Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Da Modelagem Matemática à Modelação: um Estudo sobre a Propagação da podridão em Maçãs

Wellington Luiz Fraga Gomes

Goiânia

2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: [X] Dissertação [ ] Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Wellington Luiz Fraga Gomes

Título do trabalho: Da Modelagem Matemática à Modelação: um Estudo sobre a Propagação da podridão em Maçãs

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO1

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Wellington Luiz F. Gomes.

Assinatura do(a) autor(a)2

Ciente e de acordo:

Simone Caldeira Silva

Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 31 / 10 / 2019.

1 Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

2 A assinatura deve ser escaneada.

Wellington Luiz Fraga Gomes

Da Modelagem Matemática à Modelação: um Estudo sobre a Propagação da podridão em Maçãs

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva

Goiânia

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Fraga Gomes, Wellington Luiz
Da Modelagem Matemática à Modelação: um Estudo sobre a Propagação da podridão em Maçãs [manuscrito] / Wellington Luiz Fraga Gomes. - 2019.
vii, 160 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, , PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2019.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui fotografias, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Modelagem. 2. Modelação. 3. Matemática. I. Caldeira Silva, Jhone , orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **05** da sessão de Defesa de Dissertação de **Wellington Luiz Fraga Gomes**, que confere o título de Mestre em Matemática PROFMAT.

Ao/s dois dias de mês de outubro de dois mil e dezenove, a partir das 16:00h, no LEMAT do **Instituto de Matemática e Estatística**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"**Da Modelagem Matemática à Modelação: um Estudo sobre a Propagação da Podridão em Maçãs**"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Jhone Caldeira Silva (IME-UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Elisabeth Cristina de Faria (IME-UFG), membro titular externo; Ricardo Ruviaro (UNB). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Jhone Caldeira Silva, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos dois do mês de outubro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Jhone Caldeira Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/10/2019, às 20:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Ruviaro**, **Usuário Externo**, em 04/10/2019, às 10:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Elisabeth Cristina De Faria**, **Professora do Magistério Superior**, em 07/10/2019, às 08:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0885015** e o código CRC **52B40675**.

Referência: Processo nº 23070.033261/2019-04 SEI nº 0885015

Wellington Luiz Fraga Gomes graduou-se em Matemática Licenciatura Plena pela Universidade Federal de Goiás (UFG-GO) em 2003, especializou-se em Docência Universitária pela Faculdade FABEC de Goiânia em 2014, atualmente é professor do Ensino Básico e Médio respectivamente pelas Secretaria Municipal de Educação de Goiânia e pela Secretária Estadual de Educação de Goiás.

Dedico este trabalho à toda minha família pelo apoio e compreensão nos momentos ao longo desta caminhada.

Agradecimentos

A **Deus** pela dádiva da vida, e por tudo que ele me proporcionou.

Aos Professores do IME, pela dedicação, competência, apoio e todo conhecimento compartilhado. Em especial ao **Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva**, que acreditou no meu trabalho e mesmo em meio de várias complicações achou o melhor caminho para me incentivar a continuar e concluir essa dissertação.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta dissertação, o meu sincero agradecimento.

Resumo

Este trabalho propõe um estudo dos aspectos teóricos e metodológicos da modelagem matemática e da Modelação Matemática como um meio de melhoria no ensino, mas utiliza das etapas da modelagem, porém não é modelagem, pois permite conciliar o cronograma escolar com o currículo que são norteados e estão em conformidade com os documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A elaboração desse trabalho foi realizada tendo como principais referenciais teóricos; Bassanezi [6], Meyer, Caldeira e Malheiros [34] e Biembengut [11], que apesar de visões um pouco distintas sobre modelagem, concordam com a ideia de que os educandos quando submetidos a uma situação problema real é mais interessante e reflexivo o aprender. Confrontamos os objetivos de modelagem e modelação, além de enfatizar a relevância delas tanto no cenário brasileiro quanto no cenário internacional. Para a aplicação da modelação nos baseamos na situação problema real da propagação da podridão em maçãs segundo o trabalho de Bassanezi [6], onde foi explorado vários tópicos matemáticos, como geometria plana, geometria espacial e sequências. A proposta de aplicação do processo de modelação foi através de Estudos Dirigidos online (ED), extra classe, e em seguida de aulas de compartilhamento de dúvidas e soluções desses ED, além da participação do professor como mediador, aguçando as discussões e esclarecendo algumas dúvidas, e estimulando cada educando a conjecturar segundo seu olhar sobre a situação problema. O professor como mediador não chegava em sala com soluções prontas, nem afirmando quais respostas estavam certas ou erradas, mas levando-os a pensarem em validar suas próprias ideias (modelo). A aplicação da Modelação Matemática não é considerada neste trabalho como a panaceias da educação, mas sim como mais uma proposta de melhoria no ensino, podendo ser aplicada sem restrições tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Ao analisarmos a aplicação da proposta de trabalho por meio dos ED, inferimos que houve relevância significativa para os educandos no processo de ensino-aprendizagem, pois despertou neles o interesse em buscar o conhecimento ao perceberem a matemática como ferramenta para solucionar o problema, além da liberdade que o meio eletrônico possibilitou para exporem suas ideias sem receio de estar certo ou errado. Propomos ainda a aplicação de outras propostas de trabalho e a realização de um experimento que possam auxiliar na sistematização dos assuntos abordados.

Palavras-chave

Modelagem, Modelação Matemática, Modelo, Educação, Ensino de Matemática.

Abstract

This paper proposes a study of the theoretical and methodological aspects of modelling and modelling mathematical as a means of improvement in teaching, but uses the stages of modelling, but it is not modelling, because it allows to reconcile the school schedule with the curriculum that are guided and are in accordance with the official documents: National Curriculum Parameters (PCN) and Common National Curriculum Base (BNCC). The elaboration of this work was carried out with as main theoretical references: Bassanezi [6], Meyer, Caldeira and Malheiros [34] and Biembengut [11], which despite somewhat distinct views on modelling, agree with the idea that students when submitted to a Real problem situation is more interesting and reflective to learn. We confront the objectives of modelling and modelling mathematical, besides emphasizing their relevance both in the Brazilian and international scenario. For the application of modelling mathematical we are based on the real problem situation of the propagation of rot in apples according to Bassanezi's work, where several mathematical topics were explored, such as flat geometry, spatial geometry and sequences. The proposal for the application of the modelling mathematical process was through Online Directed Studies (ED), extra class, and after classes sharing doubts and solutions of these ED, in addition to the participation of the teacher as mediator, sharpening the discussions and clarifying some doubts, and encouraging each educating to conjecture according to their look at the problem situation. The teacher as a mediator did not arrive in the room with ready-made solutions, nor stating which answers were right or wrong, but leading them to think about validating their own ideas (model). The application of Maematic Modelling mathematical is not considered in this work as the panacea of education, but as a proposal for improvement in teaching, and can be applied without restrictions both in elementary and high school. When analyzing the application of the work proposal through ED, we inferred that there was significant relevance for students in the teaching-learning process, because it aroused in them the interest and seeking knowledge when they perceived mathematics as tool to solve the problem, in addition to the freedom that the electronic environment enabled them to expose their ideas without fear of being right or wrong. We also propose the application of other work proposals and the realization of an experiment that can help in the systematization of the issues addressed.

Keywords

Modelling, Mathematical Modelling, Model, Education, Mathematics Teaching.

Lista de Figuras

1.1 Repositório Bibliográfico 17
1.2 Esquema de Modelagem. Fonte: [6] 18
1.3 Dinâmica da Modelagem Matemática. Fonte: [11], pg 15 20

2.1 Bin: Caixa de madeira. Fonte: [13] 34
2.2 Gráfico do Modelo Contínuo Versão I 47
2.3 Gráfico do Modelo Contínuo Versão II -$M(t)$ 50
2.4 Previsões para percentuais de podridão 53
2.5 Dimensões da bin relacionadas com a medida maçã. Fonte [13]-Adaptada 57
2.6 Organização das maçãs no fundo - Versão I: Camada Inicial 58
2.7 Tangência mínima: 4 59
2.8 Triângulo ABC 60
2.9 Relações do lado $\overline{BC}$. 61
2.10 A tangência máxima gera hexágonos 62
2.11 Organização em forma de triângulo. Fonte: [31] 62
2.12 Organização das maçãs no fundo - Versão II 63
2.13 Hexágonos encaixantes 63
2.14 Estágios de contaminação para M_0 , M_1 e M_2 64
2.15 $M_0 + M_1 + M_2$ 64
2.16 a) Pirâmide de base triangular. b) Com giro de 180°. 67
2.17 a)Organização em forma de pirâmide ; b) Pirâmide sem o vértice vista por cima ; c) Pirâmide vista por cima 68
2.18 Mudança de lugar da camada que contém a maçã podre inicial 69
2.19 Número de maçãs acima e abaixo de M_0 70
2.20 Número de maçãs ao redor de M_0 70
2.21 Todas esferas tangentes de M_0 no espaço 70

2.22 Início de contágio da camada C_1 71
2.23 Propagação da primeira camada: P_1, P_2, P_3 e P_4 72
2.24 P_1+P_2+P_3+P_4 72
2.25 Esquema de propagação por estágio 77
2.26 Círculo δ de raio 7μ. 84
2.27 triângulos formados pelas paredes da bin e as maçãs do canto 85
2.28 Evolução da propagação por estágios. Fonte: [6] 88
2.29 Tabela Equação de diferença com a Média de c_n. Fonte:[6] 90
2.30 Modelo discreto com equação de diferenças 91
2.31 Comparação entre modelos. Fonte: [6] 92
2.32 Gráfico para comparar os Modelos. Fonte: [6] 92

3.1 Conversas via Aplicativo. 110
3.2 Quantidade de tangências máximas segundo os educandos 111

A.1 **Estudo Dirigido 1 (ED1)** bit.ly/2FragaMaca 139

B.1 **Estudo Dirigido 2 (ED2)**: bit.ly/2FragaMaca2 146

C.1 **Estudo Dirigido 3 (ED3)**: bit.ly/2FragaMaca3 151

D.1 **Estudo Dirigido 4 (ED4)**: bit.ly/2FragaMaca4 158

E.1 **Estudo Dirigido 5 (ED5)**: bit.ly/2FragaMaca5 161

F.1 Desafio do dia! 166

G.1 Materiais para Construção 173
G.2 Ferramentas para Construção 174
G.3 Repetido 174
G.4 Construção: Cortes e Furos 175
G.5 Construção: Montagem 175
G.6 Estágio 1 176
G.7 Construção: Continuação da Montagem 176
G.8 Vedação 177
G.9 Como se dá a propagação 177
4.10 a)Exame de Artilheiros (1744) b)Exame de Bombeiros (1748). Fonte: Mata [31] 180

4.11 Página do livro: Exame de Artilheiros. Fonte: Mata [31] 180
4.12 Empilhamento de bolas. Fonte: Mata [31] 181
4.13 Pirâmide em formação. Fonte: Mata [31] 181
4.14 Pirâmide pronta. Fonte: Mata [31] 181

Lista de Tabelas

1.1 Etapas de modelagem propostas por Bassanezi e Biembengut 21

2.1 Ajustes de notação 40
2.2 Número de maçãs podres em função do tempo, segundo equação (2.13) 47
2.3 Modelo Contínuo Versão II 50
2.4 Previsões para percentuais de podridão 54
2.5 Identidade entre $t(p)$ e $M(t)$ 54
2.6 Sequências e Somatórias 75
2.7 Somatória de maçãs podres por estágio 78
2.8 Contaminação por Estágio: Modelo Geométrico. Fonte: [6] 87
2.9 S_n em relação ao tempo t em dias 89

Lista de Abreviaturas, Símbolos e Siglas

BDTD: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.
Bin: Caixa de madeira para condicionar maçãs.
BNCC: Base Nacional Comum Curricular.
Brasileira de Educação Matemática.
CIEM: Congresso Internacional de Educação Matemática.
CNMEM: Conferências Nacionais sobre Modelagem na Educação Matemática.
CREMM: Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino.
EDs: Estudos Dirigidos.
ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática.
FAFIG: Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava.
Fecli: Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Irati.
FURB: Universidade Regional de Blumenau.
GT10:Grupo de Trabalho de Modelagem Matemática que foi estabelecido pela Sociedade.
IBICT: Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia.
ICTMA: International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Aplications.
LDB: Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus.
LDB: Lei de Diretrizes e Bases.
PA: progressão Aritmética.
PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais.
PISA: Programme for International Student Assessment.
PROFMAT: Programa de Mestrado Profissional em Matemática.
SBEM: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
SIPEM: Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática.
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás.
UFSCAR: Universidade Federal de São Carlos-Campus São Carlos.
UFT: Universidade Federal do Tocantins Palmas.
UNB: Universidade de Brasília.
USP-SP: Universidade de São Paulo .
A: são os reagentes.
A_n: que é a soma das maçãs contaminadas a cada estágioE_0 dadas por M_n, na camada.

central (C_0).
B: são os reagentes.
C:são os reagentes.
C_1 é a constante de velocidade.
C_n: Camada no estágio n.
D:são os reagentes.
E_n: Estágio de contaminação com índice "n".
i: número de tangências.
k: Constante de crescimento no modelo de Malthus.
M_0: Maçã contaminada inicialmente.
$M(t)$: quantidade de maçãs contaminadas no instante t.
$M = B$: Maçãs podres.
M_n: que é a sequência de novas contaminações na camada central.
$P(t)$: população total no instante t.
P_n: que é a sequência de novas contaminações na primeira camada (C_1).
Q_n: que é a soma das maçãs contaminadas a cada estágio E_n dadas por P_n, da primeira camada (C_1) $S(t)$ = quantidade de maçãs sadias na bin.
$S = A$: Maçãs sadias.
t: tempo de propagação (em dias).
T: quantidade total de maçãs em uma bin.
v: é a velocidade de reação.
μ: Unidade de medida Maçã.
α: coeficiente estequiométrico de A.
δ: coeficiente estequiométrico de B.
γ: é a ordem da reação de cada reagente.
$\gamma\alpha = \theta$: coeficiente estequiométrico de A.
$\gamma\delta = \epsilon$: coeficiente estequiométrico de B.
β: Constante de crescimento no modelo de Malthus, modificada para o caso em maçãs.

Sumário

Introdução **1**

1 Modelagem Matemática: aspectos teóricos e metodológicos **5**

1.1 A Modelagem Matemática no Ensino 10

1.2 Etapas na Modelagem 17

1.3 A Modelação Matemática no Ensino 22

1.4 Modelação Matemática: a escolha do tema propagação da podridão em maçãs 25

2 Modelos: uma abordagem do problema da propagação da podridão em maçãs **32**

2.1 Podridão em maçãs: Conhecendo um pouco sobre a maçã 33

2.2 Um Modelo Contínuo no Problema da Propagação da Podridão em Maçã 37

2.2.1 Buscando aplicar um modelo contínuo 39

2.3 Estudando Modelos Discretos 56

2.3.1 Modelo da camada que forra o fundo da bin ou camada inicial . 58

2.3.2 Modelo da Segunda Camada 66

2.3.3 Modelo Parcial Espacial Discreto 75

2.3.4 Modelo Discreto: Equações de Diferenças 90

2.3.5 Comparação dos resultados apresentados pelos modelos 92

3 Da Modelagem à Modelação: uma aplicação de proposta de trabalho e discussão dos conceitos geométricos envolvidos **94**

3.1 Uma aplicação de proposta: Estudos Dirigidos 95

3.1.1 Os Objetivos dos Estudos Dirigidos 1, 2 e 3 98

3.1.2 Análise dos Estudos Dirigidos ED1, ED2 e ED3 101
3.1.3 Uma avaliação das aplicações dos estudos dirigidos ED1, ED2 e ED3 114

4 Conceitos geométricos aplicáveis e experimento 117
4.0.1 Uma proposta de aplicação e discussão dos conceitos geométricos envolvidos 121
4.1 Conceitos matemáticos presentes em diferentes abordagens do problema da propagação da podridão em maçãs 123
4.2 A Importância do Experimento 124

Considerações finais 127

Referências bibliográficas 131

Apêndices 136

Apêndice A Estudo Dirigido (ED1) 138

Apêndice B Estudo Dirigido (ED2) 145

Apêndice C Estudo Dirigido (ED3) 150

Apêndice D Estudo Dirigido (ED4 157

Apêndice E Estudo Dirigido (ED5) 160

Apêndice F Desafio 165

Apêndice G O experimento: Da Construção a experimentação 167
G.1 Materiais 170
G.2 Construção ou Montagem 171
G.3 Registros da Construção 172

Anexos 178

Anexo 1: Empilhamento das balas de canhão 179

Introdução

O trabalho apresentado tem como tema “Da Modelagem Matemática à Modelação: um Estudo sobre a Propagação da podridão em Maçãs”. O objetivo geral é contribuir na melhoria do ensino de alguns tópicos da Matemática, apresentando a Modelação como um meio de ensino que pode proporcionar a sistematização dos assuntos propostos, haja visto que uma parte dos educandos reclamam das dificuldades deles em assimilar alguns conceitos matemáticos que lhe são apresentados nas escolas e não fazem relação com seu cotidiano.

O tema foi escolhido após várias pesquisas sobre como melhorar o ensino da matemática nas escolas. Nesta busca, dois temas chamaram a atenção, justamente pela importância e relevância que têm. O primeiro foi o “Letramento Matemático”, que segundo a definição do PISA[1] “... é a capacidade de um indivíduo para identificar e entender o papel que a Matemática representa no mundo ...” O segundo tema foi “A Modelagem Matemática” que conforme Biembengut [11] é uma prática em construção capaz de transformar os problemas reais ou parte deles em linguagem Matemática e resolvê-los. A escolha pela “A Modelagem Matemática” se deu pela sua amplitude e ao considerar que o aprofundamento dos estudos nesse tema estaria englobando parte dos objetivos do letramento matemático.

A Modelagem Matemática no ensino pode ser assimilada como uma estratégia que possibilita a abordagem de conteúdos matemáticos a partir de situações-problemas do cotidiano como ponto inicial e posteriormente, com a necessidade de encontrar uma solução. Possibilitando que os educandos busquem na Matemática, ferramentas que

[1]PISA é a sigla, em inglês, de Programme for International Student Assessment cujo relatório referenciado neste texto foi publicado pela OECD (Organization for Economic Co-operation and Development) e se constitui de análise de testes de conteúdos escolares aplicados em vários países, incluindo no Brasil.

os auxiliem na resolução ou na estratégia de resolução do problema, que muitas vezes pode ser representada por meio de expressão Matemática (modelo). A modelagem tem aplicações em diversas áreas do conhecimento, seja do Ensino Fundamental ao Superior e se estende nas Graduações e Pós-graduações, tanto no âmbito das licenciaturas quanto dos cursos de bacharelados.

A modelagem Matemática como meio de ensino é encontrada desde o início do século XX na literatura de Engenharia e Ciências Econômicas. Porém, nos EUA há evidências de coleção de textos preparados entre 1958 e 1965, que tratam do assunto, mas sem utilizar o termo “modelagem”. No cenário brasileiro, na década de 1960, temos estudiosos que auxiliaram no impulso e na consolidação do termo **modelagem na Educação Matemática**, tais como: Aristides C. Barreto, Ubiratan D’Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani.

Segundo Bassanezi [6], “... quando se pensa em cursos regulares, que tem datas e cronogramas fechados a serem compridos, a modelagem Matemática **pode não ser uma metodologia aplicável**, pois requer o desprendimento de tempo para que o conhecimento seja realmente assimilado, que os educandos se tornem interessados e ativos”. Mas como deixar de lado tal metodologia ou meio de ensinar, haja visto todas suas vantagens no processo ensino-aprendizagem?

O processo que aplica todas as etapas da modelagem, com eficácia e, ao mesmo tempo que permitiria cumprir o currículo e cronograma escolar já existia e é conhecido como ***Modelação Matemática***. Essa nomenclatura foi utilizada primordialmente tanto por Bassanezi [6] quanto por Biembengut [11], na década de 90, para diferenciar a aplicação de uma metodologia que perpassava por quase todas as etapas da modelagem, porém, com um diferencial, atendia as necessidades do processo de ensino.

Com o Estudo sobre a Propagação da podridão em Maçãs, segundo o trabalho de Bassanezi [6], pretende-se aplicar as etapas da Modelação no Ensino para explorar vários tópicos matemáticos, entre eles, podemos citar na geometria, o reconhecimento de objetos geométricos para representar as maçãs e a caixa em que são acondicionadas, além de explorar o estudo de sequência e a relação de dependência entre elementos.

Portanto, nesse trabalho mostraremos como surge a Modelação em meio da "Modelagem Matemática", como elas são relevantes no ensino e estão coerentes com Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e ainda são temas emergentes na melhoria do ensino, tanto no cenário nacional quanto no cenário internacional.

No primeiro capítulo, a abordagem é na Modelagem Matemática e seus aspectos teóricos e metodológicos. Neste capítulo buscamos em vários autores os conceitos de Modelagem, apesar de termos usado como principais referenciais teóricos Bassanezi [6], Meyer, Caldeira e Malheiros [34] e Biembengut [11], mostramos os conceitos de Modelagem no Ensino; as etapas da modelagem e como embasados na modelagem chegamos na Modelação Matemática, que permite ser utilizada em turmas regulares do ensino onde o currículo e cronograma escolar devem ser cumpridos.

No segundo capítulo, o foco é descrever em detalhes os modelos contínuos e discretos, apresentados por Bassanezi [6], diante do problema da propagação da podridão em maçãs, porém, com nossa abordagem, onde fizemos um estudo aprofundado, mas realizamos adaptações, contribuições, comentários e comparação de cada um dos "dois" modelos contínuos e dos "dois" modelos geométricos que ele apresentou.

No terceiro capítulo, mostrará como tema "Da Modelagem à Modelação: Uma aplicação de proposta de trabalho e discussão dos conceitos geométricos envolvidos", onde iremos fazer um estudo da Modelação Matemática como meio de ensino em cursos regulares de ensino e para isso trazemos vários pesquisadores que já a utilizaram com sucesso. Baseados nesses estudos fazemos uma proposta ousada de aplicação das etapas da Modelação Matemática por meio de Estudos Dirigidos online, (respondem fora do ambiente escolar) passando por algumas etapas(Experimentação, Abstração e Resolução) e finalizando com as "Validações" e com as "Modificações" por meio de aula expositiva para discussão. Fazemos a análise dessa aplicação e como essa experiência. O ED foi baseado no problema da propagação da podridão em maçãs que também é apresentado neste capítulo; o problema do empilhamento das bolas de canhão e a proposta de aplicação de um experimento que simula a propagação da podridão em maçãs.

No quarto capítulo iremos mostrar as possíveis aplicações que os educandos podem, durante a busca da criação de um modelo para a situação problema da propagação da podridão em maçãs, se depararem, no estudo da geometria e também alguns outros tópicos de Matemática que podem ser explorados conforme a necessidade ou disponibilidade de tempo que cada grupo de estudo possa ter.

Nas considerações finais, analisamos se os nossos objetivos foram alcançados com a aplicação da Modelação Matemática por meio dos Estudos Dirigidos juntamente com as aulas expositivas para discussão das respostas de cada ED.

Capítulo 1

Modelagem Matemática: aspectos teóricos e metodológicos

Os educandos apresentam dificuldades em assimilar, determinados tópicos Matemáticos de forma significativa ao seu cotidiano, dentre os quais destacamos o estudo de geometria, seja pela sua complexidade, pela ausência de aplicações diretas no cotidiano ou principalmente pelo descaso que foi dado ao longo da história da educação no Brasil. Na década de 70, quando foi criada a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus (LDB), sob o número 5692/71, foram dadas prioridades a certas disciplinas e assuntos. Para Pavanello [39], essa lei foi um agravante ao ensino de geometria no Brasil, pois desde a sua promulgação houve um gradual abandono deste ensino, embora já existissem indícios de uma tendência geral, nas escolas públicas isso se refletiu de maneira mais efetiva.

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática se sentindo inseguros para trabalhar com geometria deixassem de inclui-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram ensinando muitos reservavam ao final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula, talvez numa tentativa ainda que inconsciente de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com os tópicos em questão. (Pavanello [39], 1993)

Olhando ao nosso redor, podemos observar as formas geométricas em vários lugares, dos objetos mais simples até os mais engenhosos, na arquitetura antiga até a atual, na natureza que traz mistérios e curiosidades que ainda não entendemos nem desvendamos.

Lorenzato [29] afirma da importância da geometria nas nossas vidas e do olhar diferente que devemos aprender a ter.

> A Geometria está por toda parte..., mas é preciso conseguir enxergá-la... Mesmo não querendo, lida-se no cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente se está envolvido com a Geometria. (Lorenzato [29], 1995)

Segundo Alarcón [38], (2006, p.169) " O ensino da geometria, em nossas escolas primárias, se reduz a fazer com que nossos estudantes memorizem os nomes das figuras, os mapas geométricos e as fórmulas que servem para calcular áreas e volumes". O cenário descrito pela autora revela-se alarmante para o ensino na área, uma vez que consideramos o objetivo explicitado nos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN [14], para a Matemática:

> [...] fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente (BRASIL, 1998, p. 37).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [14], destacam que a Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade Matemática a ser desenvolvida em sala de aula.

Em meio a esse contexto, os educandos têm praticamente duas alternativas: aprender de forma significativa ou mecânica. Na primeira, o conhecimento é assimilado com qualidade, trazendo interesse e raciocínio efetivo ao educando, conforme Ausubel [1],

> ...aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

No segundo é simplesmente armazenado de forma isolada, sem conexões, impedindo o educando de aplicar aquele conhecimento ou parte dele em outras situações problema similares, ou seja, na maioria das vezes é totalmente esquecido após as avaliações. Como Meyer, Caldeira e Malheiros [34],(2018) afirmam “ ... a maioria das pessoas não conseguem relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seu cotidiano, porque foi criada universo à parte, ou seja, para elas a Matemática não está presente em outros contextos.”

Desta maneira faz-se necessário a busca de novas estratégias no ensino de Matemática, que possam favorecer a aplicação e assimilação de conceitos geométricos, além de correlacionar com outros saberes de modo que seja consolidado; não sendo restrito ao estudo de Geometria e Matemática, podendo ir além do trivial, promovendo elaboração de estratégias para a resolução de problemas, ressignificar as fórmulas geométricas, desmistificar a ideia que na Matemática e na geometria a complexidade é elevada e não terá utilidade além das páginas do caderno.

Uma prática em construção é capaz de transformar os problemas reais ou parte deles em linguagem Matemática e resolvê-los, de modo que os resultados sejam representados para a sociedade de forma clara e objetiva: essa fora intitulada como **Modelagem**. Tal prática já vem sendo estudada e aplicada há algum tempo e já é considerada por vários estudiosos como Biembengut, Meyer, Caldeira e Malheiros e Burak, [11, 34, 20], uma metodologia ou meio de ensino aplicável. Meyer, Caldeira e Malheiros [34], afirmam que esta vai por um caminho diferente do que é comumente aplicado no ensino, por isso pode ser melhor e mais significativo.

> ... vai por um caminho inverso, ou seja, ao invés de se dar uma pergunta para o aluno, em que ele vai ter que usar predeterminada ferramenta matemática para garantir a obtenção da resposta certa, o aluno faz a pergunta para si e

> para os outros. junto com o professor e os outros alunos, ele vai aprender (e usar) as ferramentas matemáticas já existentes para entender o fenômeno escolhido e eventualmente, levar à sala de aula conhecimentos já produzidos pela cultura local para responder as questões relevantes, muitas vezes até de forma aproximada. (Meyer, Caldeira e Malheiros, 2018, p.35)

"Todo homem deseja naturalmente saber" (Aristóteles). Temos a necessidade de saber, e o papel da escola é incentivar essa curiosidade, o prazer de buscar o conhecimento. Desta maneira quando os educandos são colocados diante de situações reais, e se interessam, existe uma aprendizagem mais significativa, pois nessa busca os educandos têm contato com outras áreas do conhecimento, ou seja, não se aprende Matemática só pela matemática.

> [...] A Modelagem possibilita o envolvimento dos alunos nos problemas, não só da própria matemática, mas nos problemas do mundo real, ou seja, estudar matemática não só pela matemática, mas correlacionando os conhecimentos matemáticos com os problemas do dia a dia do aluno ou da comunidade escolar, ou ainda, os problemas do dia a dia são impulsionadores para o aprendizado dos conteúdos de matemática. Nesse sentido, com o uso de Modelagem Matemática, há uma grande propensão em auxiliar os alunos a apreciar a Matemática.(ANGELA [3], 2012, p.15)

Na busca por aprimoramento no assunto de modelagem, encontramos um trecho em que Angela [3] cita Bassanezi concordando com suas ideias:

> [...] "... que o gosto se desenvolve com mais facilidade quando é movido por interesses e estímulos externos à Matemática, vindos do mundo real.(BASSANEZI, [6] 2006, p.15)

Angela (2012), ainda relata que na sua pesquisa sobre modelagem, quando esteve diante do trabalho de Barbosa [4] (2004), alimentou a esperança de que todas as suas dúvidas sobre Modelagem seriam respondidas e que seria desnecessário pesquisar mais sobre o assunto, porém, no decorrer da leitura-pesquisa, se deparou com a seguinte afirmação: "Esse artigo é justamente uma tentativa de oferecer subsídios para as pessoas compreenderem <u>uma</u> maneira (e não <u>a</u> maneira) de entender Modelagem na perspectiva da Educação Matemática".

Dessa maneira vemos que a modelagem Matemática é uma prática ou um meio de ensino com relevância no ensino que possibilita a Matemática Aplicada ao cotidiano, aperfeiçoando o processo de aprender Matemática. Onde o foco passa a ser os educandos, e o professor será um incentivador da curiosidade, do desafio e até da necessidade de resolver determinada situação. É eficiente, pois temos inúmeros casos de sucesso.

1.1 A Modelagem Matemática no Ensino

A Modelagem Matemática no Ensino, pode ser assimilada como uma estratégia de ensino que possibilita a abordagem de conteúdos matemáticos a partir de situações-problemas da realidade. Assim, a modelagem tem aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, seja do Ensino Fundamental ao Superior e se estende nas graduações e pós-graduações tanto do âmbito das licenciaturas quanto dos cursos de Bacharelados[1] em geral. Já o modelo de ensino atual é na maioria das vezes, baseado praticamente em ensinar os conceitos e conteúdos de forma teórica para posteriormente mostrar suas aplicações diretas e que na maioria das vezes, sofrem tantas alterações que nem são interligadas e assimiladas.

> ... se considerar que a modelagem emerge como estratégia para motivar estudantes, nos mais diversos níveis de escolaridade, a aprender matemática e se consolida como método não apenas para motivá-los a aprender matemática, mas principalmente, propiciar a eles a capacidade de realizarem, fora da sala de aula, modelagem e aplicações em outras áreas de conhecimento e diferentes contextos. (BIEMBENGUT [10], 2009, P.18)

Podemos exemplificar a capacidade que os educandos têm em calcular as áreas de retângulos e triângulos por meio de fórmulas, porém, na maioria das vezes sentem muita dificuldade de utilizarem esse conhecimento e deduzir, criar um "modelo" que determine a área de um trapézio. Ou seja, os educandos decoram algumas fórmulas matemáticas que, dentro de suas convicções, devem ser aplicadas em casos específicos, mas não se apropriam do conhecimento, não entendeu como se deu o processo e dessa maneira se sente impossibilitado de deduzir por conta própria a fórmula para determinar a área de outras figuras geométricas por meio das fórmulas de área tanto do triângulo quanto do retângulo.(Grifos nossos)

Nessa mesma direção, encontramos Veloso (1998) que apresenta duas razões para a demonstração matemática esteja presente na sala de aula: aprender a raciocinar e compreender a natureza da Matemática, considerando esta a mais importante.

[1]Um exemplo: a atual proposta do Curso de Matemática - Bacharelado pela Universidade do Sul de Santa Catarina é inovadora pelo pioneirismo na modalidade a distância e pelo foco específico que agrega a modelagem Matemática em ambientes interdisciplinares, no contexto da Física, das Engenharias, do contexto Econômico-Financeiro, e Ambiental.

> ...Os alunos devem chegar ao secundário com uma experiência já considerável de atividades de investigação em matemática, durante a qual tiveram numerosas ocasiões para argumentar e demonstrar, e refletir com a ajuda do professor sobre essa experiência matemática. (VELOSO, 1998, p. 362)

Levantar algumas questões e refletir sobre essa prática de ensino neste momento é de suma importância. Primeiramente, ela é inovadora, ou seja, ainda é novidade no processo de Ensino da Matemática? Depois, desde quando ela vem sendo utilizada como prática ou metodologia de ensino? Surpreendentemente a resposta para a primeira questão é não, pois essa prática já vem sendo utilizada e difundida desde a década de 70, a qual é explorada a construção de “modelos” matemáticos como resolução de situações problema reais. Para segunda questão, temos o relato de Burak [17] e Silveira [44].

Segundo Burak [17], o termo **modelo** foi utilizado pela primeira vez no ano de 1976, durante o III Congresso Internacional de Educação Matemática (CIEM), em Kalrsruhe, Alemanha Federal, onde na ocasião houve a participação de mais de dois mil professores de vários países, e um dos vários temas tratados foi a modelagem. Ou seja, esse tema já vem sendo discutido há muito tempo e sendo aplicado como prática de melhoria de ensino em vários países. Silveira [44], na sua dissertação de mestrado, fez um levantamento sobre os trabalhos que tratam da modelagem no Brasil e também encontrou como trabalho mais antigo, uma dissertação produzida também em 1976, por Celso Braga Wilmer e orientada pelo professor Aristides Camargo Barreto, cujo título apesar de não usar o termo modelagem, tratou de “modelos na aprendizagem da Matemática”, como preocupação com a qualidade do ensino desta disciplina, que dá a ideia de primórdio da modelagem.

O professor Bassanezi [8], já utilizou desta prática de ensino com êxito em um curso de especialização para professores de Matemática em Palmas e Guarapuava na década de 80, e desde então, esta vem sendo aplicada com resultados satisfatórios em cursos de graduação e pós-graduação e também é indicada nos cursos de Ensino Fundamental sem restrição alguma.

Além dos PCNs citado anteriormente, temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os educandos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, apesar de ainda está em construção nos dias atuais, desde 2015 vem sendo aplicado e divulgado como o documento de instância superior no que rege o ensino no Brasil. No tocante da Matemática, no que se refere ao Ensino Fundamental, a BNCC é objetiva quanto a preocupação com a melhoria do ensino de Matemática e propõe meios, como resolução de problemas, letramento matemático, contextualização, sistematização e senso crítico para utilizar os conceitos e "ferramentas" Matemáticas.

> ... O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas... (Brasil, [15], 2019)

Na BNCC quanto aos objetivos para o Ensino Médio, verifica-se a necessidade de explorar e estimular avanços na sistematização de conteúdos matemáticos, indo além do que é proposto no Ensino Fundamental, ou seja, não basta "reconhecer" um assunto ou tema, é necessário que os educandos sejam capazes de analisar, investigar, conjecturar e montar estratégias aplicando-as. Dessa maneira, mostra a resolução de problemas por meio de modelos como uma meio de ensino que pode melhorar o aprendizado de Matemática.

> ... Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.
> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, **de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.(Brasil, [15], 2019)

Desta maneira podemos verificar que a modelagem Matemática no ensino está coerente com os documentos oficiais da federação, tanto nos PCNs [14] quanto na BNCC [15], pois, em ambos evidenciamos como proposta para a Matemática, algo que seja mais vivenciado pelos educandos, e que faça realmente sentido, para que os educandos se sintam estimulados a descoberta e pela busca do conhecimento.

No cenário brasileiro temos o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM)[2], idealizado e fundado pela professora e pesquisadora Maria Salett Biembengut, que relata ter ouvido pela primeira vez falar de Modelagem Matemática, em 1986 pelo professor Rodney Bassanezi da Universidade de Campinas (UNICAMP), e desde então se tornou pesquisadora em modelagem e realizou muitas palestras, conferências, cursos de formação continuada e pós-graduação, em Universidades e Instituições de Ensino e em Congressos Nacionais e Internacionais. inclusive no *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Aplications (ICTMA)* [3]

Como já foi citada, a modelagem, tem sido pauta nos congressos da *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Aplications (ICTMA)*, cujo tema é **Modelagem e Aplicações**, há cerca de três décadas. Estes congressos ocorrem bienalmente e tem representantes de vários países, desde do ICTMA 3 em 1987, em Kassel na Alemanha, que a modelagem tem sido o tema principal. Em 2013, este congresso ocorreu aqui no Brasil na cidade de Blumenau-SC, intitulado o ICTMA 16, organizado pela professora e pesquisadora Maria Salett Biembengut. Como produto destes encontros são produzidos livros, um para cada congresso. Em julho de 2019 o ICTMA 19, foi realizado em Hong Kong China, desta maneira percebe-se que modelagem está em plena discussão e é um tema super atual.

