc. Vamos supor que uma pessoa necessita fazer uma receita de modo que a quantidade de cada alimento a ser ingerido corresponda às necessidades diárias de Vitamina C, Cálcio e Magnésio. Ela se alimentará de três diferentes ingredientes, e cada um deles possui uma determinada quantidade de nutrientes (expressa em miligramas) por unidade de ingrediente (por exemplo, por colher), conforme apresentado na tabela a seguir. (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 93)

Tabela 2 - Tipo de alimento e respetivas quantidade de nutrientes (mg)

Nutrientes	1	2	3	Total necessário de nutrientes (mg)
Vitamina C	10	20	30	100
Cálcio	40	40	10	210
Magnésio	20	10	30	110

Fonte: Souza e Garcia, 2016, p. 109.

Analisem os dados da tabela em relação às quantidades x, y e z de unidades dos ingredientes 1, 2 e 3, respectivamente e indiquem a afirmação verdadeira.

a) A quantidade necessária de unidades do ingrediente 1 é o dobro da quantidade de unidades do ingrediente 2.

b) Para que a receita satisfaça as necessidades de vitamina C, cálcio e magnésio, são necessárias 3 unidades do ingrediente 2.

c) A quantidade de unidades do ingrediente 2 é o dobro da quantidade de unidades do ingrediente 3.

d) O ingrediente 1 deve contribuir com 40% do total necessário de vitamina C, cálcio e magnésio necessários à dieta alimentar do paciente.

e) O ingrediente 2 contribuirá com 50 mg de cálcio para que a receita alcance o resultado desejado.

Solução.

Fazendo a interpretação do problema, elabora-se inicialmente a as equações matemáticas que representam as informações apresentadas na tabela, como segue abaixo:

Da primeira linha da tabela (Vitamina C), inferimos que a equação é dada por:

$$10x + 20y + 30z = 100$$

Da segunda linha da tabela (Cálcio), inferimos que a equação é dada por:

$$40x + 40y + 10z = 210$$

Da terceira linha da tabela (Magnésio), inferimos que a equação é dada por:

$$20x + 10y + 30z = 110$$

Assim, monta-se um sistema de equações lineares com a respectiva equação obtida, como se pode ver adiante:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z = 100 \\ 40x + 40y + 10z = 210 \\ 20x + 10y + 30z = 110 \end{cases}$$

Com o sistema linear composto pelas equações lineares obtidas, usa-se neste caso, por escolha do autor, o método de escalonamento para que se obtenha uma solução para o sistema, caso haja. Os procedimentos estão cuidadosamente descritos abaixo:

Definimos l_1 como sendo linha 1 do sistema, l_2 como sendo linha a 2 do sistema, l_3 como sendo linha a 3 do sistema, temos:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z = 100 \ \rightarrow l_1/10 \\ 40x + 40y + 10z = 210 \rightarrow l_2/10 \\ 20x + 10y + 30z = 110 \rightarrow l_3/10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 4y + z = 21 \rightarrow -4l_1 + l_2 \\ 2x + y + 3z = 11 \rightarrow -2l_1 + l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ -4y + 11z = -19 \rightarrow -3l_2 \\ -12y - 12z = -9 \rightarrow 4l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 12y + 33z = 19 \rightarrow -l_2 \\ -12y - 12z = -36 \rightarrow l_2 + l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 12y + 33z = 57 \\ 21z = 21 \end{cases}$$

$$z = \tfrac{21}{21}, \ \ z = 1$$

Com o valor de z encontrado, usa-se a segunda equação da ordem de cima para baixo, para fazer a substituição z, para com isso poder se obter o valor da incógnita y, como está disposto a seguir:

$$12y + 33z = 57 \Rightarrow 12y + 33 \cdot (1) = 57 \Rightarrow 12y + 33 = 57$$

$$\Rightarrow 12y = 57 - 33 \Rightarrow 12y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{12} \Rightarrow y = 2$$

Em seguida, dispondo agora dos valores de y e z, usa-se a primeira equação linear para se obter o valor de x e desta forma encontrar o ponto (x, y, z) que a solução do sistema de equação trabalhada.

$$\Rightarrow x + 2y + 3z = 10$$

$$\Rightarrow x + 2 \cdot (2) + 3 \cdot (1) = 10$$

$$\Rightarrow x + 4 + 3 = 10$$

$$\Longrightarrow x + 7 = 10$$

$$\Longrightarrow x = 10 - 7$$

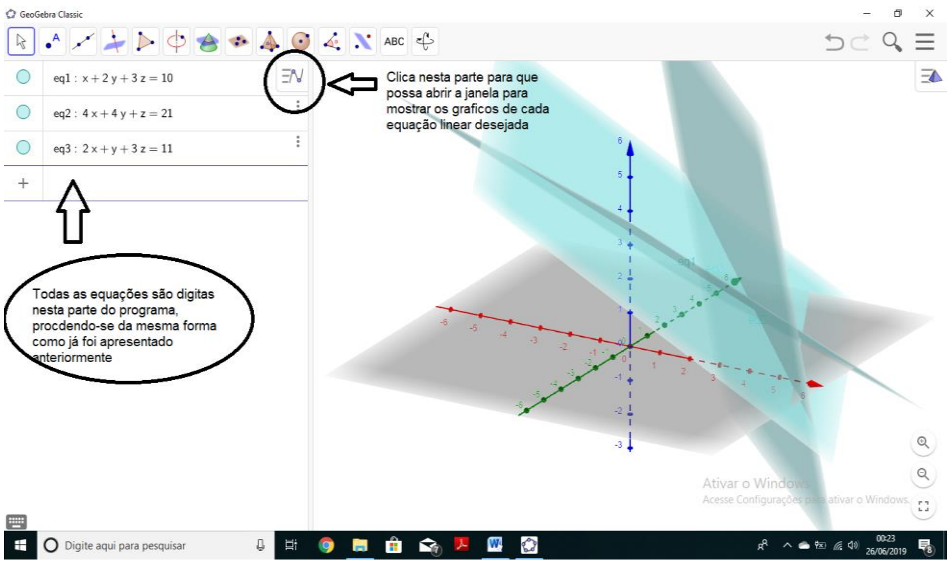
$$\Longrightarrow x = 3$$

Assim, a solução procurada é dada por $x = 3, y = 2, z = 1$

Para que os alunos pudessem ter um conceito mais sólido deste conteúdo, foi feito uma proposta diferenciada com eles, para isso foi utilizado o *GeoGebra*, desta forma foi possível introduzir o conceito da terceira dimensão. A ideia foi fazer com que os alunos intendessem que a solução de um sistema linear com 3 incógnitas ainda continua sendo um ponto (quando o sistema é possível e determinado), todavia, este ponto localiza-se no espaço. Assim, logo após ter trabalhado o problema algebricamente, foi abordado o mesmo problema geometricamente com o *GeoGebra.* Dispondo desse *software* foi feita a interpretação geométrica do sistema apresentado anteriormente que, por sua vez, admite solução única, ou seja, trata-se de um sistema possível e determinado (SPD) e tem como solução o ponto (3, 2, 1), de onde os passos estão detalhados a seguir:

