



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico

José Alex Ferreira Silva Lima

Goiânia

2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: José Alex Ferreira Silva Lima

Título do trabalho: Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento **SIM** **NÃO**¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 24 / 10 / 2019

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

José Alex Ferreira Silva Lima

**Introdução ao Cálculo Variacional e
Problemas de Otimização Aplicados no
Ensino Básico**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira

Goiânia

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Lima, Jose Alex Ferreira Silva
Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico [manuscrito] / Jose Alex Ferreira Silva Lima. - 2019.
cviii, 108 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Cidade de Goiás, 2019.

Bibliografia. Anexos.

Inclui fotografias, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Cálculo Variacional. 2. Problemas de Otimização. 3. Braquistócrona. 4. Ensino Básico. I. , Ewerton Rocha Vieira, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 06 da sessão de Defesa de Dissertação de **José Alex Ferreira Silva Lima**, que confere o título de Mestre) em mestrado profissional em matemática, na área de concentração em matemática.

Aos sete dias, a partir das 16 horas, no LEMAT do IME, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Ewerton Rocha Vieira - (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Alacyr José Gomes - (IME/UFG) e o membro titular externo; Professor doutor Jocirei Dias Ferreira - (UFMT/MT). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Ewerton Rocha Vieira, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos sete dias do mês de outubro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes, Professor do Magistério Superior**, em 07/10/2019, às 19:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ewerton Rocha Vieira, Professor do Magistério Superior**, em 07/10/2019, às 23:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jocirei Dias Ferreira, Usuário Externo**, em 08/10/2019, às 12:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0906829** e o código CRC **9B5CE984**.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

José Alex Ferreira Silva Lima graduou-se em Matemática em 2013 pela Faculdade Jesus Maria José (FAJESU), durante a graduação foi bolsista do Programa Prouni. Concluiu em 2016 pós-graduação em Metodologia do Ensino de Matemática pela Faculdade Signorelli. Atualmente é professor do Ensino Fundamental da rede pública de Brasília.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe, Adalicia, e ao meu pai, João, estes foram e serão sempre os meus maiores exemplos na vida. E ao meu filho, Hugo Gabriel, a quem quero ser herói e maior exemplo.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a cada um que fez parte desse processo, diretamente ou mesmo que indiretamente.

Primeiramente a Deus que me deu forças e saúde para atravessar todo esse processo, a cada viagem abençoada da saída até a chegada.

A todos os meus familiares pelas palavras ou atitudes de apoio. Em especial à minha mãe, Adalicia, por acreditar e ser a minha maior motivação e espero ser o seu orgulho e à minha esposa, Helen Jaqueline, por ter me dado todo o suporte de que precisei e pela imensa compreensão.

Aos meus companheiros de sala de aula nessa árdua batalha, pelos grupos de estudo, mensagens madrugadas a dentro com soluções de proposições. E em especial a meu companheiro, Thiago Santos, pelas viagens todas as sextas-feiras.

A cada professor do Profmat nesse período pela dedicação e inspiração de profissionalismo e boa vontade. Em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Ewerton Vieira, pela paciência, compreensão e direcionamento necessários.

A CAPES pelo suporte financeiro, sem este essa realização não seria possível.

E a cada um dos meus queridos e inquietos alunos, que me motivaram a me capacitar, por quem iniciei e por quem finalizarei.

Resumo

Neste trabalho discutimos e resolvemos uma série de problemas clássicos de otimização ligados ao cálculo variacional, com ênfase na braquistócrona. Posteriormente, sugerimos algumas atividades que podem ser desenvolvidas com alunos do Ensino Básico, voltadas para resolução dos problemas básicos do cálculo variacional, por meio de experimentos.

Procuramos apresentar a base do cálculo variacional e as suas principais proposições, com o devido rigor matemático. Discute-se brevemente o desenvolvimento histórico do Cálculo Variacional e deduzimos uma das principais equações: a Equação de Euler-Lagrange e seus desdobramentos, e as condições que asseguram que uma lagrangiana deve atender para ser um máximo ou mínimo.

Palavras-chave Cálculo Variacional, Problemas de Otimização, Braquistócrona, Ensino Básico.

Abstract

This study we discuss and solve a series of classic optimization problems linked to variational calculus, with emphasis on brachistochron. Afterwards, there are suggestions of some activities to be developed with middle and high school, focused on the resolution of the basic problems of variational calculus via experiments.

We seek to present a variational calculus basis and as its main propositions, with the due mathematical rigor. It briefly discusses the historical development of the variational calculus and it deduces the main equations: the Euler Lagrange Equation and its developments, and the conditions that ensure that a Lagrangian must meet to be the maximum or minimum.

Keywords

Variational Calculus, Optimization Problems, Brachistochron, Basic Education.

Lista de Figuras

1	Reta no Plano Cartesiano	17
2	Esquema da Cicloide	20
3	Cicloide	22
4	Comprimento de um arco de curva	30
5	Distância entre funções	34
6	Função ligando dois pontos e duas funções alternativas	51
7	Campo de senoide	65
8	Família de senoides	67
9	Superfície de revolução mínima	79
10	Ilustração mostrando que a curva solução do problema deve ser convexa.	80
11	Esquema da Braquistócrona	85

Lista de Símbolos

1. \overrightarrow{AB} representa uma semirreta e \overline{AB} um segmento de reta, onde A e B são pontos dados.
2. $\triangle ABC$ é um triângulo de vértices A , B e C e, neste caso, podemos definir o ângulo no vértice A por \widehat{BAC} .
3. Dada uma circunferência e os pontos A e B distintos e pertencentes a mesma, tem-se que \widehat{AB} é o arco que une esses dois pontos.
4. Sistema OXY é o sistema de coordenadas cartesianas formado por dois eixos perpendiculares um horizontal e outro vertical que se cruzam na origem das coordenadas no ponto O . O eixo horizontal é chamado de abscissa (X) e o vertical de ordenada (Y). Os eixos são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais.
5. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ e $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.
6. A derivada de 1ª ordem de uma função $F(x)$ contínua, será denominada por $\frac{d}{dx}F(x) = F'(x)$.
7. A derivada de 2ª ordem de uma função $F(x)$ contínua, será denominada por $\frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx}F(x) \right] = F''(x)$.

Sumário

1	Introdução	15
2	Base da Geometria Analítica	17
2.1	Cicloide: O pomo da discórdia	19
2.1.1	Equações paramétricas da cicloide	19
2.1.2	Equação cartesiana da cicloide	23
3	Introdução ao Cálculo Variacional	25
3.1	Contexto histórico do cálculo variacional	25
3.2	Alguns conceitos do cálculo variacional	28
3.2.1	Definição de funcionais. Métricas no espaço de funções	28
3.2.2	Continuidade e diferenciação de funcionais	35
3.3	O problema básico do cálculo variacional e a Equação de Euler	50
3.3.1	A Equação de Euler.	50
3.3.2	Casos particulares da Equação de Euler	57
3.4	Problemas variacionais com restrições	59
3.5	Condições suficientes para a ocorrência de um extremo	63
3.5.1	Campos de extremais	64
3.5.2	A condição de Jacobi	68
3.5.3	As condições de Weierstrass	69
3.5.4	As condições de Legendre	73
4	Problemas Clássicos de Otimização	76
4.1	Problema 1: Comprimento de arco	76
4.2	Problema 2: Superfície mínima de revolução	77
4.3	Problema 3: Problema isoperímetro	79
5	O Problema da Braquistócrona	85
5.1	A Braquistócrona	85
5.2	A propriedade Tautócrona	89
6	Aplicação no Ensino Básico	94
6.1	Problemas de otimização no Ensino Básico	94
6.1.1	Distância entre dois pontos	95
6.1.2	O problema de Dido	96

6.1.3	Problema da superfície mínima	97
6.1.4	O problema da braquistócrona	99
7	Considerações Finais	101
8	Anexo A - Questionário dos Experimentos	105
9	Anexo B - Fotos de Curvas dos Experimentos	108

1 Introdução

Ao longo do tempo o ser humano sempre procurou meios para melhorar a sua vida em diversos aspectos, seja ganhar mais dinheiro, tempo, qualidade de vida entre outras aspirações. E a matemática sempre acompanhou esses anseios por meio de *problemas de otimização*, o que contribuiu no desenvolvimento do cálculo variacional.

Segundo [22], “Otimização é o processo de otimizar, de tornar ótimo. É a busca da excelência. É o emprego de técnicas para seleção das melhores alternativas, com o propósito de alcançar os objetivos determinados...”. A grosso modo, otimizar certas situações ou problemas é procurar os seus máximos ou mínimos a depender da situação, ou seja, dado um certo problema qual seria a melhor solução dentre todas as alternativas possíveis.

Por exemplo, dentre todos os caminhos possíveis para se ir de um certo ponto a outro, qual o caminho mais curto? Ou qual seria o trajeto mais rápido? Ou ainda, dentre todos os formatos de sólidos, qual é aquele com a maior capacidade? Esses e diversos outros problemas similares ajudaram a aprimorar/aperfeiçoar a matemática. Cabe ressaltar que, não só o ser humano é guiado a procurar máximos ou mínimos (otimizar) a natureza também é guiada por tais princípios, por exemplo: o caminho percorrido pela luz, o movimento dos planetas, o caminho percorrido pelas ondas de rádio, o corpo humano onde as traqueias trabalham o mínimo para o máximo de rendimento possível, as abelhas com os alvéolos em formato hexagonal entre outras situações, conforme destaca [16].

É curioso observar que ainda hoje a matemática é vista por muitos alunos como desvinculada da realidade, indo na contra mão ao que enfatiza a BNCC, ver [23]. Uma vez que a mesma destaca que a matemática deve ser vinculada ao meio do aluno sempre que possível, ou ainda, despertar/aguçar nos alunos a curiosidade para problemas ou situações do cotidiano.

Procurar refletir sobre alguns problemas ligados ao cálculo variacional, ou seja, otimizar certas situações que parecem corriqueiras é proporcionar aos alunos perceber a matemática de maneira mais efetiva. Apesar do cálculo variacional e a sua gama de problemas serem apresentados apenas em alguns cursos de nível superior, é possível apresentar o mesmo para o ensino básico, não na sua totalidade, mas mantendo as suas ideias principais e alguns problemas que são no mínimo surpreendentes.

Para promover tal estudo este trabalho está dividido da seguinte maneira: No Capítulo 2 dar-se-a uma rápida revisão em geometria analítica, com foco nas equações cartesianas e paramétricas da cicloide, visto que essa curva é a solução de um dos maiores problemas ligados ao cálculo variacional, a Braquistócrona.

No Capítulo 3 apresentaremos a estruturação teórica dos conceitos de Cálculo Variacional para problemas com fronteiras fixas, alguns exemplos com o objetivo de facilitar o entendimento da teoria e também deduzimos a principal ferramenta de estudo, que é a Equação de Euler e seus desdobramentos. Também neste capítulo citamos as condições suficientes que uma curva deve satisfazer para ser considerada como máximo ou mínimo de um funcional.

No Capítulo 4 usando a teoria desenvolvida até ali, resolvemos alguns problemas clássicos de otimização. No capítulo 5, destacamos o problema do século XVII, a Braquistócrona, mostramos que a solução do mesmo é uma cicloide. Além disso, ressaltamos a sua propriedade de ser tautócrona.

No Capítulo 6 procuramos propor algumas atividades de como se apresentar problemas ligados ao cálculo variacional à alunos do Ensino fundamental, buscando sempre estimular a soluções por experimentação ora por observação.

Finalmente, na seção considerações finais apresentamos algumas considerações e conclusões relacionadas a aplicação/estudo de problemas de otimização no ensino fundamental como motivador para o professor e desafiador para os alunos.

2 Base da Geometria Analítica

Antes de nos debruçarmos na teoria sobre o Cálculo Variacional, faremos segundo [2] uma breve análise na geometria analítica.

Um dos grandes objetivos da geometria analítica é o de relacionar a álgebra e geometria. Entretanto, essa relação nem sempre é bem explorada e a disciplina parece limitar-se a memorizar uma série de fórmulas e nomenclaturas. Nesta seção, esperamos despertar e aguçar a curiosidade com relação a geometria analítica ao analisar e obter as equações paramétricas e cartesianas de uma curva bastante curiosa denominada cicloide.

Antes disso, note que, ao estudarmos geometria analítica no ensino médio vemos que dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ determinam uma única reta r . Para tal tomemos um ponto P pertencente a reta r que contém os pontos P_1 e P_2 . Considere ainda os pontos D e E como os pés das perpendiculares dos respectivos pontos P_1 e P_2 com relação ao eixo OX , e, como a reta deve manter a inclinação em relação ao eixo das abscissas, temos conforme ilustração que

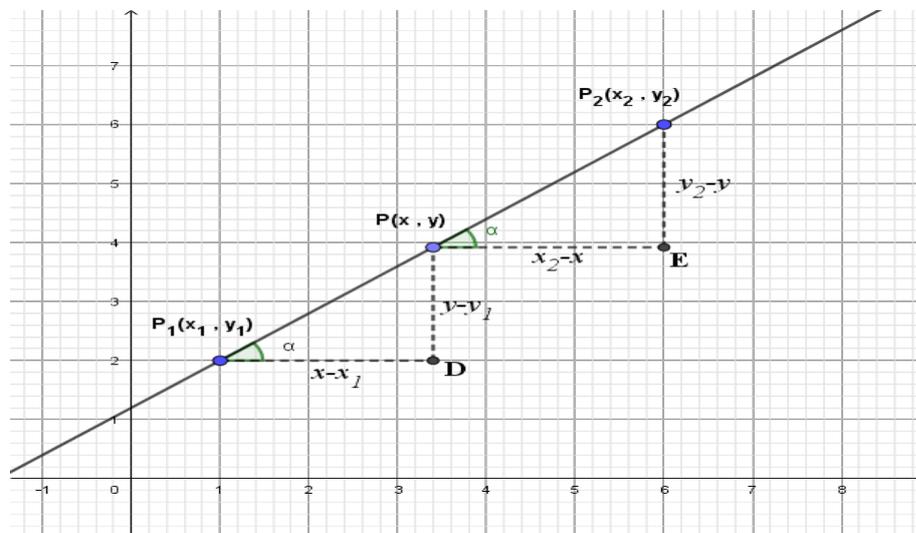


Figura 1: Reta no Plano Cartesiano

no ΔDP_1P e no ΔEP_2P deve-se manter a inclinação α , de onde tem-se, respectivamente

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y_2 - y}{x_2 - x} \Rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y}{x_2 - x},$$

simplificando a expressão temos

$$y(x_2 - x_1) + x(y_1 - y_2) = x_2y_1 - x_1y_2.$$

Como (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são constantes, visto que os pontos P_1 e P_2 são conhecidos. Normalmente denomina-se $x_2 - x_1 = a$, $y_1 - y_2 = b$ e $x_2y_1 - x_1y_2 = c$, ficando assim com a já conhecida equação cartesiana da reta

$$ay + bx = c.$$

Entretanto, os valores das coordenadas cartesianas x e y de um ponto qualquer da reta r podem ser escritos em função de apenas uma variável t . Tal expressão é denominada equação paramétrica da reta

$$r : \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

a variável t é denominada parâmetro. A análise e demonstração da equação paramétrica da reta pode ser encontrada nas páginas 75 – 94 em [8].

Definição 1. *Uma curva plana é um conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$ com $t \in \mathbb{R}$, em que f e g são funções contínuas em um intervalo não degenerado I .*

Definição 2. *Seja C uma curva plana, dizemos que uma aplicação*

$$\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

é uma parametrização de C se a sua imagem $\gamma(D)$ coincide com C , ou seja,

$$C = \gamma(D) = \{(x(t), y(t)) | t \in D\}$$

onde D é um subconjunto de \mathbb{R} (geralmente um intervalo ou a união de uma quantidade finita de intervalos). A imagem $\gamma(D) \subset \mathbb{R}^2$ é também chamada traço de γ .

A parametrização de uma curva plana pode ser vista como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca sobre o plano em um intervalo de tempo. Neste caso, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ nos dá a posição da partícula no instante t .

De modo muito intuitivo vê-se que a equação paramétrica é uma boa forma de se obter pares ordenados (x, y) para uma determinada curva, para tanto, temos apenas que escolher valores para o parâmetro t que teremos as coordenadas da curva.

2.1 Cicloide: O pomo da discórdia

Conforme [9], a cicloide foi descoberta em tentativas de *quadrar o círculo* por Charles Bouvelles (1501). Essa curva foi muito estudada, independentemente, por Galileu (~1599) e por Mersenne (1628). Em uma ocasião, Pascal escreveu que a cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência, nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. E por ser tão notável é de se estranhar que não tenha sido considerada pelos antigos.

Na época, com desenvolvimento do cálculo, havia a necessidade de novas curvas para testar a eficácia dos novos métodos que surgiam. Assim, diversos estudiosos têm seus nomes ligados ao estudo da cicloide como: Galileu, Pascal, Mersenne, Roberval, Christopher Wren, Huygens, Jacques e Jhoann Bernoulli, Leibniz, Torricelli e Newton.

Devido ao número de disputas provocadas entre os matemáticos, a cicloide ficou conhecida como a Helena da Geometria, em alusão a Helena de Tróia, cobiçada e disputada por vários homens.

Em decorrência de tantas controvérsias e disputas no fim do século Johann Bernoulli, em 1699, na Acta Eruditorum (revista dedicada a publicações científicas da época) chamou a cicloide de “curva fatídica do século XVII”, conforme [10], o que certamente justifica o apelido de “pomo da discórdia”.

Definição 3. *Sejam C um círculo de raio r , uma reta s e um ponto P de C . Denominamos **cicloide** a curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre a reta s sem deslizar.*

2.1.1 Equações paramétricas da cicloide

Para obtermos as equações paramétricas da cicloide, vamos supor que a reta s é o eixo OX e o círculo C inicia o movimento com o centro no ponto $(0, r)$. Além disso, vamos supor que o ponto P coincide com a origem O no início do movimento.

Considere dois círculos: C_1 , representando C em sua posição inicial, e C_2 , representando C após ter rolado alguns instantes.

Sejam $O_1(x_1, y_1)$ e $O_2(x_2, y_2)$, respectivamente, os centros de C_1 e C_2 , e $P = (x, y)$ o ponto da cicloide em C_2 , seja A o ponto que C_2 toca o eixo OX e θ a medida do ângulo que a semirreta $\overrightarrow{O_2P}$ faz com a semirreta $\overrightarrow{O_2A}$ no sentido positivo.

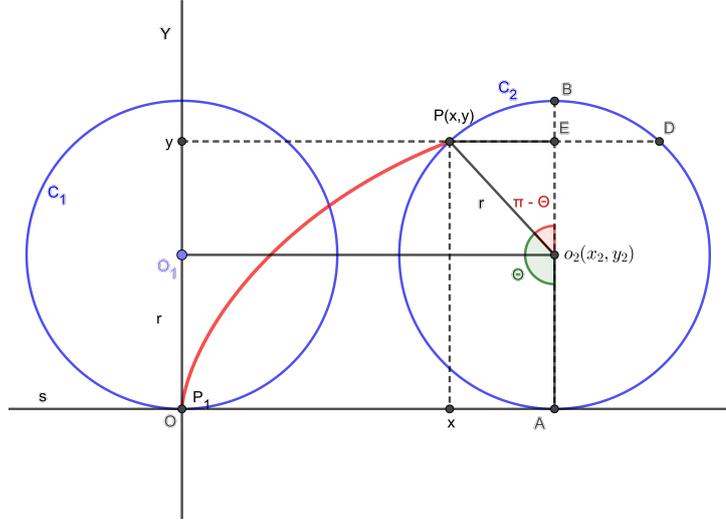


Figura 2: Esquema da Cicloide

Sejam B e D pertencentes a C_2 , tais que \overline{PD} e $\overline{O_2B}$ sejam paralelos, respectivamente, aos eixos OX e OY , e considere $\overline{PD} \cap \overline{O_2B} = E$ interior ao círculo C_2 .

Como queremos descrever uma equação paramétrica que representa esse movimento, uma melhor opção seria observarmos em função do parâmetro θ . Observe que como ilustra a *Figura 2*:

$$\begin{cases} x = x_2 - \overline{PE} \\ y = r + \overline{O_2E}. \end{cases} \quad (1)$$

Como $\widehat{PO_2A} = \theta$, temos que $\widehat{EO_2P} = \pi - \theta$, pois os mesmos são suplementares, assim temos que no ΔPEO_2

$$\text{sen}(\pi - \theta) = \frac{\overline{PE}}{r} \Leftrightarrow \overline{PE} = r \cdot \text{sen}(\pi - \theta) \Leftrightarrow \overline{PE} = r \cdot \text{sen}(\theta) \quad (2)$$

e

$$\text{cos}(\pi - \theta) = \frac{\overline{O_2E}}{r} \Leftrightarrow \overline{O_2E} = r \cdot \text{cos}(\pi - \theta) \Leftrightarrow \overline{O_2E} = -r \cdot \text{cos}(\theta). \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1) temos

$$\begin{cases} x = x_2 - r \cdot \text{sen}(\theta) \\ y = r - r \cdot \text{cos}(\theta). \end{cases} \quad (4)$$

Resta assim, encontrarmos uma relação para x_2 . Como $\overline{P_1A} = x_2$, note que $\overline{P_1A}$ é a distância que a circunferência rolou sobre a reta s , sendo essa igual a distância que o ponto P deslocou da posição em C_1 até C_2 . Logo, $\overline{P_1A} = \widehat{PA}$, dessa forma temos que

$$\widehat{PA} = \theta \cdot r \implies x_2 = r \cdot \theta. \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4) temos as coordenadas paramétricas que descrevem o movimento do ponto P no sistema OXY são:

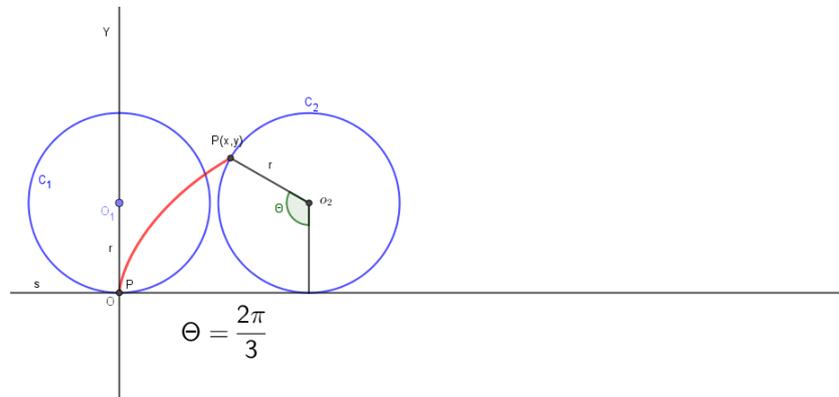
$$\begin{cases} x = r \cdot \theta - r \cdot \text{sen}(\theta) \\ y = r - r \cdot \text{cos}(\theta) \end{cases}; \theta \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Equação paramétrica da Cicloide

Observação:

- para $\theta = 0$, o ponto P está na sua posição inicial;
- para $\theta = \pi$, P dista $2r$ do eixo OX ;
- para $\theta = 2\pi$, o círculo deu um giro completo e P volta a tocar o eixo OX .

