Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

VALORES INTEIROS DE FUNÇÕES GERADORAS DE SEQUÊNCIAS RECORRENTES: OS RESULTADOS DE FIBONACCI E LUCAS

Wendell Fernandes Ribeiro

Goiânia

2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: [X] Dissertação [ ] Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Wendell Fernandes Ribeiro

Título do trabalho: Valores Inteiros de Funções Geradoras de Sequências Recorrentes: Os Resultados de Fibonacci e Lucas

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Wendell Fernandes Ribeiro

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 08 / 11 / 19

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Wendell Fernandes Ribeiro

VALORES INTEIROS DE FUNÇÕES GERADORAS DE SEQUÊNCIAS RECORRENTES: OS RESULTADOS DE FIBONACCI E LUCAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.

Goiânia

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Fernandes Ribeiro, Wendell
VALORES INTEIROS DE FUNÇÕES GERADORAS DE SEQUÊNCIAS RECORRENTES: OS RESULTADOS DE FIBONACCI E LUCAS [manuscrito] / Wendell Fernandes Ribeiro. - 2019.
vi, 64 f.

Orientador: Prof. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2019.

Inclui lista de figuras.

1. Combinatória. 2. Funções Geradoras . 3. Recorrências. I. , Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 07 da sessão de Defesa de Dissertação de Wendell Fernandes Ribeiro, que confere o título de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Rede PROFMAT.

Aos onze dias do mês de outubro do ano de dois mil e dezenove, a partir das 14 **hora**, na **sala** do LEMAT do IME/UFG, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Valores Inteiros de funções geradoras de sequências recorrentes: Os resultados de Fibonacci e Lucas."** Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues (IME-UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos (IME-UFG) e membro titular externo; Daiane Soares Veras (IFG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos onze dias do mês de novembro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Daiane Soares Veras**, **Usuário Externo**, em 21/10/2019, às 14:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Paulo Henrique De Azevedo Rodrigues**, **Professor do Magistério Superior**, em 22/10/2019, às 11:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Fabiano Fortunato Teixeira Dos Santos**, **Professor do Magistério Superior**, em 22/10/2019, às 12:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0940050** e o código CRC **05183A0F**.

Referência: Processo nº 23070.035421/2019-41 SEI nº 0940050

Wendell Fernandes Ribeiro graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Pontífice Universidade Católica de Goiás (PUC-GO) em 2008; especializou-se em Docência no Ensino Superior pela Faculdade Brasil (FABEC); atualmente é professor do Ensino Básico no Colégio Progressivo e no Colégio Prevest ambos localizados em Goiânia-GO.

Dedico este trabalho a minha esposa, Tânia, que de forma muito especial e carinhosa deu-me força e coragem, apoiando-me nos momentos de dificuldades. Ao meu filho, Felipe, que embora não tenha conhecimento disto, iluminou toda essa caminhada. E, não deixando de ressaltar, de forma muito grata aos meus pais, Divino Francisco e Delvina Laurinda, a quem eu rogo todos os dias a minha existência.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.
Agradeço a minha família pelo apoio e carinho.
Agradeço a minha esposa pela paciência, pelo carinho e pela compreensão.
Agradeço ao Prof Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues pela dedicação, competência e paciência na orientação deste trabalho.
Agradeço a todos os professores, funcionários e colegas do IME, em especial, a turma do Profmat-2017.

Resumo

Este trabalho, tem como objetivo apresentar alguns problemas combinatórios e de recorrências que podem ser solucionados utilizando as Funções Geradoras; mostrar também uma interpretação para a Sequência de Fibonacci e para a Sucessão de Lucas utilizando esses conceitos, bem como, as condições para que essas funções resultem em um número inteiro. E por fim, ressaltar que este estudo pode contribuir para futuras pesquisas tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

Palavras-chave

Combinatória. Funções Geradoras. Recorrências.

Abstract

This paper aims to present some combinatorial and recurrence problems that can be solved using the Generator Functions; also show an interpretation for the Fibonacci Sequence and the Lucas Succession using these concepts, as well as the conditions for these functions to result in an integer. Finally, it should be noted that this study may contribute to future research in both Basic and Higher Education.

Keywords

Combinatorial. Generating Functions. Recurrences.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A matemática tem como principal objetivo proporcionar ao homem a capacidade de resolver problemas. Construir e demonstrar teoremas é antes de mais nada descobrir novos conhecimentos por meio de uma análise profunda de dados e padrões estudados. A Análise Combinatória por exemplo, que é um conhecimento matemático bastante presente na Educação Básica, em especial, no Ensino Médio, necessita de ferramentas e técnicas diferentes para resolver problemas de contagem. Sobre o estudo de Recorrências, notavelmente existem sequências numéricas que ao longo da história da matemática apresentaram e apresentam até hoje um certo fascínio por exemplo, a Sequência de Fibonacci e a Sucessão de Lucas

Neste trabalho faremos uma introdução à Análise Combinatória e ao estudo de Recorrências com o objetivo principal de relacionar esses dois conhecimentos às Funções Geradoras para obtermos um importante resultado referente a Sequência de Fibonacci e a Sucessão de Lucas. Para isso, percorremos o seguinte caminho: no primeiro capítulo apresentaremos alguns métodos tradicionais de solucionar problemas de contagem do Ensino Médio; no segundo capitulo vamos mostrar a caracterização de algumas funções geradoras que resolvem certos problemas combinatórios, identificando em que condições cada método pode ser utilizado; no terceiro capítulo vamos fazer uma breve introdução ao estudo de recorrências, bem como, apresentar os métodos de resolver as sequências recorrentes de primeira e de segunda ordem, nos casos de homogêneas e não-homogêneas, e ainda, vamos apresentar as sequências de Fibonacci e Lucas; por fim, no quarto capítulo, demonstraremos para quais valores racionais as funções geradoras da Sequência de Fibonacci e da Sucessão de Lucas resultam em um número inteiro.

Entendemos que os conhecimentos aqui mencionados serão de extrema importância para futuras abordagens tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

Capítulo 1

Análise Combinatória

A Análise Combinatória é um conhecimento matemático que permite desenvolver métodos de contar o número de elementos de um conjunto, sendo esses agrupados sob certas condições. À primeira vista pode parecer desnecessária a existência e utilização desses métodos. Isso é verdade, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, alguns exemplos podem se tornar gradualmente mais complexos por possuírem uma maior quantidade de elementos a serem contados, e sem o uso de técnicas especiais pode tornar-se algo extremamente trabalhoso.

Nosso objetivo neste capítulo, é mostrar em que condições esses métodos podem ser utilizados e como são ferramentas importantes para resolver diversos problemas de contagem.

1.1 Princípio Multiplicativo

A multiplicação é utilizada como base de um raciocínio muito importante em problemas de contagem. O Princípio Multiplicativo se constitui como uma das várias ferramentas básicas para resolver alguns desses problemas, desde que, não haja necessidade de enumerar seus elementos, como veremos a seguir.

Definição 1.1.1. *Se um evento A pode ocorrer de p maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas p maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de q maneiras diferentes, em que, A e B são eventos independentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido de B é $p \cdot q$.*

Exemplo 1.1.1. *Numa confeitaria, há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Lúcia só tenha permissão para chupar um picolé e comer um salgado. De quantas maneiras diferentes ela poderá fazer seu pedido?*

Seja $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ e $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. Temos que:

$\{S_1$ e P_1; S_2 e P_1; S_3 e P_1; S_1 e P_2; S_2 e P_2; S_3 e P_2; S_1 e P_3; S_2 e P_3; S_3 e P_3; S_1 e P_4; S_2 e P_4; S_3 e P_4; S_1 e P_5; S_2 e P_5; S_3 e $P_5\}$.

Nesse exemplo, O evento A é escolher o sabor do picolé e o evento B, é escolher o sabor do salgado. Seja p o número de sabores de picolés e q o número de sabores de salgados, então, pelo Princípio Multiplicativo, $p \cdot q = 5 \cdot 3 = 15$.

E portanto, há 15 maneiras diferentes de Lúcia fazer seu pedido.

O Princípio Multiplicativo é também conhecido como **Princípio Fundamental da Contagem** (PFC) e o mesmo pode ser estendido para um número finito qualquer de conjuntos, conforme a próxima seção.

1.2 Extensão do Princípio Multiplicativo

Nesta seção, vamos generalizar o Princípio Multiplicativo para os problemas que possuem três ou mais eventos.

Definição 1.2.1. *Se um evento A_i pode ocorrer de p_i maneiras diferentes e independentes, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão de, $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ maneiras diferentes.*

Exemplo 1.2.1. *Cada uma das placas das bicicletas de Quixajuba contém três letras. A primeira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto A = {G, H, L, P, R}, a segunda letra é escolhida dentre os elementos do conjunto B = {M, I, O} e a terceira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto C = {D, U, N, T}. Devido ao aumento no número de bicicletas da cidade, teve-se que expandir a quantidade de possibilidades de placas. Ficou determinado acrescentar duas novas letras a apenas um dos conjuntos ou uma letra nova a dois conjuntos. Qual o maior número de novas placas que podem ser feitos, quando se acrescentam as duas novas letras?*

Inicialmente, é possível fazer o emplacamento de $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ bicicletas. Agora, vamos analisar duas situações possíveis:

Aumentando-se duas letras, uma em cada conjunto, temos

$A \cdot B \cdot C$	Número de placas
$7 \cdot 3 \cdot 4$	84
$5 \cdot 5 \cdot 4$	100
$5 \cdot 3 \cdot 6$	90

Agora, aumentando-se uma letra nova a dois conjuntos, temos

$A \cdot B \cdot C$	Número de placas
$6 \cdot 4 \cdot 4$	96
$6 \cdot 3 \cdot 5$	90
$5 \cdot 4 \cdot 5$	100

Assim, com a modificação mostrada, o número de novas placas é dado pela diferença 100 - 60 = 40.

Exemplo 1.2.2. *Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de Matemática, 7 livros diferentes de Física e 10 livros diferentes de Química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?*

Posso fazer as seguintes escolhas:
(a) Matemática e Física: $5 \cdot 7 = 35$ maneiras;
(b) Matemática e Química: $5 \cdot 10 = 50$ maneiras;
(c) Física e Química: $7 \cdot 10 = 70$ maneiras.

Como as minhas escolhas só podem ocorrer dentre uma das possibilidades (a), (b) ou (c), então, $35 + 50 + 70 = 155$ é o número de maneiras diferentes de fazer estas escolhas.

Na resolução de problemas de contagem por meio do Princípio Multiplicativo é comum, aparecerem multiplicações envolvendo números naturais consecutivos. Sobre estes casos, a próxima seção trará importantes resultados dentro desse contexto.

1.3 Fatorial

Muitas vezes é possível escrever certas multiplicações de forma mais resumida, em especial as que envolvem números naturais consecutivos. Para isso, vamos apresentar o fatorial de um número natural, que será útil na contagem de agrupamentos que serão neste trabalho apresentados.

Definição 1.3.1. *Seja n um número inteiro não negativo ($n \in \mathbb{N}$). Definimos fatorial de n (e indicamos por $n!$) por meio das relações:*
i) $0! = 0$;
ii) $1! = 1$;
iii) $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ *para* $n \geq 2$.

Exemplo 1.3.1. *Simplifique as expressões:*

a) $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90.$

b) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} = \dfrac{1}{(n+1) \cdot n} = \dfrac{1}{n^2+n}$

Exemplo 1.3.2. *Quantos números de 4 algarismo podemos formar com os dígitos 4, 5, 6 e 7?*

Seja P_1 a posição das unidades, P_2 a posição das dezenas, P_3 a posição das centenas e ainda, P_4 a posição das unidades de milhar. Teremos uma quantidade de números de 4 algarismos quantas forem as maneiras de preenchermos essas 4 posições. A posição P_1 pode ser preenchida de 4 maneiras diferentes. Preenchida P_1, a posição P_2 pode ser preenchida de 3 maneiras diferentes, analogamente, P_3 poderá ser preenchida de 2 maneiras diferentes, restando 1 maneira para preencher a posição P_4. Assim, pelo Princípio Multiplicativo e por definição de Fatorial, temos

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

E portanto, podemos formar 24 números diferentes com os dígitos 4, 5, 6 e 7.

Vamos estudar a seguir maneiras diferentes de formar um agrupamento e, por meio do Princípio Multiplicativo, desenvolver métodos de contagem para cada tipo de agrupamento.

1.4 Permutações Simples

No problema anterior, vimos que o resultado é igual a 4!. Nesse caso, podemos dizer que houve uma **permutação** dos 4 dígitos. Desta forma, nesta seção vamos formalizar tal conceito.

Definição 1.4.1. *Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número de permutações simples dos n objetos, então $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$.*

A expressão acima define o seguinte problema: De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

Note que a escolha do objeto que ocupa a primeira posição pode ser feita de n maneiras; já a segunda posição pode ser ocupada de $n-1$ modos; a escolha do objeto que ocupa a terceira posição pode ser feita de $n-2$ maneiras, e assim sucessivamente, até que a escolha do objeto que ocupa a última posição, que pode ser feita de 1 modo.

Exemplo 1.4.1. *Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados?*

Para números de 3 algarismos, podemos considerar que temos 3 posições para serem preenchidas; a posição da centenas (P_1), a posição das dezenas (P_2) e a posição das unidades (P_3). A posição P_1 pode ser preenchida de 5 maneiras; a posição P_2 pode ser preenchida de 4 maneiras; e a posição P_3 pode ser preenchida de 3 maneiras.

Portanto, tem-se $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números de 3 algarismos diferentes formados com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5.

Exemplo 1.4.2. *Quatro pessoas estão sentadas num banco de uma praça, sendo um fumante e três não fumantes. Considerando que o fumante ficou sempre sentado numa das extremidades, qual é o número de ordenações possíveis?*

Podemos dividir a solução desse problema em dois casos:
Caso 1: Se o fumante ficar na extremidade esquerda, temos: $1 \cdot 3! = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_3 = 6$ ordenações.
Caso 2: Se o fumante ficar na extremidade direita, temos: $1 \cdot 3! = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_3 = 6$ ordenações.

