

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

GISELE BONFIM LIMA

UM ESTUDO SOBRE PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES

VITÓRIA DA CONQUISTA

2013

GISELE BONFIM LIMA

UM ESTUDO SOBRE PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB.

Orientador: Prof. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti, DSc.

Co-orientador: Prof. Teles Fernandes, MSc.

VITÓRIA DA CONQUISTA

2013

L698e

Lima, Gisele Bonfim.

Um estudo sobre planificação de superfícies / Gisele Bonfim Lima, 2013.

65f.: il.: algumas color.

Orientador (a): Márcio Antonio de Andrade Bortoloti.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado em Matemática Em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, BA, 2013.

Referências: f. 62-63.

Elinei Carvalho Santana – CRB-5/1026

Bibliotecária - UESB – Campus de Vitória da Conquista-BA

GISELE BONFIM LIMA

UM ESTUDO SOBRE PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES

Aprovada por:

Prof. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti, DSc.

Orientador

Prof. Teles Araújo, MSc.

Co-orientador

Prof. Claudinei de Camargo Sant'Ana, DSc.

Examinador

Prof. Ademakson Souza Araujo , DSc.

Examinador

Vitória da Conquista, 19 de julho de 2013.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os professores, num gesto de agradecimento e reconhecimento à importância de seu labor.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela força para a confecção deste trabalho.

Aos meus pais pela sabedoria ao reconhecer na educação o melhor caminho para nos aprimorarmos, viabilizando o início de tudo.

Ao Professor Doutor Márcio Antônio de Andrade Bortoloti, pelo rigor e exigência ao me orientar, mostrando-me o caminho certo e desviando-me dos possíveis erros.

Ao Professor Mestre Teles Araújo, pelo apoio e colaboração que se revelaram fundamentais para a conclusão do trabalho.

Ao colega Kleber Silva, por todas as sugestões e comentários que tanto me ajudaram.

Aos meus colegas de mestrado, pela amizade e companheirismo.

Aos meus demais familiares pela força e apoio.

Aos meus amigos que tornaram mais leve toda a caminhada até meu objetivo final.

*“A vida é obra de todo dia que se constrói com a força e a
determinação de levar adiante aquilo em que se crê.”*

Maria Lizete Vaz

RESUMO

Este trabalho propõe um método algébrico de verificação da possibilidade de planificação de uma superfície. Para tal tarefa, foram necessárias algumas ferramentas da Geometria Diferencial. Um dos principais conceitos utilizados nessa verificação foi a Primeira Forma Quadrática. Foi mostrado que, além de servir como representação de uma superfície para verificação da planificação, através dela também é possível calcular características intrínsecas das superfícies, tais como comprimentos, ângulos e áreas. O método de verificação foi aplicado em figuras comumente estudadas na Educação Básica, tais como: cone, cilindro, cubo, tetraedro e esfera. Acredita-se que esse trabalho poderá ajudar o professor do Ensino Médio a entender melhor um recurso utilizado por ele mesmo cotidianamente e, além disso, uma abordagem mais formal e científica será dada ao tema. Com o objetivo de explorar características das superfícies não planificáveis, pois será mostrado que nem todas elas o são, foi apresentado um capítulo sobre o uso da planificação aproximada da esfera para fins ligados a cartografia.

Palavras-chave: superfície, planificação, primeira forma quadrática, geometria diferencial.

ABSTRACT

This dissertation presents an algebraic method to verify the possibility of planning out a surface. For this task, we need some tools of differential geometry. One of the main concepts used in this verification was the First Form Quadratic that, in addition to serving as a representation of a surface for verification planning, through it is also possible to calculate the intrinsic properties of surfaces, such as lengths, angles and areas. The verification method was applied in figures commonly studied in basic education, such as cone, cylinder, cube, tetrahedron and, sphere. This work will help teachers of the high school understand a resource used by themselves daily, and will be presented a formal and scientific approach about the theme. In order to explore the characteristics of surfaces that are not planned out, was presented a chapter about the use of planning approximated sphere connected the Cartography.

Key-words: surface, planning, First Form Quadratic, differential geometry

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
CAPÍTULO 1	17
CONCEITOS PRELIMINARES	17
1.1. Curvas	17
1.2. Superfícies	18
1.3. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies	19
1.3.1. Produto Interno no \mathbb{R}^3 ; Norma ou Comprimento de um Vetor	20
1.3.2. Dependência Linear	21
1.3.3. Curva Diferenciável Parametrizada	21
1.3.4. Vetor Tangente; Curva Regular	22
1.3.5. Comprimento de Arco	23
1.3.6. Superfície Regular	24
1.3.7. Plano Tangente	26
1.3.8. Primeira Forma Quadrática	27
CAPÍTULO 2	31
ISOMETRIA E PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES	31
2.1 Superfícies Isométricas	31
2.2 Superfícies Planificáveis	33
CAPÍTULO 3	35
APLICAÇÕES	35
3.1 Planificação de Superfícies Estudadas no Ensino	35
3.1.1 Planificação do Cilindro	36
3.1.2 Planificação do Cone	38
3.1.3 Planificação do Cubo	40
3.1.4 Planificação do Tetraedro	43
3.2 A Esfera	43
3.3 Características Métricas de uma Superfície Tratadas no Plano	48

CAPÍTULO 4	51
PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS	51
4.1 Forma da Terra	51
4.2 Tipos de Representação Cartográfica	53
4.3 O Problema da Não Planificação da Esfera e da Elipse	55
4.4 Projeções Mais Usuais e Suas Características	56
4.4.1 Projeção Cilíndrica	56
4.4.2 Projeção Cônica	57
4.4.3 Projeção Planar	58
CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
REFERÊNCIAS	62

INTRODUÇÃO

Para Lorenzato (1995), a Geometria é essencial na formação dos indivíduos, pois leva a uma interpretação mais fiel do mundo e permite uma visão mais equilibrada da Matemática, bem como uma comunicação mais completa de ideias.

Também sobre a geometria, Mocrosky (2012, p.1) afirma que

(...)De um modo geral ela é formativa, pois capacita o ser humano para a tarefa de interpretar e compreender o mundo. Além disso, favorece o processo de abstração e generalização das relações percebidas ao estarmos no mundo, contribuindo para a articulação entre o intuitivo e o formal, abrangendo os aspectos históricos trazidos pela atividade exclusivamente geométrica à abertura aos meios algébricos(...). (MOCROSKY, 2012, p.1)

É inegável a importância do estudo da geometria na Educação Básica e sua continuidade nos demais níveis de formação. Ela é constituída de um conjunto de conhecimentos fundamentais para compreensão do mundo e participação ativa do homem na sociedade, visto que viabiliza a resolução de problemas nas mais diversas áreas do conhecimento.

Concordando com os autores citados acima, buscamos fazer uma breve investigação sobre o panorama atual do ensino de Geometria na Educação Básica. Mocrosky (2012) ao dedicar seus esforços sobre a mesma questão afirma que muitos estudiosos, durante a formação de um panorama sobre o ensino da geometria na educação básica brasileira, constataram um certo abandono das escolas pelo ensino da mesma. Segundo a pesquisadora, esse fato é confirmado por ela em suas experiências enquanto professora do Ensino Básico.

Lorenzato (1995) também chegou a uma conclusão similar. Segundo ele a Geometria vem sendo tratada nas últimas décadas, sem o reconhecimento de suas potencialidades, em todos os níveis de ensino e aplicações.

A partir daí começamos a nos questionar sobre a necessidade de se desenvolver trabalhos que pudessem contribuir para o ensino de Geometria. Decidimos então, pesquisar melhor esse quadro, bem como suas causas.

Pavanello (1989), realizou um estudo histórico sobre o ensino de geometria nas escolas do Brasil e do mundo. Segundo a autora, o abandono realmente existe e dentre as prováveis causas deste problema estão: o despreparo do professor, a organização dos livros didáticos e a falta de tempo para trabalhar todo o conteúdo programado.

Segundo Becker (2009), em uma de suas experiências com professores da educação básica, em sua maioria licenciados em Matemática, durante um curso de especialização em Geometria, muitos deles relataram sentir dificuldades em trabalhar com esses conteúdos por se sentirem despreparados para tal tarefa. Becker, durante o desenvolvimento de seus estudos, propôs algumas atividades através das quais ele afirma ter detectado dificuldades por parte dos alunos da turma de especialização citada acima, com relação à visualização geométrica. A experiência também foi realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio, nos quais Becker detectou as mesmas dificuldades, dentre outras como a de associar áreas de superfícies quando se trata de sólidos e dificuldade em representar sólidos.

Continuando nossas leituras, vimos que Pereira (2011) realizou um levantamento de várias pesquisas que procuravam as causas do panorama negativo do ensino de Geometria na Educação Básica das escolas brasileiras e, observou que, das sete pesquisas analisadas, apenas um autor não diagnosticou despreparo por parte do professor com relação ao quesito estudado. Pereira afirma ainda que, os professores admitem o despreparo com relação ao ensino da ciência em questão e reconhecem a importância de buscas para melhoria deste quadro.

Convencidos de que o ensino de Geometria merece uma atenção especial e buscando oferecer um trabalho que auxiliasse o professor no desenvolvimento de competências e habilidades associadas à Geometria, fomos em busca de trabalhos que nos elucidassem sobre quais eram as necessidades mais específicas do nosso público alvo, os professores do Ensino Médio, e suas principais causas.

Para Costa (2009), dentre os principais fatores que levam às deficiências relacionadas à Geometria Espacial, podemos destacar:

- A desvalorização, por parte de muitos professores, das representações bidimensionais e tridimensionais de figuras geométricas, com a valorização da aprendizagem mecânica de conceitos e princípios geométricos, e

- A ausência de trabalhos com a Geometria Espacial Métrica, em que os alunos são levados ao estudo dos poliedros e corpos redondos ¹e têm a possibilidade de fazer suas representações planas.

Considerando os fatores que interferem no processo do ensino de Geometria, agora observando os que estão ligados diretamente ao aluno, existe um aspecto natural a se considerar, que é a transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial, na maioria das vezes efetuada no final do Ensino Médio e que nem sempre é fácil para o aluno. Para Carvalho (1993, p. 1),

“...é fácil entender porque isso ocorre. Como habitantes de um mundo tridimensional, temos grande facilidade para lidar com o mundo bidimensional da Geometria Plana. Modelos concretos para os objetos com que lidamos na Geometria Plana são fáceis de construir e manipular(...)

Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversas ordens. Em primeiro lugar, não dispomos de uma forma prática para representar com fidelidade objetos tridimensionais. Em geral, recorremos a projeções bidimensionais desses objetos. Mas essas projeções distorcem ângulos, modificam comprimentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção”.

Dessa forma, desenvolvemos um estudo focado, especialmente, em Geometria Espacial, onde exploramos a questão da planificação de superfícies, trabalhando vários conceitos algébricos e geométricos, trazendo também uma abordagem diferenciada sobre o assunto.

A planificação de figuras tridimensionais, bem como a habilidade de se associar uma figura tridimensional a sua forma planificada, é tratada em sala de aula desde as séries iniciais.

Durante a busca por trabalhos que tratassem do uso da planificação de figuras geométricas como estratégia de ensino da Geometria Espacial, observamos que o professor faz uso recorrente desse processo. Essa escolha é quase sempre justificada devido à

¹ Corpos Redondos são sólidos geométricos que tem superfícies curvas, tais como: o cilindro, o cone e a esfera.

dificuldade existente por parte do aluno em trabalhar com as figuras no espaço tridimensional, portanto, representá-las no plano seria uma saída.

Bulla (2007), em seu artigo sobre poliedros, por exemplo, propõe que os conceitos dos vários elementos que compõe um poliedro sejam estudados durante a construção do mesmo a partir dos polígonos que o formam. Características outras, como área da superfície e volume do sólido desses poliedros também são calculados levando-se em consideração porções planas dessas figuras. Segundo Bulla (2007), “nas construções dos poliedros através das planificações, o conceito da aprendizagem dos conteúdos de matemática sofrerá alterações significativas a partir da aplicação do processo”.

