Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E APLICAÇÕES ESPECÍFICAS AO ENSINO

OSCAR JOAQUIM DA SILVA NETO

Goiânia

2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Oscar Joaquim da Silva Neto.

Título do trabalho: Conceitos Básicos de Análise Combinatória e Aplicações específicas ao Ensino.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Oscar Joaquim da S. Neto.
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Elias Moreira Vargas
Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 20 / 11 / 19

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

OSCAR JOAQUIM DA SILVA NETO

CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E APLICAÇÕES ESPECÍFICAS AO ENSINO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Tiago Moreira Vargas

Goiânia

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Joaquim da Silva Neto, Oscar
Conceitos Básicos de Análise Combinatória e Aplicações Específicas ao Ensino [manuscrito] / Oscar Joaquim da Silva Neto. - 2019.
XLVI, 46 f.

Orientador: Profa. Dra. Tiago Moreira Vargas.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2019.
Bibliografia. Anexos.
Inclui lista de figuras.

1. Análise Combinatória. 2. Soroban. 3. Alunos Cegos. I. Vargas, Tiago Moreira , orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata 12 da sessão de Defesa de Dissertação de **Oscar Joaquim da Silva Neto**, que confere o título de Mestre em Matemática em Rede PROFMAT.

Aos vinte e nove dias do mês de outubro de dois mil e dezenove, a partir das 14: 00 **horas**, no LEMAT - IME/UFG, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Conceitos Básicos de Análise Combinatória e Aplicações Específicas ao Ensino"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Tiago Moreira Vargas (IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora **. Thaynara Arielly de Lima (IME/UFG), professor doutor Valdivino Vargas Júnior (IME/UFG) e** membro titular externo; professor doutor **Hugo Leonardo da Silva Belisário (IFG-Goiânia)**. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Tiago Moreira Vargas**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vinte e nove dias do mês de outubro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas**, **Professor do Magistério Superior**, em 31/10/2019, às 09:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Thaynara Arielly De Lima**, **Professora do Magistério Superior**, em 05/11/2019, às 21:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Júnior**, **Professor do Magistério Superior**, em 06/11/2019, às 15:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Hugo Leonardo da Silva Belisário**, **Usuário Externo**, em 12/11/2019, às 13:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0952175** e o código CRC **5CD82217**.

Referência: Processo nº 23070.038787/2019-72 SEI nº 0952175

Agradecimentos

Agradeço pelo empenho dos meus pais, Valdei e Eterna, que fizeram da minha formação acadêmica uma realidade, ao apoio e incentivo da minha esposa Sara, e o carinho incondicional da minha filha Angélica, que chegou ao mundo durante esta caminhada.

Em memória do meu pai Valdei, que sempre esteve presente em todas as minhas conquistas e aprendizados, e que partiu no decorrer desta jornada. Ao meu sogro Ênio que, com dedicação colaborou na construção deste trabalho, motivando sempre a continuar.

À diretora Marisa Eugênia e a todos os professores e funcionários do CEBRAV pelo acolhimento e pela oportunidade de desenvolver este trabalho, e aos alunos que me ensinaram a ver além do que os olhos podem enxergar.

Ao meu Orientador Professor Tiago Vargas que dedicou tempo e confiança neste trabalho, dando-me liberdade para trilhar o meu caminho, mas sempre mostrando as melhores direções.

Resumo

Este trabalho visa dar subsídios a professores de Matemática, na compreensão e aplicação dos processos de análise combinatória, para alunos não cegos, cegos totais, ou alunos com visão reduzida. Descreve fundamentos teóricos da Análise Combinatória e também suas aplicações no ensino da matemática inclusiva, tendo como objetivo alunos cegos ou de baixa visão, utilizando o Código Matemático Unificado do Sistema Braille na elaboração de planos de aulas e análise de resultados obtidos. Esta dissertação tem o seu embasamento teórico fundamentado em definições e demonstrações sobre métodos básicos de contagem. O sistema Braille e o uso do Soroban, um Ábaco adaptado para pessoas cegas, no ensino da Matemática, ajudam a conectar a Matemática aos alunos cegos, proporcionando uma aprendizagem sensorial, na tentativa de gerar oportunidades equivalentes em relação a um aluno não cego. Os alunos cegos, carecem de objetos concretos, sensoriais, e trabalhos científicos que possam estimular a sua aprendizagem matemática. Com a elaboração de planos de aula direcionados ao ensino da análise combinatória para alunos cegos, surgiu a oportunidade de ministra-las, na prática, no Centro Brasileiro de Reabilitação e Apoio ao Deficiente Visual (CEBRAV), Goiânia-Go, com jovens alunos que estavam se preparando para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Palavras-chave

Análise combinatória, soroban, alunos cegos

Abstract

This paper aims to give subsidies to teachers of Mathematics, in the understanding and application of combinatorial analysis processes, for non-blind students, blinds, or students with reduced vision. It describes the theoretical foundations of Combinatorial Analysis and their applications for teaching of inclusive mathematics, aiming blind or low vision students, using the Braille System Unified Mathematical Code in the preparation of lesson plans, and the analysis of the results obtained. This dissertation has its theoretical basis on definitions and demonstrations on basic counting methods. The Braille system and the use of the Soroban, an Abacus adapted for blind students, in mathematics teaching help connect mathematics for blind persons, providing sensorial learning, in an attempt to generate equivalent opportunities of those non-blind students. Blind students lack concrete, sensorial objects and scientific works that can stimulate their mathematical learning. With the elaboration of lesson plans aimed at teaching combinatorial analysis for blind students, the opportunity arose to teach them, in practice, at the Brazilian Center for Rehabilitation and Support for the Visually Impaired, (CEBRAV), Goiânia-Go, with young students who were preparing for the National High School Examination (ENEM).

Keywords

combinatorial analysis, soroban, blind students.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

1.1 O que é Análise Combinatória

Conceitualmente - Análise Combinatória é o conjunto de técnicas matemáticas que permitem a contagem de elementos de conjuntos finitos. A Análise Combinatória analisa estruturas e relações discretas, conforme as duas características seguintes: demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito, que satisfazem condições definidas. Contar ou classificar subconjuntos existentes em um conjunto finito, que satisfazem condições definidas. Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas analíticas e empíricas conhecidas para resolver problemas inerentes, a solução de um problema combinatório quase sempre exige abstração. Deve-se evitar o ensino ou a aprendizagem desses conceitos de maneira mecanicista, limitando-se a empregá-los, ou utilizando fórmulas matemáticas em situações padronizadas, sem habituar o aluno com a análise criteriosa de cada problema, [1].

Fixando os conceitos - A Análise Combinatória investiga as diferentes possibilidades de disposição de objetos, por exemplo, na questão: "Quantas maneiras existem para organizar quatro letras em uma linha? ", ou "de quantas maneiras diferentes podem ser selecionados cinco números diferentes em um conjunto de noventa números?". Os objetos de investigação podem ser números, letras, pessoas, testes, objetos, etc. Eles são chamados elementos e habitualmente são denotados por números ou letras. Se dois conjuntos não contém os mesmos elementos, por exemplo, ab, cd, ou se eles contêm o mesmo número de elementos, mas não o mesmo número de vezes em cada um, por exemplo aab, abb, então eles devem ser considerados diferentes. Disposições tais como $aabb, abab$ são considerados como diferentes somente se a ordem for levada em consideração, [2].

Permutações - Um arranjo finito de vários elementos em qualquer ordem na qual todos os elementos são utilizados é chamado de permutação desses elementos. Por exemplo, os ordenamentos $acdbe$, $dbcae$ são permutações dos elementos a, b, c, d, e.

Arranjos simples - de um conjunto de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ são os diferentes agrupamentos desses elementos ordenados que se podem formar com p dos n elementos dados.

Combinações simples - de um conjunto de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

1.2 Sistema Braille

O Sistema Braille é um processo de escrita e leitura desenvolvido com base em 64 símbolos em relevo, gerados pela combinação de seis pontos dispostos em duas colunas de três pontos cada. Pode-se fazer a representação tanto de letras, como algarismos, sinais de pontuação ou símbolos matemáticos. É utilizado por pessoas cegas ou com baixa visão, e a leitura é feita da esquerda para a direita, ao toque de uma ou duas mãos ao mesmo tempo. A escrita é feita da direita para a esquerda no verso da folha. Foi criado pelo francês Louis Braille (1809 - 1852), que perdeu a visão aos 3 anos de idade e criou o sistema aos 16. O Brasil adotou o sistema em 1854, por iniciativa de D. Pedro II, [3].

1.3 Ensino de Conceitos de Análise Combinatória para Alunos Cegos

Foram preparadas algumas aulas de Análise Combinatória para alunos cegos. As aulas foram realizadas no Centro Brasileiro de Reabilitação e Apoio ao Deficiente Visual (CEBRAV), de Goiânia. Os itens 6.1 e 6.2 apresentam respectivamente os Planos de Aulas e o Relatório de uma das aulas ministradas.

1.4 Divisão da dissertação

Esta dissertação é dividida como se segue:

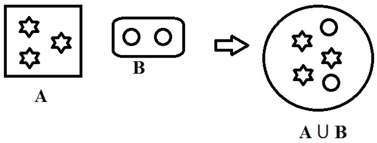
- 1 - Introdução
- 2 - Principios Básicos de Análise Combinatória
- 3- Ensino da Matemática para Alunos Cegos
- 4 - Considerações Finais
- 5 - Referências

2 Princípios Básicos de Análise Combinatória

2.1 Princípio Fundamental da Contagem

A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. Por exemplo, a operação de adição é sempre introduzida em conexão com um problema de contagem, conforme a figura abaixo:

Figura 1: Contagem de elementos

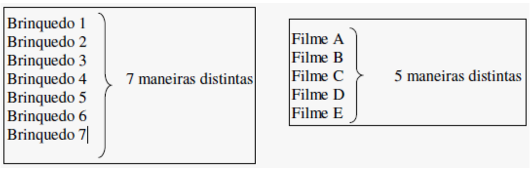


A figura 1 ilustra o que podemos chamar de princípio de adição. Se A e B são dois conjuntos cuja intersecção é vazia, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Exemplo 1. *Henrique tem dinheiro apenas para ir ao parque de diversões e brincar em apenas um dos 7 brinquedos disponíveis ou ir ao cinema e assistir apenas um filme dos 5 disponíveis. Dessa forma de quantas maneiras diferentes Henrique pode se divertir?*

Se Henrique tem dinheiro apenas para uma diversão ele tem de optar ou por brincar em um dos brinquedos do parque ou assistir a um filme do cinema. Assim tem 7 opções para ir ao parque e 5 opções para ir ao cinema. Dessa forma ele tem $7+5 = 12$ maneiras de se divertir.