Portanto, são $6 + 6 = 12$ ordenações possíveis.

Diferente do que foi feito até aqui, na próxima seção além de contar o número de maneiras diferentes que podemos organizar n objetos em fila, nossa preocupação será também quando a ordem desses objetos nessa fila for importante, ou seja, quando essa ordem altera a natureza do problema.

1.5 Arranjos Simples

Definição 1.5.1. *Chamamos de Arranjos Simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geqslant 1$ e p é um número natural tal que $p \leqslant n$, todos os agrupamentos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada agrupamento, e é indicado por: A_n^p.*

Partindo do Princípio Multiplicativo, vamos determinar uma expressão matemática que caraterize A_n^p.

Temos n elementos dos quais queremos tomar p. Este é um problema equivalente a termos n objetos com os quais queremos preencher p lugares. Vejamos: No caso em que $n = p$, temos $A_n^n = P_n = n!$, já estudado. No caso que $n > p$, temos as seguintes situações:
- O primeiro lugar pode ser escolhido de n maneiras diferentes.
- O segundo lugar pode ser escolhido de $(n-1)$ maneiras distintas já que o primeiro foi escolhido e não há repetição.

• Para o terceiro lugar pode ser escolhido de $(n-2)$ maneiras diferentes, pois não há repetição.
• Para o p-ésimo lugar, teremos $(n-(p-1)) = n-p+1$ maneiras diferentes de escolher os p lugares a serem preenchidos, escolhidos os $(p-1)$ lugares anteriores. Assim, pelo PFC, temos:

$$A_n^p = n.(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdots(n-p+1).$$

Multiplicando o segundo membro da igualdade por $\dfrac{(n-p)!}{(n-p)!}$, obtemos:

$$\begin{aligned} A_n^p &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-p+1)\cdot\frac{(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-p+1)\cdot(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.5.1. *Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listras, cada listra com uma cor. De quantas formas isso pode acontecer?*

Cada maneira de pintar a bandeira consiste de uma sequência de cinco cores distintas (sequência, porque as listras da bandeira estão numa ordem) escolhidas entre oito existentes. Logo, o número de sequências procurado é:

$$A_8^5 = \frac{(8!)}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720.$$

Portanto, pode-se pintar essa bandeira de 6720 formas diferentes.

Exemplo 1.5.2. *Existem 10 cadeiras enumeradas de 1 a 10. De quantas maneiras duas pessoas podem se sentar, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas?*

Inicialmente podemos notar que cada maneira delas se sentarem corresponde a um par ordenado de números naturais distintos de 1 a 10. Por exemplo, $(2,6)$ significa que a pessoa A se senta na cadeira 2 e a pessoa B se senta na cadeira 6. Assim, vamos calcular inicialmente o total de pares ordenados possíveis.

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 10\cdot 9 = 90.$$

Agora, vamos excluir os pares ordenados cujos elementos sejam números consecutivos. São eles:
$(1,2);(2,3);...;(9,10)$, 9 pares.
$(2,1);(3,2);...;(10,9)$, 9 pares.
Num total de $9+9=18$ pares a serem excluídos.

Logo, o número de maneiras dessas duas pessoas se sentarem, havendo ao menos uma cadeira entre elas é 90 - 18 = 72.

A seguir, iremos contar os elementos de um conjunto sem se preocupar em que ordem estes estão dispostos.

1.6 Combinações Simples

Nesta seção vamos tratar de analisar os subconjuntos de um conjunto, em que a ordem dos elementos é irrelevante, ou seja, vamos considerar os agrupamentos distintos que diferem entre si apenas pela natureza dos elementos.

Definição 1.6.1. *Combinação Simples de n elementos tomados p a p, onde $p \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Ou seja, são os subconjuntos de p elementos que podemos formar com n elementos dados. Notação: C_n^p.*

Vimos que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é igual ao número de maneiras de escolher p lugares com n elementos disponíveis. Isso nada mais é que o número de agrupamentos que se diferenciam entre si pela natureza e pela ordem de colocação dos elementos no agrupamento, ou seja, importa quem participa e o lugar que ocupa.

Já quando consideramos combinações simples de n elementos tomados p a p, temos agrupamentos de p elementos, tomados dentre os n elementos disponíveis, que diferem apenas pela natureza dos elementos, ou seja, somente quem participa do grupo independente do lugar que ocupa.

Dessa forma um arranjo simples de n elementos tomados p a p pode ser calculado a partir de uma escolha de determinados elementos, considerando-se para cada escolha feita a permutação entre si desses elementos entre os n disponíveis, ou seja:

$$A_n^p = p! \cdot C_n^p,$$

logo, $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Assim sendo, temos que: $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} \cdot \dfrac{1}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. E portanto,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 1.6.1. *Uma prova consta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas maneiras ele poderá escolher as 10 questões?*

Percebemos que nesse problema a ordem em que o aluno escolherá as 10 questões não interessa. Logo, cada maneira de escolher 10 questões é uma combinação da 15 questões, tomadas 10 a 10, isto é:

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{15!}{10!5!} = 3003.$$

Exemplo 1.6.2. *De quantas maneiras podemos escolher 4 cartas de um baralho, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei?*

Não levando em conta a ordem das cartas, cada escolha é uma combinação. O número total de combinações é $C_{52}^4 = \binom{52}{4}$. O número de combinações em que o rei não está presente é $C_{48}^4 = \binom{48}{4}$. Logo, temos que o número de combinações em que o rei está presente é:

$$C_{52}^4 - C_{48}^4 = 76145.$$

Portanto, há 76145 maneiras de escolher 4 cartas de um baralho de modo que haja pelo menos um rei.

Ainda sobre o cálculo do número de combinações, existem os casos em que o número de maneiras de escolhermos p é igual ao número de maneiras de escolhermos $n-p$ objetos.

1.7 Combinações Complementares

Considere o seguinte problema: De quantas maneiras podemos escolher 4 pessoas num grupo de 6 pessoas? E 2 pessoas?

Pelo que foi visto na seção anterior, o número de maneiras de escolhermos 4 pessoas num grupo de 6 é uma combinação simples de 6 elementos tomados 4 a 4, ou seja: $C_6^4 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = 15$ maneiras. Porém, o número de maneiras de escolhermos 2 pessoas num grupo de 6 pessoas é dado por: $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = 15$ maneiras. Desta forma, escolher 4 pessoas num grupo de 6 é equivalente a escolher 2 pessoas num grupo de 6. Dizemos então, que C_6^4 e C_6^2 são complementares.

Definição 1.7.1. *Considere n elementos distintos. O número de maneiras de escolhermos p elementos é idêntico ao número de maneiras de escolhermos $(n-p)$ elementos, isto se dá porque se dos n elementos escolhermos p, sobram $(n-p)$ dos n elementos. Logo, $C_n^p = C_n^{n-p}$, onde C_n^{n-p} denomina-se combinação complementar de C_n^p.*

Exemplo 1.7.1. *De quantas maneiras podemos arrumar em fila 5 sinais (+) e 7 sinais de (-)?*

Basta pensarmos em 12 lugares para serem preenchidos com 5 sinais (+) e 7 sinais de $(-)$. Neste caso, escolher 5 lugares dentre os 12 para colocarmos os sinais de (+) e nos que sobrarem colocarmos 7 sinais $(-)$ é equivalente a escolher 7 lugares para os sinais $(-)$ e nos que sobrarem colocarmos 5 sinais de (+), ou seja:

$$C_{12}^5 = C_{12}^7 = \frac{12!}{5!7!} = 792.$$

Portanto, há 792 maneiras de arrumarmos em fila 5 sinais (+) e 7 sinais de (-).

Até aqui, tratamos de abordar as combinações simples das quais os elementos repetidos não são permitidos. No entanto, existem certos problemas envolvendo combinação que isso precisa ser feito.

1.8 Combinações com Repetição

Nesta seção, vamos analisar as definições anteriores para o caso em que repetições de elementos são permitidos. Em especial, contar o número de soluções inteiras de uma equação linear com coeficientes unitários, ou seja, contar o número de soluções inteiras de uma equação da forma $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$ em que n .

Exemplo 1.8.1. *Quantas são as soluções inteiras e não - negativas da equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p?$$

A resposta deste problema é representada por CR_n^p, que é o número total de maneiras de selecionar p objetos dentre n objetos distintos, em que cada um pode ser tomado até p vezes. Por exemplo; denotando por $\{N_1, N_2, ..., N_n\}$ os n objetos distintos podemos tomar x_i vezes o objeto n_i, com $i = 1, 2, ..., n$ e $0 \leqslant x_i \leqslant p$ de forma que $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n = p$.

O valor de CR_n^p é obtido sendo a permutação de p sinais de $+$ e $(n-1)$ símbolos de $|$; ou seja, precisamos de $(n-1)$ barras para dividir p sinais de $+$ em n partes.

$++ \mid +++\cdots+ \mid +\cdots \mid \cdots \mid \cdots$

Por exemplo, para equação $x + y + z = 5$, as soluções (2,2,1) e (5,0,0) seriam representadas por $++ \mid ++ \mid +$ e $+++++ \mid\mid$, respectivamente.

Assim, para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila com $(n-1)$ símbolos $|$ e p sinais de $+$. Mas para formar uma fila com $(n-1)$ símbolos $|$ e p sinais de $+$, basta escolher dos $n + p - 1$ lugares na fila os p lugares onde serão colocados os sinais de $+$, o que pode ser feito de C_{n+p-1}^p modos.

Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)! \cdot p!}$.

Exemplo 1.8.2. *Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: guaraná, soda e tônica. De quantas maneiras uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerantes?*

Seja:
x_1 o número de garrafas de refrigerantes de guaraná.
x_2 o número de garrafas de refrigerantes de soda.
x_3 o número de garrafas de refrigerantes de tônica.

É fácil ver que o problema equivale a descobrir o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, sendo que cada $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ com $i = 1, 2, 3$ representa o número de garrafas de refrigerantes de cada tipo. Logo, temos que:

$$CR_3^5 = C_{3+5-1}^5 = \frac{(3+5-1)!}{(3-1)! \cdot 5!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21.$$

Portanto, há 21 maneiras de uma pessoa comprar 5 garrafas de refrigerantes nesse bar.

Exemplo 1.8.3. *Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z \leqslant 4$?*

Para resolvermos a inequação $x + y + z \leqslant 4$, basta encontramos o número de soluções inteiras positivas das seguintes equações:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x + y + z &= 3 \\ x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

As soluções das equações acima são dadas, respectivamente, por: $C_3^1 = 3$, $C_4^2 = 6$, $C_5^3 = 10$ e $C_6^4 = 15$. Assim, o número procurado é dado pela soma: $3 + 6 + 10 + 15 = 34$.

Portanto, são 34 soluções inteiras positivas da equação $x + y + z \leqslant 4$.

Exemplo 1.8.4. *De quantas maneiras podemos distribuir 7 balinhas iguais para 3 crianças sabendo que, cada criança recebe pelo menos uma balinha?*

Resolver este problema é equivalente a encontrar as soluções positivas da equação $x + y + z = 7$ em que, x, y e z é o número de balinhas que cada criança irá receber. Mas C_3^7 conta o número de soluções não-negativas isto é, $x, y, z \geqslant 0$. Como queremos somente as soluções positivas, façamos a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned} x &= a + 1, \\ y &= b + 1, \\ z &= c + 1. \end{aligned}$$

Assim, obtemos: $a+1+b+1+c+1=7 \Leftrightarrow a+b+c=4$.

A mudança de variável nos mostra que as soluções inteiras não-negativas da equação $a+b+c=4$, equivalem a uma única solução de inteiros positivos da equação $x+y+z=7$. Tal mudança nos garante que $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$. Então:

$$CR_4^3 = C_{4+3-1}^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

Portanto, existem 15 maneiras de distribuir as 7 balinhas iguais para 3 crianças, de modo que cada criança receba pelo menos uma balinha.

Na próxima seção vamos considerar os casos em que podemos selecionar objetos idênticos dentre n objetos.

1.9 Permutações com Repetição

Vimos anteriormente que permutações simples de n elementos, determina o número de maneiras que existem para colocar em fila n elementos distintos. Como consequência, esse número é igual a $n!$.

Agora, consideremos dentre os n elementos existem n_1 iguais a a_1, n_2 iguais a a_2, ..., n_r iguais a a_r. Ou seja, precisamos escolher n_1 lugares para colocação dos a_1's, dos $n-n_1$ lugares restantes, escolher n_2 lugares para colocações dos a_2's lugares e assim por diante, obtendo:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}^{n_r} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-\cdots-n_{r-1})!}{n_r!(n-\cdots-n_r)!},$$

Como $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ o que implica que $(n-n_1-\cdots-n_r)!=0!$ e daí,

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}.$$

Note que é possível abordar o problema de encontrar o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1+x_2+...+x_n=p$ do ponto de vista da permutação com repetição. De fato, isto equivale a dispormos, $(n-1)$ símbolos $|$ e p sinais de $+$. Logo teremos $(n+p-1)$ elementos com p elementos iguais a $+$ e $(n-1)$ elementos iguais $|$. Ou seja:

$$\frac{(n+p-1)!}{p! \cdot (n-1)!} = C_{n+p-1}^p.$$

Exemplo 1.9.1. *Se um time de futebol jogou 13 partidas em um campeonato, tendo perdido 5 jogos, empatado 2 e vencido 6 jogos, de quantos modos isto pode ter ocorrido?*

O problema acima é equivalente à distribuir 13 pessoas em 3 quartos a, b e c, com 5 pessoas em a, 2 pessoas em b e 6 pessoas em c.