1° passo: Abrir o *GeoGebra,* inserir no local indicado cada uma das equações componentes do sistema de equação linear a ser estudado. Nos locais indicados com setas são usados para inserir cada uma das equações desejadas e a outra para abrir a janela dos gráficos de cada equação.

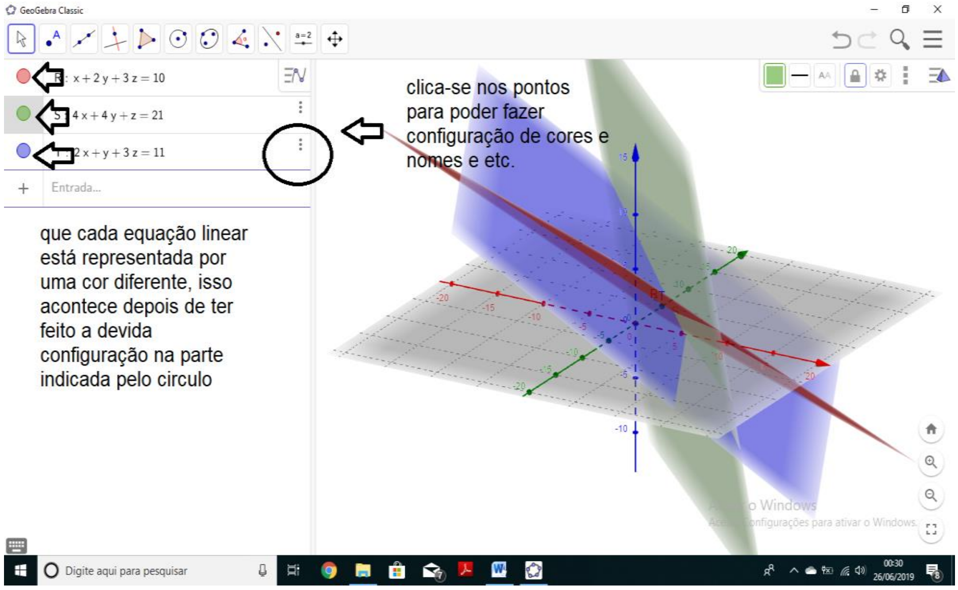
Figura 7 - 1° procedimento com uso do *GeoGebra* em um sistema de três equações



Fonte: Autor, 2019.

2° passo: Como mostra a figura, cada equação linear apresentada está com uma coloração diferente, isso ocorre logo após a configuração ser feita, para isso clica-se no círculo indicado e escolhe a opção configuração para daí renomear, mudar a cor e cada plano que representa a respectiva equação.

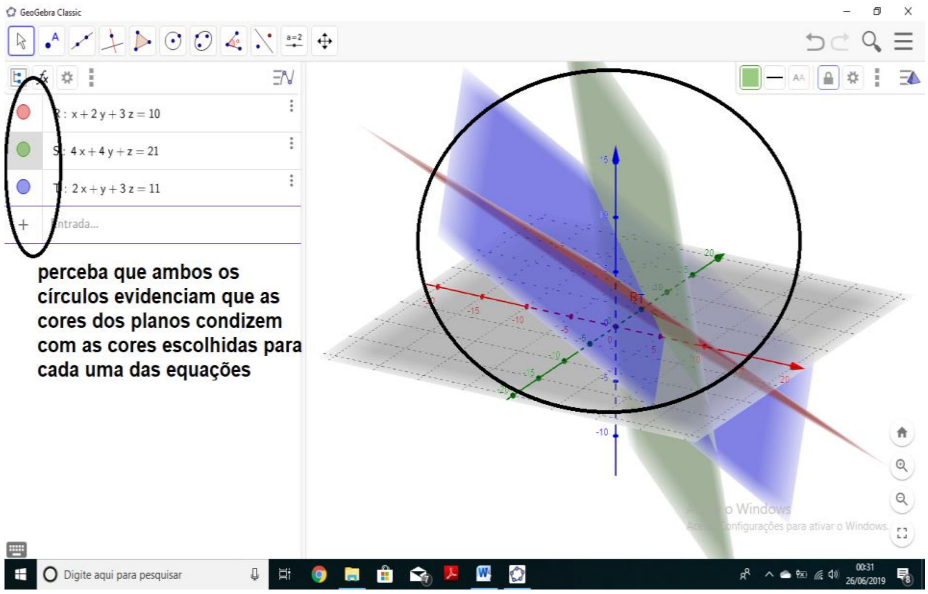
Figura 8 - 2° procedimento com uso do *GeoGebra* em um sistema de três equações



Fonte: Autor, 2019.

3° passo: Nesta etapa, percebe-se que as cores escolhidas para cada uma das equações correspondem a cores dos planos no gráfico tridimensional.

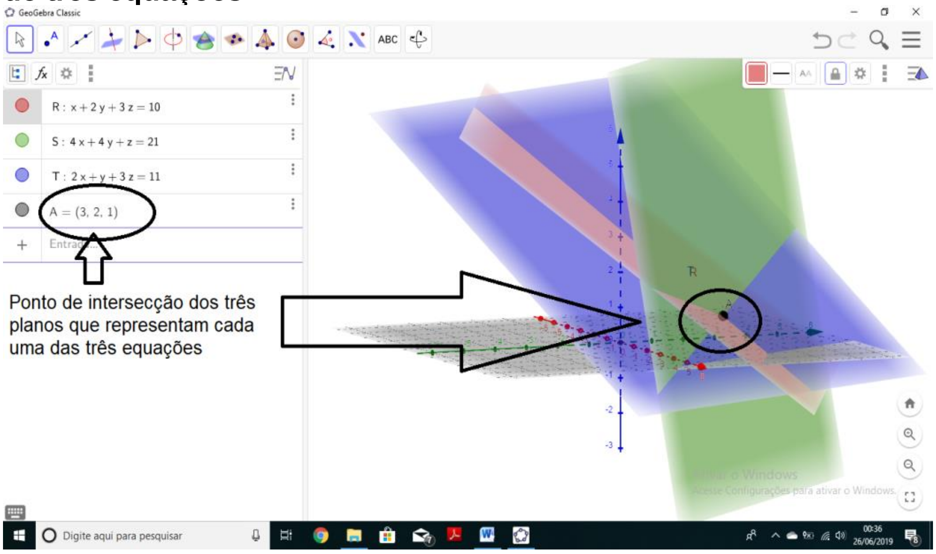
Figura 9 - 3° procedimento com uso do *GeoGebra* em um sistema de três equações



Fonte: Autor, 2019.