Podemos verificar ainda a abordagem desse tema no Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática (Anais do VII SIPEM), onde foi criado o Grupo de Trabalho (GT de número 10) de Modelagem Matemática que foi estabelecido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM no ano de 2001, como resultado da política de que os grupos assumissem o papel de articulação e colaboração dos pesquisadores brasileiros. Ele foi o décimo a ser criado, razão pela qual passamos a se

[2]O CREMM, é um Centro de Estudo e Pesquisa integrado a outros Centros ou Grupos de Pesquisa na área para promover ações que contribuam para a Educação Matemática e dispor de um Sistema de Documentação, referentes pesquisas e práticas pedagógicas de Modelagem Matemática no Ensino dos mais diversos países que possam subsidiar educandos, professores e pesquisadores.

[3]A Comunidade Internacional de Professores de Modelagem Matemática e Aplicações (a 'Comunidade') é uma organização de associação que existe para promover Aplicações e Modelagem (A & M) em todas as áreas da educação matemática - escolas primárias e secundárias, faculdades e universidades.

chamar GT10. A missão do GT10 é favorecer o debate e a colaboração dos pesquisadores brasileiros que realizam investigações sobre Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, articulando o desenvolvimento desta frente de pesquisa no país. As reuniões ocorrem periodicamente a cada 3 anos, durante a realização dos Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), os quais são organizados pela Diretoria Executiva da SBEM.

Esse grupo também participa da organização das Conferências Nacionais sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), evento bianual devotado ao tema e que reúne pesquisadores, professores e estudantes interessados em Modelagem. Além disto, outras participações em eventos, como o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), bem como outras ações, buscam cumprir a missão do grupo.

Em Silveira[4] [44, 22], vemos estudos no âmbito de analisar a Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos, contando que ao analisar os dados e ao comparar tais dados com outras pesquisas no campo, mostraram que os obstáculos e as resistências, quando se trata de aplicações de Modelagem em salas de aula, apontam dificuldades na sua implementação, porém, com estudos e as pesquisas envolvendo a Modelagem enquanto prática pedagógica apontam para um novo rumo de indagações, não mais sobre o que é a Modelagem, mas como é possível a sua incorporação e manutenção nos sistemas escolares como ferramenta fundamental no processo de ensino-aprendizagem.

A modelagem Matemática no ensino desmistifica o fato dessa aprendizagem ser muito complicada, mudando o processo e não o foco, o educando se sente mais atuante e desta maneira, o estudo se torna mais significativo e prazeroso.

> [...] A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão.(BASSANEZI, 2014, p.17)

Meyer, Caldeira e Malheiros [34], propõem a Modelagem como uma proposta para “Educar Matematicamente”, no sentido de não considerá-la “apenas” como um método

[4] Analisou e selecionou dezesseis trabalhos sobre formação de professores, dentro de um universo de sessenta e cinco teses e dissertações sobre Modelagem, defendidas no Brasil no período de 1976 a 2005

de ensino, e sim como uma concepção de ensino e aprendizagem. Nesta proposta, não existe uma única Matemática, existem outras que podem surgir por meio das investigações na busca da solução de problemas reais, de tal forma que faz necessário um programa no desenvolvimento da modelagem, flexível e em espiral, e não rígido e linear.

> E isso se deve a nossa concepção de matemática. Assim, para compreensão da Modelagem com uma perspectiva de educar matematicamente, vamos tomar a matemática como regra e convenções que são estabelecidas dentro de determinados contexto social histórico e cultural permeado pelas relações de poder, diferentemente daquela vista como uma descoberta.(Meyer, Caldeira e Malheiros, 2018, p.33)

Biembengut [11], defende que a modelagem é parecida com o trabalho de um escultor trabalhando na argila, que em posse do material, utiliza de ferramentas e técnicas para produzir um objeto, e para os olhos do escultor esse objeto é um modelo, pois é a representação de algo real ou imaginário, ou seja, para ela modelagem é a arte de modelar e é processual.

> Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um Modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para elaborar um modelo, além do conhecimento de Matemática, o modelador precisa ter um dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.(BIEMBENGUT, 2000, p.12)

Vimos que apesar de visões um pouco distintas sobre modelagem, cada autor pontua sobre seu olhar e senso crítico, tanto Bassanezi [6], Meyer, Caldeira e Malheiros [34], quanto Biembengut [11], concordam que os educandos quando submetidos a uma situação problema real e são instigados a resolverem ou analisarem o problema utilizando conhecimentos prévios e sentem a necessidade de buscar novos "saberes" é mais interessante e reflexivo o aprender. É relevante ressaltar que na **modelagem**, o mais importante é **despertar** e utilizar o **interesse** dos educandos pelo problema, onde a necessidade de entender ou resolver, "**matematizar**" o problema, gere entusiasmo para depois se chegar nos conteúdos e conceitos teóricos, ou seja, não será mais um "conhecimento" guardado de forma isolada (decorado-gravado, para a realização de uma avaliação), que brevemente será esquecido por não ter contextualização e nem significado real.

Repositório Bibliográfico

Para o enriquecimento desta Dissertação, buscamos trabalhos acadêmicos na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[5] e também no repositório do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), sobre **modelagem** e **modelação**. O tema "Modelagem" é mais comum e aparece em mais de 5000 trabalhos acadêmicos em todo Brasil, porém, ao refinar a busca, procurando por "Modelagem Matemática" e "Modelagem Matemática no Ensino" o número reduz consideravelmente.

Já sobre o tema "Modelação", os números caem ainda mais chegando a zero na maioria das instituições de ensino superior, podemos citar a Universidade Federal de Goiás UFG, que segundo nossas pesquisas online, ainda não tinha nenhum trabalho que tivesse o termo "Modelação" no título. Quando se pesquisa Modelação Matemática no Ensino ao nível nacional, do nosso conhecimento, só encontramos três trabalhos, são eles: Ensino de matemática no curso de arquitetura-uma proposta por meio de modelação matemática-Universidade Regional de Blumenau (FURB); Modelação Matemática na Sala de Aula - O Conceito de Função Exponencial numa Sequência de Atividades para o 1º Ano do Ensino Médio-Universidade Federal de São Carlos-Campus São Carlos (UFSCAR); Modelação Matemática como método de ensino para o ENEM - Universidade Federal do Tocantins Palmas (UFT).

Quando pesquisado o tema desta dissertação, não encontramos nenhuma tese ou dissertação, que trate da Modelagem à Modelação e com aplicações no ensino. A tabela na Figura 1.1, foi organizada após essa pesquisa nos Repositórios Bibliográficos Nacionais em especial no BDTD e no repositório do PROFMAT (que são do nosso conhecimento).

[5]O Ibict desenvolveu e coordena a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), que integra os sistemas de informação de teses e dissertações existentes nas instituições de ensino e pesquisa do Brasil, e também estimula o registro e a publicação de teses e dissertações em meio eletrônico. A BDTD, em parceria com as instituições brasileiras de ensino e pesquisa, possibilita que a comunidade brasileira de C&T publique e difunda suas teses e dissertações produzidas no País e no exterior, dando maior visibilidade à produção científica nacional.

	Modelagem	Modelagem Matemática no Ensino	Modelação	Modelação Matemática	Modelação Matemática no Ensino	Da Modelagem Matemática à Modelação
UFG-GO	69	9	0	0	0	0
USP-SP	607	1	16	8	0	0
UNB	178	1	0	0	0	0
PROFMAT	130	13	2	2	0	0
BDTD	5156	90	55	16	3	0

Figura 1.1: Repositório Bibliográfico

1.2 Etapas na Modelagem

Para Bassanezi [6], a modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Dentre os vários significados da palavra "modelo", neste trabalho usaremos o termo como sendo forma de representar particularidades de uma situação problema estudada, por meio de símbolos e relações Matemáticas.

Para a aplicação desta proposta o professor deve se preparar, pois, ela não é a panaceia de todos os problemas educacionais, mas se bem aplicada pode potencializar e melhorar o processo de aprendizagem dos educandos. Esta preparação por parte do professor requer amplo conhecimento nas etapas da modelagem. A seguir vamos explanar sobre as etapas da modelagem, como meio de ensino da Matemática.

Segundo Bassanezi [6], as etapas da modelagem se dividem em cinco partes bem definidas: Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação. No organograma da Figura 1.2 será apresentado estas etapas e como ocorre o processo de modelagem.

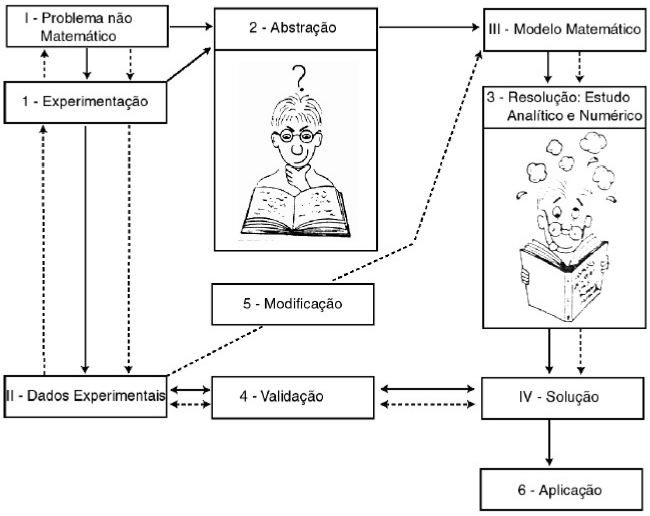


Figura 1.2: Esquema de Modelagem. Fonte: [6]

A respeito da Figura 1.2, temos:

1-Experimentação: É uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados;

2-Abstração: É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer:

2a) **Seleção das variáveis** - A distinção entre as variáveis de estado que descrevem a evolução do sistema e as variáveis de controle que agem sobre o sistema;

2b) **Problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando** - A adequação de uma investigação sistemática, empírica e crítica leva à formulação de problemas com enunciados que devem ser explicitados de forma clara, compreensível e operacional;

2c) **Formulação de hipóteses** - As hipóteses dirigem a investigação e são comumente formulações gerais que permitem ao pesquisador deduzir manifestações empíricas específicas;

2d) **d) Simplificação** - Os fenômenos que se apresentam para o estudo matemático são, em geral, excessivamente complexos se os considerarmos em todos os seus detalhes;

3. Resolução: O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem Matemática coerente;

4. Validação: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto;

5. Modificação: Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos.

Já para Biembengut [11], as etapas de modelagem diferem um pouco de Bassanezi [6], pois ela divide em 3 etapas, subdivididas em seis sub-etapas:

a) **Interação:**

• Que consiste em fazer reconhecimento da situação-problema;

• Realizar a familiarização com o assunto a ser modelado, ou seja, se apropriar de referencial teórico, buscar informações relevantes e coletar os dados.

b) **Matematização:**

• Que é a formulação do problema, ou seja, elaborar a hipótese, baseada nas informações e dados da etapa anterior;

• A busca da resolução do problema com termos do modelo, ou seja, se apropriar dos dados teóricos e tentar traduzir para uma linguagem Matemática.

c) **Modelo Matemático:**

• É chegar numa formulação Matemática, baseada na interpretação da solução, obter uma equação simples ou complexa, dependendo da quantidade de elementos que serão relevantes;

• Posteriormente verificar a eficiência do modelo, ou seja, validar o modelo.

Podemos verificar essas etapas no organograma proposto por Biembengut [11] na Figura 1.3.

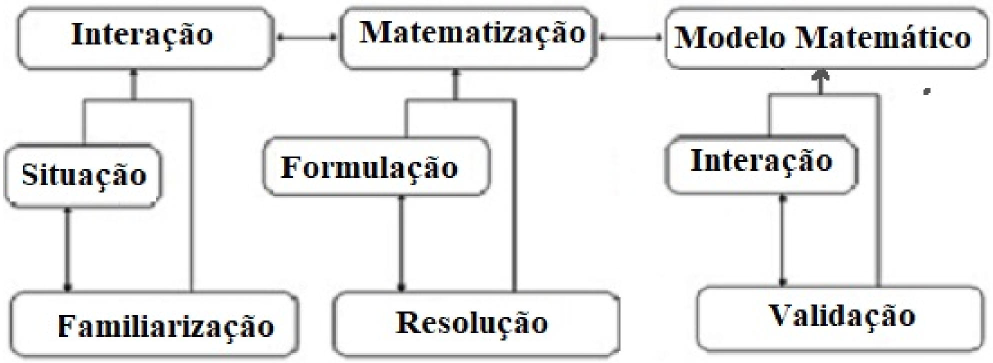


Figura 1.3: Dinâmica da Modelagem Matemática. Fonte: [11], pg 15

O que verificamos ao analisar ambos modelos apresentados, é uma distinção somente nas sub-etapas, pois, o que Bassanezi chama de *Experimentação* Biembengut, chama de *Interação*; o que o primeiro chama de *Abstração*, o segundo chama de *Matematização* e por fim um consenso na criação do modelo matemático. Desta maneira, sem perda de generalidade, optamos em adotar o processo das etapas de modelagem proposto por Bassanezi [6], para a aplicação da modelação no ensino, simplesmente por serem semelhantes e com os mesmos resultados esperados.

Segue a Tabela 1.1 para representar a distinção entre as etapas de modelagem propostas por Bassanezi e Biembengut.

Tabela 1.1: Etapas de modelagem propostas por Bassanezi e Biembengut

Biembengut	**Bassanezi**	**Resumo**
1)Interação: a)Reconhecimento b)Familiarização	Experimentação	Primeiro contato com a situação problema.
2)Matematização: a)Formulação	Abstração	É a "tradução" da situação problema para a linguagem Matemática, ou seja, transformação da linguagem natural para a linguagem Matemática.
3)Resolução	Resolução	Obtenção do modelo matemático
4)Modelo matemático: a)Interpretação b)Validação	a)Validação; b)Modificação	Avaliação do modelo matemático com base na validação da sua capacidade de representar a situação inicial.

Porém, ao se optar por utilizar a modelagem, o professor deve estar ciente que os educandos podem não se limitar a um conteúdo específico, ou seja, é muito vasto o que pode ser explorado e a profundidade que se desprende a cada assunto depende muito também da motivação e interesse deles. Por isso quando se deseja explorar ou aprofundar um determinado conteúdo matemático, é possível utilizar a modelagem, para esse fim?

Ao se modificar ou adaptar a modelagem de ensino para atender determinadas especificidades dos educandos, ou do currículo, não se pode mais falar em modelagem, porém, podemos verificar aplicação e resultados satisfatórios, nos trabalhos de Martinello [30] e Silva [43], com os respectivos temas; *Modelação Matemática: uma alternativa para o ensino de matemática no 1º grau* e *Modelação Matemática e Suas Implicações nas Concepções Matemáticas de educandos de 5ª Série do Ensino Fundamental*, que comprovam sua relevância no ensino.

Segundo Biembengut [11], esse processo é possível e tem resultados muito bom, pois, conseguem despertar o interesse dos educandos, possibilitando o conhecimento e não "o decorar Matemática", mas realmente habilitá-los para utilizarem os conhecimentos matemáticos como estratégia de resolução de problemas nos mais vastos campos do conhecimento. Veremos a seguir como se denomina esse processo que faz adaptações na modelagem com fins específicos.

1.3 A Modelação Matemática no Ensino

Para Bassanezi [6], quando se pensa em cursos regulares, que tem datas e cronogramas fechados a serem compridos, a modelagem Matemática pode não ser uma metodologia aplicável, pois, requer o desprendimento de tempo para que o conhecimento seja realmente assimilado, que os educandos se tornem interessados e ativos, pois, o andamento depende do comprometimento deles também, e até mesmo pela falta de experiência dos professores. Todos esses fatores podem comprometer o cronograma e conteúdo programático escolar. Mas como deixar de lado tal metodologia, haja visto, todas suas vantagens no processo ensino aprendizado?

Verificamos que **não** podemos deixar de lado a ideia de modelagem, mas devemos pensar em um processo que tenha todas essas etapas, com eficácia e, ao mesmo tempo que seja possível cumprir o currículo e cronograma escolar. Desta maneira a proposta da ***Modelação Matemática*** como meio de ensino pode ser a resposta ao desejo de aplicar modelagem no Ensino Fundamental e Médio sem prejuízos. Essa nomenclatura, modelação Matemática, foi utilizado primordialmente tanto por Bassanezi [6] quanto Biembengut [11], na década de 90, para diferenciar a aplicação de uma metodologia ou meio de ensino que perpassa por quase todas as etapas da modelagem, porém, com um diferencial, atender as necessidades do processo de ensino, ou seja, enquanto modelagem pode ser considerada como uma estratégia de método científico, modelação é direcionado especificamente para o ensino e na sua melhoria.

Para Bassanezi [6], a falta de tempo para "cumprir" um programa, a inércia dos estudantes para desenvolver a modelagem e a inexperiência de professores são dificuldades que podem ser minoradas quando modificamos o processo clássico de modelagem, levando-se em conta o momento de sistematização do conteúdo e utilizando uma analogia constante com outras situações problemas. Essa alteração no processo da modelagem com intuito de adequar aos cursos regulares se denomina ***Modelação Matemática***.

Ainda segundo Biembengut [11], a modelação preserva os resultados da modelagem no ensino, que é o grande intuito da melhoria do ensino matemático, e pode ser aplicado em todas as etapas do ensino. No livro "Modelagem Matemática no Ensino", Hein e Salett [10], ambos usam o termo **modelação** para diferenciar a modelagem desse processo que atender aos currículos escolares.

> ... "A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar os educandos na realização de seu próprio modelo-modelagem. Pode valer como método de ensino-aprendizagem de matemática em qualquer nível escolar, das séries iniciais a um curso de pós-graduação. Não há restrição!".(BIEMBENGUT [11], 2009, P.18)

Para entender onde há modificações ou adaptações no processo de **modelagem** para que se torne **modelação**, precisamos relembrar os passos da modelagem, apresentados na Seção 1.2, e estarmos cientes que na modelação o intuito é explorar conceitos específicos do conteúdo programático, desta maneira a etapa de modelagem em que se faz distinção entre modelagem e modelação é o da Matematização ou Abstração.

Desta maneira verificamos que a diferença entre Modelagem e Modelação consiste no fato da primeira buscar o conhecimento matemático seja qual for e até mesmo criar novos modelos matemáticos, ou seja, realizar descobertas diante de uma situação real, não se preocupando com o tempo de assimilação e nem em cumprir cronogramas, já a segunda alia e ajusta à modelagem e suas etapas com os conteúdos programáticos almejados do cronograma, ou seja, o intuito não é novas descobertas , mas explorar os conteúdos programáticos. Nesse sentido, Biembengut [11] ainda complementa ao relatar: "não é modelagem, pois não passa por todas as etapas que a constituí, mas não deixa de ter a capacidade de ofertar aos educandos o contato com a situação problema real, de pesquisar e fazer parte do processo de aprendizagem ativamente".

Segundo Biembengut [11], o processo de ensino utilizando a modelação Matemática deve ter objetivos bem claros.

> ... Os objetivos são:
>
> - aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática;
> - enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno;
> - despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;
> - melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
> - desenvolver a habilidade para resolver problemas; e
> - estimular a criatividade. (BIEMBENGUT, 2000, p. 18)

Podemos inferir que as Etapas da Modelação, baseados nas etapas da modelagem de Bassanezi [6] com suas devidas modificações ou adaptações são:

1. Experimentação: Onde o estudo é direcionado para o assunto que se deseje abordar para cumprir o cronograma e currículo escolar;

2. Abstração: formulação do modelo; seleção de variáveis; problematização; formulação de hipótese e simplificação, podem ser direcionadas para o conteúdo desejado;

3. Resolução: O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem Matemática coerente;

4. Validação: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto;

5. Modificação: Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos.

É indubitável que o ensino de Matemática retome seu papel de promover o conhecimento matemático e fazê-la uma ferramenta utilizável tanto em tarefas tidas simples do cotidiano, quanto nas mais complexas que envolvem diretamente um conhecimento de Matemática, mas também em situações onde ela está implícita e não menos importante.

Compreender a Matemática é ter a capacidade de ir além do ditado pelos livros, é pesquisar, é ir a campo, como diz Biembengut (2000) [11] , "... ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado para o aluno, e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria Matemática quanto da natureza do problema a ser modelado."

Neste contexto, a **Modelação Matemática no Ensino** vem de encontro com nossas expectativas, promovendo nos educandos mais interesse nos assuntos matemáticos e na geométricos de maneira favorável pois leva os educandos a busca de conhecimentos e os colocam diante de situações reais, estimulando-os conjecturar, tentar e até encontrar soluções de forma sistêmica.

1.4 Modelação Matemática: a escolha do tema propagação da podridão em maçãs

Para darmos continuidade em nosso trabalho, neste capitulo iremos mostrar nossos, referências para a aplicação de modelação além de como foi feita a escolha do tema referente a maçãs.

Diante dos problemas de tempo, falta de capacitação, desinteresse dos educandos, entre outros que podem comprometer a aplicação de modelação matemática, trazemos para discussão vários pesquisadores que pensando em todas essas problemáticas propõem uma metodologia aplicável, como, por exemplo, Rodney Carlos Bassanezi [6], Maria Salett Biembengut [11], Dionísio Burak [20], além de Ubiratan D'Ambrosio, Monteiro e Franchi, Werner Blum, Peter Galbraith, João Frederico Meyer, Marcelo de Carvalho Borba, Nelson Hein, Lieven Verschaffel, Marineusa Gazzeta (no final desta sessão, na página 27, apresentamos mais pesquisadores e estudiosos sobre o tema).

Para as aplicações das teorias de Modelagem e Modelação escolhemos estudar o problema da propagação da podridão em maçãs. Este tema foi sugerido e discutido juntamente com Prof^{a}. Dr^{a}. Kélem Gomes Lourenço. Verificamos no trabalho de Bassanezi [6], que já mostrava uma maneira de aplicação de Modelagem, nos restava pesquisar e elaborar uma estrategia para explorar tópicos matemáticos (inicialmente notamos a abrangência e possibilidade no campo da geometria, tanto plana quanto espacial) por meio da Modelação matemática.

Por ser uma fruta muito conhecida e apreciada por todos, pode despertar o interesse pelo assunto e desta maneira poderemos explorar o assunto, maçã, que é muito vasto, nos permitindo estudar o plantio, a colheita, os processos de armazenagem, a logística e os problemas de perda na produção desta fruta.

Durante a pesquisa deste tema: a propagação da podridão da maçã, várias leituras foram feitas a princípio percebemos que o tema dava abertura para explorar um conteúdo em defasagem no ensino, o estudo da geometria. Escolhemos relacionar as maçãs com esferas e depois quantificar quantas esferas cabem em um cubo, como determinar o volume entre maçãs dentro de uma caixa. Dentre vários trabalhos sobre a propagação da podridão em maçãs, destacamos os estudos de Mata [31], orientada por Bassanezi [6], que tratava do problema da podridão em maçãs, ao se estudar a organização em pilhas das maçãs dentro da bin (mais detalhes sobre a bin na Seção: 2.1), que a autora fez relação com o empilhamento de balas de canhão enquanto Brasil colônia, pois, saber organizar as balas de canhão era uma necessidade bélica de defesa e contra ataque (ver Anexo 4.2).

Mata [31], relata sobre o Problemas Clássicos de Empilhamento e Empacotamento de Bolas, no trabalho evidenciado que em meados de 1699, preocupada com a defesa da Colônia a Coroa Portuguesa decidiu impulsionar a formação de militares bem treinados no manuseio de peças de artilharia e com competência na construção de fortes para preservar à terra e as riquezas conquistadas. Foi então decidido que seria criada a Aula de Artilharia e Fortificações. Para essas aulas foram escritos dois livros, escritos por José Fernandes Pinto Alpoin, que se tornaram os primeiros livros didáticos de Matemática escritos no Brasil: Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros, respectivamente em 1744 e 1748. Uma de suas maiores tarefas era, a partir da geometria, ensinar como era possível calcular o número de balas de canhão que uma pilha poderia conter. A partir dessa situação, que Mata [31], se baseou para contar o número de maçãs que eram contaminadas a partir de uma fruta contaminada, ou seja, a propagação da podridão.

Este trabalho da Mata, está rico possibilitando explorar conteúdos matemáticos e dá um enfoque maior na geometria espacial, mas o que mais me chamou atenção foi justamente que para se defender os interesses da colônia, houve a necessidade de escrever os dois primeiros livros didáticos de Matemática do Brasil, além da necessidade de utilização da Matemática como ferramenta para resolver uma situação real e emergenciais da época. Portanto, se muda o elemento, mas a necessidade de explorar o empilhamento de bolas, laranjas, maçãs ou esferas é antigo e já havia despertado o interesse em muitos estudiosos, começando em 1611, com a Conjectura de Kepler[6], que tratava da melhor maneira de empacotar esferas.

Pesquisadores que apoiam a Modelação

A seguir enumeramos uma lista de pesquisadores que propõem a Modelação como meio de ensino ou metodologia aplicável no ensino, e um breve relato do trabalho e atuação deles.

1- Rodney Carlos Bassanezi - Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), mestrado em pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) (1971) e doutorado em Matemática pela (Unicamp) (1977). Trabalhou no IMECC- Unicamp de 1969 a 2001 quando passou a ser pesquisador voluntário nesta universidade, permanecendo até 2006. A partir de 2007 trabalha na Universidade Federal do ABC onde foi o primeiro coordenador do programa de pós-graduação do CMCC. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Análise, atuando principalmente nos seguintes temas: Teoria Fuzzy: Sistemas dinâmicos subjetivos; Biomatemática: epidemiologia, ecologia; Educação matemática: Modelagem.

2- Maria Salett Biembengut - Possui graduação em Pedagogia pela Faculdade Plínio Augusto do Amaral (FPAA). É Matemática com especialização na Universidade

[6] Em 1611, o físico, matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler propôs que a melhor maneira de se empilhar objetos esféricos como frutas, por exemplo, seria organizá-los na forma de pirâmide. No entanto, ele não conseguiu provar que estava certo, e esse problema enigmático acabou ficando conhecido como a "Conjectura de Kepler".

Estadual de Campinas (UNICAMP), pedagoga, mestra em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), doutora em Engenharia de Produção e Sistemas pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e pós-doutora em Educação pela A Universidade de São Paulo (USP) (2003) e pela University of New Mexico - USA (2009). Na Universidade Regional de Blumenau (FURB). Dedica-se à pesquisa em Modelagem Matemática na Educação desde 1986. Publicou dezenas de artigos em periódicos especializados e em anais de Eventos, onze livros e 25 capítulos de livros e organizou três livros. Orientou dezenas produções de final de cursos: doutorado, mestrado, especialização, graduação; e iniciações científicas nas áreas de Educação e Educação Matemática. Foi Presidente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM (jan/1992 - jul/1995) e do Comitê Interamericano de Educação Matemática - CIAEM (jul/2003 à jul/2007), membro do IPC Aplicações & Modelagem - International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) (2001-2007). Membro do International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications e idealizadora e fundadora do Centro de Referência em Modelagem Matemática no Ensino (CREMM). (Texto informado pelo autor)

3- Dionísio Burak Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (1973), mestrado em Ensino de Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1987) e doutorado pela Universidade Estadual de Campinas (1992). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem Matemática na educação Matemática, ensino e aprendizagem e ensino de Matemática. Pós-Doutorado (2010) - Universidade Federal do Pará (UFP).

4- Werner Blum - Universidade de Kassel, Alemanha. Seu interesse de pesquisa inclui modelagem em e aplicações matemáticas, literacia e qualidade de instrução Matemática. Ele tem sido coordenador do projeto KasseI-Exeter Project e é correntemente um membro do grupo de PISA Mathematics Expert Group, coordenador do Grupo de Estudo sobre Aplicações e Modelagem em Educação Matemática do ICMI e Co-coordenador de vários estudos empíricos no ensino de Matemática e habilidade profissional dos professores.

5- Peter Galbraith - Universidade de Queensland, Austrália. É um leitor adjunto em educação - a Universidade de Queensland. Ele é membro da International

Executive da Comissão Internacional de Instrução de Matemática (ICMI, 2003 - 2006); Comitê Internacional do Programa e Proceedings co-Editor: ICMI Study Group 14 (Aplicações e Modelagem em Educação) (2002-2006); Conferência Internacional para o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações (Presidente 2003 - 2007); Academia Australiana de Ciências - National C'tee for Mathematics (2003-); Instituto Australiano de Ciências Matemáticas (membro do Comitê de Educação 2004); Grupo de Pesquisa de Educação Matemática da Australásia (Presidente 2000-2002); Sociedade de Dinâmica de Sistemas - Capítulo Australasian (Vice-presidente 2000-2003). Inclui mais de 150 publicações acadêmicas e profissionais, autoria individual ou colaborativa além de mais de 25 livros. Os artigos apareceram em 16 revistas internacionais e também em publicações nacionais.

6- João Frederico Meyer - Universidade Estadual de Campinas- Brasil. Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP, 1970) e doutor em Matemática pela mesma universidade. É professor do Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação (IMECC) desde 1971 e tem colaborado na Faculdade de Educação (Educação Matemática), na Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP/Rio Claro - São Paulo. Fez breve período de estágio no INRIA, na França e participa do Grupo de Biomatemática do IMECC, onde coordena a parte de Ecologia Matemática.

7- Marcelo de Carvalho Borba - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) - Brasil. Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ, 1983), mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista -Júlio de Mesquita Filho (UNESP, 1987) e doutor nessa mesma área pela Cornell University, Estados Unidos (1993). Em 2005 tornou-se Livre Docente em Educação Matemática pela UNESP. É professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, SP. Por curtos intervalos de tempo fez estágios de pós-doutoramento e foi professor visitante nos Estados Unidos, Dinamarca, Canadá e Nova Zelândia. É autor de diversos artigos e livros no Brasil e no exterior e participa de diversas comissões em nível nacional e internacional. Coordenador do Grupo de Pesquisa em Informática (GPIMEM), outras Mídias e Educação Matemática

8- Nelson Hein - Universidade Regional de Blumenau (FURB), Brasil. Graduação em Matemática pela Fundação Universidade Regional de Blumenau (1988), graduação em Ciências de I Grau pela Fundação Universidade Regional de Blumenau (1987), mestrado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (1994), doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (1998) e pós-doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (2003). Atualmente é professor titular da Fundação Universidade Regional de Blumenau. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Análise Numérica, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino, modelagem Matemática, otimização, modelos matemáticos e educação.

9- Ubiratan D'Ambrosio - Universidade de Campinas - Brasil. Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo, Professor Emérito da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Atualmente é Professor dos Programas de Pós-graduação em Educação Matemática e em História da Ciência, da PUC-SP; Professor Credenciado nos Programas de Pós-graduação do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP-Rio Claro e da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. É também Presidente da Sociedade Brasileira de História da Matemática e Presidente Honorário da Sociedade Brasileira de Educação Matemática; "fellow" da American Association for the Advancement of Science -AAAS (1983). Recebeu a "The Kenneth O. May Medal in the History of Mathematics", oferecida pela International Commission on History of Mathematics (2001) e a "Felix Klein Medal" oferecida pela International Commission of Mathematics Instruction (2005). Foi Diretor do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP (1972-80), Chefe da Unidade de Melhoramento de Sistemas Educativos da Organização de Estados Americanos, Washington, DC (1980-82), Pró-Reitor de Desenvolvimento Universitário da UNICAMP (1982-1990). E Professor Emérito da Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP. No momento é Professor dos Programas de Pós-graduação em Educação Matemática e em História da Ciência, da PUC-SP; Professor Credenciado nos Programas de Pós-graduação do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP - Rio Claro e da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

10- Lieven Verschaffel - Universidade de Leuven - Bélgica. Lieven Verschaffel (1957, Eeklo, Belgica) obteve em 1984 o título de Doutor em Educação em Ciências na Universidade de Leuven (Bélgica). De 1979 até 2000 obteve vários apoios de pesquisa no *Fund for Scientific Research, Flanders* (Bélgica). Desde 2000 ele tem sido professor na Faculdade de Psicologia e Educação em Ciências na Universidade de Leuven. Seus principais interesses de pesquisa são: (elementar) educação matemática, ensino e aprendizagem na resolução de problemas, meta cognição e aspectos evidenciados na aprendizagem e no ensino com o uso de computador. Nos últimos 20 anos, Lieven Verschaffel foi (co-)editor de vários jornais científicos na língua holandesa sobre pesquisa em ensino e aprendizagem. Tem sido assistente e editor da *Learning and Instruction* e editor associado da *Research Dialogue in Learning and Instruction.* Correntemente, ele é membro do conselho editorial de *Mathematical Thinking and Learning, Educational Studies in Mathematics and Adults Learning Mathematics, Learning and Instruction, and Educational Research Review. É também, co-editor de uma série de livros: New Directions in Mathematics and Science Education (Sense Publishers).* Ele tem proferido palestras em vários congressos internacionais de pesquisa. Algumas das palestras que fez foi: 9th International Conference on Mathematical Education (ICME), Tokyo, Japan (Agosto, 2000), 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) in Norwich, UK (Julho, 2001), 10th Biennual Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI) in Padua, Italy (Agosto, 2003).

11- Marineusa Gazzetta -possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas (1963) e mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1989). Atualmente é professora da Universidade Metodista de Piracicaba, professora e assessora de curso da Universidade do Estado de Mato Grosso e Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Formação de Professores, atuando principalmente nos seguintes temas: educação Matemática, etnomatemática, modelagem Matemática, aprendizagem, Ensino Fundamental e geometria.

Capítulo 2

Modelos: uma abordagem do problema da propagação da podridão em maçãs

> "*Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.*" *(BASSANEZI, 2014, p.20)*

Neste capítulo nos ateremos em descrever em detalhes os modelos contínuos, discretos e geométricos, apresentados por Bassanezi [6], mas com uma abordagem nossa. Ressaltamos nossas contribuições nos modelos poe ele apresentados no coso da propagação da podridão em maçãs. Para isso, acrescentamos algumas tabelas e gráficos, fizemos breves comentários e comparações de cada modelo e suas respectivas versões, além de incluirmos informações pertinentes ao assunto. Realizamos algumas adaptações[1]para os ajustes do nosso tema e também visando a comodidade do leitor. Todo esse capítulo foi baseado em [6].

Dentre os vários significados da palavra "modelo", neste capítulo, usaremos o termo segundo as ideias de Bassanezi [6], (2014) "Modelo Matemático é um conjunto de

[1]As figuras e tabelas apresentadas neste capítulo foram reconstruídas, modificadas ou criadas para a conveniência do leitor.

símbolos e relações Matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado."

Bassanezi ao ministrar um curso de aperfeiçoamento de professores na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava (FAFIG[2]) de Guarapuava e Palmas em 1988, cidades situadas na região sul do estado do Paraná, diante da percepção do distanciamento entre a prática pedagógica e a participação efetiva do educador, propôs que os educandos procurassem um tema mais próximo de sua realidade. Como nessa região a produção de maçã é grande e faz parte da realidade da comunidade foi escolhido o tema *maçã*, e assim a obtenção de dados era mais acessível.

2.1 Podridão em maçãs: Conhecendo um pouco sobre a maçã

Segundo Mathias [32], a maçã é uma fruta mundialmente conhecida e é consumida em todos os continentes, típica de clima frio. Quando os primeiros colonizadores europeus a trouxeram para o Brasil, as melhores condições para o cultivo ocorreu em Santa Catarina, ao avançar para o Rio Grande do Sul e Paraná, passou a formar, e é até hoje, o principal polo produtor da fruta no Brasil. O plantio requer alguns cuidados de espaçamento, além da análise de solo e cuidados durante o crescimento da planta, porém, para a análise de dados do problema da propagação da podridão em maçãs, iremos nos ater a outros estágios da produção.

De acordo com Girard [25], quando saboreamos uma maçã nem nos damos conta de toda a logística até chegar a nossa mesa, que começa em saber o momento correto da colheita, pois, as frutas não podem estar maduras e nem verdes demais. Cuidados específicos são necessários: os catadores devem ter cautela ao realizarem o manuseio ainda no campo; no trajeto destas frutas até os locais de armazenagem não podem ficar expostas ao sol ou às mudanças repentinas de temperatura; quando chegam aos armazéns refrigerados, elas deverão ficar sob temperatura controlada por um curto período, pois, ainda existe o tempo gasto pelo transporte até chegar aos grandes centros de distribuição nas capitais de todo país, e então só aí podemos desfrutar da fruta.

[2]Atualmente é a Unicentro. A Unicentro é uma das mais jovens Universidades do Estado do Paraná. Ela surgiu no ano de 1990 da fusão de duas Faculdades: a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava - Fafig e a Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Irati - Fecli.

> ... maçãs são muito suscetíveis a danos mecânicos, motivo pelo qual não devem ser manipuladas além do necessário. Devem se tomar as seguintes cautelas na colheita: não derrubar as frutas, colher as frutas sadias em repasses e com estado de maturação adequado, sem folhas para evitar riscos de infecção, e evitar colher as frutas molhadas. As frutas caídas no chão não devem ser colocadas junto com as colhidas.
> Os efeitos de danos mecânicos não podem ser revertidos e irão acelerar a deterioração e reduzir o valor do produto. A colheita é realizada normalmente em sacolas de fundo falso, sendo as frutas depositadas em **bins**[3], (ver Figura 2.1), os quais facilitam o transporte até a central de embalagem...
> ... As bins representam um investimento significativo para a maioria dos produtores e portanto, devem ser mantidos limpos, desinfetados e em bom estado de conservação, sendo armazenados em lugar fechado quando não estão em uso. (GIRARD, 2018, p.148)

Figura 2.1: Bin: Caixa de madeira. Fonte: [13]

Informações relevantes da logística das frutas encontramos segundo o trabalho de Bassanezi [8].