Veja como é feito o movimento na sequência das figuras abaixo:



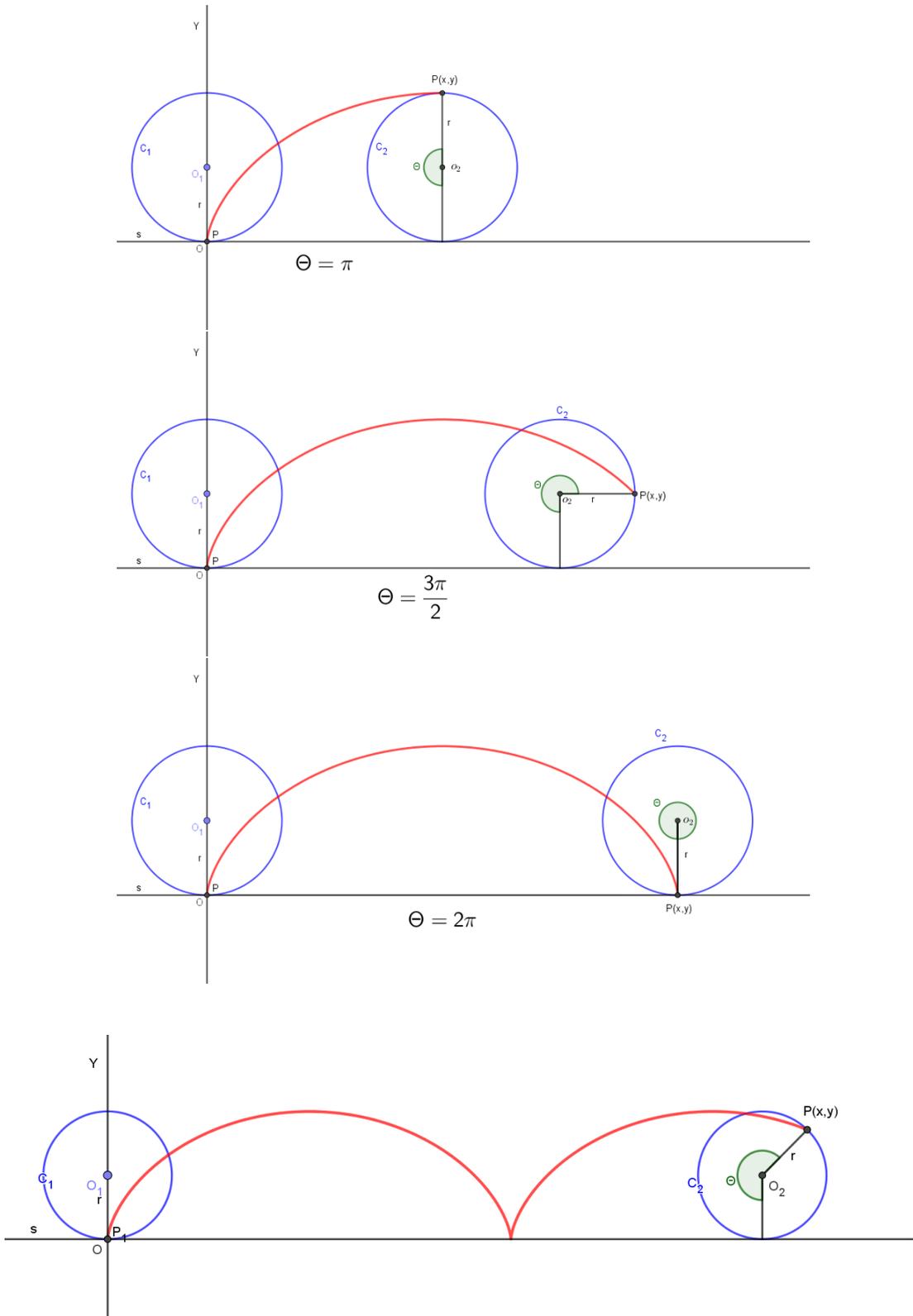


Figura 3: Cicloide

2.1.2 Equação cartesiana da cicloide

Para obtermos a equação cartesiana da Cicloide, é necessário analisarmos algumas peculiaridades da trigonometria.

Como sabemos da trigonometria, se $\beta \in [0, \pi]$ temos que

$$\text{sen}^2(\beta) + \text{cos}^2(\beta) = 1 \Rightarrow \text{sen}(\beta) = \pm\sqrt{1 - \text{cos}^2(\beta)}$$

Considerando $\beta = \arccos(\alpha)$, temos que

$$\text{sen}(\arccos(\alpha)) = \pm\sqrt{1 - \text{cos}^2(\arccos(\alpha))}.$$

Por um lado temos que $\text{cos}(\arccos(\alpha)) = \alpha$, como o contradomínio do arco-cosseno $\in [0, \pi]$ então o seno sempre assume valores positivos, donde temos que

$$\text{sen}(\arccos(\alpha)) = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (7)$$

Para obtermos a equação cartesiana da cicloide, retomaremos a equação (6)

$$\begin{cases} x = r \cdot \theta - r \cdot \text{sen}(\theta) \\ y = r - r \cdot \text{cos}(\theta) \end{cases}; \theta \in \mathbb{R},$$

e na segunda parte da mesma teremos que:

$$y = r - r\text{cos}(\theta) \Rightarrow \text{cos}(\theta) = \frac{r - y}{r} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{r - y}{r}\right). \quad (8)$$

Substituindo a equação (8) na primeira parte da equação (6) temos

$$x = r \cdot \arccos\left(\frac{r - y}{r}\right) - r \cdot \text{sen}\left[\arccos\left(\frac{r - y}{r}\right)\right]. \quad (9)$$

Utilizando a relação proveniente da equação (7) com as devidas adequações e substituindo em (9) temos

$$\begin{aligned}
x &= r \cdot \arccos\left(\frac{r-y}{r}\right) - r \cdot \left[\sqrt{1 - \left(\frac{r-y}{r}\right)^2} \right] \\
&= r \cdot \arccos\left(\frac{r-y}{r}\right) - r \cdot \left(\sqrt{\frac{r^2 - r^2 + 2ry - y^2}{r^2}} \right) \\
&= r \cdot \arccos\left(\frac{r-y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2}.
\end{aligned}$$

A equação obtida acima é denominada a **equação cartesiana da Cicloide**.

Como explicito acima, tal curva foi estudada e disputada por vários matemáticos da época, suas propriedades e potenciais utilizações surgiram naturalmente. Destacamos mais a frente um dos principais problemas cuja solução é a cicloide, o problema da **Braquistócrona**, além da sua utilização na construção do relógio de pêndulo desenvolvida por Huyghens via a propriedade do tautocronismo da cicloide.

Ainda sobre estudos da cicloide, vale analisar os seguintes fatos:

1. O comprimento S de um arco de cicloide é $S = 8 \cdot r$, onde r é o raio do círculo gerador;
2. A área da região delimitada pela reta $y = 0$ e por um arco de uma cicloide é o triplo da área da região delimitada pela circunferência que a gera, ou seja, $A = 3\pi r^2$ (para tal, veja as demonstrações acima em [12]);
3. O volume do sólido de revolução formado pela rotação de um arco de cicloide em torno do eixo x , é: $V = 5\pi^2 r^3$, veja [13].

Notoriamente essa curva foi responsável por grandes mudanças na abordagem dos problemas de geometria desenvolvido por Newton, Fermat, Leibnitz, Descartes e outros fundadores da matemática moderna.

3 Introdução ao Cálculo Variacional

Neste capítulo será realizada uma breve análise histórica, definições e discussões de problemas e proposições básicas do Cálculo Variacional.

De maneira mais objetiva possível, formularemos e discutiremos detalhadamente as condições que asseguram a ocorrência de um extremo num ponto estacionário. E examinaremos a Equação de Euler, bem como seus casos particulares, em conexão com alguns problemas básicos do cálculo variacional.

3.1 Contexto histórico do cálculo variacional

Ao longo dos séculos de desenvolvimento da matemática, notadamente, os problemas que se referem a valores máximos ou mínimos são atrativos e de grande interesse para os matemáticos. Tal interesse se deve a um fato bastante simples: “estes problemas idealizam diversas situações do nosso cotidiano”, por exemplo: quem nunca procurou otimizar a ida ao trabalho pelo menor caminho possível; comprar um objeto com o menor preço; realizar o máximo de trabalho num período de tempo; trabalhar menos e ganhar mais e etc. Da mesma forma, a natureza também é guiada por tais princípios, como: caminho percorrido pela luz, movimento dos planetas, caminho percorrido pelas ondas de rádio, as abelhas e os seus alvéolos hexagonais entre outros exemplos, como destaca [16].

Se o homem notoriamente sempre se identificou com problemas que envolvem determinar máximos e/ou mínimos ao longo da sua própria evolução, então o mesmo teve que desenvolver técnicas para conseguir compreender e determinar os tão almejados máximos ou mínimos. Para satisfazer tais anseios desenvolve-se o **Cálculo Variacional** ou **Cálculo das Variações**.

Cabe ressaltar que, a princípio, pode parecer não ser necessário desenvolver uma nova teoria sobre o estudo de máximos ou mínimos (otimizar) uma vez que, o Cálculo Diferencial e Integral já nos fornece um critério para estabelecer o máximo ou mínimo de uma determinada função, por exemplo $F(x)$. Lembrando que se a 1ª derivada for zero, $F'(x_1) = 0$, então este é um candidato a ponto de máximo ou mínimo e a 2ª derivada nos permite estabelecer se neste ponto temos um máximo ou mínimo; se $F''(x_1) < 0$ teremos um ponto de máximo e se $F''(x_1) > 0$ teremos um ponto de mínimo da função $F(x)$ no ponto x_1 .

Entretanto, existe uma crucial diferença entre os Cálculos Diferencial e Variacional,

segundo [14], que é a natureza dos respectivos objetos a serem maximizados ou minimizados (otimizados). Enquanto o Cálculo Diferencial procura **números** que determinam o máximo ou mínimo, o Cálculo Variacional procura encontrar **funções** com propriedades otimizadoras, ou seja, procura encontrar uma função que otimiza determinados problemas, e não o número que o faz.

De maneira bastante intuitiva podemos dizer que o Cálculo Variacional estuda funções cujas variáveis são funções e não números reais, tal observação é o que denominamos de **funcional**. Uma equação funcional é toda equação em que as variáveis são funções, ou seja, uma função cujo domínio e imagem sejam também funções.

Historicamente a ideia primordial do cálculo variacional está ligado a Grécia antiga. Já na Antiguidade foram formulados diversos problemas envolvendo a ideia de otimização (máximos e mínimos). Aristóteles (384 – 322)a.C. já trazia a ideia primitiva do cálculo variacional, em estudos que faziam pela primeira vez referência a velocidades virtuais, conceitos que usavam algumas abordagens de problemas de máximos e mínimos. Entretanto, a primeira aplicação de um princípio de minimização foi feita por Herão de Alexandria (62 – 20) a.C., quando postulou que a luz sendo refletida por um espelho plano seguiria o caminho mais curto entre dois pontos, conforme [14].

Outro vestígio de problemas ligados ao cálculo variacional é o problema de Dido, que é descrito no livro *Eneida Publio Virgílio Maronis* (70 – 19)a.C. Dido, filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África depois que seu marido foi assassinado. Diz a lenda que lhe foi prometida a terra que ela conseguisse cercar com o couro de um boi. Para tal, ela cortou o couro em longas e finas tiras e cercou um pedaço de terra, cujo formato era um semi-círculo, a beira do mar do Mediterrâneo. O problema de Dido consistia em dado um comprimento fixo encontrar a superfície que englobava a maior área possível. Percebe-se assim que problemas de máximos e mínimos sempre despertaram o interesse dos seres humanos uma vez que o problema de Dido data de 850 a.C., conforme [18].

Embora ideias ligadas ao cálculo variacional tenham surgido na Antiguidade, o seu desenvolvimento tem como ápice o século XVII quando progressos notáveis foram feitos. Segundo [17], em 1686, Isaac Newton (1642 – 1727), usando princípios variacionais procurou determinar a forma de um corpo que se move no ar de modo que a resistência seja mínima.

Apesar de diversos matemáticos terem inúmeras contribuições, frequentemente cabe aos irmãos ¹ Jackes (1654 – 1705) e Jean Bernoulli (1667 – 1748) a atribuição de

¹Jackes Bernoulli e Jean Bernoulli, frequentemente conhecidos também pela forma anglicizada de

inventores do Cálculo de Variações, conforme [11] . Jean por ter proposto em 1696 o problema da **braquistócrona** (curva de menor tempo) e Jackes por propor e discutir o problema das figuras isoperimétricas (encontram uma área máxima dado um perímetro fixo). O problema de Dido é um problema isoperimétrico.

Como destaca [16], cabe ressaltar que, ao resolverem o problema da braquistócrona Jean e Jackes Bernoulli utilizaram métodos diferentes. Jean resolveu o problema utilizando um método que dependia de uma analogia com o problema de determinar o caminho da luz ao se deslocar entre meios, e tal método não se mostrava eficaz em outras situações. Seu irmão Jackes resolveu o mesmo problema de uma outra maneira, método esse que lhe permitiu resolver um problema isoperimétrico posteriormente. Esse novo método desenvolvido por Jackes era muito eficiente para resolver um série de problemas ligados a determinar máximos ou mínimos.

Envolvido com os trabalhos dos irmãos Bernoulli, Leonhard Euler (aluno de Jean Bernoulli) passou a estudar e aperfeiçoar o método de Jackes e em 1744 publicou um trabalho que tem como uma das principais descobertas a equação diferencial

$$\frac{d}{dx}f_{y'} - f_y = 0,$$

que ganhou o nome de **equação de Euler**.

Como de costume na época, os matemáticos começaram a propor problemas de grande dificuldade e o método de Euler os tornavam ainda mais complicados. Então, em 1762 e 1770, ² Lagrange publicou um método analítico que permitia deduzir de maneira mais geral equações diferenciais de curvas que minimizavam problemas. Desse modo, uma grande gama de problemas físicos e mecânicos foram resolvidos.

Nesse novo método Lagrange trocava a função $y(x)$, presente nas integrais a serem minimizadas, pela função $y(x) + \delta y(x)$. Euler prontamente adotou o método e as notações de Lagrange e chamou $\delta y(x)$ de variação da função $y(x)$ e δI de variação da integral. É por isso que esta nova teoria que estava sendo desenvolvida ganhou o nome de **cálculo das variações** ou **cálculo variacional**. Em 1786 Adrien-Marie Legendre (1752-1833) examinou a chamada segunda variação $\delta^2 I$ de uma integral para encontrar um critério com o qual pudesse distinguir se o candidato a extremo fornecia um máximo ou um mínimo, conforme [16].

¹ seus nomes, James ou Jacques e John (ou pelos equivalentes alemães, Jakob e Johann).

²Joseph-Louis Lagrange, matemático italiano nasceu em Turin em 1793. Faleceu em Paris em 1813. Aluno de Leonhard Euler, Lagrange desenvolveu importantes trabalhos em diferentes áreas da matemática e da física.

Reinteramos como aponta [17] apesar de o ápice do cálculo variacional ter ocorrido no século XVII, novas descobertas e problemas foram resolvidos posteriormente.

Destacamos, segundo Lima [19] que,

“Grandes matemáticos tiveram grande importância no desenvolvimento do cálculo variacional, por exemplo: Lagrange com as condições de transversalidade; Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) com os pontos conjugados; Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) com o auxílio da noção de campo; David Hilbert (1862-1943) com sua condição de diferenciabilidade; Willian Rowan Hamilton (1805-1865) com seus estudos sobre sistemas dinâmicos desenvolveu a teoria hamiltoniana, extremamente útil para a resolução de problemas variacionais envolvendo situações físicas e mecânicas.”

No século XX surgiram as primeiras aplicações do cálculo variacional ligado a economia desenvolvidas por Roos, Evans, Hotelling e Ramsey, com outras aplicações publicadas mais tarde. Posteriormente, inicia-se uma nova era com grupos de economistas e cientistas interessados em certos problemas dinâmicos. A teoria do Controle Ótimo, desenvolvida por Pontryagin e seus colaboradores é uma generalização do Cálculo de Variações, o que aumenta a aplicabilidade matemática, conforme [17]

No presente trabalho não abarcaremos esses aspectos, procuramos apenas dar uma ideia geral de como se desenvolveu o cálculo variacional, que passaremos a estudar a partir da próxima seção.

3.2 Alguns conceitos do cálculo variacional

Nesta seção procuraremos realizar um estudo introdutório sobre o cálculo variacional, alguns métodos de resolução de problemas variacionais de fronteiras fixas, perpassando por conceitos básicos até a dedução da equação de Euler e seus desdobramentos. Tal estudo terá com base [4], [15], [16] e [20].

3.2.1 Definição de funcionais. Métricas no espaço de funções

Juntamente com os problemas em que é necessário determinar os máximos e mínimos de uma certa função $y = f(x)$, muitas vezes nos problemas físicos surgem a

necessidade de encontrar os valores máximos ou mínimos de um tipo especial de grandezas, chamado funcional.

Variáveis funcionais são chamadas de variáveis cujos valores são determinados pela escolha de uma ou mais funções.

De maneira mais formal temos a seguinte definição:

Definição 4. *Denomina-se funcional uma correspondência J que associa a cada função $y(x)$ de uma classe M um número denotado comumente por $J[y(x)]$,*

$$\begin{aligned} J : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y(x) &\longmapsto J[y(x)], \end{aligned}$$

a classe M chama-se **domínio** do funcional J .

Exemplo 1. *A relação*

$$J[y(x)] = y'(x_0), \text{ onde } x_0 \in [a, b], \quad (10)$$

define um funcional no espaço das funções continuamente diferenciáveis em $[a, b]$, denotado por $C^1[a, b]$.

De fato, a operação em apreço associa a cada função $y(x)$ da classe mencionada ao número $J[y(x)]$, valor que a derivada desta função assume no ponto x_0 .

Assim, se escolhermos $a = 1$, $b = 5$ e $x_0 = 3$ para toda equação $y(x)$, tem-se que:

Se $y(x) = x^2 - 5x + 6$ daí

$$J[x^2 - 5x + 6] \big|_{x_0=3} = (x^2 - 5x + 6)' \big|_{x_0=3} = 2x - 5 \big|_{x_0=3} = 1;$$

e para $y(x) = \ln(x + 1)$,

$$J[\ln(x + 1)] \big|_{x_0=3} = [\ln(x + 1)]' \big|_{x_0=3} = \frac{1}{x + 1} \bigg|_{x_0=3} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 2. *Um funcional no espaço das funções contínuas em $[0, 1]$, denominado por $C[0, 1]$, pode ser definido pela relação*

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx, \quad (11)$$

a qual associa um número a cada $y(x) \in C[0, 1]$, isto é, que faz corresponder o número $J[y(x)]$ a cada $y(x)$ particular. Assim,

$$\text{se } y(x) = 1, \quad \text{então } J[1] = \int_0^1 1 \, dx = 1;$$

$$\text{para } y(x) = e^x, \quad \text{têm-se } J[e^x] = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1;$$

$$\text{e para } y(x) = \cos(\pi x), \quad \text{têm-se } J[\cos(\pi x)] = \int_0^1 \cos(\pi x) \, dx = 0.$$

Os métodos de resolução de problemas variacionais, ou seja, problemas sobre a investigação de máximos e mínimos de funcionais, se assemelham muito aos métodos de investigar máximos e mínimos de funções e em alguns momentos tentaremos mostrar essa proximidade.

O exemplo abaixo é um típico problema variacional, ou seja, queremos otimizar um certo funcional.

Exemplo 3. *Considere dois pontos distintos A e B no mesmo plano. Qual o formato da curva, cuja distância entre eles seja a mínima?*

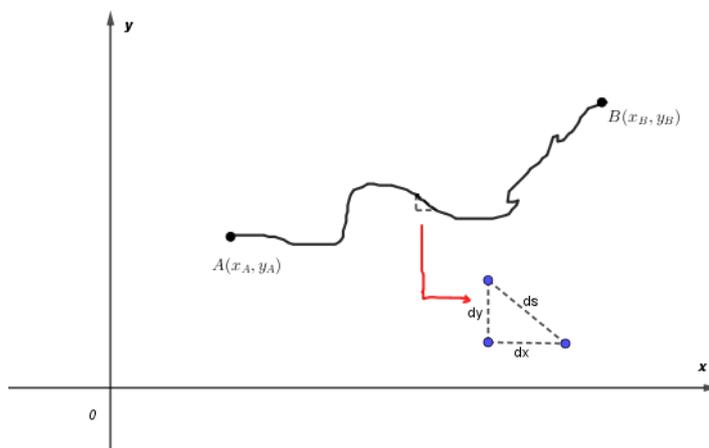


Figura 4: Comprimento de um arco de curva

Como queremos definir o menor caminho partindo de A até B , para tal seccionaremos essa curva em pequenos pedaços de menor comprimento possível, ou seja, as

taxas de variação da curva ao longo da mesma, que denominaremos ds . Como podemos observar na Figura 4, as taxas de variações na curva implicam em variações nas coordenadas nos eixos x e y , o que comumente denominamos, respectivamente, por dx e dy . Observe ainda que, podemos utilizar o teorema de Pitágoras, no triângulo cuja hipotenusa é ds de catetos dx e dy , assim

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \implies ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Como desejamos o comprimento de toda a curva, somaremos cada uma das pequenas variações da curva, ou seja, integramos ds do ponto A até B , de modo que

$$C_{AB} = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

simplificando a expressão acima colocando dx^2 em evidência temos

$$C_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{dx^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

como $\frac{dy}{dx} = y'(x)$, então

$$C_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (12)$$

como notoriamente C_{AB} depende explicitamente da função $y'(x)$ evidentemente depende da função $y(x)$, então escrevendo a equação (12) em “notação funcional”,

$$J[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (13)$$

Note que $J[y(x)]$ associa a cada $y(x) \in C^1[a, b]$, isto é, a qualquer função continuamente diferenciável em $[a, b]$, o comprimento do arco da curva $y = y(x)$ com extremidades $A(x_A, y(x_A))$ e $B(x_B, y(x_B))$. Não solucionaremos este exemplo nesta seção visto que precisamos desenvolver uma teoria que nos permita analisar e resolver este tipo de problema.

Fazendo uma rasa análise, note que existem uma quantidade significativa de funções $y(x)$, porém devemos escolher aquela que tem a menor distância entre os pontos A e B . Logo, o impasse está em como decidir se uma função $y(x)$ é o menor caminho, ou

não uma outra função $y_1(x)$ qualquer.

Precisamos introduzir uma sequência de métricas no espaço de funções. Dizemos que duas funções $y(x)$ e $y_1(x)$ definidas $[a, b]$ são *próximas na métrica de ordem zero* se $|y(x) - y_1(x)|$ for bastante pequeno $\forall x \in [a, b]$, ou seja, as duas funções pouco se distinguem neste intervalo. Desse modo temos

Definição 5. *Duas funções $y(x)$ e $y_1(x)$ definidas $[a, b]$ são próximas na métrica de ordem zero se $|y(x) - y_1(x)| \leq \epsilon$, onde ϵ é tão pequeno quanto se queira.*

Exemplo 4. *As funções $y(x) = \frac{\text{sen}(n^2x)}{n}$ e $y_1(x) \equiv 0$ definidas no intervalo $[0, \pi]$ são próximas de ordem zero, dado que*

$$|y(x) - y_1(x)| \leq \epsilon, \text{ para tal tomemos } \epsilon = \frac{1}{n}, \text{ daí temos que}$$

$$|y(x) - y_1(x)| = \left| \frac{\text{sen}(n^2x)}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\text{sen}(n^2x)}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

bastando para isso tomarmos n suficientemente grande.

Duas funções $y(x)$ e $y_1(x)$ definidas em $[a, b]$ são *próximas na métrica de ordem um ou primeira ordem* se $|y(x) - y_1(x)|$ e $|y'(x) - y_1'(x)|$ forem pequenas o suficiente $\forall x \in [a, b]$. Desse modo temos

Definição 6. *Duas funções $y(x)$ e $y_1(x)$ definidas em $[a, b]$ são próximas na métrica de ordem um ou de primeira ordem se*

$$|y(x) - y_1(x)| \leq \epsilon \text{ e } |y'(x) - y_1'(x)| \leq \eta,$$

onde ϵ e η forem pequenos o suficiente $\forall x \in [a, b]$.