4° passo: Depois de inserir as equações do sistema linear e perceber que geometricamente cada equação linear do sistema é representada por um plano no espaço, olhando atentamente a imagem nota-se que a intersecção dos três planos é um único ponto, marcando esse ponto no plano, automaticamente o ponto aparece na janela destinada para parte algébrica do *software,* esse ponto é exatamente o ponto de coordenadas obtido quando o problema havia sido resolvido algebricamente, e que nesta parte da solução nomeamos de ponto A.

Figura 10 - 4° procedimento com uso do *GeoGebra* em um sistema de três equações



Fonte: Autor, 2019.

A partir do que foi apresentado nos dois problemas abordados acima, foi possível perceber um melhor entendimento do conceito de solução de um sistema linear, bem como, a classificação dele como sendo um Sistema Possível Determinado (SPD). Assim, foi deixando claro que, caso os três planos no espaço, independentemente da posição deles, não tenham um único ponto em comum o sistema não pode ser SPD. Logo em seguida, foi também explicado as condições para que o sistema composto por três incógnitas sejam Sistema Possível e Indeterminado (SPI) e Sistema Impossível (SI), tendo em vista as várias formas que cada plano pode se comportar no espaço.

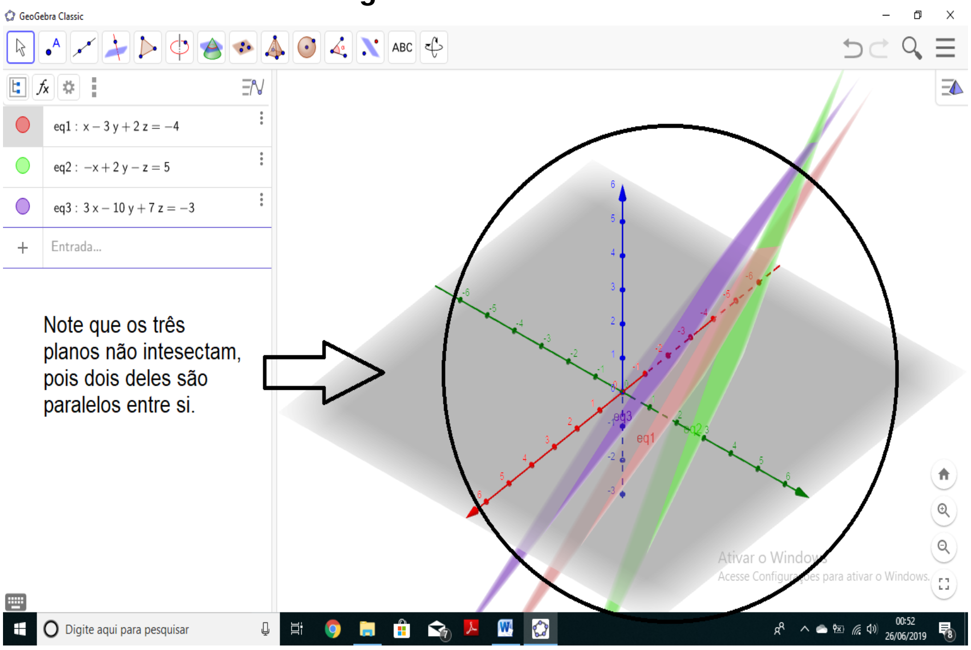
Em seguida, segue uma apresentação que foi mostrada aos alunos de dois sistemas lineares com três incógnitas em sua representação geométrica. O primeiro trata-se de um sistema SI, o segundo de um sistema SPI.

Sistema impossível:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 3x - 10y + 7z = -3 \end{cases}$$

Foi feita a interpretação geométrica para que os alunos pudessem perceber a diferença, desse tipo de sistema para os demais. A interpretação geométrica evidencia que os três planos nunca se intersectam simultaneamente, já que dois deles são paralelos entre si, portanto, não é possível encontrar uma solução para o sistema apresentado.

Figura 11 - Sistema SI



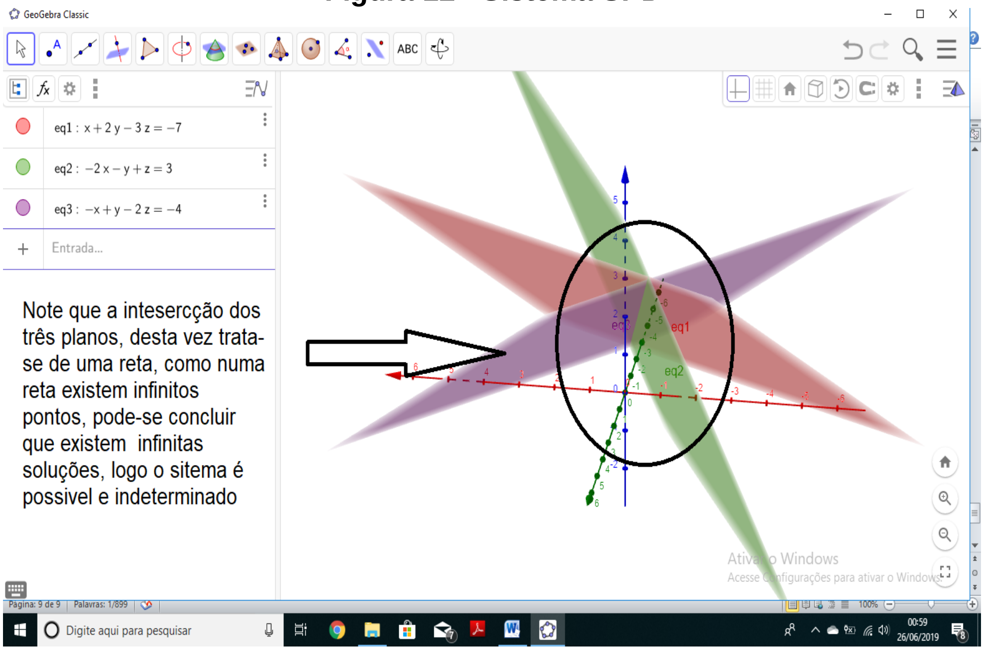
Fonte: Autor, 2019.