> A armazenagem das maçãs é feita em câmaras frigoríficas onde são depositadas em caixas de madeira (*bin*) sobrepostas que comportam aproximadamente, 3000 frutas. Quando alguma maçã está contaminada com a podridão, à doença se propaga rapidamente contaminando as outras frutas ao seu redor - estima-se que em 12 dias, 80% das maçãs da caixa são contaminadas, comprometendo posteriormente todo o estoque. A modelagem Matemática, neste caso, visa analisar a dinâmica da doença. (BASSANEZI, 2012, p.105)

[3]Segundo o dicionário Collins, bin é Cesto, binne do inglês antigo, provavelmente de origem celta, manjedoura, presépio-Celta, como em galês *benn*.

Conforme Mata (2010, p.14) "A podridão é uma doença que se propaga por contato direto e pode causar perdas expressivas da produção, podendo atingir a totalidade das frutas armazenadas."

> Das doenças de verão da macieira que causam podridão de frutos no Brasil, as mais importantes são a podridão branca (*Botryosphaeria dothidea, sinn. B. berengeriana*), a podridão amarga (*Colletotrichum gloeosporioides, C. acutatum*) e a podridão "olho de boi" (*Cryptosporiopsis perennans*). As três ocorrem em todas as plantações e tornam-se mais evidentes quando a fruta atinge a maturação e diminuem os mecanismos de resistência. Isto ocorre no período próximo da colheita, o que exige maiores cuidados quanto ao uso de fungicidas para evitar a colheita de maçãs com resíduos não permitidos. Os sintomas destas doenças podem ser constatados no campo, durante a frigorificação e na comercialização da fruta. [Emb2002][4]
> As doenças iniciadas durante a frigorificação são causadas, principalmente, pelo fungo *Penicillium expansum*, que origina **a podridão** que é conhecida como "mofo azul" e por *Botrytis cinerea*, associado ao "mofo cinzento". (SANHUEZA, 2002)[42]

As perdas durante o transporte das maçãs, em caminhões refrigerados, são pequenas, pois, são mantidas as condições das câmaras frigoríficas. Geralmente o tempo de deslocamento entre os centros de armazenamento e os centros de distribuição são pequenos e não influenciam tanto no processo.

Como já vimos, essas maçãs após a colheita ficam alguns dias e até semana nas câmaras frigoríficas, até serem transportadas e é aí que a maioria da produção se perde. E é justamente nesse estágio da logística que iremos focar nosso trabalho para obter o **Modelo**.

Ao analisar todas as informações nas Seção 2.1, envolvidas na etapa de frigorificação, onde o maior problema de perda é constatado, iremos filtrar as variáveis de maior relevância, pois à medida que levarmos em consideração muitas variáveis a construção do modelo se torna muito complexo, dificultando o processo. Após essa filtragem iremos introduzir dados e variáveis para facilitar os cálculos e entendimento em cada fase da obtenção do modelo, que serão aplicados para as quantidades de maçãs que uma bin comporta.

[4]Referência ao trabalho de Sanhueza [42]

Apresentamos algumas notações:

(a) $M(t)$ = quantidade de maçãs contaminadas no instante t;

(b) t = tempo de propagação (em dias);

(c) T = quantidade total de maçãs em uma bin.
(Na descrição do modelo que trazemos adotaremos 3000 frutas, para simplificar o modelo e não o problema (Essa quantidade de maçãs por bin pode variar conforme o tamanho médio de cada fruta))

(d) $S(t)$ = quantidade de maçãs sadias na bin.

Esse processo de propagação da doença, a partir de maçãs infectadas, pode inicialmente ocorrer com qualquer quantidade de maçãs infectadas, uma vez que é praticamente impossível identificar qual fruta está contaminada precocemente, pois, segundo Petri [40], "o apodrecimento ocorre de dentro para fora do fruto", ou seja, a maçã pode estar perfeita por fora e infestada de fungos por dentro.

> [...] nas cebolas o apodrecimento de dentro para fora é causado por bactérias. Nos períodos mais chuvosos, a água penetra pela superfície e se aloja no bulbo, favorecendo o desenvolvimento dos microrganismos No caso da maçã, os culpados são os fungos. José Luiz Petri, presidente da Sociedade Brasileira de Fruticultura, diz que, quando o fruto está ainda se formando, é possível que fungos se instalem em espaços vazios que existem na própria semente. Uma vez colhida a maçã, o que ocorre entre janeiro e abril, parte da produção é armazenada em câmaras frias, de onde são retiradas ao longo do ano. Quanto mais tempo a maçã passa na câmara, maior é a chance de que o fungo venha a se desenvolver, e a maçã apodreça. (PETRI, 2009, p.32)

Para a proposta da construção desse modelo de contaminação iremos analisar todo o processo da propagação da doença em uma bin considerando que exista inicialmente 1 (uma) única maçã contaminada no centro da bin. Desta maneira podemos denotar que no instante inicial $t = 0$, o número de maçãs contaminadas seja $M(0) = 1$, ou seja:

$$M(0) = 1 \text{ (condição inicial)} \tag{2.1}$$

Segundo Bassanezi [6], quando a propagação se inicia com uma fruta infectada, conforme adotamos como condição inicial, pode-se estimar, segundo verificação realizada nas câmaras frigoríficas, que em 12 dias 80% das maçãs da bin, estarão podres. Desta maneira o número $M(t)$, no instante $t = 12$ (em dias), será dada por:

$$M(12) = 0,8T \ , \tag{2.2}$$

Que é um caso particular da propagação da podridão em maçãs.

2.2 Um Modelo Contínuo no Problema da Propagação da Podridão em Maçã

Diante dos dados apresentados na Seção 2.1, na página 36 podemos chegar em uma hipótese sobre a velocidade dessa propagação.

Hipótese: "A velocidade de propagação da doença é proporcional à proximidade (encontro) entre maçãs sadias e contaminadas".

Entendemos como velocidade de propagação à variação (nesse caso, aumento), em relação ao tempo, da quantidade de maçãs podres na bin.

Inicialmente trazemos um modelo já conhecido na literatura e uma Lei sobre Variação que dão aporte às discussões de modelos do tipo contínuo.

1ª) Modelo de crescimento populacional proposto por Malthus, quando consideramos o crescimento populacional dos fungos.

2ª) Lei das Ações das Massas, ao analisar a velocidade de propagação da doença que é proporcional à proximidade (encontro) entre maçãs sadias e contaminadas.

A seguir iremos apresentar o modelo e a lei, ambos citados anteriormente.

Modelo de crescimento populacional proposto por Malthus

O modelo malthusiano pressupõe que a taxa segundo à qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Em símbolos, se $P(t)$ é a população total no instante t, então, o modelo contínuo de Malthus é:

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P(t),$$

onde k, é a constante de crescimento.

Lei das Ações das Massas-Química

A Lei de ação das Massas, é amplamente utilizada na química para verificar a velocidade da reação Química entre elementos, considerando a temperatura e os influenciadores de velocidade que cada reagente possui.

> A lei de ação das massas é um modelo matemático utilizado para descrever fenômenos dinâmicos em química, como por exemplo,a cinética de reações químicas. A lei diz que a velocidade de uma reação química elementar, isto é uma reação química que ocorre em apenas uma etapa, é proporcional à concentração dos reagentes.(AROEIRA, 2018)

Em uma reação química, dois reagentes A e B produzem uma nova substância $(C+D)$.

$$\alpha A + \beta B \to C + D$$

Para a verificação da velocidade da reação temos:

$$v = C_1 \cdot [A]^{\gamma\alpha}[B]^{\gamma\delta},$$

onde:

- v é a velocidade de reação;
- C_1 é a constante de velocidade;

- A e B são os reagentes;
- α e δ coeficiente estequiométrico de A e B respectivamente;
- γ é a ordem da reação de cada reagente.
  (Para reações elementares a ordem é simplesmente o coeficiente estequiométrico da espécie, que dependem da temperatura, em outras reações, o produto dele com os coeficientes estequiométricos, são os Influenciadores da velocidade da reação, ou seja, a sucessibilidade que cada reagente tem em reagir).

Essa lei de reação de massas também é utilizada em outros campos fora da Matemática, como modelo inicial para obtenção de outros modelos mais sofisticados.

> ... outros trabalhos importantes foram feitos por Harmer, Ross e Moshkovskii, que formularam teorias específicas sobre a transmissão de doenças utilizando modelos matemáticos simples...
> ... Dentre essas contribuições duas podem se destacar: a primeira é de Harmer com a "lei de ação das massas", a qual diz que a taxa de disseminação de uma doença é assumida ser proporcional o produto entre a densidade das pessoas suscetíveis e a densidade das pessoas infectadas... (Sanches, [41], 2011, p.15)

Prosseguindo com as discussões de alguns modelos específicos aplicados ao problema da propagação da podridão em maçãs.

2.2.1 Buscando aplicar um modelo contínuo

Segundo Bassanezi [6], "... não existem modelos definitivos. A modelagem é um processo. Um modelo de fato ou fenômeno real sempre pode ser melhorado...". Primeiramente por se tratar de um ser biológico, podemos verificar analogia com outros modelos já propostos, pois a evolução de modelos se dá justamente quando em aporte de um preexistente, tema possibilidade de melhorar e desta maneira chegar mais próximo possível da realidade do que se pretende modelar. Neste sentido o crescimento populacional de fungos se comporta semelhante ao crescimento populacional, proposto pelo inglês Malthus em 1798.

> ... a importância da analogia no processo de modelagem, o que implica naturalmente, que conhecimentos adquiridos numa determinada área podem ser

> transferidos para outras áreas. Em termos de equações variacionais (diferenciais ou de diferenças) esta implicação é evidenciada em muitas situações, indicando que um bom modelador deve, antes de mais nada, conhecer os modelos clássicos da literatura mesmo porque uma única equação ou sistema pode servir para modelar situações de naturezas completamente diversas. (BASSANEZI, 2014, p.325)

Para a utilização do modelo de Malthus, iremos considerar as maçãs como indivíduos de uma população, o que pode ser facilmente entendido, pois a contaminação se dá de maçã para maçã, ou seja, o fungo (doença) depende da maçã. Desta maneira devemos considerar que para cada bin, a população T de maçãs é constante, ou seja, 3000. Podemos ainda perceber a relação entre as maçãs sadias e contaminadas dentro da bin, pois a quantidade de maçãs sadias S, diminuem à medida que o número de maçãs podres "M" aumentam.

Ajustes de notação

Agora iremos alterar os símbolos e realizar alguns ajustes, tanto do modelo proposto por Malthus quanto a lei das ações das massas, ao nosso problema da propagação da podridão em maçãs, apoiados nas ideias de Bassanezi e também para conveniência do leitor. Na tabela a seguir, mostram essas alterações de forma direta.

Tabela 2.1: Ajustes de notação

	Original	Ajustes de Notação
Modelo de Malthus	$\frac{dP}{dt} = k \cdot P(t),$	$\frac{dM}{dt} = k \cdot M(t),$
Lei das Massas	$v = C_1 \cdot [A]^{\gamma\alpha}[B]^{\gamma\delta}$	$V = C_1 \cdot S^{\theta} \cdot M^{\varepsilon}$

Para o modelo de Malthus, as mudanças de símbolos, são intuitivos, ou seja, onde se lia P, de população, agora iremos ler M, de quantidade total de maçãs na bin. Para o tempo t, e a constante k, continuaram com os mesmos símbolos.

Já para a leis da ação das massas, temos que realizar algumas considerações: primeiramente os reagentes são as maçãs sadias S, e as maçãs contaminadas M, logo nos lugares dos reagentes A e B, iremos usar S e M. Não iremos usar os símbolos de separação de reagentes "[ ]"; e por fim denotar $\gamma\alpha = \theta$ e $\gamma\delta = \epsilon$. Posteriormente, como no nosso caso hipotético, não há variação de temperatura, pois as maçãs estão em câmaras frias com temperatura controlada, e como não há maçãs que sejam mais suscetíveis a contaminação do que as outras, nem maçãs que estejam mais próximas umas das outras, podemos inferir que os influenciadores de velocidade, θ e ε, não sofrem variação, logo são constantes. Desta maneira teremos:

$$C = \theta = \varepsilon = 1 \ .$$

Logo:

$$V = 1 \cdot S \cdot M \implies V = S \cdot M \ . \tag{2.3}$$

Para a utilização do modelo de Malthus no problema da propagação da podridão em maçãs, devemos nos lembrar das informações vistas na Seção: 2.2.1, ou seja, o número de maçãs sadias poderá ser obtido pela função S, a seguir:

$$S(t) = T - M(t).$$

Percebe-se que esta função S, pode ser relacionada com a velocidade de reação das massas (química), ou seja, se levarmos em consideração que $S(t) = V$, não haverá discrepância de resultados. Temos

$$S(t) = V \Rightarrow S(t) = S \cdot M,$$

onde

$$S(t) = T - M(t).$$

Concluímos que:

$$S(t) = (T - M(t)) \cdot M(t).$$

Analisando ainda ambos os modelos, podemos verificar que o crescimento (propagação da podridão) depende diretamente da velocidade de contaminação. Assim podemos considerar o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SM \\ \\ \dfrac{dM}{dt} = \beta SM \\ \\ M_0 = 1 \end{cases}, \tag{2.4}$$

onde β é a taxa de contaminação, ou seja, dependendo do fungo ela pode ser maior ou menor.

O sistema (2.4) pode ser simplificado para o caso do crescimento da propagação da podridão em maçãs, pois no primeiro caso, quando β é negativo, demonstra a relação diminuição das maçãs sadias em relação à quantidade de maçãs podres, já no segundo caso, quando β é positivo demonstra o aumento de maçãs podres em relação ao número de maçãs sadias. Desta maneira optamos pelo segundo caso, para prosseguirmos, daí teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = \beta SM \\ M_0 = 1 \end{cases}. \tag{2.5}$$

Estamos diante de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem. Note que $S(t) = S \cdot M = M(T - M)$. Então:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = \beta M(T - M) \\ M_0 = 1 \end{cases}.$$

Pelo método da separação de variáveis, vamos resolver essa EDO de primeira ordem. Inicialmente:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{M(T - M)} = \beta dt \\ M_0 = 1 \end{cases}.$$

Aplicando integração em ambos os membros teremos

$$\int \frac{dM}{M(T-M)} = \int \beta dt \ .$$

Podemos resolver a integração do primeiro membro decompondo-a em uma soma de frações parciais e posteriormente integrá-la membro a membro.

$$\int \frac{1}{M(T-M)}\ dM = \int \left(\frac{c_1}{M} + \frac{c_2}{(T-M)} \right) dM, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Temos:

$$\frac{1}{M(T-M)} = \frac{c_1 \cdot T + M(c_2 - c_1)}{M(T-M)}.$$

Assim,

$$\begin{cases} 0 = M(c_2 - c_1) \\ 1 = c_1 \cdot T \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1 = \dfrac{1}{T} \end{cases} . \tag{2.7}$$

Ao substituir (2.7) em (2.6), teremos

$$\int \left(\frac{1/T}{M} dM + \frac{1/T}{(T-M)} dM \right) = \int \beta dt.$$

Sendo, $1/T$ constante,

$$\frac{1}{T} \int \frac{1}{M} dM + \frac{1}{T} \int \frac{1}{(T-M)} dM = \int \beta dt.$$

Daí,

$$\frac{1}{T} \ln M - \frac{1}{T} \ln{(T-M)} + c_3 = \beta t + c_4, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

e, assim,

$$\frac{1}{T} \ln \left(\frac{M}{T-m} \right) + c_3 = \beta t + c_4.$$

Agora,

$$ln\left(\frac{M}{T-M}\right)^{1/T} = \beta t + \underbrace{c_4 - c_3}_{c_5} \Rightarrow \frac{1}{T}\cdot ln\left(\frac{M}{T-M}\right) = \beta t + c_5$$

Ao multiplicar ambos os membros por T,

$$ln\left(\frac{M}{T-M}\right) = T\cdot(\beta t + c_5),$$

Onde $T \cdot c_5$ adotaremos como "c_0", assim,

$$e^{ln\left(\frac{M}{T-M}\right)} = e^{(\beta t\cdot T + c_0)} \Rightarrow \left(\frac{M}{T-M}\right) = e^{(\beta t\cdot T + c_0)}$$

Adotaremos $e^{c_0} = c$, Assim:

$$\left(\frac{M}{T-M}\right) = e^{\beta T\cdot t}\cdot e^{c_0} \implies M = (T-M)\cdot c\cdot e^{\beta T\cdot t} \implies M = T\cdot c\cdot e^{\beta T\cdot t} - M\cdot c\cdot e^{\beta T\cdot t} \implies$$

$$M + M\cdot c\cdot e^{\beta T\cdot t} = T\cdot c\cdot e^{\beta T\cdot t} \implies M\left(1 + c\cdot e^{\beta T\cdot t}\right) = T\cdot c\cdot e^{\beta T\cdot t}.$$

Desta maneira obtemos uma solução particular M, para nossa equação

$$M(t) = \frac{c\cdot Te^{\beta Tt}}{1 + c\cdot e^{\beta Tt}}. \tag{2.8}$$

Usando a condição inicial $M(0) = 1$ da equação (2.1) em (2.8),

$$M(0) = \frac{Te^{\beta T\cdot 0}}{1 + c\cdot e^{\beta T\cdot 0}} \implies 1 = \frac{T\cdot k}{(1+c)} \implies 1 + c = Tc \implies$$

$$c = \frac{1}{T-1} \simeq \frac{1}{T} \simeq 0,00033333. \tag{2.9}$$

Após essa etapa, para efeito de cálculos iremos tomar $c = \dfrac{1}{T}$, pois uma maçã a menos na população de 3000 é insignificante.

Multiplicando por $e^{-\beta T t}$, na equação (2.8) teremos;

$$M(t) = \frac{T \cdot c}{c + e^{-\beta T t}} \tag{2.10}$$

Para obter uma solução particular em função somente do tempo t, em nossa equação particular é necessário substituir c por $\dfrac{1}{T}$ na Equação: (2.10)

$$M(t) = \frac{1}{1/T + e^{-\beta T t}} \Rightarrow \quad M(t) = \frac{T}{1 + T \cdot e^{-\beta T t}} \tag{2.11}$$

Agora para determinar o valor de β, que é taxa de contaminação, iremos considerar a informação que em 12 dias estima-se que 80% da produção esteja contaminada, ou seja, $M(12) = 0,8T$, na equação (2.11), e depois uma sucessão de passos triviais para determinar uma relação de β com o número T, e também o seu valor.

$$0,8T = \frac{T}{1 + Te^{-12\beta T}}$$

$$\Rightarrow 0,8 + 0,8T \cdot e^{-12\beta T} = 1 \Rightarrow 0,8T \cdot e^{-12\beta T} = 1 - 0,8$$

$$\Rightarrow 0,8T \cdot e^{-12\beta T} = 0,2 \ \Rightarrow e^{-12\beta T} = \frac{0,2}{0,8T} = \frac{1}{4T}$$

$$ln(e^{-12\beta T}) = ln\left(\frac{1}{4T}\right) \Longrightarrow -12\beta T = ln\left(\frac{1}{4T}\right)$$

$$\Longrightarrow \beta = -\frac{1}{12T} \cdot ln\left(\frac{1}{4T}\right) \approx 0,00026090. \tag{2.12}$$

Modelo Contínuo Versão I

Sabendo o valor de β e a quantidades T de maçãs na bin, podemos determinar o valor do produto deles, $\beta \cdot T$, temos $0,00026090 \cdot 3000 = 0,78272182$. De modo que ao substituir os valores de T e β na equação (2.11) teremos o Modelo Contínuo Versão I, que determina o número de maçãs podres em função do tempo:

$$\boxed{M(t) = \frac{3000}{3000 \cdot e^{-0,783 \cdot t} + 1}}. \tag{2.13}$$

Agora iremos realizar alguns testes com nosso Modelo Contínuo Versão I.

Exemplo: vejamos os resultados obtidos pelo Modelo (2.13)

- Para $t = 1 : M(1) = 2,18643185$;
- Para $t = 6 : M(6) = 105,85573620$;
- Para $t = 12 : M(12) = 2401,60067000$;
- Para $t = 22 : M(22) = 2999,70280415$;
- Para $t = 23 : M(23) = 3000,86407400$.

Note que para $t = 23$, o número de maçãs excede a quantidade máxima de frutas na bin, dessa maneira, podemos concluir que segundo esse Modelo Contínuo Versão I, em 22 dias todas as maçãs da bin estarão podres.

A seguir temos a Tabela 2.2, que mostra a quantidade de maçãs contaminadas em intervalo de tempo de 1 até 23 dias.

Tabela 2.2: Número de maçãs podres em função do tempo, segundo equação (2.13)

t (dias)	$M(t) = \dfrac{3000}{3000 \cdot e^{-0{,}783 \cdot t} + 1}$
1	2,18
2	4,77
3	10,43
4	22,74
5	49,32
6	105,85
7	222,29
8	447,03
9	831,01
10	1368,06
11	1941,51
12	**2401,60**
13	2693,29
14	2851,58
15	2930,29
16	2967,73
17	2985,16
18	2993,20
19	2996,88
20	2998,57
21	2999,34
22	**2999,70**
23	3000,86

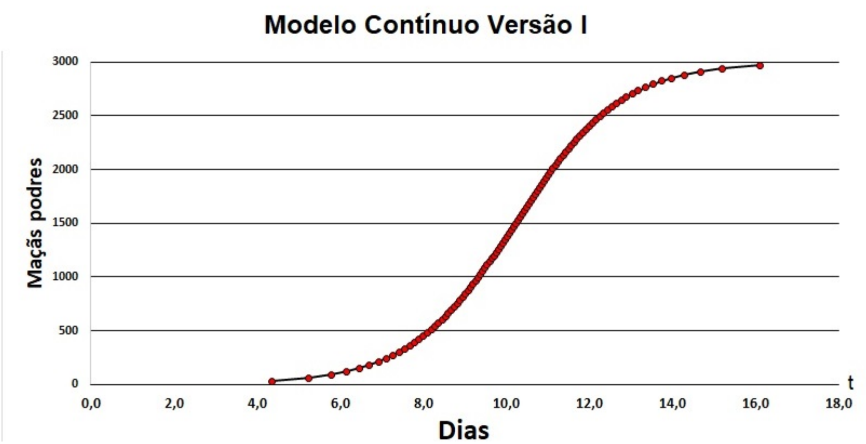


Figura 2.2: Gráfico do Modelo Contínuo Versão I

Ao analisarmos a Tabela: 2.2, e o gráfico da Figura: 2.2 podemos comprovar que em 12 dias cerca de 80% das frutas estão contaminadas, porém, para contaminar o restante da bin, não é razoável que ainda demore o dobro do tempo, ou seja, segundo essa tabela, que fora construída a partir do modelo contínuo Versão I (ver modelo 2.13) a partir do 16º dia, o número de maçãs está muito próximo da contaminação total das frutas, mas parece que para $16 \leq t \leq 23$ o modelo continua crescente, porém, com taxa de crescimento muito pequena. Somente em 22 dias teríamos toda a bin contaminada. Ao analisar o Gráfico: 2.2, após o 16° dia de propagação nos dá uma ideia de patamar, as novas frutas contaminadas terão um tempo de contágio contínuo que é uma fragilidade do modelo.

Modelo Contínuo Versão II

Para obter uma Versão II do Modelo Contínuo, iremos mudar a condição inicial, ou seja, ao invés de usarmos $M(0) = 1$, adotaremos $M(8) = 970$ como nova condição inicial[5]. A motivação para essa condição vem de um estudo de caso discreto, que apresentamos na Seção: 2.3.3. Trazemos essa Versão II para que possamos fazer uma análise desse caso contínuo em diferentes condições iniciais. Dessa maneira os dados para essa nova versão serão:

- $M(8) = 970$, nova condição inicial;
- $M(12) = 0,8T$

Lembrando que a solução (2.10), não sofreu alterações. Assim teremos:

$$M(8) = \frac{c \cdot T}{c + e^{-\beta T \cdot 8}}$$

ou seja,

$$970 = \frac{c \cdot T}{c + e^{-8\beta T}} \Rightarrow c = \frac{970 \cdot e^{-8\beta T}}{T - 970} \tag{2.14}$$

[5]Em 2.32, temos $M(8) = 967$, porém, iremos considerar $M(8) = 970$, pois com a diferença de 3 maçãs não irá fazer grande diferença nos nossos cálculos, haja visto que nosso universo é de 3000 frutas.

Por outro lado, temos que $M(12) = 0,8T$,

$$0,8T = \frac{c \cdot T}{c + e^{-8\beta T}} \Rightarrow c = 4 \cdot e^{e^{-12\beta T}}. \tag{2.15}$$

Das equações (2.14) e (2.15) temos:

$$(T - 970) \cdot 4 \cdot e^{e^{-12\beta T}} = 970 \cdot e^{-8\beta T} \Rightarrow e^{4\beta T} = 8,371 \Rightarrow \beta T = 0,5312 \tag{2.16}$$

Chegando no valor de c,

$$c = 4 \cdot e^{12 \ \cdot \ 0,5312} = 0,006819. \tag{2.17}$$

Substituindo os valores de 2.16 e 2.17 na equação (2.10)obteremos o Modelo Contínuo Versão II, a seguir:

$$\boxed{M(t) = \frac{20,456}{0,006819 + e^{-0,5312 \cdot t}}}. \tag{2.18}$$

Agora iremos analisar alguns resultados para essa Versão II do Modelo Contínuo, na Tabela 2.3, onde é possível perceber que houve mudança nos valores iniciais e nos valores finais, pois ao pegar um intervalo menor entre o instante inicial e final o modelo fica mais realístico.

Tabela 2.3: Modelo Contínuo Versão II

t	$M(t) = \dfrac{20,456}{0,006819 + e^{-0,5312 \cdot t}}$.
1	34,39781154
2	58,043212
5	265,5112768
7	657,955397
8	**970,0344957**
9	1345,122096
10	1740,865304
11	2104,943811
12	**2400,030332**
13	2615,597465
14	2761,411637
15	2854,981256
16	2913,010721
18	2969,352787
19	2981,906359
20	2989,336261
21	2993,721601
22	2996,305749
23	2997,827051
24	2998,722144
25	**2999,248618**

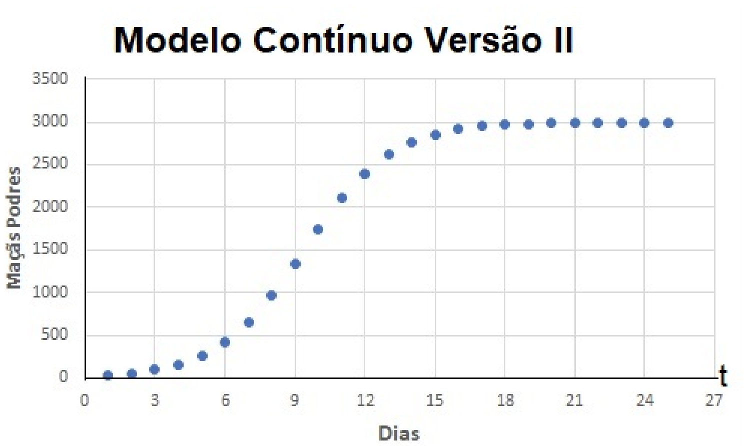


Figura 2.3: Gráfico do Modelo Contínuo Versão II -$M(t)$

Na Tabela 2.3, também podemos comprovar que em 8 dias cerca de 970 frutas estão contaminadas(condição inicial)e que em 12 dias cerca de 80% das frutas estão podres, porém, continua o problema de tempo de contaminação para o restante da bin. Ao analisar o Gráfico da Figura 2.3 e Tabela 2.3, não é razoável que só em 24 dias toda a bin esteja podre que é a fragilidade desse modelo contínuo Versão II.

Por essas fragilidades tanto no modelo contínuo versão I quanto no modelo contínuo versão II, será proposto a construção de outro modelo posteriormente, mas agora vamos remodelar o nosso modelo de obtenção do número de maçãs podres dado tempo, para um que possamos determinar o tempo em relação ao número de frutas podres.

Previsões para percentuais de podridão

Para a previsão do tempo necessário para que um percentual qualquer de T de maçãs estejam contaminadas, deveremos usar um novo parâmetro "p" (uma proporção de maçãs em relação ao número total de maçãs), e daí passaremos a ver t em função de $M(t) = pT$. Dessa maneira ao substituir $M(t)$ por pT em (2.11), teremos:

$$pT = \frac{T}{1 + Te^{-\beta T \cdot t}} \Longrightarrow pTe^{-\beta Tt} + p = 1 \Longrightarrow e^{-\beta Tt} = \frac{1-p}{pT}$$

$$\Longrightarrow -\beta T \cdot t = ln\left(\frac{1-p}{pT}\right) \Longrightarrow t = -\frac{1}{\beta \cdot T} \cdot ln\left(\frac{1-p}{pT}\right).$$

Tomando o valor de $\beta = -\frac{1}{12T} \cdot ln\left(\frac{1}{4T}\right) \approx 0,000261$, obteremos um modelo que determina o percentual de maçãs podres em função do tempo. Nesse caso,

$$t = \frac{12}{ln\left(\frac{1}{4T}\right)} \cdot ln\left(\frac{1-p}{pT}\right), \quad \text{com} \quad 0 < p < 1. \tag{2.19}$$

Se quisermos saber o tempo para determinada porcentagem de maçãs serem contaminadas é só assumir um número para o parâmetro p, tal que para porcentagem se tenha um valor proporcional.

Qual será o tempo para contaminar uma porção p de maçãs?

Por exemplo:

* Para um décimo das maçãs da bin.

$$t = \frac{12}{ln\left(\frac{1}{4T}\right)} \cdot ln\left(\frac{1-p}{pT}\right) = \frac{12}{ln\left(\frac{1}{4 \cdot 3000}\right)} \cdot ln\left(\frac{1-\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} \cdot 3000}\right)$$

$$= (-1,277) \cdot ln\left(\frac{4/5}{1/5 \cdot 3000}\right) = 7,42172096 \;\; \text{dias.}$$

* Para a quinta parte das maçãs da bin.

$$t = (-1,277) \cdot ln\left(\frac{4/5}{1/5 \cdot 3000}\right) = 8,45775980 \;\; \text{dias.}$$

* Para a terça parte das maçãs da bin.

$$t = (-1,277) \cdot ln\left(\frac{2/3}{1/3 \cdot 3000}\right) = 9,34331985 \;\; \text{dias.}$$

* Para a metade das maçãs da bin.

$$t = (-1,277) \cdot ln\left(\frac{1/2}{1/2 \cdot 3000}\right) = 10,22887990 \;\; \text{dias.}$$

* Para 90% das maçãs da bin.

$$= (-1,277) \cdot ln\left(\frac{1/10}{9/10 \cdot 3000}\right) = 13,03603884 \;\; \text{dias.}$$

* Para 99% das maçãs da bin.

$$= (-1,277) \cdot ln\left(\frac{1/100}{99/100 \cdot 3000}\right) = 16,09957328 \ \text{dias}.$$

Em posse dessas informações podemos montar uma tabela com as devidas proporções, para estimarmos o tempo. É necessário ressaltar porque o valor de p, deve estar entre zero e um. Primeiramente para $p = 0$, estaríamos considerando que não exista nenhuma maçã podre, ou seja, não existiria contágio, consequentemente não haveria a propagação da podridão, além do fato que no modelo 2.19, para $p = 0$, teríamos $1/0$ que é uma indeterminação.

Já para $p = 1$, estaríamos pensando em 100% da bin podre, porém, o nosso modelo (2.19), não está definida para este ponto, pois $ln(0) = \nexists$. Mas como sabemos que a bin poderá estar totalmente contaminada, podemos tomar valores para "p" tão próximos de 1 quanto se queira, lembrando que a nossa função tende a $+\infty$ a medida que p tende a 1, porém, essa situação não simula o nosso problema.

Analisamos a Tabela: 2.4 que foi construída a partir do modelo (2.19).

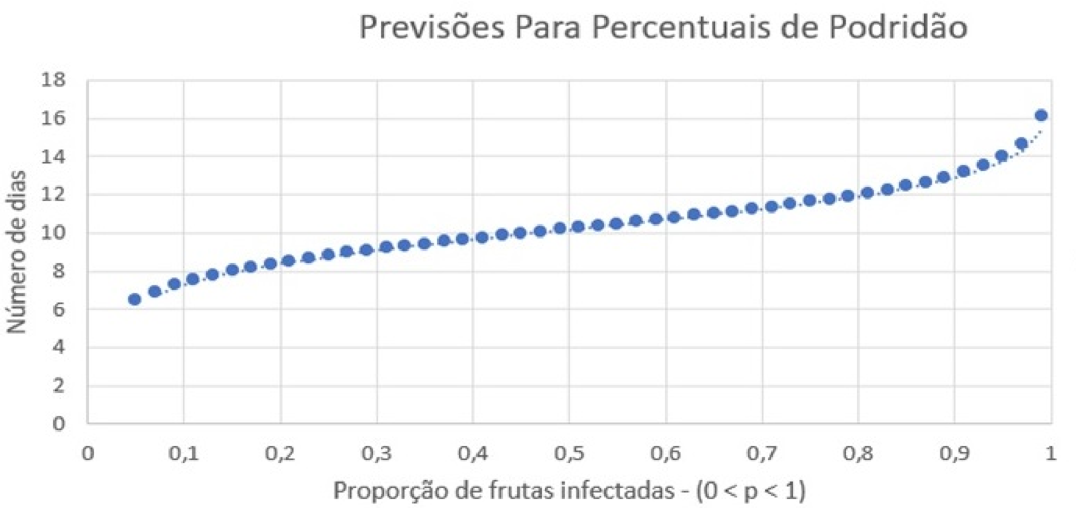


Figura 2.4: Previsões para percentuais de podridão

Tabela 2.4: Previsões para percentuais de podridão

p	t (dias)
0	$\nexists$
$\frac{1}{10}$	$7,42172096$
$\frac{1}{5}$	8,45775980
$\frac{1}{3}$	9,34331985
$\frac{1}{2}$	10,22887990
$\frac{9}{10}$	13,03603884
$\frac{99}{100}$	16,09957328
1	$\nexists$

Agora ao comparar as Tabelas: 2.2 e 2.4 verificamos que $M(t) = p$, pois $M(t(p)) = p$, ou seja, se trata do mesmo modelo somente com objetivos distintas. Podemos verificar a **identidade** na Tabela: 2.5, quando atribuímos uma porção p de maçãs podres, encontramos t, daí ao calcular $M(t)$ teremos p novamente.

Tabela 2.5: Identidade entre $t(p)$ e $M(t)$

p	$t(p)$	$M(t)$
0	-	0
1/10	7,4217210	300,5578808
1/5	8,4577598	601,1301013
1/3	9,3433199	1001,733454
1/2	10,2288799	1502,134044
9/10	13,0360388	2700,977673
99/100	16,0995733	2970,132719
0,99999	27,8794795	2999,997023

Uma breve análise dos resultados obtidos nas versões I e II do modelo contínuo até agora propostos, é que esses modelos estão coerentes somente com alguns instantes da propagação da podridão em maçãs, porém, se analisarmos os dados para $t > 12$, parece que o contágio continua crescente, porém, com taxa de crescimento menor. Em ambos os casos levamos em consideração a "proximidade" ou contato das frutas podres com as sadias, e ao usar a lei das massas 2.3, estamos admitindo que o número de maçãs podres é proporcional ao produto de maçãs podres com as sadias ($V = S \cdot M$), o que talvez seja a fragilidade do modelo, pois quanto mais maçãs podres teremos ainda mais contágios serão feitos e assim nunca haveria decaimento do número de contágios. Dessa maneira, como os resultados podem ser melhorados para todos os instantes, é necessário buscar outro **modelo** que seja mais realístico com o problema da propagação da podridão em maçãs.

2.3 Estudando Modelos Discretos

Ao verificar a "Validação" da resposta, nos modelos contínuos (Versão I e Versão II), conforme Bassanezi afirma " ... um bom modelo matemático é aquele que o usuário, especialista na área onde se executou a modelagem, o considera como tal, tendo as qualidades de ser suficientemente simples e representar razoavelmente a situação analisada". Percebemos a fragilidade para $t > 12$, tanto no modelo contínuo Versão I quanto no modelo contínuo Versão II, pois os resultados não correspondem fidedignamente com a realidade devido ao modelo que considera que o crescimento da propagação continua como uma função exponencial, o que não ocorre pois temos barreiras que impedem esse crescimento.

