UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS TRÊS LAGOAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WILLIAN PONTES GONÇALVES

MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA: A CHAVE PARA A LIBERDADE É O CONHECIMENTO

Três Lagoas – MS

2018

WILLIAN PONTES GONÇALVES

MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA: A CHAVE PARA A LIBERDADE É O CONHECIMENTO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT do curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato César da Silva

Três Lagoas – MS

2018

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFMS

GONÇALVES, Willian Pontes. MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA: a chave para a liberdade é o conhecimento. Dissertação (Mestrado) apresentada à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus de Três Lagoas para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 23 de Novembro de 2018.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Renato César da Silva
UFMS/CPTL
Orientador

Assinatura: Renato Cesar da Silva Julgamento Aprovado

Prof. Dr. Edivaldo Romanini
UFMS/CPTL

Assinatura: Edivaldo Romanini Julgamento Aprovado

Profa. Dra. Sandra Cristina Marchiori de Brito
UFMS/CPTL

Assinatura: SCMarchiori Julgamento Aprovado

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, fizeram-se presentes nestes mais de dois anos de trabalho, dedicando parte de seu tempo a engrandecer o conhecimento científico.

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio e paciência.

Ao Prof. Dr. Renato César da Silva por me acompanhar nessa jornada, contribuindo para o meu crescimento pessoal e profissional.

A todos os professores que não medem esforços à formação de bons profissionais e à melhoria da escola pública.

À Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus Bauru, pela oportunidade de iniciar meus estudos na pós-graduação.

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus Três Lagoas, por aceitar minha transferência, acolhendo-me no decorrer do curso.

Renunciar à liberdade é renunciar à qualidade de homem, aos direitos da humanidade e até aos próprios deveres.

(ROUSSEAU, Jean-Jacques)

RESUMO

GONÇALVES, Willian Pontes. **Matemática e Educação Financeira**: a chave para a liberdade é o conhecimento. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2018.

Este trabalho visa oferecer alternativas pedagógicas ao aprendizado de conceitos e técnicas que possibilitem ao aluno e cidadão um comportamento mais racional em relação ao consumo, assim como compreender o funcionamento do mercado financeiro e suas armadilhas. Abordando uma metodologia de conhecimento, voltada principalmente aos benefícios e perigos contidos em cada tomada de decisão, o trabalho foca seus esforços na utilização de ideias matemáticas que possibilitem buscar respostas a alguns problemas contemporâneos. Neste sentido, espera-se que este trabalho dê ao professor os meios necessários ao crescimento de seus alunos; ideias, por exemplo, de como um comportamento saudável nas operações de consumo se relacionam com a correta utilização do dinheiro e, consequentemente, com a melhora da qualidade de vida.

Palavras-chave: Educação Financeira. Matemática. Planejamento.

ABSTRACT

GONÇALVES, Willian Pontes. **Mathematics and Financial Education**: the key to freedom is knowledge. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2018.

This paper aims to offer pedagogical alternatives to the learning of concepts and techniques that enable the student and citizen to be more rational in relation to consume, as well as understanding how the financial market works and its traps. With a methodology of knowledge, focused mainly on the benefits and dangers we can find in each decision making, the work focuses the effort on the use of mathematical ideas that make it possible to search for answers to some contemporary problems. Therefore, it is expected this paper gives the teacher the necessary means for the improvement of their students; for example, give ideas of how a healthy behavior, when consuming, has a relation to a better use of Money and, consequently, an improvement in the life quality.

Keywords: Financial Education. Mathematics. Planning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANATEL	Agência Nacional de Telecomunicações
CNDL	Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas
CNPJ	Cadastro Nacional da Pessoa Jurídica
FUNDEB	Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica
FUNDEF	Fundo de Manutenção de Desenvolvimento do Ensino Fundamental
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
SAC	Sistema de Amortização Constante
SAF	Sistema de Amortização Francês
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SPC	Serviço de Proteção ao Crédito