Sistema possível e indeterminado:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

Da mesma forma que o sistema anterior, foi feita a interpretação geométrica deste novo sistema para que os alunos também pudessem perceber a diferença, desse tipo de sistema para os demais. Note que neste caso a intersecção é uma reta, que por sua vez, contém infinitos pontos e assim o sistema não possui solução única, classificando-se, portanto, como um sistema possível e indeterminado, pois ele tem solução, todavia, essas soluções são infinitas.

Figura 12 - Sistema SPD



Fonte: Autor, 2019.

Ao concluir todas as atividades propostas com os alunos utilizando o *GeoGebra* foi realizada também uma atividade coletiva com propósito de socialização das atividades para que desta forma eles viessem colocar em prática tudo que foi trabalhado durante a sequência didática. No final do trabalho (Anexo A) está disponível alguns dos trabalhados realizado por eles (resolução de dois sistemas de equações lineares, com 2 incógnitas e com 3 incógnitas fazendo uso do *GeoGebra* para apresentar as soluções geométricas desses sistemas), que foi proposto como uma forma de instrumento avaliativo.

Por fim, a última aula reservada à sequência didática, teve como propósito aplicar um novo questionário seguindo as mesmas características do questionário inicial (diagnóstico), para que desta forma fosse possível perceber os principais avanços ou dificuldades ainda não sanadas em se tratando de aprendizado pelos alunos, e com isso avaliar os efeitos surtidos da sequência didática trabalhada com os alunos durante esses encontros realizados nos respectivos horários de aula, dentro do próprio ambiente escolar.

Tabela 3 - Apresentação dos resultados do segundo teste aplicado (acertos).

Questões	Aprendizagem constatadas	N° de alunos da turma C	N° de alunos da turma D	Percentual de alunos da turma C	Percentual de alunos da turma D
1-a	Sabem localizar pontos no plano cartesiano	28	30	87.5%	90.9%
1-b	Sabem localizar pontos no plano cartesiano	28	29	87.5%	87.87%
1-c	Sabem localizar pontos no plano cartesiano	27	27	84.37%	81.81%
2-a	Sabem encontrar um valor desconhecido numa equação do 1° grau	26	28	81.25%	87.5%
2-b	Sabem encontrar um valor desconhecido numa equação do 1° grau	24	27	75%	81.81%
2-c	Sabem encontrar um valor desconhecido numa equação do 1° grau	26	27	81.25%	81.81%
3	Traduzem para linguagem matemática, problemas que envolvam equações do 1° grau	20	21	62.5%	65.62%
4-a	Sabem escrever matematicamente um sistema linear com duas incógnitas	23	25	71.87%	75,75%
4-b	Resolver um sistema linear	24	25	75%	75.75%
5	Equacionar e resolver um sistema linear com três incógnitas	22	25	68.75%	75,75%
	TOTAL DE ALUNOS	32	33		

Fonte: Autor, 2019.

Tabela 4 - Comparação dos resultados antes e depois da aplicação da sequência didática.

Dados quantitativos	Percentual de acertos da 2ª série C (Antes da sequência didática)	Percentual de acertos da 2ª série D (Antes da sequência didática)	Percentual de acertos da 2ª série C (Após a sequência didática)	Percentual de acertos da 2ª série D (Após a sequência didática)
Problema 1-a	81,25%	87,5%	87,5%	90,9%
Problema 1-b	81.25%	87,5%	87.5%	87.87%
Problema 1-c	81.25%	81.81%	84.37%	81.81%
Problema 2-a	75%	81.81%	81.25%	87.5%
Problema 2-b	75%	78.78%	75%	81.81%
Problema 2-c	75%	81,25%	81,25%	87,5%
Problema 3	31,25%	45,45%	62,5%	65,62%
Problema 4-a	25%	36,36%	71,87%	75,75%
Problema 4-b	50%	42,42%	75%	75.75%
Problema 5	15,62%	24,24%	68,75%	75,75%

Fonte: Autor, 2019.

Como é possível notar, ao comparar o resultado da 2ª série do ensino médio C, tratando-se de localização de pontos coordenados no plano cartesiano, conteúdo abordado pelo Problema 1, houve uma pequena melhora, contudo, o resultado já era um resultado muito bom; da mesma forma vê-se no resultado da 2ª série do ensino médio D, uma leve melhora em que o percentual passou de 87,87% para 90,9%, o que torna o resultado ainda melhor. No Problema 2, nos itens a, b e c o resultado da 2ª série C passou de 75% para 81,25%, já na 2ª série D o resultado passou de 81,81% para 87,5%; desta forma, consideramos uma melhora razoável, porém no geral tornam-se percentuais muito bons.

Considerando o resultado como um todo é oportuno destacar que um dos melhores avanços ao trabalhar a sequência didática ficou evidenciado no Problema 3. Percebe-se que na 2ª série C, o percentual de acertos alcançou o dobro, paralelamente na 2ª série D, o percentual de acertos passou de 45,45% para 65,62%, obtendo uma melhora significativa em relação ao resultado do primeiro questionário. Convém deixar claro que essa questão trata sobre equacionar um problema matemático ligado ao cotidiano. Nos demais problemas pode-se afirmar categoricamente que houve uma excelente melhora, fato comprovado pela tabela apresentada, havendo casos dos percentuais de acertos alcançarem o dobro do valor antes da sequência didática apresentada.

Diante do que foi vivenciado com os alunos ao longo da execução da proposta trabalhada durante a sequência didática, foi possível perceber o quanto é importante para os alunos que professor estabeleça estratégias em sala de aula para que seja ensinado determinados conteúdos. Ao que se pode notar isso faz com que os discentes engajem-se de forma mais produtiva ao processo de ensino-aprendizagem. Um fato curioso percebido durante a sequência didática foi a forma como os discente ficaram envolvidos e empolgados com uso do *GeoGebra* em sala de aula, pois os alunos foram encarregados de baixar o *software* aplicativo em seus *Smartphone* para que desta maneira eles pudessem se familiarizar com o que seria utilizado em sala de aula como ferramenta potencializadora do ensino. Pela forma como os discentes encararam o uso do *GeoGebra*, foi notório que quase todos nunca tiveram conhecimento sobre o *software.* Como eles poderiam fazer uso dos seus celulares para usar o aplicativo, houve um entusiasmo em dar prosseguimento aos encontros posteriores.