Dessa forma, temos

$$P_{13}^{5,2,6} = \frac{13!}{5!2!6!} = 36036.$$

Assim, existem 36036 modos desse time ter perdido 5 jogos, empatado 2 e vencido 6.

Exemplo 1.9.2. *Quantas soluções inteiras não-negativas tem a equação $x+y+z+w = 6$?*

Para resolver esse problema, vamos usar para que não haja confusão o sinal de $+$ e o símbolo $|$. Ou seja, filas formadas pelos dois símbolos, por exemplo: $+ | + | + + + | +$, representa a solução (1, 1, 3, 1).

Assim, trata-se de uma permutação de 9 elementos com repetição de 6 símbolos $+$ e 3 sinais de $|$ idênticos. Ou seja,

$$P_9^{3,6} = \frac{9!}{3!6!} = 84.$$

Portanto, existem 84 soluções inteiras não-negativas para a equação $x + y + z + w = 6$.

Vimos neste capítulo, que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p conta todas as possíveis maneiras de se retirar num conjuntos de n elementos distintos p elementos levando em consideração a ordem desses elementos. Porém, veremos a seguir, o que ocorre quando ocorre uma vez que o primeiro elemento retirado for retirado de n maneiras, o segundo também de n maneiras, e assim por diante até que o p-ésimo elemento seja escolhido [7].

1.10 Arranjos com Repetição

O número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-3) \cdots (n-p+1).$$

No caso de elementos repetidos, o princípio multiplicativo nos diz que o número total de maneiras de se retirar, levando-se em conta a ordem, p desses elementos, distintos ou não, pode ser feito da seguinte maneira:

$$AR_n^p = n \cdot n \cdot n \cdots n = n^p.$$

Exemplo 1.10.1. *Qual o número total de placas de carro que podem ser confeccionadas por 7 símbolos, sendo os 3 primeiros constituídos por letras e os 4 últimos por dígitos?*

Considere o alfabeto com 26 letras, podemos escolher 3 dessas 26 letras de maneiras diferentes, ou seja, AR_{26}^{3} maneiras diferentes. Analogamente, podemos escolher 4 dígitos de um total de 10 existentes, AR_{10}^{4}. Logo, pelo Princípio Fundamental de Contagem (PFC), temos que:

$$AR_{26}^{3} \cdot AR_{10}^{4} = 175.760.000 \text{ placas possíveis.}$$

Todos os casos aqui mencionados, distribuímos em filas quaisquer n elementos. Porém, o que acontece quando esses n elementos são dispostos ao redor de um círculo?

1.11 Permutações Circulares

Pretendemos, nesta seção, contar o número de modos de se colocar n objetos distintos em torno de um círculo.

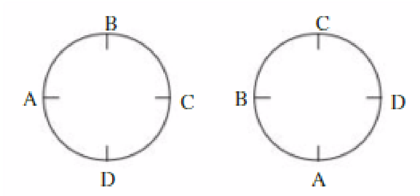

Figura 1.1: Permutação circular

Exemplo 1.11.1. *De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda de ciranda?*

À primeira vista parece que para formar um roda com as quatro crianças basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de $4! = 24$ modos. Neste caso o que importa é a posição relativa das crianças entre si, e portanto as rodas $BADC$, $CBAD$, $DCBA$ e $ADCB$ diferem apenas por rotações no sentido anti-horário e a nossa contagem de 24 rodas contou cada roda 4 vezes e, assim, a resposta correta para o problema é $\dfrac{24}{4} = 6$.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, de modo que as disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de Permutações Circulares de n objetos é

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

1.12 Binômio de Newton

Esta seção tem como principal objetivo usar as técnicas que apresentamos de Análise Combinatória para ter um importante resultado na Álgebra, que consiste em obter o desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$.

1.12.1 Coeficiente Binomial

Definição 1.12.1. *Dados dois números naturais, n e p, com $0 \leq p \leq n$, chamamos de coeficiente binomial de numerador n e classe p, todo número da forma:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p.$$

A seguir, vamos mostrar uma série de propriedades que são importantes para alguns dos resultados que iremos encontrar.

Propriedades:

• Binomiais Complementares

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Demonstração.

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

□

• Relação de Stifel

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!}+\frac{(n-1)!}{p\cdot(p-1)!(n-1-p)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n-p}+\frac{1}{p}\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\cdot\frac{n}{(n-p)\cdot p}\\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.12.1. *Calcule o valor da expressão:*

$$\binom{8}{6}+\binom{8}{5}.$$

Pela Relação de Stifel, temos que:

$$\binom{8}{6}+\binom{8}{5}=\binom{9}{6}=84.$$

Em seguida, vamos formalizar todos esses conceitos e definir o Binômio de Newton.

1.12.2 Desenvolvimento do Binômio de Newton

Denominamos *binômio* a qualquer expressão da forma $a+b$, isto é, a soma de dois símbolos distintos. Porém, estamos interessados no cálculo dos coeficientes das expansões de potências de $a+b$, ou seja, $(a+b)^n$ sendo n um número natural. Essa expressão denomina-se Binômio de Newton.

Para uma análise mais detalhada, vamos considerar o produto $(a+b)(c+d)(e+f)=ace+acf+adf+bce+bcf+bde+bdf$, que consiste de oito termos, em que cada termo consiste de três letras, cada uma selecionada de um dos binômios. Pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC), é claro que o número total de termos é $2^3=8$. Para o produto $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)$, temos um total de $2^4=16$ termos, cada uma consistindo de um produto de 4 letras, cada uma delas pertencendo a um dos 4 binômios considerados. Por exemplo, $acdf$ e $adeh$ são alguns dos 16 termos deste último produto.

Generalizando, para n binômios, temos 2^n termos.
Sendo n um número natural, vejamos algumas expansões do Binômio de Newton.

- $n = 0 \Rightarrow (a+b)^0 = 1$.
- $n = 1 \Rightarrow (a+b)^1 = a+b$.
- $n = 2 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $n = 3 \Rightarrow (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Para valores maiores que 3, o processo acima se torna muito trabalhoso. Desta forma, devemos recorrer à um método mais rápido.

Vejamos a expansão $(a+b)^6 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$.

Como se tem $2^6 = 64$ maneiras de selecionarmos 6 letras, uma de cada binômio, e como todos eles são iguais a $(a+b)$, teremos termos repetidos. Por exemplo, se tomarmos a letra a nos 4 primeiros e a letra b nos 2 últimos, teremos a^4b^2, que irá aparecer toda vez que a letra a for escolhida em exatamente 4 dos 6 binômios e a letra b nos 2 restantes. E isso pode ser feito de C_6^4 maneiras diferentes, concluímos que o termo a^4b^2 irá aparecer esse número de vezes, ou seja, o coeficiente de a^4b^2 é igual C_6^4.

De fato, pois: $C_6^4 = 15$ é o coeficiente de a^4b^2 na expansão

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

A fórmula do Binômio de Newton dá o desenvolvimento da expressão $(a+b)^n$. Para obtê-la basta multiplicar:

$$(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b).$$

Perceba que o termo genérico do produto acima é obtido pela potência p da segunda parcela, com $p = 0, 1, 2, 3, ..., n$, juntamente com a potência $n-p$ da primeira parcela. Como isso, o termo genérico do produto $C_n^p b^p a^{n-p}$ é

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n a^0 b^n.$$

Observe que o desenvolvimento binomial também é válido para a expansão $(a-b)^n$.

Exemplo 1.12.2. *Expandir o binômio* $(x+1)^5$.

$$\begin{aligned}(x+1)^5 &= C_5^0 x^5 1^0 + C_5^1 x^{5-1} 1^1 + C_5^2 x^{5-2} 1^2 + ... + C_5^5 x^0 1^5 \\ &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.\end{aligned}$$

Na seção seguinte, vamos apresentar uma maneira de obter o coeficiente desejado num Binômio de Newton.

1.12.3 Termo Geral do Binômio de Newton

Expandindo o Binômio de Newton, vimos que:

$$(a+b)^n = \underbrace{C_n^0 a^n b^0}_{T_1} + \underbrace{C_n^1 a^{n-1} b^1}_{T_2} + \underbrace{C_n^2 a^{n-2} b^2}_{T_3} + ... + \underbrace{C_n^p a^{n-p} b^p}_{T_p+1} + ... + \underbrace{C_n^n a^0 b^n}_{T_n+1}.$$

Exemplo 1.12.3. *Encontre o quarto termo da expansão* $(1+x)^8$.

Temos aqui, $a = 1$, $b = x$, $n = 8$ e $p + 1 = 4$, logo $p = 3$. Assim:

$$T_4 = T_{3+1} = C_8^3 1^3 x^{8-3} = 56x^5.$$

Exemplo 1.12.4. *Calcule o termo independente de x na expansão* $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$.

$$T_{p+1} = C_6^p x^{6-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p = C_6^p x^{6-2p}.$$

O termo independente de x é o coeficiente de x^0, isto é, quando $6 - 2p = p \Leftrightarrow p = 3$.

Logo, o termo independente é

$$\begin{aligned} T_{3+1} &= C_3^6 \\ T_4 &= \frac{6!}{3! \cdot 3!} \\ &= 20. \end{aligned}$$

1.12.4 O Triângulo Aritmético e o Triângulo de Pascal

Anteriormente, vimos algumas das expansões binomiais da forma $(a+b)^n$ para alguns valores de n. São eles:

$(a+b)^0 = 1.$

$(a+b)^1 = a + b.$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21^5b2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$

Os coeficientes das expansões anteriores quando organizadas formam um triângulo, conhecido como **triângulo aritmético**.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

O **Triângulo de Pascal** é um triângulo aritmético infinito onde são dispostos os coeficientes das expansões binominais. Vejamos:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Além disso, a soma de todos os elementos da n-ésima linha desse triângulo é dado por:

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Propriedades do Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal apresenta várias propriedades, algumas das quais permitem construí-lo sem a necessidade de se calcular todos os coeficientes binomiais.

Propriedade 1: Toda linha do triângulo começa e termina com 1.

Demonstração. O primeiro elemento de uma linha qualquer é $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e o último elemento dessa linha é $\binom{n!}{n!} = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Propriedade 2: Em uma mesma linha, os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

Demonstração. Sejam $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ dois coeficientes equidistantes dos extremos, na linha n do triângulo. Observe que $\binom{n}{p}$ é precedido de p termos: $\binom{n}{o}\binom{n}{1}...\binom{n}{p-1}$ e que $\binom{n}{n-p}$ é sucedido de p termos: $\binom{n}{n-p+1}\binom{n}{n-p+2}...\binom{n}{n}$. Assim:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{[n-(n-p)]!(n-p)!} = \binom{n}{n-p}.$$

□

Dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são os chamados **coeficientes binomiais complementares**.

Propriedade 3 (Relação de Stifel):

Pra finalizar, notamos que a partir da linha 2, cada elemento x (com exceção do primeiro e do último) é igual a soma de dois elementos consecutivos da linha anterior, a saber: o elemento imediatamente acima de x e anterior a este. Esta é na verdade a já vista, Relação de Stifel, cuja expressão é

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}, n \geqslant p.$$

Perceba que o primeiro membro da igualdade acima representa um elemento genérico (linha n e coluna p) do triângulo; o segundo membro representa a soma dos dois elementos da linha anterior (linha $n-1$), um da mesma coluna p e outro da coluna anterior, $p-1$.

Enfim, apresentados as técnicas e métodos tradicionais de resolver problemas de contagem, iremos mostrar outra importante ferramenta para resolver alguns desses problemas, as Funções Geradoras.

Capítulo 2

Funções Geradoras

O conceito das Funções Geradoras é mais uma importante ferramenta da matemática para resolver problemas certos problemas de Análise Combinatória. Esse conceito com origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754), tendo sido aplicado extensivamente por L. Euler (1707-1783) em problemas de teoria aditiva de números, especificamente na teoria de partições, foi muito usado por S. Laplace (1749-1827) no estudo de probabilidade. N. Bernoulli (1687-1759) também o utilizou no estudo de permutações caóticas [7].

Vimos anteriormente técnicas para resolver problemas combinatórios que nos permitem encontrar o número de soluções não-negativas de equações do tipo $x_1 + x_2 + ... + x_k = r$. Veremos agora como proceder nos casos em que existem restrições nas variáveis x_k's.

Exemplo 2.0.1. *Encontre o número de soluções inteiras da equação* $x_1 + x_2 + x_3 = 12$*, onde as variáveis* x_1 *e* x_2 *pertencem ao conjunto* $\{2, 3, 4\}$*, e a variável* x_3 *pertence ao conjunto* $\{5, 6, 7\}$.

Vamos definir três polinômios para cada variável x_k da seguinte forma:

$$p_1 = x^2 + x^3 + x^4;$$
$$p_2 = x^2 + x^3 + x^4;$$
$$p_3 = x^5 + x^6 + x^7.$$

Notemos que os expoentes de x em p_k são os elementos do conjunto ao qual x_k pertence. Estamos procurando números cuja soma é igual 12 e que cada um esteja em um conjunto cujos elementos são os expoentes dos polinômios p_1, p_2 e p_3. Consideremos então o produto $p(x) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$.

$$p(x) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = (x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4)(x^5 + x^6 + x^7).$$

O que vamos mostrar, aqui, é que a resposta desse problema será o coeficiente de x^{12} na expansão do produto $p(x)$. A equação $x_1+x_2+x_3=12$ possui 7 soluções inteiras com as restrições impostas. Uma solução por exemplo é, $x_1=3$, $x_2=2$ e $x_3=7$, que representa o termo dado pelo produto $x^3x^2x^7$. O termo $x^4x^3x^5$ nos fornece a solução $x_1=4$, $x_2=3$ e $x_3=5$. O que podemos verificar é que cada solução desse problema indica exatamente a maneira de se obter x^{12} na expansão do polinômio $p(x)$.