Figura 2: Combinações de brinquedos e filmes [1]



O "Princípio da Multiplicação", que, ao lado do "Princípio da Adição", constitui a ferramenta básica para resolver os problemas de contagem abordados no ensino médio.

Exemplo 2. *Em uma praça há 4 homens e 3 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher, considerando H_1, H_2, H_3, H_4 os homens e as mulheres M_1, M_2, M_3?*

A figura 3 mostra todas as combinações possíveis de casais, $3+3+3+3 = 12$. O

Figura 3: Possibilidades de formação de pares entre homens e mulheres

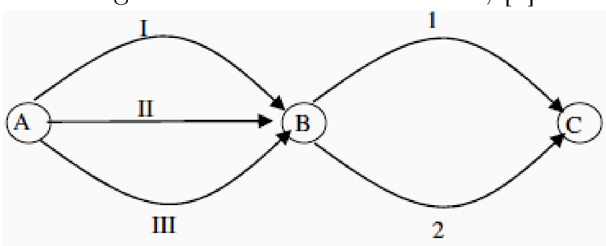
Mulher\Homem	H_1	H_2	H_3	H_4
M_1	$H_1 M_1$	$H_2 M_1$	$H_3 M_1$	$H_4 M_1$
M_2	$H_1 M_2$	$H_2 M_2$	$H_3 M_2$	$H_4 M_2$
M_3	$H_1 M_3$	$H_2 M_3$	$H_3 M_3$	$H_4 M_3$

exemplo acima ilustra o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio da Multiplicação.

O Princípio Fundamental da Contagem é um princípio da Análise Combinatória. É, basicamente, a ideia de que o número de possibilidades de fazer n ações distintas e independentes o produto da multiplicação da quantidade de modos possíveis que cada uma pode ser feita. Ou seja, se A pode ocorrer de p_a formas e B pode ocorrer de p_b formas, então existem $p_a.p_b$ formas de fazê-las. Generalizando, n ações que podem ser feitas de tal forma que tenham $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ possibilidades para cada, juntas podem ser feitas de $P = p_1.p_2.p_3 \ldots p_n$ modos distintos.

Exemplo 3. *Um motorista deseja viajar de uma cidade A para a cidade C, mas para ir à cidade C deve-se passar necessariamente pela cidade B, figura 2.1.4, [4].*

Figura 4: Caminhos distintos, [4]



Como observado na figura, o motorista pode escolher entre três estradas para se deslocar de A para B e depois deve escolher uma entre as duas estradas para se deslocar de B para C. Essa situação difere e muito da do exemplo anterior. Aqui para que o motorista vá da cidade A para a cidade C tem de passar necessariamente pela cidade B. Isto é, tem de realizar duas ações para deslocar-se de A para C. Primeiro deve escolher uma estrada de A para B e em seguida outra que liga B a C. Esse resultado é justamente o produto do número de opções para a escolha da primeira estrada pelo número de opções de escolha para a segunda. Portanto $3.2 = 6$.

Exemplo 4. *Um departamento de trânsito decidiu que as placas dos veículos passariam a ser elaboradas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderiam ser licenciados?*

Para a 1^a posição temos 26 possibilidades, e como pode haver repetição, para a 2^a posição e para a 3^a posição também teremos 26 possibilidades. Em relação aos algarismos temos 10 possibilidades para cada um dos 4 lugares e tal como anteriormente pode haver repetição. Podemos então afirmar que o número total de veículos que podem ser licenciados seria igual a: $26.26.26.10.10.10.10 = 175.760.000$.

2.2 O conceito de fatorial

A função fatorial é utilizada no estudo de arranjos e permutações, a fim de facilitar os cálculos. A ideia é bastante simples e de fácil compreensão. O fatorial de um número inteiro m não negativo, é indicado por $m!$ (lê-se m fatorial?) e é definido pela relação:

$$m! = m.(m-1).(m-2).(m-3)\dots 3.2.1,\ \ m \geq 2$$

Por definição, $0! = 1$. A função fatorial é recursiva, isto é, podemos obter o fatorial de um número inteiro positivo a partir do fatorial do seu antecessor, utilizando a relação:

$$m! = m.(m-1)!.$$

Por consequência, temos: 1!=1.(1-1)! $= 1.0! = 1$.

2.3 Permutações

O número de permutações de diferentes elementos de um conjunto finito pode ser obtido por um raciocínio indutivo conforme descrito a seguir: A partir dos dois elementos a e b podem ser formadas duas permutações ab, ba. A partir dos três elementos a, b, c, cada um deles pode estar no início e ao mesmo tempo os outros podem ser ordenados de duas maneiras diferentes: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Conclui-se que existem $3.2 = 6$ permutações. Para quatro elementos o mesmo argumento leva a $4.3.2 = 24$ permutações. Assim, podemos definir uma permutação como uma amostra ordenada sem reposição de tamanho n, de um conjunto de n elementos [5].

Proposição 1. *Dado um conjunto finito de elementos* $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ *, o número de permutações dos elementos desse conjunto, corresponde ao número de ordenação dos mesmos, isto é* $P_n = n!$.

Prova: Utilizamos o princípio da multiplicação. A primeira ação é colocar o primeiro elemento do conjunto na primeira posição da permutação, e isto pode ser feito de n maneiras. Como não podemos repor o elemento já colocado na primeira posição na segunda posição da permutação, então temos $n-1$ maneiras de escolher um elemento do conjunto A para a segunda posição, e assim por diante até a n-ésima posição da permutação. Assim, pelo princípio da multiplicação, o número de permutações dos elementos do conjunto A é dado por

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

.

Exemplo 5. *A partir dos nove dígitos* $1, 2, 3, \ldots, 9$ *pode se formar* $9! = 362880$ *números de nove algarismos tais que cada um dos nove dígitos ocorra uma única vez.*

Exemplo 6. *De quantas maneiras diferentes uma família com 4 membros pode ficar lado a lado para fazerem uma selfie? Resposta:* $P_n = P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ *maneiras.*

Exemplo 7. *Os anagramas de uma palavra são definidos como as permutações das letras da mesma. Por exemplo, para a palavra FUTEBOL, temos que TEBOLFU, TEFUBOL, BOLETFU, etc... são exemplos de anagramas. Assim, os anagramas da palavra FUTEBOL correspondem ao número de permutações das letras F,U,T,E,B,O,L, ou seja* $P_7 = 7! = 5040$.

Se grupos de elementos idênticos ocorrem em um certo número de elementos então o número de permutações é menor do que se todos os elementos fossem distintos. Por exemplo, em uma permutação de cinco elementos é $e_1 = a$, $e_2 = a$, $e_3 = b$, $e_4 = b$, $e_5 = b$, a ordenação dos elementos e_1 e e_2, e similarmente as ordens dos elementos e_3 , e_4 e e_5 devem ser consideradas como idênticas. Uma vez que os números de permutações desses elementos são 2! e 3! respectivamente, o número de dos mesmos será $\frac{5!}{2!3!} = 10$.

Generalizando, se n elementos consistem de m grupos contendo $n_1, n_2, \ldots, n_m$ elementos idênticos respectivamente, então, para cada grupo i, $1 \leq i \leq m$, temos $n_i!$ permutações de elementos idênticos. Sendo assim, o número total de permutações distintas desses n elementos é dada por

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_m!},$$

com $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Exemplo 8. *Em um campeonato de corrida de automóveis, há 20 competidores, dos quais 10 são a equipe A, 5 da equipe B, 4 da equipe C e 1 da equipe D. Se o resultado do campeonato leva em conta somente a equipe dos competidores na ordem de colocação, teremos o total de* $P_{20}^{10,5,4,1} = \frac{20!}{10!5!4!1!} = 232792560$ *resultados possíveis.*

Exemplo 9. *O número de anagramas da palavra PARALELEPIPEDO, corresponde às permutações de suas 14 letras, levando em consideração que temos as repetições de 3 P's, 2 A's, 3 E's e 2 L's. Além disso, temos 1 R, 1 I, 1 D, 1 O. Assim, temos* $P_{14}^{3,2,3,2,1,1,1} = \frac{14!}{3!2!3!2!1!1!1!} = 605404800$ *anagramas.*

2.4 Arranjos simples

Definimos como arranjos simples, o número de amostras ordenadas de elementos distintos (subconjuntos), isto é, sem reposição, que podem ser construídas a partir de um conjunto finito. Formalizando, dado um conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, os arranjos simples de p elementos, com $p < n$, são amostras ordenadas de tamanho p com elementos distintos que podem ser formadas a partir dos elementos do conjunto A.

Proposição 2. *Dado um conjunto finito de elementos* $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ *, o número de arranjos simples de* $p < n$ *elementos que podem ser formadas com os elementos desse conjunto é dado por* $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Prova: Utizamos o princípio da multiplicação. Cada arranjo tem p posições que devem ser completadas com os elementos de A. Para a primeira posição, temos n possibilidades de elementos do conjunto A. Como cada amostra deve ser formada sem reposição, então para a segunda posição temos $n-1$ possibilidades de elementos do conjunto A. O mesmo procedimento é feito até a p-ésima posição, na qual temos $n-(p-1)$ escolhas de elementos de A. Pelo princípio da multiplicação, temos que o número de arranjos simples é dado por

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1)).$$

multiplicando e divindo esta expressão por $(n-p)!$, temos:

$$\begin{aligned} A_n^p &= n(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1)) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1))(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}, \end{aligned}$$

completando a prova.