Exemplo 5. *As funções $y(x) = \frac{\text{sen}(n^2x)}{n}$ e $y_1(x) \equiv 0$ definidas no intervalo $[0, \pi]$ são próximas na métrica de ordem zero, como explicito acima, porém não são próximas na métrica de primeira ordem, visto que para*

$|y'(x) - y_1'(x)| \leq \eta$, devemos encontrar uma relação entre η e n . Mas, observe que

$$|y'(x) - y_1'(x)| = \left| \left[\frac{\text{sen}(n^2x)}{n} \right]' - [0]' \right| = \left| \frac{1}{n} \cdot \cos(n^2x) \cdot n^2 - 0 \right| = |n \cdot \cos(n^2x)|,$$

e para o ponto $x = \frac{2\pi}{n^2}$ temos $|y'(x) - y_1'(x)| = \left| n \cdot \cos\left(n^2 \cdot \frac{2\pi}{n^2}\right) \right| = |n \cdot \cos(2\pi)| = n$, arbitrariamente grande, logo não são próximas. Logo, apesar de as funções $y(x)$ e $y_1(x)$ serem próximas, as suas derivadas não têm proximidade.

Exemplo 6. As funções $y(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$ e $y_1(x) \equiv 0$ consideradas sobre $[0, \pi]$ se tornam próximas na métrica de primeira ordem, visto que para

$$|y(x) - y_1(x)| \leq \epsilon \text{ e } |y'(x) - y_1'(x)| \leq \eta,$$

basta tomarmos $\epsilon = \frac{1}{n^2}$ e $\eta = \frac{1}{n}$, dado que

$$|y(x) - y_1(x)| = \left| \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} - 0 \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

e como

$$|y'(x) - y_1'(x)| = \left| \left[\frac{\text{sen}(nx)}{n^2} \right]' - [0]' \right| = \left| \frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) \cdot n - 0 \right| = \left| \frac{\cos(nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

bastando para isso tomarmos n suficientemente grande.

De maneira mais geral, duas funções $y(x)$ e $y_1(x)$ definidas em $[a, b]$ são *próximas na métrica de ordem k* , se $|y(x) - y_1(x)|, |y'(x) - y_1'(x)|, |y''(x) - y_1''(x)| \cdots |y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)|$ permanecerem pequenos $\forall x \in [a, b]$. Obviamente, se duas funções são próximas na métrica de uma certa ordem k , será próxima na métrica de qualquer ordem inferior a k , não valendo a recíproca.

Definição 7. Definição de métricas. Denomina-se *distância entre duas funções* $y = f(x)$ e $y = f_1(x)$ contínuas em $[a, b]$, o número positivo ρ igual ao supremo de $|f(x) - f_1(x)|$ com $x \in [a, b]$, ou seja

$$\rho = \rho[f_1(x), f(x)] = \sup_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f(x)|.$$

Exemplo 7. Determinar a maior distância entre as funções $y = x^2$ e $y = x^3$, sendo ambas definidas no intervalo $[0, 1]$.

Por definição temos que $\rho = \sup_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - x^3|$, como $x \in [0, 1]$, então $\rho = \sup_{0 \leq x \leq 1} (x^2 - x^3)$. Como a função $y = x^2 - x^3$, se anula nas extremidades do intervalo $[0, 1]$, então assume o seu máximo num ponto interior. Como $y' = 2x - 3x^2$, resulta que $y' = 0$ para $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$. Como por definição ρ é o supremo, então tomamos $x = \frac{2}{3}$, visto que $x = 0$ anula as funções, assim

$$\rho = \sup_{0 \leq x \leq 1} (x^2 - x^3) = (x^2 - x^3) \Big|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{4}{27},$$

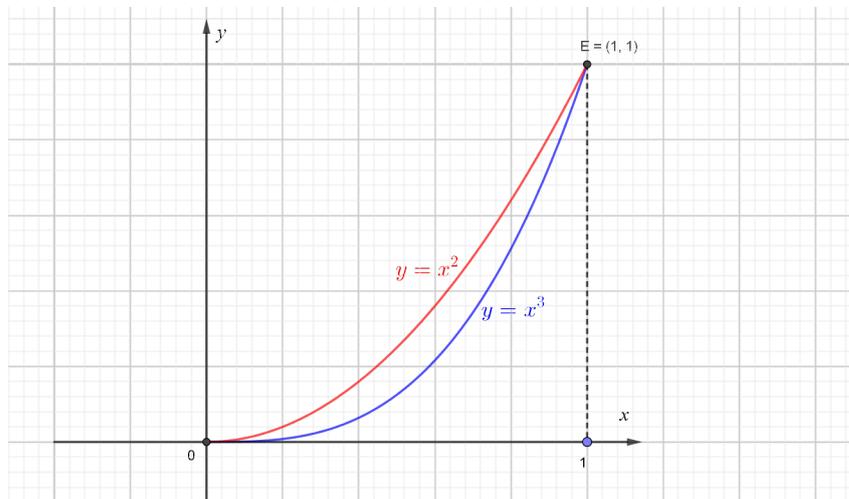


Figura 5: Distância entre funções

deste modo, a maior distância entre essas duas funções é $\frac{4}{27}$.

De modo genérico, podemos denominar a *distância de ordem n entre duas funções* $y = f(x)$ e $y = f_1(x)$, n vezes continuamente deriváveis num intervalo $[a, b]$, como sendo o máximo dos supremos em $[a, b]$ de $|f_1(x) - f(x)|, |f_1'(x) - f'(x)|, \dots, |f_1^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)|$. Ou seja,

$$\rho_n = \rho_n[f_1(x), f(x)] = \max_{0 \leq k \leq n} \sup_{a \leq x \leq b} |f_1^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|.$$

Note que essa definição mais geral de distância entre funções não é outra senão a distância de ordem zero.

Com isso, definimos uma ϵ -vizinhança de uma ordem n para uma função $y = f_1(x)$

como sendo todas as funções $y = f(x)$ satisfazendo a condição

$$\rho_n = \rho_n[f_1(x), f(x)] < \epsilon$$

Se chamará forte qualquer ϵ -vizinhança de ordem zero, chamando-se fraca toda ϵ -vizinhança de ordem um.

Assim, a ϵ -vizinhança forte de uma função contínua $y = f(x)$ compreenderá as funções contínuas cujos gráficos não se desviarem de $y = f(x)$ por mais de um ϵ .

3.2.2 Continuidade e diferenciação de funcionais

Um funcional $J[y(x)]$ será contínuo, se para uma pequena variação de $y(x)$ corresponder a uma pequena variação desse funcional.

A última definição deve ser especificada e esclarecida, isto pois, imediatamente surge a seguinte pergunta: “que variações de uma função $y(x)$, que é o domínio de um funcional, são considerados pequenos?, ou que é o mesmo, que curvas $y = f(x)$ e $y = f_1(x)$ são consideradas diferentes ou próximas?”

As funções $y = f(x)$ e $y = f_1(x)$ pode-se considerar próximas quando $|f(x) - f_1(x)| \leq \epsilon$, isto para todos os valores de x para os quais as funções $f(x)$ e $f_1(x)$ sejam definidas, ou seja, considera-se próximas as curvas cujas ordenadas se aproximam. Entretanto, sob esta definição de proximidade das curvas, os funcionais da forma

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

que são frequentemente encontrados nas aplicações, serão contínuos apenas em casos excepcionais, devido ao fato da integral ter como argumento a derivada, $y'(x)$. Por isso em muitos casos o mais natural é considerar apenas aquelas curvas cujas ordenadas y e cujas direções das tangentes nos pontos correspondentes estão próximas, isto é, exigir que para as curvas próximas não apenas $|f(x) - f_1(x)|$, mas também $|f'(x) - f_1'(x)|$ seja pequeno. A expressão anunciada acima será discutida e analisada mais adiante.

Definição 8. Continuidade de funcionais. Um funcional $J[y(x)]$ de domínio M se dirá contínuo em $y = y_0(x)$ relativamente à métrica de ordem n se, para qualquer $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que das condições

$$|y(x) - y_0(x)| < \delta, |y'(x) - y_0'(x)| < \delta, \dots, |y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)| < \delta$$

com $y(x) \in M$, resulta a desigualdade $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon$.

Em outras palavras, quanto mais próximas forem as funções numa certa “vizinhança” acarretará numa proximidade das imagens do funcional, ou seja

$$\rho_n[y(x), y_0(x)] < \delta \text{ decorre } |J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon.$$

Vale ressaltar que esta definição é bem similar àquela adotada no cálculo diferencial e integral para a continuidade de funções. Exceto pelo objeto analisado, enquanto no cálculo diferencial pegamos a vizinhança de dois pontos e exigir que as funções fiquem próximas, no cálculo variacional pegamos a vizinhança de duas funções e exigimos que os funcionais se tornem tão próximos quanto se queira.

Será considerado *descontínuo* relativamente a uma certa métrica todo funcional que não for contínuo relativamente a esta métrica.

Exemplo 8. *Dado o funcional*

$$J[y(x)] = \int_0^\pi \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

mostrar que o mesmo é contínuo em $y_0(x) \equiv 0$ onde $y(x) \in C^1[0, \pi]$, relativo à métrica de primeira ordem.

Para tal, mostraremos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0(x)| < \delta \\ |y'(x) - y'_0(x)| < \delta \end{aligned} \implies |J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon.$$

Como $y_0(x) \equiv 0$, então

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0(x)| &= |y(x) - 0| = |y(x)| < \delta, \text{ e} \\ |y'(x) - y'_0(x)| &= |y'(x) - 0| = |y'(x)| < \delta \end{aligned} ; \text{ isto } \forall y(x) \in C^1[0, \pi].$$

Para tal tomemos $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon^2 - \pi^2}{\pi^2}}$, visto que

$$\begin{aligned}
|J[y(x)] - J[y_0(x)]| &= \left| \int_0^\pi \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx - \int_0^\pi dx \right| \\
&\leq \int_0^\pi \left| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \right| dx \\
&< \int_0^\pi \left| \sqrt{1 + [\delta]^2} \right| dx \\
&= \left| \sqrt{1 + [\delta]^2} \right| \int_0^\pi dx \\
&= \pi \cdot \left| \sqrt{1 + [\delta]^2} \right| = \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, basta tomarmos $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon^2 - \pi^2}{\pi^2}}$ que para qualquer $y(x) \in C^1[a, b]$ satisfazendo as condições

$$|y(x)| < \delta \text{ e } |y'(x)| < \delta, \text{ se terá } |J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon,$$

então pela definição acima, o funcional $J[y(x)]$ é contínuo relativo a métrica de primeira ordem.

Exemplo 9. *Mostrar que o funcional*

$$J[y(x)] = \int_0^1 \frac{[y(x) + x]dx}{2}$$

é contínua em $y_0(x) \equiv 0$ relativamente a métrica de ordem zero, $\forall y(x) \in C[0, 1]$.

Mostraremos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon$, desde que $|y(x) - y_0(x)| < \delta$. Como

$$y_0(x) \equiv 0 \text{ então } |y(x) - y_0(x)| = |y(x) - 0| = |y(x)| < \delta, \text{ isto } \forall y(x) \in C[0, 1].$$

Para tal tomemos $\delta = 2\epsilon$, visto que

$$\begin{aligned}
|J[y(x)] - J[y_0(x)]| &= \left| \int_0^1 \frac{y(x) + x}{2} dx - \int_0^1 \frac{x}{2} dx \right| \\
&= \left| \int_0^1 \left[\frac{y(x) + x}{2} - \frac{x}{2} \right] dx \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{y(x)}{2} \right| dx \\
&< \int_0^1 \frac{\delta}{2} dx = \frac{\delta}{2} \int_0^1 dx \\
&= \frac{\delta}{2} \cdot [1] = \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, basta tomarmos $\delta = 2\epsilon$ para qualquer $y(x) \in C[0, 1]$ satisfazendo as condições

$$|y(x)| < \delta, \text{ e se terá } |J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon.$$

Assim, qualquer que seja $\epsilon > 0$, se cumprirá $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon$, desde que $\rho_0[y(x), y_0(x)] < \delta$ com $\delta = 2\epsilon$, quer dizer, J é contínuo em $y_0(x) \equiv 0$ relativamente à métrica de ordem zero.

Exemplo 10. *Mostrar que o funcional*

$$J[y(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + [y(x)]^2} dx,$$

é contínuo em $y_0(x) = x^n$ relativo à métrica de ordem zero, onde $y(x) \in C[0, 1]$.

Para tal, devemos mostrar que dado um $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$|y(x) - x^n| < \delta \implies |J[y(x)] - J[x^n]| < \epsilon.$$

Como $|y(x) - x^n| < \delta$, tome $\delta = \sqrt{1 + \epsilon} - 1$, e observe que

$$\begin{aligned}
|J[y(x)] - J[x^n]| &= \left| \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + [y(x)]^2} dx - \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^{2n}} dx \right| \\
&\leq \int_0^1 x^3 \left| \sqrt{1 + [y(x)]^2} - \sqrt{1 + x^{2n}} \right| dx \\
&= \int_0^1 x^3 \left| \sqrt{1 + [y(x)]^2} - \sqrt{1 + x^{2n}} \right| \cdot \left[\frac{\sqrt{1 + [y(x)]^2} + \sqrt{1 + x^{2n}}}{\sqrt{1 + [y(x)]^2} + \sqrt{1 + x^{2n}}} \right] dx \\
&= \int_0^1 x^3 \left| \frac{1 + [y(x)]^2 - [1 + x^{2n}]}{\sqrt{1 + [y(x)]^2} + \sqrt{1 + x^{2n}}} \right| dx;
\end{aligned} \tag{14}$$

como $\sqrt{1 + [y(x)]^2} + \sqrt{1 + x^{2n}} \geq 1$ e $x \leq 1$, então retomando (14), temos

$$\begin{aligned}
|J[y(x)] - J[x^n]| &\leq \int_0^1 |1 + [y(x)]^2 - [1 + x^{2n}]| dx \\
&= \int_0^1 |[y(x)]^2 - x^{2n}| dx \\
&= \int_0^1 |[y(x) - x^n] \cdot [y(x) + x^n]| dx \\
&\leq \int_0^1 |[y(x) - x^n] \cdot [2 + y(x) - x^n]| dx \\
&< \int_0^1 |\delta \cdot [2 + \delta]| dx = \epsilon.
\end{aligned}$$

Desse modo, qualquer que seja $\epsilon > 0$, se cumprirá $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon$, desde que $\delta = \sqrt{1 + \epsilon} - 1$, quer dizer, J é contínuo em $y_0(x) = x^n$ relativamente à métrica de ordem zero.

Cabe salientar que, a continuidade de um certo funcional J em $y_0(x)$ com relação a métrica de ordem zero é equivalente a analisar a imagem do funcional J para essa função $y_0(x)$ acrescido de função auxiliar $\omega(x)$ se aproximando da imagem da função $J[y(x)]$, ou seja,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J[y_0(x) + \alpha \omega(x)] = J[y_0(x)]$$

para qualquer $\omega(x) \in M$.

Retomaremos o exemplo feito anteriormente utilizando o acréscimo da função auxiliar.

Exemplo 11. *Mostrar que*

$$J[y(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + [y(x)]^2} dx,$$

definido para $y(x) \in C[0, 1]$, é contínuo em $y_0(x) = x^n$, relativo à métrica de ordem zero.

Para tal tomemos $y(x) = x^n + \alpha\eta(x)$, onde $\eta(x) \in C[0, 1]$ e α é um número arbitrário, tal que $\alpha \mapsto 0 \Rightarrow y(x) \mapsto y_0(x)$, isso pois

$$\begin{aligned} J[y(x)] = J[x^n + \alpha\eta(x)] &= \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + [x^n + \alpha\eta(x)]^2} dx \\ &= \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + [x^n]^2 + 2 \cdot x^n \cdot \alpha\eta(x) + \alpha^2[\eta(x)]^2} dx \end{aligned}$$

tomando o limite com $\alpha \mapsto 0$, temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J[y(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + [x^n]^2} dx = J[x^n] = J[y_0(x)]$$

fato que afirma precisamente a continuidade de J em $y_0(x) = x^n$.

Precisamos definir o que se denomina *funcional linear*, pois o mesmo será uma excelente ferramenta mais adiante.

Definição 9. *Chama-se funcional linear, o funcional $L[y(x)]$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. $L[c \cdot y(x)] = c \cdot L[y(x)]$, onde c é uma constante arbitrária, e
2. $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$.

Um exemplo de funcional linear, é

Exemplo 12. *Tomemos $L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [y(x) - y'(x)] dx$.*

Note que,

$$\begin{aligned}
 L[c \cdot y(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} [c \cdot y(x) - [c \cdot y(x)]'] dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} c \cdot [y(x) - y'(x)] dx \\
 &= c \cdot \int_{x_0}^{x_1} [y(x) - y'(x)] dx \\
 &= c \cdot L[y(x)],
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 L[y_1(x) + y_2(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} [[y_1(x) + y_2(x)] - [y_1(x) + y_2(x)]'] dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} [y_1(x) + y_2(x) - [y_1'(x) + y_2'(x)]] dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} [[y_1(x) - y_1'(x)] + [y_2(x) - y_2'(x)]] dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} [y_1(x) - y_1'] dx + \int_{x_0}^{x_1} [y_2(x) - y_2'] dx \\
 &= L[y_1(x)] + L[y_2(x)],
 \end{aligned}$$

desse modo temos que o funcional L é linear definido em $C^1[x_0, x_1]$. Existem inúmeros funcionais lineares, como por exemplo os funcionais (10) e (11), diferente das funções cuja única função linear é $f(x) = x$.

Novamente, recorreremos a um fato bastante elementar do cálculo diferencial e integral. É fato que, se um incremento de uma função

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x),$$

puder ser representado da seguinte forma

$$\Delta f = A(x)\Delta x + B(x, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

onde $A(x)$ não depende de Δx e $B(x, \Delta x) \mapsto 0$ quando $\Delta x \mapsto 0$, então a função se chama *derivável*, e a parte $A(x)\Delta x$ do incremento, linear com respeito a Δx , é chamada de **diferencial** da função f , e é denotada por df . Dividindo por Δx e tomando o limite

de $\Delta x \mapsto 0$, obtemos que $A(x) = f'(x)$ e, portanto,

$$df = f'(x)\Delta x.$$

De modo bastante semelhante, temos que se um incremento de um funcional

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)],$$

puder ser escrito da forma

$$\Delta J = L[y(x) + \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max|\delta y|,$$

onde $L[y(x), \delta y]$ é um funcional linear com respeito a δy , e $\max|\delta y|$ é o valor máximo de δy e $\beta(y(x), \delta y) \mapsto 0$ quando $\max|\delta y| \mapsto 0$, então a parte do incremento é linear com relação a δy , ou seja, $L[y(x), \delta y]$, se chama a *variação do funcional*, ou ainda diferencial forte ou simplesmente diferencial do funcional $J[y(x)]$ em $y(x)$ correspondente a δy que se designa por δJ . Deste modo, a variação de um funcional é a parte principal do incremento, linear com relação a δy .

Exemplo 13. *Mostrar que o funcional*

$$J[y(x)] = \int_a^b [y(x)]^2 dx$$

definido em $C[a, b]$ é diferenciável em qualquer ponto $y(x)$ deste espaço.

Observamos que $\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$, temos,

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b [y(x) + \delta y]^2 dx - \int_a^b [y(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [y^2(x) + 2 \cdot y(x) \cdot \delta y(x) + \delta^2 y^2(x)] dx - \int_a^b y^2(x) dx \\ &= \int_a^b 2 \cdot y(x) \delta y(x) dx + \int_a^b [\delta y(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

note que o 1º termo no lado direito da expressão acima, para qualquer que seja $y(x)$, é linear em relação a $\delta y(x)$, ou seja, $L[y(x), \delta y] = \int_a^b 2 \cdot y(x) \delta y(x) dx$; já o 2º termo será estimado. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [\delta y(x)]^2 dx &= \int_a^b |\delta y(x)|^2 dx \\
&\leq \left(\sup_{a \leq x \leq b} |\delta y(x)| \right)^2 \int_a^b dx \\
&= (b-a) \max |\delta y(x)|^2.
\end{aligned}$$

Com o fato de $\max |\delta y(x)| \mapsto 0$ cumprir $[(b-a) \max |\delta y(x)|] \mapsto 0$.

Deste modo, o acréscimo ΔJ se representará como a soma de um funcional linear em relação a δy e de um termo nulo diante de $\max |\delta y(x)|$. Logo, pela definição de diferencial, em um ponto $y(x)$ arbitrário se terá

$$\delta J = 2 \cdot \int_a^b y(x) \delta y(x) dx.$$

Ao investigar as variações de funcionais vê-se que a variação desempenha o mesmo papel de diferencial no estudo das funções.

Pode se dar também outra definição equivalente de diferencial de uma função e de variação de um funcional.

Para funções, consideremos os valores de uma função $f(x + \alpha \Delta x)$ para x e Δx fixos e para valores variáveis de um parâmetro α . Para $\alpha = 1$, se obtêm o valor do incremento $f(x + \Delta x)$ de uma função; para $\alpha = 0$, teremos o valor original de $f(x)$. Não é difícil comprovar que a derivada de $f(x + \alpha \Delta x)$ com relação a α é igual, para $\alpha = 0$, à diferencial da função $f(x)$ no ponto x . Com efeito, seguindo a regra de derivação de uma função composta,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x|_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x = df(x).$$

Apesar de não ser nosso foco, de maneira completamente análoga, temos para funções de várias variáveis que se

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

então,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha \Delta x_1 + x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n) \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta x_i = df(x).$$

Já para funcionais temos a seguinte definição:

Definição 10. Diferenciação fraca de funcionais. Dado um funcional $J[y(x)]$ e um ponto $y = y(x)$ do seu domínio, se denominará diferencial fraca de J em $y(x)$ correspondente ao acréscimo $\delta y(x)$ o valor que assumirá a derivada com relação a α da função $J[y(x) + \alpha \delta y(x)]$ para $\alpha = 0$. Em símbolos

$$\Delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y(x)] \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Note que, para os funcionais de forma $J[y(x)]$ ou mais completas, dependendo de várias funções ou de funções de várias variáveis também pode-se definir uma variação com a derivada do funcional $J[y(x) + \alpha \delta y]$ com relação a α , para $\alpha = 0$. Com efeito, se o funcional tem variação na direção da parte linear principal de incremento, então podemos escrevê-la da seguinte forma

$$\Delta J = J[y(x) + \alpha \delta y] - J[y(x)] = L[y(x), \alpha \delta y] + \beta[y(x), \alpha \delta y] |\alpha| \max |\delta y|.$$

A derivada de $J[y(x) + \alpha \delta y]$ com relação a α , para $\alpha = 0$, é igual a

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L[y(x), \alpha \delta y] + \beta[y(x), \alpha \delta y] |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L[y(x), \alpha \delta y]}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta[y(x), \alpha \delta y] |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} \\ &= L[y(x), \delta y] = \delta J. \end{aligned}$$

Isto ocorre em virtude da linearidade,

$$L[y(x), \alpha \delta y] = \alpha L[y(x), \delta y],$$

e por,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta[y(x), \alpha \delta y] |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta[y(x), \alpha \delta y] \max |\delta y| = 0,$$

visto que $\beta[y(x), \alpha \delta y] \mapsto 0$ para $\alpha \mapsto 0$. Dessa maneira, se houver variação no funcional, também haverá variação na direção da derivada em relação ao parâmetro para o valor inicial da derivada, e vice-versa.

A segunda definição é um pouco mais ampla que a já apresentada, visto que existem exemplos de funcionais cujo incremento não se pode retirar da parte linear principal, mas ainda existe variação.

Como exemplo vamos retomar o que forá feito no **Exemplo 13**, utilizando a nova definição.

Exemplo 14. *Mostrar que o funcional*

$$J[y(x)] = \int_a^b [y(x)]^2 dx$$

definido em $C[a, b]$ é diferenciável em qualquer ponto $y(x)$ deste espaço.