Expandindo $p(x)$, temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \\ &= (x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4)(x^5+x^6+x^7) \\ &= (x^2+x^3+x^4)^2(x^5+x^6+x^7) \\ &= x^9+3x^{10}+6x^{11}+7x^{12}+6x^{13}+3x^{14}+x^{15}. \end{aligned}$$

Portanto, o número de soluções inteiras da equação $x_1+x_2+x_3=12$ é igual a 7.

Agora fica fácil ver que o polinômio do problema anterior nos fornece também, a resposta para outros problemas. Por exemplo, o número de soluções da equação $x_1+x_2+x_3=14$, dadas as mesmas restrições para os x_k's é igual a 3.

Assim, podemos por meio da resolução anterior gerar o número de soluções inteiras dadas as mesmas restrições para a equação $x_1+x_2+x_3=m$ onde, $m \in \{9,10,11,12,13,14,15\}$.

Podemos, então, dizer que $p(x)$ é a função geradora que nos fornece as soluções da equação $x_1+x_2+x_3=m$.

2.1 Séries de Potências

Definição 2.1.1. *Uma série de potências é uma série infinita na forma* $a_0+a_1x+a_2x^2+$ $+a_3x^3+\cdots$*, onde* a_i*, para* $i=0,1,2,3,...$*, são números reais e* x *é uma variável.*

A definição diz que qualquer polinômio em x é uma série de potências. Por exemplo, o polinômio $5x+4x^3+x^4$ pode ser escrito como $0+5x+0x^2+4x^3+x^4+0x^5+0x^6+\cdots$. Uma série de potências depende de um parâmetro x e pode ser escrita da seguinte forma:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Definição 2.1.2. *Se a_r, para $r = 0, 1, 2, 3, ...$, é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots .$$

Como o número de maneiras de retirarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos, com $r \leq n$, é C_n^r, observamos então, que a função geradora para este problema é

$$f(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^rx^r + \cdots + C_n^nx^n,$$

que é equivalente a:

$$(1 + x)^n.$$

Exemplo 2.1.1. *De quantas maneiras podemos escolher 4 pessoas num grupo de 6 pessoas?*

Podemos perceber que se trata de um problema de combinação simples.

$$\binom{6}{4} = C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = 15.$$

No entanto, pode-se resolver este problema por meio da função geradora. Vejamos:

Seja $(1+x)$ o polinômio que representa a presença de uma pessoa dentro do grupo de 6 pessoas. Então, o desenvolvimento $(1 + x)^6$ nos dá o número de possibilidade de escolher quaisquer r $(0 \leqslant r \leqslant 6)$, pessoas dentro desse grupo. E como estamos interessados em escolher 4 nesse grupo de 6, ou seja, $n = 6$ e $r = 4$, temos que:

$$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$$

Portanto, pela definição de função geradora, o número de maneiras de escolher 4 pessoas em um grupo de 6, é igual a 15.

Exemplo 2.1.2. *Encontre a função geradora ordinária $f(x)$ na qual o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras positivas de*

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = r, \textit{ onde } r \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, \\ 2 \leq x_k \leq 4, \textit{ para } k = 1, 2, \\ 5 \leq x_3 \leq 7. \end{gathered}$$

Como já foi visto anteriormente nesta seção, a solução a_r para este problema é o coeficiente de x^r na expansão do produto

$$(x^2 + x^3 + x^4)^2(x^5 + x^6 + x^7) = x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x12 + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}.$$

Portanto, essa série de potências é a função geradora ordinária que procuramos.

Exemplo 2.1.3. *Encontre a função geradora ordinária $f(x)$ na qual o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras não-negativas da equação $2x + 3y + 7z = r$.*

Para este problema, basta tomarmos $x_1 = 2x$, $x_2 = 3y$ e $x_3 = 7z$, que teremos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = r.$$

Notemos que, x_1 é múltiplo de 2, x_2 é múltiplo de 3 e x_3 é múltiplo de 7. Dessa forma, a série de potências cujos expoentes são os possíveis valores de x_1, x_2 e x_3, respectivamente são

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots;$$
$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots;$$
$$1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + \cdots.$$

Dessa forma, a função geradora ordinária $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = (1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\cdots)(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+\cdots).$$

Continuando, o que estamos pretendendo fazer é utilizar séries de potências com o objetivo de encontrarmos o valor a_r do coeficiente de x^r que, como já foi visto, em muitos casos nos dá a resposta para um problema combinatório. Por este motivo, passaremos a estudar e analisar várias técnicas para o cálculo de coeficientes das funções geradoras.

2.2 Cálculo de Coeficientes das Funções Geradoras

Para se calcular o coeficiente da função geradora de uma série de potências, segue a definição:

Definição 2.2.1. *Se a_r é uma sequência numérica para $r = 0, 1, 2, 3, ...$, a função geradora dessa sequência é a seguinte série de potências:*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots .$$

Seja I um conjunto para o qual a função geradora converge para $f(x)$, se $x \in I$, então, $f(x)$ também será chamado de função geradora.

Teorema 2.2.1. *Seja* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, *dada uma série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, *temos que:*

(i) Se $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(ii) Se $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

(iii) Se $L = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

O teste da razão para série de potências nos mostra condições em x para que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seja ou não convergente. Então, ao aplicarmos por exemplo na série geométrica $1+x+x^2+x^3+\cdots$ de primeiro termo igual a 1 e razão x, dada pela sequência $(a_r) = 1$ para $r = 1, 2, 3, ...$, podemos perceber que está série é absolutamente convergente se $|x| < 1$, e divergente caso contrário. Vejamos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|.$$

E como $a_r = 1$, para $r = 1, 2, 3, ...$, temos,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |1| \cdot \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|.$$

Sendo assim, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ é a função geradora da sequência (a_r), desde que, $|x| < 1$.

De modo geral, se (a_n) é uma sequência numérica e $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, então:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \lim_{n\to\infty}|x| \\
&= L \cdot |x|.
\end{aligned}$$

E para que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seja absolutamente convergente devemos ter $L|x| < 1$ se, e somente se, $|x| < \dfrac{1}{L}$, isto é, $x \in \left(-\dfrac{1}{L}, \dfrac{1}{L}\right)$, denominado de raio de convergência da série.

Para concluir, uma série de potências pode:
(a) convergir em todo ponto;
(b) convergir somente em um intervalo $|x - a| < L$ (intervalo de convergência);
(c) convergir somente em um ponto.

A função geradora $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$ será a partir de agora manipulada para obtermos outras séries de potências sem nenhum tipo de preocupação com a convergência das mesmas.

Exemplo 2.2.1. *Determine a função geradora da sequência* $(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, ...)$.

É fácil ver que a série de potências procurada é:

$$f(x) = 0 + 0x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots,$$

Podemos escrever $f(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \\ &= x^2 \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) \\ &= x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^2}{1-x}, \end{aligned}$$

que é a função geradora da sequência (a_r) desde que, $|x| < 1$.

Exemplo 2.2.2. *Encontre a sequência cuja função geradora é dada por:*

$$g(x) = \frac{1}{1-2x^2}.$$

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

Logo, basta substituir x por $2x^2$ na última expressão e teremos:

$$g(x) = \frac{1}{1-2x^2} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8 + \cdots .$$

Exemplo 2.2.3. *Encontre a sequência da função geradora ordinária:*

$$h(x) = \frac{x^3}{1-2x}.$$

Vimos que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

Assim, a função $h(x)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^3}{1-2x} \\ &= x^3 \cdot \left(\frac{1}{1-2x}\right) \\ &= x^3 \cdot \left(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \cdots\right) \\ &= x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 16x^7 + \cdots, \end{aligned}$$

que é a série gerada por $h(x)$.

Concluímos então que, $h(x) = \dfrac{x^3}{1-2x}$ é a função geradora da sequência $(a_r) = (0, 0, 0, 1, 2, 4, 8, 16, ...)$, desde que, $|x| < \dfrac{1}{2}$.

Em seguida, vamos abordar um teorema que generaliza as expansões binomiais vistas no capítulo 1 para que possamos estudar séries de potências da forma $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$ em que, n é um número natural arbitrário.

2.3 Teorema Binomial

Isaac Newton foi, e ainda é, considerado um dos maiores cientistas conhecidos historicamente. Nascido em 25 de dezembro de 1642 em uma pequena aldeia conhecida por Woolsthorpe-by-Colsterworth, localizada na Inglaterra, tornou-se um dos principais precursores do Iluminismo, e é responsável pelo Teorema Binomial. Fez ainda, outras descobertas importantes para o avanço da ciência como o cálculo infinitesimal, que é utilizado para o estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido), a lei da gravitação, principal responsável pelo seu reconhecimento, não apenas academicamente, mas também mundialmente por pessoas comuns; e por fim, mas não menos importante, também realizou estudos relacionados à natureza das cores.

Seja $(1+x)^u = 1+ux+\frac{u(u-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{u(u-1)\cdots(u-r-1)}{r!}x^r+\cdots$. Denotando por:

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!}, & \text{se} \quad r > 0, \\ \\ 1, & \text{se} \quad r = 0, \end{cases}$$

temos que,

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

onde o número $\binom{u}{r}$ denomina-se *coeficiente binomial generalizado*. Caso u seja igual ao inteiro positivo n, $\binom{u}{r}$ será o familiar coeficiente binomial, e como $\binom{n}{r}$ é zero para $r > n$, a expansão se reduzirá à expansão binomial usual [7].

Como já foi dito, não estamos preocupados com questões de convergência, uma vez que não precisamos atribuir valores numéricos para a variável x. Neste contexto, vamos provar em seguida, o *Teorema Binomial*.

Teorema 2.3.1. ***(Teorema Binomial)*** *O coeficiente de x^p na expansão de $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$, é igual a C^p_{n+p-1}.*

Demonstração. Vimos nesta seção que $(1+x+x^2+x^3+\cdots) = \frac{1}{1-x}$. Então, podemos concluir que:

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}.$$

Agora, substituindo x por $-x$ e u por $-n$ em

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

teremos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-1)^r x^r.$$

Em seguida, substituímos a definição de coeficiente binomial generalizado, ou seja:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \binom{n+p-1}{p} = C^p_{n+p-1}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.3.1. *Que expressão corresponde ao número de maneiras de se distribuir r objetos idênticos em n caixas distintas, com a restrição de que cada caixa contenha pelo menos p objetos e no máximo $p+q-1$ objetos?*

Podemos notar que a função que determina o número de objetos em uma caixa, dadas as condições acima, é

$$x^p + x^{p+1} + x^{p+2} + \cdots + x^{p+q-1}.$$

Como são n caixas, a resposta para este problema será o coeficiente de x^r em

$$(x^p + x^{p+1} + x^{p+2} + \cdots + x^{p+q-1})^n = x^{pn}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-1})^n.$$

Agora, usando o fato de que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-1} = \frac{1-x^q}{1-x},$$

temos que:

$$(x^p + x^{p+1} + \cdots + x^{p+q-1})^n = x^{pn} \cdot \left(\frac{1-x^q}{1-x}\right)^n.$$

Portanto, o coeficiente de x^r nesta última expressão será igual ao coeficiente de x^{r-pn} em

$$\left(\frac{1-x^q}{1-x}\right)^n.$$

Exemplo 2.3.2. *De quantas maneiras podemos escolher 12 latas de refrigerante se existem 4 marcas diferentes?*

Neste problema, não há restrição ao número de latas de uma determinada marca, logo, a função geradora que controla o número de latas de uma certa marca é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}$$

Como são 4 marcas diferentes, o que procuramos como resposta deste problema é o coeficiente de x^{12} na expansão de

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12})^4 &= \left(\frac{1 - x^{13}}{1 - x}\right)^4 \\ &= (1 - x^{13})^4 \cdot (1 - x)^{-4}.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$(1 - x^{13})^4 = 1 - 4x^{13} + 6x^{26} - 4x^{39} + x^{52},$$

percebemos que o coeficiente de x^{12} em $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12})^4$ é o coeficiente de x^{12} em $(1 - x)^{-4}$. Logo, pela definição de coeficiente binomial generalizado, temos

$$\binom{-4}{12} \cdot (-1)^{12} = \binom{4 + 12 - 1}{12} = \binom{15}{12} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} = 455.$$

O que acabamos de fazer foi um caso particular dos casos até aqui estudados, onde $p = 0$, $p + q - 1 = 12$ (logo $q = 13$) e $n = 4$. Ou seja, o coeficiente de x^{12} é igual ao coeficiente de $x^{12-0\cdot 4} = 455$.

O que fizemos até aqui foi utilizar as funções geradoras ordinárias para resolver problemas em que não há preocupação com a ordem dos objetos. Porém, o que vamos fazer em seguida é solucionar problemas onde a ordem em que esses objetos são retirados tem relevância. E, para isso, vamos falar sobre funções geradoras exponenciais.

2.4 Funções Geradoras Exponenciais

Sobre esse tipo de função geradora imagine três tipos diferentes de carros, a, b e c. De quantos modos diferentes podemos retirar 4 carros de uma garagem, colocando-os em uma fila em ordem, sendo que o carro do tipo a pode ser retirado dessa garagem no máximo uma vez, o carro do tipo b no máximo duas vezes e o carro do tipo c no máximo três vezes?

Conforme visto no início deste capítulo a função geradora que fornece as possíveis escolhas dadas as restrições e sem se importar com a ordem é:

$$(1 + ax)(1 + bx + b^2x^2)(1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3).$$

Efetuando os cálculos e agrupando convenientemente a equação acima, temos que:
$1 + (a + b + c)x + (c^2 + bc + b^2 + ac + ab)x^2 + (c^3 + bc^2 + b^2c + ac^2 + abc + ab^2)x^3 +$
$+ (bc^3 + b^2c^2 + ac^3 + abc^2 + ab^2c)x^4 + (b^2c^3 + abc^3 + ab^2c^2)x^5 + ab^2c^3x^6.$

Como queremos retirar e ordenar 4 carros dessa garagem, o que nos interessa é o coeficiente de x^4. Percebemos que há 5 maneiras de se retirar esses quatro carros da garagem dadas as restrições. Logo, abc^2, por exemplo, indica que se retira um carro do tipo a, um carro do tipo b e dois carros do tipo c. Mas ordená-los em uma fila significa que os esses podem permutar entre si, o que pode ser feito de $\dfrac{4!}{1!1!2!}$ uma vez que se trata de uma permutação com repetição visto no capítulo anterior.