Becker (2009) desenvolveu uma sequência didática, fazendo uso de uma ferramenta desenvolvida por ele mesmo, denominada “Caixa de Becker”, com o objetivo de auxiliar o desenvolvimento da visualização geométrica e da capacidade do indivíduo representar formas geométricas espaciais em diagramas bidimensionais. Nessa atividade, foi oportunizado ao sujeito tatear o objeto, sem poder vê-lo, de forma que ele reconheça cada uma das partes, decompondo e recompondo-as no objeto completo. Segundo Becker, essa atividade auxiliou o aluno, dentre outras coisas, a representar figuras tridimensionais no plano. Como consequência, os alunos tiveram maior facilidade em aprender a calcular área e volume de figuras tridimensionais elementares, a partir de sua decomposição. Essa mesma estratégia foi utilizada por Carvalho num trabalho sobre leitura e interpretação de corpos geométricos, desenvolvido com alunos do Ensino Médio.

Carvalho também propôs outras atividades relacionadas com figuras geométricas. Dentre elas nos chamou a atenção “Construção de modelos tridimensionais de papel e formalização de conceitos”. Nessa atividade, Carvalho tinha como objetivos: compreender a constituição dos objetos geométricos a partir de suas planificações para a representação tridimensional; e relacionar os atributos, como natureza geométrica das faces, número de vértices, arestas e faces, de um objeto tridimensional representado no plano e o próprio objeto, em estado concreto e manuseável.

Constatando que o processo da planificação de superfície é comumente abordado e, além disso, é bastante positivo no desenvolvimento de conceitos relacionados à Geometria, propomos os seguintes questionamentos: Toda superfície pode ser planificada? Quais

características uma superfície precisa ter para que seja considerada planificável? No desenvolvimento deste trabalho respondemos essas perguntas, colocando em evidência, de forma matemática, as características de uma superfície que a inserem no grupo das figuras geométricas que podem ter sua superfície planificada.

Podemos entender, inicialmente, uma superfície planificável como uma superfície que pode ser desenrolada sobre o plano, sem sofrer rupturas, rasgos, furos ou deformações. É muito fácil pensar nesse processo de forma bastante intuitiva, e isso é feito em vários momentos da vida cotidiana como também em práticas na sala de aula. Neste trabalho, trataremos uma abordagem formal desse processo, representando a superfície de maneira algébrica e geométrica, também fazendo analogias com as representações mentais que são feitas de tais figuras. Dessa forma, pretendemos auxiliar o professor no desenvolvimento de sua maturidade matemática com relação à questão das representações das figuras em dimensões diferentes, bem como com relação ao processo de planificação.

Será explorada a questão da isometria existente entre a superfície de alguns sólidos tridimensionais e o plano. Mostraremos que, as superfícies isométricas ao plano podem ter várias de suas características calculadas e estudadas através das suas representações planas. Dentre essas características estão: ângulos, comprimento de curvas e áreas. Como consequência dessa atividade, pretendemos estabelecer vínculos entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial, enfraquecendo assim a ideia de transição e fortalecendo a noção de continuidade ao se começar a estudar Geometria Espacial.

Acreditamos que o processo de verificação da possibilidade da planificação de uma superfície e o estudo de características de um sólido em sua representação plana, da forma como abordaremos neste trabalho, formam um conjunto de atividades compatíveis com a crença de que

“a visualização como observação das formas geométricas constitui-se em um espaço que exige a descrição e a comparação das formas geométricas, resgatando as suas semelhanças e diferenças, possibilitando, dessa forma, a construção da imagem mental, o que possibilitará ao aluno pensar no objeto geométrico, na sua ausência, distinguindo as suas características conceituais e figurais”. (GARCIA, 1993, p. 2).

É importante ressaltar que, a questão da planificação de superfícies, geralmente, não é abordada no Ensino Médio da mesma forma que neste trabalho, pois utilizaremos

ferramentas que não estão ao alcance dos alunos desse nível de formação. No entanto, ela está ao alcance do entendimento do professor, que ao utilizá-la estará em contato com uma abordagem diferenciada de um processo que é comumente abordado na sala de aula. Dessa forma, acreditamos estar contribuindo para a formação ou aperfeiçoamento do professor em relação ao domínio de alguns conceitos e habilidades ligados ao ensino da Geometria.

O ato de ensinar exige, por parte do professor, a presença de dois requisitos principais: a posse de meios didáticos que serão utilizados para o alcance de seus objetivos em sala de aula e o domínio do conhecimento sobre o que se pretende transmitir ao aluno. O despreparo do professor com relação ao ensino da Geometria, apontado em algumas pesquisas citadas aqui, pode estar ligado à ausência de um ou outro, ou até mesmo dois, desses requisitos. Neste trabalho não trataremos das didáticas ou metodologias necessárias ao ensino da Geometria, mas direcionaremos para o professor do Ensino Médio um estudo sobre a planificação de superfícies, com uma abordagem que pode contribuir para o seu amadurecimento com relação a alguns aspectos da Geometria, visto que, em resumo, temos como objetivos principais:

- 1) Fornecer uma abordagem mais formal e científica à questão da planificação de superfícies;
- 2) Mostrar que o mesmo objeto pode assumir formas diferentes em ambientes diferentes, preservando algumas características métricas;
- 3) Mostrar a possibilidade de se calcular algumas características intrínsecas (área, ângulo e comprimento de curva) de uma superfície, inicialmente representada no espaço tridimensional, através de sua representação no plano.

Além disso, mostraremos também que a Geografia, mais precisamente a Cartografia, faz uso dos conceitos relacionados à planificação de superfícies. Com isso, será possível abordar de forma mais detalhada características de uma superfície não planificável, neste caso estudamos a esfera e a elipsoide.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 enumeramos os conceitos e ferramentas da Geometria Diferencial que serão utilizados no restante do trabalho.

No Capítulo 2 definimos o que é uma isometria e qual a relação deste conceito com o conceito de planificação. Essa parte do trabalho é fundamental, pois nela definimos os aspectos que tornam uma superfície planificável.

No Capítulo 3 realizaremos a prova da possibilidade da planificação de algumas superfícies e, a partir daí mostraremos que é possível calcular algumas características métricas de uma superfície utilizando o plano. As superfícies estudadas neste capítulo são também as que estão presentes nos livros didáticos do Ensino Médio.

No Capítulo 4 mostramos como a Cartografia faz uso da planificação de superfícies, ao mesmo tempo em que estudamos melhor uma superfície não planificável.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

1.1 Curvas

Podemos definir uma curva, de maneira intuitiva, como sendo uma linha formada pela trajetória de um ponto num ambiente qualquer, cuja direção muda no decorrer dessa trajetória. Caso a direção do ponto se mantenha no decorrer do percurso, dizemos que a curva é uma linha reta.

Algumas curvas podem ser representadas por uma equação algébrica. É possível fazer isso descrevendo-as por meio de uma equação cartesiana $f(x, y) = c$, onde f é uma função de x e y , e c é uma constante. Deste ponto de vista, uma curva é um conjunto de pontos

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = c\}. \quad (1.1)$$

Podemos ilustrar essa ideia citando uma reta (ver Figura 1.1 (a)), ou uma parábola (ver Figura 1.1 (b)), ou ainda uma circunferência (ver Figura 1.1 (c)).

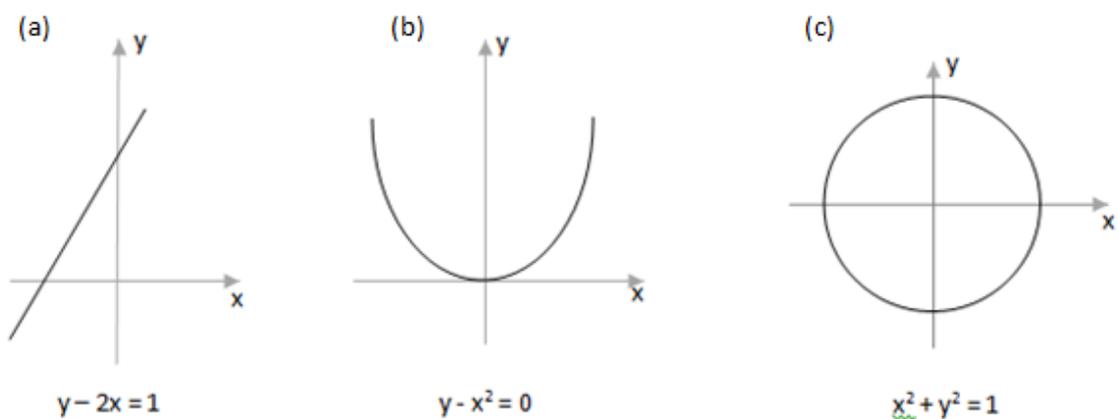


Figura 1.1: Curvas no \mathbb{R}^2

Estes exemplos são todos de curvas no \mathbb{R}^2 , mas podemos também considerar curvas no \mathbb{R}^3 . Por exemplo, a hélice que é a curva dada por $(\cos t, \sin t, t)$, com $-\infty < t < +\infty$, como pode ser vista na Figura 1.2.

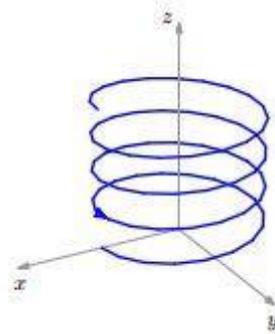


Figura 1.2: Hélice Cilíndrica: curva no \mathbb{R}^3

Quando é possível determinar um plano que contenha todos os pontos de uma curva, dizemos que essa curva é *planar*. Do contrário, dizemos que a curva é *reversa*. A Figura 1.1 traz exemplos de curvas planares, enquanto a Figura 1.2 mostra um exemplo de curva reversa.

Quando todos os pontos de uma curva constituem um subconjunto de uma superfície, dizemos que esta curva é uma curva da superfície. Neste trabalho estaremos abordando curvas com essa propriedade.

1.2 Superfícies

Podemos definir superfície, de maneira intuitiva, como sendo o lugar geométrico que separa o interior do exterior de um sólido. Uma definição mais formal será dada mais adiante.

Ao classificar as superfícies podemos dividi-las em dois grandes grupos: as regradas e as não regradas. Dizemos que uma superfície S é regradada quando para todo ponto p pertencente a S , passa pelo menos um segmento de reta contido em S . Dentre as superfícies regradas estudaremos alguns poliedros, que são uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas

um, outro polígono. Além dos poliedros, estudaremos outras superfícies regradas, como o cone e o cilindro. No campo das superfícies não regradas estudaremos com mais detalhes a esfera.

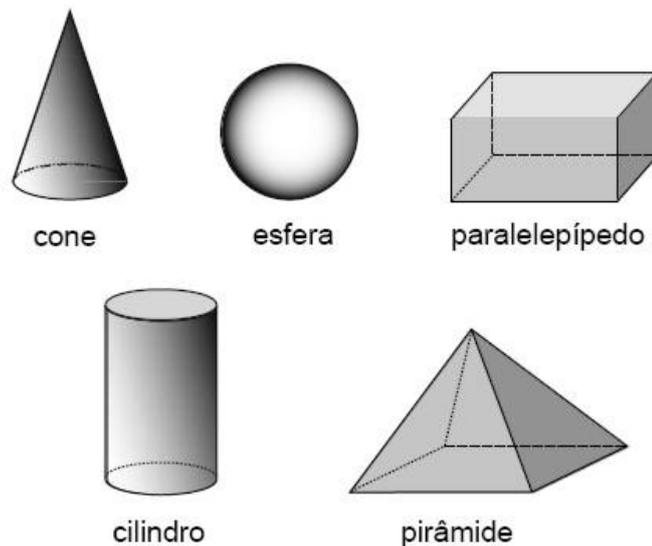


Figura 1.3: Superfícies Geométricas

1.3 Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies

A Geometria Diferencial de curvas e superfícies nos permite realizar estudos sobre as propriedades locais das curvas e superfícies, ou seja, propriedades que dependem apenas do comportamento da curva ou superfície nas proximidades de um ponto. Neste aspecto podemos chamá-la de Geometria Diferencial Clássica. Para se desenvolver estudos a cerca dessas propriedades são utilizados os métodos do cálculo diferencial e integral, portanto, as curvas e superfícies consideradas na geometria diferencial serão definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes.

Ao se estudar a influência das propriedades locais sobre o comportamento da curva ou superfície como um todo, utilizamos a Geometria Diferencial sobre um outro aspecto, chamado geometria diferencial global.

A seguir trataremos dos conceitos e propriedades dos elementos e características das curvas e superfícies sob a ótica da Geometria Diferencial. Estabeleceremos aqui as

ferramentas básicas que serão utilizadas neste trabalho. Grande parte da teoria utilizada na descrição dessas ferramentas foi baseada em CARMO (2012) e Tenenblat (1988).