Observe que $J[y(x) + \alpha \delta y(x)] = \int_a^b [y(x) + \alpha \delta y(x)]^2 dx$.

Daí, segue que segundo a definição (10)

$$\begin{aligned} \Delta J &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\int_a^b [y(x) + \alpha \delta y(x)]^2 dx \right]_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\int_a^b [y^2(x) + 2 \cdot y(x) \cdot \alpha \delta y(x) + [\alpha \delta y(x)]^2] dx \right]_{\alpha=0} \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} y^2(x) + \frac{\partial}{\partial \alpha} 2 \cdot y(x) \cdot \alpha \delta y(x) + \frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha \delta y(x)]^2 \right]_{\alpha=0} dx, \end{aligned}$$

tomando a derivada parcial em relação a α

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b [0 + 2 \cdot y(x) \cdot \delta y(x) + 2\alpha [\delta y(x)]] dx \\ &= 2 \cdot \int_a^b [y(x) \delta y(x) + \alpha \delta y(x)] dx \\ &= 2 \cdot \int_a^b y(x) \delta y(x) dx, \end{aligned}$$

constatando-se a coincidência das diferenciais forte e fraca. Normalmente representa-se

a diferencial forte e fraca por δJ e $\tilde{\delta} J$, respectivamente, ou algo similar, o que não o faremos aqui.

Exemplo 15. *Calcular a diferencial fraca do funcional*

$$J[y(x)] = \int_a^b [x + y(x)] dx,$$

onde $y(x) \in C[a, b]$.

Para tal, note que

$$J[y(x) + \alpha \delta y(x)] = \int_a^b [x + [y(x) + \alpha \delta y(x)]] dx,$$

assim,

$$\begin{aligned} \Delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y(x)]_{\alpha=0} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b [x + [y(x) + \alpha \delta y(x)]]_{\alpha=0} dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} [x + [y(x) + \alpha \delta y(x)]]_{\alpha=0} dx, \end{aligned}$$

tomando a derivada parcial em relação a α

$$\Delta J = \int_a^b \delta y(x) dx.$$

Assim, obtemos para qualquer pequena variação da função, $\delta y(x)$, implica numa variação no funcional.

A condição de existência da diferencial fraca é uma condição menos restritiva do que a condição imposta à diferencial forte.

Definição 11. (*Extremos de funcionais*)

A condição necessária para ocorrência de um extremo. O funcional $J[y(x)]$ tem um máximo (relativo) em $y = y_0(x)$, se os valores que $J[y(x)]$ assumir para quaisquer funções próximas de $y = y_0(x)$ não excederem $J[y_0(x)]$, isto é, se

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0.$$

Se, além de $\Delta J \leq 0$, tivermos $\Delta J = 0$ apenas se $y(x) = y_0(x)$, se dirá que J tem em $y = y_0(x)$ um *máximo estrito*.

Analogamente, J terá um *mínimo relativo* em $y = y_0(x)$ se $\Delta J \geq 0$ para qualquer função suficiente próxima de $y = y_0(x)$.

Exemplo 16. *O funcional*

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 - [y'(x)]^2} dx$$

definido para funções $y(x)$ tais que $|y'(x)| \leq 1$ definidas em $C^1[a, b]$ tem um *máximo relativo* em $y_0(x) = \cos(x)$.

De fato, para qualquer função $y(x)$, contínua em $[a, b]$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[y(x)] - J[y_0(x)] \\ &= \int_a^b \sqrt{1 - [y'(x)]^2} dx - \int_a^b \sqrt{1 - [\cos'(x)]^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 - [y'(x)]^2} dx - \int_a^b \sqrt{1 + [\text{sen}(x)]^2} dx \\ &= \int_a^b \left[\sqrt{1 - [y'(x)]^2} - \sqrt{1 + [\text{sen}(x)]^2} \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\sqrt{1 - [y'(x)]^2} - \sqrt{1 + [\text{sen}(x)]^2} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{1 - [y'(x)]^2} + \sqrt{1 + [\text{sen}(x)]^2}}{\sqrt{1 - [y'(x)]^2} + \sqrt{1 + [\text{sen}(x)]^2}} \right] dx \\ &= \int_a^b \frac{1 - [y'(x)]^2 - [1 + [\text{sen}(x)]^2]}{\sqrt{1 - [y'(x)]^2} + \sqrt{1 + [\text{sen}(x)]^2}} dx, \end{aligned}$$

como $\sqrt{1 - [y'(x)]^2} + \sqrt{1 + [\text{sen}(x)]^2} \geq 1$, e retomando a equação anterior, temos que

$$\begin{aligned}
 \Delta J &= \int_a^b \frac{1 - [y'(x)]^2 - [1 + [\text{sen}(x)]^2]}{\sqrt{1 - [y'(x)]^2} + \sqrt{1 + [\text{sen}(x)]^2}} dx \\
 &\leq \int_a^b 1 - [y'(x)]^2 dx - \int_a^b 1 + [\text{sen}(x)]^2 dx \\
 &= \int_a^b [1 - [y'(x)]^2 - [1 + [\text{sen}(x)]^2]] dx \\
 &= \int_a^b [-[y'(x)]^2 - [\text{sen}(x)]^2] dx \\
 &= - \int_a^b [y'(x)]^2 + [\text{sen}(x)]^2 dx \leq 0,
 \end{aligned}$$

assim, temos que o funcional acima possui ponto de máximo para $y_0(x) = \cos(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Exemplo 17. *O funcional*

$$J[y(x)] = \int_0^1 [x^2 + y^2(x)] dx$$

definido em $C[0, 1]$ tem um mínimo estrito em $y_0(x) \equiv 0$.

Note que para qualquer função $y(x)$, contínua em $[0, 1]$, se cumpre que

$$\begin{aligned}
 \Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] &= \int_0^1 [x^2 + y^2(x)] dx - \int_0^1 [x^2] dx \\
 &= \int_0^1 [y^2(x)] dx \geq 0,
 \end{aligned}$$

a igualdade ocorrendo somente se $y(x) \equiv 0$, logo este é um mínimo estrito.

Definição 12. *Diz-se que $J[y(x)]$ tem um máximo forte em $y = y_0(x)$ se para qualquer função $y = y(x)$ compreendida numa certa ϵ -vizinhança de ordem zero de $y = y_0(x)$ se cumprir*

$$J[y(x)] \leq J[y_0(x)]. \tag{15}$$

O conceito de *mínimo forte* se define de maneira análoga.

Caso, em $y = y_0(x)$ para qualquer função admissível $y = y(x)$ compreendida numa certa ϵ -vizinhança de ordem um (primeira ordem) de $y = y_0(x)$ se cumprir (15), então diz-se que em $y = y_0(x)$, $J[y(x)]$ tem o seu *máximo fraco*. Sendo o conceito de *mínimo fraco* simétrico. Vê-se sem dificuldade que os dois exemplos acima são máximo relativo fraco e mínimo relativo forte, respectivamente.

Os máximos e os mínimos (fortes ou fracos) assim definidos constituem os chamados *extremos relativos*.

É óbvio que qualquer extremo forte será um extremo fraco, não valendo a recíproca.

E se denomina-se *extremo absoluto* de um funcional o máximo ou o mínimo absoluto deste no seu domínio de definição. Baseado na condição necessária da ocorrência de um extremo, temos

Teorema 1. *(da condição necessária da ocorrência de um extremo). Se um funcional diferenciável $J[y(x)]$ admitir um extremo num ponto $y = y_0(x)$ interior ao seu domínio de definição, então*

$$\delta J[y_0(x)] = 0. \quad (16)$$

As funções para as quais $\delta J = 0$ se chamarão *pontos estacionários* de J .

Por ser demasiado extenso, omitiremos a demonstração do teorema ora descrito, para tal recomendamos [15], *pg.* 297 – 299.

Resumindo, a ideia fundamental para se estabelecer o mínimo (ou máximo) de um funcional J , é conseguir sobre seu domínio, uma certa função cuja variação da mesma implica que a variação do funcional seja nulo.

3.3 O problema básico do cálculo variacional e a Equação de Euler

Antes de adentrarmos no problema da equação Euler, vamos considerar um pequeno lema primeiro, visto que o mesmo será usado na demonstração do próximo resultado.

Lema 1. Lema fundamental do cálculo variacional. *Se para cada função $\eta(x)$ contínua no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que*

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = 0,$$

sendo $\Phi(x)$ uma função contínua no intervalo $[x_0, x_1]$, então

$$\Phi(x) \equiv 0,$$

nesse intervalo.

Observação - A afirmação do lema é verdadeiro se a função $\eta(x)$ possuir as seguintes limitações: $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ e $\eta(x)$ tem derivadas contínuas.

A demonstração desse lema fica a cargo do leitor, recomendamos [15], pg 302 – 303. Diante disso, retomemos ao problema da equação de Euler.

3.3.1 A Equação de Euler.

O problema consiste em encontrar a função $y(x)$ continuamente diferenciável e sujeita às condições de fronteira (ver Figura 6)

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \tag{17}$$

que é um extremo fraco do funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx. \tag{18}$$

A função $F(x, y, y')$ deve admitir derivadas parciais contínuas até a segunda ordem em relação a todos os seus argumentos. Já sabemos que a condição necessária para que exista um extremo é a anulação da variação do funcional.

Aplicaremos o Teorema da condição necessária da ocorrência de um extremo (16) para o funcional (18). Se considerarmos que $y(x)$ fornece o valor mínimo para o funcional $J[y(x)]$, então se tomarmos qualquer outra função $\bar{y}(x)$ por mais próxima que seja de $y(x)$, ainda assim fornecerá um valor maior para J . Para tal tomemos uma função vizinha de $y(x)$ tal que:

$$y(\alpha, x) = y(x) + \alpha[\bar{y}(x) - y(x)].$$

Como sabemos, a diferença $[\bar{y}(x) - y(x)]$ se denomina variação da função $y(x)$ que designamos por δy . Note que em $y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\delta y$, δy é a curva que fornece um caminho alternativo a $y(x)$; quando $\alpha = 0$, temos $y(0, x) = y(x)$, e para $\alpha = 1$ temos $y(1, x) = \bar{y}(x)$, que é chamada de função comparação.

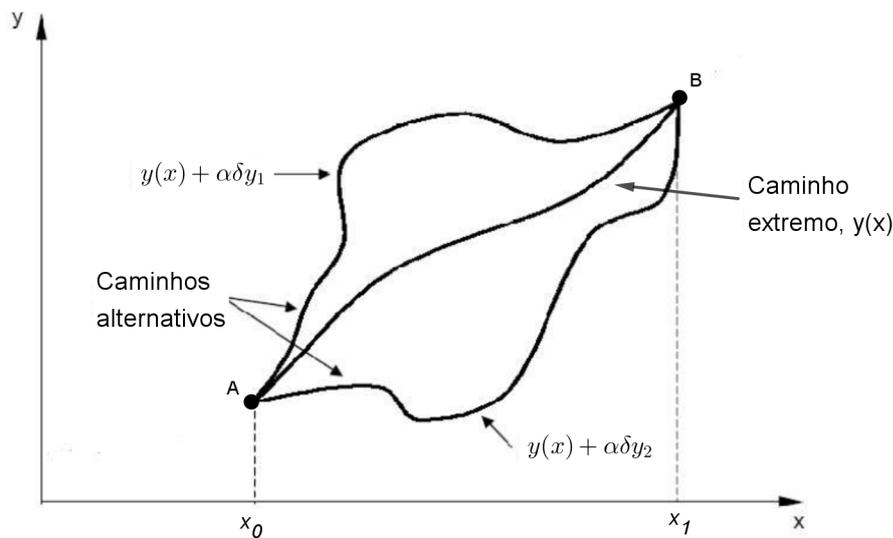


Figura 6: Função ligando dois pontos e duas funções alternativas

Cabe observar que nos dois pontos extremos x_0 e x_1 temos obrigatoriamente que a função extremo e as funções alternativas serão idênticas, pois estes são os pontos de fronteiras, ou seja, $y(x_1) = y(\alpha, x_1) \iff y(x_1) = y(x_1 + \alpha\delta y_1)$, é ocorre se $\alpha\delta y_1 = 0$, onde δy_1 é a variação da função no ponto x_1 . Aplica-se o mesmo raciocínio para concluir que em $y(x_2)$ implica em $\alpha\delta y_2 = 0$.

Usando $y(\alpha, x)$ ao invés de usarmos a função $y(x)$, na equação (18), J será então determinado em função de α , assim teremos:

$$J = J[y(\alpha, x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(\alpha, x), y'(\alpha, x)) dx, \quad (19)$$

do teorema (16) temos que, a condição para um extremo é que:

$$\delta J = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(\alpha, x)] \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (20)$$

Começaremos a analisar δJ , assim teremos

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(\alpha, x)], \text{ de (19) temos} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(\alpha, x), y'(\alpha, x)) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Considerando que,

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} F(x, y(\alpha, x), y'(\alpha, x)) \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(\alpha, x), y'(\alpha, x)) \\ F_{y'} &= \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(\alpha, x), y'(\alpha, x)), \end{aligned} \quad (22)$$

onde $y = y(\alpha, x)$ e $y' = [y(\alpha, x)]'$. Tomando a derivada parcial com relação a α , utilizando a regra da cadeia e pelas equações em (22) podemos reescrever a equação (21),

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_x \frac{\partial}{\partial \alpha} x + F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(\alpha, x) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(\alpha, x) \right] dx, \quad (23)$$

podemos observar ainda que:

1. Como x não depende de α , então $\frac{\partial}{\partial \alpha} x = 0$,
2. e $\frac{\partial}{\partial \alpha} y(\alpha, x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y$,
3. além disso, $y'(\alpha, x) = [y(x) + \alpha \delta y]' = \frac{d}{dx} [y(x) + \alpha \delta y] = [y'(x) + \alpha \delta y']$,
 assim temos que $\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(\alpha, x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y'$.

Substituindo as observações (1), (2) e (3) podemos reescrever (23) como

$$\begin{aligned}
 \delta J &= \int_{x_0}^{x_1} [F_x 0 + F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \delta y + F_{y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right] dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y] dx + \int_{x_0}^{x_1} \left[F_{y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right] dx.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Podemos integrar por partes a segunda parcela das integrais acima, que lembrando a expressão geral é:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

tomando $dv = \frac{d}{dx}(\delta y)dx \Rightarrow dv = d(\delta y) \Rightarrow v = \delta y$, e considerando

$$u = F_{y'} \Rightarrow du = \frac{du}{dx} dx = \frac{d}{dx}(F_{y'}) dx, \text{ assim}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_1} \left[F_{y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right] dx &= F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \frac{d}{dx}(F_{y'}) dx \\
 &= - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \frac{d}{dx}(F_{y'}) dx,
 \end{aligned} \tag{25}$$

isto devido ao fato já discutido anteriormente que é $\delta y_0 = \delta y_1 = 0$. Deste modo, podemos substituir (25) em (24)

$$\begin{aligned}
 \delta J &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \delta y - \delta y \frac{d}{dx} F_{y'} \right] dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx.
 \end{aligned}$$

Deste modo, retomando a condição necessária de um extremo (20), temos que

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx = 0, \tag{26}$$

onde o primeiro fator $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ é uma função contínua dada pela curva $y = y(x)$ que é o extremo, e o segundo fator δy devido a arbitrariedade da escolha da curva de comparação $y = \bar{y}$, é uma função que satisfaz algumas condições, como: δy se anula nos pontos de fronteira $x = x_0$ e $x = x_1$; é contínua e derivável; além disso, δy e $\delta y'$

são pequenos em valores absolutos.

Desse modo, temos que a equação (26) satisfaz o **Lema 1**, portanto

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \quad (27)$$

Podemos desenvolver a mesma equação da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} &= F_y - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') \right] \\ &= F_y - \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial}{\partial x} F \right) - \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial}{\partial y} F \right) \left(\frac{d}{dx} y \right) - \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial}{\partial y'} F \right) \left(\frac{d}{dx} y' \right) \\ &= F_y - F_{xy'} - y' F_{yy'} - y'' F_{y'y'} = 0, \quad (F_{y'y'} \neq 0). \end{aligned} \quad (28)$$

A solução geral da equação (28) dependerá da solução de uma equação diferencial de segunda ordem de duas constantes arbitrárias. As soluções de (27) são chamadas *lagrangianas* do funcional (18); as soluções que atendem as condições de fronteira constituem os pontos estacionários ou críticos de (18). Sendo assim, toda lagrangiana é uma extremal (ponto estacionário) para o funcional. Note que,

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \text{ com fronteiras } y(x_0) = A \text{ e } y(x_1) = B,$$

pode não admitir nenhuma solução ou, as vezes, mais de uma solução.

Exemplo 18. *Determinar as lagrangianas para o funcional*

$$J[y(x)] = \int_{-1}^0 [12xy(x) - y'^2(x)] dx$$

onde $y(x) \in C^1[-1, 0]$ com as seguintes condições de fronteira $y(-1) = 1$ e $y(0) = 0$.

Solução - Note que $F = 12xy - y'^2$, daí temos que

$$F_y = 12x, \text{ e } F_{y'} = -2y'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}[-2y'(x)] = -2y''(x),$$

desse modo substituindo as equações em (27), temos

$$\begin{aligned}
F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} &= 12x - [-2y''(x)] \\
&= 12x + 2y''(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow y''(x) = -6x,
\end{aligned} \tag{29}$$

como queremos determinar a função $y(x)$, então integraremos (29) duas vezes, como se segue

$$\begin{aligned}
y''(x) = -6x &\Rightarrow \int y''(x)dx = \int (-6x)dx \\
&\Leftrightarrow y'(x) = \frac{-6x^2}{2} + C_1 \\
&\Rightarrow \int y'(x)dx = \int \left(\frac{-6x^2}{2} + C_1 \right) dx \\
&\Leftrightarrow y(x) = \frac{-6x^3}{6} + xC_1 + C_2 \\
&\Leftrightarrow y(x) = -x^3 + xC_1 + C_2,
\end{aligned}$$

para determinar as constantes C_1 e C_2 , basta tomarmos as fronteiras $y(-1) = 1$ e $y(0) = 0$, o que nos levará a $C_1 = C_2 = 0$. Logo, a solução lagrangiana para o funcional será a função $y(x) = -x^3$.

Exemplo 19. *Encontrar as lagrangianas do funcional*

$$J[y(x)] = \int_2^5 [5xy(x) - y^2(x)]dx,$$

onde $y(x) \in C[2, 5]$ que satisfazem as condições $y(2) = 5$ e $y(5) = 10$.

Solução - Note que $F_y = 5x - 2y(x)$ e $F_{y'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ desse modo,

$$\begin{aligned}
F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} &= 5x - 2y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow y(x) = \frac{5x}{2}.
\end{aligned}$$

Entretanto, temos que lembrar que a função candidata a solução deve atender as condições de fronteiras estabelecidas, note que para $y(2) = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$, porém $y(5) = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$. Logo, o funcional não terá solução dado que $y(x) = \frac{5x}{2}$ não satisfaz a condição $y(5) = 10$.

Exemplo 20. Achar as lagrangianas para o funcional

$$J[y(x)] = \int_1^2 [[y(x) + y'(x)]^2] dx,$$

onde $y(x) \in C^1[1, 2]$ com as condições de fronteiras $y(1) = 1$ e $y(2) = 0$.

Solução - Como $F = [y(x) + y'(x)]^2 = y^2(x) + 2y(x)y'(x) + y'^2(x)$, daí $F_y = 2y(x) + 2y'(x)$ e $F_{y'} = 2y(x) + 2y'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}F_{y'} = 2y'(x) + 2y''(x)$, assim

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} &= 2y(x) + 2y'(x) - [2y'(x) + 2y''(x)] = 0 \\ \Leftrightarrow 2y(x) - 2y''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow y''(x) - y(x) &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

note que a equação (30) é uma EDO (Equação Diferencial Ordinária) homogênea de 2ª ordem, sendo assim, a resposta será baseada na solução da denominada *função auxiliar*, tomado que $y(x) = e^{rx}$, temos

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \text{ com } y(x) \neq 0 \implies ar^2 + br + c = 0,$$

onde a, b , e c são constantes reais com $a \neq 0$. Além disso, se as raízes r_1 e r_2 da função auxiliar forem reais e distintas, então a solução geral de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ é $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$, com c_1 e c_2 constantes, conforme [21].

Sendo assim,

$$y''(x) - y(x) = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ e } r_2 = -1.$$

Logo, concluímos que

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x},$$

e para determinarmos c_1 e c_2 utilizamos as condições de fronteiras $y(1) = 1$ e $y(2) = 0$, de onde conclui-se que $c_1 = \frac{1}{e-e^3}$ e $c_2 = \frac{e^3}{e^2-1}$, o que nos leva a concluir que

$$y(x) = \frac{e^4 - e^{2x}}{e^x \cdot (e^2 - 1)},$$

é a lagrangiana para o funcional acima.

Como na definição tem-se que o funcional $F(x, y, y')$ “depende” da variável x , da função $y(x)$ e da derivada da função $y'(x)$, analisaremos dois casos em que essas dependências tenham certas restrições.

3.3.2 Casos particulares da Equação de Euler

O funcional depender só y'

Para este caso temos que, $F = F(y')$, e retomando a equação de Euler e por (28),

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \Leftrightarrow F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0,$$

e como F só depende de y' temos que

$$F_y = F_{xy'} = y'F_{yy'} = 0,$$

então temos que $y''F_{y'y'} = 0$.

Logo, conclui-se que $y'' = 0$ ou $F_{y'y'} = 0$, caso ocorra a primeira possibilidade teremos,

$$\begin{aligned} y'' = 0 &\iff \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} y(x) \right] = 0 \\ &\iff \frac{d}{dx} y(x) = C_1 \\ &\iff y(x) = x \cdot C_1 + C_2, \end{aligned} \tag{31}$$

onde C_1 e C_2 são constantes, caso ocorra a segunda possibilidade segue-se um raciocínio análogo.

Recordamos aqui que o *exemplo 3* apresentado anteriormente,

$$J[y(x)] = \int_A^B \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

é um tipo de funcional que atende a identidade, uma vez que o comprimento do arco não depende explicitamente de x .

O funcional depender só de y e y'

Um caso bastante particular da Equação de Euler é quando o funcional J não depender explicitamente da variável x , ou seja, depender explicitamente de y e y' , é possível deduzir para a Equação de Euler a seguinte identidade, como apresenta em [13]:

$$F - y' \frac{\partial}{\partial y'} F = C, \quad (32)$$

onde C é uma constante. Tal expressão é denominada a **Identidade de Beltrami**.

Para deduzir essa identidade, tomaremos inicialmente a derivada total da função $F(x, y(x), y'(x))$.

$$\frac{d}{dx} F = \frac{\partial}{\partial x} F + \frac{\partial}{\partial y} F \frac{d}{dx} y + \frac{\partial}{\partial y'} F \frac{d}{dx} y',$$

utilizando o fato de $\frac{d}{dx} y = y'$, temos

$$\frac{d}{dx} F = \frac{\partial}{\partial x} F + y' \frac{\partial}{\partial y} F + y'' \frac{\partial}{\partial y'} F,$$

onde podemos isolar

$$y' \frac{\partial}{\partial y} F = \frac{d}{dx} F - \frac{\partial}{\partial x} F - y'' \frac{\partial}{\partial y'} F. \quad (33)$$

Retomaremos a equação de Euler,

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial y} F - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} F \right) = 0,$$

multiplicando a expressão acima por y' , obtemos

$$y' \frac{\partial}{\partial y} F - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} F_{y'} \right) = 0. \quad (34)$$

Substituindo a equação (33) em (34)

$$\frac{d}{dx} F - \frac{\partial}{\partial x} F - y'' \frac{\partial}{\partial y'} F - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} F \right) = 0. \quad (35)$$

Por outro lado, sabemos da derivada de um produto que

$$\frac{d}{dx} \left(y' \cdot \frac{\partial}{\partial y'} F \right) = y'' \frac{\partial}{\partial y'} F + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} F \right), \quad (36)$$

assim, substituindo (36) em (35), temos

$$\frac{d}{dx} F - \frac{\partial}{\partial x} F - \frac{d}{dx} \left(y' \cdot \frac{\partial}{\partial y'} F \right) = 0,$$

colocando $\frac{d}{dx}$ em evidência e observando o fato de F não depender explicitamente de x , então $\frac{\partial}{\partial x} F = 0$, assim a equação acima se reduz a

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \cdot \frac{\partial}{\partial y'} F \right) = 0,$$

que por integração no leva à identidade de Beltrami.