Utilizando o mesmo raciocínio para as outras 4 maneiras chegaremos que todas as possíveis retiradas distintas somam

$$\left(\frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{1!1!2!} + \frac{4!}{1!2!1!}\right) = 38.$$

Definição 2.4.1. *A série de potências*

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

é a função geradora exponencial da sequência (a_r).

Parar entender tal definição vamos voltar ao problema inicial dessa seção. Como vimos, a função geradora exponencial nos fornece todas as possíveis retiradas dos carros da garagem, conforme as condições dadas. Assim, vamos alterar os polinômios que controlam a presença de cada tipo de carro introduzindo no coeficiente de x^n o fator $\dfrac{1}{n!}$, obtendo:

$$\left(1 + \frac{a}{1!}x\right)\left(1 + \frac{b}{1!}x + \frac{b^2}{2!}x^2\right)\left(1 + \frac{c}{1!}x + \frac{c^2}{2!}x^2 + \frac{c^3}{3!}x^3\right).$$

Expandindo e agrupando os termos semelhantes, temos

$$1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!}\right)x+\left(\frac{c^2}{2!}+\frac{bc}{1!1!}+\frac{b^2}{2!}+\frac{ac}{1!1!}+\frac{ab}{1!1!}\right)x^2+$$
$$+\left(\frac{c^3}{3!}+\frac{bc^2}{1!2!}+\frac{b^2c}{2!1!}+\frac{ac^2}{1!2!}+\frac{abc}{1!1!1!}+\frac{ab^2}{1!2!}\right)x^3+$$
$$+\left(\frac{bc^3}{1!3!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{ac^3}{1!3!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}\right)x^4+$$
$$+\left(\frac{b^2c^3}{2!3!}+\frac{abc^3}{1!1!3!}+\frac{ab^2c^2}{1!2!2!}\right)x^5+\frac{ab^2c^3}{1!2!3!}x^6.$$

Como a resposta do problema é o coeficiente de x^4, ou seja:

$$\left(\frac{bc^3}{1!3!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{ac^3}{1!3!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}\right),$$

percebemos que ainda não é o que queremos.

Para resolver isto, basta multiplicarmos e dividirmos esta expressão por 4!.

$$\left(\frac{4!}{1!3!}bc^3+\frac{4!}{2!2!}b^2c^2+\frac{4!}{1!3!}ac^3+\frac{4!}{1!1!2!}abc^2+\frac{4!}{1!2!1!}ab^2c\right)\frac{1}{4!}.$$

Logo, se tomarmos $a=b=c=1$, verificamos que o número procurado será o coeficiente de $\dfrac{x^4}{4!}$ que é igual a

$$\left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{1!1!2!}+\frac{4!}{1!2!1!}\right)=38,$$

na expansão de

$$\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right).$$

Exemplo 2.4.1. *Encontre a função geradora exponencial da sequência* $(1,1,1,\cdots)$.

Sabemos que a expansão pela **Série de Taylor** em torno do zero da função exponencial é dada por

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}.$$

Perceba que nesta expansão o coeficiente de $\dfrac{x^r}{r!}$ é sempre igual a 1, para todo r. Assim, a função geradora exponencial para a sequência $a_r=1$, para $r=0,1,2,3,\cdots$ é

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}=e^x.$$

Exemplo 2.4.2. *Encontre a função geradora exponencial que determina o número de sequências de k letras ($k \leqslant 4$) formada pelas letras a, b e c, onde a letra a ocorre no máximo uma vez, a letra b no máximo uma vez e a letra c no máximo duas vezes.*

Para resolver esse problema, devemos considerar o produto de 3 polinômios em que cada um controla a presença das letras a, b e c, respectivamente. São estes:

$$f(x) = (1+x)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right) = 1+3x+\frac{7}{2}x^2+x^3+\frac{x^4}{2}.$$

Agora, como estamos interessados na sequência dos coeficientes de $\frac{x^r}{r!}$, iremos reescrever este polinômio na forma

$$f(x) = 1+3\frac{x}{1!}+7\frac{x^2}{2!}+6\frac{x^3}{3!}+12\frac{x^4}{4!}.$$

Conforme visto no início desta seção, a função acima mostra que existem, por exemplo, 7 maneiras de retirarmos 2 letras. Como a ordem agora nos interessa, estas maneiras são: ab, ba, ac, ca, bc, cb e cc.

Exemplo 2.4.3. *Num pequeno hotel existem 3 quartos diferentes vagos. 7 amigos que estão viajando precisam dormir pois estão muito cansados. De quantas maneiras podemos acomodar esses amigos sem que nenhum quarto fique vazio?*

Inicialmente como nenhum quarto poderá ficar vazio, então, nenhum quarto poderá receber mais do que 5 amigos. Além disso, os quartos são diferentes e, nesse caso, a ordem das pessoas dentro de cada quarto não importa. Logo, a função geradora exponencial para este problema é

$$g(x) = \left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^5}{5!}\right)^3$$

Como a resposta é o coeficiente de $\frac{x^7}{7!}$ nessa função. Vamos manipulá-la convenientemente. Observe:

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^3 \\ &= \left(\underbrace{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^5}{5!}+\cdots}_{e^x}-1\right)^3 \\ &= (e^x-1)^3 \\ &= e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1. \end{aligned}$$

Como as potências extras não contribuem para encontramos o coeficiente de $\frac{x^7}{7!}$, temos que

$$\begin{aligned}
e^{3x} &= 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(3x)^7}{7!} + \cdots, \\
e^{2x} &= 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots, \\
e^{x} &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^7}{7!} + \cdots.
\end{aligned}$$

Desta forma, é fácil ver que o coeficiente procurado é

$$3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3 = 1806.$$

Prosseguindo, o teorema a seguir provará um resultado que nos permitirá concluir a equivalência entre certos problemas envolvendo funções geradoras exponenciais.

Teorema 2.4.1. *O número de maneiras de colocarmos n objetos distintos em k caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia é*

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n;$$

ou seja: O número de n-uplas cujos elementos pertencem ao conjunto $1, 2, 3, ..., k$ nas quais cada um dos números $1, 2, ..., k$, aparece pelo menos uma vez é $T(n,k)$.

Demonstração. Como cada uma das k caixas devem conter pelo menos um objeto, e a ordem dos n objetos importa. Então, a função geradora exponencial para solucionar este problema é

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^k = (e^x - 1)^k$$

em que a solução desse problema é o coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$. Fazendo a expansão binomial, temos

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{x(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{(k-i)x},$$

e como

$$e^{(k-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n,$$

temos,

$$\begin{aligned}(e^x-1)^k &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(k-i)^n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\cdot\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que o coeficiente de $\dfrac{x^n}{n!}$ é

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n,$$

que é a expressão que nos fornece $T(n,k)$, concluindo a demonstração. $\square$

Agora, com esse teorema podemos resolver o exemplo anterior. Para isso, basta tomarmos $n=7$ e $k=3$. Vejamos:

$$T(7,3)=\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{7}{3}(3-i)^7=3^7-\binom{3}{1}2^7+\binom{3}{2}=3^7-3\cdot 2^7+3=1806.$$

Com isso, o teorema a seguir mostrará o resultado quando colocamos n objetos distintos em caixas iguais (sem caixa vazia).

Teorema 2.4.2. *O número de maneiras $S(n,k)$ de distribuirmos n objetos distintos em k caixas idênticas sem que nenhuma caixa fique vazia é*

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}T(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Demonstração. Para distribuirmos n objetos distintos em k caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia, devemos encontrar um distribuição de n objetos distintos em k caixas idênticas, todas com pelo menos um objeto e, em seguida, ordenar essas caixas. Isto é

$$S(n,k)=k!\cdot T(n,k),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

O número $S(n,k)$ denomina-se *número de Stirling do segundo tipo.*

Exemplo 2.4.4. *De quantas maneiras podemos distribuir 6 bolas com as cores, azul, branca, cinza, vermelha, roxa e laranja, em 2 caixas idênticas, de modo que nenhuma fique vazia?*

É fácil ver, que o problema é uma simples aplicação do Teorema 2.4.2., onde: $n = 6$ e $k = 2$. Dessa forma, temos

$$S(6,2) = \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}(2-i)^6 = \frac{1}{2!}(2^6 - 2) = 31.$$

Portanto, há 31 maneiras de distribuirmos 6 bolas em 2 caixas.

No próximo capítulo vamos falar sobre as relações de recorrência, definindo as recorrências lineares homogêneas e não-homogêneas de primeira e segunda ordem.

Capítulo 3

Relações de Recorrência

Uma poderosa ferramenta no estudo da Matemática Discreta para resolução de problemas combinatórios são as relações de recorrência. De fato, muitos problemas que em um primeiro momento são considerados difíceis podem ser resolvidos de maneira trivial por esse tipo de técnica. Nesse capítulo iremos apresentar essa proposta como mais uma das várias abordagens existentes quando o assunto é análise combinatória.

Iniciaremos enfatizando que uma relação de recorrência é uma sequência numérica definida recursivamente, isto é, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Exemplo 3.0.1. *A sequência* (x_n) *dos números naturais ímpares* $1, 3, 5, 7, \cdots$ *pode ser escrita por* $x_{n+1} = x_n + 2$ $(n \geq 1)$*, com* $x_1 = 1$.

Exemplo 3.0.2. *Qualquer progressão aritmética* (a_n) *de razão* r *e primeiro termo* a *pode ser definida por* $a_{n+1} = a_n + r$ $(n \geq 1)$*, com* $a_1 = a$.

Exemplo 3.0.3. *Qualquer progressão geométrica* (b_n) *de razão* q *e primeiro termo* b *pode ser definida por* $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Exemplo 3.0.4. *A sequência* (F_n)*, dita de Fibonacci, cujos termos são* $1, 1, 2, 3, 5, \cdots$ *e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por:*
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geq 0)$*, com* $F_1 = F_2 = 1$.

A Sequência de Fibonacci será muito importante para o decorrer deste e do próximo capítulo, uma vez que iremos definir situações que envolvem não somente o estudo de recorrências como também de funções geradoras, mencionadas no capítulo anterior. Começaremos então pelas recorrências lineares de primeira ordem.

3.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Definição 3.1.1. *Uma recorrência linear de primeira ordem é toda sequência* (x_n) *que expressa* x_{n+1} *em função de* x_n*, isto é, cada termo da sequência é escrito em função do seu primeiro antecessor. Tal sequência é dita linear se, e somente se, for uma função polinomial do primeiro grau.*

3.1.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

A recorrência $x_{n+1} = nx_n$ é linear de primeira ordem homogênea, pois não possui termo independente de x_n. Para se resolver esse tipo de sequência existem técnicas que na maioria das vezes não geram tantas dificuldades.

Exemplo 3.1.1. *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = nx_n$*, com* $x_1 = 1$*.*

Inicialmente podemos observar que

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \cdot x_1 \\ x_3 &= 2 \cdot x_2 \\ x_4 &= 3 \cdot x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Agora, basta multiplicarmos os membros correspondentes e obtemos $x_n = (n-1)!x_1$. E como $x_1 = 1$, temos $x_n = (n-1)!$.

3.1.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Não-Homogêneas

Existem recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que são mais fáceis de resolver. Estas possuem a forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(1) \\ x_3 &= x_2 + f(2) \\ x_4 &= x_3 + f(3) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n-1). \end{aligned}$$

Somando as equações, obtemos $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$.

Exemplo 3.1.2. *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = x_n + 2^n$, *com* $x_1 = 1$.

Temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2 \\ x_3 &= x_2 + 2^2 \\ x_4 &= x_3 + 2^3 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Efetuando a soma das equações acima, encontramos

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Em seguida, vamos mostrar como se resolve uma recorrência linear não-homogênea de primeira ordem. O teorema a seguir transforma esse tipo de recorrência na forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Teorema 3.1.1. *Se* a_n *é uma solução não nula de* $x_{n+1} = g(n)x_n$, *então a substituição* $x_n = a_n y_n$ *transforma a recorrência* $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ *em* $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$.

Demonstração. A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$$

em

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Por outro lado, $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$. Portanto, a equação se transforma em $g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$,, ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}.$$

□

Exemplo 3.1.3. *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = 2x_n + 1$, *com* $x_1 = 2$.

Primeiramente, vamos encontrar uma solução não nula para a recorrência linear homogênea de primeira ordem $x_{n+1} = 2x_n$. Vejamos

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 2x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= 2x_{n-1}. \end{aligned}$$

Efetuando o produto das equações acima membro a membro, obtemos $x_n = 2^{n-1}x_1$. Logo, uma solução não nula para essa recorrência é $x_n = 2^{n-1}$. Agora, vamos fazer a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$, obtendo, assim, $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$. Em seguida, temos

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Ao somarmos as equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)} \\ &= y_1 + 2^{-1}\frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \\ &= y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

E como $x_n = 2^{n-1}y_n$ e ainda $x_1 = 2$. Temos $y_1 = 2$ e $y_n = 3 - 2^{1-n}$, e, portanto, $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$.

Na seção seguinte, abordaremos as recorrências em que cada termo é obtido por meio dos dois termos antecessores imediatos.

3.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Definição 3.2.1. *Uma recorrência linear é dita de segunda ordem quando cada termo definido pela equação de recorrência depende dos dois termos imediatamente anteriores a ele.*

Uma recorrência linear de segunda ordem é dada por uma função da forma:

$$f(x_{n+2}) = t(x_{n+1}) + g(x_n) + h(n),$$

onde $g(x_n) \neq 0$. Além disso, se $h(n) = 0$, então, a recorrência é homogênea, caso contrário, não-homogênea.