Em conformidade com Brasil (2012), buscou-se seguir essa linha de aplicação:

> Ao organizar a sequência didática, o professor poderá incluir atividades diversas como leitura, pesquisa individual ou coletiva, aula dialogada, produções textuais, aulas práticas e etc., pois a sequência de atividades visa trabalhar um conteúdo específico, um tema ou um gênero textual da exploração inicial até a formação de um conceito, uma ideia, uma elaboração prática, uma produção escrita. (BRASIL, 2012, p. 21)

Em vista disso, durante os encontros foram feitas leituras dos problemas inseridos no roteiro e tentou-se esclarecer dúvidas em relação a esses problemas. Além disso, os alunos foram distribuídos em grupos como forma de cooperativismo e discussão entre eles sobre os problemas propostos, e também sobre o *software* que foi apresentado a eles.

Com essa forma de trabalho, notou-se uma melhora significativa dos discentes, desde a participação e envolvimento com as atividades realizadas quanto no aprendizado. Com isso, mediante todo esse processo de transmissão de conteúdo, a habilidade EM13MAT301, que aborda sistemas de equações lineares, foi adquirida pelos discentes das turmas das 2ª séries de ensino médio C e D da Escola Estadual Monsenhor Machado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para todas as unidades escolares públicas e privadas do país demonstra a preocupação dos gestores educacionais dos órgãos competentes para equiparar os assuntos ministrados bem como as propostas de ensino como devem ser abordadas, sendo esta uma maneira de diminuir os gargalos ocasionados por algumas gestões.

A fim de contribuir para uma melhoria sobre o assunto, o trabalho se propôs a elencar as competências específicas de matemática e suas tecnologias, bem como as habilidades da BNCC destacando a disciplina de Álgebra Linear (em particular sistemas de equações lineares). Além disso, foram mostrados seus conceitos, conteúdos, entrevistas, testes de diagnósticos, levantamento de dados e sugestões de como o tema podem ser construídos na sala de aula.

As entrevistas para os docentes constataram a necessidade de uma melhor capacitação para os professores perante à BNCC, para que desta forma eles possam enxergar novas perspectivas para o ensino e aprendizagem. Já o teste de diagnóstico realizado com alunos demonstrou a necessidade de utilizar estratégias e metodologias diferentes para colaborar na aprendizagem, diante das dificuldades constatadas, tendo em vista que houve uma melhora considerável comparando o teste diagnóstico com o questionário final (feito com as mesmas características do questionário inicial). A inovação com o uso do *GeoGebra* despertou um maior interesse dos alunos, visto que houve uma participação significativa deles ao fazer uso da tecnologia em favor da aprendizagem.

Portanto, faz-se necessário a ampliação dos assuntos estudados com a finalidade de que sejam produzidas pesquisas para colaborar com o ensino de matemática. Mas também, despertar as inúmeras quebras de paradigmas existentes entre alunos/professores e ensino/aprendizagem ainda existentes, e ao que se pode notar, a criação de sequências metodológicas de atividades e o uso da tecnologia torna essa forma de transmissão de conteúdo mais eficaz, fazendo com que o retorno de todo esse trabalho seja convertido em um melhor aprendizado.

7 REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear e Aplicações**. Tradução técnica: Claus Ivo Doiring. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil (1988)**. Brasília, DF: Senado Federal, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm>. Acesso em: 18 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular Comum: BNCC**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 5 out. 2019.

BRASIL. Ministério da educação. **Síntese das diretrizes curriculares nacionais para a educação básica.** Brasília. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=32621-cne-sintese-das-diretrizes-curriculares-da-educacao-basica-pdf&Itemid=30192> Acesso em: 15 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. (2002). **PCN+: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cienciasnatureza.pdf.> Acesso em: 10 jul. 2019.

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: alfabetização em foco – projetos didáticos e sequências didáticas em diálogo com os diferentes componentes curriculares:** ano 03, unidade 6. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2012.

CELESTINO, M. R. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. 2000. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000. Disponível em: <https://leto.pucsp.br/bitstream/handle/11157/1/dissertacao_marcos_roberto_celestino.pdf> Aceso em: 2 out. 2019.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio vol. 2.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DINIZ, Maria Ignez; FERREIRA, Fabricio Eduardo. **BNCC comentada para o ensino médio.** Disponível em: <htps://institutoreuna.org.br/?s=Bncc+comentada> Aceso em: 5 Jan. 2020.

DORIER, J. L. - **Étar de l'art de recherche en didactique – À propôs de l'enseignement de l'algèbre linéaire – Recherches en Didactique des Mathemátiques,** vol. 18, n° 2, pp. 191- 230, 1998.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à álgebra linear** (Coleção PROFMAT). SBM, 2016.

LESSA, J. R. **Álgebra Linear**. São Paulo. FMU, 2018. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/algebra-linear/> Acesso em: 20 jun. 2019.

MAMEDE-NEVES, M. A. C., DUARTE, R. **O Contexto dos Novos Recursos Tecnológicos de Informação e Comunicação e a Escola**. Revista Educação & Sociedade, Campinas, vol. 29, n. 104 - Especial, p. 769-789, out. 2008.

MAIER, R. R. **Teoria dos Números: texto de aulas**. Brasília [s.n.], 2005. Disponível em: < http://www.mat.unb.br/~maierr/tnotas.pdf> Acesso em: 25 maio 2019.

MORETTO, V. P. **PROVA: um momento privilegiado de estudo não um acerto de contas**. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. **Sequência didática na matemática**. Revista de Educação do Ideau. Rio de Janeiro, vol.8, n.17, p. 6, 2013.

SCHWARTZ, C. Janelas Para o Futuro. **Veja Vida Digital**. São Paulo, ano 32, p. 32, dez. 1999.

SOUSA, J. R. de.; GARCIA, Jaqueline da silva Riberio. **#Contato matemática, 2º ano**. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2016.

SOFTWARE GEOGEBRA: <https://www.geogebra.org/download>

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio**. 6. ed. São Paulo – SP: Saraiva, 2010.