1.3.1 Produto Interno no \mathbb{R}^3 ; Norma ou Comprimento de um Vetor

Dados dois vetores $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$, definimos o produto interno (ou produto escalar) de w_1 e w_2 como sendo o número real dado por

$$\langle w_1, w_2 \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \quad (1.2)$$

É fácil verificar que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_2, w_1 \rangle$,
- 2) $\langle \lambda w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, \lambda w_2 \rangle = \lambda \langle w_1, w_2 \rangle$,
- 3) $\langle w_1, w_2 + w_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, w_3 \rangle$,
- 4) $\langle w_1, w_1 \rangle \geq 0$,
- 5) $\langle w_1, w_1 \rangle = 0$, se e só se, $w_1 = 0$,

onde w_1, w_2, w_3 são vetores de \mathbb{R}^3 e λ é um número real.

A norma ou comprimento de um vetor $w = (x, y, z)$ é dada por

$$|w| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\langle w, w \rangle}. \quad (1.3)$$

Quando a norma de um vetor é igual a 1, ou seja, quando seu comprimento é igual a 1, dizemos que o vetor é unitário.

1.3.2 Dependência Linear

Os vetores w_1, w_2, \dots, w_n são ditos *linearmente dependentes* se existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nem todos nulos, tais que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0. \quad (1.4)$$

Os vetores w_1, w_2, \dots, w_n são ditos *linearmente independentes* se não são linearmente dependentes, isto é, para toda combinação linear destes vetores da forma

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0, \quad (1.5)$$

tem-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Se w_1, w_2, \dots, w_n são vetores linearmente independentes e w é um vetor, que pode ser expresso como combinação linear de w_1, w_2, \dots, w_n , então decorre da definição de vetores linearmente independentes que esta combinação linear é única.

Um conjunto K de vetores é dito uma base para um plano, se todo vetor do plano pode ser escrito como combinação linear dos vetores de K , e K é um conjunto de vetores linearmente independentes.

1.3.3 Curva Diferenciável Parametrizada

O processo de parametrização de um objeto geométrico consiste na definição de parâmetros que implicarão na identificação de um conjunto de coordenadas que permite, unicamente, identificar qualquer ponto sobre a superfície. Cada coordenada pode ser definida na forma de uma equação algébrica. De maneira mais detalhada temos:

Uma curva parametrizada diferenciável do \mathbb{R}^3 é uma aplicação $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (1.6)$$

onde I é um intervalo aberto e $t \in I$, de forma que $x(t), y(t)$ e $z(t)$ são funções diferenciáveis de todas as ordens. A imagem $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ é chamada traço da curva.

1.3.4 Vetor Tangente; Curva Regular

Dada uma curva diferenciável, podemos associar a cada ponto do seu traço um vetor tangente. Como exemplo, observe a curva definida pelo traço $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Sendo α diferenciável, podemos calcular as derivadas das funções coordenadas $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin t$, obtendo: $x'(t) = -\sin t$ e $y'(t) = \cos t$. Vamos calcular essas derivadas para alguns pontos do intervalo $(0, 2\pi]$.

$(0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$	$(-\sin t, \cos t) \subset \mathbb{R}^2$
$t = \pi/2$	$(-\sin \pi/2, \cos \pi/2) = (-1, 0)$
$t = \pi$	$(-\sin \pi, \cos \pi) = (0, -1)$
$t = 3\pi/2$	$(-\sin 3\pi/2, \cos 3\pi/2) = (1, 0)$
$t = 2\pi$	$(-\sin 2\pi, \cos 2\pi) = (0, 1)$

Quadro 1.1: Derivadas das funções coordenadas $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin t$ em alguns pontos do intervalo $(0, 2\pi]$.

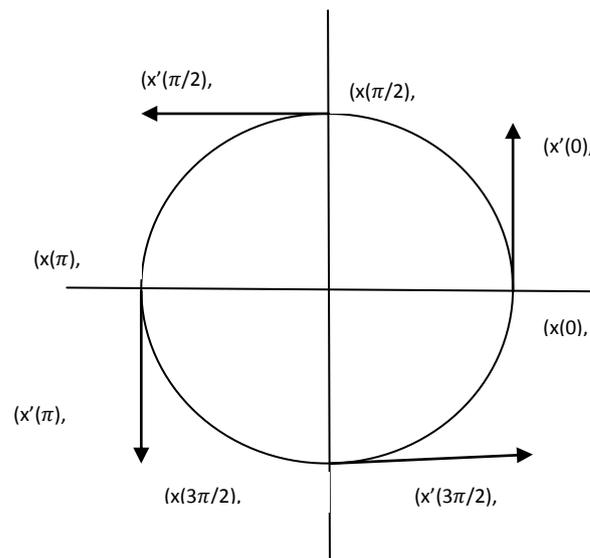


Figura 1.4: Traço da curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (0, 2\pi]$, com alguns vetores tangentes ao seu traço.

Assim sendo, definiremos vetor tangente ou vetor velocidade da seguinte maneira: dada uma curva diferenciável $\alpha: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, chamaremos de vetor tangente, ou vetor velocidade de α em t , o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

O fato de $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, garante a existência de um vetor tangente em todos os pontos da curva α , o que é essencial para o desenvolvimento da geometria diferencial. Neste caso, dizemos que a curva diferenciável parametrizada é uma *curva regular*.

Os pontos de uma curva diferenciável parametrizada $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\alpha'(t) = 0$, são chamados de pontos singulares. Estaremos considerando apenas as curvas sem pontos singulares.

1.3.5 Comprimento de Arco

O comprimento de arco de uma curva diferenciável regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, a partir de um ponto $t_0 \in I$ é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt, \quad (1.7)$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \quad (1.8)$$

é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$, com $t \in I$.

A aplicação $s: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ é denominada função comprimento de arco da curva α a partir de t_0 . Esta função possui derivada de todas as ordens, pois α é uma curva regular.

Uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0. \quad (1.9)$$

1.3.5.1 Proposição. Uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se e só se, $\forall t \in I, |\alpha'(t)| = 1$.

Omitiremos a demonstração dessa proposição. O leitor poderá encontrá-la em Tenenblat (1988).

Como exemplo, considere a aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\alpha(t) = \left(a \cos \frac{t}{a}, a \operatorname{sen} \frac{t}{a}, 1\right)$, $t \in I$ e $a \neq 0$. Temos que $\alpha'(t) = \left(-\operatorname{sen} \frac{t}{a}, \cos \frac{t}{a}, 0\right)$ e $|\alpha'(t)| = \sqrt{\left(-\operatorname{sen} \frac{t}{a}\right)^2 + \left(\cos \frac{t}{a}\right)^2} = 1, \forall t \in I$. Portanto, α é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco.

Uma mesma curva pode ser parametrizada de várias maneiras. No entanto, a parametrização por comprimento de arco é considerada mais vantajosa, pois através dela é possível calcular diretamente elementos da curva tais como curvatura e torção. Segue então que, a escolha desse tipo de parametrização facilita o estudo das propriedades das curvas.

1.3.6 Superfície Regular

Nesta seção investigaremos as propriedades geométricas locais de superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Definiremos superfície parametrizada de modo análogo a curvas.

1.3.6.1 Definição. Uma superfície parametrizada diferenciável é uma aplicação X de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 tal que

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (1.10)$$

com $(u, v) \in U$ e $x(u, v), y(u, v)$ e $z(u, v)$ são funções diferenciáveis de todas as ordens.

Como exemplo podemos citar a superfície cilíndrica $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $X(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, onde $(u, v) \in U$, $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < +\infty$.

1.3.6.2 Definição. Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto no \mathbb{R}^2 , tal que

1. X é diferenciável de classe C^∞ ;

2. Para todo $p = (u, v) \in U$, a diferencial de X em p , $X_p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis u e v são chamadas de parâmetros da superfície. O subconjunto $S = X(U) \subset \mathbb{R}^3$, que contém a imagem de U pela função X , é chamado de traço de X .

A aplicação $X_p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X_p(w) = X_u u'(w) + X_v v'(w)$, onde X_u é a derivada de X em relação a u , X_v é a derivada de X em relação a v e w é um vetor tangente à superfície em p .

A condição 1 garante a existência das derivadas parciais, X_u e X_v , de todas as ordens.

A condição 2 garante a ausência de auto interseções (ver Figura 1.5). Este fato ficará mais claro quando definirmos plano tangente.

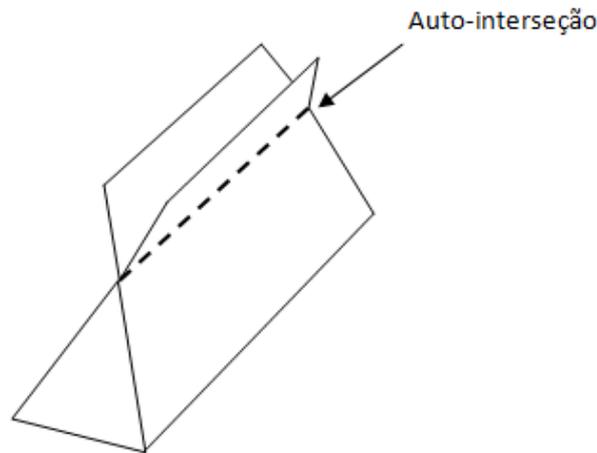


Figura 1.5: Superfície com auto interseção.

Veamos outra forma equivalente de expressar a condição 2 da definição anterior. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Para cada $p = (u_o, v_o) \in U$ a matriz associada a X_p nas bases canônicas é a matriz Jacobiana

$$J(u_o, v_o) = \begin{bmatrix} x_u(p) & x_v(p) \\ y_u(p) & y_v(p) \\ z_u(p) & z_v(p) \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

pois

$$X_p(e_1) = (x_u(p), y_u(p), z_u(p)) \quad \text{e} \quad X_p(e_2) = (x_v(p), y_v(p), z_v(p)). \quad (1.12)$$

Como a aplicação $X_p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, temos que a imagem da base canônica de \mathbb{R}^2 forma um conjunto de vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . Portanto, $X_u(p)$ e $X_v(p)$ são vetores linearmente independentes.

Consideraremos neste trabalho apenas superfícies regulares, pois utilizaremos a geometria diferencial como ferramenta. Segue então que, durante o corpo deste trabalho, sempre que nos referirmos a uma superfície estaremos considerando que ela seja regular.

1.3.7 Plano Tangente

Seja uma superfície regular $X(u, v): U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $(u, v) \in U$, sendo u e v funções diferenciáveis de um parâmetro $t \in I \subset \mathbb{R}$. Vimos na seção anterior que $X_u(p)$ e $X_v(p)$, com $p \in U$, são vetores linearmente independentes, logo $\{X_u(p), X_v(p)\}$ é uma base para um plano que contém o ponto p . Dada uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, cujo traço está contido na superfície descrita por X , um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a X em um ponto $p = (u(0), v(0)) := (u_o, v_o)$ se $w = \alpha'(p)$.

O plano tangente a X em (u_o, v_o) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_o, v_o) , que denotamos por T_p , onde $p = (u_o, v_o)$. (Ver Fig. 1.6)

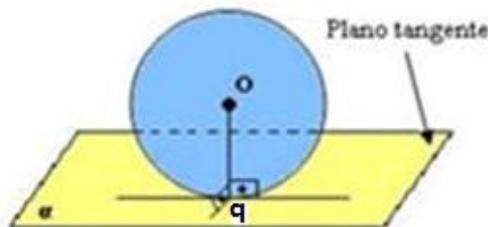


Figura 1.6: Plano tangente a uma superfície esférica no ponto $q = X(p)$.

Vamos mostrar que o plano tangente T_p é o plano de \mathbb{R}^3 gerado por $X_u(p)$ e $X_v(p)$.

1.3.7.1 Proposição. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p = (u_o, v_o) \in U$. Então T_p é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_o, v_o)$ e $X_v(u_o, v_o)$.

Demonstração. Se $w \in T_p$, então $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Portanto,

$$w = \alpha'(t_0) = X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0), \quad (1.13)$$

isto é, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v em (u_0, v_0) .

c.q.d.

Como X_u e X_v são vetores linearmente independentes, segue então que T_p é um plano de \mathbb{R}^3 gerado por X_u e X_v .

1.3.8 Primeira Forma Quadrática

A primeira forma quadrática está relacionada com o comprimento de curvas em uma superfície, ângulos entre vetores tangentes e áreas de regiões em superfícies. Ela determina algumas características locais de uma superfície, independente de sua posição no espaço.