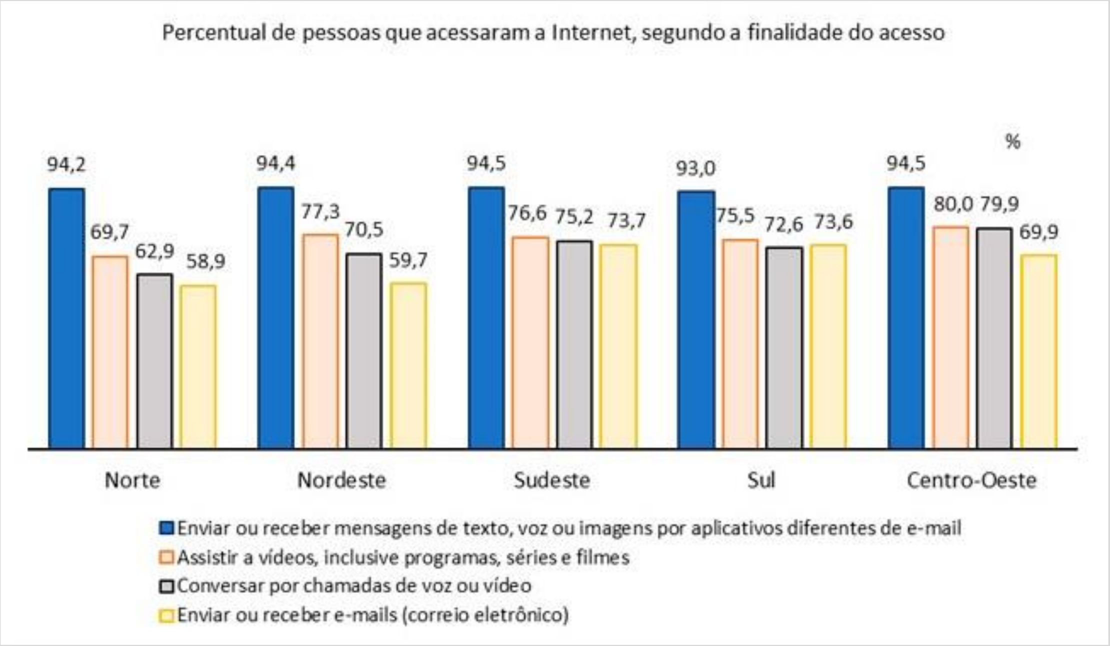
SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em tempos de globalização, é compreensível que a tecnologia esteja cada vez mais presente na vida das pessoas, assim como as constantes mudanças econômicas e sociais. De fato, não fosse a História e sua magnífica capacidade de imortalizar os acontecimentos, seria difícil de acreditar nas comparações entre a sociedade de um passado não muito longínquo e a do presente.

Assim como os inúmeros ramos da Ciência, a Matemática também evoluiu com o passar dos anos, trazendo consigo o principal motor da transformação em sociedade; o avanço tecnológico. Como consequência do progresso, a chegada dos computadores e da internet possibilitou que grandes quantidades de informações passassem a fazer parte do cotidiano das pessoas. Uma explosão de conhecimento que, por sua vez, deu voz à seletividade, ou seja, instrumentos como computador e a internet passaram a ser usados de acordo com a preferência pessoal; em geral, nas conversas informais e na busca pelo entretenimento.

Figura 1 – Utilização da Internet



Fonte: www.agenciadenoticias.ibge.gov.br

O gráfico anterior corrobora que o interesse maior da população brasileira não está na aquisição do conhecimento; estudar pode até ser considerado um tema importante, entretanto, tal hábito não consta na lista de prioridades de muitos brasileiros. Partindo-se dessa constatação, o estudo “Políticas públicas para redução do abandono e evasão escolar de jovens", realizado pelo Ensino Superior em Negócios, Direito e Engenharia (Insper), alerta para os altos índices de evasão e abandono escolar. Segundo o estudo (pag. 3):

> No Brasil, há atualmente cerca de 10 milhões de jovens entre 15 e 17 anos [...]. No entanto, 1,5 milhão de jovens sequer se matricula no início do ano letivo. Apenas 8,8 milhões de jovens matriculam-se e desse total, 0,7 milhão abandonam a escola antes do final do ano letivo. Como resultado dessa elevada evasão e abandono, apenas 6,1 milhões de jovens entre 15 e 17 anos (59% do total) concluem a educação média com no máximo um ano de atraso.