Analisaremos no próximo capítulo um problema que seguramente atente a identidade mencionada, a *superfície mínima de rotação*.

Existem outros casos particulares da Equação de Euler que podem ser vistos em [15]. Além disso, pode-se analisar funcionais cujas dependências sejam múltiplas funções e suas derivadas ou funcionais que dependam de derivadas de ordens maiores que 1, ou seja,

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y_1, y_2 \cdots, y_n, y'_1, y'_2 \cdots, y'_n) dx$$

ou

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) dx.$$

Para o que segue acreditamos que as análises dos problemas no próximo capítulo já conseguiram suprir o papel de estimular e aguçar a curiosidade sobre as aplicações do cálculo variacional. Antes porém, precisamos estudar um caso particular ainda relacionado com problemas variacionais.

3.4 Problemas variacionais com restrições

Embora tenhamos analisando um certo funcional com determinadas “dependências”, como as da variável x e/ou $y(x)$ ou ainda $y'(x)$, podemos perceber que existem

alguns problemas com mais restrições. Um exemplo explícito desse fato, pode ser encontrado no *problema de Dido*. Este problema faz parte da classe dos chamados problemas **isoperimétricos**.

Problemas isoperimétricos são problemas nos quais queremos minimizar ou maximizar uma integral impondo-lhe alguma restrição, como por exemplo impondo que a integral seja igual a uma constante. No problema de Dido, especificamente, a imposição é que a solução do problema tenha perímetro fixo.

Ao estudar tal problema, ver-se que Descartes (1596-1659) promove estudos iniciais que mostram que o círculo e a superfície que engloba a maior área com perímetro fixo. Embora para ele, bastava provar alguns casos particulares daí concluir que vale para o caso geral, por indução. Entretanto, sabemos que não podemos concluir nada apenas estudando algumas figuras particulares, é preciso que seja feita uma demonstração geral do fato.

Duzentos anos depois da morte de Descartes, o físico Lord Rayleigh (1842-1919) investigou os tons das membranas. Os tambores podem ser de qualquer formato, porém o formato dos tambores com as mesmas áreas e condições físicas que produzirá tom principal mais forte, a solução para tal problema é uma membrana de formato circular.

Estes são algumas exemplos que ilustram a importância desses problemas que têm chamado a atenção de matemáticos há muito tempo. Certamente conseguimos estudar problemas com certas restrições com maior rigor e precisão atualmente. Vemos que o cálculo variacional é uma dessas ferramentas que auxiliam no estudo de problemas isoperimétricos.

Problemas isoperimétricos simples

O chamado problema isoperimétrico simples consiste na determinação dos extremos do funcional

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (37)$$

no domínio das funções $y = y(x) \in C^1[x_0, x_1]$ satisfazendo as condições

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x)) dx = \ell, \quad (38)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

onde ℓ é um número dado. Admite-se que as funções F e G são continuamente deriváveis até segunda ordem inclusive em relação a x, y, y' para $x \in [x_0, x_1]$ e quaisquer y e y' .

Tomamos por $y(x)$ a função extremal e introduzimos uma família $\bar{y}(x)$ de “funções comparação”. Cabe ressaltar que ao tomarmos $\bar{y}(x)$ não podemos tomá-las como uma família de um único parâmetro, uma vez que qualquer mudança desse parâmetro alteraria o valor de ℓ , que deve ser constante, de acordo com (38). Daí, precisa-se introduzir uma família com dois parâmetros

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon_1 \eta_1(x) + \epsilon_2 \eta_2(x),$$

onde $n_1(x)$ e $n_2(x)$ são funções diferenciáveis arbitrárias tais que

$$n_1(x_0) = n_1(x_1) = 0 = n_2(x_0) = n_2(x_1),$$

tal condição assegura que $\bar{y}(x_0) = y(x_0) = y_0$ e $\bar{y}(x_1) = y(x_1) = y_1$, como desejamos, para todos os valores dos parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 . Trocando $y(x)$ por $\bar{y}(x)$ em (37) e (38) têm-se

$$I(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) dx$$

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) dx. \quad (39)$$

É claro que ϵ_1 e ϵ_2 não são independentes, já que J é mantido constante. Então, de (39), segue que há uma relação funcional entre ϵ_1 e ϵ_2 dado por

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = cte. \quad (40)$$

O procedimento feito acima reduz nosso problema isoperimétrico simples ao já conhecido problema de encontrar condições para as quais a função $I(\epsilon_1, \epsilon_2)$ possui um extremo sobre a restrição (40). Para resolver esse problema pode ser usado o Método dos Multiplicadores de Lagrange que é adaptado ao caso dos funcionais pelo teorema seguinte.

Teorema 2. Teorema de Euler - Qualquer ponto crítico $y = y(x)$ de

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

no domínio das funções sujeitas as condições

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = \ell, \quad y(x_0) = y_0 \text{ e } y(x_1) = y_1$$

e que não for ponto crítico do funcional $J[y]$ será, ao se escolher convenientemente o número λ (multiplicador de Lagrange), um ponto crítico para

$$I^*[y] = \int_{x_0}^{x_1} F^*(x, y, y') dx, \quad y(x_0) = y_0 \text{ e } y(x_1) = y_1$$

onde $F^* = F + \lambda G$.

A constante λ será definida pelos pontos de fronteiras x_0, x_1 e ainda pela condição de integração.

Para a demonstração do teorema acima, basta introduzir ϵ_1, ϵ_2 tomados anteriormente no novo funcional F^* , fazer as devidas observações e derivadas parciais com relação a ϵ_1 e ϵ_2 é possível mostrar que F^* atende a equação de Euler, ver [16].

Exemplo 21. Determinar o ponto estacionário para o funcional

$$I[y] = \int_0^1 y'^2(x) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 6$$

onde $y(x) \in C^1[0, 1]$ e sujeitas às condições

$$J[y] = \int_0^1 2y(x) dx = 3. \tag{41}$$

Tomando $F^* = F + \lambda G$ a equação de Euler para o funcional

$$I^*[y] = \int_0^1 [y'^2(x) + \lambda 2y(x)] dx$$

será

$$2\lambda - \frac{d}{dx}(2y') = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2y'' = 0. \tag{42}$$

Resolvendo-se a EDO (42) temos que $y(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + c_1x + c_2$ e das condições de fronteiras $y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$ e $y(1) = 6 \Rightarrow c_1 = \frac{10 - \lambda}{2}$, desse modo a suposta lagrangiana terá a forma

$$y(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + \left(\frac{10 - \lambda}{2}\right)x + 1, \quad (43)$$

e para determinarmos λ substituiremos (43) na restrição (41), de onde segue que

$$\begin{aligned} \int_0^1 2 \cdot \left[\frac{\lambda}{2}x^2 + \left(\frac{10 - \lambda}{2}\right)x + 1 \right] dx &= 2 \cdot \left[\frac{\lambda x^3}{6} + \frac{(10 - \lambda)x^2}{4} + x \right] \Big|_0^1 \\ &= 2 \cdot \left[\frac{\lambda \cdot 1^3}{6} + \frac{(10 - \lambda) \cdot 1^2}{4} + 1 - 0 \right] \\ &= 2 \cdot \left[\frac{2\lambda + 3 \cdot (10 - \lambda) + 12}{12} \right] \quad (44) \\ &= \frac{2\lambda + 30 - 3\lambda + 12}{6} = 3 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 24, \end{aligned}$$

substituindo (44) na expressão (43), têm que a lagrangiana para o funcional dado é $y(x) = 12x^2 - 7x + 1$. Cabe salientar que se o funcional não tivesse tal restrição o mesmo seria mais simples de solucionar tendo como lagrangiana uma reta e não uma quadrática como solução.

Ao degustar os conceitos ligados ao cálculo variacional nos parece razoável e sempre intrínseco associá-lo e compará-lo ao cálculo diferencial e integral, e até então, a Equação de Euler nos permite analisar que se existir uma lagrangiana para o funcional, a mesma é um extremo para o funcional, ou seja, um ponto estacionário correlacionando com o cálculo diferencial. Sendo assim, mostraremos a seguir que todo funcional que atende a equação de Euler é de fato um otimizador.

3.5 Condições suficientes para a ocorrência de um extremo

As condições que vimos até aqui garantem que uma função que atende a equação de Euler-Lagrange é um extremo, porém não podemos definir se tal função é uma

minimizadora, maximizadora ou ponto de inflexão do funcional. Isto ocorre, porque as condições de ocorrência de extremos que temos até agora são todas apenas necessárias.

Fazendo um paralelo com o cálculo diferencial e integral o que temos até aqui é que a “1ª derivada é nula”, neste tipo de estudo a 2ª derivada nos permite estabelecer se o ponto em questão é máximo, mínimo ou de inflexão. Nesta secção apresentaremos elementos básicos da teoria de campos, enunciaremos e estudaremos condições suficientes que nos permitirão aferir com toda segurança qual o tipo de extremo encontrado para o problema, tal estudo se desenrolará conforme [25], [20], [16] e [15].

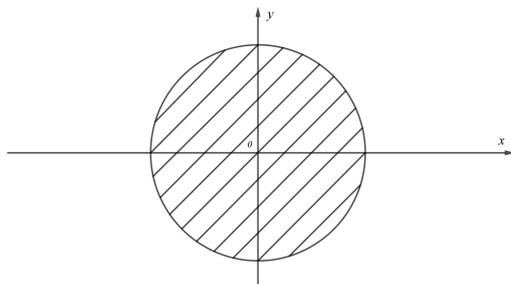
3.5.1 Campos de extremais

Definição 13. *Se por cada ponto de uma região D em um plano xOy passar uma e só uma curva da família $y = y(x, C)$, se diz que essa região D é um campo regular ou próprio.*

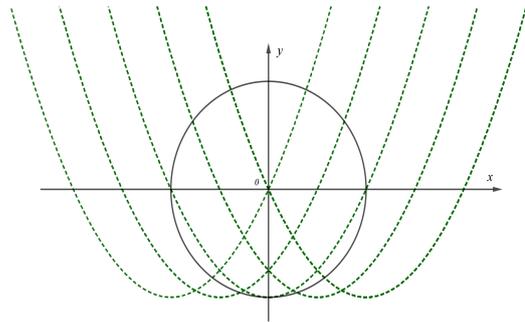
Se denomina *inclinação* de um campo $y = y(x, C)$ num ponto (x, y) o coeficiente angular $p(x, y)$ da reta que for tangente em (x, y) a uma curva da família $y = y(x, C)$.

Por exemplo, as retas paralelas $y = x + C$ formam um campo regular dentro do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ (figura 4.5), cuja inclinação é $p(x, y) = 1$.

Por outro lado, a família de parábolas $y = y(x - a)^2 - 1$ não formam um campo regular dentro do mesmo círculo, visto que em seu interior a família de parábolas se tocam em diversos pontos (figura 4.6).



(a) Figura 4.5



(b) Figura 4.6

Diz-se que uma família $y = y(x, C)$ forma um *campo central* em D se constituir um campo regular na região D obtida excluindo de D certo ponto (x_0, y_0) comum a todas as curvas. Nestas condições, (x_0, y_0) será o centro de um feixe de curvas.

Por exemplo, o feixe da família $y = C \cdot \text{sen}(x)$ forma um campo central para $0 \leq x \leq a$ e $a < \pi$. Do mesmo modo que o feixe de senoide forma um campo próprio $\delta \leq x \leq a$, donde $\delta > 0$. E o mesmo feixe de senoide não forma um campo em torno do segmento $0 \leq x \leq a_1$, $a_1 > \pi$ do eixo das abscissas (figura 4.7)

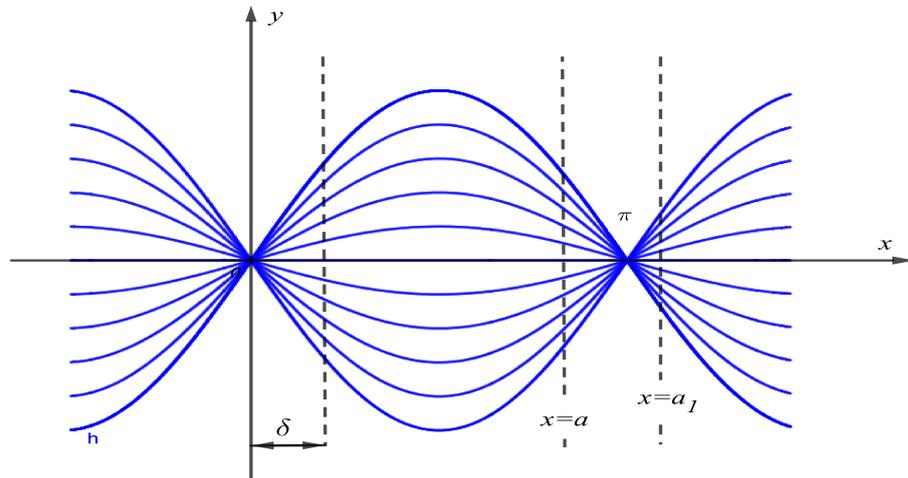


Figura 7: Campo de senoide

Se um campo central apropriado é formado por uma família de extremos de um certo problema variacional, chama-se **campo de extremais**.

Definição 14. *Seja a curva $y=y(x)$ uma lagrangiana do funcional*

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

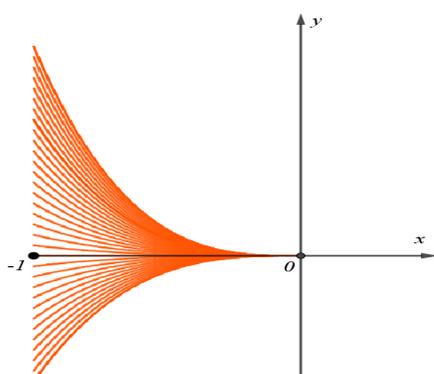
com $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ pontos de fronteiras fixos.

Diz-se que a lagrangiana $y = y(x)$ está incluída num campo regular de lagrangianas, se existir uma família $y = y(x, C)$ de lagrangianas do mesmo funcional formando um campo regular na vizinhança de $y = y(x)$. De modo semelhante dizemos que $y = (x)$ está incluída num campo central se existir uma família $y(x, C)$ incluída num campo com centro em (x_0, y_0) . Será razoável individualizar, neste caso, cada uma das curvas do feixe $y = y(x, C)$ pelo coeficiente angular da tangente a esta curva em (x_0, y_0) e adotar este coeficiente angular a título de parâmetro.

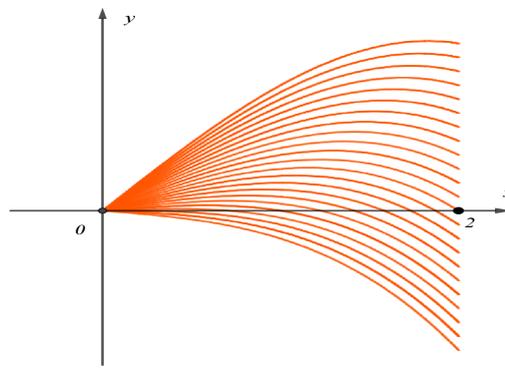
Exemplo 22. *Mostrar que se pode incluir, num campo apropriado, o ponto estacionário para o funcional*

$$\int_a^b [12xy(x) - y'^2(x)]dx,$$

considerando que para esse funcional a função $y(x) = -x^3 + C_1x + C_2$ é uma solução (ver pg. 55), e a lagrangiana $y(x) = -x^3$ é individualizada pelas condições de fronteira $y(-1) = 1$ e $y(0) = 0$, que poderá ser incluída num campo regular $y = C \cdot x^3$ (Figura 8). E, enquanto que $y(x) = -x^3 + 5x$, obtida das condições $y(0) = 0$ e $y(2) = 2$ se poderá incluir num campo de lagrangianas $y = -x^3 + C \cdot x$ (Figura 9).



(a) Figura 8



(b) Figura 9

Definição 15. Denomina-se discriminante de uma família de curvas no plano $F(x, y, C) = 0$ o lugar geométrico dos pontos satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

Tal definição é relativamente comparável com a de existência e unicidade de EDO's. E de certa forma resolver essa EDO é equivalente a encontrar pontos onde a variação de C é constante e localmente aproximadamente constante.

Dada uma família de curvas, o discriminante, compreenderá, no caso mais geral, a curva que tangência cada uma das curvas de uma família monoparamétrica de curvas (envoltória), os cúspides das curvas, assim como os pontos comuns a uma infinidade destas.

Se $F(x, y, C) = 0$ é a equação de um feixe de curvas, seu centro também pertence à curva do discriminante da mesma. Isto pois, ao se pegar um feixe de extremas

$y = y(x, C)$ que passam pelo ponto (x_0, y_0) e determinar sua curva discriminante $\phi(x, y) = 0$, então as curvas próximas da família $y = y(x, C)$ serão cortadas na vizinhança da curva $\phi(x, y)$. Em particular, as curvas desta família próximas ao extremo considerado $y = y(x)$, passando pelos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, serão cortadas em pontos próximos aos pontos de tangência da curva $y = y(x)$ com a curva discriminante.

Se o arco AB do extremo $y = y(x)$ não tiver pontos comuns além de A com a curva discriminante do feixe de extremos que inclui o extremo dado, então as extremidades do feixe suficientemente perto do arco AB não são cortadas, isto é, elas formam um campo central que inclui o arco AB entorno deste arco.

Dada uma família $y = y(x, C)$ de curvas que se cortam num ponto A , se denominará **conjugado** de A qualquer ponto A^* do discriminante de $y = y(x, C)$ distinto de A e que pode ser ligado a este por um arco (de curva desta família) não contendo pontos do discriminante outros que A e A^* .

Exemplo 23. O discriminante da família monoparamétrica $y = C \cdot \text{sen}(x)$ se dará por

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \Leftrightarrow y - C \cdot \text{sen}(x) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0 \Leftrightarrow -\text{sen}(x) = 0, \end{cases}$$

isto é, estará constituído pelos pontos $(k\pi, 0)$, onde $k \in \mathbb{Z}$ (os pontos de intersecção da senoide com o eixo Ox).

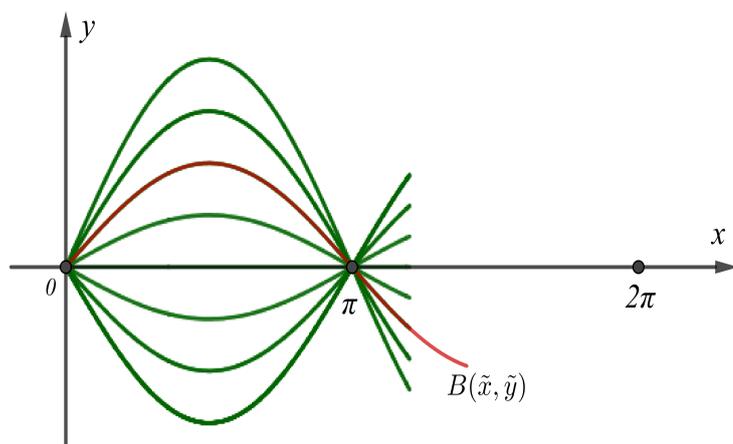


Figura 8: Família de senóides

Nessas condições o conjugado do ponto $O(0, 0)$ será o ponto $O^*(\pi, 0)$, estes pontos

poderão ser reunidos por um arco (na realidade, pelo de qualquer curva da família $y = 2\text{sen } x$) não compreendendo pontos do discriminante com abscissas $0 < x < \pi$ (Figura 8). Baseado no que definimos até então podemos enunciar a condição de Jacobi.

3.5.2 A condição de Jacobi

Dada, para um certo funcional a família de lagrangianas com origem em A , o arco AB de uma curva desta família satisfaz a chamada condição de Jacobi se AB não compreender conjugados de A^* do ponto A . Pode se mostrar que uma lagrangiana que atende a condição mencionada num determinado plano formam um campo. Pode-se mostrar que todo arco satisfazendo a condição de Jacobi pertence a um aberto no qual a família em questão forma um campo.

Em suma, para se construir um campo central de extremais com centro no ponto A que contenha o arco AB como extremo, é suficiente que o ponto A^* conjugado de A não pertença ao arco AB , essa possibilidade de construção de campos de extremais que inclua o extremo dado chama-se condição de Jacobi.

Definição 16. *Se denomina equação de Jacobi associada a uma lagrangiana $y = \tilde{y}(x)$ do funcional*

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

a equação diferencial em relação a $u(x)$ obtida e substituindo em

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx} (F_{y'y'} u') = 0 \quad (45)$$

e pela função dada $y = \tilde{y}(x)$.

Se pode demonstrar que a condição de Jacobi é necessária para que se alcance um extremo, ou seja, para a curva AB que realiza um extremo do ponto conjugado de A não pode estar no intervalo $x_0 < x < x_1$.

Exemplo 24. *Verificar se a condição de Jacobi é válida para o funcional*

$$J[y(x)] = \int_0^a [[y'(x)]^2 + x^2] dx$$

com $y(x) \in C^1[0, a]$ cujas extremidades são $A(0, 0)$ e $B(a, 3)$.

Independente da lagrangiana associada ao funcional acima, a equação de Jacobi terá o aspecto $u''(x) = 0$, visto que a primeira parcela da equação se anula, uma vez que o funcional não depende da função $y(x)$ explicitamente. Dai temos que

$$\int u''(x)dx = \int 0 dx \Leftrightarrow u'(x) = c_1 \Rightarrow \int u'(x)dx = \int c_1 dx \Leftrightarrow u(x) = c_1x + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes com $c_1 \neq 0$. Da condição inicial $u(0) = 0$ implica que $c_2 = 0$, dai obtemos $u(x) = c_1x$. A condição de Jacobi se cumpre uma vez que nenhuma $u(x)$ não se anula para $x > 0$, e cabe observar que a lagrangiana em questão, isto é, $y = \frac{3}{a}x$, faz parte do campo central das lagrangianas $y = c_1x$.

Exemplo 25. *Verificar para o funcional se a lagrangiana individualizada pelas condições de fronteira satisfaz a condição de Jacobi*

$$J[y(x)] = \int_0^a [[y'(x)]^2 - [y(x)]^2] dx,$$

onde $y(x) \in C^1[0, a]$ com as condições de fronteira $A(0, 0)$ e $B(a, 3)$.

A equação de Jacobi terá a forma

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \Rightarrow u'' + u = 0,$$

utilizando a função auxiliar para a EDO acima, temos que $u(x) = c_1 \text{sen}(x) + c_2 \text{cos}(x)$ e da condição $u(0) = 0$, se obtêm $u(x) = c_2 \text{sen}(x)$, como a função $u(x)$ se anula nos pontos $x = k \cdot \pi$ com $k \in \mathbb{Z}$; portanto, se $0 < a < \pi$, a função $u(x)$ se anula no segmento $0 \leq x \leq a$ somente no ponto $x = 0$ e a condição de Jacobi é satisfeita, porém se $a \geq \pi$, a função $u(x)$ se anula no segmento $0 \leq x \leq a$ também no ponto $x = \pi$, e a condição de Jacobi não é satisfeita, (ver Figura 7).

3.5.3 As condições de Weierstrass

Suponhamos que no problema simples sobre o extremo para o funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1$$

se cumpre a condição de Jacobi e, por consequência, a extremal C que passa pelos pontos A e B pode ser incluída em um campo central com inclinação igual a $p(x, y)$.