Exemplo 10. *Considere um dado com 12 faces numeradas de 1 a 12, e que este dado seja lançado 4 vezes. Nestas configurações de 4 lançamentos deste dado, quantas possuem faces todas distintas?*

Cada configuração é composta pelos resultados de 4 lançamentos do dado. Como as configurações devem ser todas distintas, então temos $A_{12}^4 = \frac{12!}{8!} = 11880$ configurações em que as faces são todas distintas.

2.5 Combinações simples

Definimos como combinação simples, uma amostra não-ordenada de tamanho p, sem reposição, isto é, com elementos todos distintos, que podem ser formadas a partir de um conjunto com n elementos.

Proposição 3. *Dado um conjunto finito de elementos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, o número de combinações simples de $p < n$ elementos que podem ser formadas com os elementos desse conjunto é dado por $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.*

Prova: Fixemos por exemplo, uma amostra de tamanho p formada pelos elementos $a_1, \dots, a_p$. Esta amostra gera $p!$ amostras ordenadas sem reposição. Como para toda amostra este resultado é válido, concluímos que $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, concluindo a prova.

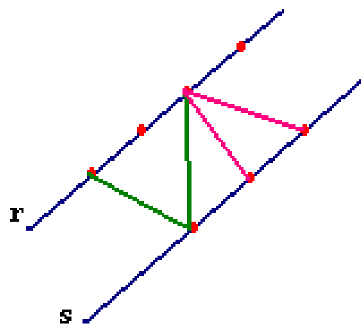
A partir do resultado acima, como nas combinações a ordem dos elementos não importa, e nos arranjos, esta ordem importa, é natural que haja mais arranjos que combinações. Dessa forma, um grande número de arranjos diferentes pode corresponder a uma mesma combinação.

Exemplo 11. *Quantas são as diretorias de 4 membros que podemos formar com 10 sócios de uma empresa ?*

Não é considerado uma hierarquia na diretoria, isto é, compor uma diretoria com $ABCD$ ou $ACDB$, é a mesma coisa. Precisamos, anular as repetições. Aqui, portanto estamos formando combinações de 4 elementos a partir de um conjunto de 10 elementos, e o número dessas combinações é $C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!6!} = 210$. Poderíamos pensar no problema da seguinte forma: A diretoria é formada por 4 posições, e como não é considerada a hierarquia, há 4! ordens distintas para a composição da mesma. Como para a primeira posição, temos 10 possibilidades e cada amostra é formada sem reposição, para a segunda posição temos 9 possibilidades, para a terceira posição 8 possibilidades e para a quarta posição, 7 possibilidades, totalizando, pelo princípio da multiplicação, $10.9.8.7 = 5040$ possibilidades. Como, para cada diretoria que pode ser formada (amostra) temos 4! ordens diferentes, então, para não contar cada amostra de maneira repetida, teremos um total que $5040/4! = 210$ possibilidades.

Exemplo 12. *Quantos triângulos podem ser formados por 7 pontos distintos, 4 sobre uma reta e 3 sobre uma reta paralela à primeira?*

Figura 5: Números de triângulos sobre as retas paralelas



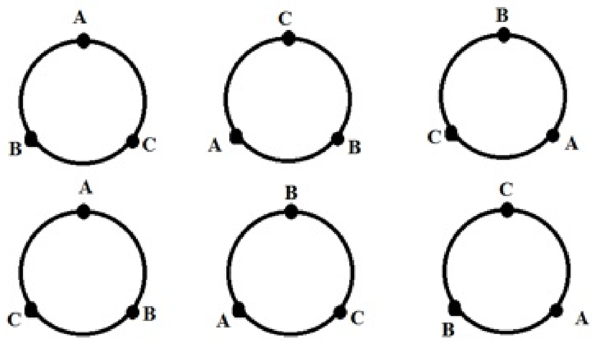
Seja r a reta com 4 pontos e s a reta com 3 pontos, $r \parallel s$. Teremos sempre que ter 2 pontos sobre uma reta e 1 ponto sobre a outra reta. Considerando os triângulos que podem ser formados com dois pontos em r e 1 ponto em s, temos o total de $C_4^2 C_3^1 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{3!}{1!2!} = 6.3 = 18$ triângulos. Agora, considerando os triângulos que podem ser formados com 1 ponto sobre a reta r e dois pontos sobre a reta s, temos o total de $C_4^1 C_3^2 = \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = 4.3 = 12$ triângulos. Assim, pelo princípio aditivo temos o total de $18 + 12 = 30$ triângulos.

2.6 Permutações circulares

Considere o seguinte problema: De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos posições equivalentes que podem coincidir por rotação?

Podemos resolver este tipo de problema, utilizando um método de contagem chamado de Permutação Circular. Como podemos observar na figura 4, para $n = 3$, as três primeiras disposições podem coincidir entre si por rotação. Isto, porque, neste problema o que importa é a posição relativa dos objetos, não a posição efetiva que os mesmos ocupam. Nas três primeiras disposições, com deslocamento no sentido horário, A que precede B que precede C que precede A; portanto, a posição relativa dos objetos é a mesma (um em relação ao outro, como na Figura **??** . Nas três últimas configurações, A precede C, que precede B, que precede A; portanto, a posição relativa dos objetos é a mesma. Assim, temos 2 permutações circulares desses 3 objetos. O

Figura 6: Permutações circulares de três objetos



caso geral (n objetos) pode ser resolvido utilizando o seguinte raciocínio: Se não considerássemos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Como cada permutação circular é gerada por n rotações (sentido horário por exemplo), temos que o número de permutações circulares dos n objetos é dado por

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Outro modo de resolver este problema para o caso geral é pensar que, como temos um conjunto de n objetos, precisamos executar n ações para resolvê-lo e utilizar o princípio multiplicativo. Assim, o primeiro objeto tem somente uma forma de ser colocado no circulo. O segundo objeto, também uma forma, que é ao lado do primeiro objeto (lembrando-se que aqui, o que importa é a posição relativa dos n objetos). O terceiro objeto tem duas formas de ser colocado: após o primeiro objeto ou após o segundo objeto. O quarto objeto pode ser colocado após o primeiro objeto, ou após o segundo objeto, ou após terceiro objeto, ou seja de três formas, e assim por diante até o colocarmos o n-ésimo objeto, que pode ser colocado de $(n-1)$ formas. Assim, pelo princípio multiplicativo,

$$PC_n = 1.1.2.3.4\ldots(n-1) = (n-1)!.$$

Exemplo 13. *De quantos modos* 25 *casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada pessoa fique ao lado do seu par ?*

Aqui, podemos considerar cada casal como se fosse um único objeto a ser colocado no círculo (roda de ciranda). Assim, há $PC_{25} = 24!$ maneiras de colocar esses casais na roda de ciranda. Como cada casal é composto de duas pessoas, A e B por exemplo, temos, que para cada casal, há duas posições relativas na roda. Isto é, as posições AB e BA. Logo a resposta do problema é $2^{25}.PC_{25} = 2^{25}.24!$ maneiras.

2.7 Princípio da inclusão-exclusão

Um problema comum que surge em análise combinatória é a contagem de elementos da união de conjuntos não-necessariamente disjuntos. Para resolver esta questão, utilizamos uma técnica de contagem chamada de princípio da inclusão-exclusão.

2.7.1 Princípio da inclusão-exclusão para dois conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos com quantidade finita de elementos, não necessariamente disjuntos. O problema aqui, é determinar o número de elementos de $A \cup B$, que denotamos por $|A \cup B|$. Podemos escrever $A \cup B$ como a união disjunta de três conjuntos, isto é,

$$A \cup B = (A^C \cap B)\dot{\cup}(A \cap B)\dot{\cup}(A \cap B^C),$$

em que $\dot{\cup}$ denota "união disjunta", A^C representa o complementar do conjunto A e analogamente B^C o complementar do conjunto B. Assim, pelo princípio aditivo,

$$|A \cup B| = |A^C \cap B| + |A \cap B| + |A \cap B^C|. \tag{1}$$

Podemos observar que $A = (A \cap B^C)\dot{\cup}(A \cap B)$ e $B = (A^c \cap B)\dot{\cup}(A \cap B)$, então, pelo princípio aditivo,

$$|A| = |A \cap B^C| + |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B^C| = |A| - |A \cap B| \tag{2}$$

e

$$|B| = |A^C \cap B| + |A \cap B| \Rightarrow |A^C \cap B| = |B| - |A \cap B| \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1), segue que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{4}$$

A Equação (4) é o princípio da inclusão exclusão para dois conjuntos.

Exemplo 14. *Quantos anagramas da palavra CAPITULO começam por C ou terminam por O? Aqui, temos 7! anagramas começados por C, 7! anagramas terminados por O, e 6! anagramas começados por C e terminados por O. Seja M o conjunto dos anagramas que começam por C e N ou conjunto dos anagramas terminados por O. Assim, a solução do problema, é o número de elementos de* $M \cup N$. *Por* (4), $|M \cup N| = 7! + 7! - 6! = 9360$.

Exemplo 15. *Quantos números inteiros entre 1 e 100 são divisíveis por 5 ou por 11? Denotando por* $[.]$ *como função parte-inteira,* $\left[\frac{100}{5}\right] = 20$ *são os inteiros entre 1 e 100 divisíveis por 5 e* $\left[\frac{100}{11}\right] = 9$ *divisíveis por 11. Aqui,* $\left[\frac{100}{5.11}\right] = 1$ *são os inteiros entre 1 e 100 divisíveis por 5 e 11. Logo, pelo princípio da inclusão-exclusão* $20 + 9 - 1 = 28$ *inteiros entre 1 e 100 são divisíveis por 5 ou 11.*

2.7.2 Princípio da inclusão-exclusão para três conjuntos

Sejam A, B e C três conjuntos com quantidade finita de elementos, não necessariamente disjuntos. Agora, queremos determinar o número de elementos de $A \cup B \cup C$, que denotamos por $|A \cup B \cup C|$. Podemos encontrar esse resultado, considerando a sequência de passos:

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C|. \tag{5}$$

Por (4),

$$|(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|. \tag{6}$$

Como $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, então

$$|(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|. \tag{7}$$

Novamente, por (4),

$$|(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap B \cap C)| \tag{8}$$

Substituindo os resultados (8) em (7), e posteriormente (7) em (5), obtemos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{9}$$

A Equação (9) é chamada de princípio da inclusão-exclusão para 3 conjuntos.