3.2.1 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

Inicialmente, vamos tratar das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, isto é, recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,$$

com $q \neq 0$; caso contrário, a recorrência acima seria de primeira ordem.

Definição 3.2.2. *Uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes é da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ com $q \neq 0$, em que associamos essa recorrência a uma equação do segundo grau da forma $r^2 + pr + q = 0$, denominada **equação característica**.*

O teorema a seguir nos mostrará a maneira de obtermos a solução desse tipo de recorrência.

Teorema 3.2.1. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então, $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, para quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2.*

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $r_1 = r_2 = r$ é raiz da equação característica, então, $x_n = r^n$ é uma solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. De fato,

$$r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n = r^n \cdot (r^2 + pr + q) = 0.$$

Além disso, $x_n = C \cdot r^n$ é solução para todo C.

Agora, no caso de $r_1 \neq r_2$ temos que $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2. Observem:

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\ &= (C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}) + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) \\ &= [C_1 r_1^n (r_1^2 pr_1 + q)] + [C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q)] \\ &= C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.2.1. *Determine a solução da recorrência* $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$.

A equação característica que associamos a recorrência acima é $r^2 + 3r - 4 = 0$, cujas raízes são 1 e -4. Assim, de acordo com o Teorema 3.2.1, todas as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$ são soluções da recorrência para quaisquer C_1 e C_2.

Porém, existem os casos em que as raízes da equação característica são iguais. Sobre essa situação, segue o teorema abaixo.

Teorema 3.2.2. *Se as raízes de* $r^2 + pr + q = 0$ *são iguais, ou seja,* $r_1 = r_2 = r$, *então todas as soluções da recorrência* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ *são da forma* $y_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$, *onde* C_1 *e* C_2 *são constantes.*

Demonstração. Seja y_n é uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Vamos determinar constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações.

$$\begin{cases} C_1 r + C_2 r &= y_1 \\ C_1 r^2 + 2C_2 r^2 &= y_2, \end{cases}$$

isto é, $C_1 = 2 \cdot \dfrac{y_1}{r} - \dfrac{y_2}{r^2}$ e $C_2 = \dfrac{y_2 - ry_1}{r^2}$. Isto é possível, pois, $r \neq 0$. E portanto, o sistema acima é equivalente a

$$\begin{cases} C_1 + C_2 &= \dfrac{y_1}{r} \\ C_1 + 2C_2 &= \dfrac{y_2}{r^2}, \end{cases}$$

além disso, os coeficientes de C_1 e C_2 determinam uma matriz A da forma: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e como, $det(A) \neq 0$, temos que o sistema acima tem solução.

Queremos mostrar que $y_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ para todo natural n. Para isso, é suficiente mostrar que $z_n = y_n - C_1 r^n - C_2 n r^n$; e $z_n = 0$ para todo natural n.

Substituindo z_n em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e agrupando os termos de maneira conveniente, temos
$(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1r^n(r^2 + pr + q) - C_2nr^n(r^2 + pr + q) - C_2r^n(2r + p)$.

O primeiro parêntese é igual a zero, pois, y_n é solução; o segundo e também o terceiro são iguais a zero uma vez que r é raiz de $r^2 + pr + q = 0$; o quarto é igual a zero, pois como $r_1 = r_2 = r = -\frac{p}{2}$, então, $2r + p = 0$. Portanto, $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Além disso, como $C_1r + C_2r = y_1$ e $C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2$, temos que, $z_1 = z_2 = 0$. O que implica que $z_n = 0$ para todo n natural. □

Exemplo 3.2.2. *Encontre a solução geral da recorrência* $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.

A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$ tem como equação característica $r^2 - 6r + 9 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = r = 3$. Assim, pelo Teorema 3.2.2, temos que a solução geral da recorrência é dada por $x_n = C_13^n + C_2n3^n$ para quaisquer constantes C_1 e C_2.

3.2.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Não-Homogêneas

A solução de uma recorrência linear de segunda ordem não-homogênea é composta por duas parcelas: uma solução qualquer da recorrência não-homogênea e a solução geral da recorrência homogênea. Conforme já foi visto neste capítulo, encontrar a solução da recorrência homogênea não será um problema. Nossos esforços estarão voltados essencialmente para a solução da recorrência não-homogênea. O teorema a seguir nos dará algumas possibilidades para esse fim.

Teorema 3.2.3. *Se* a_n *é uma solução da equação* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, *então a substituição* $x_n = a_n + y_n$ *transforma a equação em* $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.

Demonstração. Inicialmente vamos substituir x_n por $a_n + y_n$ na equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$. Assim, temos

$$(a_{n+2} + y_{n+2}) + p(a_{n+1} + y_{n+1}) + q(a_n + y_n) = f(n)$$
$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n).$$

Como a_n é solução da equação original, então, $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$ o que transforma a equação acima em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$. □

Exemplo 3.2.3. *Determine a solução da recorrência* $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$.

Primeiramente vamos encontrar a solução da homogênea, isto é, $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ cuja equação característica é $r^2 - 5r + 6 = 0$ e suas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$.
Dessa forma, temos que a solução geral da homogênea é $h_n = C_12^n + C_23^n$.

Agora, tentaremos descobrir uma solução particular t_n da recorrência

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n.$$

Para isso, devemos responder a seguinte pergunta: que tipo de função deve ser t_n de tal forma que substituindo t_n em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$ obtemos n? Percebemos que é bem razoável imaginar que a função t_n é uma função polinomial do primeiro grau, ou seja, $t_n = An + B$. Assim, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$, temos

$$\begin{aligned} A(n+2) + B - 5[A(n+1) + B] + 6(An + B) \\ An + 2A + B - 5(An + A + B) + 6An + 6B \\ (A - 5A + 6A)n + (2A + B - 5A - 5B + 6B) \\ 2An + (-3A + 2B), \end{aligned}$$

que dever ser igual n. Portanto, $A = \dfrac{1}{2}$ e $B = \dfrac{3}{4}$. Daí,

$$t_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}.$$

Logo, a solução geral da recorrência não-homogênea é

$$\begin{aligned} x_n &= h_n + t_n \\ x_n &= C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

com C_1 e C_2, constantes.

É importante ressaltar que o Teorema 3.2.3 pode ser utilizado para resolver uma recorrência linear não-homogênea de qualquer grau. Basta que conheçamos a solução geral h_n recorrência homogênea e uma solução particular t_n da não-homogênea. Assim, a solução geral da não-homogênea é dada por: $x_n = h_n + t_n$.

Com os resultados e teoremas nesta seção abordados, vamos a partir de agora estudar duas importantes sequências numéricas, a Sequência de Fibonacci e uma de suas generalizações, a Sucessão de Lucas.

3.2.3 As Sequências de Fibonacci e de Lucas

A Sequência de Fibonacci

A Sucessão ou Sequência de Fibonacci trata do seguinte problema:

"Um homem colocou um par de coelhos num local cercado por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo no segundo mês de vida?"

Para resolver esse problema podemos perceber que no primeiro mês existe apenas o par inicial. No segundo mês, por ainda não estarem na fase reprodutiva, permanece o mesmo par. Já no terceiro mês, nasceu outro par. No quarto, o par inicial teve outro par de coelhos enquanto os seus primeiros filhos amadureciam. No quinto mês, o par inicial e sua primeira geração puderam reproduzir e, então, tiveram dois novos pares, e assim sucessivamente. Dessa forma, a sequência que define a população de coelhos é

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

Observando com atenção, percebemos que a população de coelhos de cada mês a partir do segundo, é dado pela soma da população dos dois meses imediatamente anteriores. Denotando por F_n a população de coelhos no n-ésimo mês, podemos construir a seguinte recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geqslant 2$ em que, todos os termos dessa sequência denominam - se números de Fibonacci. Além disso, a recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geqslant 2$ pode ser reescrita como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geqslant 0$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = F_2 = 1$.

Exemplo 3.2.4. *Resolva a recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = F_2 = 1$.*

A equação característica que relacionamos a recorrência é $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinarmos C_1 e C_2 vamos utilizar para facilitar os cálculos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, obtendo o seguinte sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Em seguida, temos

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

que é a solução da recorrência.

Além disso, se $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e ainda, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, então, temos que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

esta que é conhecida como a *Fórmula de Binet* dos números de Fibonacci.
Observação: Se $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, dividindo a equação por F_n, temos:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Tomando $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = L$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n-1}}{F_n} = \dfrac{1}{L}$, considerando os limites na equação anterior, obtemos

$$L = 1 + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0,$$

cujas raízes são $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, e como F_n é crescente, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha.$$

Agora, vamos determinar a função geradora que constrói a sequência de Fibonacci. Para isso, vamos utilizar os conceitos já estudados sobre funções geradoras, bem como algumas das técnicas para obtê-las.

Exemplo 3.2.5. *Determine uma função $F(x)$ tal que, $F(x)$ define a sequência $(F_0, F_1, F_2, F_3, ...)$, ou seja, F constrói a sequência de Fibonacci.*

Por definição de função geradora, sabemos que

$$F(x) \;=\; F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \cdots .$$

Assim, se multiplicarmos a equação acima por x, obtemos

$$xF(x) = F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + F_4x^5 + \cdots .$$

Multiplicando novamente por x, temos

$$x^2F(x) = F_0x^2 + F_1x^3 + F_2x^4 + F_3x^5 + F_4x^6 + \cdots .$$

Subtraindo as três equações na ordem em que aparecem e agrupando os termos de maneira conveniente, temos

$$F(x) - xF(x) - x^2F(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \cdots .$$

Mas como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, fazendo alguns cancelamentos, obtemos

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

que é a *função geradora da sequência de Fibonacci.*

Agora, vamos utilizar o teste da razão para determinar o intervalo de convergência função $F(x)$ dada pela série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_nx^n = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \cdots$.

Seja $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_nx^n$ a função geradora da sequência de Fibonacci, então, pelo teste da razão, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}\right|\cdot\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}\right|\cdot|x| .\end{aligned}$$

Mas, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}\right|\cdot|x| = \alpha\cdot|x|$$

Como queremos um intervalo que garanta a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_nx^n$ que é a função geradora da sequência de Fibonacci, as condições em x para que isso aconteça é:

$\alpha \cdot |x| < 1$ se, e somente se, $|x| < \dfrac{1}{\alpha}$, isto é, $x \in \left(-\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha}\right)$ que é o raio de convergência de $F(x)$.

Na seção seguinte, faremos o mesmo para a Sucessão de Lucas, esta que é obtida por meio da mudança das condições iniciais da sequência de Fibonacci.

3.2.4 A Sucessão de Lucas

François Édouard Anatole Lucas nasceu em abril de 1842 na cidade de Amiens, na França. Em 1876, motivado por questões que envolviam divisibilidade e fatoração, passou a estudar profundamente a sequência de Fibonacci e suas peculiaridades. De início, utilizou a recorrência que define os números de Fibonacci com condições iniciais diferentes das anteriores e a partir daí construiu novas sucessões, por exemplo, a *Sucessão de Lucas.*

Exemplo 3.2.6. *Seja L_n a Sucessão de Lucas. Resolva a recorrência $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ para $n \geqslant 0$, com $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.*

A equação característica referente à recorrência também é $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Desta forma

$$L_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Assim, dadas as novas condições iniciais, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \\ C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Resolvendo este obtemos: $C_1 = C_2 = 1$. E por conseguinte a solução da recorrência é

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

De maneira análoga ao que fora feito com F_n, podemos escrever L_n em termos de α e β e, assim, obtemos

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Esta, que define a famosa sucessão $(2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...)$ é a *fórmula de Binet* dos números de Lucas.

Fórmula essa que é obtida de maneira análoga ao que fora feito com a sequência de Fibonacci. Assim, $L(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2 + L_3x^3 + \cdots$ que é a função geradora da sucessão de Lucas é igual a:

$$L(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}.$$

Assim como $F(x)$, a função geradora da Sucessão de Lucas dada pela série de potências $L(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2 + L_3x^3 + \cdots = \frac{2-x}{1-x-x^2}$. é absolutamente convergente, desde que, $|x| < \frac{1}{\alpha}$.

Na próxima seção vamos apresentar e demonstrar importantes identidades relacionadas a Sequência de Fibonacci e a Sucessão de Lucas.

3.3 Identidades de Fibonacci e Lucas

Já vimos que as sequências de Fibonacci e Lucas podem ser definidas recursivamente, ou seja, por recorrência. Vamos apresentar nesta seção algumas identidades e propriedades referentes a estas duas sucessões [4].

Proposição 3.3.1. *Seja L_n um número de Lucas e F_n um número de Fibonacci, então, é verdadeira a identidade: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, para $n \geqslant 1$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em n.

Para $n = 1$, e considerando $F_0 = 0$, temos:

$$L_1 = F_0 + F_2 = 0 + 2 = 2.$$

Agora, suponha que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que, a igualdade se verifica para $n \leqslant k$, ou seja, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$. Mostraremos então que a igualdade se verifica para o sucessor de k.

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1}, \\ L_{k+1} &= (F_{k-1} + F_{k+1}) + (F_{k-2} + F_k), \\ L_{k+1} &= (F_{k-1} + F_{k-2}) + (F_{k+1} + F_k), \\ L_{k+1} &= F_k + F_{k+2}. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.3.2. *Seja F_n um número de Fibonacci, vale a identidade:*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, n \geqslant 1.$$

A equação acima é conhecida como a *Fórmula de Cassini* e faremos sua demonstração também por indução em n.