Pode-se analisar tal funcional por um *pequeno excesso* com a denominada equação de Weierstrass

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p). \quad (46)$$

Têm-se nessas notações que,

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y') dx. \quad (47)$$

Pela forma como se constrói a função excesso (*detalhes em [15]*), ou por uma análise do resultado final, é evidente que uma condição suficiente para que um funcional J tenha um mínimo na curva C é que a função E não seja negativa, $E \geq 0$ o que acarretará em $\Delta J \geq 0$, e uma condição suficiente para que tal curva seja máximo é se tivermos $E \leq 0$ daí teremos $\Delta J \leq 0$.

Para que haja um mínimo fraco é suficiente que $E(x, y, p, y') \geq 0$ (ou máximo se $E \leq 0$), se cumpra para valores de x e y próximos dos valores de x e y da extremal C analisada, e para valores de y' próximos a $p(x, y)$ na mesma extremal. Para que tenhamos um mínimo forte a condição de x e y serem próximos também deve se cumprir, mas para y' arbitrária, visto que no caso de extremo forte as curvas próximas têm direções arbitrárias para as tangentes, ou seja, a função E não muda o seu sinal em todos os pontos (x, y) próximo da curva C e para quaisquer valores de y' .

Deste modo, as seguintes condições serão suficientes para que o funcional J tenha um extremo na curva C .

Para um extremo fraco:

1. A curva C é uma extremal que satisfaz a Equação de Euler e as condições de fronteiras.
2. A extremal C poder ser incluída em um campo de extremas, ou seja, satisfaz a condição de Jacobi.
3. A função E não muda seu sinal em todos os pontos (x, y) próximos da curva C , e para valores de y' próximos a $p(x, y)$. Sendo mínimo caso $E \leq 0$, e máximo caso $E \geq 0$.

Para um extremo forte:

1. e 2. devem ser igualmente satisfeitos.
3. A função E não muda o seu sinal em todos os pontos (x, y) próximo da curva C e para quaisquer valores de y' .

Exemplo 26. *Analisar o comportamento do funcional*

$$J[y(x)] = \int_0^1 [x + 2y(x) + [y'(x)]^2] dx,$$

com $y(x) \in C^1[0, 1]$ e sujeitas as condições de fronteiras $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$.

Como $F_y = 2$ e $F_{y'} = 2y' \Rightarrow \frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}2y' = 2y''$, daí pela Equação de Euler

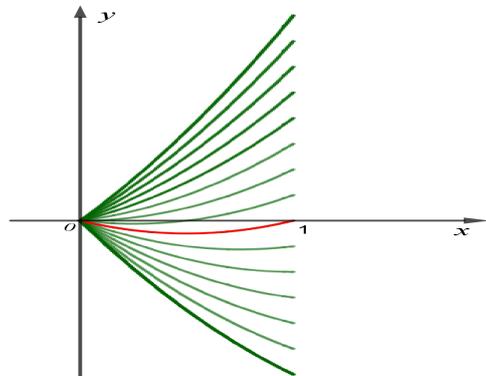
$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) &= 2 - 2y'' = 0 \\ \Leftrightarrow y'' &= 0, \end{aligned}$$

de onde temos que $y(x) = \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$ e pelas condições de fronteiras $y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ e de $y(1) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$, desse modo a lagrangiana que é solução do funcional é $y(x) = \frac{x^2 - x}{2}$.

Por outro lado, com relação a condição de Jacobi, temos que $F_{yy} = 0$, $F_{yy'} = 0$ e $F_{y'y'} = 2$. Assim, a Equação de Jacobi

$$\begin{aligned} \left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') &= -\frac{d}{dx}2u' = 0 \\ \Leftrightarrow u'' &= 0, \end{aligned}$$

de onde se obtêm $u(x) = c_1x + c_2$, nenhuma destas soluções que for não trivial e satisfazer a condição fronteira $u(0) = 0$ (donde $c_2 = 0$) se anulará no intervalo $[0, 1]$.



Logo, pode se incluir a lagrangiana $y(x) = \frac{x^2-x}{2}$ num campo central com centro em $(0, 0)$, notoriamente, este campo é $y(x, c) = \frac{x^2-cx}{2}$ (figura acima).

Já para a função de Weiestrass, tem-se

$$\begin{aligned}
 E(x, y, p, y') &= F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p) \\
 &= x + 2y + y'^2 - (x + 2y + p'^2) - (y' - p)2p \\
 &= y'^2 - p^2 - 2y'p + 2p^2 \\
 &= (y' - p)^2.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Logo, pela equação (48) temos que para quaisquer que sejam y' se cumprirá $E = (y' - p)^2 \geq 0$, portanto a função $y = \frac{x^2-x}{2}$ é um minimizante forte para o funcional J .

Exemplo 27. *Examinar o comportamento para o funcional*

$$\int_{-1}^1 [[y'(x)]^3 + [y'(x)]^2] dx,$$

com $y(x) \in C^1[-1, 1]$ sujeito as condições de fronteiras $y(-1) = -1$ e $y(1) = 3$.

Como o funcional depende somente de y' (caso particular da Equação de Euler), então pela equação (31), a solução geral será $y(x) = c_1x + c_2$. Pelas condição de fronteiras $y(-1) = -1$ e $y(1) = 3$ têm-se $c_2 = 1$ e $c_1 = 2$, logo a lagrangiana que é solução do funcional será

$$y(x) = 2x + 1. \tag{49}$$

É óbvio que a lagrangiana estará incluída num campo central $y(x, c) = C \cdot x + 1$ com centro no ponto $(0, 1)$ e que seus pontos de inclinação do campo será $P = 2$, desse modo, verificar a condição de Jacobi torna-se supérfluo.

Já com relação a função de Weiestrass,

$$\begin{aligned}
 E(x, y, p, y') &= F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p) \\
 &= y'^3 + y'^2 - (p^3 + p^2) - (y' - p)(3p^2 + 2p) \\
 &= y'^2 - 2py' + p^2 + y'3 - 3p^2y' + 2p^3 \\
 &= (y - p)^2(y' + 2p + 1).
 \end{aligned}$$

Nota-se que o primeiro fator é positivo para qualquer y' e o segundo fator é positivo

para y' próximas a 2. Logo, cumpre as condições de Weierstrass, sendo $E \geq 0$, sendo assim a função é um mínimo fraco para o funcional, visto que a função E muda de sinal quando a $y' < 5$, visto que $2p + 1 \leq 5$.

3.5.4 As condições de Legendre

Apesar de as condições de Weierstrass serem válidas para verificar se determinada função é um mínimo ou máximo de um certo funcional, nem sempre a sua aplicação em analisar a função E é algo simples. Por isso, seria de grande ajuda substituir as condições de Weierstrass por algum outro critério de fácil determinação.

Considerando que o funcional $F(x, y, y')$ seja derivável três vezes com relação a y' , e utilizando a fórmula de Taylor é possível conseguir um resultado de mais fácil verificação, tais condições são conhecidas como **condições de Legendre**.

Para que determinada função $y(x)$ seja um extremo fraco para um dado funcional, basta que o mesmo cumpra as condições 1 e 2 de Weierstrass, e além disso, para qualquer $x \in [x_0, x_1]$ a relação $F_{y'y'}(x, y, y') > 0$, implicando que $y(x)$ é um minimizante, ou se para qualquer $x \in [x_0, x_1]$ a relação $F_{y'y'}(x, y, y') < 0$, implicando que $y(x)$ é um maximizante.

Para que $y(x)$ seja um extremo forte, basta que se cumpra as condições 1 e 2 de Weierstrass e que se cumpra que as coordenadas x, y dos pontos de uma vizinhança de $y(x)$ e para qualquer valor atribuído a y' , a relação $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$, implicando que $y(x)$ é o minimizante, ou, se $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$ significando que $y(x)$ é um maximizante do dado funcional.

Retomaremos o exemplo anterior, para analisar o funcional segundo as condições de Legendre.

Exemplo 28. *Analisar o comportamento do funcional*

$$\int_{-1}^1 [[y'(x)]^3 + [y'(x)]^2] dx,$$

com $y(x) \in C^1[-1, 1]$ sujeito as condições de fronteiras $y(-1) = -1$ e $y(1) = 3$.

Como já feito anteriormente, temos que lagrangiana que atende as condições de fronteiras e de Jacobi, é a função $y(x) = 2x + 1$, conforme (49). Além disso, com relação as condições de Legendre temos,

$$F_{y'} = 3y'^2 + 2y' \Rightarrow F_{y'y'} = 6y' + 2, \quad (50)$$

aplicando (49) em (50), temos que

$$F_{y'y'} = 6y' + 2 = 6(2x + 1)' + 2 = 6(2) + 2 = 14 > 0.$$

Logo, a função $y(x) = 2x + 1$ é um mínimo fraco para o funcional dado.

Exemplo 29. *Analisar o comportamento do funcional*

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left[\frac{[y'(x)]^3}{2} + 3y(x) \right] dx,$$

com $y(x) \in C^1[0, 1]$ sujeito as condições de fronteiras $y(0) = 0$ e $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

Para o funcional dado devemos encontrar uma lagrangiana para o mesmo, para tal observe que, $F_y = 3$ e $F_{y'} = \frac{3y'^2}{2}$ daí $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y'^2}{2}\right) = 3y'y''$, assim a equação de Euler-Lagrange será

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) &= 3 - 3y'y'' = 0 \\ &\Leftrightarrow y'' \cdot y' = 1 \\ &\Leftrightarrow \int [y'' \cdot y'] dx = \int 1 dx, \end{aligned} \tag{51}$$

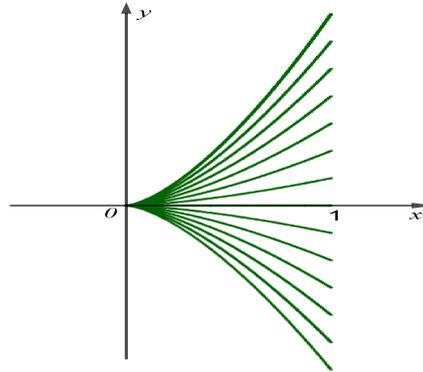
tomando a integral da equação (51), e para o 1º membro basta tomar a integral por partes $\int y'' \cdot y'$, onde $u = y' \Rightarrow \frac{du}{dx} = y''$ e $dv = y'' \Rightarrow v = y'$, assim $\int y'' \cdot y' = y' \cdot y' - \int y' \cdot y'' \Leftrightarrow 2 \int y'' \cdot y' = y'^2 \Leftrightarrow \int y'' \cdot y' = \frac{y'^2}{2}$, substituindo em (51), assim temos

$$\begin{aligned} \frac{y'^2}{2} &= x + c_1 \\ y' &= (2x + 2c_1)^{1/2} \\ \int y' dx &= \int [(2x + 2c_1)^{1/2}] dx \\ y(x) &= \frac{1}{3}(2x + 2c_1)^{3/2} + c_2, \end{aligned}$$

das condições de fronteiras $y(0) = 0$ e $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ têm-se que $c_1 = c_2 = 0$, daí concluímos que a lagrangiana correspondente ao funcional será

$$y(x) = \frac{1}{3}(2x)^{3/2}.$$

Como a lagrangiana associada ao funcional é a função $y(x) = \frac{1}{3}(2x)^{3/2}$ pode ser obviamente incluída no campo central de lagrangianas $y(x, C) = C(x)^{3/2}$, logo satisfaz a condição de Jacobi, conforme a figura ao lado.



Já para a condição de Legendre, para o funcional dado $F(x, y, y') = \frac{y^3}{2} + 3y$, temos que $F_{y'} = \frac{3y'^2}{2} \Rightarrow F_{y'y'} = 3y'$, como a lagrangiana é dada por $y(x) = \frac{1}{3}(2x)^{3/2}$, temos que

$$\begin{aligned} F_{y'y'} &= 3y' \\ &= 3 \left[\frac{1}{3}(2x)^{3/2} \right]' \\ &= 3(2x)^{1/2} \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Logo, a lagrangiana $y(x) = \frac{1}{3}(2x)^{3/2}$ é um mínimo fraco para o funcional, uma vez que $F_{y'y'} = 3y'$ muda de sinal ao variar de y' .

Note que, de maneira indireta, as condições de Legendre deixam a análise de mínimos e máximos de funcionais bem próximos (dentro do possível) ao já usual com o Cálculo Diferencial e Integral. Isto, pois no Cálculo Diferencial para decidirmos se certo ponto é um mínimo (ou máximo) de uma função recorreremos a análise da segunda derivada da função no ponto x_0 , se $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) têm-se um mínimo (ou máximo). E, de maneira ligeiramente rasa, é o que as condições de Legendre nos levam a considerar, levando em conta as diferenças básicas com relação aos objetos procurados.

4 Problemas Clássicos de Otimização

Nesta seção procuraremos abarcar o que construímos até então para discutir uma série de problemas clássicos de otimização, tal estudo se dará tendo como base [5], [16] e [26].

Iniciaremos retomando um problema que enunciamos anteriormente no Capítulo 3, e não o resolvemos, apenas esboçando qual seria o funcional que expressava tal problema dada pela equação (13).

4.1 Problema 1: Comprimento de arco

Considere dois pontos distintos A e B no mesmo plano. Qual o formato da curva, cuja distância entre eles seja a mínima?

Como discutido anteriormente, o funcional que deve proporcionar a solução para este problema é dado pela equação (13)

$$J[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Para tal, procuraremos mostrar qual a função $y(x)$ candidata a ser um mínimo para o funcional, ou seja, qual a função y que atende a equação Euler-Lagrange, sendo assim uma extremal.

Como $F_y = 0$ e $F_{y'} = \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-1/2} \cdot 2y' = y' \cdot (1 + y'^2)^{-1/2}$, temos que:

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) &= 0 - \frac{d}{dx} \left[y' \cdot (1 + y'^2)^{-1/2} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow y' \cdot (1 + y'^2)^{-1/2} &= C \\ \Leftrightarrow y(x) &= c_1 x + c_2, \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas pelas condições de fronteiras.

Sem muitos problemas é possível perceber que a lagrangiana $y(x) = c_1 x + c_2$ atende as condições de Jacobi, uma vez que a mesma pode ser incluída num campo central.

Já com relação a condição de Legendre, como $F_{y'} = y' \cdot (1 + y'^2)^{-1/2}$, temos que

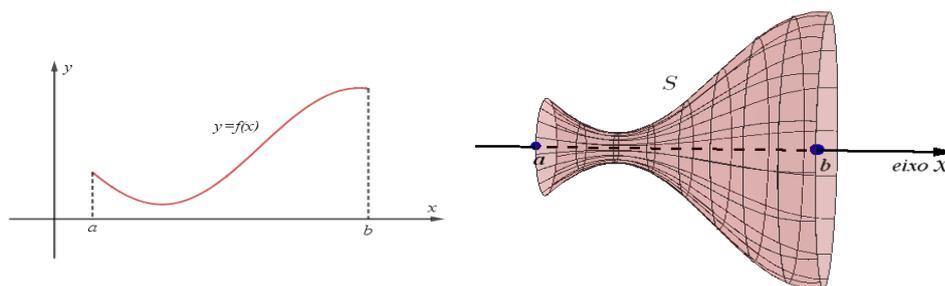
$$\begin{aligned} F_{y'y'} &= 1 \cdot (1 + y'^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \cdot (1 + y'^2)^{-3/2} \cdot 2y' \cdot y' \\ &= \frac{1}{(1 + y'^2)^{3/2}} > 0, \quad \forall y(x). \end{aligned}$$

Como $F_{y'y'} > 0$, e a função $y(x)$ atender as condições necessária (Eq. de Euler) e a de Jacobi, portanto $y(x)$ é um mínimo para o funcional, ou seja, dentre todas as curvas que ligam dois pontos distintos num mesmo plano, a curva $y(x) = c_1x + c_2$ (a *reta*) é aquela que minimiza tal percurso.

Cabe ressaltar, como destaca [19] que em se tratando de uma esfera ou num plano deformado, a curva procurada não será uma reta, pois esta necessariamente precisaria de um plano sem nenhuma deformação para ser a menor distância entre pontos, problemas dessa natureza são conhecidos como *Geodésicas*.

4.2 Problema 2: Superfície mínima de revolução

Consideremos uma superfície S , obtida através da rotação em torno do eixo x ligando dois pontos distintos A e B , conforme figura abaixo. Queremos determinar qual a curva S para que tenhamos uma superfície mínima de revolução.



(a) Curva

(b) Superfície rotacionada

Do cálculo diferencial e integral (ver [17]) obtemos que a área da superfície obtida pela rotação do gráfico de $y(x)$, em torno do eixo x é definida por

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (52)$$

onde $y' = \frac{dy}{dx}$ e a curva y é dada por uma equação do tipo $y = y(x)$.

Um candidato a extremo para o funcional S deve atender a Equação de Euler, como o funcional não depende explicitamente de x , como mostrado anteriormente em (32) temos que

$$\begin{aligned}
F - y'F_{y'} = C_1 &\Leftrightarrow y \cdot \sqrt{1 + y'^2} - y' \cdot y \cdot \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-1/2} \cdot 2y' = C_1 \\
&\Leftrightarrow y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y \cdot y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \\
&\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \\
&\Leftrightarrow y = C_1 \cdot \sqrt{1 + y'^2}.
\end{aligned} \tag{53}$$

Para solucionar tal equação diferencial, tomaremos $\frac{dy}{dx} = \text{senh}(t)$ substituindo em (53), desse modo temos

$$y(x) = C_1 \cdot \sqrt{1 + y'^2} = C_1 \cdot \sqrt{1 + \text{senh}^2(t)} = C_1 \cdot \text{cosh}(t).$$

Note ainda que podemos observar que

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'(x)} = \frac{C_1 \cdot \text{senh}(t)dt}{\text{senh}(t)} = C_1 dt \Rightarrow x = C_1 \cdot t + C_2.$$

A superfície buscada é formada pela revolução de uma curva, cuja equação na forma paramétrica é:

$$\begin{cases} x = C_1 \cdot t + C_2 \\ y[x(t)] = C_1 \cdot \text{cosh}(t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

eliminando o parâmetro t introduzido, temos:

$$y(x) = C_1 \cdot \text{cosh}\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right), \tag{54}$$

as constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno $y(a) = A$ e $y(b) = B$.

As curvas (54) são conhecidas como família de catenárias e são extremos do funcional e a superfície determinada por ela são catenóides, conforme *Figura 9*.

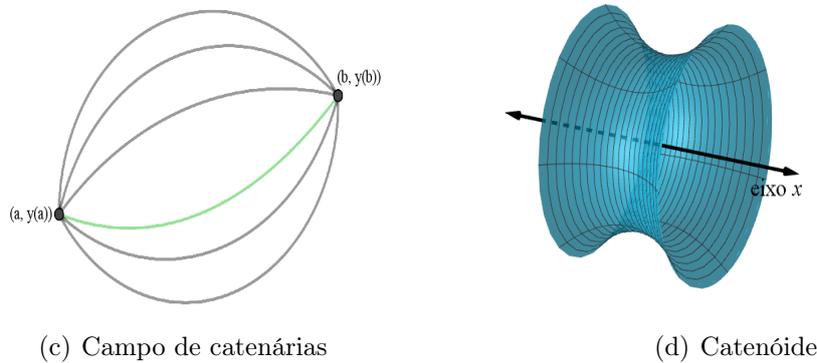


Figura 9: Superfície de revolução mínima

A solução para tal problema é de fato um mínimo, visto que, pelas condições de Legendre temos que

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{y'} &= y \cdot \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' \\ &= y \cdot y' (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

daí temos que

$$\begin{aligned} S_{y''} &= y \cdot \left[1 \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} + y' \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' \right] \\ &= y \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot [(1 + y'^2) - y'^2] \\ &= y \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Como $y(x) = C_1 \cdot \cosh\left(\frac{x-C_2}{C_1}\right)$ então $S_{y''} > 0$, isso para qualquer que seja y' , logo o mesmo é um mínimo forte.

4.3 Problema 3: Problema isoperímetro

Um dos mais antigos problemas de otimização dos quais se tem registro é o de encontrar a área máxima que pode ser delimitada por uma curva de perímetro fixo, como já citado anteriormente, o **problema de Dido**.

Para tal, é fato que a curva procurada deve ser convexa, visto que, caso contrário, poderia-se aumentar a área da região delimitada sem modificar o perímetro fazendo a substituição de qualquer arco côncavo \widehat{BCD} pelo seu simétrico em relação a uma secante, conforme a *Figura 10*. Desse modo, podemos abordar o problema de uma forma mais simples, que é o de encontrar a linha $y = y(x)$, $y(a) = y(-a) = 0$ de comprimento L , $L > 2a$, que delimita junto com o segmento $-a \leq x \leq a$ a região de área máxima.

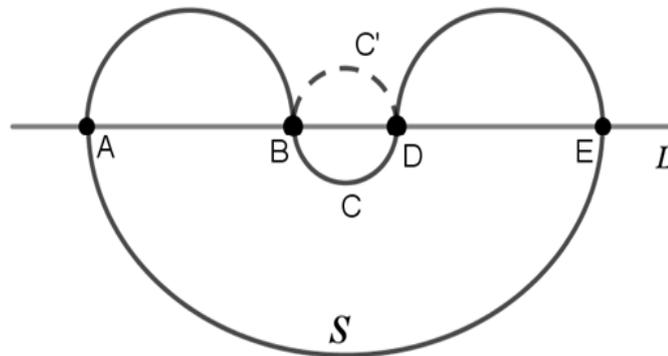


Figura 10: Ilustração mostrando que a curva solução do problema deve ser convexa.