Portanto, existe a necessidade de propormos a construção de outro modelo que possa ser mais realístico com as informações da situação problema da propagação da podridão em maçãs. Para isso, iremos considerar outros dados relevantes, como capacidade da bin e uma relação da capacidade da bin com a quantidade de maçãs, além dos dados utilizados na elaboração do modelo contínuo que considera ter 80% das frutas podres em 12 dias.

Dados que utilizaremos para a construção do Modelo Discreto:

(a) Uma bin, cuja capacidade é de aproximadamente 3000 maçãs;

(b) As maçãs, que serão utilizadas como unidade de medida para a capacidade da bin, ou seja, 1 maçã será considerada correspondente a 1μ.

(c) Em 12 dias 80% das frutas estariam podres.

Diante destes dados parece que há pouco a fazer, ou seja, em primeiro momento parece tudo muito próximo ao que já tínhamos. Porém, podemos iniciar a construção do modelo discreto, relacionando a capacidade da bin com a unidade de medida maçã (μ), além de impormos alguns parâmetros, tais como adotar a unidade de tempo como sendo cada interação efetuada de maçã podre para as maçãs sadias, pelo simples toque de uma maçã em outra.

Chamaremos de M_n a quantidade de maçãs podres e o indexador "n" como o número que representa o estágio com $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 12, 13\}$. Assim, M_2 representa a quantidade de maçãs podres no 2º estágio de contaminação em maçãs de uma mesma camada.

Na tentativa de encontrar as dimensões da bin em unidade de maçã, temos um problema inicial, pois não sabemos quantas maçãs forram o fundo e nem quantas maçãs determinam a altura dessa bin. Dessa maneira, iremos considerar a **1ª hipótese:** a bin é uma caixa cúbica. Então suas dimensões são iguais. O tamanho de uma maçã será envolvido no problema mediante $\mu = 1$

Assim, como a bin tem capacidade para aproximadamente 3000 maçãs, $(3000\mu^3)$, então as dimensões da bin, podem ser obtidas pela raiz cúbica da capacidade da bin, ou seja

$$\sqrt[3]{3000} \approx 14,45\mu.$$

Em posse desse número decimal, é preciso analisar como interpretá-lo, pois ele representa as dimensões da bin em unidade de medida maçã, e como não podemos considerar parte de uma maçã como unidade de medida é necessário considerar uma **2ª hipótese:** a bin não é cúbica. Então suas dimensões são distintas porém, muito próximas de 14,45 (da 1ª hipótese), **o que nos leva a entender que são 14 fileiras com 15μ, ou seja, lado menor cabem 14μ, lado maior cabem 15μ e 15μ de altura** (conforme Figura 2.5)

Figura 2.5: Dimensões da bin relacionadas com a medida maçã. Fonte [13]-Adaptada

2.3.1 Modelo da camada que forra o fundo da bin ou camada inicial

Vamos agora propor um modelo discreto no plano, ou seja, para as maçãs que forram o fundo da bin, sua organização e números de tangências de cada fruta. Posteriormente estender o estudo da disposição delas, no espaço e assim teremos outras camadas sobrepostas a camada que forra o fundo até que a bin fique totalmente cheia.

Prosseguindo, continuaremos analisando cada maçã no plano como um objeto geométrico plano, ou seja, cada maçã será representada por um círculo, elemento mais básico que descreve bem o formato da maçã. Já para o fundo da bin o elemento geométrico que pode representá-lo bem é o retângulo.

Analisando formas de organizar as maçãs no fundo da bin

Mediante aos entendimentos na Sessão 2.3, chamaremos de "camada" essa distribuição de $14 \times 15 = 210\mu$ maçãs (veja na Figura 2.6), que estarão dispostas no fundo da caixa, e logo após iremos enumerar cada camada que será sobreposta sobre a outra até a borda superior da bin. Essa enumeração será realizada segundo a comodidade que isso possa agregar ao presente estudo e à nossa abordagem.

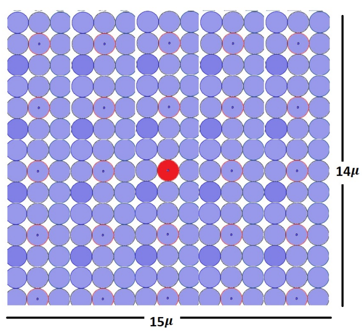


Figura 2.6: Organização das maçãs no fundo - Versão I: Camada Inicial

Para o problema da propagação da podridão em maçãs, poderíamos analisar situações distintas, com uma quantidade qualquer de maçãs podres no fundo da caixa, e ainda pensar nelas agrupadas ou não, e daí com certeza teríamos várias hipóteses para analisar e possivelmente para cada hipótese uma versão de modelo distinta. Porém, para a simplificação das variáveis e não do problema (pois, quanto mais elementos levarmos em consideração para a determinação do nosso modelo mais complexo esse se torna e muitas vezes a solução pode ser inviável), optamos em adotar:

A existência de uma única maçã podre, e para que a propagação se dê de maneira contínua e em todas as direções da forma mais uniforme possível, iremos considerar ainda que essa maçã contaminada esteja no centro dessa camada inicial (que forra o fundo da caixa).

Indicamos essa maçã podre ocupando aproximadamente a 7ª posição da 8ª fileira, que está representada na Figura 2.6 com a maçã vermelha.

Se considerarmos uma maçã podre, que chamaremos de M_0, quantas maçãs irão tangenciar nossa M_0 no fundo da bin e consequentemente serem contaminadas pela podridão dessa maçã M_0?

Para responder a enquete anterior é necessário considerar outras hipóteses de organização das maçãs no fundo da bin. Para a organização dos dados, propomos que o leitor pense inicialmente nestes círculos organizados a partir de um dos vértices deste retângulo. Logo será preciso considerar duas hipóteses:

- **Hipótese 1**: Se os círculos estarão organizados em fileiras lado a lado conforme Figura: 2.7. Então o número de tangências entre elas serão 4.

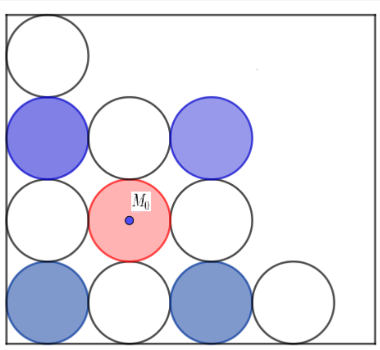


Figura 2.7: Tangência mínima: 4

Na Figura 2.7, buscamos ilustrar a **hipótese 1**, com os círculos de diâmetro 1μ, dispostos em fileiras. Notemos que no vértice do retângulo tem um círculo de cor azul que tangencia somente 2 círculos, porém, iremos analisar o círculo de cor rosa, de centro M_0, notemos que o número mínimo de círculos também de diâmetro 1μ, que tangenciam o círculo rosa são 4.

- **Hipótese 2**: Os círculos estarão organizados de outra forma, de modo que diminua os espaços entre eles e consequentemente aumente o número de tangências entre eles. (Vamos provar o número máximo de tangências entre círculos para depois denominar essa segunda hipótese.)

Ao pensar na **hipótese 2**, quanto à organização das maçãs, podemos nos perguntar se existe uma outra maneira de organizá-las de modo que o número de tangências seja menor que 4, e consequentemente, analisar se podemos obter tangências iguais a $i \in \mathbb{N}$, tais que $i = \{3, 4, 5, 6, 7, ...\}$, e consequentemente encontrar o valor máximo para i.

Dessa maneira, iremos considerar um caso particular $i = 8$, assim teremos:

- **Hipótese 2**: O número de círculos tangentes ao círculo rosa, na Figura 2.7, é 8.

Para provar a hipótese 2, iremos avaliar a possibilidade dos círculos azuis da Figura 2.8, poderem tangenciar o círculo de cor rosa sem afastar os círculos brancos, de modo que o número de círculos tangentes ao rosa seria 8.

Inicialmente vamos supor que o círculo D, da Figura 2.8, possa tangenciar o círculo de centro A, sem mover os círculos de centros B e C respectivamente.

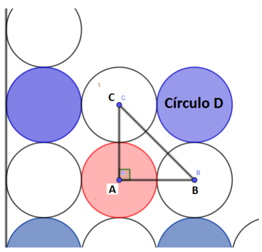


Figura 2.8: Triângulo ABC

Note que o triângulo formado pelos centros dos círculos de centros A, B e C, na Figura 2.9 é retângulo (deixamos ao leitor com o exercício essa demonstração). Dessa maneira, $\overline{BC}$ é tal que:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2 \Longrightarrow \overline{BC} = \sqrt{2} \cdot \overline{AB}.$$

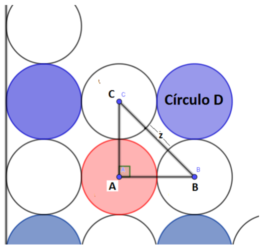


Figura 2.9: Relações do lado $\overline{BC}$.

Denotando por "z" a distância entre os círculos de centros "C" e "B", (ver Figura 2.9), temos $\overline{BC} = \overline{AB} + z$, logo

$$\overline{AB} + z = \sqrt{2} \cdot \overline{AB}.$$

Segue que $z = (\sqrt{2} - 1) \cdot \overline{AB} < \overline{AB}$, que é o diâmetro do círculo D. Isso implica que entre os círculos de centros B e C não cabe outro círculo de mesmo diâmetro $\overline{AB}$. Logo, por contradição, o número de tangências não poderá ser 8 e podemos concluir que $i < 8$.

Podemos pensar em outra configuração dos círculos no retângulo para demonstrar a hipótese 2, ao invés de ficarmos atribuindo valores para i. Se considerarmos que os círculos de centros B e C (ver Figura 2.9), deslizem de tal forma que "z" tenda a zero. Assim, o triângulo ABC terá todos os lados iguais a $\overline{AB}$, ou seja, o triângulo ABC será equilátero. Isso implica que o ângulo do vértice A mede 60°, logo teremos 6 triângulos equiláteros de vértice em A, formando um hexágono cujos vértices são os centros dos respectivos círculos tangentes ao círculo de centro A, conforme Figura: 2.10.

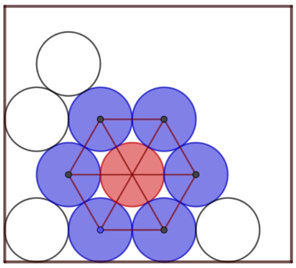


Figura 2.10: A tangência máxima gera hexágonos

Dessa maneira podemos concluir que valor máximo para i é 6, ou seja, para a **hipótese 2**, concluirmos que o número máximo de tangências entre círculos de mesmo raio é 6 e a organização desses círculos chamaremos de hexágonos encaixantes.

Nessa organização de hexágonos encaixantes podemos pensar na formação de triângulos formados por círculos no plano, conforme Figura 2.11, podemos perceber que 1 círculo se encaixa em 2, estes por sua vez se encaixam em 3 e posteriormente em 4 e assim por diante. Dessa maneira se a primeira fileira da bin tiver 15μ então a segunda fileira terá 14μ a terceira 15μ novamente e assim por diante.

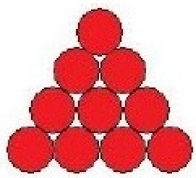


Figura 2.11: Organização em forma de triângulo. Fonte: [31]

Como a propagação da podridão se dá pelo contato direto entre frutas, e aliando ao fato que também temos que otimizar a quantidade de frutas em função da área, pois quanto mais maçãs couberem na bin melhor. Ainda devemos considerar o fato que o contágio ocorra de maneira máxima, ou seja, as maçãs estão dispostas de tal forma que o contato dentro da bin, fruta a fruta seja máxima. Portanto, para a construção do nosso modelo discreto, vamos considerar:

O número de tangências para as maçãs em uma mesma camada será 6 e para a organização delas a formação de hexágonos encaixantes.

Vamos supor que a quantidade inicial de maçãs podres seja $M_0 = 1$ e que a única maçã podre esteja situada no centro da região plana, conforme Figura 2.12.

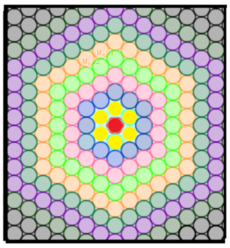


Figura 2.12: Organização das maçãs no fundo - Versão II

Como no nosso modelo iremos considerar a formação de hexágonos encaixantes, isto é, **o número de maçãs que apodrecem é sempre múltiplo de 6 a cada estágio**[6](ver Figura 2.13).

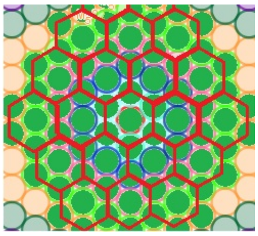


Figura 2.13: Hexágonos encaixantes

Então a propagação da doença nesse plano será dada conforme sequência a seguir:

$$M_0 = 1;\ \ M_1 = 6; M_2 = 12;\ \ M_3 = 18;\ \ ...\ ;\quad M_n = 6 \cdot n. \tag{2.20}$$

Onde:

1. M_0 significa o número de maçãs contaminadas no primeiro instante, ou seja, sem estágio de contaminação ainda;

2. M_1 significa o número de maçãs contaminadas no primeiro estágio pela maçã M_0.

[6]Bassanezi [8] analisa também o tangenciamento mínimo. Nesse caso, o número de maçãs que apodrecem é sempre múltiplo de 4, ou seja, a sequência seria $M_0 = 1; M_1 = 4; M_2 = 8; M_3 = 12; ...; M_n = 4 \cdot n$,

Dessa maneira, quando utilizamos o símbolo M_5, estamos nos referindo ao número de novas maçãs contaminadas no 5º estágio de contaminação, ou seja, $M_0 = 1$, contaminou 6 novas maçãs, no 1º estágio, logo $M_1 = 6$. Essas 6 novas maçãs por sua vez irá contaminar 12 novas outras maçãs no 2º estágio, logo $M_2 = 12$. (ver Figura 2.14).

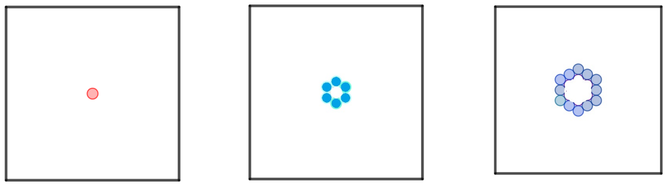


Figura 2.14: Estágios de contaminação para M_0 , M_1 e M_2

Veja na Figura 2.15 a evolução da propagação até o estágio 2.

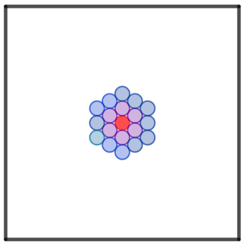


Figura 2.15: $M_0 + M_1 + M_2$

Não podemos esquecer que o número máximo de estágios é 7, ou seja, $1 \leq n \leq 7$, pois com 7 interações (estágios), temos as primeiras maçãs podres atingindo as paredes da caixa que tem lado aproximadamente igual a 14μ. Depois da 7ª interação, a taxa de propagação da doença é modificada, pois as maçãs podres são barradas pelas paredes da caixa. Podemos agora calcular a soma de maçãs contaminadas para $1 \leq n \leq 7$.

Seja:

(1) M_n: o número de novas maçãs contaminadas a cada estágio n;

(2) A_n: a soma das maçãs contaminadas a cada estágio.

Temos

$$\begin{cases} A_n = & A_{n-1} + 6 \cdot n \\ A_0 = & 1 \end{cases} \tag{2.21}$$

Ao realizarmos a soma telescópica dos termos dessas igualdades, teremos a recorrência a seguir:

$$\begin{aligned}
A_0 = & \quad 1 \\
\cancel{A_1} = & \quad \cancel{A_0} + 6 \cdot 1 \\
\cancel{A_2} = & \quad \cancel{A_1} + 6 \cdot 2 \\
\cancel{A_3} = & \quad \cancel{A_2} + 6 \cdot 3 \\
\cancel{\vdots} & \quad \vdots \\
A_n = & \quad \cancel{A_{n-1}} + 6n \\
\hline
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n = & \quad A_0 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\
A_n = & \quad A_0 + 6(S_n) \\
A_n = & \quad A_0 + 3 \cdot n \cdot (n + 1).
\end{aligned}$$

Como $A_0 = 1$ podemos escrever A_n, da seguinte forma:

$$\boxed{A_n = 1 + 3 \cdot n \cdot (n + 1), \quad \text{para } 1 \leq n \leq 7} \,. \tag{2.22}$$

Essa fórmula nos dá o **modelo para a soma das maçãs contaminadas no plano para um estágio "n"**, onde $1 \leq n \leq 7$, ou seja, se quisermos saber a quantidade de maçãs podres no 7º estágio da propagação basta tomar $n = 7$, donde

$$A_7 = 169.$$

Poderíamos ainda considerar que $A_0 = 4$. Daí teríamos Versão II para A_n,

$$A_n = 4 + 2 \cdot n \cdot (n + 1), \quad \text{para } 1 \leq n \leq 7.$$

Pois para $A_0 = 4$, teríamos uma nova sequência de contaminação, onde a primeira maçã podre irá contaminar outras 4 maçãs (tangência mínima). A nova sequência seria: $M_0 = 1; M_1 = 4; M_2 = 8; M_3 = 12; ...; M_n = 4 \cdot n$, mas agora o contágio ocorreria em forma de quadrados encaixantes, ou seja, múltiplos de 4. Assim para $n = 5$ teríamos,

$$A_5 = 54.$$

Verificamos que o modelo de soma das maçãs podres em função do estágio "n", depende da quantidade inicial de maçãs podres consideradas, pois muda a forma como se dá a propagação da podridão da doença. Seguiremos nossa análise do trabalho de Bassanezi [8] para os modelos da próxima camada, admitindo que $M_0 = 1$.

A seguir iremos construir o modelo para a próxima camada, que fica sobreposta à camada inicial, verificar as semelhanças e diferenças e também se existe algum padrão para o contágio com as outras camadas.

2.3.2 Modelo da Segunda Camada

Para entender a organização da segunda camada, faz-se necessário olharmos para as camadas de maçã por outro prisma, ou seja, temos que deixar a ideia intuitiva da propagação no plano e começamos a pensar na propagação das frutas na bin como um todo, pois a contaminação da segunda camada não ocorre após a contaminação total da camada inicial, ela ocorre simultaneamente, e o contágio continua se propagando para as camadas superiores sem que se conclua a contaminação total da camada inferior e assim, sucessivamente, ou seja, a análise para a organização da segunda camada deverá ser inicialmente "espacial".

Nesse momento, verifica-se que o círculo não poderá ser mais utilizado como objeto geométrico que melhor representa as maçãs, pois agora devemos considerar o empilhamento das frutas, ou seja, a altura para determinar o volume delas agora é relevante. Dessa maneira conclui-se que o elemento geométrico que melhor modela a maçã na situação é a esfera e, ajustando para nossos dados iniciais, consideraremos cada maçã como uma esfera de diâmetro 1μ.

A fim de entender como se dá a propagação da podridão no espaço, precisamos considerar as maçãs em pilhas no formato de pirâmide de base triangular. Veja em Anexo 4.2: "Empilhamento das balas de canhão" (Mata [31]), .

Tentaremos agora verificar como será formada a pilha de maçãs (pirâmide de base triangular). Primeiramente vamos pensar na base mínima para sustentar uma maçã M_0 (esfera), e na quantidade mínima de esferas que formariam essa base de sustento para a esfera M_0 do topo ou vértice, veja Figura 2.16.

Figura 2.16: a) Pirâmide de base triangular. b) Com giro de 180°.

Ao observar a Figura 2.16 , fica bem claro que para que uma esfera ocupe o topo ou vértice (cor verde), é necessário no mínimo 3 outras esferas (cor vermelha) como base. Já na figura 2.17 a), temos 3 andares dessa pirâmide, ou seja, agora temos sete esferas para sustentar a pirâmide da Figura 2.16 a). Nas Figuras 2.16 b) e c) temos uma vista de cima dessas pirâmides para que possamos entender como as maçãs estarão organizadas na bin. Se considerarmos a esfera verde na primeira camada (inferior) da pirâmide a) da Figura 2.16, como sendo a nossa maçã podre, podemos observar que ela tangencia 6 ao seu redor, três acima, consequentemente se ele estivesse no centro da bin, ela também tangenciaria 3 abaixo.

Percebe-se que a 2ª camada abaixo da esfera do vértice é composta por 7 esferas e estão dispostas como hexágonos encaixantes conforme vimos no modelo discreto no plano. Assim se tivermos 7 maçãs organizadas como hexágonos encaixantes, teremos 3 maçãs que se encaixaram sobre elas, que por sua vez encaixará uma maçã no topo dessa pirâmide ver Figura 2.17.

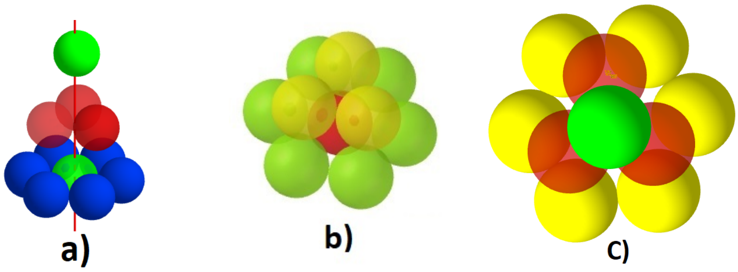


Figura 2.17: a)Organização em forma de pirâmide ; b) Pirâmide sem o vértice vista por cima ; c) Pirâmide vista por cima

Mas ainda é necessário entender como será a organização das maçãs dentro da bin, pois as maçãs não estarão organizadas em forma de pirâmide, porém, para determinar o número máximo de tangências que uma maçã terá, iremos considerar a formação de pirâmides de forma expansiva com a maçã podre M_0 exatamente no centro da bin, e como as outras maçãs se organizam a partir desta maçã M_0.

Uma maneira sugestiva de chamar essa camada que contém a maçã M_0 nesse momento será "camada central" ou "camada ZERO: C_0", uma vez que agora iremos considerar que a maçã podre se encontra no centro da bin, e teremos camadas acima e abaixo dela. Também será conveniente renomear as camadas acima e abaixo da camada central - C_0.

Neste momento é preciso questionar o nome desta Seção 2.3.2, pois com a nova análise da organização das maçãs na bin, tendo a maçã podre no centro da caixa, a primeira camada "mudou" de lugar, ou seja, ela será a camada que se encontra no centro da bin e a partir de agora será chamada de **camada central ou "zero"**, dessa maneira um nome sugestivo para essa Seção 2.3.2 seria: "Modelo da Primeira Camada, sob um olhar espacial"

A **segunda camada**, que é nosso objetivo analisar, que seria a camada logo acima da primeira camada (quando estava no fundo da bin) também "mudaria" de lugar, e agora estaria acima da camada central, mudando de nome também, passando a ser chamada de 1ª camada, que será representada pelo símbolo - C_1, (ver Figura 2.18).

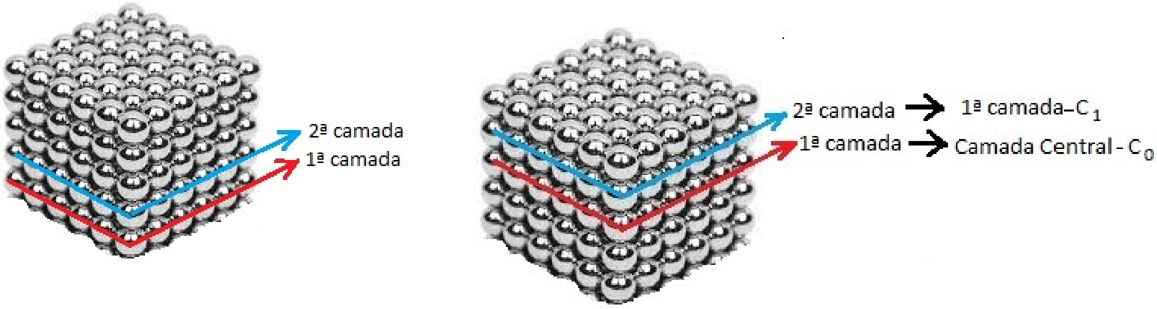


Figura 2.18: Mudança de lugar da camada que contém a maçã podre inicial

Daí o motivo da sugestão de mudança de nome para essa seção. Continuando com a renomeação das camadas, a camada sobreposta à primeira camada, chamaremos de segunda camada - C_2 e a próxima de terceira camada -C_3 e assim por diante até a borda superior da bin com a sétima camada C_7. Já as camadas abaixo de C_0 indicaremos com índices negativos, C_{-1} C_{-2}, C_{-3} e assim sucessivamente até o fundo da bin com a sétima camada C_{-7}, abaixo da central.

Para entender como será a organização das maçãs dentro da bin, propomos que o leitor pense em uma maçã flutuando no espaço, que poderíamos chamar de M_0, desta maneira iremos organizar outras maçãs juntas a essa de modo que se tenha o máximo de tangências no espaço. Primeiramente abaixo dessa maçã M_0 flutuante teríamos 3 maçãs (base da pirâmide veja Figura 2.16 a), onde a M_0 estaria na cor verde e base formada por 3 esferas de cor vermelha).

Agora se fizermos uma rotação de 180° em relação à base, que é formada pelas três esferas vermelhas conforme Figura 2.16 a) teremos a Figura 2.16 b). Dessa nova organização, teremos a esfera verde por baixo e três acima dela. Por sua vez essa esfera que agora está por baixo (verde), necessita de quantas esferas ao seu redor para dar base de sustento para as três imediatamente acima dela, se fossemos apoiá-las em um plano? Temos a resposta facilmente, basta nos basearmos na Figura 2.10, do início das tangências mínimas, assim a resposta ao nosso problema é 6, ou seja, da nova base teríamos 7 maçãs (esferas).

Ao verificarmos a Figura 2.19, percebemos que abaixo e acima da esfera M_0 (cor vermelha) teríamos 3 esferas de cor amarela.

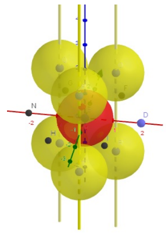


Figura 2.19: Número de maçãs acima e abaixo de M_0

Já ao redor da esfera M_0 de cor vermelha, teríamos 6 esferas de cor verde, (ver Figura 2.20).

Figura 2.20: Número de maçãs ao redor de M_0

Ao agrupar todas as maçãs tangentes de M_0 no espaço teremos a Figura 2.21.

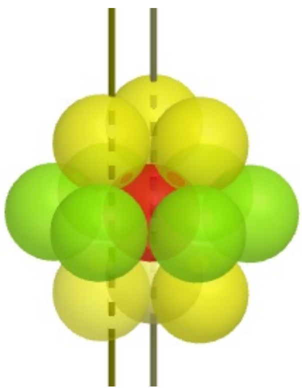


Figura 2.21: Todas esferas tangentes de M_0 no espaço

Inferimos que 12 são as esferas que tangenciam a esfera M_0, ou seja, 3 acima, 6 ao seu redor e 3 abaixo, totalizando 12 tangências para M_0. (veja na Figura 2.21.)

Ao analisarmos a propagação da podridão das maçãs na primeira camada - C_1 sob um olhar espacial é fácil ver que a maçã M_0 que está em C_0, contaminará 3 maçãs dessa primeira camada- C_1. Portanto, teremos que analisar como será a propagação da primeira camada- C_1 isoladamente, pois não será possível aproveitar a análise da primeira camada no plano, uma vez que o número inicial de maçãs podres mudou de 1 para 3, veja na Figura 2.22, como será a propagação da podridão em maçãs nessa camada C_1.

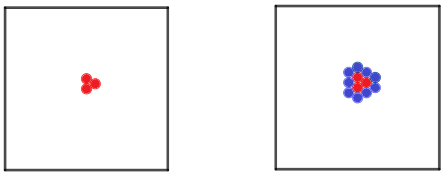


Figura 2.22: Início de contágio da camada C_1

Continuando essa análise, essas três maçãs contaminadas da primeira camada, por sua vez irá propagar a podridão para as maçãs que a tangenciam, ou seja, 9 outras maçãs. O mesmo ocorrerá com a camada inferior a C_0, que chamaremos de C_{-1}, que iniciará o contágio também com 3 maçãs, que por sua vez contaminará 9 e assim por diante. Por esse motivo iremos focar a análise somente nas camadas acima de C_0, pois para as camadas abaixo dela, à análise será realizada de forma análoga.

Chamaremos de estágio zero E_0, o momento em que não se tem nenhum contágio, e de primeiro Estágio E_1 o momento de contágio de todas as maçãs que tangenciam a maçã M_0. Dessa maneira, a podridão na primeira Camada C_1 começará a se formar no primeiro Estágio E_1, pois temos 3 maçãs que estão em contato com a maçã podre M_0 inicial da camada central, conforme Figura 2.16.

Ao continuar a análise da Figura 2.23, verificamos que as 3 maçãs contaminadas por M_0 (cor vermelha), agora irá contaminar outras 9 maçãs que estão ao seu redor (cor azul) e assim por diante, formando uma sequência que será representada pelo símbolo

P_n onde, P representa a quantidade de novas maçãs contaminadas a cada estágio e "n" o indexador da propagação da podridão em cada estágio.

A sequência P_n de frutas podres nesta primeira camada C_1, conforme Figura 2.23.

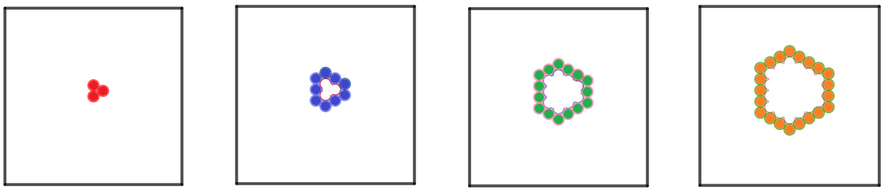


Figura 2.23: Propagação da primeira camada: P_1, P_2, P_3 e P_4

Veja na Figura 2.24 a evolução da propagação até o estágio 4.

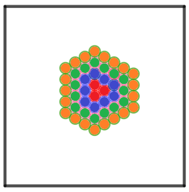


Figura 2.24: $P_1+P_2+P_3+P_4$

Assim temos a sequência:

$$P_1 = 3; \; P_2 = 9; \; P_3 = 15; \; P_4 = 21; \ldots$$

Percebemos novamente que a cada estágio o número de novas maçãs podres em relação ao estágio anterior é acrescida de 6 novas maçãs podres, logo a fórmula de Recorrência da sequência de contágio para a primeira camada C_1 é

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} + 6, & para \;\; 2 \leq n \leq 7. \\ P_1 = 3, & \end{cases}$$

Novamente realizando a soma telescopia teremos

$$\begin{array}{rc}
P_1 = & 3 \\
\cancel{P_2} = & \cancel{P_1} + 6 \\
\cancel{P_3} = & \cancel{P_2} + 6 \\
\cancel{P_4} = & \cancel{P_3} + 6 \\
\cancel{\vdots} & \vdots \\
P_n = & \cancel{P_{n-1}} + 6 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rc}
P_n = & P_1 + 6 \cdot (n-1) \\
P_n = & P_1 + 6 \cdot n - 6 \\
P_n = & 3 - 6 + 6n
\end{array}$$

cuja solução é:

$$\boxed{P_n = 3 \cdot (2 \cdot n - 1) \quad \text{para} \;\; 1 \leq n \leq 7}\,. \tag{2.23}$$

Essa fórmula nos dá o modelo para a quantidade de maçãs contaminadas no plano em função do estágio que é indexado por "n" da primeira camada acima da camada central, onde $1 \leq n \leq 7$. Assim, se quisermos saber por exemplo a quantidade de maçãs podres no estágio 4º da propagação basta tomar $n = 4$, daí teremos,

$$P_4 = 21.$$

Agora que temos a fórmula que nos dá a quantidade de maçãs podres a cada estágio de contaminação da primeira camada, tentaremos determinar a fórmula para a somatória das maçãs contaminadas a cada estágio, indexada por "n". Denotaremos por Q_n a somatória das maçãs na primeira camada-C_1, ou seja,

$$Q_n = \sum_{j=1}^{n} P_j = \sum_{j=1}^{n} 3 \cdot (2 \cdot n - 1) = 3 \sum_{j=1}^{n} (2n - 1)$$

Logo,

$$Q_n = 3 \cdot (1 + 3 + 5 + \ldots + (n - 1)) \, .$$

Observando que o valor de Q_n é o triplo da soma dos termos de uma progressão aritmética (a_n) de razão 2, onde $a_1 = 1$ e $a_n = n - 1$, temos,

$$\boxed{Q_n = 3n^2} \, . \tag{2.24}$$

Essa fórmula nos dá o modelo para soma das maçãs contaminadas no plano em função do estágio E_n indexada por "n" da primeira camada acima da camada central, onde $1 \leq n \leq 7$. Por exemplo, se quisermos saber a soma das maçãs podres no estágio 3º da propagação basta tomar $n = 3$, daí teremos,

$$Q_3 = 27.$$

Se mudarmos a condição inicial, ou seja, de $P_1 = 3$ para $P_1 = 4$ ou $P_1 = 5$, teríamos que rever a nova sequência de números que representaria a propagação da podridão em maçãs nessa camada C_1, lembrando que a quantidade de maçãs iniciais dessa camada C_1 depende da quantidade inicial da camada central. Por exemplo, se o número de maçãs podres na camada central C_0 fosse 3, teríamos $P_1 = 1$ e só mudaria a ordem dos modelos por camada conforme a camada tivesse em uma posição ímpar ou par na organização, porém, se a quantidade de M_0 fosse 4, tudo seria bem diferente, pois deveríamos realizar uma nova análise de como as maçãs da primeira camada estariam encaixadas na camada central C_0.

Percebemos que na tentava de mudar a condição inicial de P_n, teríamos que reformular todos os modelos até agora construídos M_n e A_n, pois estaríamos diante de outros dados e consequentemente encontraríamos versões distintas desses modelos.

Fazendo a retomada dos dados sem mudanças nas condições iniciais e agrupando os primeiros modelos geométricos, temos:

(i) $M_n = 6n$, para $1 \leq n \leq 7$, e $M_0 = 1$, que é a sequência de novas contaminações na camada central (C_0) (ver Equação 2.20);

(ii) $A_n = 1 + 3 \cdot n \cdot (n+1)$ para $1 \leq n \leq 7$, que é a soma das maçãs contaminadas a cada estágio E_0 dadas por M_n, na camada central (C_0) (ver Equação (2.22));

(iii) $P_n = 3 \cdot (2 \cdot n - 1)$ para $1 \leq n \leq 7$, que é a sequência de novas contaminações na primeira camada (C_1) (ver Equação (2.23));

(iv) $Q_n = 3n^2$, que é a soma das maçãs contaminadas a cada estágio E_n dadas por P_n, da primeira camada (C_1) (ver Equação (2.24)).

Em posse desses modelos parciais de propagação e soma de propagação da camada central e primeira camada, tentaremos estender as análises e as estratégias de contagem para as outras camadas da bin, verificando se os modelos até aqui poderão ser reutilizados.

Veja na Tabela 2.6 os valores de M_n, A_n, P_n e Q_n em função do indexador "n", que representa qual o estágio de propagação da podridão, agrupados.

Tabela 2.6: Sequências e Somatórias

n	M_n	A_n	P_n	Q_n
0	1	1	-	-
1	6	7	3	3
2	12	19	9	12
3	18	37	15	27
4	24	61	21	48
5	30	91	27	75
6	36	127	33	108
7	42	169	39	147
8	-	-	45	192

2.3.3 Modelo Parcial Espacial Discreto

Agora vamos analisar o problema por inteiro, ou seja, agrupar todas as informações e modelos para aproximar ainda mais do real. Neste momento faz-se necessário pensar no problema de forma mais elaborada, analisando os dados no espaço $\mathbb{R}^3$. Desse modo vamos retomar a condição inicial, em que supomos que havia uma fruta podre situada no centro de uma caixa, de modo que a distância dessas frutas até as paredes da caixa fosse igual a 7μ.

Na revista SuperInteressante [46], temos o famoso problema do **empacotamento de esferas**. Em 1611, essa questão mereceu a atenção do astrônomo alemão Johannes Kepler, que associou o empacotamento de esferas a uma solução que a natureza nos apresenta por meio de uma fruta: a romã. Se observarmos os espaços esféricos em seu interior, verificamos que a maior densidade de empacotamento ocorre quando as esferas são abarrotadas juntas naquilo que se conhece como arranjo de modelo tridimensional cúbico de face centrada. Ou seja, trata se de uma solução a que recorremos naturalmente quando construímos uma pirâmide de bolas, com a camada de baixo segura por um suporte triangular, nesse empacotamento, as esferas ocupam cerca de 74% dos espaços.

Vamos considerar as frutas dispostas na bin, como se estivessem em camadas sobrepostas e cujas configurações são dadas pelas formações das camadas estudadas anteriormente, ou seja, "arranjo de modelo tridimensional cúbico de face centrada". Sendo assim devemos procurar uma fórmula que dê a soma das frutas podres para um estágio E_n indexadas por n quando $0 \leq n \leq 7$.