Demonstração. Considerando novamente $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$, para $n = 1$, a igualdade é verdadeira. Suponha agora, que a igualdade acima se verifica para um número natural k, então, devemos provar que esta é verdadeira para seu sucessor, $k + 1$.

$$\begin{aligned}
F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k F_{k+2} - F_{k+1}(F_{k-1} + F_k); \\
&= F_k(F_{k+2} - F_{k+1}) - F_{k-1}F_{k+1}; \\
&= F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1}; \\
&= (-1)(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2); \\
&= (-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.3.3. *Se L_n é um número de Lucas, temos que: $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$.*

Demonstração. Para a demonstração dessa proposição vamos utilizar a fórmula de Binet.

Se $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ é fácil ver que

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= 1, \\
\alpha \cdot \beta &= -1, \\
\alpha^2 + \beta^2 &= 3.
\end{aligned}$$

Desta forma temos

$$\begin{aligned}
L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 &= (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \cdot (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n)^2 \\
&= \alpha^{2n} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \beta^{2n} - (\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}) \\
&= \alpha^{n-1}\beta^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha^n\beta^n \\
&= 3(-1)^{n-1} - 2(-1)^n \\
&= 5(-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.3.4. *É válida a identidade:* $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$.

Demonstração. Da Proposição 3.3.1, temos

$$L_{n+1} = F_n + F_{n+2}, \tag{3.1}$$
$$L_{n-1} = F_{n-2} + F_n. \tag{3.2}$$

Somando (3.1) e (3.2), têm - se

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_{n-1} &= 2F_n + F_{n+2} + F_{n-2} \\ &= 2F_n + F_{n+1} + F_n + F_{n-2} \\ &= 3F_n + F_n + F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= 5F_n \end{aligned}$$

□

Proposição 3.3.5. *Dados* F_n *e* L_n *é válida a identidade:*

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

Demonstração. Da Proposição 3.3.1, temos

$$\begin{aligned} L_n^2 &= F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1} + F_{n-1}^2 \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})^2 + 4F_{n+1}F_{n-1} \end{aligned}$$

Agora, utilizando a Proposição 3.3.2 na equação acima, temos

$$\begin{aligned} L_n^2 &= F_n^2 + 4[F_n^2 + (-1)^n], \\ L_n^2 &= F_n^2 + 4F_n^2 + 4(-1)^n, \\ L_n^2 - 5F_n^2 &= 4(-1)^n, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Proposição 3.3.6. *É válida a identidade:* $F_{2n} = F_n \cdot L_n$.

Demonstração. Por Binet, temos:

$$F_n \cdot L_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \cdot \alpha^n + \beta^n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}.$$

□

Proposição 3.3.7. *Se $m \in \mathbb{Z}$, então, $5m^2 \pm 4$ é um quadrado perfeito se, e somente se, m for um número de Fibonacci.*

Demonstração. Da Proposição 3.3.5 é fácil ver que se m é um número de Fibonacci, então, $5m^2 \pm 4$ é quadrado perfeito. Dessa forma, resta demonstrar que se m e k são tais que $5m^2 \pm 4 = k^2$, então, $m = F_n$, para algum inteiro n. A prova desta será feita por absurdo.

Suponha que m é o menor número inteiro positivo que não é um número de Fibonacci e que satisfaz a equação proposta. Então, $m \geq 4$ uma vez que, 1, 2 e 3 são números de Fibonacci. Assim, dadas as condições anteriores, temos que $2m \leqslant k \leqslant 3m$. Por outro lado, percebemos que que m e k têm mesma paridade, logo, $k = m + 2t$, para algum $t < m$. Substituindo k na equação $5m^2 \pm 4 = k^2$, temos

$$\begin{aligned} 5m^2 \pm 4 &= (m+2t)^2 \\ 4m^2 - 4mt - 4t^2 \pm 4 &= 0 \\ (2m)^2 - (2m) \cdot 2t - 4t^2 \pm 4 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação acima em $2m$, tem-se

$$2m = t \pm \sqrt{5t^2 \pm 4}.$$

Mas como $5t^2 \pm 4 = w^2$ é quadrado perfeito para algum t e w com $t < m$, então, t é um número de Fibonacci F_n e w é um número de Lucas L_n. Assim,

$$2m = F_n + L_n,$$

pois m é inteiro positivo e $L_n \geqslant F_n$, para $n \geqslant 1$. Isso feito, temos que

$$2m = F_n + F_{n-1} + F_{n+1} \Leftrightarrow 2m = 2F_{n+1} \Leftrightarrow m = F_{n+1}.$$

Portanto, se t é número de Fibonacci, então, m também será, absurdo. □

Proposição 3.3.8. *Se $m \in \mathbb{Z}$, então, $5m^2 \pm 20$ é um quadrado perfeito se, e somente se, m for um número de Lucas.*

Demonstração. Multiplicando por 5 a equação $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ (Proposição 3.3.5), temos

$$5L_n^2 - 20(-1)^n = 25F_n^2,$$

que é quadrado perfeito para todo n. □

A prova da recíproca deixaremos de lado uma vez que a mesma foge do propósito desse trabalho. Para o leitor que se interesse por tal demonstração,pode ser encontrada em [4].

Proposição 3.3.9. *Se* $m \geqslant 2$ *e* $n \geqslant 1$*. Então*

$$F_{n-1} - mF_n \equiv (-1)^n m^n \pmod{m^2 + m - 1}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em n.

Primeiramente vamos ressaltar que a proposição acima também se verifica para os casos em que $n \geqslant 0$ porém, como nosso estudo não enfatiza os casos em que a sequência de Fibonacci possui índices inteiros negativos, vamos utilizar com base de indução, $n = 1$. Desta forma, temos $F_0 - mF_1 = 0 - m \equiv (-1)^1 m^1 \pmod{m^2 + m - 1}$ em que o resultado é direto. Suponha agora que a congruência acima é válida para um número natural k onde $k \geqslant 2$. Então, vamos mostrar que este resultado também se verifica para o seu sucessor, $k + 1$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
F_k - mF_{k+1} &= (F_{k-2} + F_{k-1}) - m \cdot (F_{k-1} + F_k) \\
&= (F_{k-2} - mF_{k-1}) + (F_{k-1} - mF_k) \\
&\equiv (-1)^{k-1} m^{k-1} + (-1)^k m^k \pmod{m^2 + m - 1} \\
&\equiv (-1)^{k-1} m^{k-1} \cdot (1 - m) \pmod{m^2 + m - 1} \\
&\equiv [(-1)^{k-1} m^{k-1}] \cdot m^2 \pmod{m^2 + m - 1} \\
&\equiv (-1)^{k+1} m^{k+1} \pmod{m^2 + m - 1}.
\end{aligned}$$

□

Como consequência, se $m = 2$ e $n \geqslant 1$, então, $F_n - 2F_{n+1} \equiv (-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} \pmod 5$. Porém, sabemos que $2F_{n+1} - F_n = F_{n+1} + (F_{n+1} - F_n) = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
-L_n &\equiv (-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} \pmod 5, \\
L_n &\equiv (-1)^n \cdot 2^{n+1} \pmod 5.
\end{aligned}$$

Em especial, e para o interesse dessa pesquisa, temos ainda que

$$\begin{aligned}
L_i \equiv 1 \pmod 5 &\Leftrightarrow i \equiv 1 \pmod 4, \\
L_i \equiv -1 \pmod 5 &\Leftrightarrow i \equiv -1 \pmod 4.
\end{aligned}$$

Portanto, no que tange o desenvolvimento desta pesquisa, as identidades acima serão ferramentas importantes para o nosso objetivo final que é o estudo do comportamento das funções geradoras das sequências recorrentes de Fibonacci e de Lucas quando estas possuem valores inteiros.

Capítulo 4

Valores Inteiros de Funções Geradoras de Sequências Recorrentes

Neste capítulo relacionaremos os conceitos estudados nessa pesquisa sobre funções geradoras e relações de recorrência para mostrar condições suficientes em que as sequências de Fibonacci e de Lucas resultam em um número inteiro. Os principais resultados que serão mencionados nesse capítulo foram provados por Pongsriiam [6] que responde afirmativamente a uma conjectura de Hong em [3]. Iniciaremos respondendo ao seguinte problema que já foi foi proposto na OBM do ano de 2013.

Problema:(OBM/2013 - Nível 3 - Fase 1) Na sequência de Fibonacci $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$ cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{5}{32}+\frac{8}{64}+\frac{13}{128}+\cdots,$$

onde a n-ésima parcela é o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci dividido por 2^n?

No problema exposto, é fácil ver que a série dada é construída pela função $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ onde, F_n é um número de Fibonacci. Além disso, no capítulo 3 vimos que, $F(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ e portanto, para resolver o problema, basta calcularmos $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$. Essa igualdade é válida, pois, pelo Teste da Razão a série é convergente para $x = \dfrac{1}{2}$. Perceba ainda que $x = \dfrac{1}{2}$ implicou em $F(x) \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, para o aprofundamento desta pesquisa, vamos responder a seguinte questão:

Para quais valores de $x \in \mathbb{Q}$ temos $F(x) \in \mathbb{Z}$? E sob que condições isso se dá?

4.1 O Resultado de Fibonacci

Para respondermos a questão acima vamos utilizar a função geradora $F(x)$ da sequência de Fibonacci e demonstrar o próximo teorema [6].

Teorema 4.1.1. *Seja $F(x)$ a função geradora da sequência de Fibonacci, então, para todo $x \in \mathbb{Q}$ temos $F(x) \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $x = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$, para $n \geqslant 0$ ou $x = -\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$, para $n \geqslant 1$.*

Demonstração. Inicialmente iremos fazer a recíproca do teorema. Se $x = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$, então, substituindo em $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$, temos

$$F\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \frac{\dfrac{F_n}{F_{n+1}}}{1 - \dfrac{F_n}{F_{n+1}} - \dfrac{F_n^2}{F_{n+1}^2}}.$$

Prosseguindo,

$$F\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \frac{F_n \cdot F_{n+1}}{F_{n+1}^2 - F_nF_{n+1} - F_n^2}.$$

Agora, aplicando a Proposição 3.3.2 no denominador e fazendo as substituições convenientes, obtemos,

$$F\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = (-1)^n \cdot F_n \cdot F_{n+1}.$$

$\square$

A verificação de que $F\left(-\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right)$ é feito de maneira análoga à anterior.

Para a implicação direta do teorema, suponha inicialmente que $x \in \mathbb{Q}$ e $F(x) = k \in \mathbb{Z}$. Se $k = 0$, então, $x = \dfrac{F_0}{F_1} = 0$ que é racional. Agora, se $k \neq 0$, então,

$$\frac{x}{1-x-x^2} = k \iff kx^2 + (k+1)x - k = 0.$$

Resolvendo a equação em x, temos

$$x = \frac{-(k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2 + 4k^2}}{2k}.$$

Como x é um número racional, então, $(k+1)^2 + 4k^2$ é quadrado perfeito, digamos m^2 para algum $m \in \mathbb{N}$. Assim

$$5m^2 - 4 = 25k^2 + 10k + 1 = (5k+1)^2.$$

Pela Proposição 3.3.7, sabemos que $5m^2 - 4 = 25k^2 + 10k + 1 = (5k+1)^2$ para algum $m \in \mathbb{N}$ é quadrado perfeito se, e somente se, m for um número de Fibonacci. Dessa forma, $F_{2n+1} = m$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e, como consequência temos, $m = F_{2n+1}$ e $5k+1 = \pm L_{2n+1}$. Continuando, pela Proposição 3.3.9, temos ainda que

$$L_{2n+1} \equiv 1 \mod 5 \Leftrightarrow n \text{ é par.}$$
$$-L_{2n+1} \equiv 1 \mod 5 \Leftrightarrow n \text{ é ímpar.}$$

Como $\pm L_{2n+1} = 5k+1$, temos $k = \dfrac{L_{2n+1} - 1}{5}$ quando n é par ou, $k = \dfrac{-L_{2n+1} + 1}{5}$ quando n é ímpar.

Prosseguindo nossa demonstração, vamos precisar de outros resultados envolvendo congruência para os números de Fibonacci e de Lucas. Esses estão presentes no lema a seguir.

Lema 1. *Para $m \geqslant 1$, temos as seguintes expressões para $F_m \pm 1$ e $L_m \pm 1$.*

	$m \equiv 0 \pmod 4$	$m \equiv 1 \pmod 4$	$m \equiv 2 \pmod 4$	$m \equiv 3 \pmod 4$
$F_m - 1$	$F_{\frac{m+2}{2}} \cdot L_{\frac{m-2}{2}}$	$F_{\frac{m-1}{2}} \cdot L_{\frac{m+1}{2}}$	$F_{\frac{m-2}{2}} \cdot L_{\frac{m+2}{2}}$	$F_{\frac{m+1}{2}} \cdot L_{\frac{m-1}{2}}$
$F_m + 1$	$F_{\frac{m-2}{2}} \cdot L_{\frac{m+2}{2}}$	$F_{\frac{m+1}{2}} \cdot L_{\frac{m-1}{2}}$	$F_{\frac{m+2}{2}} \cdot L_{\frac{m-2}{2}}$	$F_{\frac{m-1}{2}} \cdot L_{\frac{m+1}{2}}$
$L_m - 1$	$L_{\frac{3m}{2}} \cdot L_{\frac{m}{2}}$	$5F_{\frac{m+1}{2}} \cdot F_{\frac{m-1}{2}}$	$F_{\frac{3m}{2}} \cdot F_{\frac{m}{2}}$	$L_{\frac{m+1}{2}} \cdot L_{\frac{m-1}{2}}$
$L_m + 1$	$F_{\frac{3m}{2}} \cdot F_{\frac{m}{2}}$	$L_{\frac{m+1}{2}} \cdot L_{\frac{m-1}{2}}$	$L_{\frac{3m}{2}} \cdot L_{\frac{m}{2}}$	$5F_{\frac{m+1}{2}} \cdot F_{\frac{m-1}{2}}$

A seguir, faremos a demonstração de dois dos resultados da tabela acima. Para isso, vamos utilizar as fórmulas de Binet, sendo que os demais podem ser provados de maneira análoga.