Exemplo 16. *Quantos números menores que 240 são primos com 240?*

Para resolver este problema, podemos ver que 240 pode ser decomposto em fatores primos como $2^4.3.5$. Logo, um número menor que 240 não é primo com 240, se for divisível por 2, 3 ou 5. Pra os números menores que 240, seja A o conjunto dos números divisíveis por 2, B o conjunto dos números divisíveis por 3 e C o conjunto dos números divisíveis por 5. Assim, $|A| = 240/2 = 120$, $|B| = 240/3 = 80$, $|C| = 240/5 = 48$. $|A \cap B| = 240/(2.3) = 40$, $|A \cap C| = 240/(2.5) = 24$, $|B \cap C| = 240/(3.5) = 16$ e $|A \cap B \cap C| = 240/(2.3.5) = 8$. Logo, por (9) os números menores que 240 que não são primos com 240 são $|A \cup B \cup C| = 120 + 80 + 48 - 40 - 24 - 16 + 8 = 176$.

2.7.3 Princípio da inclusão-exclusão: caso geral

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos não necessariamente disjuntos. O problema aqui, é determinar o número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, denotado por $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$. A demonstração à seguir, é baseada em [6].

Teorema 1. *(Princípio da inclusão-exclusão) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|. \tag{10}$$

Prova. A prova deste teorema consiste em tomar um elemento x pertencente a exatamente $p = 1, 2, \ldots, n$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, e mostrar que este elemento é contado somente uma única vez em (10).

Se x aparece em p dos conjuntos A_i, $1 \leq i \leq n$, então ele é contado C_p^1 vezes em $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$, C_p^2 vezes em $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$, C_p^3 vezes em $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$, e, usando o mesmo raciocínio, é contado C_p^p vezes em $|A_1 \cap \ldots \cap A_n|$. Assim, olhando para o lado direito da equação (10), x é contado

$$C_p^1 - C_p^2 + C_p^3 - C_p^4 + \ldots + (-1)^{p-1} C_p^p \tag{11}$$

vezes. Devemos mostrar, então, que (11) é igual a 1. Usando o fato de que para dois números reais a e b e n natural, vale a expansão

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \tag{12}$$

e fazendo $a = -1$, $b = 1$ e $n = p$ em (12), obtemos

$$0 = (-1 + 1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k (-1)^k (1)^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k (-1)^k. \tag{13}$$

Então, desenvolvendo (13), chegamos a

$$C_p^0 (-1)^0 + C_p^1 (-1)^1 + C_p^2 (-1)^2 + \ldots + C_p^p (-1)^p = 0,$$

e, consequentemente que

$$1 - C_p^1 + C_p^2 - \ldots + C_p^p (-1)^p = 0 \tag{14}$$

Ao dividir (14) por -1, somos conduzidos a

$$C_p^1 - C_p^2 + \ldots + (-1)^{p-1} C_p^p = 1, \tag{15}$$

finalizando, assim, a demonstração. Este teorema é, por vezes utilizado para o cálculo de probabilidades da ocorrência de ao menos um evento, de uma série de eventos. No ensino médio, por exemplo, são colocados problemas de probabilidade que envolvem eventos equiprováveis, isto é, onde o espaço amostral é finito, e todos os pontos tem a mesma chance de ocorrência. Não entrando em detalhes axiomáticos e teóricos da teoria das probabilidades, considere o conceito clássico e intuitivo de probabilidade, em que a probabilidade de um evento A, que está em uma classe de eventos de um espaço amostral Ω finito e equiprovável, é definida como

$$P(A) = \frac{n^o \ \ de \ \ resultados \ \ em \ \ A}{n^o \ \ de \ \ resultados \ \ em \ \ \Omega}.$$

Uma propriedade importante, é que $P(A^C) = 1 - P(A)$. Maiores detalhes podem ser vistos em [6], [7], [8]. Utilizamos este conceito, para introduzir o exemplo a seguir.

Exemplo 17. *Suponha que um grupo muito grande com n pessoas, digamos, estão presentes em um salão, e que todas estas pessoas estão usando chapéu, e, em determinado momento, atiram seus chapéus ao centro do salão. Os chapéus são então misturados, e, então, cada pessoa, com os olhos fechados, seleciona um deles, aleatoriamente. O problema a ser discutido é: Qual a probabilidade de que nenhuma pessoa selecione o próprio chapéu?*

Vamos numerar os chapéus de 1 até n. Considere, que o resultado deste experimento, seja uma n-upla (permutação) $(1, 2, \ldots, n)$, em que cada posição i, com $1 \leq i \leq n$ corresponde ao número do chapéu lançado ao centro do salão. Seja A_i, o conjunto das n-uplas em que o número i, ocupa a i-ésima posição. Para resolver o problema, primeiramente determinamos o número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, isto é, o número de n-uplas, em que ao menos uma pessoa i retire o próprio chapéu i. Solucionamos este problema, utilizado o Teorema 1. Aqui, $|A_i|$, para qualquer i, é dado pelo número de permutações de $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$, em que a posição i é fixa, ou seja, permutam-se os $(n-1)$ demais números, o que resulta em $|A_i| = (n-1)!$. Assim, $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = n(n-1)! = n!$. Seguindo com o mesmo raciocínio, $|A_i \cap A_j|$ conta o número de n-uplas em que as posições i e j são fixas. Isto é, permutam-se os $(n-2)$ números restantes. Logo, para i e j fixos, com $i \neq j$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$. Assim, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = C_n^2 (n-2)!$, já que temos C_n^2 parcelas para esta soma. Utilizando raciocínio semelhante, $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = C_n^3 (n-3)!$, e assim por diante. Logo, pelo Teorema 1,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n! - C_n^2(n-2)! + C_n^3(n-3)! + C_n^4(n-4)! - \ldots + (-1)^{n+1}(n-n)!,$$

o que resulta em

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

Como o número total de permutações dos números da n-upla $(1,\ldots,n)$ é $n!$, solucionamos o problema determinando o número de n-uplas (ou permutações) em que nenhum número i ocupa a i-ésima posição, que será

$$
\begin{aligned}
n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= n! - n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \\
&= n! \left[1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right] \\
&= n! \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \right] \right\} \\
&= n! \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n}}{n!} \right]
\end{aligned}
$$

Para n grande,

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \approx \frac{1}{e},$$

assim,

$$n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \approx \frac{n!}{e}$$

Obervando que o número de n-uplas possíveis é $n!$, chegamos à conclusão de que a probabilidade de do evento E:"nenhuma pessoa seleciona o próprio chapéu", é dada por

$$
\begin{aligned}
P(E) &= \frac{n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|}{n!} && (16) \\
&\approx \frac{n!/e}{n}, && (17) \\
& && (18)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$P(E) \approx \frac{1}{e} \approx 0,37$$

para n grande.

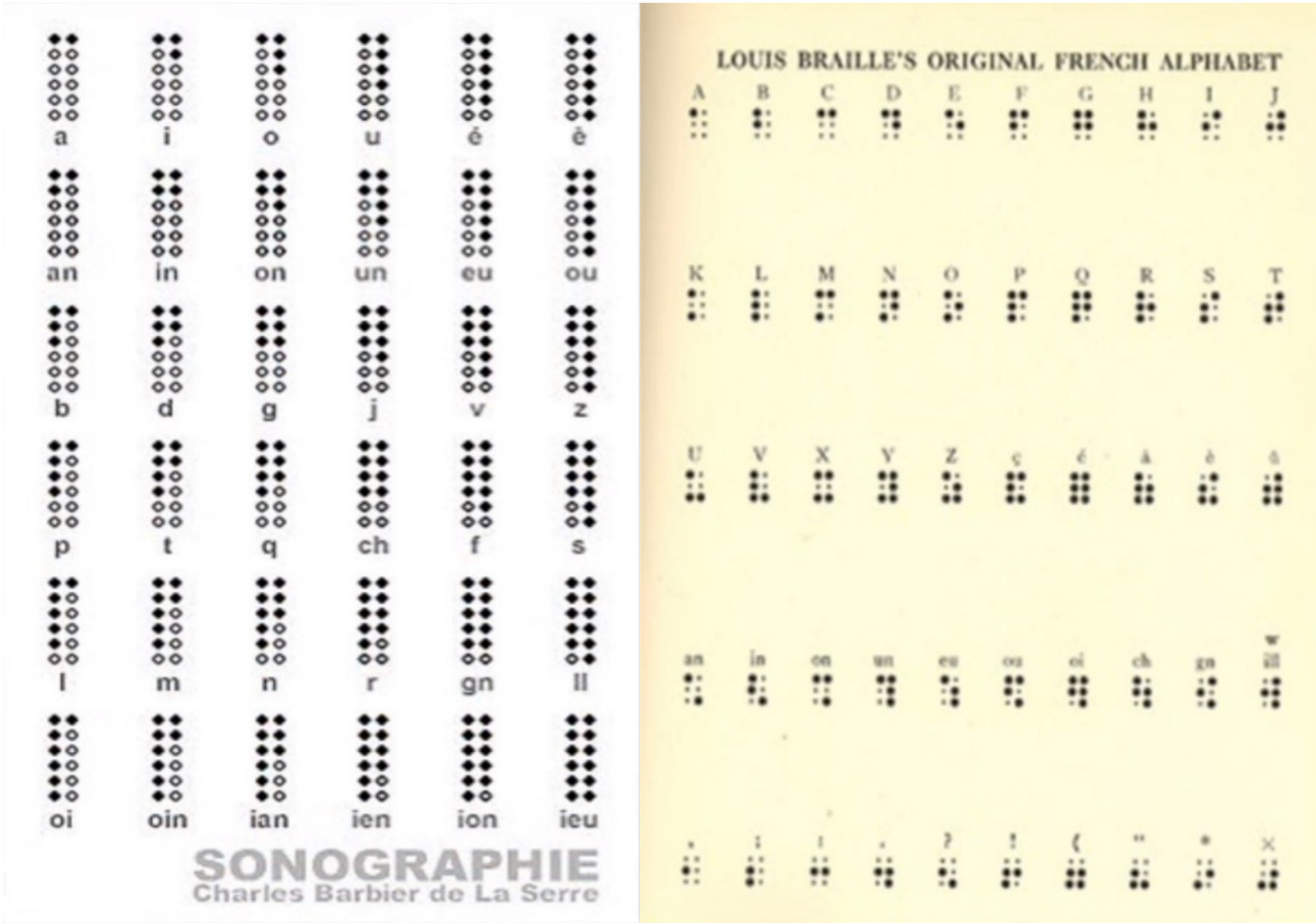
3 Ensino de matemática para alunos cegos