Seja S_n a soma de todas as frutas podres para um estágio E_n indexadas por n. Devemos pensar que em cada estágio indexada por "n", apodrecem frutas que estão situadas em camadas adjacentes àquelas onde já existem frutas podres. Ou seja, devemos considerar que propagação da podridão em maçãs ocorrerá do centro da bin até as paredes da bin, como se a propagação ocorresse segundo uma esfera de raio igual a cada estágio de contaminação.

Voltamos a analisar a Tabela 2.6, para notar os resultados dos modelos de contágio M_n, A_n, P_n e Q_n a cada estágio E_n indexadas por n, e ainda podemos observar que as seguintes relações:

$$A_{n+1} = A_n + M_{n+1} \tag{2.25}$$

e

$$Q_{n+1} = Q_n + P_{n+1}. \tag{2.26}$$

logo a maçã M_0 contamina 6 ao seu redor na primeira camada e, ao mesmo tempo que contamina 3 da camada superior e mais 3 da camada inferior. Para organização dos dados já que o processo é análogo, vamos analisar somente as camadas acima da primeira camada C_1.

Assim, a primeira maçã que está na camada central -C_0 contamina 6 para os lados, ou seja, ainda na camada central e 3 na camada adjacente (acima em C_1). Agora temos 3 contaminadas na 1ª camada, que irão contaminar 9 para os lados (ainda na mesma camada C_1) e (1+6), na camada de cima C_2. Essas sete maçãs irão contaminar mais 12 para os lados (em C_2) e (3+6), na camada de cima C_3, que por sua vez irá contaminar mais 15 novas maçãs para os lados e 19 para a camada de cima C_4 e de forma análoga para as camadas abaixo da camada central, e assim por diante até chegar nas paredes da bin com a camada C_7, conforme a Figura 2.25.

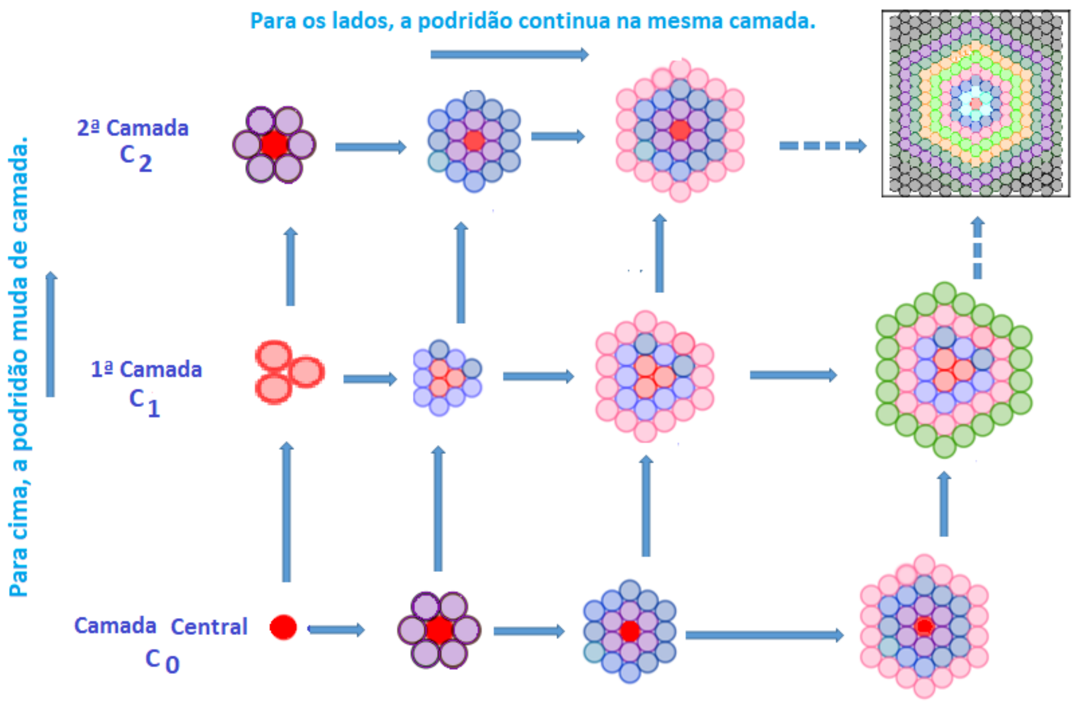


Figura 2.25: Esquema de propagação por estágio

Com base na propagação da podridão e nos dados da Figura 2.25 podemos construir essa nova Tabela 2.7, considerando as Observações das Equações 2.25 e 2.26.

Tabela 2.7: Somatória de maçãs podres por estágio

C_n / E_n	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	Soma
C_7								48	48
C_6							37	24	61
C_5						27	21	27	75
C_4					19	18	24	30	91
C_3				12	15	21	27	33	108
C_2			7	12	18	24	30	36	127
C_1		3	9	15	21	27	33	39	147
C_0	1	6	12	18	24	30	36	42	169
$-C_1$		Q_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	147
$-C_2$			A_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	127
$-C_3$				Q_2	P_2	P_3	P_4	P_5	108
$-C_4$					A_2	M_3	M_4	M_5	91
$-C_5$						Q_3	P_3	P_4	75
$-C_6$							A_3	M_4	61
$-C_7$								Q_4	48
Soma	1	12	44	96	170	264	380	516	**1483**

Onde **"**C_n**"** denota a camada e E_n denota o estágio.

A criação da tabela 2.7 foi necessária para a compreensão de como se dá a soma de todas as maçãs podres por estágio de contaminação E_n e a soma de todos esses estágios, para a comodidade do leitor.

Exemplo: C_3, significa "camada 3" superior à camada central (C_0) e E_4, significa "Estágio 4" de contaminação. Percebemos que na Tabela 2.7 a soma dos dados da coluna formada pelo Estágio E_1 são 12, pois

$$E_1 = 3 + 6 + Q_1 = 12.$$

Lembrando que os mesmos valores que teremos acima da camada central C_0, teremos abaixo da camada central, de forma simétrica. Dessa maneira iremos determinar a soma de maçãs podres por estágio de contaminação, por isso adaptamos a Tabela

2.7, colocando as relações simétricas de cada valor acima da camada central C_0, daí esperamos que o leitor note que no estágio E_1 o valor de Q_1 seja 3, e que no estágio E_2 as parcelas A_1 e P_2, sejam respectivamente iguais a 7 e 9, ou seja,

$$
\begin{aligned}
&E_0 = M_0 = A_0 = 1 \\
&E_1 = M_1 + 2Q_1 = 12 \\
&E_2 = M_2 + 2P_2 + 2A_1 = 44 \\
&E_3 = M_3 + 2P_3 + 2M_2 + 2Q_2 = 96 \\
&\vdots \\
&E_6 = M_6 + 2P_6 + 2M_5 + 2P_4 + 2M_4 + 2P_3 + 2A_3 = 380 \\
&E_7 = M_7 + 2P_7 + 2M_6 + 2P_5 + 2M_5 + 2P_4 + 2M_4 + 2Q_4 = 517.
\end{aligned}
$$

Nesse momento queremos construir um modelo que determine a soma de todos os estágios de contaminação em maçãs, para esse modelo "soma de estágio" denotaremos com o símbolo S_n, onde o "S" representa a soma de todos os estágios E_n menores ou igual a "n". Por exemplo:

$$
\begin{cases} S_n = & E_0 + E_1 + ... + E_{n-1} + E_n \\ S_0 = & 1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} S_n = & S_{n-1} + E_n \\ S_0 = & 1 \end{cases} \tag{2.27}
$$

- S_1, será a soma de E_0 com E_1.
- S_2, será a soma de E_0, E_1 com E_2.

Vejamos passo a passo como S_n será representado variando n tal que $0 \leq n \leq 7$, para $n = 1$, teremos $S_1 = M_0 + M_1 + 2Q_1$, ou seja,

$$S_1 = A_1 + 2Q_1 \ ,$$

pois $A_1 = M_0 + M_1$.

Ao somarmos os estágios de E_0 até E_2 obteremos S_2:

$S_2 = E_0 + E_1 + E_2$

$S_2 = M_0 + M_1 + 2Q_1 + M_2 + 2P_2 + 2A_1$

$S_2 = M_0 + M_1 + M_2 + 2Q_1 + 2P_2 + 2A_1$

$S_2 = A_2 + 2 \cdot (Q_1 + P_2) + 2A_1,$ mas de 2.26, temos que $(Q_1 + P_2) = Q_2$ logo

$S_2 = A_2 + 2Q_2 + 2A_1,$

ou ainda

$S_2 = S_1 + E_2$

$S_2 = A_1 + 2Q_1 + M_2 + 2P_2 + 2A_1$

$S_2 = (A_1 + M_2) + 2(Q_1 + P_2) + 2A_1$ de 2.25 e 2.26, temos:

$S_2 = A_2 + 2Q_2 + 2A_1.$

Para obter S_3 o procedimento é análogo, tal que:

$$S_3 = S_2 + E_3$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= S_2 + E_3 \\
S_3 &= (A_2 + 2Q_2 + 2A_1) + (M_3 + 2P_3 + 2M_2 + 2Q_2) \\
S_3 &= (A_2 + M_3) + 2(Q_2 + P_3) + 2(A_1 + M_2) + 2Q_2 \\
S_3 &= A_3 + 2Q_3 + 2A_2 + 2Q_2 \\
S_3 &= A_3 + 2A_2 + 2Q_2 + 2Q_3
\end{aligned}$$

Para obter S_4 basta acrescentar E_4 em S_3:

$$S_4 = S_3 + E_4.$$

Assim,

$$S_4 = S_2 + E_4$$

$$S_4 = (A_3 + 2A_2 + 2Q_2 + 2Q_3) + (M_4 + 2P_4 + 2M_3 + 2P_2 + 2A_2)$$

Realizando algumas associações, segundo as relações 2.25e 2.26

$$S_4 = (A_3 + M_4) + 2(Q_3 + P_4) + 2(A_2 + M_3) + 2(Q_2 + P_3) + 2A_2$$

$$S_4 = A_4 + 2Q_4 + 2A_3 + 2Q_3 + 2A_2.$$

Para obter os S_5, S_6 e S_7, o processo segue a mesma sequência, assim teremos:

$$S_5 = S_4 + E_5$$

$$S_5 = (A_4 + M_5) + 2(Q_4 + P_5) + 2(A_3 + M_4) + 2(Q_3 + P_4) + 2(A_2 + M_3) + 2(Q_2 + P_3)$$

$$S_5 = A_5 + 2Q_5 + 2A_4 + 2Q_4 + 2A_3 + 2Q_3.$$

$$S_6 = S_5 + E_6$$

$$S_6 = (A_5 + M_6) + 2(Q_5 + P_6) + 2(A_4 + M_5) + 2(Q_4 + P_5) + 2(A_3 + M_4) + 2(Q_2 + P_3) +$$

$$+ 2(A_2 + M_3)$$

$$S_6 = A_6 + 2Q_6 + 2A_5 + 2Q_5 + 2A_4 + 2Q_4 + 2A_3.$$

$$S_7 = S_6 + E_7$$

$$S_7 = (A_6 + M_7) + 2(Q_6 + P_7) + 2(A_5 + M_6) + 2(Q_5 + P_6) + 2(A_4 + M_5) + 2(Q_4 + P_5) +$$

$$+ 2(A_3 + M_4) + 2(Q_3 + P_4)$$

$$S_7 = A_7 + Q_7 + 2A_6 + 2Q_6 + 2A_5 + 2Q_5 + 2A_4 + 2Q_4.$$

Ao analisar cada S_n da dinâmica de propagação, percebe-se que há uma repetição de parcelas a cada 2 estágios e, por esse motivo, vamos considerar separadamente os estágios de índices pares e índices ímpares:

Para os Estágios **pares** teremos:

$$S_{2n} = A_{2n} + 2 \cdot \sum_{j=n}^{2n-1} A_j + 2 \cdot \sum_{j=n+1}^{2n} Q_j \ . \tag{2.28}$$

Já para os Estágios **ímpares** teremos:

$$S_{2n+1} = A_{2n+1} + 2 \cdot \sum_{j=n+1}^{2n} A_j + 2 \cdot \sum_{j=n+1}^{2n+1} Q_j \ . \tag{2.29}$$

Nota-se que essa contaminação segue tal configuração até certo ponto, quando atinge as bordas da caixa, ou seja, na sétima camada, assim para saber o total de maçãs até esta camada basta calcular S_7. Como queremos a somatória das maçãs podres até uma camada ímpar, usaremos o modelo (2.29)

$$S_7 = A_7 + 2 \cdot (A_6 + A_5 + A_4) + 2(Q_7 + Q_6 + Q_5 + Q_4). \tag{2.30}$$

Como
$A_n = 1 + 3n(n+1)$
e
$Q_n = 3n^2 \implies Q_{n+1} = 3(n+1)^2 = 3n^2 + 3n + 3n + 3 = (1 + 3n^2 + 3n) + 3n + 2$
$\implies Q_{n+1} = A_n + 3n + 2$
assim S_7 pode ser escrita colocando os Q_{n+1} em função de A_n:

$$S_7 = A_7+2\cdot(A_6+A_5+A_4)+2[(A_6+3\cdot6+2)+(A_5+3\cdot5+2)+(A_4+3\cdot4+2)+(A_3+3\cdot3+2)]$$

$$S_7 = A_7 + 2A_6 + 2A_5 + 2A_4 + 2A_6 + 36 + 4 + 2A_5 + 30 + 4 + 2A_4 + 24 + 4 + 2A_3 + 18 + 4$$

$$S_7 = A_7 + 4A_6 + 4A_5 + 4A_4 + 2A_3 + 124$$

$$S_7 = (1 + 21 \cdot 8) + 4(1 + 18 \cdot 7) + 4(1 + 15 \cdot 6) + 4(1 + 12 \cdot 5) + 2(1 + 9 \cdot 4) + 1242$$

$$\implies S_7 = 1483. \tag{2.31}$$

porém, devemos lembrar que o número inicial de maçã na bin é $T = 3000$. Resta saber como se dará a contaminação do restante e a localização destas dentro da bin e por que ainda não foram contaminadas.

A contaminação em maçãs se deu conforme uma esfera em expansão, onde a cada estágio $E_n, n = \{1, 2, ...7\}$, tínhamos uma esfera de raio "$R = n$", em que o indexador n é o mesmo que fora usado como indexador para o estágio E_n, contendo as maçãs contaminadas, até atingir o raio máximo de $R = 7\mu$, quando alcançou as paredes da bin. Falta calcular as maçãs fora dessa esfera em expansão.

Por outro lado observa-se também que poderíamos ter calculado o número de esferas (maçãs), pensando no aglomerado que se forma ao redor da M_0, que seria no formato de uma esfera, que tem seu raio de contágio na 2º camada, depois para a 3º camada e assim por diante até atingir as paredes da bin (ver Figura: 2.1). Para que a esfera γ tangencie as paredes internas da bin, seu raio deve ser aproximadamente igual a 7μ. Para tentar aproximar mais da realidade, vamos verificar a relação entre os volumes da esfera e do cubo. Sabe-se que o volume de uma esfera γ de raio r é $V_\gamma = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ e Volume do cubo que contém a esfera γ é $V_{cubo} = (2r)^3 = 8r^3$

$$\Longrightarrow \frac{V_\gamma}{V_{cubo}} = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236$$

.

Como o número de maçãs na caixa é de 3000, temos dentro da esfera $\gamma = (0,5236) \cdot (3000) \approxeq 1570$, que não é um número longe do calculado anteriormente com as somas por camada, logo esse modelo é razoável.

Analisando as maçãs do canto na camada central ou ZERO

Analisando a propagação da podridão como uma esfera em expansão, percebemos que ainda falta determinar o número de maçãs nos cantos da caixa, pois a propagação cessa nas paredes da bin, mas os cantos estão mais distante desse raio de contágio, assim podemos pensar em quantas maçãs tem em cada novo raio maior do que 7μ na camada zero C_0, que esteja contido na caixa, conforme Figura 2.26.

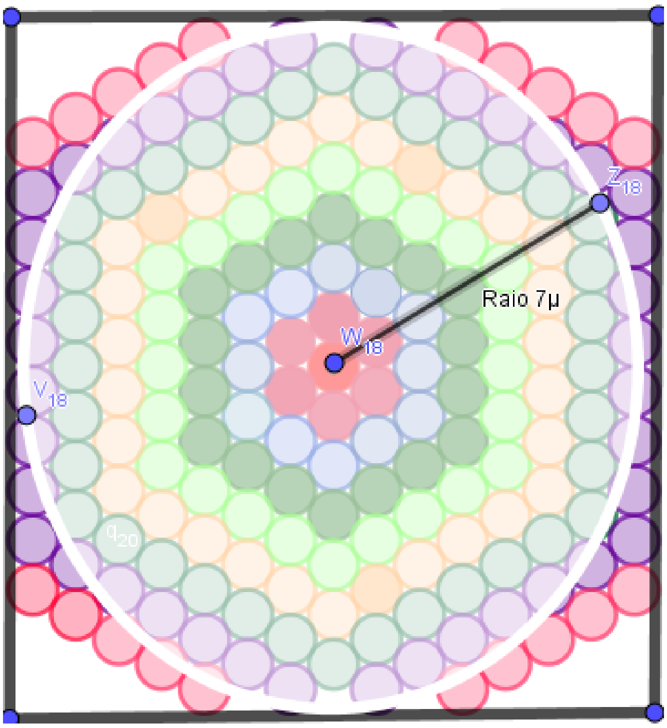


Figura 2.26: Círculo δ de raio 7μ.

Uma maneira simples de determinar a quantidade é contar as maçãs por camada na expansão dos raios da esfera γ é por contagem empírica, teremos o total de maçãs nos cantos (M_c) dados por $M_c = T - S_7$ ou seja, $M_c = 3000 - 1483 = 1517$.

Iremos considerar o círculo δ em expansão de raio "$n\mu$", tal que δ de raio 7, contenha todas as maçãs da camada central até as paredes da bin, que já sabemos de 2.22 são $A_7 = 169$.

Portanto, quando esse círculo δ, tiver raio 8, ou seja, ultrapassando as paredes da bin, só teremos maçãs nos cantos da bin. Estaremos na camada central exatamente no estágio 8 (C_0 X E_8), onde contaremos todas as maçãs que tangenciam as maçãs contidas no círculo δ de raio $r = 7\mu$. Desta maneira teremos aproximadamente 5 maçãs em cada canto, conforme Figura 2.26, as de cor rosa.

No estágio 9, da camada central (C_0 X E_9), as maçãs externas ao círculo δ de raio 9μ serão aproximadamente 4, pois como se trata do próximo estágio, as maçãs estarão organizadas em triângulos conforme Figura 2.11, porém, algumas delas não podem ser contadas pois estariam cortadas para caber no canto, ou seja, teríamos 3 maçãs inteiras em cada canto. Assim o número de maçãs no próximo estágio seria 3, mas pelo mesmo motivo só teremos uma maçã no próximo caso. Estes valores não condizem com a organização de pirâmide de círculos, justamente por estarem condicionadas ao canto da caixa. Vide Figura 2.27, onde podemos verificar a formação de triângulos cujos lados são as paredes da bin no canto e a quantidade de maçãs que formam o terceiro lado do triângulo.

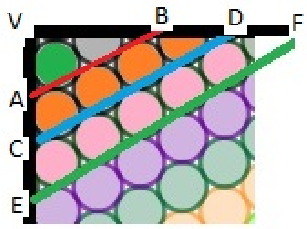


Figura 2.27: triângulos formados pelas paredes da bin e as maçãs do canto

Percebe-se que no triângulo VEF, da Figura 2.27, o lado $\overline{EF}$ é formado pelas maçãs externas o círculo δ de raio 7, ou seja, estágio 8 temos 5 maçãs inteiras, já no triângulo VCD, o lado $\overline{CD}$ é formado por aproximadamente 4 maçãs, porém, inteiras são só 3.

Já no estágio 10 da camada central (C_0 X E_{10}), as maçãs tangentes aos círculos (maçãs) contidas no círculo de raio $r = 10\mu$ serão aproximadamente 1 (uma) em cada canto. Para o círculo de raio 11μ, ou seja, estágio 11, já não haverá nenhuma maçã contida na bin e assim por diante até o estágio E_{13} que será o máximo até que todas maçãs sejam contaminadas.

Assim resumindo temos:

- C_0 X E_8 : $4 \times 5 = 20$;
- C_0 X E_9 : $4 \times 3 = 12$;
- C_0 X E_{10} :$4 \times 1 \cong 3$;
- C_0 X E_{11}: $4 \times 0 = 0$.

Analisando as maçãs do canto das camadas acima da camada central

Agora vamos analisar as maçãs nos cantos da bin para as camadas acima da camada zero, conforme Figura 2.26, percebemos que a cada estágio após a primeira contaminação o número de maçãs afetadas no total é maior que a camada zero C_0, em 3 unidades, ou seja, se na camada C_0 X E_7 teremos 42 maçãs podres, na camada C_1 X E_8 teremos 45 maçãs podres. Vale ressaltar que na camada $1(C_1)$, o estágio E_8 é o sétimo ciclo de contaminação desta camada. Assim:

$$C_1 \text{ X } E_8 = P_8 = 45$$

e

$$C_1 \text{ X } E_9 = 1 \cdot 4 = 4, \text{conforme Figura 2.26.}$$

Nos próximos estágios dessa camada não teremos mais maçãs podres, pois já atingiu o canto da bin.

É fácil ver que o número de maçãs nos cantos das camadas de índices pares para estágios sucessivos se repete conforme a camada zero. Assim, para cada estágio após o contato com as paredes da caixa teremos:

$$C_0 \text{X} E_8 = C_2 \text{X} E_9 = C_4 = ... = C_6 \text{X} E_{11} = 20;$$

$$C_0 \text{X} E_9 = C_2 \text{X} E_{10} = C_4 = ... = C_6 \text{X} E_{12} = 12;$$

$$C_0 \text{X} E_{10} = C_2 \text{X} E_{11} = C_4 = ... = C_6 \text{X} E_{13} = 3.$$

Após essas etapas já se contaminou todas as maçãs desta camada.

Também podemos verificar que o mesmo ocorre para as camadas de índices ímpares e estágios sucessivos.

$$C_1 \text{X} E_9 = C_3 \text{X} E_{10} = C_4 = ... = C_7 \text{X} E_{12} = 4;$$

$$C_1 \text{X} E_{10} = C_3 \text{X} E_{11} = C_4 = ... = C_7 \text{X} E_{13} = 0.$$

Após a organização desses dados podemos analisar a Tabela 2.8, para constatar como se dá a propagação da podridão até o estágio E_7 de cada camada, onde a contaminação segue uniforme e crescente, já do estágio E_8 de cada camada em diante a propagação é mais lenta e desigual, pois o número de maçãs não é a mesma nos cantos para as camadas de índices ímpares.

Tabela 2.8: Contaminação por Estágio: Modelo Geométrico. Fonte: [6]

	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	Total
C_7								48	27	33	39	45	4	0	196
C_6							37	24	30	36	42	20	12	3	204
C_5						27	21	27	33	39	45	4	0	0	196
C_4					19	18	24	30	36	42	20	12	3	0	204
C_3				12	15	21	27	33	39	45	4	0	0	0	196
C_2			7	12	18	24	30	36	42	20	12	3	0	0	204
C_1		3	9	15	21	27	33	39	45	4	0	0	0	0	196
C_0	1	6	12	18	24	30	36	42	20	12	3	0	0	0	204
C_1		3	9	15	21	27	33	39	45	4	0	0	0	0	196
C_2			7	12	18	24	30	36	42	20	12	3	0	0	204
C_3				12	15	21	27	33	39	45	4	0	0	0	196
C_4					19	18	24	30	36	42	20	12	3	0	204
C_5						27	21	27	33	39	45	4	0	0	196
C_6							37	24	30	36	42	20	12	3	204
C_7								48	27	33	39	45	4	0	196
Total	1	12	44	96	170	264	380	516	524	450	327	168	38	6	2996

Observação sobre a Tabela 2.8, os números na cor azul, representam as maçãs nos cantos de cada estágio por camada.

Assim o total de maçãs podres podem ser contadas por estágio E_n

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} E_j \qquad \text{Sabendo que } 1 \leq S_n \leq 3000\ .$$

Onde,

$(S_n) = \{1, 13, 57, 153, 323, 587, 967, 1483, 2007, 2457, 2784, 2952, 2990, 2996\}$.

Observe que no 6º estágio, a soma das maçãs podres é 967. O que nos motivou a destacar essa informação foi o fato de que na Seção 2.2.1, utilizamos um valor muito próximo a esse.

Ao analisarmos os dados do gráfico do Modelo Discreto na Figura 2.28 e compararmos com os dados do gráfico do Modelo Contínuo 2.3, podemos constatar que a propagação da contaminação da podridão em maçãs não é crescente em todos os estágios como parece demonstrar no gráfico do Modelo Contínuo 2.3, que mostra a quantidade de maçãs contaminadas em relação ao tempo.

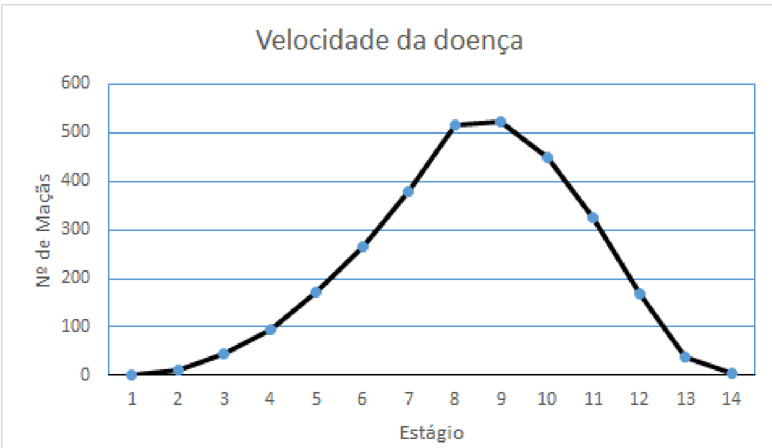


Figura 2.28: Evolução da propagação por estágios. Fonte: [6]

Essa diferença ocorre porque os dados comparados são distintos, desta maneira faz-se necessário que transformemos cada estágio E_n em tempo "t". Para a elaboração desse novo modelo usaremos os dados iniciais apresentados na Seção 2.1, "... em 12 dias 80% das frutas estão podres", assim, precisamos determinar em qual estágio se dá essa porcentagem, mas 80% de 2996 é 2397. Mas essa quantidade de maçãs contaminas se dá entre os estágios 8 e 9, conforme podemos verificar a sequência apresentada na Seção 2.3.3, $S_8 = 2007$ e $S_9 = 2457$.

O número de maçãs contaminas entre os estágios 8 e 9 são 450 μ. A diferença entre os 80% das maçãs e número de maçãs no Estágio 8 é 390. Desta maneira 80% das maçãs ocorre quando: $n = \frac{390}{450} = 8,8$, que é equivalente aos 12 dias, e cada estágio corresponde a $\frac{12}{8,8}$, ou seja, 1,364 dias. Desta maneira podemos montar uma tabela com a quantidade de maçãs podres pelo número de dias.

Tabela 2.9: S_n em relação ao tempo t em dias

n	t	S_n
1	1,364	13
2	2,728	57
5	6,82	587
6	**8,184**	**967**
8	10,912	2007
9	12,276	2457

Observe que para $t = 8$, temos 970 maçãs podres, ou seja,

$$M(8) = 967. \tag{2.32}$$

Esta informação da Equação 2.32 foi arredondada para 970 e utilizada na Seção 2.2.1 para a construção do Modelo Contínuo Versão II.

2.3.4 Modelo Discreto: Equações de Diferenças

Um dos pontos positivos da modelagem é sempre ter a certeza que por mais que um modelo encontrado seja bom, sempre pode existir outro modelo que seja mais atualizado e chegue mais próximo da realidade, ou seja, a superação de um modelo por outro melhor faz parte deste processo.

Segundo os dados iniciais do modelo contínuo que se considerou a velocidade de propagação da doença ser proporcional à proximidade das maçãs na bin (pela lei das massas) e o total de maçãs podres contadas por estágio pela sequência 2.3.3, teremos:

$$S_{n+1} - S_n = c_n \cdot S_N \cdot (T - S_n).$$

Relembrando que T é a quantidade total de maçãs e S_n o total de maçãs contaminadas na bin. E dá mesma maneira utilizando um valor inicial procuremos determinar o valor da constante c, para um estágio maior do que 3, ou seja, $n \geq 3$.

$$c_n = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n(T - S_n)} = 0,000295.$$

Esses valores podem ser verificados na tabela da Figura 2.29

n	S_n	T	$S_{n+1} - S_n$	$T - S_n$	c
1	1	3000	12	2999	0,004001334
2	13	3000	44	2987	0,001133115
3	57	3000	96	2943	0,000572277
4	153	3000	170	2847	0,000390274
5	323	3000	264	2677	0,000305318
6	587	3000	380	2413	0,00026828
7	967	3000	516	2033	0,000262474
8	1483	3000	524	1517	0,000232919
9	2007	3000	450	993	0,000225796
10	2457	3000	327	543	0,0002451
11	2784	3000	168	216	0,000279374
12	2952	3000	38	48	0,00026818
13	2990	3000	6	10	0,000200669
				Média	0,000295515

Figura 2.29: Tabela Equação de diferença com a Média de c_n. Fonte:[6]

Posteriormente, teremos o gráfico do modelo discreto com equação diferença, na Figura 2.30.

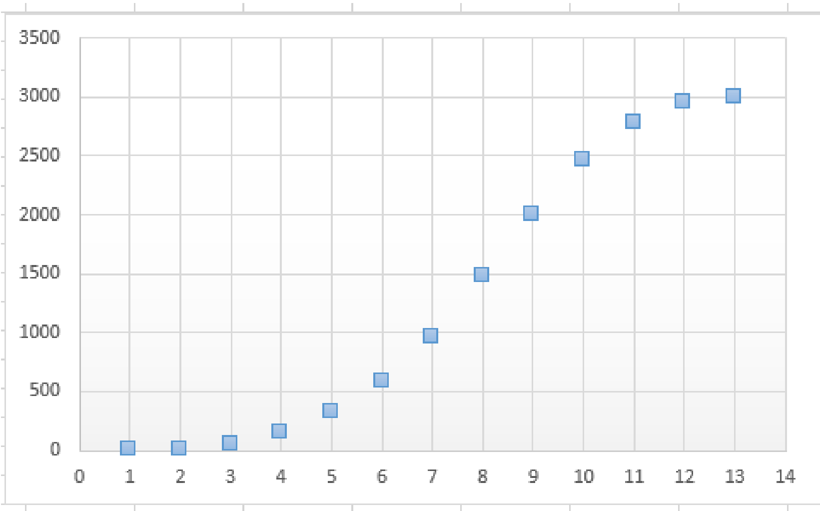


Figura 2.30: Modelo discreto com equação de diferenças

2.3.5 Comparação dos resultados apresentados pelos modelos

Na tentativa de verificar qual modelo chega mais próximo da realidade decidimos comparar os resultados apresentados nos modelos contínuos, nos modelos geométrico e o modelo geométrico de diferenças. Para que se alcance o objetivo foi necessário a construção de uma tabela e gráfico para tal, conforme podemos verificar respectivamente nas Figuras 2.31 e 2.32.

Estágio	Tempo em dias	Contínuo Versão I	Contínuo Versão II	Discreto	Diferença
0	0	0,999667	20,31845	1	1
1	1,35	2,875111	41,32935	13	1,886248
2	2,7	8,259327	83,45865	57	24,47513
3	4,05	23,647	166,1214	153	106,5729
4	5,4	67,06035	321,6298	323	281,7235
5	6,75	185,2161	592,2865	587	578,5229
6	8,1	477,6502	1005,223	967	1005,576
7	9,45	1058,219	1523,846	1483	1547,955
8	10,8	1831,941	2036,828	2007	2147,822
9	12,15	2455,885	2437,363	2457	2595,946
10	13,5	2785,552	2696,18	2784	2851,261
11	14,85	2921,838	2843,58	2952	2961,706
12	16,2	2972,371	2921,549	2990	2993,873
13	17,55	2990,341	2961,184	2996	2998,836

Figura 2.31: Comparação entre modelos. Fonte: [6]

Nesta tabela 2.32 usamos como parâmetro os vários níveis de estágio, e colocamos o número de dias em função do número de cada estágio. O valor de t é dado pela expressão $t = 1,35 \cdot n$

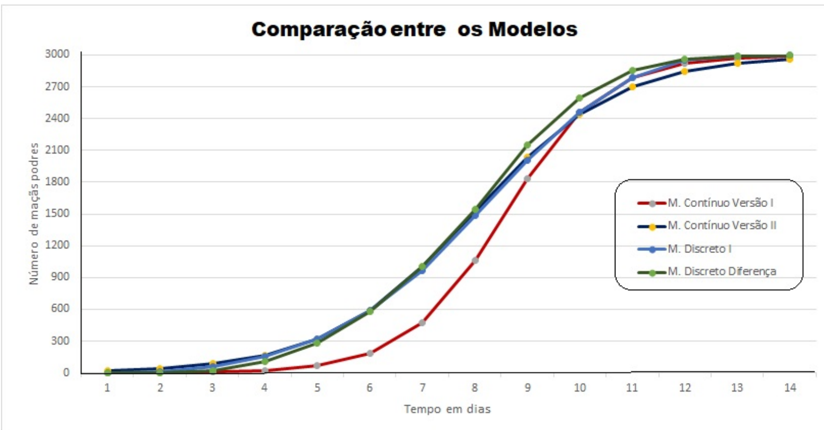


Figura 2.32: Gráfico para comparar os Modelos. Fonte: [6]

Após análise dos dados e gráficos das quatro versões de modelo, verifica-se que o modelo contínuo Versão I, é o que tem o gráfico mais distante dos outros modelos, isso não quer dizer que ele seja ruim ou errado, mas simplesmente para evidenciar que cada modelo pode ser aperfeiçoado e melhorado conforme se análise mais variáveis.

Poderíamos ainda buscar outros modelos talvez mais simples de equações de diferenças cujas soluções também se aproximariam razoavelmente dos valores encontrados até agora. Para S_n (Soma de todas as frutas podres no estágio n qualquer) e E_n (Soma total de novas frutas contaminadas em cada estágio n), que seriam obtidos a partir dos modelos discretos anteriores. O que faria a diferença seria considerar outra hipótese, tal como:

- **Hipótese:** O apodrecimento de novas maçãs, em cada estágio, é proporcional à quantidade de frutas podres no estágio anterior.

Capítulo 3

Da Modelagem à Modelação: uma aplicação de proposta de trabalho e discussão dos conceitos geométricos envolvidos

Neste capítulo trataremos o problema da modelação da propagação da podridão em maçãs, onde será apresentada a nossa proposta de aplicação com um olhar para o problema, no contexto de suas possíveis aplicações no Ensino Médio.

Pensar a modelagem e atividades investigativas no contexto do uso pedagógico em sala de aula não é uma reflexão tão recente. É possível encontrar trabalhos já amadurecidos e discussões detalhadas sobre pesquisas e experiências didáticas com a modelagem. Um cenário interessante dessa discussão estão presente em Burak (1994) [17], Skovsmose (2000) [45], Ben (2001) [9], Barbosa (2001) [5], Bassanezi (2002, 2014)[7], Biembengut Hein (2003) [12] dentre outras obras. Encontramos diferentes pontos de vistas sobre a forma de tratar e abordar a investigação e a modelagem, mas um senso comum de seu potencial investigador, construtivo, descritivo e rico campo para se conhecer aplicações, não só da Matemática, como de diversas áreas do conhecimento.

3.1 Uma aplicação de proposta: Estudos Dirigidos

A proposta de aplicação foi elaborada pensando em uma forma que permitisse que os educandos se sentissem mais seguros para expor suas ideias e conjecturas.

Uma vez que os assuntos matemáticos a serem explorados são responsáveis em nortear todo o trabalho, ao explorar o assunto maçãs podem vir à tona vários tópicos matemáticos diferentes, porém mesmo que os educandos percebessem outros assuntos a serem explorados, por se tratar de modelação é que se deve "direcionar" os estudos dos educandos para os tópicos planejados. Daí a ideia de aplicação da proposta de trabalho ser por meio de Estudos Dirigidos online (ED) seguido de aulas expositivas para discussão, compartilhamento e esclarecimentos, além da criação de "Grupo de whatsapp", como os alunos, utilizada como ferramenta que permitisse a realização um trabalho colaborativo.

Por esta necessidade de cumprir os conteúdos programáticos dentro de prazos é que não nos permite chamar de modelagem e sim modelação a maneira como será aplicada nossa proposta de trabalho.

A criação de formulários online, para a aplicação dos Estudos Dirigidos (ED), possibilitaria que os educandos fossem mais autênticos nas suas respostas, sem receio das eventuais críticas dos colegas de sala e também iria permitir a análise de dados (respostas dos educandos) de forma mais rápida e correta, além da facilidade de acesso dos EDs pelos educandos, pois poderiam responder os EDs pelo próprio celular (literalmente ao alcance das mãos), o que favorece a busca de ferramentas de auxílio para resolver cada problema proposto no estudo dirigido pela internet do próprio aparelho.