Demonstração. Se $m \equiv 1 \pmod 4$ então, $m = 4k+1 \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{2} = 2k \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2} = 2k+1$. Assim, para o produto $F_{\frac{m+1}{2}} \cdot L_{\frac{m-1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned}
F_{\frac{m+1}{2}} \cdot L_{\frac{m-1}{2}} &= \left(\frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{\alpha - \beta}\right) \cdot (\alpha^{2k} + \beta^{2k}) \\
&= \frac{\alpha^{4k+1} + (\alpha\beta)^{2k}\alpha - (\alpha\beta)^{2k}\beta - \beta^{4k+1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{4k+1} - \beta^{4k+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \\
&= F_m + 1.
\end{aligned}$$

□

Agora, se $m \equiv 3 \pmod 4 \Leftrightarrow m \equiv -1 \pmod 4$; ou seja, $m = 4k - 1$ ou ainda, $\dfrac{m+1}{2} = 2k \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{2} = 2k - 1$. Logo, para o produto $L_{\frac{m+1}{2}} \cdot L_{\frac{m-1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned}
L_{\frac{m+1}{2}} \cdot L_{\frac{m-1}{2}} &= (\alpha^{2k} + \beta^{2k}) \cdot (\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1}) \\
&= \alpha^{4k-1} + (\alpha\beta)^{2k} \cdot \beta^{-1} + (\alpha\beta)^{2k} \cdot \alpha^{-1} + \beta^{4k-1} \\
&= (\alpha^{4k-1} + \beta^{4k-1}) + \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right) \\
&= L_m - 1.
\end{aligned}$$

Prosseguindo com a prova do teorema, se aplicarmos adequadamente o Lema 1 substituindo o valor de k em $\pm L_{2n+1} = 5k - 1$, obtemos: $k = F_{n+1} \cdot F_n$ quando n é ímpar ou, $k = -F_{n+1} \cdot F_n$ quando n é par. Em seguida, substituindo k na equação $x = \dfrac{-(k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2 + 4k^2}}{2k}$ obtemos $x = \dfrac{-F_{n+1}F_n \pm F_{2n+1} - 1}{2F_nF_{n+1}}$, se n é par e $n \neq 0$ ou, $x = \dfrac{F_{n+1}F_n \pm F_{2n+1} - 1}{-2F_nF_{n+1}}$ se n é ímpar.

O que devemos fazer agora é analisar os dois casos acima.

Caso 1. n é um número natural par não nulo. Aplicando o Lema 1, podemos escrever

$$F_{2n+1} - 1 = F_{\frac{(2n+1)-1}{2}} \cdot L_{\frac{(2n+1)+1}{2}} = F_n \cdot L_{n+1},$$

e de forma análoga,

$$F_{2n+1} + 1 = F_{n+1} \cdot L_n.$$

Agora, basta substituirmos na equação $x = \dfrac{-(k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2 + 4k^2}}{2k}$ e aplicar a Proposição 3.3.1, obtendo

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-F_{n+1} + L_{n+1}}{2F_{n+1}} \\
&= \frac{-F_{n+1} + F_{n+2} + F_n}{2F_{n+1}}, \\
&= \frac{F_n}{F_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $x = \dfrac{-F_{n+1}}{F_n}$.

Caso 2. n é ímpar. De maneira semelhante ao que fora feito no caso 1, aplique o Lema 1 para escrever $F_{2n+1} - 1 = F_{n+1} \cdot L_n$ e $F_{2n+1} + 1 = F_n \cdot L_{n+1}$. Igualmente ao caso anterior, substitua - os na expressão apropriada de x e obtenha $x = \dfrac{-F_{n+1}}{F_n}$ ou $x = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.

Porém, ainda falta definirmos quais desses valores estão no intervalo de convergência da função $F(x)$. Para isso, vamos utilizar o corolário a seguir.

Corolário 1. *Seja* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$*, um número racional* x *no intervalo de convergência* $\left(-\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha}\right)$ *para qual* $F(x) \in \mathbb{Z}$ *tem a forma* $x = \dfrac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Aplicando a fórmula de Binet, podemos mostrar que $\left|\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right| > \dfrac{1}{\alpha}$ para todo n ímpar e, $\left|\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right| < \dfrac{1}{\alpha}$ para todo n par.

De Binet, sabemos que $\beta < 0 < \alpha$. Assim, para n ímpar, ao multiplicarmos a desigualdade por β^n, temos

$$\beta^{n+1} > \alpha \cdot \beta^n.$$

Adicionando α^{n+1} em ambos os lados, têm - se

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} > \alpha^{n+1} + \alpha \cdot \beta^n \Leftrightarrow \alpha^{n+1} - \alpha \cdot \beta^n > \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}.$$

Agora, dividindo ambos os lados por α, obtemos

$$\alpha^n - \beta^n > \left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} > \frac{1}{\alpha},$$

e portanto, $\dfrac{F_n}{F_{n+1}} > \dfrac{1}{\alpha}$, ou seja, $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ não está no intervalo de convergência.

No caso de n par e dadas as mesmas condições iniciais do caso anterior, temos

$$\beta^{n+1} < \alpha \cdot \beta^n.$$

Adicionando α^{n+1} em ambos os lados, têm - se

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} < \alpha^{n+1} + \alpha \cdot \beta^n \Leftrightarrow \alpha^{n+1} - \alpha \cdot \beta^n < \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}.$$

Dividindo por α, obtemos

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} < \frac{1}{\alpha},$$

e, portanto, $\dfrac{F_n}{F_{n+1}} < \dfrac{1}{\alpha}$. Conclusão, para n par $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ está no intervalo de convergência. □

O resultado análogo pode ser encontrado também para Sucessão de Lucas, conforme a próxima seção.

4.2 O Resultado de Lucas

Da mesma forma que foi feito na seção anterior, também podemos estudar a função geradora dos números de Lucas para obter um resultado análogo [6].

Teorema 4.2.1. *Para todo $x \in \mathbb{Q}$, temos $L(x) \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $x = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ ou, $\dfrac{L_n}{L_{n+1}}$ ou ainda, $-\dfrac{L_{n+1}}{L_n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ ou, $x = -\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. De forma análoga ao teorema anterior começaremos recíproca. Tome $x = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$, então, substituindo em $L(x)$ e aplicando Cassini, temos

$$L\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \frac{2F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+1}}{F_n \cdot F_{n+2} - (-1)^{n+1} - F_n \cdot F_{n+1} - F_n^2}.$$

Prosseguindo e aplicando Cassini, temos

$$\begin{aligned} L\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) &= \frac{2F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+1}}{F_n \cdot F_{n+1} + F_n^2 - (-1)^{n+1} - F_n \cdot F_{n+1} - F_n^2} \\ &= \frac{2F_n \cdot F_{n+2} - 2(-1)^{n+1} - F_n \cdot F_{n+1}}{-(-1)^{n+1}} \\ &= \frac{2F_n^2 + F_n \cdot F_{n+1} - 2(-1)^{n+1}}{-(-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Agora, realizando manipulações algébricas convenientes, temos

$$L\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \frac{F_{n+1} \cdot (2F_{n+1} + F_n)}{-(-1)^{n+1}},$$

aplicando a Proposição 3.3.1, obtemos

$$\begin{aligned} L\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) &= -\frac{F_{n+1} \cdot L_n}{(-1)^{n+1}} \\ &= (-1)^n \cdot F_{n+1} \cdot L_n. \end{aligned}$$

□

Para o caso, $F\left(-\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ ou $F\left(\dfrac{L_n}{L_{n+1}}\right)$ o resultado é obtido de maneira similar, ressaltando que a resposta deste é

$$L(x) = (-1)^{n-1} \cdot F_n \cdot F_{n+1}.$$

A implicação direta será feita de maneira semelhante ao teorema anterior. Suponha que $x \in \mathbb{Q}$ e $L(x) = k$ com $k \in \mathbb{Z}$. Se $k = 0$, então, $x = \dfrac{L_0}{L_1} \in \mathbb{Z}$. Agora, se $k \neq 0$, temos

$$\frac{2-x}{1-x-x^2} = k \Leftrightarrow kx^2 + (k-1)x + (2-k) = 0.$$

Resolvendo, temos

$$x = \frac{-(k-1) \pm \sqrt{5k^2 - 10k + 1}}{2k}.$$

E como $x \in \mathbb{Q}$, então, $5k^2 - 10k + 1$ é quadrado perfeito, digamos t^2 para algum $t \in \mathbb{N}$. Logo,

$$5k^2 - 10k + 1 = m^2,$$

multiplicando ambos os membros por 5 e, em seguida, adicionando 20, obtemos

$$5m^2 + 20 = 25(k-1)^2,$$

que é quadrado perfeito pela Proposição 3.3.8.

Assim, para algum $m \in \mathbb{N}$ têm - se

$$m = L_{2n+1} \text{ e } 25(k-1)^2 = 5m^2 + 20 = (5F_{2n+1})^2 \text{ (Proposição 3.3.8).}$$

Prosseguindo e aplicando convenientemente o Lema 1, temos

$$k = F_{n+1} \cdot F_n \text{ para todo } n,$$

o que implica que que $k = 1 \pm F_{2n+1}$. Assim, repetindo o processo de (4.1.1) obtemos

$$x = \frac{-F_{2n+1} \pm L_{2n+1}}{2(1 + F_{2n+1})} \text{ ou, } x = \frac{F_{2n+1} \pm L_{2n+1}}{-2(F_{2n+1} - 1)}.$$

Agora, falta analisarmos os casos quando n é par ou ímpar.

A análise é semelhante ao que fora feito no resultado de Fibonacci. E como já excluímos o caso $k = 0$, podemos perceber que $n \neq 0$ não teremos problemas. Em seguida, basta aplicar o Lema 1 para os denominadores $F_{2n+1} \pm 1$ e aos numeradores $\pm F_{2n+1} \pm L_{2n+1}$ e ainda utilizar a Proposição 3.3.6, para ver que

$$x = \frac{F_{2n}}{F_{n+1} \cdot L_n} = \frac{F_n \cdot L_n}{F_{n+1} \cdot L_n} = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Da mesma forma, obtemos os resultados para

$$x = \frac{F_{2n}}{F_n \cdot L_{n+1}}, \ \frac{-F_{2n+2}}{F_{n+1} \cdot L_n} \text{ ou } \frac{-F_{2n+2}}{F_n \cdot L_{n+1}}.$$

Agora, falta verificar qual desses valores racionais estão no intervalo de convergência. A prova é similar à prova do Teorema 4.1.1.

Corolário 2. *Um número racional x no intervalo de convergência $\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ tal que, $L(x) \in \mathbb{Z}$ é da forma $\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$ ou $\frac{L_{2n+1}}{L_{2n+2}}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Faremos a demonstração somente para o caso de $x = \frac{L_{2n+1}}{L_{2n+2}}$ uma vez que o outro já está demonstrado no corolário anterior.

Demonstração. De Binet, sabemos que $L_n = \alpha^n + \beta^n$. Também vimos que, $\beta < 0 < \alpha$. Para n ímpar e multiplicando a desigualdade por β^n, temos

$$\beta^{n+1} > \alpha \cdot \beta^n.$$

Adicionando α^{n+1} em ambos os lados, tem-se

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} > \alpha \cdot \beta^n + \alpha^{n+1}.$$

Dividindo por α, obtemos

$$\frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) > \alpha^n + \beta^n \Leftrightarrow \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}} < \frac{1}{\alpha},$$

e, portanto, $\frac{L_n}{L_{n+1}} < \frac{1}{\alpha}$, ou seja, está no intervalo de convergência.

No caso de n par é imediato que $\frac{L_n}{L_{n+1}} > \frac{1}{\alpha}$ não está no intervalo de convergência. □

Considerações Finais

Neste trabalho, analisamos sob a perspectiva de diferentes técnicas o estudo dos problemas de contagem, bem como suas diferentes interpretações por meio das funções geradoras. Ressaltamos que é possível resolver certos tipos de problemas combinatórios por meio de métodos não tão tradicionais do Ensino Médio. O desenvolvimento do raciocínio, isto é, reconhecer padrões, tirar conclusões e, com isso, aprender a organizar ideias serve para construir modelos próprios para solucionar esses problemas. Assim, acreditamos que cabe ao professor a iniciativa de apresentar tais abordagens nesse contexto, em especial, para estudantes do Ensino Médio.

A respeito do estudo de recorrências, com maior foco nas de segunda ordem, procuramos apresentar determinados conceitos em linguagem matemática formal. Entretanto, alguns estudantes têm problemas com esse tipo de linguagem, pois o estudo de recorrências requer muitas manipulações algébricas e, também, uma importante e cuidadosa observação de padrões, como por exemplo, o que ocorre na Sequência Fibonacci e uma de sua generalização, a Sucessão de Lucas.

Isto posto, procuramos de maneira bem peculiar relacionar essas importantes ferramentas da Matemática para apresentar um problema que acreditamos ter sido respondido nesta pesquisa. As condições para que a funções geradoras da Sequência de Fibonacci e de Lucas resultem em um número inteiro. Assim, concluímos percebendo que a Sequência de Fibonacci, bem como a Sucessão de Lucas permitem que sejam cada vez mais exploradas por meio de outras abordagens tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

Referências Bibliográficas

[1] BENJAMIM, A.T.; QUINN, J.J., Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003.

[2] HEFEZ, A., Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[3] HONG, D.S., When is the generating function of the Fibonacci numbers an integer?, *College Math.* J. 46 (2015), 110-112.

[4] KOSHY, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley, New York, 2001.

[5] MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P., Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[6] PONGSRIIAM, P., Integral values of the Generating Functions of Fibonacci and Lucas Numbers, College Math, J.48 (2017) 97-101.

[7] SANTOS, J.P.O.; MELO, J.P.; MURARI, I.T.C., Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.