ZABALA, A**. A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIOS APLICADOS AOS PROFESSORES DA REDE ESTADUAL DE ENSINO QUE ATUAM NA 4ª GERÊNCIA REGIONAL DE EDUACAÇÃO DE ALAGOAS.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Prezado respondente,

O presente questionário servirá unicamente como instrumento de pesquisa e levantamento de dados com propósito de elaborar a dissertação do mestrando José Cláudio Tomé de Lima, sob a orientação da Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos. O questionário trata exclusivamente de conteúdos do ensino médio, ligados a disciplina de "Álgebra Linear", presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino médio.

Identificação do respondente:

Formação profissional:

Graduado ( ) Mestre ( ) Doutor ( ) Mestrando ( ) Especialista ()

Instituição de formação:

Graduação: ______________________________

Pós-graduação: __________________________

Tempo de experiência profissional:

Menos de 1 ano ( ) Até 5 anos ( ) Mais de 5 anos ( )

Questionário

1. Quais conteúdos de álgebra linear você aborda ou já abordou na Educação Básica?____

____

____

2. Você considera importante o estudo de conteúdos de álgebra linear para a formação matemática do aluno? Por quê?

____

____

____

3. Você conhece a proposta da BNCC? Quais conteúdos conseguiu referentes à álgebra linear na proposta da BNCC?

____

____

____

4. Se você identificou os conteúdos de álgebra linear na proposta da BNCC, o que achou da abordagem dos mesmos?

____

____

____

5. Em se tratado dos conteúdos de álgebra linear em sua opinião essa nova proposta da BNCC (Base Nacional Comum curricular) é mais benéfica para o ensino? Justifique.

____

____

____

____

6. Em sua opinião dentre os conteúdos pertinentes à álgebra linear há algum que deveria ter prioridade dentro da nova proposta da BNCC? Justifique.

____

____

____

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIOS APLICADOS AOS ALUNOS DAS 2ª SÉRIES C E D, DA ESCOLA ESTADUAL MONSENHOR MACHADO PERTENCENTE 4ª GERÊNCIA REGIONAL DE EDUACAÇÃO DE ALAGOAS.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Prezado respondente,

O presente questionário servirá unicamente como instrumento de pesquisa e levantamento de dados com propósito de elaborar a dissertação do mestrando José Cláudio Tomé de Lima, sob a orientação da Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos, O questionário aborda questões de conteúdos básicos essenciais para o estudo de sistemas lineares.

QUESTIONÁRIO

1. Desenhe o plano cartesiano e localize os pontos apresentados a baixo:

a) (2; -1) b) (4; 3) c) (-3; 0)

2. Qual o valor correspondente da incógnita em cada caso?

a) $x + 2 = 5$ b) $2(x - 5) = 2$ c) $3x - 3 = 2x + 1$

3. Qual o número que somando à sua terça parte é igual ao seu dobro mais dois?

4. Na cantina de uma escola, são oferecidos dois tipos de sanduíches, frango e vegetariano, cujos preços estão indicados abaixo. Em um determinado dia, essa cantina arrecadou R$ 324,00 na venda de 33 sanduíches. Sabendo que o sanduíche de frango custa R$ 8,00, e o vegetariano custa R$ 12,00. Responda os itens a seguir: (SOUSA; GARCIA, 2016)

a) Escreva um sistema de equação que represente a situação apresentada.
b) Quantas unidades de cada sanduíches foram vendidas naquele dia?

5. Um caminhão transportou, em duas viagens, 50 toneladas de soja. Sabendo que, na primeira viagem, o caminhão carregado pesou 45 toneladas e que na segunda, o caminhão e a carga pesaram 35 toneladas, calcule a quantidade de soja transportada na primeira viagem e o peso do caminhão vazio. (SMOLE; DINIZ, 2010, p.133)

ANEXO A – Fotos de alguns trabalhos realizados pelos alunos (utilizando computador ou *Smartphone*) que trata da resolução de sistemas lineares fazendo uso do *GeoGebra* para mostrar as suas respectivas soluções geométricas.

Foto 1. Capa do trabalho realizado pelos alunos.

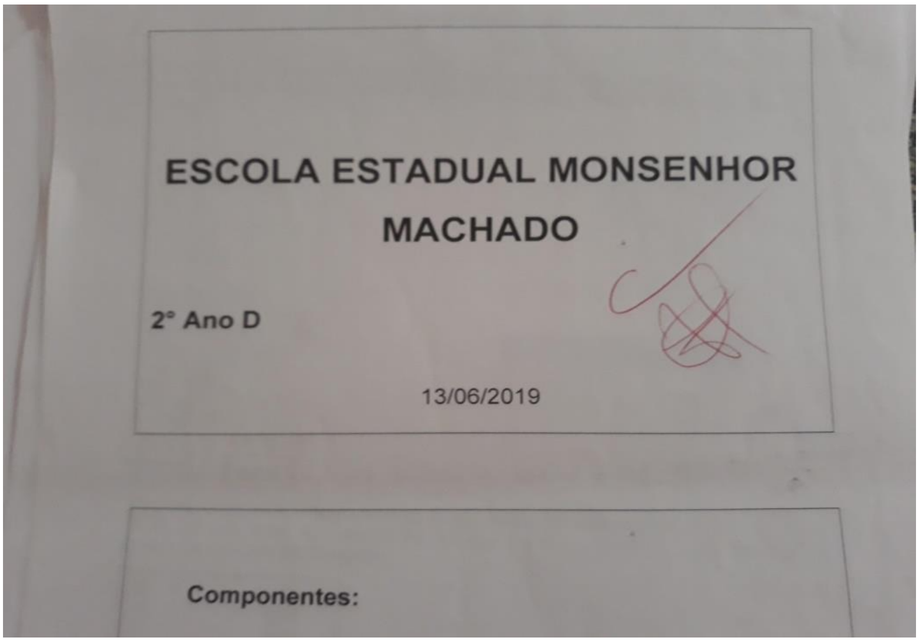


Foto 2. Foto do trabalho feito pelos alunos com auxilio do computador e *Smartphone* para uso do *GeoGebra*.