1.3.8.1 Definição. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada. Para todo $p \in U$ a aplicação

$$I_p: T_p \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.14)$$

$$w \mapsto \langle w, w \rangle \quad (1.15)$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em p .

Como w é um vetor pertencente a T_p , podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores tangentes X_u e X_v , como visto no tópico 1.3.7, que formam uma base para T_p . Segue então que, $w = aX_u(p) + bX_v(p)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e $X(p)$ é o ponto de tangência entre o vetor w e a superfície X .

Portanto,

$$\begin{aligned} I_p(w) = \langle w, w \rangle &= |w|^2 = |aX_u(p) + bX_v(p)|^2 \\ &= \langle aX(u)(p) + bX(v)(p), aX(u)(p) + bX(v)(p) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \langle X_u(p), X_u(p) \rangle + 2ab \langle X_u(p), X_v(p) \rangle + b^2 \langle X_v(p), X_v(p) \rangle \\
&= a^2 \langle X_u, X_u \rangle (p) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle (p) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle (p). \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Usando a notação

$$E(p) = \langle X_u, X_u \rangle (p), F(p) = \langle X_u, X_v \rangle (p) \text{ e } G(p) = \langle X_v, X_v \rangle (p),$$

temos que

$$I_p(w) = a^2 E(p) + 2ab F(p) + b^2 G(p). \quad (1.17)$$

Como para cada ponto da superfície podemos definir um plano tangente, logo podemos definir as funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ que são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática*.

Como exemplo vamos calcular os coeficientes da primeira forma quadrática da esfera S dada por

$$X(\theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta), \quad (1.18)$$

com $0 < \theta < \pi$ e $0 < \varphi < 2\pi$.

Temos que

$$X_\theta = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, -r \operatorname{sen} \theta) \text{ e } X_\varphi = (-r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, 0).$$

Assim,

$$E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2, \quad (1.19)$$

$$F = \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = 0, \quad (1.20)$$

$$G = \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \quad (1.21)$$

Como foi dito anteriormente, a primeira forma quadrática está relacionada com vários conceitos da superfície, abordados no início desta seção. Veremos agora como usá-la para calcular o comprimento de arco de uma curva da superfície e o ângulo entre vetores tangentes à superfície.

Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superfície então, para $t_0, t_1 \in I$, com $t_0 < t_1$, o comprimento de α , de t_0 a t_1 é dado por

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{|\alpha'(t)|^2} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I(\alpha'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Se duas curvas da superfície $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $\beta(r) = X(u(r), v(r))$, com t e $r \in I \subset \mathbb{R}$, são tais que $(u(t_0), v(t_0)) = (u(r_0), v(r_0))$, então o ângulo θ com que as curvas se intersectam é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(r_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(r_0)|}. \quad (1.23)$$

Em particular, o ângulo formado pelas curvas coordenadas de $X(u, v)$ em (u_0, v_0) é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|} (u_0, v_0) = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}. \quad (1.24)$$

Segue daí que, as curvas coordenadas de uma superfície $X(u, v)$ se intersectam ortogonalmente, se e somente se, $F(u, v) = 0$ pra todo (u, v) . Este é o caso dos vetores X_θ e X_φ , tangentes à esfera num ponto p .

Além do comprimento de curvas e do ângulo entre vetores, a primeira forma quadrática também pode ser utilizada para o cálculo de áreas de regiões de uma superfície. No entanto, para o entendimento dessa relação são necessários alguns conhecimentos matemáticos que estão além dos pré-requisitos necessários para o entendimento de todo o restante deste trabalho. Logo, exibiremos apenas a definição de áreas de regiões de uma superfície regular, omitindo demais comentários e explicações.

Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de \mathbb{R}^2 , tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A área da região $X(D)$ é dada por

$$A(X(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \quad (1.25)$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma quadrática de X .

Como exemplo, vamos calcular a área $A(R)$ da esfera.

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2} \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) \, d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\varphi = 4\pi r^2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Do exposto acima concluímos que, numa superfície regular, é possível calcular o comprimento de qualquer curva, o ângulo formado por duas curvas quaisquer que se intersectem e a área de uma região, conhecendo-se apenas sua primeira forma quadrática.

CAPÍTULO 2

ISOMETRIAS E PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES

No Capítulo 1 definimos a primeira forma fundamental de uma superfície S e mostramos que ela pode ser usada para calcular o comprimento de curvas sobre S .

Neste capítulo definiremos isometria, que essencialmente torna precisa a noção intuitiva de duas superfícies terem a mesma primeira forma fundamental.

2.1 Superfícies Isométricas

Considere $X_1, X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfícies regulares. Observe que X_1 e X_2 têm o mesmo domínio U e, além disso, como consequência da condição 2 da definição de superfície regular, (ver Capítulo 1, seção 1.3.6), são injetivas. Logo, podemos definir uma correspondência bijetora entre os traços dessas superfícies. Chamando de $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ as imagens de U pelas funções X_1 e X_2 , respectivamente, existem as funções inversas $X_1^{-1}: S_1 \rightarrow U$ e $X_2^{-1}: S_2 \rightarrow U$. Portanto, a aplicação $\phi: S_1 \rightarrow S_2$, definida por $\phi = X_2 \circ X_1^{-1}$ é bijetora, e sua inversa é dada por $\phi^{-1} = X_1 \circ X_2^{-1}$. (Ver Figura 2.1).

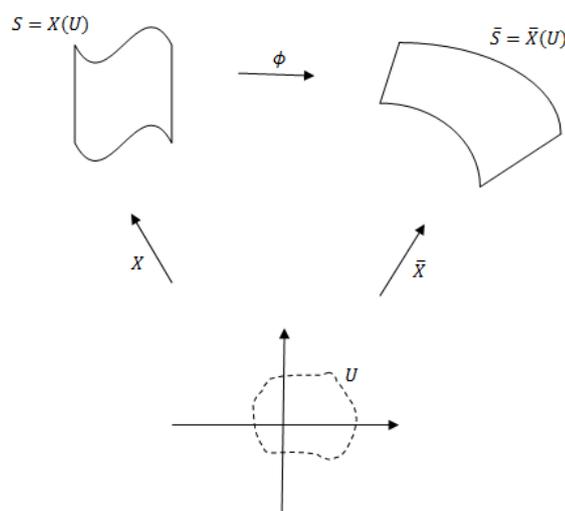


Figura 2.1: Diagrama da função ϕ .

2.1.1 Definição: Sejam $X_1, X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfícies regulares com $S_1 = X_1(U)$ e $S_2 = X_2(U)$. As superfícies S_1 e S_2 são ditas isométricas se existir uma aplicação $\phi: S_1 \rightarrow S_2$ com a seguinte propriedade: $|\phi(p) - \phi(q)| = |p - q|$ para todo $p, q \in S_1$.

Em particular, podemos considerar a aplicação $\phi: S_1 \rightarrow S_2$ definida por $\phi = X_2 \circ X_1^{-1}$. Isto é, para toda curva α_1 de S_1 , o comprimento de α_1 é igual ao comprimento da curva $\phi \circ \alpha_1$ de S_2 .

No teorema seguinte veremos a relação existente entre a primeira forma quadrática e isometria.

2.1.2 Teorema. Sejam $X_1, X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfícies regulares com $S_1 = X_1(U)$ e $S_2 = X_2(U)$. S_1 e S_2 são isométricas, se e somente se, para todo $(u, v) \in U$ os coeficientes da primeira forma quadrática de S_1 e S_2 coincidem, isto é, $E_1(u, v) = E_2(u, v)$, $F_1(u, v) = F_2(u, v)$ e $G_1(u, v) = G_2(u, v)$.

Demonstração: Suponha que $E_1(u, v) = E_2(u, v)$, $F_1(u, v) = F_2(u, v)$ e $G_1(u, v) = G_2(u, v)$. Considere a aplicação $\phi : S_1 \rightarrow S_2$, definida por $\phi = X_2 \circ X_1^{-1}$. Tomando $\alpha_1(t) = X_1(u(t), v(t))$ uma curva regular de X_1 e $\alpha_2(t) = \phi(\alpha_1(t))$ uma curva regular de X_2 , como $\phi = X_2 \circ X_1^{-1}$, segue que $\alpha_2(t) = X_2(u(t), v(t))$. Portanto,

$$\alpha_1'(t) = X_{1u}u'(t) + X_{1v}v'(t), \quad (2.1)$$

$$\alpha_2'(t) = X_{2u}u'(t) + X_{2v}v'(t). \quad (2.2)$$

Os comprimentos das curvas α_1 e α_2 de t_0 a t_1 são dados, como visto no tópico 1.3.8 do Capítulo 1, por,

$$e(\alpha_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(u')^2 E_1 + 2u'v'F_1 + (v')^2 G_1} dt, \quad (2.3)$$

e

$$e(\alpha_2) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(u')^2 E_2 + 2u'v'F_2 + (v')^2 G_2} dt, \quad (2.4)$$

onde E_1, F_1 e G_1 são os coeficientes da primeira forma fundamental de X_1 , e, E_2, F_2 e G_2 são os coeficientes da primeira forma fundamental de X_2 . Logo, como $E_1(u, v) = E_2(u, v)$, $F_1(u, v) = F_2(u, v)$ e $G_1(u, v) = G_2(u, v)$, para todo $(u, v) \in U$, temos que

$$e(\alpha_1) = e(\alpha_2). \quad (2.5)$$

Portanto, X_1 e X_2 são superfícies isométricas.

Reciprocamente, suponhamos que X_1 e X_2 são superfícies isométricas, então vamos provar que estas superfícies conservam a primeira forma fundamental. Seja $p = (u_o, v_o) \in U$, onde $(u_o, v_o) = (u(0), v(0))$. Consideraremos uma curva $\alpha_1(t) = X_1(u(t), v(t))$ e $\alpha_2 = \phi(\alpha_1)$, onde

$$u(t) = u_o + at, \quad (2.6)$$

$$v(t) = v_o + bt, \quad (2.7)$$

a, b são constantes que não se anulam simultaneamente e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $(u(t), v(t)) \in U$. Sejam $s_1(t)$ e $s_2(t)$ as funções comprimento de arco respectivamente a α_1 e α_2 , de t_o a t_1 . Como para todo t , $s_1(t) = s_2(t)$, derivando esta relação, temos que

$$\begin{aligned} a^2 E_1(u(t), v(t)) + 2ab F_1(u(t), v(t)) + b^2 G_1(u(t), v(t)) &= \\ &= a^2 E_2(u(t), v(t)) + 2ab F_2(u(t), v(t)) + b^2 G_2(u(t), v(t)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

para todo t . Em particular para $t = 0$, obtemos

$$a^2(E_1(p) - E_2(p)) + 2ab(F_1(p) - F_2(p)) + b^2(G_1(p) - G_2(p)) = 0, \quad (2.9)$$

que se verifica para quaisquer constantes a e b . Portanto,

$$E_1(p) = E_2(p), \quad F_1(p) = F_2(p), \quad G_1(p) = G_2(p). \quad (2.10)$$

c.q.d.

Portanto, se duas superfícies conservam a primeira forma fundamental então elas preservam o comprimento de curvas, sendo, consequentemente, isométricas.

2.2 Superfícies Planificáveis

A grosso modo dizemos que uma superfície é planificável, ou desenvolvível, quando é possível que ela seja “desenrolada” no plano, sem sofrer furos ou rupturas.

Podemos pensar nesta situação de outra maneira, imaginando uma curva desenhada sobre uma superfície planificável, por exemplo, o cilindro. Ao desenrolarmos o cilindro sobre o plano, essa curva, agora presente no plano, mantém suas características métricas inalteradas.

2.2.1 Definição. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita *planificável* se, e somente se, S for isométrica ao plano.

Como superfícies que conservam a primeira forma fundamental são isométricas (de acordo com o teorema 2.1.2), concluímos então que, se uma superfície regular qualquer possui a mesma primeira forma quadrática que o plano, então ela é isométrica ao plano e, conseqüentemente, pela definição 2.2.1, também é planificável.

(...)Embora o cilindro e o plano sejam superfícies distintas, suas primeiras formas fundamentais são “iguais” (...). Isso significa que, no que se refere às questões métricas intrínsecas (comprimento, ângulo, área), o plano e o cilindro se comportam localmente da mesma maneira. (isto é claro intuitivamente, já que cortando-se um cilindro ao longo de uma das geratrizes pode-se desenrolá-lo sobre uma parte do plano). (...). (CARMO, 2012, p. 261).