Contudo, a proposta de trabalho é a aplicação de Estudos Dirigidos (ED), em duas turmas de 2º Ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual[7], de maneira individual ou em pequenos grupos, aplicáveis por meio eletrônico (online - formulários do google docs) ou por meio de formulários impressos, dependendo do que melhor se aplica para

[7]Escola que está situada na Região leste de Goiânia, tem 11 salas, sendo que no turno matutino seis destas salas são para as turmas de 2º Ano do Ensino Médio e cinco delas para turmas de 3º Anos do Ensino Médio. Já no turno vespertino, que será aplicado os Estudos Dirigidos, tem duas turmas de 9º Ano do ensino Fundamental, sete turmas de 1º Ano do Ensino Médio e duas Turmas de 2º Ano do Ensino Médio. Esta unidade de ensino não tem aulas no turno noturno desde dezembro de 2018.

cada turma. Para acompanhar o andamento do preenchimento dos Estudos Dirigidos e possibilitar o trabalho colaborativo foi criado um "grupo de Whatsapp" com cada turma e dessa maneira, também pudesse ser utilizado para discussão de soluções entre eles e para retirar algumas dúvidas diretamente com o professor. Após o preenchimento de cada um dos formulários do ED, será proposto uma aula expositiva para a discussão em pequenos grupos dos resultados encontrados e compartilhamento das novas descobertas dos educandos.

O primeiro Estudo Dirigido, será denominado pela sigla ED1, e os demais seguiram essa notação, ou seja, ED2; ED3; ED4 e ED5.

Aplicação dos Estudos Dirigidos

Para a aplicação dos EDs, foi necessária uma preparação em sala com os educandos. Primeiramente foi comentado sobre as maçãs, e questionados sobre o que eles sabiam dessa fruta, e para enriquecimento de informações foram fornecidos textos informativos sobre a maçã, inclusive que se encontram neste trabalho. Uma vez que houve um despertar sobre o tema, foi apresentado a forma com que esse trabalho seria desenvolvido, ou seja, eles teriam que responder questões sobre o problema da propagação da podridão em maçãs, de forma dirigida, de tal maneira que fossem explorados as etapas da modelação e os tópicos desejados.

Foi dado um exemplo de como preencher o ED1, ressaltando a importância do preenchimento sob seu olhar diante do problema, pois não havia respostas certas ou erradas, mas formas distintas de abordar o mesmo assunto. Em seguida foi passado o link, que permitiria o acesso ao ED1, percebemos o entusiasmo e curiosidade inicial dos educandos em conhecer o material.

Ao receberem a informação que os assuntos matemáticos a serem explorados dependiam da necessidade deles em resolver as possíveis situações problemas, eles ficaram receosos, mas aceitaram a ideia. Para acalmar um pouco a ansiedade deles em saber se estariam indo pelo caminho certo, mais uma vez foi esclarecido que não havia respostas certas ou erradas e que o material iria proporcionar um estudo dirigido de modo a indicar uma direção, em que só cabia a eles tentarem resolver, e que a liberdade para pesquisar na matemática, uma forma de auxiliarem na problemática levantada era de responsabilidade deles. Nesta apresentação do ED1, foi também criado o grupo de whatsapp, para que houvesse o trabalho colaborativo de todos.

Os educandos relataram que o preenchimento dos EDs foram complicando a medida que iam avançando nos estudos, e cada vez mais tinham que procurar no "escuro", pois, sabiam que tinha um conteúdo matemático que iria os auxiliarem, porém não sabiam qual. Nesse aspecto foi percebido o incômodo deles, pois estavam acostumados a serem norteados sobre a matéria que iria ser estudada para depois propor resolução de problemas. Também foi percebido que alguns educandos temiam explorar assuntos nada a ver com os objetivos. Foi esclarecido que eles tinham essa liberdade, desde que fossem focados nos questionamentos de cada ED.

Nas aulas posteriores a cada ED, foi observado a inquietação de alguns educandos com essa proposta, pois eles queriam saber que assunto deveriam pesquisar, até mesmo, onde poderiam encontrar aquelas perguntas de cada ED, para não terem o perigo de errar. (queriam voltar ao tradicional, onde se sentem mais tranquilos).

Os Objetivos dos Estudos Dirigidos

Cada Estudo Dirigido tem seu Objetivo claro e grau de abstração gradativo de modo que os educandos se sintam motivados inicial e posteriormente desafiados a encontrarem uma solução, ou seja, um modelo para o problema levantado em cada Estudo Dirigido, conforme as Etapas de modelagem descritos na Sessão:1.2, na página 17 segundo Bassanezi [6]. Porém com as adaptações de tal maneira que possa ser considerada **Modelação Matemática**.

Este trabalho será utilizado como parte do cômputo de notas do 3º bimestre dessas turmas. Os Estudos Dirigidos foram disponibilizados para todos, inclusive para aqueles educandos que não tinha acesso à internet, via formulário impresso. A seguir iremos relatar os objetivos de cada ED, assim como a análise dos Estudos Dirigidos 1, 2 e 3 que foram aplicados, discutidos, compartilhados e analisados para que se alcançasse os objetivos almejados, valorizando todas as respostas e participações dos educandos.

Em resumo, teremos três partes para cada ED.

1. Com o Estudo dirigido: Experimentação, Abstração, Resolução (Etapas da Modelação);
2. Grupo de whatsapp: Trabalho colaborativos, tirar dúvidas e compartilhamento de ideias entre alunos;
3. Aula Expositiva: Trabalho colaborativo ao participarem das discussões, além da Validação e Modificação (Etapas da modelação)

3.1.1 Os Objetivos dos Estudos Dirigidos 1, 2 e 3

Os EDs foram aplicados de maneira a explorar as etapas da Modelação Matemática, vistas na Sessão 1.3: onde as adaptações necessárias para que pudesse ser Modelação Matemática, foram realizadas na Etapa da **"Abstração"**, segundo Biembengut [11], é nessa etapa que consiste a diferença de modelagem e modelação, pois com o planejamento do professor e preparação será possível explorar assuntos dentro do cronograma e currículo. Nesta turma em especial os conceitos específicos são, dentro da geometria plana: círculos, circunferências, retângulos e medidas de área; e na geometria espacial; esferas, prismas e volume; já em sequências, Progressão Aritmética (PA)e Soma dos termos de uma PA.

Objetivos do Estudo Dirigido 1 (ED1)

No ED1 (veja Apêndice A), será fornecido a situação problema da propagação da podridão em maçãs e alguns dados iniciais que despertem o interesse da turma pelo tema, nessa fase os educandos estarão na Etapa da **Experimentação**, segundo Bassanezi [6], porém será enfatizado ou dirigidos de modo que sejam explorados mais os tópicos de geometria. Para isso eles terão acesso aos dados da situação problema real, via textos, figuras e vídeos.

Nesse ED1, espera-se que os educandos sejam capazes de **representar geometricamente tanto a bin quanto as maçãs**. Será proposto neste ED1, que eles desenhem o fundo da caixa e as maçãs forrando o fundo. Identifiquem o fundo da caixa, por um retângulo ou quadrado e as maçãs por um círculo, ou circunferência.

Ao apresentar a situação problema real, espera-se que eles se sintam aguçados e despertem a curiosidade sobre o problema e busquem a interpretação dos dados, ou seja, selecionem os dados relevantes e as representem por meio de variáveis, percebam a problematização e dessa maneira possam conjecturar e levantar hipóteses, mesmo que sob o olhar deles, simplificando se necessários algumas das variáveis ou informações para melhor representar as variáveis, passando nesse momento pela etapa da modelação **Abstração**.

Em posse dos dados do problema busquem soluções (etapa de modelação: **Resolução**), ou seja, obtenção de um **modelo**. Mesmo que seja considerado ou classificado como simples representar a maçã por meio de um círculo e a caixa por meio de um retângulo, julgando que estes conceitos estejam ao alcance da turma, será exigido que busquem conceitos que sistematizem os assuntos abordados, como relacionar a quantidade de maçãs que ocupam o fundo de uma caixa qualquer com o assunto cálculo de área de figuras planas, tais como a do retângulo, porém utilizando como unidade de medida a maçã.

Nessa etapa da **Resolução**, ou seja, obtenção de um **modelo**, o objetivo é que os educandos quantifiquem o total de maçãs necessárias para cobrir somente o fundo de uma caixa qualquer.

Já a etapa da **validação** será explorada na aula após conclusão da ED1, onde cada educando poderá expor suas expectativas e ideias, conjecturas, hipóteses, possíveis dúvidas e conclusões. Espera-se que nessa aula os educandos validem suas respostas, reflitam sobre cada item e possibilite responder a ED2.

Nessa ED1, o alcance deste objetivo parece ser simples, mas como alguns educandos nunca tiveram aulas exclusivas de geometria, pode ser que eles desenhem o retângulo e os círculos, porém, não saibam identificar nem os nomes, nem os seus elementos e muito menos suas propriedades, permitindo e exploração de novos aprendizagens.

Nesse ED1, ainda se espera que os educandos sejam capazes de **sistematizar as dimensões do fundo de uma caixa qualquer** pela medida de maçãs que ela contém, além de **reconhecer ou escrever a expressão matemática que determina a quantidade de maçãs que forram o fundo de uma caixa** qualquer em função das dimensões da caixa em maçãs.

Objetivos do Estudo Dirigido 2 (ED2)

De maneira análoga, os ED2 (veja Apêndice B), também passará pelas etapas da Modelação Matemática vistas na Sessão: 1.3.

No ED2, será proposto que os educandos percebam que os mesmos objetos geométricos que foram aplicados no plano não serão aplicáveis quando considerarmos a bin como um todo, ou seja, no espaço. Será proposto que eles busquem representar a caixa e as maçãs, só que agora de modo que ocupem do fundo até a tampa (Experimentação).

Neste ED2, será proposto a representação da caixa de maçãs por outra qualquer, que pode ser de sapato, que é um objeto que todos conhecem, ou seja, busca-se representar a bin por outra caixa qualquer. A busca do objeto geométrico que represente a maçã parece ser mais interessante, e essa parte deixaremos a cargo dos educandos (Abstração).

Será proposto que os educandos consigam **representar a bin por um cubo ou paralelepípedo de base retangular, já as maçãs que eles consigam concluir que o objeto geométrico que melhor a representa seja a esfera**. Além de expressar **a lei ou modelo matemático que representa a capacidade de uma caixa qualquer** dado como referência a maçã, para depois sistematizar como se deu a construção do modelo de volume para paralelepípedo de base retangular ou do cubo (Resolução).

Objetivos do Estudo Dirigido 3 (ED3)

Neste terceiro estudo dirigido (ED3, veja Apêndice C), será proposto que os educandos sejam capazes de perceber como ocorre a propagação da podridão em maçãs, no fundo de uma caixa, dados a quantidade de maçãs infectadas inicialmente e a sua posição entre as outras.

No ED3, inicialmente será proposto a descoberta da quantidade de tangências mínimas e máximas que cada maçã pode ter no fundo de uma caixa (Experimentação). Posteriormente será proposto que eles percebam como se dá a propagação da podridão no fundo da caixa, dada uma maçã podre no centro (Abstração). Nesta etapa os educandos estarão mais libertos, podendo montar suas próprias estratégias para chegar nas respostas (Resolução), **não** será considerado falha se eles não conseguirem chegar na elaboração de um modelo correto, desde que eles percebam como se dá a propagação e se for dado um modelo pronto, eles consigam entender como foi elaborado de forma sistêmica, desta maneira os educandos estarão efetivamente modelando de forma dirigida, ou seja, estão no meio do processo de modelação.

3.1.2 Análise dos Estudos Dirigidos ED1, ED2 e ED3

A análise dos estudos dirigidos foram realizados tendo como base as respostas dos formulários online e principalmente nas discussões, compartilhamento de informações e dúvidas que foram levantadas nas aulas posteriores a cada ED (Trabalho colaborativo). É importante ressaltar que ao analisar os EDs, não se percebia a emoção que cada resposta era dada, porém, no decorrer das aulas que eram dadas posteriormente ao ED é que era perceptível verificar os níveis de abstração, sistematização e dúvidas de cada educando. Se o meio eletrônico permitiu autenticidade nas respostas, as tradicionais aulas presenciais de discussão é que pareciam responsáveis em fazer a ligação dos tópicos propostos e a assimilação deles. Muitas descobertas e conjecturas só foram percebidas e levantadas nessas aulas, daí a importância do conjunto: aplicação de ED, grupo de conversa via aplicativo e aulas de discussão após cada ED.

Análise do ED1

Ao analisar as respostas do ED1, verificamos que dos três objetivos propostos, segundo as etapas de modelação, podemos considerar que todos foram bem sucedidos. Pois, os educandos, analisaram a situação problema via texto, imagens e vídeos, abstraíram os dados, perceberam a problematização e formularam hipóteses. Além de constatar que a maioria deles conseguiram construir um modelo que representasse a quantidade de maçãs no fundo, de uma caixa qualquer.

O primeiro objetivo, que era representar de forma geométrica tanto o fundo de uma caixa quanto as maçãs que preenchem o fundo dessa caixa, com figuras planas, tivemos 80% dos desenhos com retângulos e círculos, representando de forma correta o que foi proposto.

Tivemos casos de educandos que na tentava de aprimorar o desenho, julgando estar muito fácil a tarefa, fizeram os desenhos em três dimensões, outros ainda desenharam retângulos para representar as maçãs. É importante salientar que para a construção de modelos não existe respostas certas ou erradas, pois, o modelo depende das observações e hipóteses levantadas sob o olhar de quem o analisa, dessa maneira podemos dizer que verificamos respostas não esperadas.

Para o segundo objetivo que era determinar as dimensões do fundo de uma caixa com a unidade de medida maçã, não foi complicado e segundo as respostas deles no ED1, podemos considerar que todos conseguiram. Já para o terceiro objetivo que era determinar o modelo (expressão matemática), para quantificar a quantidades de maçãs no fundo de uma caixa qualquer, verificamos segundo as respostas do ED, que 73,33% dos educandos conseguiram sistematização do que foi proposto, porém ao analisar a discussão em sala da ED1, percebemos que a maioria deles consigam falar a quantidades de maçãs que cabiam no lado maior da caixa e também a quantidade de maçãs que cabiam no lado menor e para determinar quantas maçãs tinham no fundo, era só multiplicar o número de maçãs de uma fileira (Lado maior) pela quantidade de fileiras que cabiam no fundo da caixa (Lado menor).

Dentre as respostas para a questão da quantidade de maçãs, uma delas me chamou a atenção, pois estava escrito: "para **somar** a quantidade de maçãs de um lado pelo o outro ...", mas na escrita do modelo a operação que ele usou foi a multiplicação. Essa resposta apesar dos erros, de expressar que iria somar, quando, na verdade ele iria multiplicar. Mas, mesmo com esses erros ele demostrou que aprendeu a calcular o número de maçãs no fundo da bin.

Na aula marcada para discussão das respostas do ED1, os educandos estavam ansiosos para saber quem tinha acertado mais. Depois de acalmar os ânimos e enfatizar que o objetivo não era esse, a aula iniciou com a exposição das respostas deles via gráficos, sem identificação dos autores de cada repostas. A discussão teve início ao questionar o que teria levado eles a pensarem naquelas respostas como corretas? Os educandos ainda meio receosos em expor suas ideias, começaram a defender suas respostas segundo o que tinham entendido, e reclamando muito, pois não sabiam o que poderiam usar para responder cada questão. Nesses momentos o professor intervinha, afirmando não existir respostas certas ou erradas, pois dependia do olhar e entendimento de cada um e que o mais importante era que suas respostas pudessem ser validadas por eles mesmos e que não necessitavam de uma outra pessoa para isso.

Nessa aula muitos tiveram oportunidades de participar, relatar seus pontos de vista e defendê-los, o professor fez alguns questionamentos durante estas exposições, de modo que pudessem nortear a discussão e também promover a reflexão ou esclarecimentos que impediam de prosseguir com o trabalho. Podemos exemplificar a dúvida de como usar a maçã como instrumento de medida, onde foi falado sobre as primeiras maneiras que o homem utilizou para efetuar medidas utilizando as próprias partes do corpo, dessa maneira não se fornecia a resposta e sim uma situação que eles pudessem relacionar e serem capazes de responder.

Ainda no decorrer desta aula houve a fala de um educando afirmando que aquela forma de calcular maçãs era como determinar área do retângulo. Nessa fala, percebe-se que houve sistematização não só da forma de determinar a quantidade de maçãs no fundo de uma caixa qualquer, mas sim uma interconexão de conteúdos. Outra dúvida levantada por eles eram "como organizar as maçãs em fileiras?". Não entendiam o termo "fileira". Após esse esclarecimento continua com exposições de ideias e percebemos que os educandos tinham entendido o quanto era simples o ED1, e a maioria das respostas que eles deram de forma insegura elas já tinham o conhecimento porem sob outra abordagem, como foi o caso da relação de como determinar área de retângulos e como contar objetos em uma caixa retangular quando estes estão organizados em fila de mesmo tamanho. Ou seja, o cálculo é o mesmo, o que muda são os elementos envolvidos e a interpretação da resposta.

Verificamos que a aula foi dinâmica e cumpriu com o que estava proposto, ao proporcionar a exposição de ideias e conjecturas dos educandos, esclarecimento de dúvidas. Mesmo que o objetivo não tenha alcançado todos os educandos, pudemos perceber que houve sistematização de conteúdo e que alguns enxergaram a matemática como ferramenta que auxilia na resolução de problemas reais.

Obs.: O grupo de whatsapp para esse ED1, praticamente não foi utilizado nem para discussão de respostas, nem para tirar dúvidas com o professor.

Análise do ED2

Ao analisarmos as respostas do ED2, novamente tivemos participação de 60 educandos. A reposta para a questão: **É possível representar as maçãs dentro da caixa de sapatos com círculos ou circunferências, lembrando que se pretende encher a caixa? Por quê?** Tivemos 39 educandos que deram resposta positiva e ainda justificaram, ou seja, não sabem diferenciar círculo de esfera ou simplesmente não reconhecem a esfera como objeto geométrico. Essa confusão entre círculos e esferas, não era esperada, e gerou curiosidade para saber o que os motivou a dizerem "sim" para essa questão. Como resposta eles afirmaram que a maioria se apoiaram no desenho da ED1, e alguns por falta de atenção não perceberam que o problema agora era sobre volume.

Diante da questão 3: **Esse objeto que agora irá representar as maçãs, além de largura e comprimento terá também:** 38% dos educandos reconheceram como a terceira dimensão "área ou peso", 25% como "altura", 25% como "espessura" e 19% como "profundidade". Acredito que eles não se atentaram aos detalhes, pois, na questão 7: **Quais seriam os nomes que se dariam para as dimensões da caixa de sapato?** 62% deles responderam: largura, comprimento e altura.

Na questão 9: **Como saber ou calcular quantas maçãs cabem em uma caixa sem encher essa caixa de maçã?** Cujo objetivo principal era que os educandos percebessem que bastaria calcular a largura, comprimento e altura da caixa com a unidade de medida maçã e multiplicá-las. Analisando as respostas, verificamos que apenas 36,33% dos educandos conseguiram esboçar alguma maneira razoável de calcular a capacidade.

Para a questão 10, da existência de uma expressão matemática que fosse possível determinar essa capacidade, 83,33% deles afirmaram existir tal expressão matemática, porém, somente 35% deles conseguiram escrever uma expressão matemática, sendo que desses 83,33% apenas 38,00% conseguiram escrever a expressão, não necessariamente correta, mais coerente com os dados fornecidos. Dado relevante dessa análise, foi verificar que **dois** educandos que afirmaram **não** existir expressão matemática para tal, escreveram uma expressão mesmo que errônea. O grupo de whatsapp, continuou sendo pouco utilizado para os fins que ele foi criado, a maioria deles só usaram para confirmar datas, tarefas e horários.

Na aula destinada para discussão das respostas da ED2, uma vez que os educandos estavam mais inteirados de como ela iria acontecer, eles já começaram levantando suas dúvidas e questionamentos. Percebemos que alguns educandos continuaram com as ideias propostas no ED1, onde só existia uma camada na caixa. A maioria dos educandos queriam ter certeza que todas as camadas da caixa teriam a mesma quantidade e, mais uma vez foi dado liberdade para que eles elaborarem suas respostas segundo o olhar deles mesmos.

Essa aula teve mais participações e questionamentos, eles estavam incomodados com a incerteza do estarem certos ou errados, a todo momento solicitavam que eu desse logo as respostas e pronto. A aula foi conduzida de modo que a cada dúvida, dava abertura para os colegas pudessem expor suas ideias e depois o professor fornecia exemplos de outras situações reais para que eles fizessem analogias e pudessem concluir ou validar suas repostas. Verificamos que muitos educandos conseguiram determinar uma quantidade de maçãs para cada dimensão da caixa (largura, comprimento e altura), mas como no ED2 não foi questionado explicitamente sobre "Volume" nem sobre a "Capacidade" de uma caixa, eles não relacionaram esses conteúdos com o problema, ou seja, trataram-no como inédito e complicado.

A ideia de volume só veio à tona no fim da aula, e se questionaram o motivo pela qual não tinham pensado nisso antes, mesmo quando os educandos realizavam os cálculos conforme estivessem determinando o de volume de uma caixa, porém não conseguiam relacionavam com Volume. Só depois dessa aula, que alguns educandos perceberam que as questões do ED, eram gradativas ao nível de dificuldade, mas que iam favorecendo as soluções das questões posteriores do mesmo ED e também dos próximos.

Observamos que quase toda a turma ainda pede correção para saber quem acertou ou errou. Como foi retirado deles a possibilidade de usar qualquer instrumento de medida, a maioria deles não conseguiram relacionar a maçã como unidade de medida necessária para a resolução.

No fim dessa aula, diante dos apontamentos e dúvidas, foi lançado um desafio, que consistia em determinar as dimensões de um cubo sabendo somente sua capacidade. Durante a aula a maioria deles não perceberam que o produto de três medidas iguais é o mesmo que uma potência cúbica e que a operação inversa seria a raiz cúbica, daí o desafio em forma de teste online (Formulário Docs [27]) no Apêndice F, na página 166. Para tentar sanar essa dúvida de modo que os educandos por meio de resolução de problemas pudessem sistematizar potenciação e radiciação como operações inversas. A questão era: **Quais as dimensões de uma caixa cúbica, que tem 3000 maçãs? Dê as medidas da caixa em maçãs. Justifique sua resposta.** O desafio foi direcionado somente para os que se interessassem pela discussão, houve só 10 resposta, sendo 4 coerentes ou certas.

Inferimos que esse estudo Dirigido, teve seu alacasse, pois ao passar pela etapa de Experimentação os educandos conseguiram perceber o problema coerentemente, já ao passarem pela etapa de Abstração, teve algumas ressalvas, pois, muito deles ainda não se enxergavam como agentes construtivos da resolução do problema, afirmavam ter medo de errar, mesmo sabendo que não existem respostas certas ou erradas, mas sim interpretações errôneas.

Na etapa da Resolução tivemos poucos casos de construção de modelos, dessa maneira a Validação dos modelos, que deveria ocorrer durante a aula após ED2, também foi comprometida, mas não podemos afirmar que não foram alcançados os objetivos, pois, houve respostas e afirmações que mostraram, mesmo que de forma simples ou erroneamente, que houve a sistematização do que foi proposto.

Análise do ED3

Ao analisar as repostas do ED3, percebemos que os educandos tiveram muitas dúvidas e fizeram muitas confusões, talvez por esse ED3 exigir um pouco mais de autonomia e respostas mais elaboras. Na opinião dos educandos esse ED3 não era tão trivial quanto os outros EDs.

Os principais motivos que, ao nosso olhar, dificultaram as soluções coerentes foram: Primeiramente o fato dos educandos começarem a responder o ED3, baseados no primeiro desenho do ED1; em segundo, parece que não entenderam a ideia de "encostar" tangenciar outras maçãs, pois responderam que era possível encher uma caixa de maçãs em que cada uma só encostasse em mais uma; posteriormente, o entendimento de "reorganização" das maçãs na caixa de modo que se tivesse o máximo de tangências. A maioria dele pensaram em modificar as dimensões da caixa, ou seja, os educandos foram capazes de preencher o fundo dela em que cada fruta só encostasse em duas, pois, no desenho dele só cabiam 4 maçãs organizadas em fileiras.

Como a maioria dos educandos pensaram em modificar as dimensões da caixa e não reorganizar as maçãs, foi necessário fazer uma intervenção, de modo que pensassem em reorganizar as maçãs de modo que houvesse mais tangências possíveis não as dimensões da caixa. Essa reorganização é parte essencial da etapa de Experimentação, e não poderia ser comprometida, pois, poderia nos levar para o estudo de outros conteúdos ou tópicos matemáticos, que não ruim, quando se pensa em novos saberes, mas não podemos perder o foco em cumprir o currículo e cronograma escolar.

Mesmo após esta intervenção, os educandos ainda continuaram a dizer que não existia outro modo de "arrumar" as maçãs no fundo, senão por meio de fileiras. Novamente tentei fazer com que eles pensassem na organização de outros objetos, como garrafas em um freezer, pedi para eles colocarem várias canetas umas em cima das outras e assim por diante. Depois dessa segunda colocação e que começaram a surgir novas concepções de organização de coisas arredondadas ou esféricas. Porém, não conseguiam determinar o número máximo de tangências entre as maçãs. Solicitei ainda que pegassem várias tampinhas de garrafa e organizassem elas de modo que uma em especial encostasse no maior número de outras. Mesmo assim, eles continuaram a dizer quantidades aleatórias, penso que eles acreditavam que uma vez que já tinham preenchido o formulário ED3, essas discussões não iriam acrescentar em nada. Percebo que a maioria deles ainda estão condicionados em aulas tradicionais, com respostas certas e erradas, e que a sistematização dos assuntos ainda não é o foco e sim "estar" certo ou errado.

Foi percebido que os educandos não estavam se envolvendo muito nas discussões, pois não poderiam mudar suas respostas, então foi autorizado que eles preenchessem novamente o ED3, sem caráter obrigatório, só para os que gostariam de melhorar as suas repostas ou pensamento, (Somente 10 deles reavaliaram suas resposta e preencheram novamente o ED3). Durante a aula de discussão das respostas do ED3, não foram confirmadas nenhuma resposta como certa ou errada, mas foi questionado a forma como eles se dedicaram para essa tarefa. Diante da discussão foi solicitado que eles se dedicassem mais, e não respondessem por responder, se a questão estivesse complicada que eles discutissem entre eles ou tirassem suas dúvidas pelo grupo de whatsapp.

Ao analisar somente as respostas reenviadas, apenas 6 tiveram suas respostas modificadas de forma considerável, a maior delas ainda se prenderam na organização das maçãs em fileiras de mesma quantidade de frutas.

Os principais objetivos desse ED3 são:

1. constatar que o número mínimo de tangências são 4 e que o número máximo são 6 (Experimentação), porém, a maioria dos educandos se confundiram com o primeiro desenho e não reorganizaram as maçãs para verificar se era possível 59% deram como resposta "os números 4", 18% responderam 2 e 27% deles dividiram a opinião entre 3, 6 e 8.

2. constatar como se dá a propagação segundo o máximo de tangências que ele encontrou para cada maçã (Abstração). Novamente foi percebido que eles se confundiram e analisaram a maçã podre como estando no canto da caixa, e ainda analisando uma caixa pequena tal que no máximo se tinha dois estágios de contaminação. Sobre a quantidade de novas contaminações dada a maçã podre, a maioria deles, cerca de 60% deram como resposta "o número 4", 18% responderam "2" e 27% deles dividiram a opinião entre 3, 6 e 8. Poucos educandos atingiram esse objetivo, segundo análise de suas respostas no ED3. Porém, em sala na aula durante a discussão, eles demonstraram capacidade, mas, ao mesmo tempo, se sentem inseguros em fazer conjecturas.

3. conseguir perceber que a propagação da podridão se dá em forma de uma sequência (Abstração). Verificamos que dos 52 educandos somente 25 deles conseguiram imaginar a propagação como uma sequência, porém, todos escreveram sequências na questão 11: "Imagine que você continuou esse processo por 6 estágios, ou seja, além dos três anteriores você ainda fez mais três passos. Qual seria os 6

resultados obtidos? (digite cada resposta separada por vírgula (,). Exemplo: 2, 3, 4, 5, 6, ...)" e dessas, menos de 20 tinham alguma fundamentação no quesito número de tangências máximas. 17 deles escreveram sequências não aleatórias e somente 14 encontraram P.A.

4. escrever essa sequência e sua fórmula ou modelo (Resolução1). Todos os educandos escreveram uma sequência, porem somente 11 conseguiram escrever algum esboço de modelo para previsão de contágio;

5. modelar a soma de todas as maçãs por estágio no plano (Resolução2). Somente 8 perceberam como se dá a soma desses estágios, mas nenhum deles conseguirão escrever o modelo para tal. Percebemos que dos poucos educandos que conseguiram relacionar o problema com o assunto de sequências e soma de seus termos, conseguiram escrever o modelo. Porém, em sala, eles demonstraram saber como seria a propagação, a sequência e também a soma dos termos da sequência.

De modo geral o ED3 teve seus prós e contras. Os pontos positivos foram percebidos uma vez que os educandos conseguiram perceber o problema de propagação por tangências (Experimentação), porém, a maioria deles não conseguiram conjecturar como sendo 6 a tangência máxima (Abstração). Somente 36 •s construirão algum tipo de modelo de previsão de propagação de podridão e 11 deles fizeram modelos corretos segundo suas sequências (Resolução). A validação também foi comprometida em partes, pois houve poucas participações nessa aula, acredito que a maioria deles não se sentiram confortáveis em realizar tantas conjecturas e queria uma certeza se o caminho escolhido estava certo ou errado.

Como muitos deles tentaram achar uma solução para o problema, houve a busca pelo saber, mesmo percebendo que eles se limitaram a caixas pequenas e com a organização das maçãs em fileiras. Nesse aspecto foi positiva a experiência, já pelas confusões e dificuldades em interpretação dos dados e até mesmo por insegurança deles, medo de errar, não buscaram respostas realísticas com o problema, e responderam as questões, com certo descompromisso, daí os pontos de fragilidades no ED3. O grupo de Whatsapp para esse ED3 foi mais utilizado, e em vários momentos eles levantavam discussões. Houve a participação de um educando no grupo, que escreveu: "mas alguém viu PA nessa questão", veja Figura:3.1, fazendo referência a questão que solicitava que completassem a quantidade de novas maçãs contaminada pela primeira maçã podre (veja a questão na página 154).

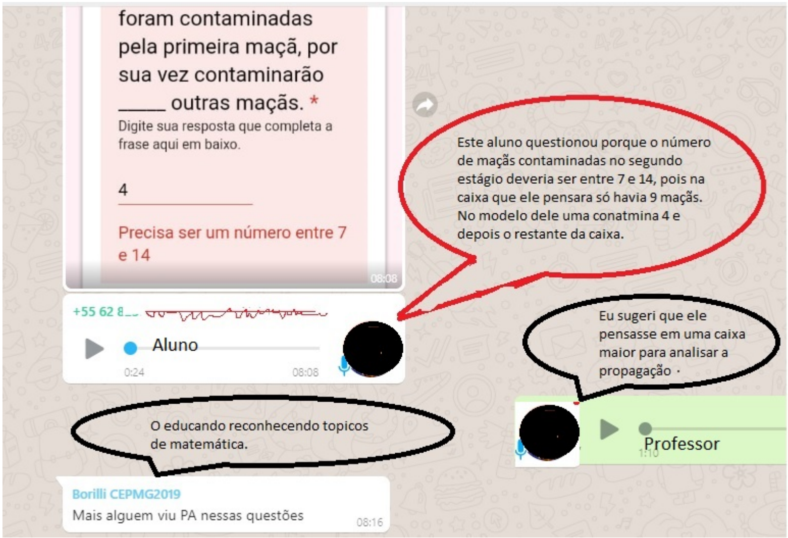


Figura 3.1: Conversas via Aplicativo.

Quando começaram a discussões no grupo, sobre o ED3, ficou mais evidente a participação e interesse de alguns educandos sobre a resolução do problema, e como o objetivo era justamente que houvesse mais dúvidas e afirmações no grupo, não foram feitas intervenções sobre as afirmativas dos educandos de modo que eles pudessem validar suas próprias conjecturas e modelos, mas é relevante ressaltar que o professor teve que se conter para não elogiar um educando em questão podendo desmotivar os outros e encerrando o assunto que poderia render mais cometários a partir do momento que se sentissem mais tranquilos em usar o aplicativo para esse fim.

Na Tabela da Figura 3.2, verificamos que 30 educandos afirmaram que são 4 as tangências máximas e 7 deles afirmaram que são 6. Dessa maneira, percebemos a confusão que eles fizeram, pois, não tentaram mudar a organização das maçãs na caixa e sim diminuir a caixa de modo que o que deveria ser mínimo se tornou máximo. Para alguns educandos não passavam de 3 o número de estágios de contaminação, pois, o número de maçãs era pequeno na caixa por eles adotada.

Número de Tangências	Nº de alunos	
2	5	
3	0	
4	**30**	*
5	3	
6	**7**	**
7	2	
8	5	

* Mínima
**Máxima

Figura 3.2: Quantidade de tangências máximas segundo os educandos

Outras considerações sobre os Estudos Dirigidos 1, 2 e 3

Quando foram analisadas somente as respostas do ED1, acreditamos que os objetivos poderiam ser alcançados mesmo com algumas ressalvas, pois a maioria dos educandos preencheram o formulário de modo coerente, passando pelas etapas da modelação. Já para o ED2 e ED3, ao realizarmos análise somente das respostas dos formulários, parecia que não seriam alcançados os objetivos estabelecidos, havia algumas respostas muito distantes do que se esperava, talvez pela visão do professor sobre a respostas dos educandos, que muitas vezes tendem a valorizar mais os erros do que os acertos, ou seja, para as primeiras impressões sobre os assuntos abordados, parecia que os educandos não iriam sistematizar muito sobre os tópicos matemáticos almejados. Porém, foi nas aulas após cada Estudo Dirigido que cada objetivo parecia ser alcançado, justamente na etapa da Validação dos Modelos, pois nessas discussões era possível perceber ideias, conjecturas e hipótese que os educandos pareciam ter receio de expor ao preencher o formulário. Talvez as afirmativas e ideias surgiam após algumas dúvidas sanadas ou pelo clima favorável para expor seus pensamentos durante a aula.

Verificamos que aplicação desses EDs e principalmente as aulas após cada ED, permitiram alcançar de forma razoável os objetivos, podendo desta maneira afirmar que o meio de ensino Modelação Matemática tem sua relevância na melhoria do ensino da matemática inicialmente nos tópicos que essa dissertação elencou, porém, acreditamos mediante aos resultados deste trabalho, que ela pode se estender para outros tópicos matemáticos (Interconexão de conteúdos) e também para outras áreas do conhecimento (Integração com outros componentes curriculares), Sem restrições, de tal modo que a modelação matemática pode ser "...um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la."(BASSANEZI, 2014, p.17).

Deixamos a seguir, outras sugestão de propostas de aplicações, que podem explorar outros tópicos matemáticos e outras abordagens de como validar um modelo.

Outras propostas de aplicações

Os estudos Dirigidos 4 e 5 deixaremos como proposta de aplicação, haja visto que até o Estudo Dirigido 3, tivemos resultados suficientes para realizarmos uma avaliação dessa proposta de trabalho, onde a modelação foi aplicada na busca de melhoria de ensino em turmas cujo currículo deve ser cumprido.

Objetivos do Estudo Dirigido 4 (ED4)

No ED4 (veja Apêndice D), para comprovação dos resultados obtidos será proposto a criação de um experimento que simule essa propagação da podridão em maçãs no fundo, de uma caixa, ou seja, no plano. Poderá também ser apresentado o experimento que está proposto no Apêndice G, que simula esta propagação. Este ED4, permitirá que os educandos tenham contato direto com o problema promovendo o efetivo entendimento, pois, segundo (MORAES, 1998) [35] "A organização dos experimentos em torno de problemas e hipóteses possibilita, por um lado, superar a concepção empirista que entende que o conhecimento se origina unicamente a partir da observação e, por outro lado, relacionar o conteúdo a ser aprendido com os conhecimentos prévios dos educandos."

Depois dos ED3 e ED4, a proposta é incentivar os educandos a continuarem os estudos e busca do conhecimento ao perceberem como matematicamente essa propagação se dá admitindo que cada maçã tangencie o máximo de outras frutas, ou seja:

i- Que os educandos percebam que a cada estágio de contágio o número de novas maçãs contaminadas seja múltiplo de 6;

ii- Consigam escrever um modelo que determina essa propagação no plano;

iii- (Desafio) Construção de um modelo que determine a soma de todas as maçãs podres em cada novo estágio.

Posteriormente será proposto que eles pensem em como empilhar as maçãs (Fornecer o texto da Mata, empilhamento das balas de canhão). Avançando ainda neste ponto da propagação da podridão, poderá ser proposto um modelo de propagação da podridão em maçãs no espaço. (Lembrando que esse não é o objetivo deste trabalho, será proposto apenas como desafio).