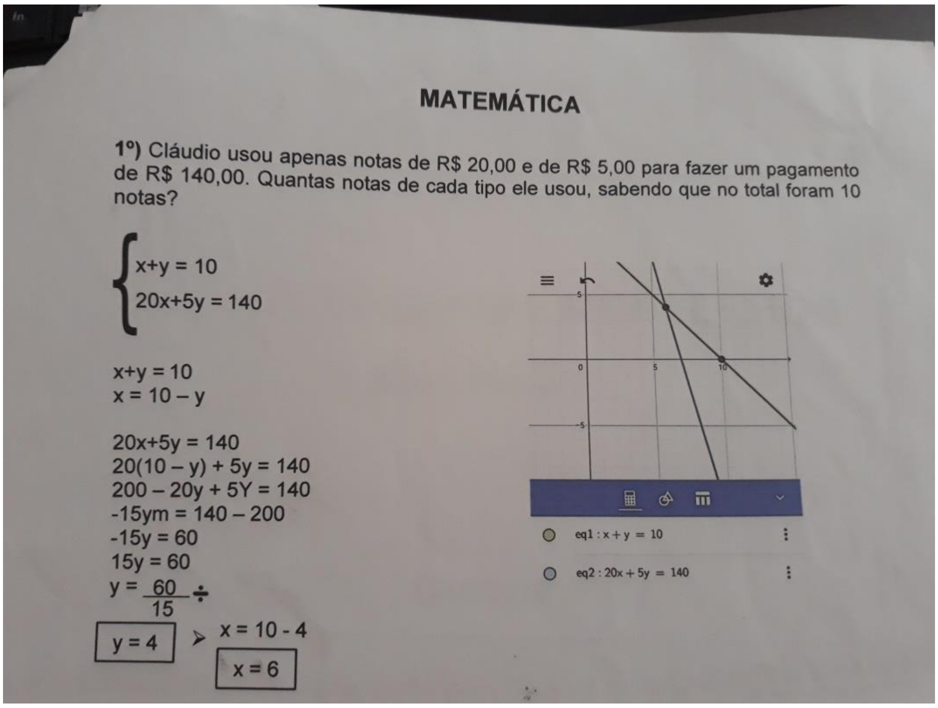
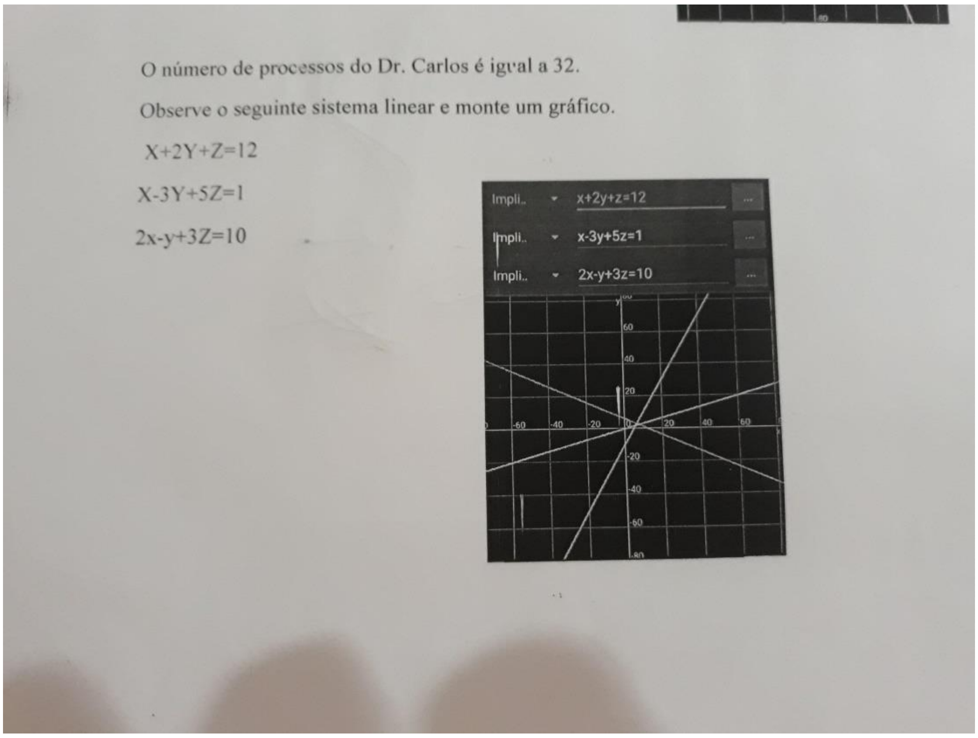


Foto 3. Foto do trabalho feito pelos alunos com auxilio do computador e *Smartphone* para uso do *GeoGebra*.



O número de processos do Dr. Carlos é igual a 32.

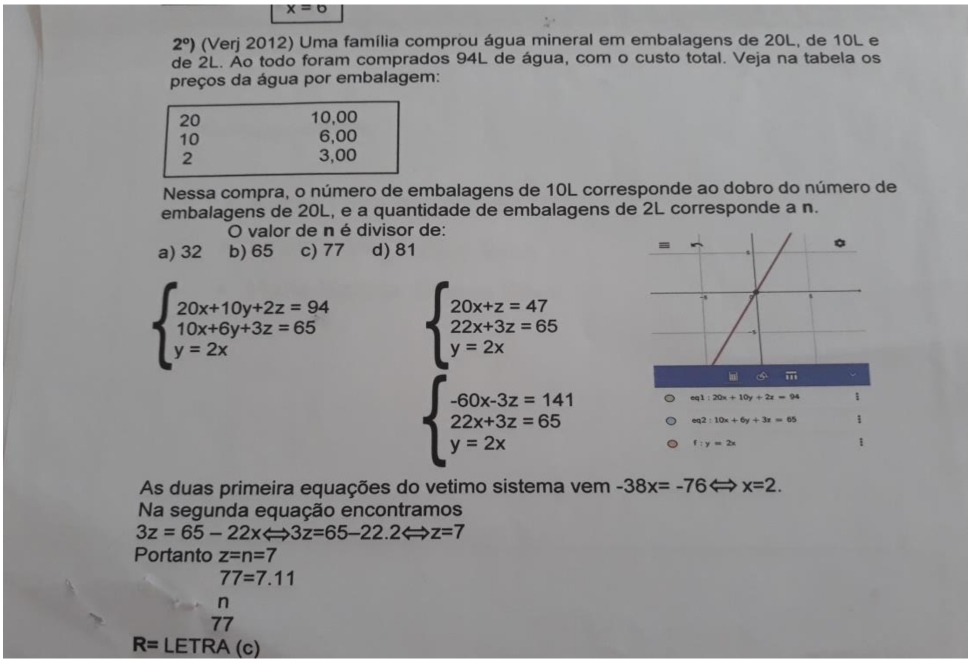
Observe o seguinte sistema linear e monte um gráfico.