Portanto, a primeira forma quadrática, que por natureza está vinculada a geometria intrínseca das superfícies regulares, é preservada por isometrias. Isso nos fornece condições para o estudo das superfícies regulares que podem ser mapeadas isometricamente sobre uma outra superfície regular (LEITE, 2011).

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES

3.1 Planificação de Superfícies Estudadas no Ensino Médio

O processo de planificação de uma superfície é vivenciado em inúmeras situações, inclusive fora da sala de aula. Estamos bem familiarizados com a noção intuitiva de uma planificação, visto que nos deparemos com esse processo em várias situações cotidianas, como por exemplo, quando montamos ou desmontamos uma caixa (ver Fig. 3.1), quando enrolamos uma folha de papel dando um caráter cilíndrico ou cônico a mesma, enfim, sempre que transformamos um objeto plano em uma figura tridimensional, ou vice versa, sem provocar rasgos, furos ou distorções, estamos diante de um processo de planificação.



Figura 3.1: Objeto com superfície planificável – desenho de Mauritus Escher.

O objetivo deste capítulo, que é também um dos principais objetivos deste trabalho, é tratar a questão da planificação de uma superfície de maneira mais formal, utilizando geometria diferencial. Ou seja, faremos uso de características das superfícies, expressas através de leis matemáticas, para explicar os motivos que a tornam uma superfície planificável, ou não.

Neste tópico veremos que o cilindro, o cone, o cubo e o tetraedro podem ter suas superfícies planificadas. Mostraremos também que o mesmo não ocorre com a esfera. Estes

foram os sólidos escolhidos para serem tratados devido ao fato de serem os mais trabalhados no Ensino Médio.

Para isso, vamos calcular a primeira forma fundamental do cone, do cilindro, do cubo, do tetraedro e da esfera, e em seguida, compará-las a do plano. Neste momento, o Teorema 2.1.2, mostrará toda a sua relevância pra este trabalho.

3.1.1 Planificação do Cilindro

Considere a parametrização do plano $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = p + uw_1 + vw_2, \quad (3.1)$$

onde w_1 e w_2 são vetores unitários e ortogonais.

Como mostrado no tópico 1.3.8 do Capítulo 1, a primeira forma quadrática de uma superfície regular é uma aplicação que, no caso do plano, será calculada como segue.

Derivando X , inicialmente em relação a u e em seguida em relação a v , temos:

$$X_u = w_1 \quad \text{e} \quad X_v = w_2. \quad (3.2)$$

Segue daí e pela definição 1.3.8.1 que, os coeficientes da primeira forma quadrática do plano, são:

$$E_p = 1, \quad F_p = 0 \quad \text{e} \quad G_p = 1, \quad (3.3)$$

pois w_1 e w_2 são ortogonais.

Considere agora o cilindro vertical, parametrizado por

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.4)$$

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (3.5)$$

com $(u, v) \in U$, $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < +\infty$.

Calculando os vetores que formam a base do plano tangente ao cilindro num ponto dado, temos:

$$X_u = (-\operatorname{sen} u, \operatorname{cos} u, 0) \quad e \quad X_v = (0, 0, 1). \quad (3.6)$$

Utilizando a expressão desses vetores para determinar os coeficientes da primeira forma quadrática do cilindro temos que

$$E_c = 1, \quad F_c = 0 \quad e \quad G_c = 1. \quad (3.7)$$

Portanto, como

$$E_p = E_c, \quad F_p = F_c \quad e \quad G_p = G_c \quad (3.8)$$

temos que o cilindro e o plano conservam a primeira forma fundamental. Logo, pelo teorema 2.1.2, do Capítulo 2, concluímos que o cilindro e o plano são superfícies isométricas. Consequentemente, pela definição 2.2.1, o cilindro é uma superfície planificável.

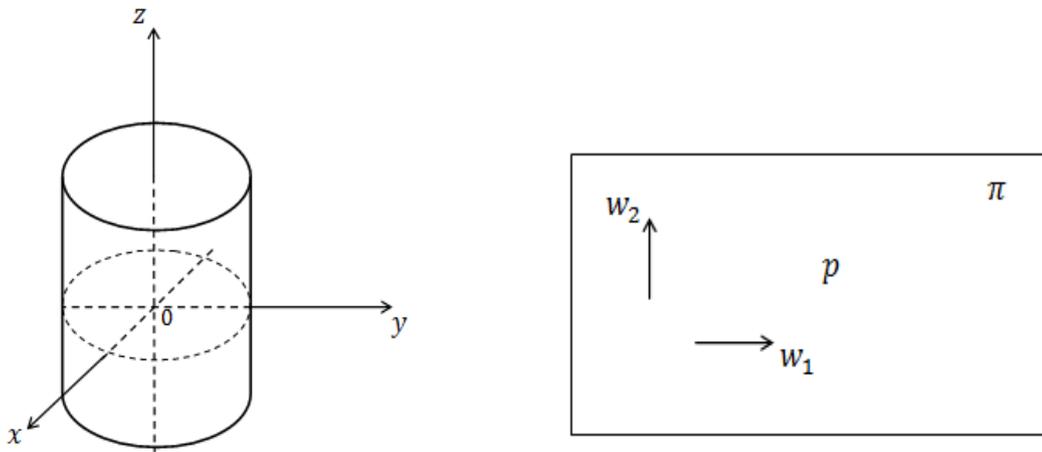


Figura 3.2: Planificação do cilindro

3.1.2 Planificação do Cone

Para tratar da superfície do cone, escolhemos uma parametrização dada em coordenadas polares². Em consequência disso, também usaremos o mesmo sistema de coordenadas para parametrizar o plano.

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto dado em coordenadas polares (ρ, θ) por $0 < \rho < \infty$ e $0 < \theta < 2\pi \operatorname{sen} \alpha$, onde 2α ($0 < 2\alpha < \pi$) é o ângulo do vértice do cone.

Consideremos a aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, 0), \quad (3.9)$$

que é uma parametrização do plano xy .

Calculando os vetores que formam a base do plano tangente a X em um ponto dado, temos:

$$X_\rho = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0) \quad \text{e} \quad X_\theta = (-\rho \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \theta, 0). \quad (3.10)$$

Utilizando estes resultados para calcular os coeficientes da primeira forma quadrática de X temos.

$$E_p = 1, \quad F_p = 0 \quad \text{e} \quad G_p = \rho^2. \quad (3.11)$$

Para o cone de uma folha (menos o vértice) utilizaremos a seguinte parametrização.

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.12)$$

$$F(\rho, \theta) = \left(\rho \operatorname{sen} \alpha \cos \left(\frac{\theta}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \rho \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \rho \cos \alpha \right) \quad (3.13)$$

Observe que quando θ percorre o intervalo $(0, 2\pi \operatorname{sen} \alpha)$, $\frac{\theta}{\operatorname{sen} \alpha}$ percorre o intervalo $(0, 2\pi)$. Desse modo todos os pontos do cone, exceto a geratriz $\theta = 0$ são cobertos por $F(U)$.

² Um sistema de coordenadas polares num plano consiste em um ponto fixo, chamado de polo (ou origem) e de um raio que parte do polo, chamado de eixo polar. Num tal sistema de coordenadas, podemos associar a cada ponto p no plano, um par de coordenadas polares (ρ, θ) , onde ρ é a distância de p ao polo e θ é o ângulo entre o eixo polar e o raio.

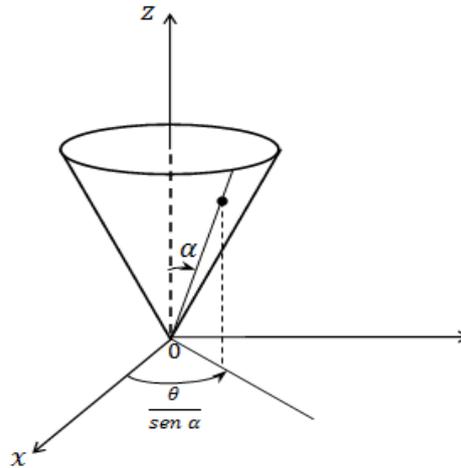


Figura 3.3: Cone.

Calculando os vetores que formam uma base do plano tangente ao cone num ponto dado, temos:

$$F_\rho = \left(\text{sen } \alpha \cos \left(\frac{\theta}{\text{sen } \alpha} \right), \text{sen } \alpha \text{sen} \left(\frac{\theta}{\text{sen } \alpha} \right), \cos \alpha \right) \quad (3.14)$$

e

$$F_\theta = \left(-\rho \text{sen} \left(\frac{\theta}{\text{sen } \alpha} \right), \rho \cos \left(\frac{\theta}{\text{sen } \alpha} \right), 0 \right). \quad (3.15)$$

A partir daí, temos os seguintes coeficientes para a primeira forma quadrática do cone (menos a geratriz).

$$E_c = 1, \quad F_c = 0 \quad \text{e} \quad G_c = \rho^2. \quad (3.16)$$

Logo, como

$$E_p = E_c, \quad F_p = F_c \quad \text{e} \quad G_p = G_c, \quad (3.17)$$

verificamos que o cone e o plano preservam a primeira forma fundamental. Segue daí e do teorema 2.1.2, que o plano e o cone (menos a geratriz) são superfícies isométricas. Portanto, pela definição 2.2.1, concluímos que o cone é uma superfície planificável.

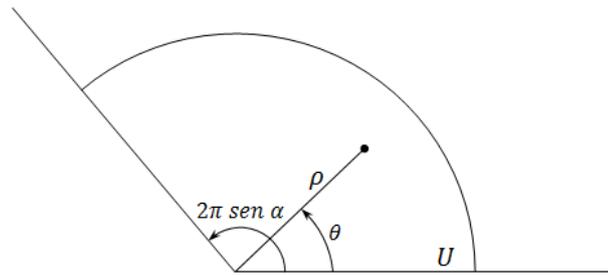


Figura 3.4: Planificação do cone

3.1.3 Planificação do Cubo

O cubo é um poliedro hexagonal, cuja superfície é constituída de faces planas. Tomemos um cubo centrado na origem com arestas de medida igual a 1, como na Figura 3.5.

Primeiramente consideraremos as aplicações $X_1, X_2: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$X_1 = \left(u, v, \frac{1}{2}\right), \quad (u, v) \in U \quad (3.18)$$

e

$$X_2 = \left(u, v, -\frac{1}{2}\right), \quad (u, v) \in U \quad (3.19)$$

onde $\mathbb{R}^2 = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3, z = \pm \frac{1}{2}\}$ e $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}\}$, que são as parametrizações das faces ABCD (menos os pontos A, B, C e D) e EFGH (menos os pontos E, F, G e H), menos as intersecções entre os lados de cada face. Observe que $X_1(U)$ e $X_2(U)$ são as faces do cubo paralelas ao eixo xy , localizadas acima e abaixo desse eixo, respectivamente.

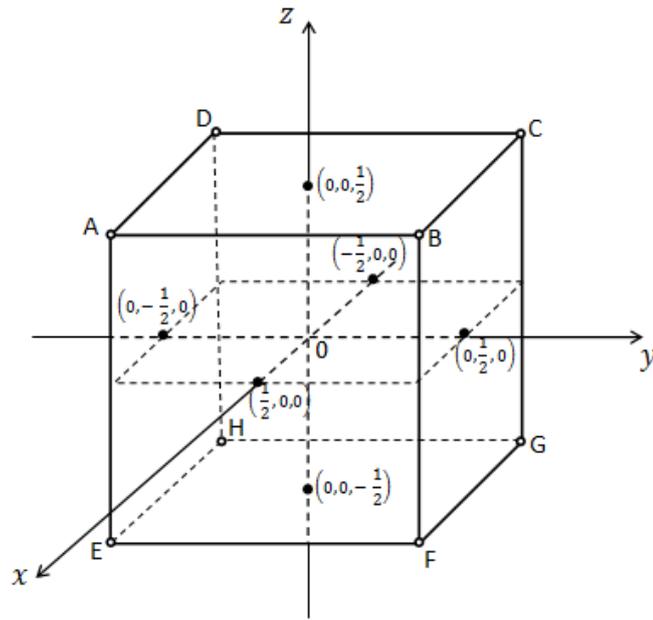


Figura 3.5: Cubo unitário, centrado na origem.

Para cobrir todo o cubo teremos que utilizar parametrizações similares.