Assim, o funcional para o problema citado deve ser

$$J[y(x)] = \int_{-a}^a y(x) dx$$

no domínio das funções para as quais

$$y(-a) = y(a) = 0,$$

$$K[y(x)] = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \ell \quad (\ell > 2a). \quad (55)$$

Como discutido na seção 3.4, podemos aplicar ao funcional acima o *Teorema 2 de Euler* para problemas variacionais com restrição. Bastando para isso, tomar

$$F^* = F + \lambda G = y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2(x)},$$

considera-se o funcional

$$J^*[y(x)] = \int_{-a}^a [y(x) + \lambda\sqrt{1+y'^2(x)}]dx.$$

Como $F_y^* = 1$ e $F_{y'}^* = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, daí pela equação de Euler têm-se

$$\begin{aligned} F_y^* - \frac{d}{dx} [F_{y'}^*] &= 1 - \frac{d}{dx} \left[\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= x + c_1 \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{x + c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + c_1)^2}}. \end{aligned}$$

Para a expressão acima, far-se-á uma substituição $u = \lambda^2 - (x + c_1)^2$ de onde se extrai que $\frac{-du}{2} = (x + c_1)dx$, desse modo se obtêm

$$\begin{aligned} \int y' dx &= \int \frac{-du}{2\sqrt{u}} \\ \int y' dx &= \frac{-1}{2} \int u^{-1/2} du \\ y &= -u^{1/2} - c_2 \\ y &= -\sqrt{\lambda^2 - (x + c_1)^2} - c_2 \\ \Leftrightarrow (y + c_2)^2 + (x + c_1)^2 &= \lambda^2. \end{aligned}$$

Portanto, a curva procurada é uma arco de circunferência de centro $(-c_1, -c_2)$ e raio λ , as constantes c_1 , c_2 e λ serão determinadas pelas condições de fronteiras $y(-a) = y(a) = 0$ e pela restrição (55). Assim, temos que

$$\begin{cases} c_2^2 + (a + c_1)^2 = \lambda^2 \\ c_2^2 + (-a + c_1)^2 = \lambda^2, \end{cases} \quad (56)$$

de (56) temos que $c_1 = 0$ o que implica em $c_2 = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$. Desse modo,

$$y(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2},$$

onde a é um ponto dado e para λ usaremos a restrição (55) de onde se tem que

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2(x)} dx &= \int_{-a}^a \sqrt{1 + \left[\sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2} \right]^2} dx = \ell \\
 &\Leftrightarrow \int_{-a}^a \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \right]^2} dx = \ell \\
 &\Leftrightarrow \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{\lambda^2 - x^2}} dx = \ell \\
 &\Leftrightarrow \int_{-a}^a \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \ell,
 \end{aligned}$$

tal integral é solucionada a partir de uma substituição trigonométrica, onde

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad x = \lambda \cdot \text{sen}(\theta) \Rightarrow dx = \lambda \cdot \cos(\theta) d\theta \text{ e } \theta = \text{arcsen} \left(\frac{x}{\lambda} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} &= \int_{-a}^a \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \lambda \cos(\theta) d\theta = \ell \\
 &\Leftrightarrow \lambda \int_{-a}^a d\theta = \ell \\
 &\Leftrightarrow \lambda \cdot \theta \Big|_{-a}^a = \ell, \text{ como } \theta = \text{arcsen} \left(\frac{x}{\lambda} \right) \\
 &\Leftrightarrow \lambda \cdot \left[\text{arcsen} \left(\frac{a}{\lambda} \right) - \text{arcsen} \left(\frac{-a}{\lambda} \right) \right] = \ell \tag{57} \\
 &\Leftrightarrow 2\lambda \cdot \text{arcsen} \left(\frac{a}{\lambda} \right) = \ell \\
 &\Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} = \text{sen} \left(\frac{\ell}{2\lambda} \right),
 \end{aligned}$$

a raiz $\lambda = \lambda_0$ para a equação (57) é o valor procurado para λ , assim $c_2 = \sqrt{\lambda_0^2 - a^2}$. Precisamos ver se λ_0 existe, de fato, para tal basta observar que se substituir $\frac{\ell}{2\lambda} = t \Rightarrow \lambda = \frac{\ell}{2t}$, de onde se tem que $\text{sen}(t) = \frac{2a}{\ell}t$ como $\frac{2a}{\ell} < 1$ o gráfico de $y = \text{sen}(t)$ e a reta $y = \frac{2a}{\ell}t$ se cortarão num ponto distinto da origem, logo existe λ_0 .

Portanto, a solução para o problema de Dido é um arco de circunferência com extremidades em $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, centro $(0, \sqrt{\lambda_0^2 - a^2})$ e raio λ_0 . Dependendo do com-

primento ℓ da curva, a solução para o problema será um arco de circunferência maior ou um arco de circunferência menor. Em virtude da lei de reciprocidade da solução do problema de Dido decorre que *de todos os contornos delimitando uma região de área dada o de menor comprimento será circular*.

E tal solução é um mínimo forte, uma vez que

$$\begin{aligned} F_{y'}^* &= \lambda y' \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ daí} \\ F_{y''}^* &= \lambda \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}} > 0, \forall y(x). \end{aligned} \quad (58)$$

Desse modo, dentre todas as curvas com perímetro fixo a que proporcionará a maior área será uma curva de formato circular, como (58) é válido para qualquer y' caracterizando assim um mínimo forte.

Ressaltamos que existem outros problemas com diferentes restrições que não analisaremos aqui, mas que vale muito apreciar. Por exemplo, como destaca [27], o *problema isovolumétrico*, tal problema é o de encontrar uma função $z(u, v)$ que minimizará o funcional área sujeito à restrição de um volume previamente dado.

Dada uma região D em \mathbb{R}^2 , e considerando que a superfície seja descrita por

$$X(u, v) = (u, v, z(u, v)),$$

com $z(u, v) \geq 0$, $(u, v) \in D$ e $z = 0$ em ∂D . Assim, o problema se baseia em determinar a superfície

$$S(z) = \iint_D \sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2} dudv,$$

sob a condição de um volume fixado

$$V = \iint_D z(u, v) dudv = V_0, \quad V_0 > 0. \quad (59)$$

Consideremos com anteriormente o funcional

$$F^* = S + V\lambda \Leftrightarrow F^* = \iint_D [\sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2} + z(u, v)] dvdu, \quad (60)$$

onde o multiplicador λ é determinado, dentre todas as constantes de integração, as condições de fronteira e a restrição para o volume, equação (59).

A obtenção de uma solução $z(u, v)$ para o caso geral é demasiadamente extenso, o que não faremos aqui, no entanto, o caso axissimétrico permite uma abordagem mais simples e direta, conforme [27]. O que permite concluir que similar ao problema isoperimétrico, a solução para este problema seja uma *esfera*.

Em resumo, o problema em sua forma mais simples, consiste em encontrar a superfície de menor área limitada por um contorno fechado no espaço e a esfera cumpre a menor área para um determinado volume fixado. Como destaca [28], um exemplo básico e que fora explorado a partir do século XIX, pelo físico J. A. F. Palteau (1801-1883), são as bolhas de sabão.

Muitos problemas ligados ao cálculo variacional tiveram importância ao longo do tempo, porém notoriamente o que ganhou maior destaque e foi motivo de uma imensa disputa entre os maiores matemáticos da história será discutido separadamente no próximo capítulo.

5 O Problema da Braquistócrona

A Braquistócrona é um problema que faz parte de todo o desenvolvimento do Cálculo de Variações [3], historicamente o problema sempre despertou o interesse de muitos estudiosos da época.

Em Julho de 1696, na revista *Acta Eruditorum*, fundada e mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz, o matemático suíço Jean Bernoulli apresentou um problema que logo despertou o interesse de seus colegas.

Leibniz espalhou o problema enviando-o por carta aos maiores matemáticos da época. A solução foi rapidamente encontrada por vários deles, inclusive o próprio Leibniz, além de Isaac Newton e os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Todos indicaram que a curva mais rápida, ou braquistócrona (*brachisto* = mais ligeiro, *chronos* = tempo), deveria ser uma cicloide, conforme [1].

5.1 A Braquistócrona

O problema da **Braquistócrona** consiste na determinação da trajetória de uma partícula com massa m que, partindo do repouso e sob a ação única da força da gravidade, passa de um ponto fixo A a um ponto fixo B num lapso de tempo mínimo, ver [4].

Consideramos um sistema de coordenadas onde A seja a origem, ou seja, os pontos relacionados ao problema são $A(0, 0)$ e $B(x_1, y_1)$. Observe o esquema abaixo que ilustra essa situação:

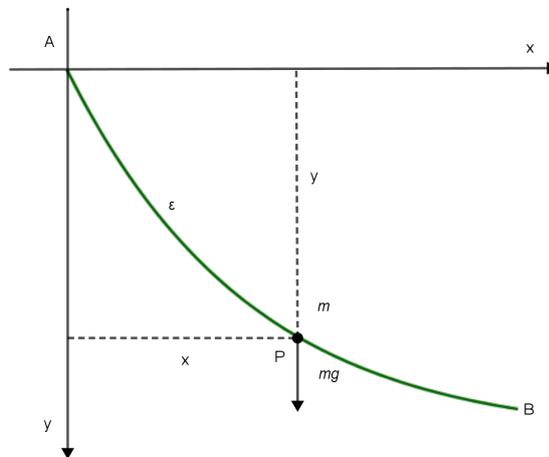


Figura 11: Esquema da Braquistócrona

Em física, quando uma partícula atua sob a ação da gravidade sem atrito, o trabalho realizado ao se deslocar de A até um ponto P é igual a variação da energia cinética.

Se v é o módulo da velocidade da partícula no ponto P , y o seu deslocamento vertical e m sua massa, temos:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2.$$

Mas, como a velocidade escalar é a variação do espaço percorrido s , pelo tempo, ou seja,

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \text{e} \quad v = \sqrt{2gy}. \quad (61)$$

Sabemos de (13) que o comprimento do arco entre $A(0,0)$ e $P(x,y)$, representado pelo gráfico da função $y = y(x)$, é dado por:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

que derivando, resulta em

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2(x)}. \quad (62)$$

Assim, denotando por t o tempo gasto neste trajeto e por (61) e (62), temos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2(x)}. \quad (63)$$

Para determinarmos o tempo total para se deslocar de $A(0,0)$ ao $P(x,y)$ basta integrar (63)

$$t[y(x)] = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx$$

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{y(x)}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (64)$$

Nosso problema é agora, encontrar a função $y(x)$ que minimiza (64), com as condições de fronteira dadas.

Observemos que este funcional não depende explicitamente de x e assim a Equação

de Euler terá a forma da equação de Beltrami, dada pela equação (32)

$$F - y'F_{y'} = C$$

Neste caso o funcional a ser considerado é $F(y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$. De onde se tem que

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}, \quad (65)$$

e substituindo na equação de Beltrami, temos

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C_1,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C_1,$$

ou seja,

$$y(1 + y'^2) = C_2. \quad (66)$$

Para resolver esta equação diferencial, vamos introduzir um parâmetro t considerando $y'(x(t)) = \cotg(t)$. Assim, utilizando a equação diferencial (66), obtemos

$$y = \frac{C_2}{1 + \cotg^2(t)}. \quad (67)$$

Usando relações trigonométricas,

$$\frac{1}{1 + \cotg^2(t)} = \frac{1}{1 + \frac{\cos^2(t)}{\sen^2(t)}} = \frac{1}{\frac{\sen^2(t) + \cos^2(t)}{\sen^2(t)}} = \frac{1}{\frac{1}{\sen^2(t)}} = \sen^2(t), \quad (68)$$

substituindo a equação (68) na (67),

$$y = C_2 \sen^2(t). \quad (69)$$

Além disso, como

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - \sin^2(t) - \sin^2(t) \Leftrightarrow \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad (70)$$

de onde se tem que

$$y = \frac{C_2}{2} (1 - \cos(2t)).$$

Desse modo, resta apenas determinarmos $x(t)$, para tal derivando y em relação a t , temos

$$\frac{dy}{dt} = C_2 \sin(2t) \Leftrightarrow dy = 2C_2 \sin(t) \cos(t) dt.$$

Como $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, então $dx = \frac{dy}{y'(x)}$, assim

$$dx = \frac{2C_2 \sin(t) \cos(t) dt}{\cot g(t)} = 2C_2 \sin^2(t) dt.$$

Fazendo a substituição trigonométrica (70), temos

$$dx = C_2 [1 - \cos(2t)] dt. \quad (71)$$

Integrando (71),

$$x(t) = C_2 t - \frac{C_2 \sin(2t)}{2} + C_3 = \frac{C_2}{2} [2t - \sin(2t)] + C_3.$$

Assim, a solução paramétrica é dada por:

$$y(t) = \frac{C_2}{2} [1 - \cos(2t)] \quad \text{e} \quad x(t) - C_3 = \frac{C_2}{2} [2t - \sin(2t)]$$

Fazendo $2t = t_1$ e sendo $C_3 = 0$ pois $x(0) = 0$, obtemos

$$y = \frac{C_2}{2} [1 - \cos(t_1)] \quad \text{e} \quad x = \frac{C_2}{2} [t_1 - \sin(t_1)]. \quad (72)$$

Essa equação paramétrica define uma curva que já definimos anteriormente, a cicloide, para tal basta considerar que $\frac{C_2}{2} = r$, onde r é o raio de uma circunferência.

É notório que a cicloide é de fato um mínimo. Isto devido, ao fato da condição de

Legendre, uma vez que da expressão (65) têm se

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y \cdot (1 + y'^2)}} \Leftrightarrow F_{y'} = y' \cdot [y(1 + y'^2)]^{-1/2},$$

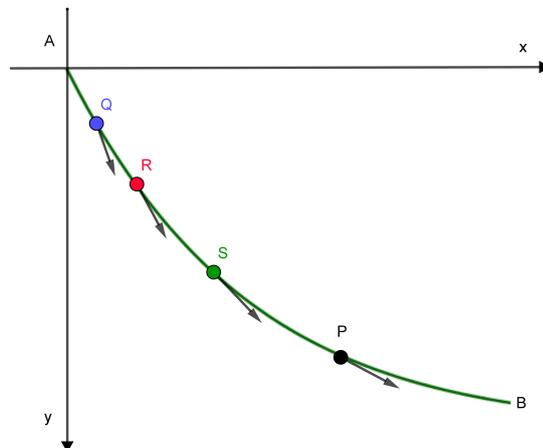
de onde temos que

$$\begin{aligned} F_{y'y'} &= 1 \cdot [y \cdot (1 + y'^2)]^{-1/2} + y' [y(1 + y'^2)]^{-3/2} 2y'y' \\ &= [y \cdot (1 + y'^2)]^{-3/2} [y(1 + y'^2) - y'^2 y] \\ &= [y \cdot (1 + y'^2)]^{-3/2} [y] \\ &= \frac{1}{\sqrt{y} (1 + y'^2)^{3/2}} > 0 \end{aligned}$$

isto para qualquer y' , assim o funcional é um mínimo forte, ou seja, para qualquer outra curva o tempo de deslocamento será superior àquele obtido quando se percorre a cicloide.

5.2 A propriedade Tautócrona

Além de ser a curva de menor tempo a cicloide ainda goza da propriedade de ser tautócrona. A tautócrona é a curva plana ao longo da qual uma partícula material atinge um ponto dado da trajetória num espaço de tempo que não depende do ponto de onde ela saiu (tauto = o mesmo, crono = tempo), veja [3]. Assim, a cicloide é a curva com o menor tempo e independente do local de início ambas partículas chegam ao final ao mesmo tempo. Veja a ilustração abaixo



Para mostrarmos que a cicloide é também tautócrona devemos obter uma equação que comprove que o tempo de queda não depende da posição inicial, sendo o mesmo para todos os pontos iniciais.

É possível obter tal expressão por meio de geometria e cinética, o primeiro a realizar tal feito foi o matemático holandês Huygens, ver [7]. Entretanto, para mostrar tal expressão, note que retomando a equação (72), e tomando $\frac{C_2}{2} = r$, temos

$$y = r [1 - \cos(t_1)] \quad \text{e} \quad x = r [t_1 - \text{sen}(t_1)].$$

Para ver que a cicloide satisfaz a propriedade de ser uma tautócrona, vamos usar as derivadas das equações acima:

$$x' = r[1 - \cos(t_1)]; \tag{73}$$

$$y' = r \cdot \text{sen}(t_1). \tag{74}$$

Elevando ao quadrado e somando (73) e (74), temos:

$$x'^2 + y'^2 = r^2 [[1 - 2\cos(t_1) + \cos^2(t_1)] + \text{sen}^2(t_1)],$$

simplificando a expressão acima

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= r^2 [2 - 2\cos(t_1)] \\ &= 2r^2 [1 - \cos(t_1)]. \end{aligned} \tag{75}$$

Aplicando a lei de conservação da energia mecânica, entre o ponto de chegada e uma altura inicial y podemos obter a equação (61), que retomamos aqui

$$v = \sqrt{2gy} \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

Assim, o tempo de queda será então dado por

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}},$$

usando o fato de $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ e substituindo as equações (75) e (72) na equação acima, temos

$$dt = \frac{r\sqrt{2[1 - \cos(t_1)]}}{\sqrt{2gr[1 - \cos(t_1)]}}d(t_1),$$

simplificando a equação acima, temos

$$dt = \sqrt{\frac{r}{g}}d(t_1),$$

onde g é a gravidade e r é o raio da circunferência do disco que originou a cicloide.

Então, o tempo T necessário para que a partícula se desloque do ponto mais alto para o mais baixo, será dado pela integração definida abaixo:

$$T = \int_0^\pi dt = \int_0^\pi \sqrt{\frac{r}{g}}dt_1 = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^\pi dt_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\pi.$$

Mas, para qualquer ponto t_n , sendo a velocidade da partícula no ponto mais baixo da curva e $P(x(t), y(t))$ um ponto genérico da curva de parâmetro t , com $t \in [t_0, \pi]$ será descrita por:

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0) \implies v = \sqrt{2g(y - y_0)},$$

usando a equação (72) para pontos y distintos, temos

$$\begin{aligned} y - y_0 &= r[1 - \cos(t)] - r[1 - \cos(t_0)] \\ &= r[\cos(t_0) - \cos(t)]. \end{aligned}$$

Assim, a integral que dá o tempo será:

$$T = \int_{t_0}^\pi \sqrt{\frac{2r^2[1 - \cos(t)]}{2rg[\cos(t_0) - \cos(t)]}}d(t),$$

simplificando temos:

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_0}^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{\cos(t_0) - \cos(t)}}d(t). \quad (76)$$

Lembrando as fórmulas dos ângulos metade:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}t\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(t)}{2}} \Leftrightarrow \cos(t) = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) - 1. \quad (77)$$

Assim substituindo (77) na equação (76)

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}t_0\right) - \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)}} dt \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}t_0\right) \sqrt{1 - \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{2}t_0\right)}}} dt. \end{aligned} \quad (78)$$

Fazendo a mudança de variáveis,

$$u = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}t_0\right)} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}t_0\right)} \Rightarrow -2 du = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}t_0\right)} dt, \quad (79)$$

note também que como $u(t_0) = 1$ e $u(\pi) = 0$, então redefinindo os limites e substituindo (79) em (78)

Então, substituindo na integral e redefinindo os limites de integração:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_1^0 -2 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} [\operatorname{arcsen}(u)]_0^1, \end{aligned}$$

substituindo os limites, finalmente obtemos:

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Portanto, o tempo de chegada de qualquer partícula pertencente a cicloide será o

mesmo independentemente do ponto de partida, ficando esse tempo fixado apenas pelo raio da circunferência que descreve a cicloide.

Por fim, salientamos que, como dito anteriormente, a braquistócrona é uma curva que nos leva a refletir o quão surpreendente é a matemática, uma vez que nem sempre as respostas mais esperadas (óbvias) são as corretas. Ora, é de se esperar que a menor distância seja o caminho mais rápido, além disso, quanto maior a distância entre duas partículas e o destino final é de se esperar que a mais próxima do ponto final cheguem primeiro, e, é surpreendente que esse fato não importe e ambas as partículas cheguem ao mesmo tempo.

Não só esse problema em particular, mas diversos outros problemas têm respostas tão inesperadas e desafiadoras, e por que não motivadoras.

6 Aplicação no Ensino Básico

Nesta seção iremos abarcar, dentro de uma perspectiva motivacional e desafiadora, algumas ideias e projetos de como trabalhar problemas ligados ao cálculo variacional com o Ensino Básico.

Ao pensar em tudo o que foi desenvolvido até aqui, o grande entrave é o de como apresentar problemas tão complexos e de soluções/cálculos extenuantes para alunos do Ensino Básico? É notório que a parte matemática mais densa deve ser omitida, para proporcionar ao aluno o entendimento da solução ou discussão do caminho para se encontrar a solução do mesmo.

Como destaca [24], tais propostas tem por objetivo motivar os alunos em sala de aula, e, ainda procurar despertar/aguçar a curiosidade para problemas matemáticos procurando estimular os alunos a não ver a matemática como algo maçante e decorração de procedimentos e fórmulas. Além disso, tal proposta deve motivar o docente, uma vez que o mesmo deve conhecer os problemas com mais detalhes e compreender as justificativas para tais soluções.

6.1 Problemas de otimização no Ensino Básico

Embora problemas de otimização tenham um aspecto um tanto quanto complexo para o ensino básico, cabe ao professor desenvolver uma maneira que torne possível “traduzir” problemas variacionais para os educandos.

Apresentamos a seguir algumas alternativas para o professor abordar com alunos a partir do 7º ano do ensino fundamental. A escolha de tal público se deve ao fato de aqui procurarmos tentar aproximar/motivar alunos do ensino básico o mais breve possível, e ao analisar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de matemática, [23], observamos que é nessa etapa que os alunos têm conhecimentos matemáticos mínimos necessários, para compreender o que são: ponto, reta, plano, perímetro, área de figuras planas básicas (por meio da contagem de unidades quadradas); e reconhecer figuras planas básicas (triângulos, quadriláteros, círculos entre outras).

Para discutir os problemas que apresentamos mais adiante, fez necessário um guia de análise na forma de um questionário (Anexo A). Tal questionário tem por objetivo captar a percepção dos alunos com relação aos problemas. Em alguns momentos essa percepção é com relação a intuição dos alunos, outras posteriormente aos experimentos.

Para o presente estudo iremos analisar os seguintes problemas:

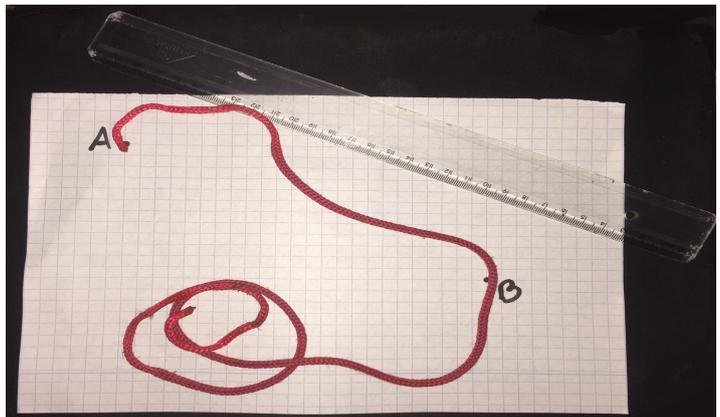
- 1A. Qual a menor distância entre dois pontos, distintos, no mesmo plano?
- 1B. Qual a menor distância entre dois pontos, distintos, numa superfície esférica?
2. (O problema de Dido) - Dado um perímetro fixo, qual a curva que tem a maior área possível?
3. (O problema da bolha de sabão) - Procurar analisar e discutir se o formato da argola influencia na forma do sólido gerado?
4. (O problema da braquistócrona) - Dado dois pontos distintos A e B , qual a curva sujeita apenas a força da gravidade que minimiza o tempo de deslocamento entre esses pontos?
5. Analisar a propriedade Tautócrona da braquistócrona.

Antes de discutir os problemas com os discentes é intrínseco discutir o que denominamos por problemas de otimização, para posteriormente propor a análise dos mesmos.

6.1.1 Distância entre dois pontos

Material necessário:

- Papel quadriculado;
- Barbante;
- Régua ou fita métrica.



Marque sobre o papel quadriculado dois pontos distintos A e B . Utilizando o barbante, como as possíveis curvas soluções, procure determinar qual o formato da menor curva que liga os pontos. A régua tem a função de medir as curvas para verificar se a mesma é menor.

Como a curva (o barbante) é de fácil manipulação é possível explorar não só o formato da curva num plano, mas também numa superfície esférica e/ou cilíndrica. Para

a superfície esférica sugerimos usar um globo terrestre é marcar dois pontos distintos sobre o mesmo, e solicitar aos alunos que procurem qual seria a curva com a menor distância possível entre os pontos. Lembramos que essa será um oportunidade ímpar de explorar os diferentes planos e suas respectivas soluções.

Relato da experiência:

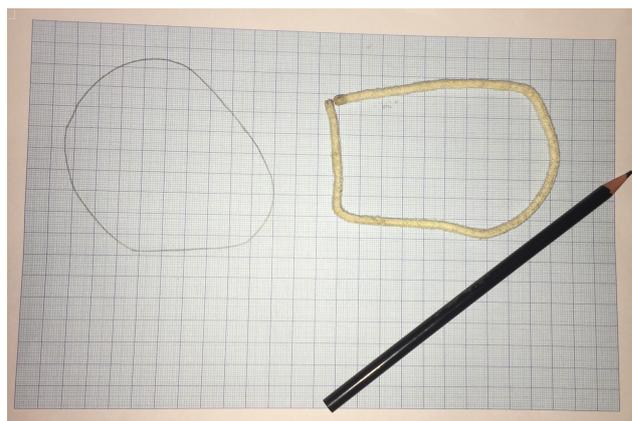
Com os alunos do 7º ano foi possível perceber que o problema 1A (em anexo) não demorou a ser resolvido, ou seja, todos perceberam que se tratava de um problema de otimização, visto que procurávamos um mínimo entre A e B, cuja solução indicaram ser uma reta. Ao serem questionados sobre o tamanho da curva (*item b*) a grande maioria não percebeu que existiam outros caminhos que a curva poderia percorrer, diferentes de uma reta. Já com relação ao fato de a superfície influenciar no formato da curva (*item d*), 80% afirmaram que uma reta ainda seria o tal mínimo.