Objetivos do Estudo Dirigido 5 (ED5)

Neste ED5 (veja Apêndice E), com base em todas as aulas e Estudos Dirigidos anteriormente, espera-se que os educandos sejam desafiados a responder o "desafio" que consiste na criação de um modelo matemático para a propagação da podridão em maçãs no fundo, de uma caixa qualquer no plano, sabendo apenas a quantidade de maçãs infectadas no início (uma) e a estimativa de maçãs podres após 12 dias(80% das maçãs se encontram podres) e a quantidade de tangências entre elas. Sabemos que este modelo é complexo, porém, poderá ser alcançado, uma vez que os educandos agora em posse de informações relevantes e sistematização de conceitos matemáticos, se sintam mais capazes e sem medo de errar. É evidente que existe a necessidade de estudar muito, pois, estimular o conhecimento, a busca da Matemática para resolução de situações reais é um desafio e um dos intuitos da modelação Matemática no ensino.

Os questionários dos estudos dirigidos estão disponíveis nos seguintes links:

1. Estudo Dirigido 1: bit.ly/2FragaMaca; (ver em Apêndices A)
2. Estudo Dirigido 2: bit.ly/2FragaMaca2; (ver em Apêndices B)
3. Estudo Dirigido 3: bit.ly/2FragaMaca3; (ver em Apêndices C)
4. Estudo Dirigido 4: bit.ly/2FragaMaca4; (ver em Apêndices D)
5. Estudo Dirigido 5: bit.ly/2FragaMaca5. (ver em Apêndices E)

E também em uma versão impressa nos Apêndices A.

3.1.3 Uma avaliação das aplicações dos estudos dirigidos ED1, ED2 e ED3

A proposta de aplicação de Estudos Dirigidos é importante para verificar a capacidade dos educandos de se envolverem em um assunto, buscar informações, ter disposição para solucioná-los, ou seja, modelar o problema, entender como se dá cada etapa da construção deste modelo. Isso é o que a Modelação no Ensino da Matemática sugere como melhoria do ensino matemático. Nesse aspecto, a proposta foi bem sucedida. Primeiramente, os educandos mostraram interesse pelo tema (maçã), desde que foram questionados sobre o que eles sabiam dessa fruta tão apreciada por todos no mundo. (Para aguçar a curiosidade foi apresentado textos e vídeos sobre a maçã, veja no ED1 A). Posteriormente, houve a busca pela sistematização dos tópicos matemáticos, onde eles perceberam a Matemática como uma ferramenta útil para a resolução de uma situação real, eles deveriam encontrar meios de solucionar. Diante disso, houve ainda a quebra da "comodidade", mudança de postura, eles não foram receber conhecimento, mas sim buscá-lo, de modo que o conhecimento se torne mais significativo para os educandos.

Com a ideia dos EDs online, foi possível perceber a autenticidade das respostas, pois, cada educando, procurou meios próprios para solucionar cada questão e consequentemente chegar nas soluções (modelos). É importante lembrar que nesse processo não existem restrições para a busca das soluções, ou seja, eles podem realizar pesquisas na internet ou em qualquer outro meio de busca de conhecimentos, o primordial é que diante dos dados e hipóteses levantadas, eles, sejam capazes de conjecturar suas próprias estratégias de resolução de problemas e construção de modelos matemáticos.

A cada estudo dirigido, foi dada uma aula expositiva com o tema do ED anterior, onde o intuito era compartilhar conhecimentos adquiridos e dúvidas, além de analisar hipóteses e conjecturas levantadas pelos educandos, mesmo que errôneas. Nessas aulas percebemos o envolvimento e empolgação de muitos educandos, mas também o receio deles, pois, a mudança no modo de ensinar, onde a busca da solução é que faz emergir o conceito matemático, gerou muitas incertezas e medo de errar, haja visto que, estão acostumados a simplesmente aplicar (com certeza) o assunto que foi visto na aula anterior para chegarem nas soluções dos problemas propostos posteriormente.

Podemos exemplificar essa situação cômoda para os educandos, quando o professor chega em sala de aula com o tema "Teorema de Pitágoras" define, explica e dá exemplos, posteriormente passa uma lista com mais de 10 exercícios de aplicação do Teorema de Pitágoras. Dessa maneira o educando não tem dúvida do que ele usará para resolver toda a lista, mas agora o maior problema seria decorar a fórmula, interpretar o problema corretamente para coletar os dados de forma satisfatória.

Podemos inferir que cada estudo dirigido, alcançou seus objetivos, pois, a cada ED mesmo que de forma trivial foi sendo conceituado tópicos matemáticos.

A proposta do ED1, foi alcançada quando os educandos conseguiram perceber que os melhores objetos para representar as maçãs e o fundo da caixa, seria respectivamente o círculo e o retângulo, além de conseguirem organizar as maçãs(círculos) em fileiras e dessa maneira conseguirem calcular a quantidade de frutas que cabem em uma caixa, sem instrumento de medidas usuais, ou seja, utilizaram a própria maçã como unidade de medida.

Para o ED2, verificamos que os objetivos também foram alcançados, mesmo que não tenha atingido toda a turma no primeiro momento. No ED1, que era mais simples, só dos educandos realizarem o estudo dirigido, já nos permitiu perceber o alcance dos objetivos propostos, mas para o ED2 isso não se deu da mesma forma. Só após o esclarecimento das dúvidas na aula após ED2 com o compartilhamento de informações e novos dados e que a turma conseguiu melhor o raciocínio e perceber a necessidade de mudar o objeto geométrico plano para um que levasse em consideração outra dimensão além da largura e comprimento, pois, agora o volume era relevante. Chegaram ao entendimento que a esfera e o cubo seriam os objetos geométricos que melhor representariam respectivamente as maçãs e a bin. Além de conseguirem representar as dimensões da bin por meio das maçãs e também conseguirem chegar no modelo de capacidade de uma caixa qualquer com unidade de medida maçã.

Já para o ED3, os educandos não conseguiram a priori pensar em uma nova organização das maçãs no fundo da caixa, por mais que as questões sugerissem novas respostas, eles ainda se prenderam ao fato delas sempre estarem organizadas por meio de fileiras de mesma quantidade de frutas. Dessa maneira não fazia sentido as questões sobre a quantidade máxima e mínima de tangências das maçãs na caixa. Novamente após a intervenção do professor, na aula posterior ao ED3, é que ficou claro o motivo de tantas respostas sem sentido no estudo dirigido, além de verificar que, ao invés de pensarem na mudança da organização das maçãs na caixa eles acharam mais conveniente mudarem as dimensões da caixa a cada questão.

Após alguns esclarecimento e novas informações foi sugerido que eles refizessem o ED3, porém, somente 10 educandos se sentiram motivados. Acreditamos que o motivo por tão poucos terem refeito o ED3, foi a resistência em refazer atividades propostas.

De modo geral com aplicação do meio de ensino “Modelação Matemática no Ensino” por meio dos Estudos Dirigidos, verificamos que esse meio de ensino é aplicável e tem resultados satisfatórios, desde que haja uma preparação tanto do professor quanto dos educandos envolvidos nesse processo. Não se pode pensar que simplesmente o professor vai chegar em sala e começar a trabalhar modelação e que todos os problemas de ensino matemáticos estarão resolvidos, mas deve ser considerado como mais uma ferramenta do uso pedagógico em sala de aula.

Capítulo 4

Conceitos geométricos aplicáveis e experimento

Nesta Seção, iremos mostrar as possíveis aplicações que os educandos podem, durante a busca da criação de um modelo para a situação problema da propagação da podridão em maçãs, se depararem, no estudo da geometria e também alguns outros tópicos de Matemática que podem ser explorados conforme a necessidade ou disponibilidade de tempo que cada grupo de estudo possa ter.

A primeira atividade é propor a pesquisa com o tema (maçã), analisando as várias fases, plantio, colheita, estocagem, logística, perca de produção (prejuízo) e venda ao consumidor final. Levantar a enquete; onde ou em que estágio se dá a maior perda da produção (prejuízo)?

Buscar dados que possam ser o ponto de partida para a busca da solução, problema. Nesse caso o professor poderá disponibilizar os dados segundo o trabalho de Bassanezi [6], para agilizar a pesquisa, pois, o foco não seria a pesquisa, mas sim a construção de modelos a partir de dados iniciais. A ideia principal com o levantamento de dados é instigar, provocar nos educandos a curiosidade de estimar a perda da produção (propagação da doença) a cada dia? O que é um modelo? Se existe um modelo que retrata essa situação?

Para a realização do planejamento de trabalho deve-se analisar.

- Os tópicos matemáticos que precisaremos para retratar o problema da propagação da podridão em maçãs;
- Os temas que atendem ao currículo escolar?
- Até que ponto os educandos podem explorar sem prejudicar o andamento do currículo;
- A capacidade de resolução de problemas e conjecturar modelos.

Se a percepção dos educandos enquadrar a geometria como melhor meio (inicial) para solucionar o problema, iremos dar continuação ao tema, caso contrário cabe ao professor propor ou interferir, pois, ele tem um objetivo a cumprir dentro conteúdo programático.

Espera-se que os educandos sejam capazes de representar por meio de objetos geométricos tanto as maçãs quanto a bin (No plano e no espaço). Nesse estágio deixar que os educandos sugiram e discutam o melhor objeto geométrico. Faz parte do planejamento essa etapa, para depois explorar tudo que seja relevante ao estudo do modelo e que atenda ao currículo escolar.

Os objetos geométricos esperados são:

i- O círculo ou circunferência, para representar as maçãs;

ii- O retângulo ou quadrado para representar o fundo da bin;

iii- A esfera para representar a maçã no espaço;

iv- O cubo para representar a bin.
Obs.: Podem surgir no meio das discussões outros objetos geométricos e questionamentos não esperados, daí a necessidade do preparo do professor para lidar com a modelação conforme visto na página 122.

Após a pesquisa e coleta de dados verificar que a propagação da podridão se dá por contato direto, logo sugeri qual seria o número mínimo e o máximo de tangências, ao reorganizar as maçãs na bin. Posteriormente analisar como o contágio se efetua, tanto da forma mais lenta (com menos tangências entre as frutas) quanto da mais rápida (com o número de tangências máximas). Diante dessas verificações propor a tarefa aos educandos de avaliar e determinar o mínimo e o máximo de tangências entre as maçãs tanto, no fundo da bin quanto nela como um todo.

Devemos ter o cuidado em auxiliar os educandos na escolha dos melhores objetos geométricos para representar cada situação, no plano e no espaço, de modo que a tarefa não se torne complicada e consequentemente frustrante. Após essa busca de dados, possibilitar as conjecturas. Posteriormente, propor meios concretos que comprovem as conjecturas de organização das maçãs na bin, assim como o número de tangências mínimas e máximas.

Nesse estágio da modelação a construção dos modelos pode ser complicado, pois, agora será sugerido modelos por meio de expressões Matemáticas. Devemos estar preparados para valorizar cada participação dos educandos e também os erros que fazem parte essencial para se chegar na solução do problema. É possível que os educandos percebam o funcionamento do modelo e mesmo assim não consigam escrever o modelo, e mesmo assim, pode-se considerar que o conteúdo foi assimilado de forma sistêmica conforme Bassanezi [6], modelação " ... é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado."

Vários tópicos matemáticos podem ser explorados, tais como:

- Sequências e termo geral, Progressões Aritméticas e Soma de termos;
- Sequência de recorrência;
- Novas unidades de medida com a maçã;
- Área e volume;
- Máximos e Mínimos em uma função;
- Estimativa entre outros.

Simplificação do problema

Questionamentos que podem ser realizados para provocar a busca pela solução do problema.

1. A maçãs são esféricas?
2. Qual a forma da bin?
3. Quantas maçãs cabem em cada lateral da bin?
4. Como determinar a tangência de esferas?
5. Qual tangência devemos considerar (máxima ou mínima) para o estudo da propagação?
6. Se 3000 frutas cabem em uma bin cúbica, quais as dimensões da caixa em unidade de maçã?
7. Como se propaga a doença se as maçãs fossem círculos? (experimento), O que se observa no experimento? Se uma maçã está podre no centro da bin e a tangência máxima é 6, como se dará o próximo estágio da doença no plano?
8. Qual relação temos com a numeração do estágio a soma das maçãs podres no modelo a ser construído?
9. É possível estabelecer uma relação com o espaço? Ou seja, quantificar os estágios de contaminação uma vez que a maçã podre se encontra dentro (centro da bin)? Teria como provar por meio de um experimento?
10. Quais os conteúdos foram explorados? Houve necessidade de aprender quais conceitos? Relembrar quais?
11. Quais conceitos extra currículo regular foram vistos ou buscados? (por exemplos equações diferenciais, derivadas, integrais, equações ordinárias, limite entre outros).

4.0.1 Uma proposta de aplicação e discussão dos conceitos geométricos envolvidos

Para Bassanezi [6], os problemas em aplicar a modelagem, como tempo e inexperiência, são dificuldades que podem ser minoradas quando modificamos o processo clássico de modelagem, levando-se em conta o momento de sistematização do conteúdo e utilizando uma analogia constante com outras situações problemas. Essa alteração no processo da modelagem com intuito de adequar aos cursos regulares se denomina ***Modelação Matemática***.

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno como seu ambiente natural...
> ...A proposta deste texto é sugerir a modelagem matemática como uma estratégia a ser usada para o ensino e aprendizagem de Matemática em cursos regulares ou não e neste contexto recebe o nome de Modelação Matemática (modelagem em Educação).(BASSANEZI, [6])

Temos ainda Biembengut [11], reforçando a ideia que é possível aplicar uma metodologia que busque o conhecimento nos moldes da modelagem e seja aplicável no ensino regular.

> Em cursos regulares, nos quais há um programa a ser cumprido - currículo - e uma estrutura espacial e organizacional nos moldes "tradicionais" (como é a maioria das instituições de ensino), o processo da modelagem precisa sofrer algumas alterações, levando em consideração principalmente o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível para que terão para o trabalho extra classe, o programa a ser cumprido e o estágio em que o professor se encontra, seja em relação ao conhecimento da modelagem, seja no apoio por parte da comunidade escolar para implantar mudanças. O método que utiliza a essência da modelagem em cursos regulares com programa denominamos **modelação Matemática**.(BIEMBENGUT, 2000, p.18)

A diferença entre Modelagem e Modelação consiste no fato da primeira buscar o conhecimento matemático seja qual for e até mesmo criar novos modelos matemáticos, ou seja, realizar descobertas diante de uma situação real, não se preocupando com o tempo de assimilação e nem em cumprir cronogramas, já a segunda alia e ajusta à modelagem e suas etapas com os conteúdos programáticos almejados e cumprindo o cronograma, ou seja, o intuito não é realizar novas descobertas em conteúdos diversos, mas sim explorar os conteúdos programáticos.

A modelação Matemática como proposta de ensino matemático, propõe trabalhar com conteúdos complexos por meio de um modelo aplicado, e para isto o professor deverá estar preparado para trabalhar com essa nova metodologia para que tenha êxito no ensino. Segundo Biembengut [11](2009), " seja como for, um modelo matemático retrata, ainda que em uma visão simplificada, aspectos da situação pesquisada."

Porém, para a implementação da metodologia de modelação Matemática é necessária uma preparação por parte do professor, uma verdadeira sondagem tanto do público alvo quanto da situação problema. Biembengut [11], sugere ainda cinco passos: Diagnóstico, Escolha do tema ou modelo matemático, Desenvolvimento do conteúdo programático, Orientação de modelagem e Avaliação do processo.

Para a aplicação da nossa proposta de trabalho será realizado os cinco passos segundo Biembengut, da seguinte maneira:

(1) **Diagnóstico** Será realizado os levantamentos da turma, o número de educandos, a realidade social, o grau de conhecimento matemático e a disponibilidade dos educandos para a efetivação do planejamento;

(2) **Escolha do Tema ou Modelo matemático** O tema escolhido foi a propagação da podridão em maçãs, para explorar conceitos geométricos e criação de um modelo matemático;

(3) **Desenvolvimento do conteúdo programático** É nesse momento que a Modelação se concretiza de fato, pois, no desenvolvimento programático o professor segue as mesmas etapas da modelação; *Interação*; *Matematização* e *Modelo Matemático*, porém, é acrescentado na etapa de matematização o conteúdo programático desejado, que em nosso caso é a Geometria. Que irá permitir definir

qual a melhor forma geométrica para simular cada maçã, cálculo de área, para determinar a área do fundo da caixa de maçã, verificar geometricamente se existe uma disposição ideal para que elas possam cobrir o fundo da caixa com o maior número de maçãs, depois estender para o volume, ou seja, a capacidade de cada caixa de maçãs;

(4) **Orientação de Modelagem** que consiste em verificar se o trabalho está coerente aos dados e ao que é esperado, pois o maior objetivo desse método é segundo Biembengut (2012) "...criar condições para os educandos aprendam a fazer modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos." Desta maneira fujam do trivial e realmente seja relevante para assimilação dos conteúdos. É necessário um planejamento prévio e com objetivos claros. Será proposto um questionário que dirija os trabalhos sem interferir no processo de busca, mas simplesmente na orientação do caminho a seguir;

(5) **Avaliação do Processo.** Nesse momento é necessária uma retomada dos objetivos desejados, para realizar a avaliação, pois o principal intuito dessa metodologia é reacender o que o Ensino da Matemática deveria propiciar aos educandos que é a capacidade para enfrentar e solucionar problemas, saber realizar pesquisas, utilizar-se das tecnologias entre outras.

4.1 Conceitos matemáticos presentes em diferentes abordagens do problema da propagação da podridão em maçãs

Relembremos que o estudo sobre a propagação da podridão em maçãs, que apresentamos aqui é baseado nas experiências do Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi, apresentadas no livro: Temas & Modelos, 2012, no capítulo 5: "Propagação da Podridão em Maçãs". Bassanezi ainda relata que com esse tema, maçã, foi possível abordar alguns tópicos de Matemática:

i) Geometria: Da escolha do objeto geométrico que melhor representa a frutas até o cálculo do volume da fruta e a relação volume da esfera com o volume do cubo entre outras;

ii) Equações: Diferenciais: quando ao analisar os dados e as necessidades do manejo da fruta na frigorificação, se propuseram a construir uma esteira ideal para o tanque de resfriamento;

iii) Estatística: Quando se analisa os melhores processos de plantio, distância entre as fileiras e entre as plantas, escolha do tipo de fruta e a produção;

iv) Cálculo Diferencial: quando se pensa no processo de armazenamento, maior quantidade de frutas no menor espaço, com possibilidade de movimentação que um depósito requer.

v) Matemática Fuzzy: ao analisar a subjetividade dos dados, pode-se empregar modelos variacionais fuzzy, onde as variáveis e/ou os parâmetros são considerados como conjuntos que exibem o grau de pertinência de seus elementos.

O educandos ainda continuam tendo um fraco desempenho nas aprendizagens de Matemática, mesmo depois de várias reestruturações no ensino, porém, é preciso que os educandos se sintam intrigados com situações reais e que os professores sejam os causadores dessa curiosidade e estimule a busca pelo conhecimento e aprimoramento da interpretação e capacidade de montar estratégias de resolução.

> Na Educação Matemática, mesmo com expressiva pesquisa e reestruturações curriculares, o ensino de Matemática, salvo experiências isoladas, não propicia ao estudante suficiente habilidade para interpretar e solucionar problemas. Poucas vezes lhes são apresentados situações-problemas que requerem uma leitura e interpretação e, a seguir, uma formulação e explicação desse contexto. Sem essa vivência, essa capacidade se perde. A Matemática, em geral, é tratada de forma estanque sem qualquer vínculo; nem entre a própria Matemática. (BIEMBENGUT [12], 2009, p.225).

4.2 A Importância do Experimento

Como acompanhar a propagação da evolução das maçãs é algo complexo, almejamos fazer um experimento, *Simulador de Propagação da Podridão em maçãs*, que será construído com recipientes cilíndricos (copos descartáveis) interligados por mangueiras, simulando a disposição das maçãs na primeira camada dentro da caixa. O copo central terá contato máximo com seis outros copos, e assim iremos interligando-os, de tal forma que o líquido ao ser colocado copo central, aqui chamo de camada ZERO, irá se espalhar para todos os outros copos, por meio das conexões, e só depois iremos observar o tempo necessário para que um "contaminante" (pigmento), se propague por cada camada ao redor da camada ZERO, para que o educando possa observar de um modo prático essa evolução. Isso será descrito com detalhes no Apêndice G.

Várias são a discussões sobre uma metodologia de ensino que seja melhor, uma delas são as atividades não tradicionais de realização de experimentos, que fogem do ambiente controlado e engessado de cadeiras enfileiradas, e parte para as descobertas, englobando aspectos como o conhecimento e os saberes que os educandos já possuem, isso permite aos educandos participarem de um processo empírico, em que possam compreender o que está proposto de uma maneira no mínimo mais prazerosa e significativa para a edificação do saber.

> A organização dos experimentos em torno de problemas e hipóteses possibilita, por um lado, superar a concepção empirista que entende que o conhecimento se origina unicamente a partir da observação e, por outro lado, relacionar o conteúdo a ser aprendido com os conhecimentos prévios dos alunos. Entretanto, problemas dessa natureza geralmente não se enquadram bem em disciplinas específicas, exigindo uma abordagem interdisciplinar. Isto nos leva a uma outra característica das experimentações construtivistas que é o envolvimento de várias disciplinas ao mesmo tempo, sendo possível demonstrar para os alunos que todas elas estão interligadas. (MORAES [35], 1998, p.116).

> Os problemas apresentados na escola, muitas vezes não chegam nem na avaliação porque, em geral muito pouco tem a ver com a realidade. Muitos problemas, aliás, nem tocam em algum cotidiano, isto é, o livro-texto ou o professor dão a equação e mandam os alunos resolverem-na, ou seja, estamos muito acostumados a trabalhar os problemas na categoria de exercícios de reconhecimento, de repetição, de algoritmo e eventualmente, problemas de aplicação.(Meyer, Caldeira e Malheiros [34], 2018, p.29) .

Proposta de Aplicação em Sala do Experimento

Como foi proposto no ED4, que os educandos construíssem um experimento que mostrasse ou simulasse a propagação da podridão será o momento de trocar experiencias e anotar os possíveis erros e também os sucessos. Essa proposta visa estimular o fazer matemático, ter contato direto com uma situação problema. A exposição dos experimentos tanto dos educandos quanto do professor irá ocorrer simultaneamente, pois, não existe experimento certo ou errado. É importante salientar que cada trabalho irá representar a forma como cada um interpreta a situação problema.

Considerações finais

A elaboração dessa dissertação é norteada pela inquietação de contribuir com a melhoria do ensino de matemática e traz primeiramente a modelagem como uma proposta. Para isso, realizamos um estudo teórico e metodológico, porém, a modelação matemática foi criada e defendida por autores como Bassanezi [6] e Biembengut [11], com o objetivo justamente de promover a melhoria do ensino em sala de aula. E como já foi citado neste trabalho, a Modelação é diferente da Modelagem, pois permite ser aplicada em cursos regulares que tem cronograma e currículos a serem cumpridos, com a mesma qualidade da modelagem, além de atender os documentos oficiais PCNs e a BNCC, que norteiam a educação na nossa federação.

A educação está sempre em processo de evolução e que não se pode pensar em uma receita pronta e acabada para a melhoria do ensino, mas devemos sempre procurar meios para que os nossos educandos tenham acesso ao conhecimento significativo, e busquem-no como ferramenta para solucionar e resolver os problemas do cotidiano.

Dessa forma a presente pesquisa contribui para a difusão e para o estudo da Modelação Matemática como Meio de Ensino, ao oferecer dados que embasam teoricamente os professores que queiram usar a modelação em sala de aula e ainda se sentem inseguros, apresenta resultados favoráveis dessa aplicação.

Este estudo trouxe uma proposta ousada, no sentido de aplicar a Modelação Matemática por meio de Estudos Dirigidos online, ou seja, boa parte dos trabalhos foram realizados fora de sala de aula. Os educandos poderiam responder os Estudos Dirigidos (EDs) em qualquer lugar. Os EDs não eram a parte principal do processo, uma vez que todas as etapas da modelação matemática pudessem ocorrer satisfatoriamente. Foram ministradas aulas presencias para as possíveis discussões e compartilhamento de conjecturas e ideias acerca de cada ED, bem como para a verificação da validação de cada modelo encontrado pelos educandos.

Considera-se que o objetivo deste estudo foi alcançado, pois, apresentamos dados e as análises favoráveis dos resultados de cada ED, que evidenciam a Modelação Matemática como meio que contribui para a melhoria do ensino e que podem ser aplicados em turmas regulares sem restrições.

Durante a aplicação dos EDs foi perceptível a insegurança por parte dos educandos, pois, estavam seguindo linhas de raciocínio distintas. Como estão acostumados a serem avaliados constantemente e, na maioria das vezes, são levados a pensarem de maneira padronizada, a Modelação Matemática trouxe esse incômodo, porém, percebemos que grande parte dos educandos demonstraram ser mais atuantes no processo de ensino-aprendizagem, pois, demonstraram mais disposição a encontrarem os "modelos" de cada Estudo Dirigido.

Devemos lembrar que a modelação matemática tem o papel de promover a melhoria do ensino, como Biembengut [11], (2009) afirma "[...] ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado para o aluno, e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria Matemática quanto da natureza do problema a ser modelado."

Com a Modelação houve uma mudança, pois, o professor não levava o conteúdo e depois propunha uma lista de problemas envolvendo o que foi ministrado para os educandos. Agora eles deveriam ser atuantes e buscarem na matemática o conteúdo que os auxiliassem na busca das soluções.

Diante da novidade, da mudança de como eles estavam aprendendo matemática, muitos educandos perceberam que ficava mais fácil entender matemática com situações reais (a Modelação). Com essa proposta de trabalho os educandos demonstraram ter outra percepção da Matemática, não como a matéria "difícil" e complicada, mas como um meio de solucionar problemas, tendo a possibilidade de se tornar prazerosa. Com a Modelação Matemática, houve participação efetiva de alguns educandos, que se propuseram a resolver todos os EDs, até os que foram apenas propostos como futura aplicação.

Verificamos que ao aplicar os Estudos Dirigidos, parte dos educandos se entusiasmaram com a ideia de conjecturar e levantarem hipóteses, de serem autores de seus próprios modelos e não mais uma fórmula a ser decorada. Foi o caso dos alunos “X” e “Y” que mesmo após o encerramento dos três primeiros Estudos dirigidos, que eram a proposta de aplicação para essa dissertação, continuaram buscando soluções para o ED4 e ED5, pois, se sentiram desafiados. Em várias discussões buscavam o professor para esclarecer dúvidas, solicitar orientação para conseguirem resolver o ED5, e relatavam que iriam persistir até obter êxito. Nessa perspectiva considera exitosos os resultados, viabilizando a utilização frequente no Ensino da Matemática.

Foi perceptível que para uma parte dos educandos, a mudança foi além da simples forma como foram conduzidas as aulas, pois trouxe liberdade para se buscar o conhecimento além dos livros didáticos, possibilitando que eles atuassem efetivamente no processo, e ao solucionar problemas reais aliaram a teoria com a prática, tornado significativo o aprender, possibilitando que matemática seja compreendida em outra perspectiva. Corroborando com a ideia de Biembengut (2000) [11], que “... ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado para o educando, e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria Matemática quanto da natureza do problema a ser modelado.”

Este trabalho além de permitir a realização uma satisfação pessoal, contribuiu com o meu profissional, pois toda a trajetória até a conclusão desta dissertação trouxe mais do que um título, agregou conhecimentos, experiências, possibilidade de contribuir com melhoria do ensino. Perceber no olhar dos educandos o encanto das descobertas, do “fazer” matemática é gratificante, e com a modelação matemática, verificamos que isso pode ocorrer de maneira significativa, o que não torna a tarefa de “Ensinar” mais fácil, porém, pode contribuir com a melhoria do ensino. Todo esse enriquecimento e aprimoramento foram possíveis pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) que visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que buscam aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência.

Deixamos ainda como proposta de aplicação dos Estudos Dirigidos 4 e 5 e a construção de experimentos que possibilitem a validação de alguns modelos. Com os resultados satisfatórios dos ED1, ED2 e ED3, ficamos na expectativa de como seria os resultados dos ED4 e ED5.

Assim, como perspectiva de continuidade dessa pesquisa, percebemos a possibilidade de aplicação da Modelação Matemática como uma das metodologias que favorecem a educação a distância (EAD), em matemática, mas que pode ser expandida para outras áreas do conhecimento. Essa proposta poderá ser formulada ao realizarmos uma interconexão com outras áreas do conhecimento, conforme a proposta da BNCC, e assim contribuir na qualidade do ensino e possibilitar o acesso em lugares que simplesmente não há a possibilidade de uma escola física.

Referências Bibliográficas

[1] AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H., *Psicologia educacional.* Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

[2] AROEIRA, G.J.R., *Lei de ação das massas*, Disponível em: https://www.infoescola.com/fisico-quimica/lei-de-acao-das-massas/ acesso em: 30/07/2019.

[3] BARBOSA, A.S., *Modelagem Matemática: relatos de professores*, Dissertação de mestrado, Curitiba-2012.

[4] BARBOSA, J.C., *Modelagem Matemática: o que é? Por quê? Como?* -Veritati, Salvador, n. 4, 2004.

[5] BARBOSA, J.C., *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico*, In: Reunião Anual da ANPD, 24, 2001, Caxambu Anais ... Disponível em <http://24reuniao.anped.org.br/tp1.htm#gt19> acesso: jun. 2019.

[6] BASSANEZI, R.C., *Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática*, 4 ed. Edit. Contexto, S.P., 2014.

[7] BASSANEZI, R.C., *Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto, 2002.

[8] BASSANEZI, R.C., *Temas & Modelos* Santo André, SP: Editora Universidade Federal do ABC, 2012.

[9] BEAN, D., *O que é modelagem matemática? Educação Matemática*-em revista, v. 8, n. 9/10, 2001.

[10] BIEMBENGUT, M.S., *30 anos de modelagem na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais.* Alexandria, v. 2, n. 2, p. 7-32, 2009.

[11] BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N., *Modelagem Matemática no Ensino.* São Paulo: Contexto, 2000, 127p.

[12] BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N.; LOSS, G.S., *Modelagem matemática no ensino de matemática na engenharia.* Artigo, 2009.

[13] BOLZAN, S., http://www.serrariabolzan.com.br/produtos/bins/3-bins-para-macas , Busca realizada em 20 de dezembro de 2018.

[14] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. GOVERNO FEDERAL, *Parâmetros Curriculares Nacionais*, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf Acesso em: 02/07/2019.

[15] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. GOVERNO FEDERAL, *Base Nacional Curricular Comum: BNCC-APRESENTAÇÃO.2019*, Disponível em:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em:02/07/2019.

[16] BURAK, D. & KLÜBER, T. E., *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática* - Artigo Publicado em v. 10, n. 1 (2008)- Disponível em:http://bit.ly/2SGHE75, acessada em 15/11/2018.

[17] BURAK, D., *Critérios norteadores para adoção da modelagem matemática no ensino fundamental e secundário.* Zetetiké v. 2, n.2, 1994.

[18] BURAK, D., *Currículo Latters http://bit.ly/2B5BVR6 realizada em 28/10/2018.*

[19] BURAK, D., *Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem*, 1992. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

[20] BURAK, D., *Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série. 1987*- Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

[21] BURAK, D., *Uma perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e aprendizagem da Matemática. In: BRANDT, c. f.; BURAK, D.; KLUBER, T. E. (orgs.).*

Modelagem Matemática: uma perspectiva para a educação básica. Ponta Grossa, Editora UEPG, 2010. p.15

[22] CALDEIRA, A.D & Everaldo, S.,*Modelagem na Sala de Aula: resistências e obstáculos*-Bolema, Rio Claro (SP)-2012, disponível em: http://bit.ly/329VPXK em 04/07/2019.

[23] DENNIS G.Z. y Cullen, M.R., *Ecuaciones diferenciales Matemáticas avanzadas para ingeniería*, vol. 1 Ed. Thomson Paraninfo.

[24] EMBRAPA-2002, *Manejo das doenças de verão na produção integrada da maçã*, Circular técnico - junho 2002; Disponível em: https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/55131/1/cir036.pdf.

[25] GIRARD, C.L., *Frutas do Brasil-Maçã Produção*, disponível em: http://bit.ly/2Rw9D97 realizada em 01/dez/2018.

[26] GÓMEZ, A.P., *O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional reflexivo. In: NÓVOA, A. (Org.). Os professores e a sua formação. Lisboa: Publicação Dom Quixote, Instituto de Inovação Educacional, 1992. p. 93-114.*

[27] GOOGLE, *https://www.google.com/intl/pt-BR/forms/about/ acessado em 03/09/2019*

[28] GUIDORIZZI, H.L., *Um Curso de Cálculo*, Rio de Janeiro, vol. 4, 5a ed. LTC, 2004.

[29] LORENZATO, S., *Por que não ensinar geometria*, Educação em Revista - Sociedade Brasileira Matemática - SBM, ano 3, n. 4 - 13, 1º sem. 1995 p. 5.

[30] MARTINELLO, D., *Modelação Matemática: uma alternativa para o ensino de matemática no 1º grau.* 1994. . Dissertação (Mestrado) - FURB, Blumenau. Orientadores: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio e Profª. Drª. Maria Salett Biembengut. Acessado em 22/10/2019 em: http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Trabalhos&parte=DEnsFun.

[31] MATA, S.T., *Modelagens alternativas para o problema da podridão em maçãs.* Dissertação de mestrado. CMCC -UFABC, 2010, Santo André-2010, sob orientação de Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi.

[32] MATHIAS, J. & RUFATO, A.R., *Como Plantar maçã* - Revista eletrônica Globo Rural 08/05/2017, disponível em: https://revistagloborural.globo.com/vida-na-fazenda/como-plantar/noticia/2017/05/como-plantar-maca.html em 28/07/2019.

[33] MENEGHETTI, R.C.G., *O Intuitivo e o lógico no conhecimento matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática.*

[34] MEYER, J.F.C.A.; CALDEIRA, A.D.; MALHEIROS A.P.S., *Modelagem em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

[35] MORAES, R.O., *significado da experimentação numa abordagem construtivista: O caso do ensino de ciências. In: BORGES, R. M. R.; MORAES, R. (Org.) Educação em Ciências nas séries iniciais. Porto Alegre: Sagra Luzzato. 1998. p. 29-45.*

[36] MORGADO, A.C., *Coleção Profmat: Matemática Discreta*, SBM, (2015), 2ª Edição.

[37] OLIVEIRA, L.L., *In: MACEDO, Lino de. Ensaios Construtivistas.* São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

[38] PANIZZA, M., *Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais: análise e propostas.* Porto Alegre: Artmed, 2006. Cap. 8, p.169 - 188.

[39] PAVANELLO, R.M., *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências*, 2009. Zetetike, Disponível em: http://bit.ly/2mbjWF1 Acesso: outubro de 2018.

[40] PETRI, J.L., *Revista: Galileu-Edição 212* - Março de 2009. Editora Globo-Disponível em: https://glo.bo/310J8gv , acessada em:29/07/2019.

[41] SANCHES, R.P., *Análise do número de reprodutividade basal na fase inicial de doenças causadas por vetores*, [Tese de Doutorado]. São Paulo: Faculdade de medicina, Universidade de São Paulo; 2015.

[42] SANNHUEZA, R.M.V., *Manejo das doenças de verão na produção integrada da maçã - Circular Técnica 36* - Embrapa -Junho de 2002. Disponível em:https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/55131/1/cir036.pdf.

[43] SILVA, Z.S., *Modelação Matemática e Suas Implicações nas Concepções Matemáticas de Alunos de 5ª Série do Ensino Fundamental.* Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Regional de Blumenau. Blumenau, 2003. Orientadora: Profª. Drª. Maria Salett Biembengut. Acessado em 22/10/2019 em: http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Trabalhos&parte=DEnsFun

[44] SILVEIRA, E., *Modelagem Matemática em educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações.* 2007. 196 f Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR, 2007.

[45] SKOVSMOSE, O., *Cenários para investigação.* Bolema, v.13, n.14, 2000.

[46] SUPERINTERESSANTE, *Empilhar bolas e laranjas é questão de Geometria.* Disponível em: https://super.abril.com.br/ciencia/empilhar-bolas-e-laranjas-e-questao-de/geometria/; realizada em: 18 dez. 2018.

Apêndices

Apresentando os Estudos Dirigidos Online (ED)

Estes Estudos Dirigidos foram elaborados em uma versão online utilizando Google-Forms, ferramentas do Google [27], no intuito de oferecer mais liberdade aos educandos para responderem os questionários fora do ambiente escolar, permitindo melhorar a capacidade de resolução de problemas, pois assim, eles têm menos medo de errar.