Para a parametrização das faces ADHE (menos os pontos A, D, H e E) e BCGF (menos os pontos B, C, G e F), tomemos as aplicações $X_3, X_4: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dadas por

$$X_3 = \left(u, \frac{1}{2}, v\right), \quad (u, v) \in V \quad (3.20)$$

e

$$X_4 = \left(u, -\frac{1}{2}, v\right), \quad (u, v) \in V, \quad (3.21)$$

onde $\mathbb{R}^2 = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Para a parametrização das faces ABFE (menos os pontos A, B, F e E) e CDHG (menos os pontos C, D, H e G), tomemos as aplicações $X_5, X_6: W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dadas por

$$X_5 = \left(\frac{1}{2}, u, v\right), \quad (u, v) \in W \quad (3.22)$$

e

$$X_6 = \left(-\frac{1}{2}, u, v\right), \quad (u, v) \in W, \quad (3.23)$$

onde $\mathbb{R}^2 = \{(x, u, v) \in \mathbb{R}^3, x = \pm \frac{1}{2}\}$ e $W = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}\}$.

Segue então que $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5 \cup X_6$ cobrem toda a superfície do cubo.

Calculando os vetores que formam as bases dos planos que contém as faces parametrizadas por X_1 e X_2 temos:

$$X_{1u} = (1, 0, 0) \text{ e } X_{1y} = (0, 1, 0) \quad (3.24)$$

$$X_{2v} = (1, 0, 0) \text{ e } X_{2y} = (0, 1, 0). \quad (3.25)$$

Observe que os vetores que formam as bases desses planos são as mesmas, pois ambas são paralelas.

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obetmos.

$$E_c = 1, \quad F_c = 0 \quad \text{e} \quad G_c = 1. \quad (3.26)$$

De maneira análoga, é fácil verificar que as demais parametrizações possuem os mesmos coeficientes da primeira forma quadrática.

Considere agora o plano parametrizado por $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (u, v, 0), \quad \text{com } (u, v) \in U, \quad (3.27)$$

que é o plano paralelo ao plano xy .

Calculando os vetores que formam a base desse plano temos.

$$X_u = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad X_v = (0, 1, 0) \quad (3.28)$$

Segue daí que os coeficientes da primeira forma quadrática do plano parametrizado acima são

$$E_p = 1, \quad F_p = 0 \quad \text{e} \quad G_p = 1. \quad (3.29)$$

Logo, como

$$E_p = E_c, \quad F_p = F_c \quad \text{e} \quad G_p = G_c, \quad (3.30)$$

verificamos que o cubo e o plano preservam a primeira forma fundamental. Segue daí e do teorema 2.1.2, que o plano e o cubo são superfícies isométricas. Portanto, pela definição 2.2.1, concluímos que o cubo é uma superfície planificável.

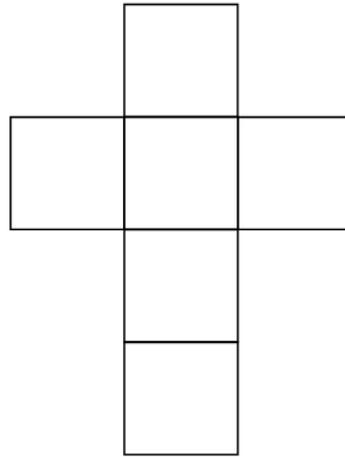


Figura 3.6: Planificação do Cubo

3.1.4 Planificação do Tetraedro

Considere o tetraedro regular de base triangular, centrado na origem e com arestas medindo 1, como na Figura 3.7.

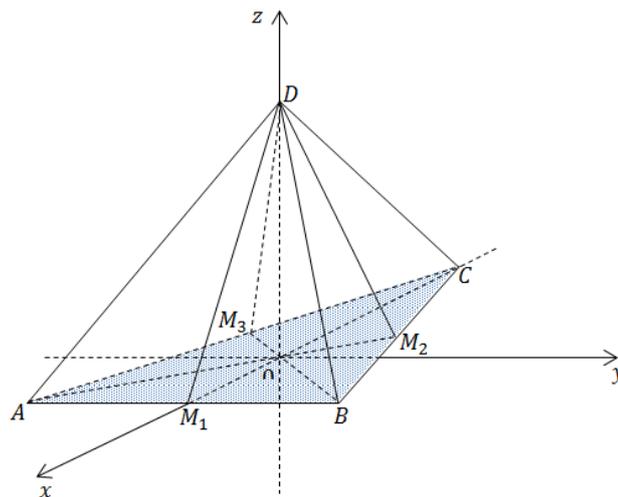


Figura 3.7: Tetraedro regular de base triangular

Para parametrizar a superfície desse poliedro, consideraremos as faces que o compõem, separadamente.

Primeiro tomemos a aplicação $X_1: U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_1(u, v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + v, u, 0\right), \quad (u, v) \in U_1, \quad (3.31)$$

onde $\mathbb{R}^2 = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ e $U_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq v < 0 \text{ e } -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}\}$, que é uma parametrização da face ABC (menos os pontos A, B e C).

Considere agora, as aplicações $X_2: U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X_3: U_3 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $X_4: U_4 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que são as parametrizações das faces ABD (menos os pontos A, B e D), BCD (menos os pontos B, C e D) e ADC (menos os pontos A, C e D), respectivamente, dadas por

$$X_2(u, v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}v, u, \frac{2\sqrt{2}}{3}v\right), \quad (u, v) \in U_2, \quad (3.32)$$

onde

$$\mathbb{R}^2 = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{6}}{3}\} \text{ e } U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq v < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}\};$$

$$X_3(u, v) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{v}{6}, \frac{1}{4} - \frac{u}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}v, \frac{2\sqrt{2}}{3}v\right), \quad (u, v) \in U_3, \quad (3.33)$$

onde

$$\mathbb{R}^2 = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z < \frac{\sqrt{6}}{3}\} \text{ e } U_3 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -\frac{3\sqrt{3}}{4} < v < \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ e } -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}\}$$

e

$$X_4(u, v) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{v}{6}, -\frac{1}{4} + \frac{u}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}v, \frac{2\sqrt{2}}{3}v\right), \quad (u, v) \in U_4, \quad (3.34)$$

onde

$$\mathbb{R}^2 = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z < \frac{\sqrt{6}}{3}\} \text{ e } U_4 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -\frac{3\sqrt{3}}{4} < v < \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ e } -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}\}.$$

Segue então que $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$, cobrem toda a superfície do tetraedro.

Calculando os vetores que formam a base do plano que contém a face parametrizada por X_1 temos:

$$X_{1u} = (1, 0, 0) \text{ e } X_{1v} = (0, 1, 0) \quad (3.35)$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental do tetraedro, obtemos.

$$E_t = 1, \quad F_t = 0 \quad \text{e} \quad G_t = 1. \quad (3.36)$$

De maneira análoga, é fácil verificar que as demais parametrizações possuem os mesmos coeficientes da primeira forma quadrática.

Tomemos agora, a aplicação $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (u, v, 0), \quad \text{com } (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.37)$$

que é uma parametrização do plano paralelo ao plano xy , passando pela origem. Como visto no tópico 2.3.3, os coeficientes da primeira forma quadrática do plano são: $E_p = 1$, $F_p = 0$ e $G_p = 1$.

Logo, como

$$E_p = E_t, \quad F_p = F_t \quad \text{e} \quad G_p = G_t, \quad (3.38)$$

pelo teorema 2.1.2 do Capítulo 2, temos que o tetraedro é isométrico ao plano. Portanto, pela definição 2.2.1, o tetraedro é uma superfície planificável.

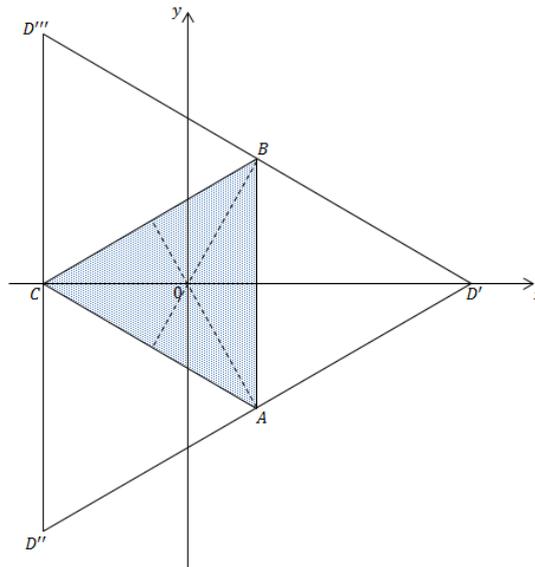


Figura 3.8: Planificação do tetraedro

3.1.5 A Esfera

Vamos agora calcular a primeira forma quadrática da esfera unitária (Figura 3.9).

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \quad (3.39)$$

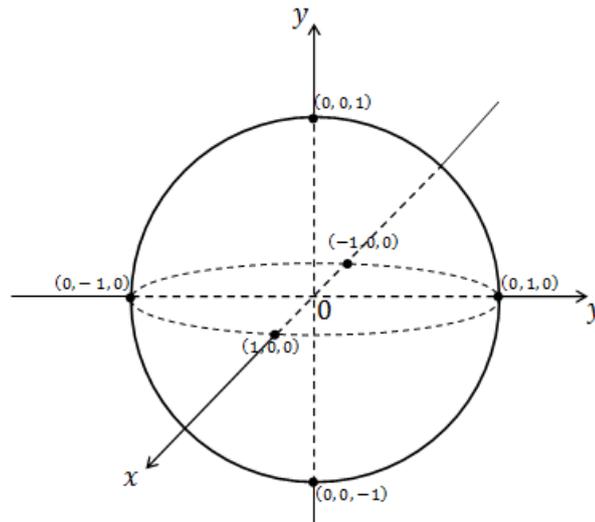


Figura 3.9: Esfera unitária, centrada na origem.

Consideremos a aplicação $X_1 = U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_1 = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad \text{com } (x, y) \in U, \quad (3.40)$$

onde $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, como uma parametrização parcial de S .

Observe que, X_1 é a parte de S acima do plano xy , logo, $X_1(U)$ cobre parcialmente a esfera. Para uma parametrização completa é necessário considerar as seguintes parametrizações similares. Definimos a aplicação $X_2 = U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_2 = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad \text{com } (x, y) \in U. \quad (3.41)$$

Note que $X_2(U)$ é a parte de S abaixo do plano xy . Temos então que, $X_1(U) \cup X_2(U)$ cobre a esfera menos o equador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \quad (3.42)$$

Utilizando então os planos xz e zy , definimos as seguintes parametrizações

$$X_3(x, z) = (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \quad (3.43)$$

$$X_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \quad (3.44)$$

$$X_5(y, z) = (+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), \quad (3.45)$$

$$X_6(y, z) = (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), \quad (3.46)$$

que, juntamente com X_1 e X_2 , cobrem inteiramente S .

A partir de $X_1(U)$, faremos um estudo da primeira forma fundamental da parte da esfera coberta por essa parametrização

$$X_{1x} = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \right) \quad \text{e} \quad X_{1y} = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \right). \quad (3.47)$$

Utilizando a expressão desses vetores para determinar os coeficientes da primeira forma quadrática da esfera temos que

$$E_e = \frac{1 - y^2}{1 - x^2 - y^2}, \quad F_e = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad G_e = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - y^2}. \quad (3.48)$$

Note que os coeficientes da primeira forma quadrática da esfera dependem dos pares de U . Para que a esfera e o plano conservem a primeira forma fundamental, os coeficientes das mesmas devem ser iguais para todos $(x, y) \in U$.

Considere o ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \in U$. Calculando a primeira forma fundamental da esfera nesse ponto temos que: $E_e\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{14}$, $F_e\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{14}$ e $G_e\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{14}$.

Como visto no tópico 2.3.3, os coeficientes da primeira forma quadrática do plano são: $E_p = 1$, $F_p = 0$ e $G_p = 1$.

Logo, como

$$E_p \neq E_e, \quad F_p \neq F_e \quad \text{e} \quad G_p \neq G_e, \quad (3.49)$$

no ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, concluímos que a esfera e o plano não conservam a primeira forma fundamental. Portanto, pelo teorema 2.1.2, do Capítulo 2, temos que a esfera não é isométrica ao plano. Logo, pela definição 2.2.1, a esfera não é uma superfície planificável.

Como já foi mostrado utilizando X_1 que a esfera não é isométrica ao plano, não é necessário repetir a análise para as parametrizações complementares.

Assim como a esfera, existem outras superfícies que não podem ser planificadas. Como exemplo, podemos citar: parabolóide hiperbólico, conóide e cilindróide (ver Fig. 3.10).