$X+2Y+Z=12$

$X-3Y+5Z=1$

$2x-y+3Z=10$

Foto 4. Foto do trabalho feito pelos alunos com auxilio do computador e *Smartphone* para uso do *GeoGebra*.



2º) (Verj 2012) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20L, de 10L e de 2L. Ao todo foram comprados 94L de água, com o custo total. Veja na tabela os preços da água por embalagem:

20	10,00
10	6,00
2	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20L, e a quantidade de embalagens de 2L corresponde a **n**.

O valor de **n** é divisor de:

a) 32 b) 65 c) 77 d) 81

$$\begin{cases} 20x+10y+2z = 94 \\ 10x+6y+3z = 65 \\ y = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 20x+z = 47 \\ 22x+3z = 65 \\ y = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} -60x-3z = 141 \\ 22x+3z = 65 \\ y = 2x \end{cases}$$

As duas primeira equações do vetimo sistema vem $-38x= -76 \Leftrightarrow x=2$.

Na segunda equação encontramos

$3z = 65 - 22x \Leftrightarrow 3z=65-22.2 \Leftrightarrow z=7$

Portanto z=n=7

77=7.11

n

77

R= LETRA (c)

Foto 5. Foto do trabalho feito pelos alunos com auxilio do computador e *Smartphone* para uso do *GeoGebra*.

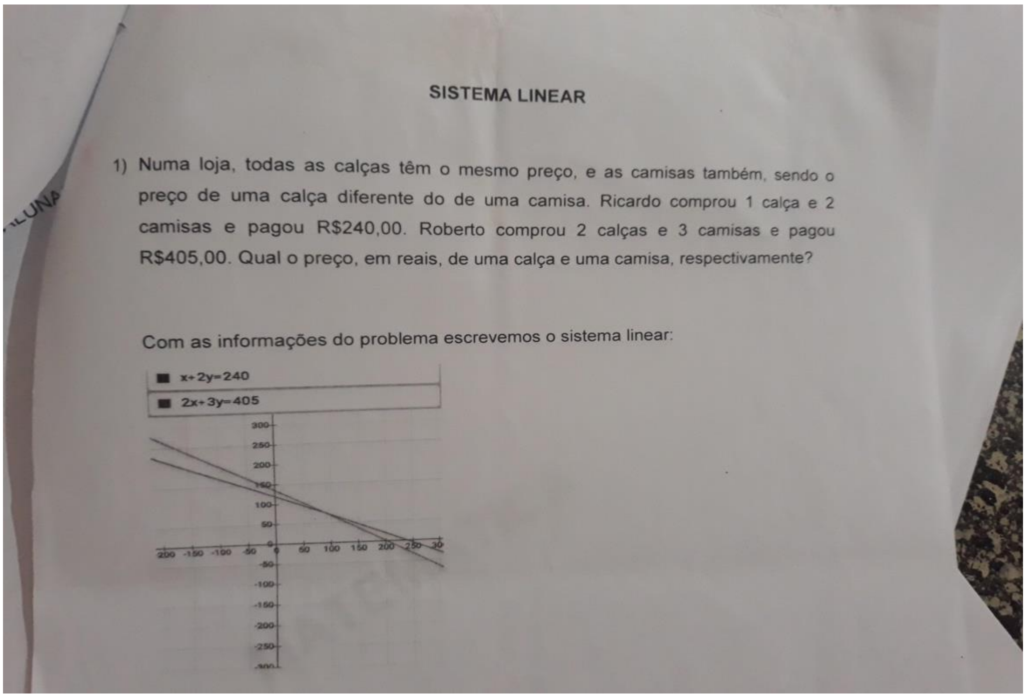


Foto 6. Foto do trabalho feito pelos alunos com auxilio do computador e *Smartphone* para uso do *Geogebra*.

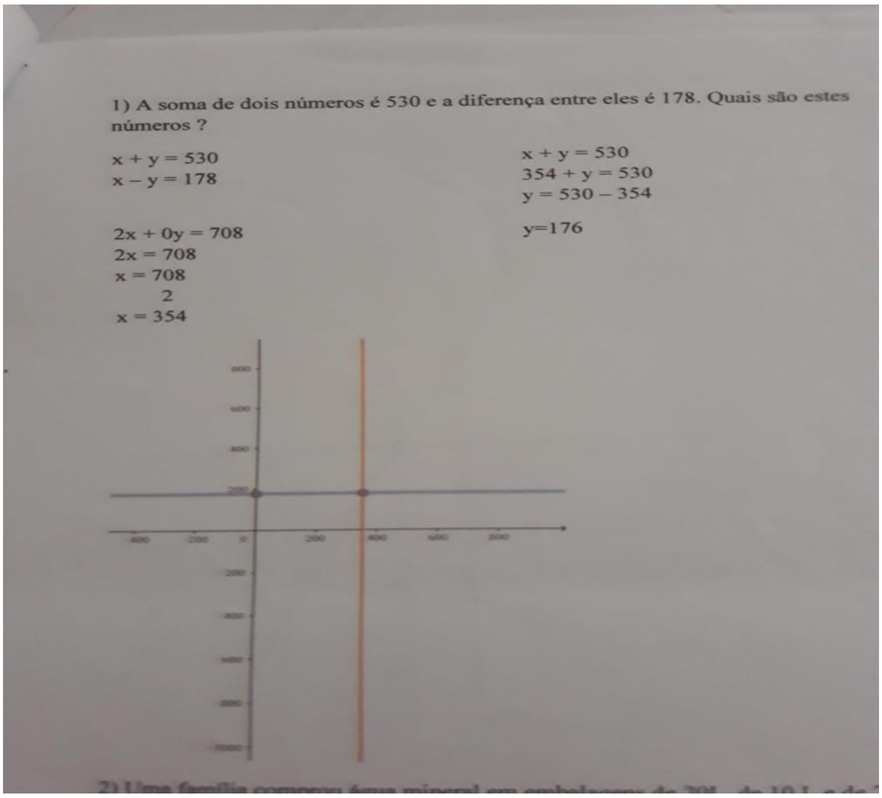


Foto 7. Foto do trabalho feito pelos alunos com auxilio do computador e *Smartphone* para uso do *GeoGebra*.