3.1 Louis Braille

Louis Braille, francês (1809-1852), nasceu em 4 de janeiro de 1809 em Coupvray, próximo a Paris. Seu pai era artesão ferreiro e Louis Braille era o caçula de uma família de 4 filhos. Seu destino ficou traçado quando machucou gravemente o olho esquerdo na oficina de seu pai, por volta dos 3 anos de idade, quando provavelmente brincava sozinho com uma das ferramentas. Por falta de recursos médicos, da época, para o tratamento da infecção, Louis perdeu também a visão do olho direito dois anos após o ferimento, por espalhamento local da infecção. Seus pais que eram alfabetizados, sabiam da importância de oferecer uma boa educação para uma criança, e ficaram sabendo da existência de um Instituto Real para jovens cegos, o Institut Royal des Jeunes Aveugles de Paris. Há indícios de que o pai de Louis escreveu várias cartas para essa instituição até que aos 10 anos de idade Louis foi aceito.

Em 1819 o militar Charles Barbier inventou um meto tátil de leitura para soldados. Ele visitou a instituição para validar o seu método de escrita, que consistia em um conjunto de doze pontos organizados em duas colunas, que eram marcados com um objeto pontiagudo no verso de uma folha de papel. Essas celas (conjunto de doze pontos organizados em duas colunas.) representavam os sons das letras. Braille teve contato com a escrita de Barbier e ficou encantado com a forma dessa escrita, porém insatisfeito com as celas representarem sons e não o alfabeto. Louis tentou argumentar com Barbier a necessidade da utilização de menos pontos na cela e a não representação das letras, mas Barbier mostrou-se irredutível quanto ao seu modelo de escrita. Foi então que Louis se dedicou em aperfeiçoar esse método de escrita. Em 1825 Louis Braille conseguiu consolidar a sua escrita que consistia em uma cela com 6 pontos dispostos em duas colunas que representavam as letras, os sinais de pontuação e os números. A Figura 7 ilustra as observações acima.

Figura 7: Sonografia de Charles Barbier e Alfabeto de Louis Braille.



Em 1824 Louise Braille teve o seu método de escrita reconhecido pelo estado Francês, passando a ser divulgado por todo o país até finalmente tornar-se a forma de escrita para cegos mais utilizada no mundo.

3.2 O Sistema Braille

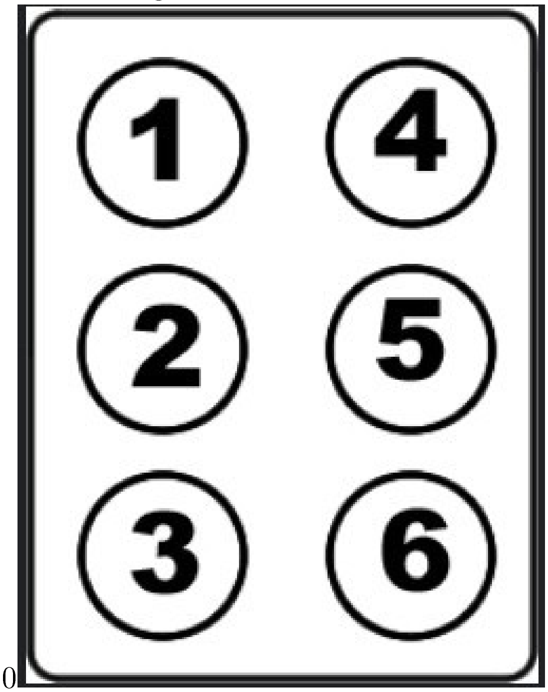
O Sistema Braille corresponde hoje a um código universal de leitura e de escrita em alto relevo. O sistema Braille foi de grande aceitação para a maioria das pessoas cegas pois, além da aplicabilidade e eficiência, ele permitiu a possibilidade de viabilizar o melhor meio de leitura e escrita diante dessa invenção. Louis Braille definiu a estrutura básica do sistema utilizado mundialmente.

No Brasil o sistema Braille foi adotado a partir de 1854 com a criação, por D. Pedro II, do Instituto dos Meninos Cegos, hoje Instituto Benjamin Constant. Ao analisar os processos históricos que envolveram o sistema Braille podemos perceber que houve um grande esforço para atualização e a unificação do sistema em todo o território brasileiro.

O sistema Braille é constituído por sessenta e quatro sinais formados a partir de um conjunto de 6 pontos denominado de sinal fundamental. O espaço ocupado por ele é denominado de cela Braille ou célula Braille. Os pontos são numerados para sua melhor identificação, conforme Figura 8 As normas que regem a disposição do texto Braille, assumem características muito parecidas com as dos textos escritos em tinta. Devem ser sempre consideradas as especificidades da leitura tátil para que possamos colocar todas essas regras e conceitos em prática. Para isso, necessitamos de equipamento de escrita que possibilitem concretizar essas ideias. A reglete, ou máquina de escrever em Braille e impressoras de Braille possibilitam a produção de material escrito. A sua utilização por pessoas com deficiência visual só é possível após a estimulação dos dedos pelos pontos em relevo.

Existem 64 maneiras distintas de preencher uma cela Braille, pois para cada um dos seis pontos, temos a opção de alto relevou ou não. Então para cada ponto da cela temos duas possibilidades, logo como temos seis pontos distintos e independentes e pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que o total de combinações é 64 maneiras.

Figura 8: Cela Braille



50

3.3 O Ensino de Crianças Cegas

A limitação visual não é sinônimo de limitação cognitiva. Uma criança cega tem o mesmo potencial de aprendizagem de uma criança vidente. Mas a sua forma de aprender é diferente, pois enquanto as crianças com visão normal, em geral aprendem por imitação, a criança cega precisa ser ensinada.

> Uma pessoa cega possui suas capacidades cognitivas intactas, a sua única limitação é não enxergar. (Vygotsky 1997) [13]

Segundo dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) de 2010, no Brasil mais de 6,5 milhões de pessoas possuem algum tipo de deficiência visual, das quais 6.056.654 pessoas possuíam baixa visão. Uma pessoa considerada com baixa visão enxerga no máximo 30% com o melhor olho.

Mesmo com uma população próxima de meio milhão de pessoas cegas no Brasil, a grande maioria das escolas não estão preparadas para receber esses alunos, pois os professores durante a sua formação acadêmica, em grande parte, receberam pouca ou nenhuma fundamentação teórica que os auxiliassem a lidar com alunos cegos em sala de aula. Aqui incluímos a Linguagem Braille, Soroban, o Código Braille de Matemática e a áudio descrição.

> Na maior parte das vezes em que um professor recebe um aluno cego em sua sala de aula, as suas informações de como trabalhar com esse deficiente são limitadas e teóricas, faltando referenciais práticos que ajudem o professor a atender às necessidades do deficiente visual. (LIRA; SCHLINDWEIN, 2008, p.176). [12]

As crianças cegas, além das dificuldades diárias em relação a movimentação e orientação espacial, muitas vezes são julgadas como incapazes ou inaptas. Mas, na maioria das vezes são vistas pela sociedade como indivíduos que precisam de ajuda, proteção ou de cuidados especiais.

A educação inclusiva é um direito de todos. Um fator limitante do deficiente visual é um olhar preconceituoso por parte da sociedade e não um fator biológico. Por isso, é fundamental o engajamento dos professores, escola e família, com o objetivo de oferecer meios favoráveis para que esse aluno cego desenvolva os saberes empíricos. As aulas devem ser menos expositivas e mais descritivas, com objetos concretos para fundamentar conceitos teóricos.

A criança cega consegue aprender, de maneira adaptada, qualquer conteúdo ministrado. As formas de ensinar uma criança cega geralmente são: a áudio descrição, Soroban, percepção sensorial do tato, Braille, aromas, etc. Essas ferramentas de aprendizagem são eficientes para alunos cegos e alunos videntes.

O ato de brincar tem seu propósito lúdico e por isto deve ser valorizado como estratégia educacional. A criança cega pode e deve ser incluída nessas experiências e iniciativas. Assim ela terá a oportunidade de manusear brinquedos e objetos, desenvolver habilidades para desenhar, perceber texturas, temperaturas, odores, sons, de modo a estimular os sentidos remanescentes, sendo uma estratégia pedagógica lúdica, divertida e eficaz para aquisição de conceitos, [16].

Várias dessas experiências lúdicas podem ser exploradas desde os primeiros meses de vida. Essas experiências auxiliarão no processo de alfabetização da criança cega, pois ajudam a desenvolver as habilidades multissensoriais.

3.4 O Soroban

Os povos antigos não conheciam os números, e eles os registravam de várias formas, principalmente a corpórea, utilizando os dedos das mãos, dos pés e outras partes do corpo, mas à medida que esses números ficavam maiores esse método se tornou inviável,

[15]. Depois passaram a utilizar materiais que estavam disponíveis na sua região, tais como pedras, madeiras e cordas. Numa região onde havia abundância de madeira eram feitos cortes para registrar as unidades, em regiões onde havia cordas, as unidades eram representadas por nós e semelhantemente as pedras eram agrupadas.