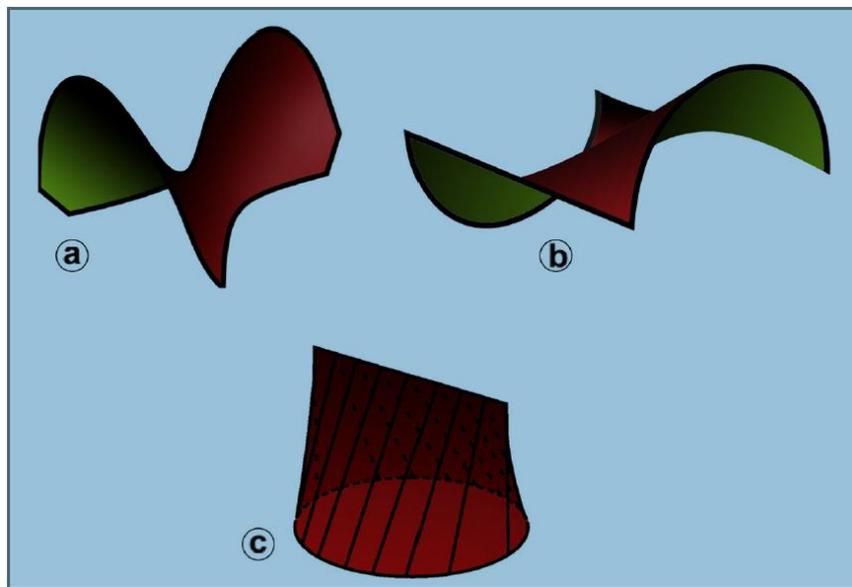


Figura 3.10: (a) Parabolóide Hiperbólico; (b) Cilindróide; (c) Conóide.

Na tentativa de se planificar essas superfícies, ocorreria um grande número de distorções, rasgos e a não correspondência geométrica da superfície plana em relação à superfície do objeto tridimensional.

3.2 Características Métricas de uma Superfície Tratadas no Plano

Na seção 1.3.8 do Capítulo 1, vimos que algumas características métricas das superfícies podem ser calculadas utilizando-se somente a primeira forma quadrática.

Tomemos como exemplo o cilindro vertical, $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ com $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < +\infty$, estudado na seção 3.1.1, cujos coeficientes da primeira

forma quadrática, ($E = 1, F = 0$ e $G = 1$), são iguais aos do plano parametrizado por $\bar{X}(u, v) = (u, v, 0)$, com $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < +\infty$.

Vamos considerar uma curva $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, contida no cilindro, com $u(t) = t$ com $0 < t < 2\pi$ e $v(t) = v_0$ fixo. Dessa forma teremos uma circunferência contida no cilindro.

Assim, como $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$, então, como visto na seção 1.3.8 do Capítulo 1, o comprimento da curva $\alpha(t)$ é dado por

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = 2\pi r. \quad (3.50)$$

No caso do cálculo do comprimento de um segmento vertical contido no cilindro, temos $u(t) = t$ com $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ e $v(t) = v_0$, (fixo). Dessa forma, o comprimento da curva seria

$$\int_a^b \sqrt{G} dt = b - a. \quad (3.51)$$

Como o cilindro é uma superfície planificável, sua primeira forma quadrática e a do plano são iguais. Geometricamente podemos interpretar este fato da seguinte maneira: o comprimento da curva $\alpha(t)$ após a planificação do cilindro se manteria (Ver Fig.11).

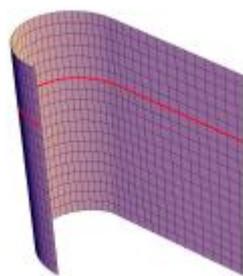


Figura 3.11: Cilindro sendo desenrolado sobre o plano.

Dessa forma, poderíamos calcular o comprimento da curva $\alpha(t)$, utilizando a parametrização do plano. Isso pode ser feito para o cálculo do comprimento de uma curva qualquer do cilindro.

Na seção 1.3.8 do Capítulo 1 foi mostrado que, assim como para o comprimento entre curvas, também podemos calcular o ângulo entre curvas e a área de regiões da

superfície recorrendo somente à primeira forma quadrática. Portanto, se uma superfície é planificável, podemos estudar suas características métricas (comprimento, ângulo, área), no plano.

CAPÍTULO 4

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

4.1 Forma da Terra

A forma da Terra é um assunto que vem sendo discutido pelos astrônomos, geógrafos e demais estudiosos da área, ao longo dos anos, em várias partes do mundo. Pitágoras em 528 a.c. introduziu o conceito de forma esférica para o planeta, e a partir daí sucessivas teorias foram desenvolvidas.

A superfície terrestre sofre frequentes alterações devido à natureza e a ações do homem, portanto, é difícil defini-la de forma sistemática. Uma primeira aproximação é a esfera achatada nos polos.

Mais tarde, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), definiu a forma do planeta como sendo uma Geóide (ver Figura 4.1).

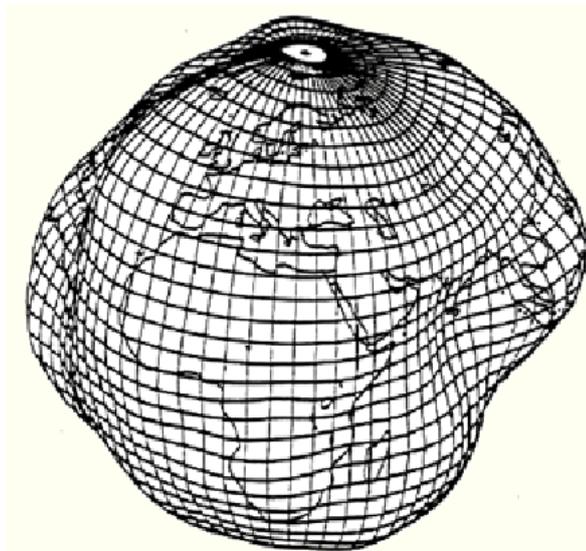


Figura 4.1: Geóide

Com a necessidade de se buscar um modelo mais simples para representar o nosso planeta, lançou-se mão de uma figura geométrica chamada elipse, que ao girar em torno do seu eixo menor forma um sólido, o elipsoide de revolução (Figura 4.2). Assim, o elipsoide é a superfície de referência utilizada nos cálculos que fornecem subsídios para a elaboração de uma representação cartográfica.

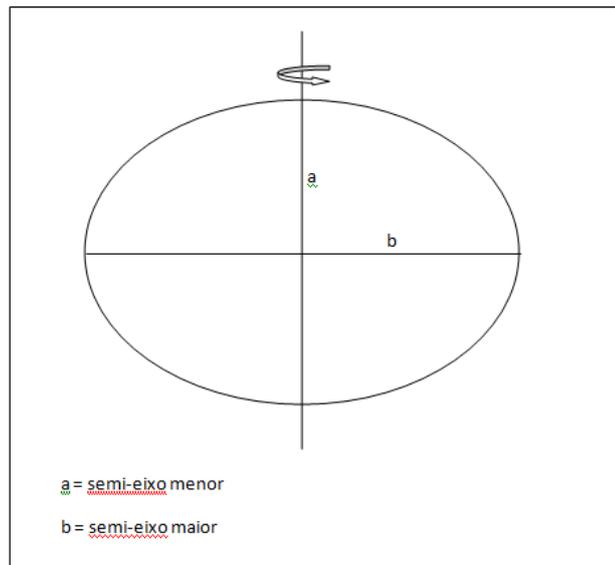


Figura 4.2: Elipsoide

Existem ainda os chamados *meridianos* e os *paralelos* (Fig. 4.3). Os meridianos são círculos máximos imaginários, que cortam a Terra em duas partes iguais, de polo a polo. Sendo assim, todos os meridianos se cruzam entre si em ambos os polos. Quanto aos paralelos, que por sua vez cruzam os meridianos perpendicularmente, apenas um é um círculo máximo, o equador. Os outros, tanto no hemisfério norte quanto no hemisfério sul, vão diminuindo de tamanho à proporção que se afastam do equador, até se transformarem em cada polo, num ponto.

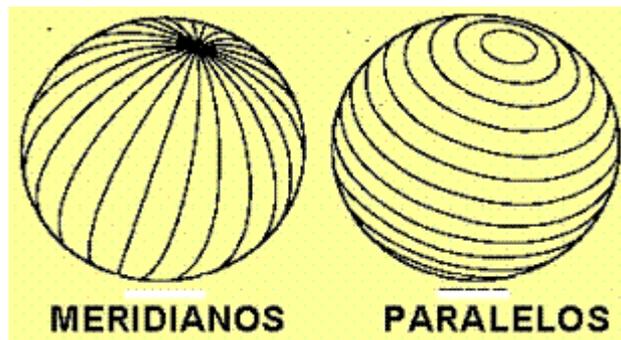


Figura 4.3: Meridianos e Paralelos.

4.2 Tipos de Representação Cartográfica

O conceito de cartografia foi estabelecido em 1966 pela Associação Cartográfica Internacional (ACI), e posteriormente, ratificado pela UNESCO, no mesmo ano, como sendo: “O conjunto de estudos e operações científicas, técnicas e artísticas que, tendo por base os resultados de observações diretas ou da análise de documentação, se voltam para a elaboração de mapas, cartas e outras formas de expressão ou representação de objetos, elementos, fenômenos e ambientes físicos e socioeconômicos, bem como a sua utilização”.

Segundo o Manual Técnico em Geociências do IBGE, o processo cartográfico, partindo da coleta de dados, envolve estudo, análise, composição e representação de observações, de fatos, fenômenos e dados pertinentes a diversos campos científicos associados à superfície terrestre.

Existem vários tipos de representação cartográfica. As principais delas são:

- Globo – representação cartográfica sobre uma superfície esférica, em escala³ pequena, dos aspectos naturais e artificiais de uma figura planetária, com finalidade cultural e ilustrativa (Figura 4.4);



Figura 4.4: Globo Terrestre.

- Mapa – representação no plano, normalmente em escala pequena, dos aspectos geográficos, naturais, culturais e artificiais de uma área tomada na superfície de uma figura

³ Escala é a relação existente entre a medida de um objeto ou lugar representado no papel e sua medida real.

planetária, delimitada por elementos físicos, político-administrativos, destinada aos mais variados usos, temáticos, culturais e ilustrativos (Figura 4.5).



Figura 4.5: Mapa-Múndi.

- Carta – representação no plano, em escala média ou grande, dos aspectos artificiais e naturais de uma área tomada de uma superfície planetária, subdividida em folhas delimitadas por linhas convencionais – paralelos e meridianos – com a finalidade de possibilitar a avaliação de pormenores, com grau de precisão compatível com a escala (Figura 4.6).



Figura 4.6: Carta da Itália.

4.3 O Problema da Não Planificação da Esfera e da Elipse

Para Oliveira, como a esfera ou a elipse são superfícies que não podem ser planificadas com exatidão, um dos maiores problemas enfrentados pela cartografia é o de transferir para o plano tudo o que existe na superfície curva da Terra. Portanto, sua representação no plano é dada de maneira infiel, com algumas alterações e imperfeições, ou seja, é feita de maneira aproximada. Oliveira define o então mapa-múndi, planificação do globo terrestre mais comumente utilizada nas escolas brasileiras, como “a superfície da Terra toda alterada”.

Para Araújo, (1998, p. 99),

É impossível desenhar no plano um mapa inteiramente fiel ao globo terrestre: os mapas existentes falseiam a grandeza relativa das regiões – fazendo com que aquelas mais afastadas do equador pareçam maiores do que são na realidade – e distorcem a forma dos continentes. Ainda assim, os mapas são uma ideia que se aproxima da realidade, e se aproxima tanto melhor quanto mais pequena for a região representada.

Segundo o Manual Técnico IBGE (v. 8, p. 29),

Podemos dizer que todas as representações de superfícies curvas em um plano envolvem: “extensões” ou “contrações” que resultam em distorções ou “rasgos”. Diferentes técnicas de representação são aplicadas no sentido de se alcançar resultados que possuam certas propriedades favoráveis para um propósito específico.

As representações cartográficas são efetuadas, na sua maioria, sobre uma superfície plana. O problema básico consiste em relacionar pontos da superfície terrestre ao plano de representação. Isso compreende as seguintes etapas:

- 1) Adoção de um modelo matemático da Terra. Em geral, esfera ou elipsoide;
- 2) Projetar todos os elementos da superfície terrestre sobre o modelo escolhido;
- 3) Relacionar por processo projetivo ou analítico pontos do modelo matemático com o plano de representação.