O estudo não menciona, mas há, ainda, aqueles que mesmo estando matriculados, tratam com desdém o processo escolar. O aluno que mantém essa prática tende a se tornar um adulto com conhecimento deficitário em várias áreas da Ciência, contribuindo para o aumento da desigualdade social, do desemprego, e outros transtornos sociais individuais e coletivos. Nesse sentido, não resta dúvida que este é um dos principais gargalos da educação brasileira.

Exemplificando o pressuposto anterior, tem-se a Matemática e a Educação Financeiras como fiéis exemplos de áreas cujos conhecimentos são essenciais à melhora da qualidade de vida de um indivíduo, assim como à saúde econômica de uma nação. Portanto, negar esse aprendizado é, também, atrair consequências negativas, pois quando o cidadão negligencia a forma como trata seu dinheiro, por exemplo, ele dá um grande passo em direção ao obscuro mundo do consumismo, aumentando as chances de um descontrole financeiro, bem como de tornar-se inadimplente na eventual ocorrência de um imprevisto.

De modo a ratificar tais afirmações, importantes órgãos ligados à economia como o Serviço Central de Proteção ao Crédito e a Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas contribuem com dados estatísticos:

> O cenário macro econômico do país tem contribuído para o alto nível de endividamento dos brasileiros, somando à falta de controle das finanças da população. [...] dentre os principais vilões da inadimplência, os mais citados são a perda de emprego (37%), que chega a 38% nas classes C e D, a redução da renda (24%) e a falta de controle financeiro (12%). (SPC Brasil e CNDL, 2018)

Quando muitas pessoas ficam impedidas de comprar, devido às restrições dos órgãos de proteção ao crédito, é consequente que as empresas e o comércio sintam uma diminuição em suas vendas, e que, dependendo da intensidade, tal retração resulte na demissão de funcionários e até na própria falência da empresa, aumentando, assim, a “bola de neve” do fracasso econômico.

A partir desta análise, percebe-se a importância de um aprendizado voltado à compreensão do dinheiro, à habilidade de fazer escolhas conscientes e, por último, mas não menos importante, que leve em consideração a busca por uma melhor qualidade de vida pessoal e financeira.

Portanto, sob um olhar mais específico, este trabalho objetiva levar a professores e gestores:

- Alternativas para o uso da matemática em operações cotidianas do mercado financeiro, apoiando-se em exemplos relacionados à vida do aluno ou de sua família;
- Conhecimento sobre armadilhas escondidas nas compras realizadas de forma parcelada;
- Compreensão acerca dos comportamentos saudáveis na lida com o dinheiro e nas relações de consumo;
- Evidências que ratifiquem o uso do planejamento como forma segura à compra de um produto ou serviço;
- Informações que ajudem na construção de uma educação financeira e na busca por uma melhor qualidade de vida.

Para que tais anseios comecem a tomar forma, a cronologia deste trabalho sequencia um conjunto de informações necessárias ao estudo e aprendizado de teorias e práticas educacionais enraizadas a um contexto financeiro, bem como à aplicação de tais conhecimentos àqueles que ajudam ou ajudarão a construir uma sociedade mais justa e estável, sejam os alunos do ensino médio ou qualquer ente da sociedade que esteja receptivo aos conhecimentos da Ciência.

A seguir, têm-se alguns parágrafos que evidenciam, superficialmente, o itinerário percorrido por este trabalho.

O capítulo 2 foca seus esforços numa abordagem aos aspectos gerais da educação brasileira; sua história, desenvolvimento, e as constantes mudanças legais que a levaram aos parâmetros atuais. Destaca-se, igualmente, as contribuições científicas que, em grande parte, vieram auxiliar os profissionais desta área a lidar com os obstáculos que apareceram no decorrer das décadas.

As teorias científico-matemáticas alicerçam o capítulo 3. Este, por sua vez, se utiliza de demonstrações, fórmulas, exemplos e aplicações para propiciar veracidade e sentido ao conhecimento, particularmente aos problemas financeiros relacionados no presente trabalho.