Dentre esses meios de contagem a vantagem da pedra era a mobilidade e a vantagem do uso da corda e da madeira era a organização em coluna. Então a partir desses tipos de registros surgiu o numeral ábaco. Os Indus perceberam que podiam contar unidades e grupos usando o mesmo numeral. O que os diferenciavam era as posições relativas. Esse ábaco veio justamente solidificar essas posições. Existem vários tipos de ábacos, [14]:

Figura 9: Ábaco aberto

O Soroban é o nome do Ábaco Japonês e é um dos instrumentos de contagem mais antigos da humanidade. Ele foi utilizado pelos chineses e adaptado pelos japoneses, embora os babilônios já utilizassem anteriormente outros modelos mais simples de ábacos.

A vantagem do Soroban em relação ao ábaco é a necessidade de uma quantidade menor de peças. Além de contar e registrar números, também serve para efetuar a subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada. A sua estrutura tem semelhanças com o sistema de numeração decimal.

A haste horizontal do Soroban recebe o nome de Hari, e separa as Godamas, ()o; dama – peça das Ichidama, ichi – um; dama – peça. Cada coluna do Soroban regista os números de 0 a 9. Na parte superior, a Godama representa 5 unidades e na parte inferior, cada uma das 4 Ichidama equivale a uma unidade. Para que a peça tenha valor no Soroban ela deve estar encostada no Hari.

O Teiten são pontos em auto relevo sobre o Hari, Observe que na Figura 12 temos 3 Teiten sendo que a coluna que fica sobre o Teitten central representa as unidades, as colunas a sua esquerda representam os múltiplos de unidade que são as dezenas,

Figura 10: Ábaco fechado

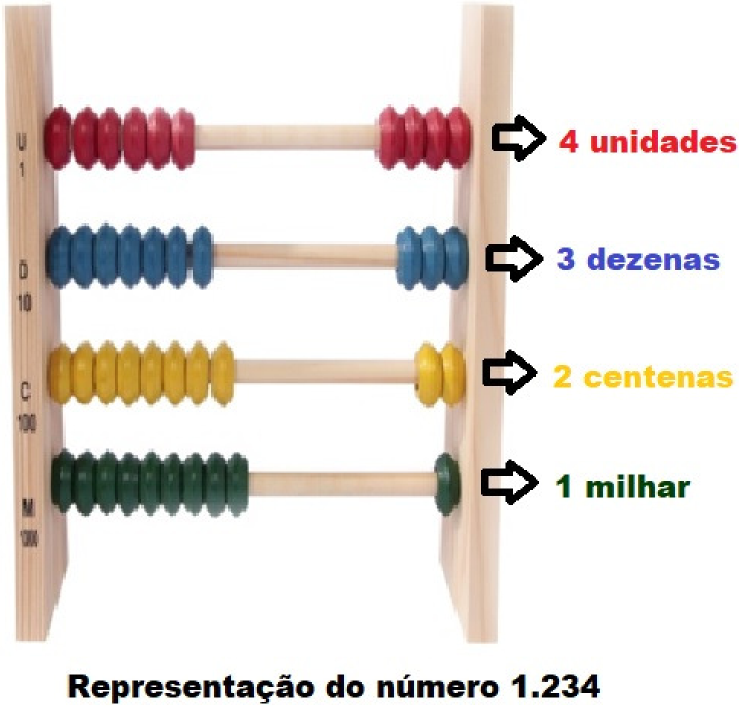


Figura 11: Ábaco Japonês ou Soroban de 21 hastes.

centenas, milhares, unidade de milhares e dezena de milhares, já as colunas a sua direita representam os submúltiplos de unidades que são os décimos, centésimos, milésimos décimos e centésimos de milésimos. O número 28 pode ser representado da forma 20 + 8. Na barra das unidades marcamos a Godama + 3 Ichidama e na barra das dezenas representamos duas unidades de Ichidama, conforme Figura 13. De maneira análoga faz-se a representação do número 703,15 = 700 + 00 + 3 + 0,1 + 0,05. Observe como ele fica representado no Soroban de 11 hastes na figura 14.

Figura 12: Soroban de 11 hastes

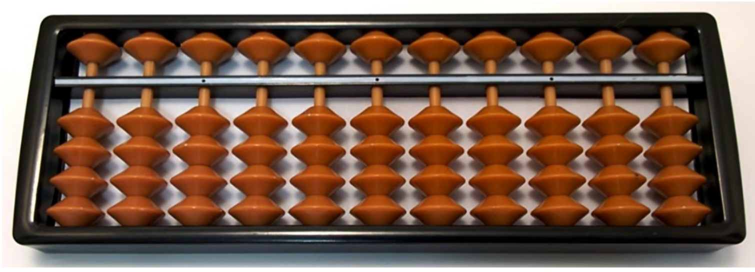
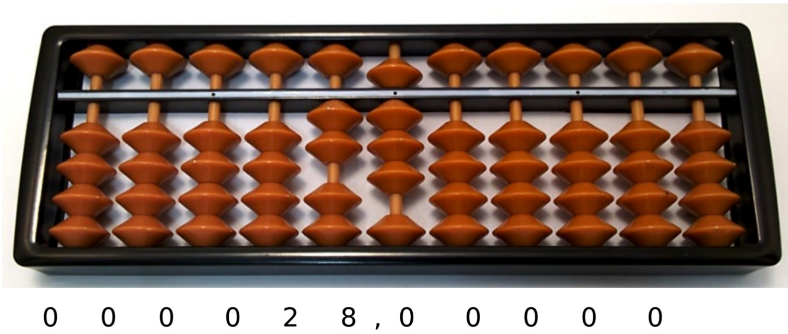


Figura 13: Representação do número 28 no Soroban de 11 hastes.



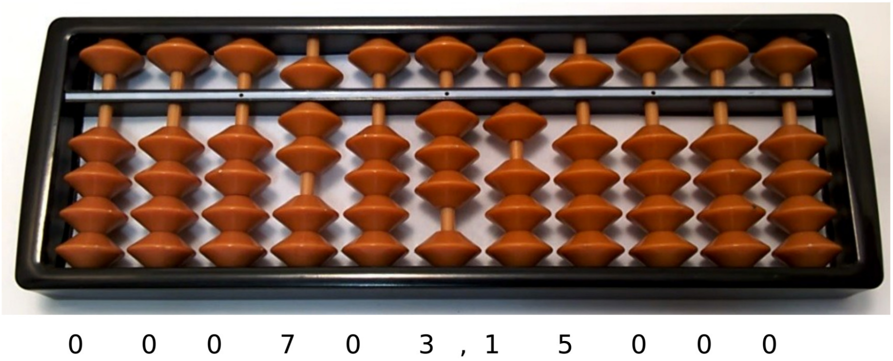
3.5 Adaptação do Soroban para Uso de Pessoas Cegas

No Soroban as peças Godama e Ichidama são movidas com facilidade, às vezes até acidentalmente. Neste aspecto é recomendado o uso do Soroban apoiado sobre uma superfície plana horizontal, pois o seu uso na vertical pode acarretar movimentos indesejáveis das peças, principalmente quando o Soroban já tem algum tempo de uso. Uma pessoa cega, ao utilizar um Soroban, pode sentir insegurança dos resultados obtidos pois um simples esbarrão de mão em uma das peças pode ocasionar movimentos não previstos e não perceptíveis, ocasionando possíveis erros de cálculo.

Por isso algumas adaptações são necessárias. Uma delas é a implantação de uma película de borracha ou tecido áspero entre as hastes do Soroban e o seu fundo de plástico ou madeira, aumentando a resistência por atrito durante o deslizamento de cada peça, o que previne a movimentação não desejada. Outra adaptação é utilizar alguns pontos de referência na base do Soroban ou na haste horizontal Hari para melhorar a destreza no posicionamento das mãos. O Soroban é utilizado com as duas mãos simultaneamente, principalmente no modelo mais comum que é o de 21 hastes.

Com adaptações simples, o Soroban transmite mais confiança durante o seu manuseio, e as pessoas cegas ficam mais confiantes em relação aos resultados obtidos. O

Figura 14: Representação do número 703,15.



Soroban é utilizado também na posição vertical. Essas adaptações do Soroban foram ensinadas durante o curso de Capacitação de Professores ministrado pelo CEBRAV-Goiânia no primeiro semestre de 2019. Foram embasadas na experiência dos professores, que trabalham exclusivamente com pessoas cegas, auxiliando na autonomia e formação acadêmica dos alunos.

3.6 Soroban: Instrumento de ensino e inclusão

Por ser uma ferramenta de baixo custo e tendo a possiblidade da confecção artesanal, o Soroban é um dos instrumentos mais acessíveis, simples e eficientes para o ensino da matemática. Diferente de uma calculadora eletrônica o Soroban é uma calculadora mecânica, que depende exclusivamente do raciocínio, habilidade, domínio e destreza do usuário. Isso implica em uma manipulação tátil das suas peças, fazendo do aluno um agente ativo no processo da sua própria aprendizagem, auxiliando a fixação dos conceitos matemáticos de uma forma mais concreta.

> A Portaria nº 1.010, de 11.05.2006, do Ministério da Educação, instituiu o Soroban, contador mecânico adaptado para pessoas com deficiência visual, nos sistemas de ensino do País em todos os níveis. De acordo com a portaria, o dispositivo é um recurso educacional para utilização nos sistemas de ensino. Pode ser utilizado pelos deficientes visuais durante a realização de provas de vestibulares e concursos públicos.

O uso do Soroban envolve a concentração do usuário durante o seu manuseio, proporciona autonomia, independência e se aproxima de uma atividade lúdica. O professor, ao desenvolver uma atividade utilizando o Soroban em sala, cria um ambiente favorável para o envolvimento de todos, fazendo com que os alunos cegos ou de baixa visão se sintam pertencentes e integrados ao grupo.

Por ser uma calculadora mecânica, a repetição do processo acontece de forma intensa. Para o aluno cego, isso é importante para o seu aprendizado e autonomia frente aos desafios matemáticos, auxiliando na fixação dos conceitos. O Soroban é uma ferramenta de inclusão que pode ser usufruída por todos, proporcionando a mesma experiência entre os seus usuários, oferecendo condições igualitárias entre os alunos cegos e não cegos. Favorece aos jovens a conviverem com as suas diferenças, contribuído para que sejam adultos melhores.