4.4 Projeções Mais Usuais e Suas Características

Para realização da planificação aproximada da esfera terrestre são utilizadas superfícies intermediárias que tenham a propriedade de serem planificadas com facilidade. Como exemplo dessas superfícies, podemos citar o cilindro, o cone e o plano.

Para entender melhor esses tipos de projeção, imagine que as superfícies intermediárias funcionassem como espelhos, onde os desenhos contidos na esfera fossem projetados. Em seguida, essas superfícies seriam desenroladas no plano.

4.4.1 Projeção Cilíndrica

É possível desenvolver a esfera, com a representação de alguns de seus meridianos e paralelos, ao longo de um envoltório cilíndrico, de forma que exista apenas uma linha em comum entre eles, o equador.

A partir da análise dessa projeção (Figura 4.7) é possível concluir:

- São representados, sem deformação, todos os ângulos em torno de quaisquer pontos, e, conseqüentemente, não deformam pequenas regiões (conforme);
- A esfera e o cilindro possuem uma linha em comum, o equador. Ou seja, esse paralelo é projetado com exatidão na superfície intermediária;
- Os polos e as áreas vizinhas a eles não são projetados;
- Os meridianos constituem-se em linhas retas paralelas entre si.

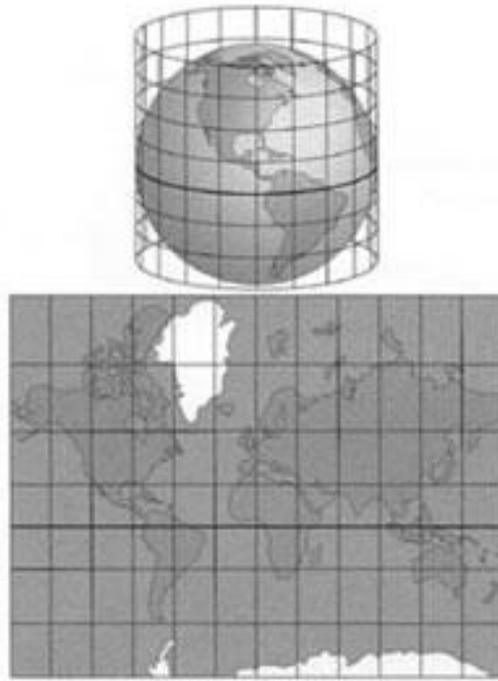


Figura 4.7: Projeção cilíndrica da esfera.

4.4.2 Projeção Cônica

Na projeção cônica, o cone funciona como superfície auxiliar na obtenção de uma representação da esfera no plano. As principais características deste tipo de projeção são:

- Não é conforme, ou seja, não representa sem deformação todos os ângulos em torno de quaisquer pontos. Observe pela Figura 4.8 que, nas partes mais próximas do polo, a distância entre os meridianos é menor do que em relação às partes mais periféricas;
- Não mantêm a equivalência entre as áreas das superfícies envolvidas. Ou seja, as áreas da superfície esférica e da superfície cônica são diferentes;
- Os meridianos são curvas que cortam os paralelos em partes iguais.

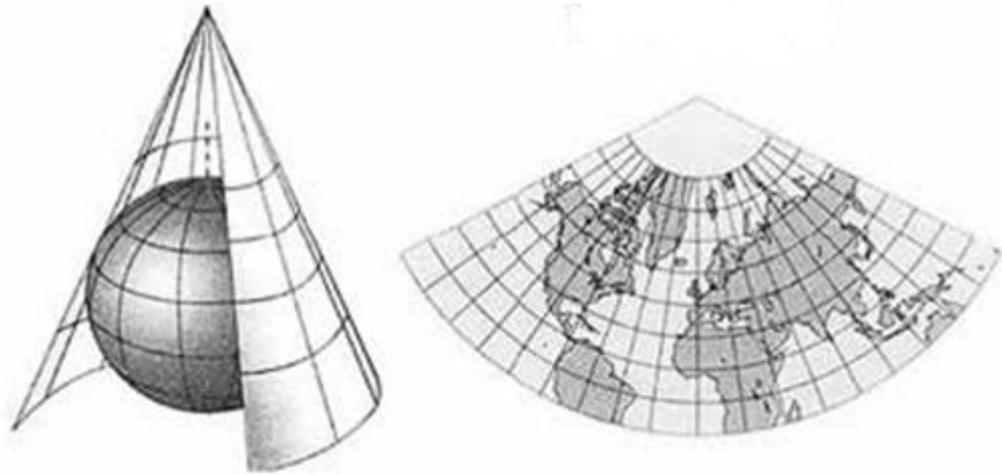


Figura 4.8: Projeção da esfera no cone.

4.4.3 Projeção Planar

Outra modalidade de desenvolvimento que se manifesta exequível é através de um plano. A Figura 4.9 ilustra uma projeção plana polar, ou seja, o plano é tangente à esfera no polo. Em consequência, todas as linhas traçadas na esfera são projetadas no plano, partidas de um certo ponto.

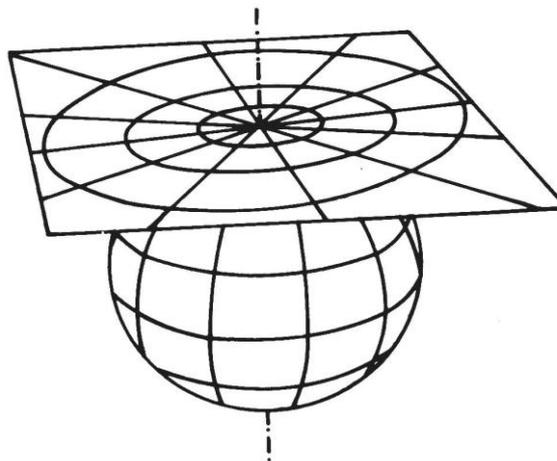


Figura 4.9: Projeção da esfera no plano.

As principais características dessa projeção são:

- O polo é projetado no centro do plano;
- Os paralelos são arcos de círculos concêntricos, ou seja, possuem o mesmo centro;

- Os meridianos, partindo do polo, são linhas retas;
- A medida que se afastam da superfície de tangência (o polo), não conservam as linhas e as proporções existentes na esfera. Ao contrário, tanto o espaçamento quanto as dimensões dos paralelos e meridianos crescem infinitamente.

Nos três tipos de projeção de linhas e pontos da esfera numa superfície plana ou numa superfície planificável, ficam evidentes as anormalidades que dificultam a questão essencial em cartografia, que é a precisão métrica da representação de detalhes topográficos⁴.

Qualquer uma das formas de projeção de linhas ou de pontos de uma esfera num plano ou numa superfície planificável provoca alterações em várias características métricas originais. Ou seja, para Oliveira, "..., não existe nenhuma projeção que elimine todos os tipos de deformações advindas da transformação da esfera num plano". Esse é o principal problema encontrado pelos cartógrafos, visto que a precisão métrica da representação de detalhes topográficos é essencial para eles.

O ideal seria construir uma carta que reunisse todas as propriedades, representando uma superfície rigorosamente semelhante à superfície da Terra. Esta carta deveria possuir as seguintes propriedades:

- 1 – Manutenção da verdadeira forma das áreas a serem representadas (conformidade).
- 2 – Inalterabilidade das áreas (equivalência).
- 3 – Constância das relações entre as distâncias dos pontos representados e as distâncias dos seus correspondentes (equidistância). (Manual Técnico, IBGE, p.30)

Cada uma das modalidades existentes para planificação aproximada da esfera preserva melhor uma ou outra característica intrínseca da mesma. Diante disso, o que cabe aos estudiosos da área é escolher, dentre todas as possibilidades de planificação (aproximada) da esfera, qual delas melhor atende seus objetivos, minimizando assim os prejuízos nas informações sobre o que se quer representar.

Outras tentativas foram e continuam a ser feitas com o intuito de criar tipos de projeção que possam suprimir ou minimizar deformações. Mas, o fato é que, ao se conseguir

⁴ A topografia é a ciência que estuda todos os acidentes geográficos definindo a sua situação e localização na Terra ou outros corpos astronômicos incluindo planetas, luas, e asteroides. É ainda o estudo dos princípios e métodos necessários para a descrição e representação das superfícies destes corpos, em especial para a sua cartografia. Tem a importância de determinar analiticamente as medidas de área e perímetro, localização, orientação, variações no relevo, etc e ainda representá-las graficamente em cartas (ou plantas) topográficas.

eliminar uma anormalidade e chegar a obter um tipo de projeção totalmente livre duma determinada inconveniência, surgirão, de forma automática, outros defeitos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mostramos, através de alguns trabalhos já realizados, que o processo de planificação de uma superfície, comumente abordado nas aulas de Geometria, bem como em várias situações cotidianas, contribui para o desenvolvimento de algumas habilidades e também facilita o estudo das figuras geométricas tridimensionais. Aprofundando nossos estudos sobre essa questão, fizemos uso de ferramentas matemáticas no intuito de mostrar, de maneira formal, quando esse processo pode ser executado.

Utilizamos basicamente a Primeira Forma Fundamental, que é uma representação algébrica da superfície, como parâmetro de comparação entre as superfícies estudadas e o plano, pois dessa forma tornamos o trabalho mais compatível com nossos objetivos. Além disso, características intrínsecas da superfície tais como comprimentos, ângulos e área, também puderam ser obtidas através dela.

No capítulo sobre cartografia, foi possível ter uma noção das perdas existentes na tentativa de se planificar uma superfície não planificável.

Vale ressaltar que, o processo de verificação da possibilidade de planificação de uma superfície pode ser feito levando-se em consideração outras características da mesma. A Segunda Forma Quadrática, por exemplo, poderia ser utilizada como ferramenta para a mesma tarefa, destacando outras características das superfícies, como torção, orientação e curvatura.

REFERÊNCIAS

- LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *In* Educação Matemática em Revista – SBEM 4, 1995, p. 3-13.
- MOCROSKY, Luciane Ferreira. O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL: ALGUNS ASPECTOS DA SUA ORIGEM NOS LIVROS DIDÁTICOS BRASILEIROS. Artigo. Ponta Grossa – PR. 2012.
- PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino da Geometria: Uma Visão Histórica. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, 1989. Dissertação de Mestrado.
- BECKER, Marcelo. Uma Alternativa para o Ensino da Geometria: Visualização Geométrica e Representações de Sólidos no Plano. Dissertação de Mestrado. UFRGS. Porto Alegre, 2009.
- PEREIRA, M.R. de O. A Geometria Escolar: Uma Análise dos Estudos Sobre o Abandono de Seu Ensino. PUC. São Paulo, 2001. Dissertação de Mestrado.
- GARCIA, L.M.I. A Visualização e a Representação Geométrica de Conceitos Matemáticos e Suas Influências na Constituição do Conceito Matemático. IGCE/UNESP. Rio Claro, 2006. Artigo.
- CARVALHO, Paulo C. P. : Introdução à Geometria Espacial. 1 ed. Editora SBM. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 1993.
- COSTA, Acylena Coelho. Análise do Ensino de Geometria Espacial. Artigo. Universidade do Estado do Pará. Ijuí – RS, 2009.
- BULLA, Oswaldo. GERÔNIMO, João Roberto. Conceitos por meio de planificação e construção de poliedros, 2007.
- CARVALHO, Marlene Lima de Oliveira. Produção e Leitura de Desenhos Geométricos Tridimensionais: Atividades Envolvendo o Uso de Materiais Manuseáveis e Recursos Informáticos.
- ARAÚJO, Paulo Ventura. Geometria Diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. Coleção Matemática Aplicada. Rio de Janeiro, 1998.
- CARMO, M. P. do: Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 5 ed. Editora SBM. Coleção Textos Universitários. Rio de Janeiro, 2005.
- TENENBLAT, Ketí: Introdução à Geometria Diferencial. Editora UNB. Brasília, 1988.
- CARDOSO, Cilene Estol (2009): Desenvolvimento de um método de controle de distorções para aplicação em um problema de design de superfícies de formas tridimensionais não planificáveis. Dissertação de mestrado. UFRS, Porto Alegre, 2009.
- LEITE, E. J. F.: Planificação de Superfícies e Confecção de Mapas. Artigo. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, 2011.
- OLIVEIRA, Cêurio de: Curso de Cartografia Moderna. Rio de Janeiro: IBGE, 1998.

Manuais Técnicos em Geociência, número 8. Noções Básicas de Cartografia. Departamento de Cartografia. – Rio de Janeiro: IBGE, 199.