Já, quando foram solicitados a procurar qual a menor distância entre dois pontos no globo esférico, o problema 1B, apesar de terem encontrado via experimento a curva que minimiza a distância entre os pontos, não souberam definir ao certo qual seria a opção correta para o formato dessa curva, as marcações que mais ocorreram foram: reta, linha curva e parte de um círculo. Porém, quando questionados novamente sobre se a superfície influenciava no formato da curva (*item h*), 90% reconheceram que a forma da curva muda dependendo da superfície em que estejam os dois pontos.

6.1.2 O problema de Dido

Material necessário:

- Papel milimetrado;
- Barbante de comprimento fixo;
- Lápis.



Esta é uma atividade para se realizar em duplas. Primeiro, estabeleça um tamanho para a curva (o barbante), ou seja, determine um perímetro para a figura plana.

Posteriormente solicite as duplas que tentem estabelecer uma forma fechada para a

qual se tenha a maior área possível. Depois de escolhida a suposta forma usa-se o lápis para marcar a forma internamente, isto pois a espessura do barbante pode dificultar o estabelecimento da área. Para determinar a área da forma pode-se usar o cálculo com o qual já estejam habituados ou por processo de contagem de unidades quadradas.

Nessa atividade ainda podem ser explorados formas abertas ou fechadas, côncavas ou convexas (ressaltando que formas convexas produziram áreas maiores que as côncavas), formas regulares ou irregulares e ainda a composição e decomposição das formas planas para se determinar áreas.

Relato da experiência:

Nesta atividade, apesar de, no problema 2, já estar descrito o que procurávamos, foi necessário uma certa adaptação à realidade dos alunos. A maioria dos grupos testou as possíveis respostas ao problema uma a uma, cerca de 82% concluíram que a solução deveria ser um círculo e as áreas obtidas variaram entre 67 e 74 unidades quadradas, como o barbante utilizando tinha 30 cm de comprimento, então a maior área seria aproximadamente 71,62 unidades quadradas, o que mostra que as soluções via experimento não destoaram muito com relação a solução por meio do cálculo da área.

Com relação ao formato da curva, (*item b*), nenhum grupo teve problemas em perceber que apesar de limitados por um perímetro fixo as áreas variavam mesmo que um pouco, e isso ocorrendo até em figuras de mesmo formato. Um grande entrave ocorreu com os grupos que exploraram formatos indefinidos, isto pois o processo de aproximação se mostrou enfadonho para os alunos.

6.1.3 Problema da superfície mínima

Material necessário:

- Líquido de bolha de sabão^a;
- 10 canudos;
- Arame;
- Celular



^aPara o líquido da bolha de sabão, sugerimos que contenha 1 parte de glucose de milho +2 partes de detergente +3 partes de água, a glucose de milho tem a função de fazer com que a bolha de sabão demore mais a estourar.

Esta é uma atividade para ser desenvolvida em duplas. O objetivo desse experimento é observar qual o formato que uma bolha de sabão adquire independente do aro que a faz.

Prepare o líquido para a bolha de sabão, conforme a sugestão, um dia antes. Posteriormente, corte os canudos em pedaços de tamanho iguais e passe o arame recozido por dentro dos pedaços de canudos. A quantidade de pedaços de canudos irá depender do formato desejado para a ponta do aro para se fazer a bolha, por exemplo: aro triangular, quadrangular usa-se 3 ou 4 canudos, respectivamente. A ideia central é questioná-los com relação ao fato de os aros influenciarem ou não o formato da bolha de sabão e posteriormente testar formato a formato. É recomendado o uso do celular para gravar em *câmera lenta* as bolhas de sabão sendo formadas, isto pois é possível perceber o formato irregular do sólido tornando-se esférico.

É possível aqui também explorar a visualização da superfície mínima de revolução, o catenóide, para tanto basta tomar duas circunferências construídas com o arame recozido. E ao mergulhar uma dentro da outra e puxar formando assim um catenóide.

Um outro quesito que pode ser abordado é o fato de se observar a “colaração incomum” na bolha de sabão, o furto de cor, tal fato se deve a intersecção entre as refrações de duas camadas que existem ao se formar as películas da bolha de sabão. Esta observação pode ser melhor explorada principalmente a nível de ensino médio, porém dois alunos do grupo de experimento questionaram sobre esse fato, ou seja, do 7º ano.

Relato do experimento:

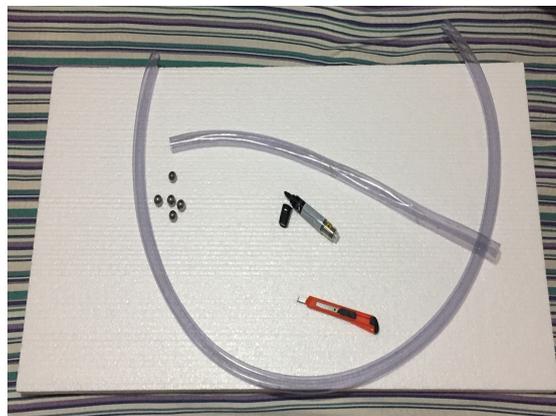
Neste experimento, o problema 3, os grupos não tiveram discordância com relação ao formato que a bolha de sabão teria independentemente da forma que a gerava (*itens a, b, c, d*), logo indicaram que o formato seria esférico, isto se ocorreu devido a própria experiência que os alunos já tinham com as bolhas de sabão.

Porém, com relação a, tentar explicar o motivo da bolha de sabão ser esférica, nenhum grupo foi capaz de argumentar o porquê desse fato. A grande maioria das respostas foram, “pelo ar que se acumula no interior”, “nunca havia pensado nisso”, ou simplesmente “porque sim”. Depois de observar as respostas dos grupos e conversar com os mesmos, ficou claro que nenhum grupo foi capaz de perceber a ligação desse problema com otimização. Esta talvez tenha sido a experiência mais aguçadora para os alunos, uma vez que algo tão corriqueiro em suas vidas tenha a matemática ligada de alguma forma.

6.1.4 O problema da braquistócrona

Material necessário:

- Placa de isopor de $25\text{mm} \times 50\text{cm} \times 100\text{cm}$;
- 4 mangueiras transparentes ($3/4$) de 77 a 90 cm ;
- Fita dupla face;
- Esfera pequena de metal;
- Celular;
- Cronometro;
- Lápis ou canetinha.



Esta atividade deve ser realizada em dupla ou grupo. Primeiro, marque no isopor dois pontos distintos não lineares A e B com a distância entre eles sendo de 76 cm uma vez que os pedaços de mangueira terão entre 77 e 90 cm . Como a mangueira é de fácil modelação esta fará o papel da curva. Construa pelos menos 4 alternativas de percurso que a esfera poderá percorrer para se deslocar entre os dois pontos. Para o nosso experimento, foram construídos: reta, parábola, cicloide e a função $1/x^4$ (outra curva), conforme anexo B.

Depois de escolher o formato da curva, a canetinha tem a função de marcar internamente (ou externamente) a curva para facilitar a fixação da mangueira com a fita dupla face sobre o isopor. A fita dupla face tem a função de manter a mangueira fixa com relação a uma certa curvatura ou assegurar que a mangueira comece em A e passe por B , deve-se usar quantos pedaços de fita forem necessários para se manter firme a forma da curva escolhida.

Depois de explicar o problema para os alunos, que consiste em escolher uma curva para a qual ao soltar a esfera no ponto A a mesma percorre a curva no menor tempo possível até o ponto B .

A dupla ou grupo devem organizar-se, de modo que, alguém fique responsável por colocar a esfera dentro da mangueira no ponto A e quando isso acontece usa-se o celular para gravar a esfera realizando o movimento, recomenda-se gravar o vídeo em câmera lenta. Depois observa-se o vídeo e com o cronometro faz-se as anotações dos tempos de percurso.

Nesta atividade, convém que o professor já tenha feito a solução anteriormente para comparar com as soluções encontradas pelos alunos.

Para mostrar que a cicloide possui a propriedade de ser tautócrona, pode-se abrir pequenos buracos (para soltar a esfera a partir desses) ao longo da cicloide para mostrar que independente do local onde se inicia o movimento o tempo será o mesmo.

Relato do experimento:

Conforme em anexo, o problema 4, iniciamos pedindo aos alunos que a partir de sua análise inicial, sem realizar o experimento, decidirem qual seria a solução para o problema. Uma boa parte dos grupos, cerca de 56% escolheram a reta, 25% a outra curva ³, tais escolhas ocorreram respectivamente, por ser o caminho mais curto (logo o mais rápido) e por causa da inclinação inicial ser quase vertical. Com relação, as outras alternativas, 10% escolheram que todas gastariam o mesmo tempo, 5% a cicloide e 4% a parábola.

Após os experimentos, que comprovaram que, os 5% que escolheram a cicloide estavam corretos, geraram bastante questionamentos sobre quais os motivos que levaram a cicloide a ser a solução para o problema e não as outras curvas. Para tal, tentamos mostrar que a curvatura inicial é importante, assim a cicloide leva vantagem sobre a reta, e mesma leva vantagem sobre a outra curva (*a funo* $1/x^4$) no final do percurso, uma vez que, uma é praticamente horizontal a outra ainda mantém uma certa inclinação.

E a “cereja do bolo”, certamente foi, o problema 5 que versa sobre a propriedade tautócrona da cicloide. Sem hesitar todos os grupos indicaram que o menor tempo de percurso seria de A_4 até B , e maior tempo seria de A até B , tais escolhas se deram por, quanto mais próximo do ponto de chegada menor o tempo e quanto mais longe do ponto de chegada maior seria o tempo, respectivamente. Após experimento, que fez cair por terra as expectativas deles, mostrando que independentemente do local de início a esfera demoraria o mesmo tempo. Essa propriedade os fez refletir sobre o quanto a inclinação influencia na velocidade da esfera ao longo da curva.

³Tal nomenclatura se deu pelo fato dos alunos que participaram dos experimentos, não terem conhecimento sobre funções até então.

7 Considerações Finais

A matemática deve ser percebida como ciência das relações, uma vez que a mesma está presente nos mais diversos contextos sociais e culturais. Apesar da matemática estar relacionada/conectada com uma grande parcela de tudo que se faz no cotidiano, essa relação é muitas vezes negligenciada e a mesma é vista, ainda por muitos, como sem aplicação ou relação com o dia a dia.

Procurando romper com esses paradigmas o presente trabalho procurou apresentar um conteúdo avançado/complexo, o Cálculo Variacional, e suas diversas aplicações no dia a dia, como por exemplo: a forma de uma pista de um half ou o formato de uma bolha de sabão, entre outras. E, relacionar a matemática com esses fatos que parecem não haver conexão alguma é clarificar que o modo como percebe-se a matemática é raso, procurar motivar os alunos a apreciá-la.

Os experimentos e problemas de otimização, presente no capítulo 6, desenvolvidos com os alunos se mostraram como verdadeiros elos, que correlacionam a matemática com suas diversas aplicações. O público alvo se mostrou mais interessado em apreciar a matemática (ou seus problemas) a posteriori as primeiras atividades experimentais.

Cabe ressaltar que o problema da braquistócrona e o da “bolha de sabão” foram os experimentos que mais renderam comentários e surpreenderam os alunos, uma vez que, enquanto a braquistócrona vai em contra mão ao esperado (a reta) e a surpreendente propriedade tautócrona a “bolha de sabão” ocupa o posto de “Verdade, nunca parei para pensar nisso...” (fala de alguns grupos).

Em suma, romper com esses paradigmas com relação a matemática, não necessariamente depende do conteúdo, basta para tanto o docente preparar ou orientar algo que desperte a curiosidade nos alunos. Essas e outras diversas estratégias são as que podem fazer com que o gosto pela matemática alastra-se, diferentemente daquela velha visão que muitos têm das aulas de matemática: “conceito + exemplos + exercícios”.

Referências

- [1] BATISTA, GRACILIANO DA SILVEIRA E EVANGELISTA, JOSÉ MOREIRA, *Experiências com a Braquistócrona*/Graciliano da S. Batista, Cleuton Freire e José Evangelista Moreira. Fortaleza: Seara da Ciência, 2006.
- [2] DELGADO, JORGE, *Geometria analítica*, Jorge Delgado, Kátia Frensel, Lhaylla Crissaff. - Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [3] COELHO, REJEANE ALEXANDRE, *A História dos problemas da tautócrona e da braquistócrona*, Rejeane Alexandre Coelho. - Rio Claro, SP: UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro , 2008.
- [4] KRASNOV, M.L., *Cálculo Variacional*, M.L. Krasnov, G.I. Makarenko, A.I. Kiseliiov. Traduzido por M. Dombrovsky - Rio de Janeiro: Editora Mir. Moscovo, 1984.
- [5] TROUTMAN, JOHN L., *Variational calculus and optimal control: Optimization with elementary convexity*, John L. Troutman. 2nd edition. - (Undergraduate texts in mathematics. Readings in mathematics.) Editora Springer. New York, 1995.
- [6] CAETANO, WELLINGTON DE LIMA, *Queda em curvas de menor tempo e tempo independente da altura - Braquistócrona e Tautócrona*, Wellington de Lima Caetano. - Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física Gleb Wataghim, 2008.
- [7] YODER, G. J., *Unrolling Time ? Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*, G.J. Yoder - Cambrigde: Cambrigde University Press, 1988.
- [8] FRENSEL, KÁTIA, *Geometria analítica*, Kátia e Jorge Delgado. - NEAD - Núcleo de Educação a Distância Curso de Licenciatura em Matemática UFMA, 2011.
- [9] FARINA, CARLOS, *Huygens a Helena da Geometria e o Aprisionamento do Tempo*, Carlos Farina. Universidade Federal do Rio de Janeiro (2013).
- [10] GILLISPIE, CHARLES COULSTON (ORG.), *Dicionário de Biografias Científicas*, Charles Coulston Gillispie. Ed. Contraponto. Rio de Janeiro, 2007.

- [11] EVES, HOWARD, *Introdução à história da matemática*, Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. - 3ª ed. - Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.
- [12] VENCESLAU, ALLISSON WESLEY DO NASCIMENTO, *Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações*, Allisson Wesley do Nascimento Venceslau; orientadora Débora Lopes da Silva. - São Cristóvão, 2015.
- [13] CASTRO, LEONARDO MIRANDA DE, *O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloides*, Leonardo Miranda de Castro. - Universidade de Brasília Instituto de Ciências exatas, 2014.
- [14] MACEDO, DANIEL LEAL, *Aplicações do Cálculo Variacional: Braquistócrona e o Princípio de Fermat*, Daniel Leal Macedo. Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física "Gleb Wataghin", 2004.
- [15] ELSGOLTZ, L, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. 1.*, L. Elsgoltz. ed. Moscou: Mir, 1969.
- [16] LIMA, GABRIEL LOUREIRO DE, *Cálculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos*, Gabriel Loureiro de Lima. Campinas, [S.P. s.n], 2004.
- [17] FLORES, ANA PAULA X., *Cálculo variacional: aspectos teóricos e aplicações*, Ana Paula Ximenes Flores. Rio Claro: [s.n.], 2011.
- [18] SOUSA, JOSÉ RIBAMAR ALVES DE, *O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona*, José Ribamar Alves de Sousa. - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2008.
- [19] LIMA, JOSÉ ALEX FERREIRA, *O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona*, José Alex Ferreira Lima. - Faculdade Jesus Maria José - Brasília, 2012.
- [20] SILVA, SEVERINO HORÁCIO DA, *Cálculo Variacional e Aplicações à mecânica celeste*, Severino Horácio da Silva. - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.
- [21] USP, EDISCIPLINAS, *Equações Diferenciais de Segunda Ordem*. Disponível em: < https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3593400/mod_resource/content/2/17.1 > Acesso em: 2019 março.

- [22] PADILHA ET AL., ADRIANO, *Significados*. Disponível em: < [https : https : //www.significados.com.br/otimizacao/](https://www.significados.com.br/otimizacao/) > Acesso em: julho de 2019.
- [23] CASTRO ET AL., MARIA HELENA GUIMARÃES DE , *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: < [http : //basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_10518_versaofinal_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_10518_versaofinal_site.pdf) > Acesso em: junho de 2019.
- [24] BIANHI, SARA REBECCA, *A importância da motivação na aprendizagem no ensino fundamental*, Sara Rebecca Bianhi. UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM PEDAGOGIA - São Carlos, SP : [s.n.], 2011.
- [25] CAMPOS, CAROLINE APARECIDA DE LARA, *Algumas aplicações de cálculo variacional : da braquistócrona a desigualdade de Hardy-Sobolev*, Caroline Aparecida de Lara Campos. - Campinas, SP : [s.n.], 2017.
- [26] ARAGON, FLÁVIO FERRARI, *Cálculo Variacional e aplicações*, Flávio Ferrari Aragon. - UNICAMP, Campinas, SP : [s.n.], 1980.
- [27] PRÉVE, DEISON TEIXEIRA, *Problemas variacionais isoperimétricos com soluções de revolução descontínuas*, Deison Teixeira Prevé. - Campinas, SP: [s.n.], 2015.
- [28] MELO, MARCOS; ANDRADE, LUCIMARA. *Superfícies mínimas e bolhas de sabão no Ensino Médio*. Revista Thema, [S.l.], v. 15, n. 1, p. 51-62, mar. 2018. ISSN 2177-2894. Disponível em: <<http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/813/722>>. Acesso em: 06 ago. 2019. doi:<http://dx.doi.org/10.15536/thema.15.2018.51-62.813>.

8 Anexo A - Questionário dos Experimentos

Problema 1 A– Dados dois pontos distintos A e B no mesmo plano, conforme na folha quadriculada, responda:

- a) Qual o formato da curva que representa a menor distância entre esses dois pontos?
*Observação: vocês podem usar ou não toda a curva, ok...
- um triângulo
 - uma reta
 - parte de um círculo
 - uma linha curva
 - nenhuma das alternativas
- b) O tamanho da curva que liga esses dois pontos é sempre igual? (justifique)
- c) Qual o valor em centímetros da menor distância entre esses dois pontos?
- d) Independente da superfície onde estejam esses dois pontos, a menor distância entre dois pontos será sempre a mesma curva?

Problema 1 B- Dados dois pontos distintos A (Brasília) e B (Índia - Nova Délhi) na superfície esférica, conforme no globo terrestre, responda:

- e) Qual o formato da curva que representa a menor distância entre esses dois pontos?
- um triângulo
 - uma reta
 - parte de um círculo
 - uma linha curva
 - nenhuma das alternativas
- f) O tamanho da curva que liga esses dois pontos é sempre igual? (justifique)
- g) Qual o valor em centímetros da menor distância entre esses dois pontos?
- h) Independente da superfície onde estejam esses dois pontos, a menor distância entre dois pontos será sempre a mesma curva?

Problema 2- Dado uma curva de comprimento fixo, responda:

- a) Escolha uma forma para a curva de modo que tenhamos a maior área possível.
- Um triângulo
 - Um quadrado
 - Um retângulo
 - Um círculo
 - Um semicírculo
 - Um pentágono
 - Um formato indefinido
- b) Independe do formato da curva a área será sempre igual? (justifique)
- c) Qual o maior valor da área obtida?

Problema 3 – Bolha de sabão e suas várias formas que as geram.

- a) Utilizando a forma triangular para gerar a bolha de sabão, teremos:
- Uma esfera
 - Uma pirâmide
 - Um cubo
 - Algo indefinido
- b) Utilizando a forma quadrangular para gerar a bolha de sabão, teremos:
- Uma esfera
 - Uma pirâmide
 - Um cubo
 - Algo indefinido
- c) Utilizando a forma pentagonal para gerar a bolha de sabão, teremos:
- Uma esfera
 - Uma pirâmide
 - Um cubo
 - Algo indefinido
- d) Utilizando a forma circular para gerar a bolha de sabão, teremos:
- Uma esfera
 - Uma pirâmide
 - Um cubo
 - Algo indefinido

#Após a experiência#

- e) Na opinião do grupo, qual o motivo para a bolha de sabão ser uma esfera?

Problema 4- Dados dois pontos distintos A e B, no mesmo plano.

- a) Qual o formato da curva que uma esfera deve percorrer para ir de A até B no menor tempo possível?
- A reta
 - A cicloide
 - A parábola
 - Outra curva
 - Todas gastaram o mesmo tempo.

#Após o experimento#

- b) O que justifica a curva _____ ser a solução para o problema?
- c) Qual foi o menor tempo gasto em tal percurso?

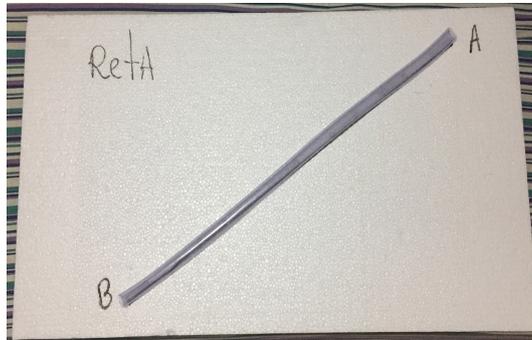
Problema 5- Considerando os pontos de partidas A, A_1 , A_2 , A_3 e A_4 e o ponto B como ponto de chegada, responda:

- a) Qual dos pontos de partida devemos escolher para que a esfera chegue em B, gastando o menor tempo possível? (justifique)
- b) Qual dos pontos de partida devemos escolher para que a esfera chegue em B, gastando o maior tempo possível? (justifique)

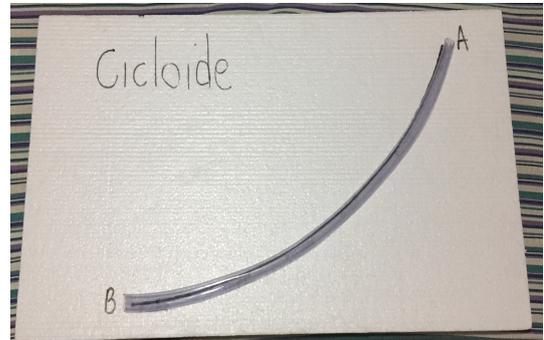
#Após o experimento#

- c) O que justifica a resposta para o experimento acima?

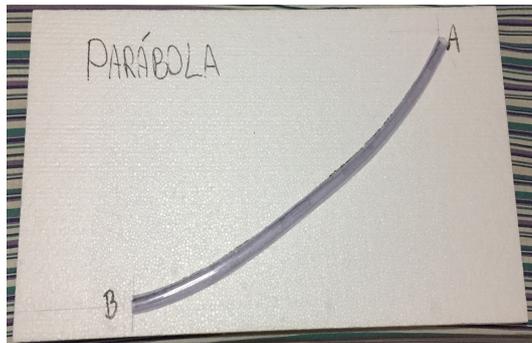
9 Anexo B - Fotos de Curvas dos Experimentos



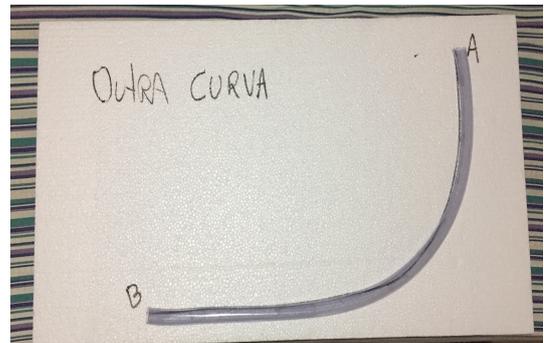
(a) Reta



(b) Cicloide



(c) Parábola



(d) Função $\frac{1}{x^4}$