3.7 Como o Soroban pode ser Utilizado por Pessoas Cegas, no Intuito de Resolver Problemas de Contagem

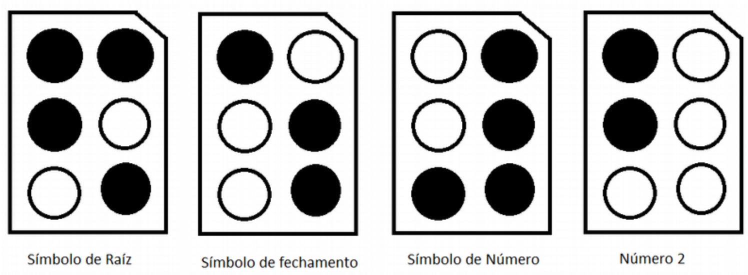
Uma pessoa não cega, para desenvolver uma operação, como por exemplo 7! tem alguns recursos do tipo papel e lápis ou uma calculadora. Porém para um deficiente visual chegar a esse resultado não é simples, pois ele não consegue usar lápis e papel para ir armazenado os resultados enquanto desenvolve a solução e, se usar uma calculadora normal ele não conseguirá ler o resultado. O único caminho é desenvolver todo o cálculo mentalmente. Embora alguns aplicativos de celulares já tenham a opção de comando de voz para efetuar alguns procedimentos, dentre eles o uso da calculadora, ainda é uma tecnologia não acessível à maioria dos deficientes visuais. O Soroban pode ser confeccionado até artesanalmente com uso de papelão, cartolina, tesoura, cola, fita e missangas como mostra a Figura 15, abaixo. Existem também, em vídeos de domínio público, tutoriais de como confeccionar Sorobans. O Soroban é uma calculadora mecânica para efetuar os cálculos e armazenar os resultados. Na figura acima o Soroban tem uma fita horizontal central, na cor dourada, para auxiliar o deficiente visual a separar através do tato as unidades, dezenas e centenas, sempre separando de três em três as colunas. Com isso facilita a identificar a posição de cada dígito através do tato e posicionar as mãos de maneira mais rápida.

A linguagem matemática no Alfabeto Braille não é simples, as contas são todas lineares, não existindo denominador e numerador, potência sobre números, números grandes ou pequenos para representar índices. A maioria dos símbolos matemáticos já existe nessa linguagem. A unificação da linguagem matemática em Braille, na década de 90, teve um incremento significativo que foi o símbolo de "Fechamento", segundo

Figura 15: Soroban artesanal, construção própria.

declaração pessoal da Professora de Braille, Maria Eurípedes de Souza Dias, de Goiânia. Para ela o símbolo de "Fechamento"deveria ser chamado de "Separamento", mesmo que essa palavra não exista, podendo se tornar um neologismo. Euripa como gosta de ser chamada, participou de congressos para a discussão da unificação matemática em Braille (São Paulo, Curitiba e Brasília).

Figura 16: Representação do número $\sqrt{2}$



Sempre antes de um número deve utilizar um símbolo para indicar que a próxima cela em Braille representa um número e não uma letra, uma vez que a letra a tem a mesma representação do número 1 na cela Braille, a letra b a mesma representação do número 2 e assim sucessivamente até chegar no número 9 que tem a mesma representação da letra i e o número zero corresponde a representação da letra j, conforme figura 17 abaixo:

Figura 17: Folheto Braille.

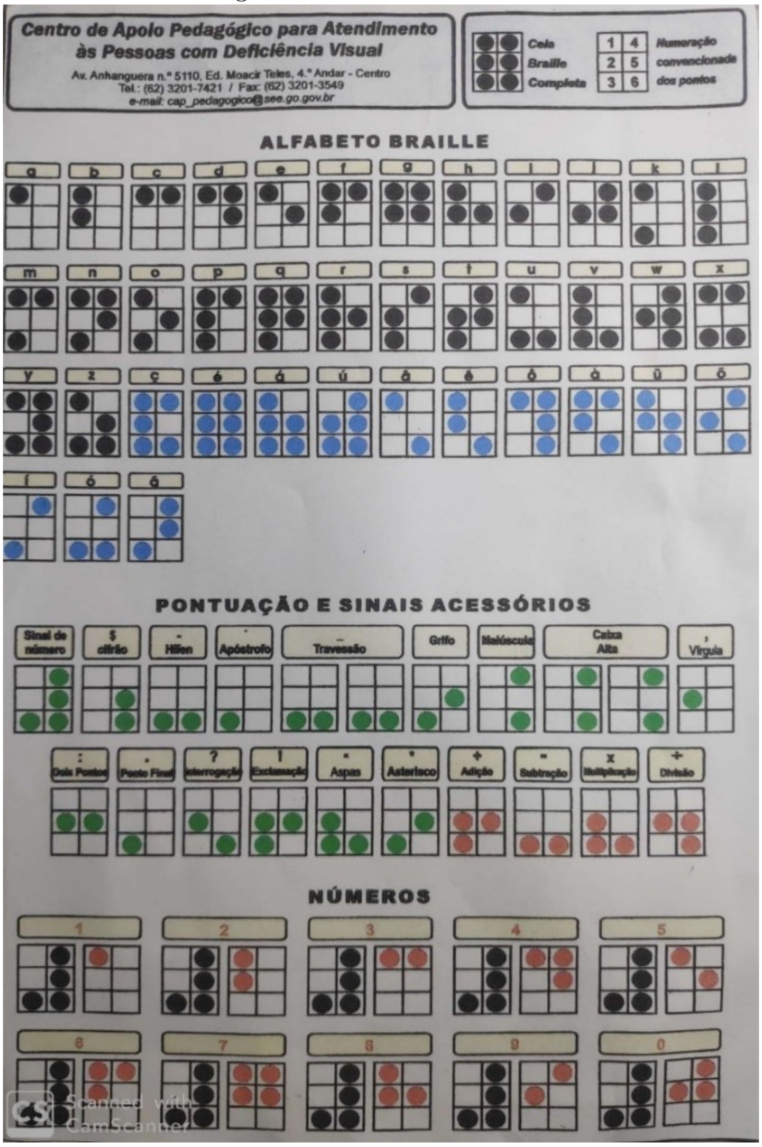
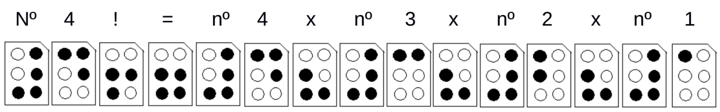


Figura 18: Representação de 4! em Braille



Para o aluno cego a linguagem matemática pode ser composta de combinações de pontos em celas Braille. Vários símbolos matemáticos utilizam mais de uma cela Braille. As celas são utilizadas para representar os símbolos em equações mais complexas ou simplesmente equações mais extensas, com várias operações. Para visualizar o todo, através do tato, não é tarefa fácil, por isso o uso do Soroban deixa o processo de aprendizagem mais eficiente. O aluno vai resolvendo as operações que são lidas em Braille e depois, com o uso do Soroban, vai efetuando os cálculos e armazenando os resultados para novas operações. O aluno muda frequentemente as mãos de lugar, hora estão no texto em Braille, hora no Soroban. Para os deficientes visuais, as adaptações feitas no Ábaco facilitam a identificação dos números representados e o posicionamento das mãos, gerando uma dinâmica mais segura e eficiente.

3.8 Relatório de uma Aula Ministrada

A aula foi realizada no Centro Brasileiro de Reabilitação e Apoio ao Deficiente Visual (CEBRAV), de Goiânia, instituição bem estruturada, ambiente acolhedor por toda a equipe, dedicação diferenciada aos alunos, interação com orientação às famílias dos alunos. O plano de aula segue na figura 19 e a lista de exercícios aplicada, na figura 20

Figura 19: Plano de Aula

– *IDENTIFICAÇÃO*

Professor:	Disciplina:	Tema:	Carga Horária
Oscar Joaquim da Silva Neto	Matemática	Análise Combinatória: Permutação e Arranjos	1,5 hora.

– *PLANO*

OBJETIVOS		CONTEÚDOS	RECURSOS
GERAL	Ensinar os conceitos de combinação e permutação circular para alunos cegos.	– Fatorial; – Permutação simples; – Arranjo; – Combinação; – Permutação Circular;	– Exercícios impressos em Braille – Tampinhas de formatos e tamanhos diferentes; – Soroban – Papel especifico para escrita em Braille; – Máquina de escrever em Braille;
ESPECÍFICOS	– Relembrar o que é permutação simples; – Exercitar o ordenamento lexicográfico; – Introduzir os conceitos de Combinação; – Diferenciar arranjo de combinação; – Introduzir os conceitos de permutação circular;		

– *PROCEDIMENTOS*

INTRODUÇÃO	DESENVOLVIMENTO	CONCLUSÃO
Averiguar se o aluno fez a atividade proposta na última aula. Pesquisa sobre Combinação e Permutação Circular.	– Após a introdução, apresentar objetos concretos para que os alunos consigam diferenciá-los através do tato, estes objetos serão importantes para a construção de conceitos. – Entregar uma lista de exercícios em Braille. – Deixar um tempo para que o aluno leia e tente fazer alguns dos exercícios. – Definir combinação e permutação circular através de objetos para que os alunos possam tateá-los, enquanto construímos os seus conceitos; – Enfatizar a diferença entre arranjo e combinação baseando-se na ordem dos elementos;	– Finalizando a aula, com um exercício de provas anteriores do ENEM sobre analise combinatória – Provocar um questionamento de onde e como podemos utilizar analise combinatória.