Apêndice A

Estudo Dirigido (ED1)

Figura A.1: **Estudo Dirigido 1 (ED1)** bit.ly/2FragaMaca

03/09/2019 A Maçã

A Maçã

A maçã é uma fruta mundialmente conhecida e é consumida em todos os continentes, típica de clima frio. Quando os primeiros colonizadores europeus a trouxeram para o Brasil, as melhores condições para o cultivo ocorreram em Santa Catarina, ao avançar para o Rio Grande do Sul e Paraná, passou a formar, e é até hoje, o principal polo produtor da fruta no Brasil fonte: (https://revistagloborural.globo.com/vida-na-fazenda/como-plantar/noticia/2017/05/como-plantar-maca.html)

Quando saboreamos uma maçã nem nos damos conta de toda a logística até chegar a nossa mesa, que começa em saber o momento correto da colheita, pois as frutas não podem estar maduras e nem verdes demais. Cuidados específicos são necessários: os catadores devem ter cautela ao realizarem o manuseio ainda no campo; no trajeto destas frutas até os locais de armazenagem não podem ficar expostas ao sol ou à mudanças repentinas de temperatura; quando chegam aos armazéns refrigerados, elas deverão ficar sob temperatura controlada por um curto período, pois ainda existe o tempo gasto pelo transporte até chegar aos grandes centros de distribuição nas capitais de todo pais, e então só aí podemos desfrutar da fruta.

A armazenagem das maçãs é feita em câmaras frigoríficas onde são depositadas em caixas de madeira bin sobrepostas que comportam aproximadamente, 3000 frutas. Quando alguma maçã está contaminada com a podridão, à doença se propaga rapidamente contaminando as outras frutas ao seu redor - estima-se que em 12 dias, 80% das maçãs da caixa são contaminadas, comprometendo posteriormente todo o estoque. (BASSANEZI,2012,p.105)

*Obrigatório

Maçã 1

Maçãs

Fungos ameaça acabar com produção de maçãs em Santa Catarina. https://youtu.be/05UCCTfwCz4

... maçãs são muito suscetíveis a danos mecânicos, motivo pelo qual não devem ser manipuladas além do necessário. Devem se tomar as seguintes cautelas na colheita: não derrubar as frutas, colher as frutas sadias em repasses e com estado de maturação adequado, sem folhas para evitar riscos de infecção, e evitar colher frutas molhadas. As frutas caídas no chão não devem ser colocadas junto com as colhidas.

Fungos ameaça acabar com produção de maçãs em Santa Catarina. https://youtu.be/05UCCTfwCz4

Nome completo *

Texto de resposta curta

Turma

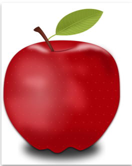
Caso você não seja dos 2º anos, clique em outros e DIGITE sua turma.

- 2º Ano F
- 2º Ano G

1-Quantas maçãs tem na caixa (bin)? Talvez essa pergunta seja sem sentido porém, quais os dados que você necessitaria para responder a essa enquete? *

- Dimensões da caixa (bin)

- Dimensões da maçã



- Dimensões da caixa e da maçã.

2-Agora pense em que você esta em um local onde é necessário saber quantas maçãs cabem em uma caixa e você não tem ao dispor nenhum instrumento de medida. Tem como calcular quantas maçãs cabem na caixa mesmo antes de encher a caixa? *

- Sim
- Não

desenho que represente somente o fundo da caixa forrado de maçãs.

Este desenho deverá ser entregue com o seguinte título: Maçãs forrando o fundo da caixa. Veja o modelo http://bit.ly/2HuTqyg

- [ ] Quer desenhar online? clique aqui: http://bit.ly/2FraMaca , porém não será salvo, então após o desenhar c...
- [ ] Se preferir pode usar lápis e papel

4-Qual figura você usou para representar o fundo da caixa? *

- Quadrado
- Retangulo
- triangulo
- Círculo

5-Qual figura você usou para representar cada maçã no fundo da *

Texto de resposta curta

6-Quantas maçãs couberam no fundo da caixa que você desenhou? *

Texto de resposta curta

7-Se você desenhou uma maçã do lado da outra, teremos então uma fileira. A quantidade de maçãs que você desenhou na primeira fileira é igual a todas as outras fileiras que você desenhou? *

- Sim
- Não

Texto de resposta curta

9-Quantas maçãs tem em cada fileira?

Texto de resposta curta

10-Olhando para seu desenho que representa o fundo da caixa responda: Quantas maçãs couberam no maior lado? *

Texto de resposta curta

11-Quantas maçãs couberam no menor lado?

Texto de resposta curta

12-Como você faria para calcular quantas maçãs cabem no fundo de uma outra caixa retangular , que pode ser muitas vezes maior do que a desenhada por você. (Tente representar por uma expressão *

Texto de resposta curta

Após a seção 1 **Continuar para a próxima seção**

Seção 2 de 2

Fileiras

Descrição (opcional)

tentando organizar as maçãs ok. Depois clique em voltar, logo abaixo

◯ Voltar

Apêndice B

Estudo Dirigido (ED2)

Figura B.1: **Estudo Dirigido 2 (ED2)**: bit.ly/2FragaMaca2

03/09/2019 Quantas maçãs cabem na caixa? Parte II

Quantas maçãs cabem na caixa? Parte II

*Obrigatório

Maçãs na bin

Colheita das maçãs-carregamento das bins.

Nome completo *

Sua resposta

Turma *

Caso você não seja dos 2º anos, clique em outros e DIGITE sua turma.

- 2º Ano F
- 2º Ano G
- Outro:

Sabendo que é possível saber quantas maçãs serão necessárias para encher a caixa até a borda, sem encher de maçã. Um aluno propôs fazer uma experiencia, utilizar uma caixa de sapato para representar a caixa da maçã. Dessa maneira, qual objeto ele poderia usar para representar cada maçã? (pense que ele quer representar uma caixa que cabem muitas maçãs) *

Sua resposta

É possível representar as maçãs dentro da caixa de sapatos com círculos ou circunferências, lembrando que se pretende encher a caixa? Porque? *

Pense que um aluno desenhou em uma folha varias circunferências e depois recortou-as, com intuito de representar as maçãs enchendo a caixa.

Sua resposta

Esse objeto que ele irá agora representar as maçãs além de largura e comprimento terá também: *

- ◯ Profundidade
- ◯ Altura
- ◯ Espessura
- ◯ Peso
- ◯ Área

Geometricamente falando, qual o nome que se daria para esse objeto que ele utilizaria para representar as maçãs? *

Sua resposta

Porque é necessário utilizar esse objeto geométrico? *
Responda a essa pergunta baseando-se na reposta anterior.

Sua resposta

Geometricamente falando, qual o nome que se daria para essa caixa de sapatos? *

Sua resposta

Qual seria o nome que se daria para as dimensões da caixa de sapato?

- ◯ Largura e comprimento
- ◯ Largura, comprimento e altura
- ◯ Largura, comprimento e peso
- ◯ Fundo, laterais e Tampa

Qual a medida de cada uma dessas dimensões da caixa, com a unidade de medida maçã?

Ou seja quantas maçãs cabem em cada dimensão?

Sua resposta

Como saber ou calcular quantas maçãs cabem em uma caixa sem encher essa caixa de maçã? *

Lembrando que não temos ao nosso dispor nenhum instrumento de medida.

Sua resposta

Existe uma expressão matemática que represente a quantidade de maçãs que cabem em uma caixa qualquer?

- Sim
- Não
- Outro:

Como seria esta expressão matemática?

Sua resposta

ENVIAR

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

Apêndice C

Estudo Dirigido (ED3)

Figura C.1: **Estudo Dirigido 3 (ED3)**: bit.ly/2FragaMaca3

03/09/2019 Quantas maçãs cabem na caixa? - Parte III

Quantas maçãs cabem na caixa? - Parte III

*Obrigatório

Macieira

Nome completo *

Sua resposta

Turma *

Caso você não seja dos 2º anos, clique em outros e DIGITE sua turma.

- 2º Ano F
- 2º Ano G

E quando a caixa estiver totalmente cheia até a borda, qual o máximo de maçãs que uma maçã pode encostar? *

Sua resposta

Exite alguma forma de organizar as maçãs(do mesmo tamanho) no fundo da caixa, de modo que o número máximo que cada maçã encoste na outra seja: (tente fazer um desenho para cada caso) *

Este desenho deverá ser entregue com o seguinte título: Organização das maçãs. Veja o modelo http://bit.ly/2HzyiGS

- [ ] Quer desenhar online? clique aqui: http://bit.ly/2FraMaca , porém não será salvo, então após o desenhar copie e cole em outro lugar e apague seu desenho. Esta versão é só para uma analise rápida.
- [ ] 2
- [ ] 3
- [ ] 4
- [ ] 5
- [ ] 6
- [ ] 7
- [ ] 8
- [ ] Outro:

Após analise do exercício anterior qual o número máximo de maçãs que cada maçã pode encostar estando no fundo da caixa? *

- 4
- 5
- 6
- 7
- Outro:

Tomando com parâmetro o número máximo de contato entre maçãs no fundo da caixa, determine quantas maçãs serão contaminadas diretamente pela primeira maçã. *

- 4
- 5
- 6
- 7
- Outro:

Considerando que esse processo de contaminação continue até que todas as maçãs estejam podres, quantas maçãs serão contaminadas a cada no contagio? *

Sua resposta

Represente por meio de desenho ou expressão como poderia ocorrer essa contaminação. *

Este desenho deverá ser entregue com o seguinte título: Modelo de Contaminação. Veja o modelo http://bit.ly/2L5xoE8

- ◯ Quer desenhar online? clique aqui: http://bit.ly/2FraMaca , porém não será salvo, então após o desenhar copie e cole em outro lugar e apague seu desenho. Esta versão é só para uma analise rápida.
- ◯ Outro:

Complete as lacunas: A 1ª maçã contaminará ____ novas maçãs. *

Digite sua resposta que completa a frase aqui em baixo.

Sua resposta

Essas novas maçãs, que foram contaminadas pela primeira maçã, por sua vez contaminarão _____ outras maçãs. *

Digite sua resposta que completa a frase aqui em baixo.

Sua resposta

Seguindo este processo, no próximo ciclo de contagio, teremos quantas novas maçãs contaminadas? *

Sua resposta

Imagine que você continuou esse processo por 6 estágios, ou seja além dos três anteriores você ainda fez mais três passos. Qual seria os 6 resultados obtidos? (digite cada resposta separada por vírgula (,). Exemplo: 2, 3, 4, 5, 6, ...) *

Sua resposta

Ao digitar a resposta do exercício anterior, o que você percebeu? É possível saber quantas maçãs estarão contaminadas no estágio 10? Quantas maçãs estarão contaminadas no estagio 12? *

Sua resposta

Segundo suas observações e baseando-se na resposta do exercício anterior escreva um expressão matemática (Modelo) para previsão de maçãs podres em um estágio qualquer da contaminação. *

Sua resposta

Qual a soma de maçãs podres no primeiro estágio? (Soma-se a 1ª maçã podre com as que ela contaminou diretamente) *

- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- Outro:

Qual a soma de maçãs podres no segundo estágio? (Soma-se as maçãs podres do 1º estágio com as novas maçãs contaminadas) *

Sua resposta

Qual a soma de maçãs podres no terceiro estágio? *

Sua resposta

Imagine novamente que você continuou esse processo, de somar todas as maçãs podres por 6 estágios, ou seja além dos três anteriores que você já respondeu você ainda fez mais três passos. Qual seria os 6 resultados obtidos? (digite cada resposta separada por vírgula (,). Exemplo: 2, 3, 4, 5, 6, ...) *

Sua resposta

Segundo suas observações e baseando-se na resposta do exercício anterior escreva um expressão matemática (Modelo) para previsão de "SOMA" de maçãs podres em um estágio qualquer da contaminação. *

Sua resposta

ENVIAR

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

Apêndice D

Estudo Dirigido (ED4

Figura D.1: **Estudo Dirigido 4 (ED4)**: bit.ly/2FragaMaca4

03/09/2019 Quantas maçãs cabem na caixa? Parte IV

Quantas maçãs cabem na caixa? Parte IV

DESAFIO - Você gosta de ser desafiado? Então está ai o grande desafio

*Obrigatório

Você sabe o que é um experimento? Aproveite e teste seu espanhol! https://youtu.be/GL_bBVgcvRs

DESAFIO 1- Você aceita o desafio? *

Individualmente ou em grupo, CONSTRUA algum experimento, uma maquete, animação de computador, vídeo, qualquer coisa que simule a propagação da podridão das maçãs no fundo da caixa. Este experimente terá como objetivo provar que nossas expectativas a cerca da propagação da podridão das maçãs estão corretas. Você terá apenas 3 dias para isso , corra!

- Sim
- Não

Quantas maçãs cabem na caixa? Parte IV

*Obrigatório

Dados do Desafiante ou do grupo

Nome completo de todos integrantes do grupo *

Na frente de cada nome, coloque a Turma referente.

Sua resposta

VOLTAR ENVIAR

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

Apêndice E

Estudo Dirigido (ED5)

Figura E.1: **Estudo Dirigido 5 (ED5)**: bit.ly/2FragaMaca5

03/09/2019 Quantas maçãs cabem na caixa? Parte V - Formulários Google

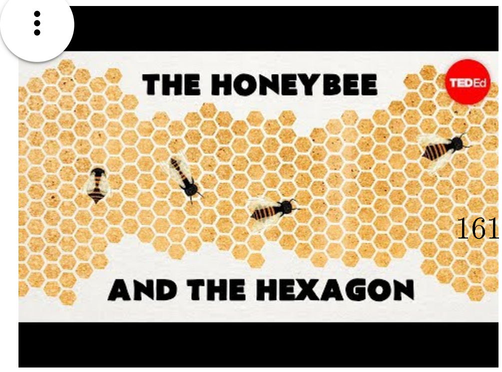
PERGUNTAS RESPOSTAS 3

Seção 1 de 3

Quantas maçãs cabem na caixa? Parte V

Assista este vídeo antes de começar a responder. ok!

Por que as abelhas adoram os hexágonos? - Zack Patterson e Andy Peterson



fruta para fruta, e que a maçã infectada(podre) está posicionada no

Descrição (opcional)

a) Se uma maçã contaminada demora 1 hora para contaminar todas as maçãs sadias que estão em contato com ela, ou seja, como a maçã podre está no centro e encosta em 6 maçãs, esse primeiro contagio demora 1 hora, e assim por diante. Desta maneira podemos afirmar que o número de maçãs contaminadas por hora é sempre a mesma? *

- Sim
- Não
- Outros...

b) Na 2ª horas quantas maçãs foram contaminadas? *

Texto de resposta curta

c) Após 2 horas quantas maçãs foram contaminadas? (Soma de todas maçãs podres) *

Texto de resposta curta

d) Na 6ª hora quantas maçãs serão contaminadas? *

Texto de resposta curta

e) Após 6 horas quantas maçãs serão contaminadas? *

Texto de resposta curta

f) Construa um modelo matemático que expresse a quantidade de maçãs contaminas em função do tempo. *

Texto de resposta longa

Após a seção 2 **Continuar para a próxima seção**

Seção 3 de 3

DESAFIO 2 - Se a única informação que você soubesse sobre o tempo de contaminação das maçãs é que em 12 dia 80% das maçãs estão podres.

Descrição (opcional)

2) Determinar o tempo em horas para contaminar 50% das frutas *

Texto de resposta curta

3) Determinar o tempo em horas para contaminar 30% das frutas *

Texto de resposta curta

4) Escreva uma expressão matemática que represente essa situação *

Texto de resposta longa

Apêndice F

Desafio

Figura F.1: Desafio do dia!

03/09/2019 Desafio do Dia -I

Desafio do Dia -I

*Obrigatório

1. **Quais as dimensões de uma caixa cúbica, que tem 3000 maçãs? Dê as medidas da caixa em maçãs. Justifique sua resposta.** *
   Responda somente com números. Não escreva termos como mais ou menos, aproximadamente ou cerca de....

2. **Dica: Se na caixa tivesse 27 maçãs, cada dimensão seria 3 maçã, pois 3x3x3=27. Se na caixa tivesse 64 maçãs, cada dimensão seria 4 maçã, pois 4x4x4=64. Se na caixa tivesse 343 maçãs cada dimensão seria:** *
   Marcar apenas uma oval.
   - 5 maçãs
   - 6 maçãs
   - 7 maçãs
   - 8 maçãs
   - 9 maçãs

Powered by Google Forms

Apêndice G

O experimento: Da Construção a experimentação

O intuito da construção deste experimento, foi mostrar de forma significativa como a propagação da podridão em maçãs pode ocorrer, ou seja, se uma maçã estiver podre e estiver com o número máximo de tangências em uma camada (no plano), quantas serão contaminadas e como se dará essa contaminação. Com este experimento, queremos que os educandos comprovem suas expectativas de contagem de como se dará a propagação de forma empírica, pois, foi proposto anteriormente que os educandos pensassem e até criassem um modelo de propagação no plano, e desta maneira é possível comprovar se o modelo está coerente ou não.

Sabemos que o experimento é apenas um simulador, e não retrata fidedignamente o problema da propagação da podridão em maçãs, mas este simula como se dá a propagação de um agente contaminante, por contato direto. Este experimento foi pensado inicialmente para mostrar para os educandos como se dá a propagação da podridão, uma vez que é difícil pensar como se dá a contaminação e nem teríamos como demonstrar a propagação com os elementos reais do problema, no caso maçãs, pois, precisaríamos ter certeza que uma maçã estaria contaminada com um dos fungos que causa a podridão contagiosa, além de controlar temperatura. E mesmo se tivéssemos como controlar essa temperatura, seria difícil para a turma toda observar o contágio, e identificar quais maçãs já estariam contaminadas. Com a aplicação dos questionários dirigidos, percebemos que o experimento poderia ser usado de outra forma, já não para ajudar a formular um modelo, mas como uma forma de validar o modelo.

A ideia para a construção do experimento foi interligar recipientes conforme o número máximo de tangências que um corpo redondo no plano pode ter, de modo a simular a organização das maçãs no fundo da bin. Foi pensado em encher um recipiente (em forma de cilindro ou tronco de cone)com um líquido (inicialmente água), depois através de uma mangueira interligar este recipiente central com 6 outros recipientes iguais, e cada um destes 6 recipientes interligar com outros 2 recipientes cada, de modo que teríamos , 1 recipiente central ligado a 6, e estes 6 ligados em 12 e posteriormente ligados com 18, e assim por diante, conforme foi visto no capítulo 2 na Figura 2.10 e 2.12.

Depois de interligados, encher eles com água e aplicar um agente colorante no recipiente central de modo que fosse colorindo os outros, ou seja, fosse possível ver a mudança da cor da água, recipiente a recipiente e como essa reação se daria, como esse corante iria se propagar. Depois de pronta, foram feitas experimentações.

Experimentação 1

Na tentativa de encher todos os recipientes, colocando água no recipiente central, onde foi observado que realmente a água ia sendo distribuída conforme a propagação, porém, em alguns instantes era falho, pois, dependia do nível (altura) que cada mangueira foi colocada para interligar os copos, ou seja, fatores não esperados comprometeram a comprovação. No caso da propagação da podridão em maçãs o nível de cada fruta não é fator importante. Porém, a intenção não era mostrar a propagação por meio da distribuição da água e sim de um colorante. Ainda nesta fase, depois de encher todos os recipientes interligados, foi colocado um colorante (suco de uva em pó, diluído de forma que ficasse concentrado), porém, como os recipientes já estavam cheios não havia movimentação da água, parecia que o sistema entrava em equilíbrio em relação ao nível antes que o corante atingisse todos os recipientes. Foi possível ver a reação nos 6 primeiros recipientes ligados ao recipiente central.

Experimentação 2

Para que houvesse movimentação da água no sistema, foram feitos pequenos orifícios nos recipientes das bordas, de modo que ao encher o recipiente central o sistema, movimentasse a água e o corante pudesse atingir todos os recipientes. Desta maneira depois que todos os recipientes estivessem cheios até o nível de vasão dos recipientes das bordas, foi adicionado o corante (cerca de 500 ml de suco de uva em pó concentrado) de maneira contínua no recipiente central até que o corante alcançasse todos os recipientes. Nesta experimentação, dois problemas foram percebidos:

1. O corante não foi suficiente para mudar a cor da água em todos os recipientes como desejado, pois, nos últimos recipientes praticamente não se via a ação do corante.

2. Dependendo da vasão do corante e a posição que este ia sendo despejado influenciava na velocidade da contaminação, ou seja, precisava controlar a vazão de corante de modo que este ficasse contínuo e em uma mesma direção neutra o tempo todo.

Experimentação 3

Foi preparado um recipiente (Balde) maior de 5 litros, com aproximadamente 2 litros de corante. Com o auxílio de uma mangueira (5/16 x 1,5mm) foi possível controlar a vazão e a direção do corante, pois, ao utilizar a mangueira pelo sistema de sifão e colocado a uma altura fixa do experimento, foi possível manter o controle de vazão e direção, de modo que os únicos fatores que influenciavam na vazão da água era a pressão do líquido e a gravidade (não sofrendo ação humana, que foi verificado como fator que alterava significativamente os resultados do experimento. Onde a cada nova experimentação poderia sofrer alterações impossíveis de controlar).

Desta vez foi possível verificar melhor a propagação do corante de forma mais aceitável, porém, o corante ainda se diluía muito rápido não colorindo todos os recipientes a contento do autor. Foi pensado em usar um corante mais concentrado, porém, todos que foram testados mudavam a cor dos copos também, não permitindo repetir o experimento. (O teste foi feito em um copo que não fazia parte do sistema).

Experimentação 4

Desta vez foi mudada as substâncias envolvidas na experimentação, ao invés de água e corante (suco de uva), foi colocado nos recipientes uma mistura concentrada de Povidine[1] e água em todos os recipientes e como reagente que simulava o contaminante, água sanitária. Essa ideia surgiu após ver uma exposição de feira de ciências de uma escola da região leste de Goiânia, cujo título era "O sangue de mentira". Com a mudança de substâncias percebemos que a reação aconteceu de forma mais uniforme e foi perceptível a mudança de cor em todos os recipientes do sistema.

G.1 Materiais

Os materiais utilizados para a construção do experimento foram encontrados no comércio local e com investimento baixo cerca R$50,00. Segue a lista dos itens.

Materiais para a construção do experimento. Veja as fotos na Figura G.1

- Um pacote de copos descartáveis, 100 unidades: tulipas de 250 ml;
- Uma mangueira de borracha transparente: Mg-cristal 5/16 x 1,5mm; 2 metros;
- Um pacote de canudos Shake: 100 unidades 5/16 x 1,5mm;
- Um pincel de tinta permanente vermelho;
- Uma bandeja de 4,5 LITROS: 1 unidade;
- Duas colas Tek Bond: Artesanato, Silicone de 100ml;
- Duas colas Tek Bond: Abrasiva de 50 ml.

[1]Povidine é um antisséptico em que a Iodopolividona (substância ativa) é um iodóforo resultante da complexação do iodo com o polímero polivinil pirrolidona

Ferramentas para construção do experimento, (ver fotos na Figura G.2

- Tesoura grande;
- Régua de 30 cm;
- Transferidor de meia volta;
- Ferro de solda eletrônica;
- Estilete grande.

G.2 Construção ou Montagem

Passo a passo da construção. Veja as fotos a partir da Figura G.3

i Primeiramente foi cortada a mangueira em pedaços de 2,2cm cada com o auxílio do estilete;

ii logo após foram perfurados 33 copos, com o auxílio do ferro de solda que tinha as dimensões coerentes com a mangueira. Cada copo ou recipientes foi perfurado seis vezes, cujo ângulo entre eles era de 60° (medidos com o auxílio do transferidor);

iii Foi colocada os pedaços de mangueira nos furos e encaixando cada copo ao outro, para isso foi utilizado as duas colas, primeiramente a cola abrasiva para fixar o sistema e a de silicone para vedação deles.

iv Depois de encaixados todos os copos foi verificado se havia vazamentos, e começou as experimentações.

Todo esse trabalho de montagem foi realizado com muito cuidado, para a montagem do experimento foram gastos cerca de 8 horas, pois não tínhamos certeza do sucesso, então a rigorosidade nas medidas, tanto dos pedaços de mangueira, quanto no local que se perfurava os copos, na espessura de cada furo e a paciência foram elementos essências para o sucesso da construção.

Parte fácil da construção

1. Cortar os pedaços de mangueira. Veja Figura G.3;

2. Perfurar os copos com ferro de solda eletrônica.

Parte Complicada

1. Encaixar os copos nas mangueiras dos outros copos (ver Figura G.7), pois não dava para encaixar tudo para depois colar, pois eles começam a se soltar uns dos outros, por outro lado se colássemos cada encaixe ficava extremamente complicado colar os outros copos, pois não dava encaixe e se pressionasse muito o copo quebrava, muito trabalho e suor nessa tarefa.

2. Colar os copos e principalmente cuidar para vedar cada encaixe, pois os recipientes são pequenos não permitindo um espaço de trabalho confortável, e na tentativa de encaixar os copos muitas vezes os orifícios aumentavam de tamanho, dificultando a vedação. Veja a foto na Figura G.8, que mostra essa vedação.

Foram feitas gravações de cada experimentação, porém, essas gravações foram perdidas quando o celular que as continham se quebrou em uma queda de motocicleta enquanto eu ia trabalhar, já as fotos foram possíveis de recuperar pois estas eram feitas o Backup automático.

A seguir uma coletânea de fotos que mostram desde os materiais até o experimento pronto para testes.

G.3 Registros da Construção

Figura G.1: Materiais para Construção

Figura G.2: Ferramentas para Construção

Figura G.3: Repetido

Figura G.4: Construção: Cortes e Furos

Figura G.5: Construção: Montagem

Figura G.6: Estágio 1

Figura G.7: Construção: Continuação da Montagem

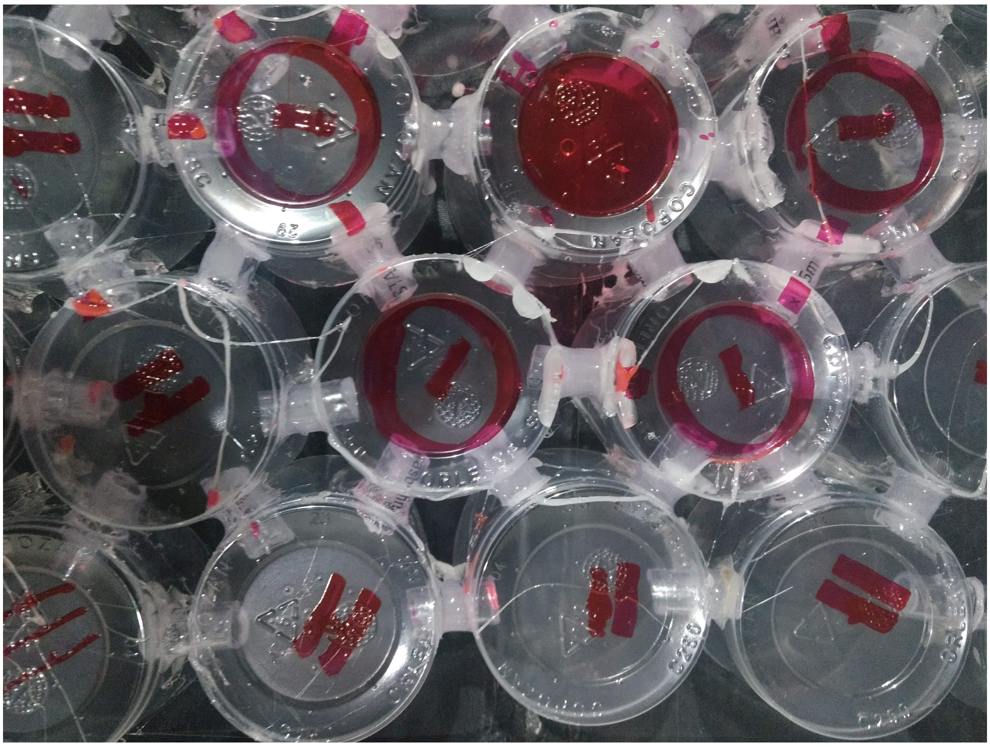


Figura G.8: Vedação

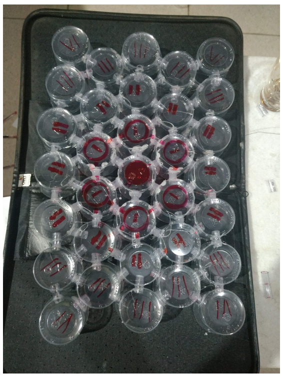


Figura G.9: Como se dá a propagação

Anexos

Empilhamento das balas de canhão

Recortes do trabalho de Simone Tomiko Mata. Todo o conteúdo aqui foi retirado da forma como apresentado em [31]

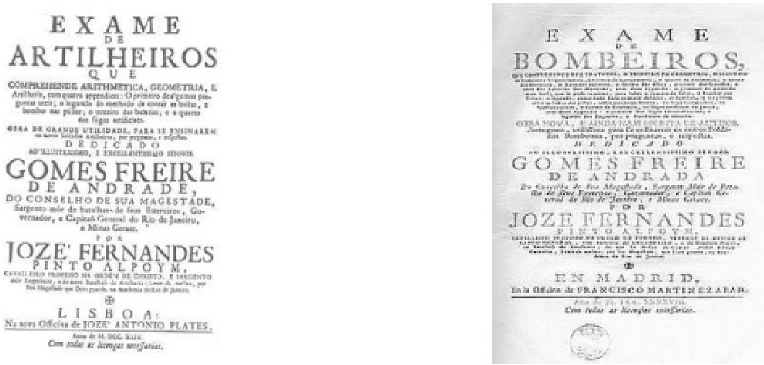
Mata possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho(2007) e mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do ABC(2010), seu orientador da dissertação de mestrado foi Bassanezi 1.4.

Qual a forma mais compacta de empacotar esferas de mesmo raio? O problema de empilhamento de bolas é uma questão antiga que despertou interesse em muitos estudiosos, começando em 1611, com a Conjectura de Kepler, que tratava da melhor maneira de empacotar esferas em uma organização conhecida como arranjo de modelo tridimensional cúbico de face centrada. Muitos matemáticos se interessaram por essa conjectura: como Harriot, Thue, Hales, entre outros. Tal problema é algo que também sempre interessou os produtores de laranja ou maçãs, que querem com razão, economizar engradados no armazenamento das frutas. Originou também a investigação de propagação de doenças de frutas, quando estas estão embaladas em caixas quadradas.

"Como contar as bolas de canhão empilhadas" é um problema também bastante interessante e que aparece num dos primeiros textos de matemática no Brasil, escrito por José Fernandes Pinto Alpoin.

Em meados de 1699, preocupada com a defesa da Colônia a Coroa Portuguesa decide impulsionar a formação de militares bem treinados no manuseio de peças de artilharia e com competência na construção de fortes para preservar a terra e as riquezas conquistadas. Foi então decidido que seria criada a Aula de Artilharia e Fortificações.

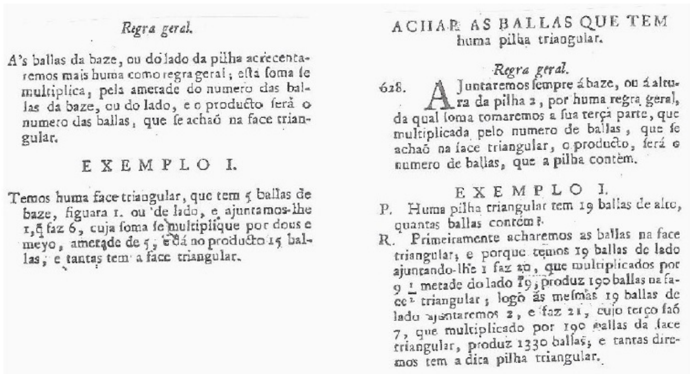
O trabalho de Alpoim no Brasil pode ser analisado observando três aspectos: como engenheiro e arquiteto, como militar e, finalmente como professor e autor de obras didáticas de engenharia e matemática aplicada à engenharia. Ele escreveu duas obras que se tornaram os primeiros livros didáticos de matemática escritos no Brasil: Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros, respectivamente em 1744 e 1748. Vija a Figura 4.10.



EXAME
DE
ARTILHEIROS
QUE
COMPREHENDE ARITHMETICA, GEOMETRIA, E
DEDICADO
GOMES FREIRE
DE ANDRADE,
DO CONSELHO DE SUA MAGESTADE,
e Minas Geraes.
POR
JOZE' FERNANDES
PINTO ALPOYM,
LISBOA:
Na nova Officina de JOZE' ANTONIO PLATES,
Com todas as licenças necessarias.

EXAME
DE
BOMBEIROS,
DEDICADO
GOMES FREIRE
DE ANDRADA
POR
JOZE FERNANDES
EN MADRID,
En la Oficina de FRANCISCO MARTINEZ ABAD.

Figura 4.10: a)Exame de Artilheiros (1744) b)Exame de Bombeiros (1748). Fonte: Mata [31]



Regra geral.

A's ballas da baze, ou do lado da pilha acrecentaremos mais huma como regra geral; esta soma se multiplica, pela ametade do numero das ballas da baze, ou do lado, e o producto será o numero das ballas, que se achaõ na face triangular.

EXEMPLO I.

Temos huma face triangular, que tem 5 ballas de baze, figuara 1. ou de lado, e ajuntamos-lhe 1, q̃ faz 6, cuja soma se multiplique por dous e meyo, ametade de 5, e dá no producto 15 ballas; e tantas tem a face triangular.

ACHAR AS BALLAS QUE TEM huma pilha triangular.

Regra geral.

628. A Juntaremos sempre á baze, ou á altura da pilha 2, por huma regra geral, da qual soma tomaremos a sua terça parte, que multiplicada pelo numero de ballas, que se achaõ na face triangular, o producto, será o numero de ballas, que a pilha contèm.

EXEMPLO I.

P. Huma pilha triangular tem 19 ballas de alto, quantas ballas contém?

R. Primeiramente acharemos as ballas na face triangular, e porque temos 19 ballas de lado ajuntando-lhe 1 faz 20, que multiplicados por $9\frac{1}{2}$ metade do lado 19, produz 190 ballas na face triangular; logo ás mesmas 19 ballas de lado ajuntaremos 2, e faz 21, cujo terço saõ 7, que multiplicado por 190 ballas da face triangular, produz 1330 ballas; e tantas diremos tem a dita pilha triangular.

Figura 4.11: Página do livro: Exame de Artilheiros. Fonte: Mata [31]

O livro Exame de Artilheiros consta de 236 páginas e está dividido em 3 Tratados, dos quais o último possui 4 Apêndices. Os Tratados versam respectivamente sobre Aritmética, Geometria (abordando conceitos ligados a ponto, linha e reta) e Artilharia.

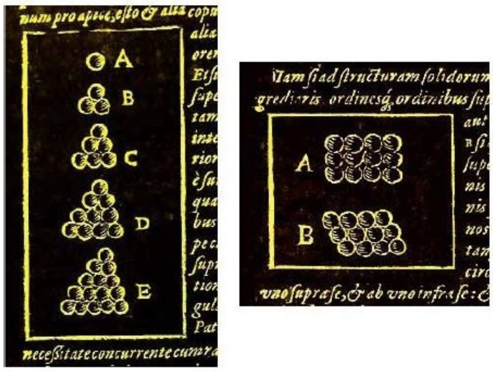


Figura 4.12: Empilhamento de bolas. Fonte: Mata [31]

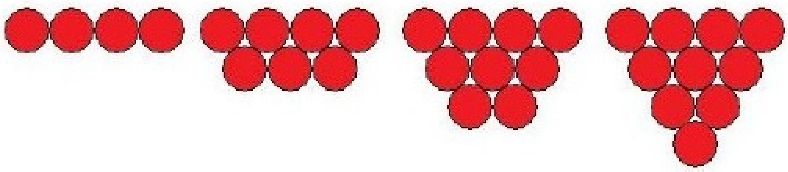


Figura 4.13: Pirâmide em formação. Fonte: Mata [31]

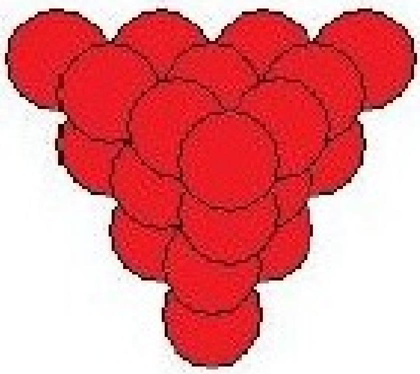


Figura 4.14: Pirâmide pronta. Fonte: Mata [31]

Os quatro Apêndices dizem respeito a assuntos específicos de Artilharia. Um deles em especial, o Apêndice II, aborda cálculos interessantes como a determinação do número de balas de canhão que se podem empilhar em pirâmides de base triangular vede Figura 4.13 e 4.14, quadrada ou retangular, em que ele lança mão de conceitos de análise combinatória explicados por meio de cálculos de frações, de forma a serem mais facilmente compreendidos por seus alunos.

Uma de suas maiores tarefas era, a partir da geometria, ensinar como era possível calcular o número de balas de canhão que uma pilha poderia conter. Veja a Figura 4.11