– *AVALIAÇÃO*

– A avaliação dos alunos será realizada de forma continuada, levando em consideração a participação, envolvimento e interesse dos alunos nas discussões originadas e na solução de exercícios propostos durante essa aula;

– *INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS*

– *Análise Combinatória e Probabilidade*, de Augusto César de Oliveira Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez, SBM, 2016;
– *Matemática: Contexto e Aplicações*, de Luiz Roberto Dante, Ática, 2008;

Figura 20: Lista de Exercícios

1. Um professor quer sortear um prêmio em dinheiro para três dos seus 12 alunos. De quantas maneiras ele poderá fazer a entrega desse prêmio?

a. Três prêmios iguais no valor de R$ 50,00 por aluno.
b. Três prêmios, o 1º no valor de R$ 80,00, o 2º no valor de R$ 50,00 e o 3º no valor de R$ 20,00.

2. Quantos combinações diferentes podemos formar com a cela Braille?

3. Quantas diretorias de 4 membros podemos formar com 10 sócios de uma empresa?

4. Determine o número de triângulos formados por 7 pontos distintos, 4 sobre uma reta e 3 sobre uma paralela à primeira.

5. Em uma circunferência são marcados 7 pontos distintos: A, B, C, D, E, F e G. Com estes pontos, quantas cordas podem ser traçadas?

6. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

7. Se Pedro e Ana são duas de 8 crianças, de quantas maneiras elas podem brincar ficando Ana e Pedro sempre lado a lado?

8. (Enem 2012) O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Ref. Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012. (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14 b) 18 c) 20 d) 21 e) 23

No dia 15.08.2019 tive reunião de planejamento com o professor Flamarion Gonçalves Moreira, efetivo de turma, motivado em conhecer os materiais pedagógicos disponíveis no CEBRAV para elaborar o plano de aula. O CEBRAV conta com vários materiais, objetos e dispositivos adaptados para trabalhar com os alunos cegos. Exemplos: máquina de escrever em Braille, Soroban, impressora para impressão de material em Braille, vários jogos e objetos do dia a dia como, tampinhas de vários formatos e tamanhos, bolinhas de pesos e tamanhos diferentes, formas geométricas em madeira, etc. Esses materiais ao serem tateados ajudam na transição do concreto para o abstrato.

Nessa turma todos são alfabetizados na leitura e escrita Braille, sabem usar com destreza o Soroban, utilizam com familiaridade a máquina de escrita em Braille. O atendimento prestado pelo CEBRAV acolhe esses jovens e adultos desde a infância, ensinando locomoção em ambientes fechados e abertos, higiene pessoal, cursos de culinária, alfabetização em Braille (português e matemática), e autonomia de vida.

Nesse dia 15 tive a oportunidade de ajudar um aluno com o conteúdo do princípio fundamental da contagem, fatorial e permutação simples e, com a supervisão do professor Flamarion, obtive resultados satisfatórios representados pelo aumento no desempenho escolar do aluno.

O aluno que frequenta os cursos complementares oferecidos pelo CEBRAV, continua com a obrigação de frequentar o ensino regular até a conclusão do ensino médio.

No dia 22.08.2019, das 15:30 h às 17:00 h ministrei uma aula para dois alunos cegos. Um é adolescente e cursa o 2º ano do Ensino Médio e o outro é adulto, é servidor público e pretende continuar estudando para se qualificar para novos concursos.

3.8.1 Avaliação de uma Aula Aplicada

Uma vez que não se utiliza quadro, giz, ou outro recurso visual de aula expositiva, há maior exigência do professor em se conseguir passar aos alunos as equações de arranjo e combinação. Os alunos apresentaram grande eficiência em fazer cálculos mentalmente, facilitando o aprendizado deles pela construção de conceitos a partir das manifestações sensoriais do tato. Os alunos utilizaram um tempo maior para absorver os conceitos, pois tinham a necessidade de testar todas as combinações possíveis, como propostas nos exercícios, para confirmarem os resultados. Para alunos não cegos o ordenamento lexicográfico pode ser feito com papel e tinta. Para os alunos cegos o ordenamento consiste em memorizar a ordem dos objetos. Empregamos cerca de 10 minutos por aluno para listar todas as possibilidades de organizar cinco objetos selecionados 3 a 3. Diferentemente dos alunos não cegos, que as vezes deixam dúvidas para serem estudas em casa, através das anotações feitas em sala de aula esses alunos não cegos não deixam passar a oportunidade de questionar o professor, até que ocorra a absorção do conhecimento.

A generalização dos resultados é mais demorada, pois a aula expositiva pode induzir os alunos ao resultado esperado. Já os experimentos são feitos de maneira mais lenta, porém com uma compreensão mais ampla por parte dos estudantes. Um dos alunos tentou colocar mais de um objeto nas caixinhas de ordenação, durante os experimentos. Já se fosse numa aula expositiva a didática de modo geral leva a colocar apenas um objeto por caixinha, habitualmente sem questionamento pelos alunos. Foram utilizadas caixinhas idênticas para delimitar as posições que os objetos poderiam ser armazenados; tampinhas de formas distintas para objetos diferentes e tampinhas idênticas para representar objetos iguais. Foi observado que durante a aula os alunos começam a organizar os objetos nas caixinhas, da direita para esquerda, assim como escrevem em Braille.

As explicações e acompanhamento foram feitas individualmente. Na construção de conceitos, a partir de objetos, o professor deve fazer intervenções de pronto, porque ao final do exercício a identificação da etapa onde eventualmente ocorreram falhas fica dificultada por falta de registro, em papel, das etapas da resolução do exercício.

3.8.2 Pontos de Melhoria

Para um mesmo conteúdo de uma aula para não cegos, a aula para cegos necessita maior tempo de aplicação. Cada explicação para um aluno deve ser repetida para cada aluno individualmente. A explicação é feita verbalmente e tateando objetos concretos, com auxílio do professor. Para a resposta da experiência, cada aluno deve tatear o objeto e verbalizar o conteúdo individualmente para o professor. Se assim não ocorrer, conceitos errados podem ser gerados. Deve-se acompanhar atentamente a construção do conhecimento, pois poucas informações são registradas no papel em Braille, e a maior parte da construção do saber é feita pelo tato, oral e mentalmente.

3.8.3 Conclusão sobre a Aula

É surpreendentemente positiva a habilidade dos alunos cegos na interação e assimilação dos ensinamentos. Embora a aula tenha sido ministrada num universo reduzido de alunos, este relatório pode se destinar também à orientação de professores de apoio que lidam em geral com apenas um aluno por sala.

4 Considerações finais

O estudo de Matemática é uma oportunidade de fixar conceitos, criar e aprender algo novo, perceber uma maneira diferente de pensar num mesmo problema, de expandir a mente. A primeira parte deste trabalho foi dedicada ao entendimento, sistematização e apresentação dos princípios da Análise Combinatória, uma parte representativa do meu aprendizado durante este Curso de Mestrado. Todos têm o direito a uma educação de qualidade e foi pensando nisso que dediquei parte deste trabalho à compreensão e ao ensino de Análise Combinatória para deficientes visuais. Tive a oportunidade de trabalhar com jovens cegos no CEBRAV, onde encontrei profissionais qualificados, compromissados com o trabalho na educação e jovens com habilidades admiráveis, tais como no uso do Soroban, escrita em Braille, realização de contas mentais, etc. No decorrer deste trabalho aprendi mais sobre a escrita Braille Matemática, a qual teve grandes atualizações no final dos anos 90. Pratiquei e aprendi a buscar informações na literatura sobre os métodos de ensino em Braille. Trabalhar com alunos cegos me proporcionou uma experiência nova, diferente de uma sala de aula, onde o professor interage com a turma toda ao mesmo tempo. Ensino de Análise Combinatória para essa turma a interação foi individual, proporcionando um ensino individual, potencializando a manifestação da habilidade de cada aluno.

Referências

[1] MORGADO, A.C; CARVALHO, J. B. P. ; CARVALHO, P.C.P., FERNANDEZ, P., *Analise Combinatória e Probabilidade*, SBM, 1991.

[2] GELLERT, W., KUSTINER, H., HELLWICH, M., KASTNER, H., *The VNR Concise Encyclopaedia of Mathematics* , Springer, 1977, pp. 575–578.

[3] VENTURINI, L.J., *Louis Braille: sua vida e seu sistema* , Fundação para o Livro do Cego no Brasil, 1978

[4] PLÍNIO, J.O., LUÍS, E.E., *Problemas Resolvidos de Combinatória*, Ciência Moderna, 2018

[5] DANTAS, C.A.B., *Probabilidade: um curso introdutório*, edusp, 2004

[6] ROSS, S., *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*, Bookman, 2010

[7] MEYER, P.L. *Probabilidade: Aplicações à estatística*, LTC, 1983

[8] LOVÀZ, L., PELIKÁN, J., VESZTERGOMBI, *Matemática Discreta*, Textos Universitários, SBM, 2003.

[9] COSTA, MANOEL CARNAYBA; FRAGA, DIVINA; GONÇALVES, MARILDA; SYLVANIRA, MARIA DE ASSIS LISBOA,*Código Braille de Matemática*, Ministério da Educação e Cultura, 1970.

[10] DAVIDSON, MARGARET; COMPERE, JANET,*Louis Braille: O menino que inventou livros para cegos*, Perfection Learning, 1991.

[11] KASTRUP, V. *A invenção na ponta dos dedos: a reversão da atenção em pessoas com deficiência visual*, Rio de Janeiro, 2007.

[12] LIRA, M.C.F. *Lembranças de escola: um estudo sobre a inclusão do aluno com diferenças visuais* Dissertação (Mestrado),Universidade do Vale do Itajaí,2005.

[13] VYGOTSKY L.S. *Fundamentos de Defectologia. Tomo 5.*, Visor Dis S.A, 1997.

[14] FERNANDES, CLEONICE TEREZINHA. ET.AL.*A construção do conceito de número e o pré-soroban.*, Ministério da Educação, 2006.

[15] IFRAH, G. *Os números: história de uma grande invenção.*, Globo, 1992.

[16] VICTORIO, M. M.. DONOLA *Sorobã: Revisitando Moraes - o método mais concreto e natural para uma criança aprender matemática.* Monografia-Instituto Benjamin Constant, 2014, Disponível no Acervo Bibliográfico do Instituto Benjamin Constant, código de referência número: 17093