Quando se propõe um problema que possui direta relação com a vida do indivíduo, busca-se uma alternativa para tornar o aprendizado mais interessante e eficaz. Carregando essa bandeira, o capítulo 4 apresenta alguns exemplos de atividades que visam dar ao leitor um conhecimento diferenciado e relevante sobre assuntos de interesse geral. Além do mais, veem-se as atividades como norteadoras do trabalho do professor, mostrando opções de como levar aos alunos conceitos importantes de matemática e educação financeira.

Por fim, o capítulo 5 objetiva mostrar os anseios que se espera alcançar com o presente trabalho, deixando claro que por mais que se busquem alternativas para a aprendizagem de um conteúdo, a individualidade de cada pessoa ou grupo fará com que seja impossível prever os resultados com perfeição.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, busca-se fazer uma breve análise da educação brasileira em seu aspecto legal e estrutural, bem como elencar alguns problemas acerca do ensino de matemática e o seu reflexo no comportamento da população.

2.1 O SISTEMA EDUCACIONAL BRASILEIRO

A educação vigora entre os principais pilares que sustentam a saúde e o progresso de uma nação. É através dela que segmentos vitais para o crescimento de um país conseguem se desenvolver e, consequentemente, se fortalecer. A exemplificar, setores como indústria, comércio, agropecuária e serviços.

Dada sua grande importância, é sensato que legisladores se preocupem em aprovar Leis que norteiem a educação, guiando-a em um caminho saudável e próspero, engrandecendo tanto às pessoas quanto o país. No Brasil, tal processo não poderia ser diferente, os Deputados Federais e Senadores da República são os principais responsáveis pela aprovação das referidas Leis, entre as quais, podem-se citar:

- Constituição Federal de 1988;
- Estatuto da Criança e do Adolescente (Lei nº 8069 de 1990);
- Lei de Diretrizes e Bases da educação nacional (Lei nº 9394 de 1996);
- FUNDEF (Lei nº 9424 de 1996);
- FUNDEB (Lei nº 11494 de 2007);
- Plano Nacional da Educação (Lei nº 13005 de 2014);
- Parâmetros Curriculares Nacionais;
- Diretrizes Curriculares Estaduais.

Encontram-se diversas definições para a palavra educação, entretanto, uma delas se mostra singela, porém profunda, encontrando-se em nossa Carta Maior, a Constituição Federal do Brasil de 1988. Seu 205º artigo diz:

> A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno

> desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (BRASIL, 1988)

A Lei de Diretrizes e Bases da educação nacional (LDB - Lei 9394/1996) é a mais importante Lei dedicada exclusivamente à educação brasileira. Ela regulamenta o sistema educacional brasileiro, além do que, assim como a Constituição Federal, contribui consistentemente para o entendimento do significado da educação no Brasil. Segundo o seu 1º artigo:

> A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais. (BRASIL, 1996)

E, ainda:

> A educação dever da família e do Estado, inspirado nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (BRASIL, 1996)

De um ponto de vista geral, no que diz respeito à educação brasileira, entende-se que, tanto a Constituição Federal do Brasil de 1988 quanto às demais Leis, Parâmetros e Diretrizes Curriculares visam por objetivo comum, embasar os diversos conjuntos de ações voltados a garantir uma educação de qualidade à população brasileira.

Na tentativa de atingir tal objetivo, dividiu-se a educação brasileira em etapas. Desse modo, procura-se atender melhor as expectativas e necessidades de cada indivíduo, respeitando as características de cada um.

2.2 EDUCAÇÃO BÁSICA: PERSPECTIVA LEGAL

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a educação básica, constituída em educação infantil, ensino fundamental e ensino médio, tem por finalidades desenvolver o educando, assegurando-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

A educação infantil, primeira etapa da educação básica, tem como finalidade o desenvolvimento integral da criança de até 5 (cinco) anos, em seus aspectos físico, psicológico, intelectual e social, complementando a ação da família e da comunidade.

O ensino fundamental obrigatório, com duração de 9 (nove) anos e gratuito na escola pública, inicia-se aos 6 (seis) anos de idade e tem por objetivo a formação básica do cidadão mediante:

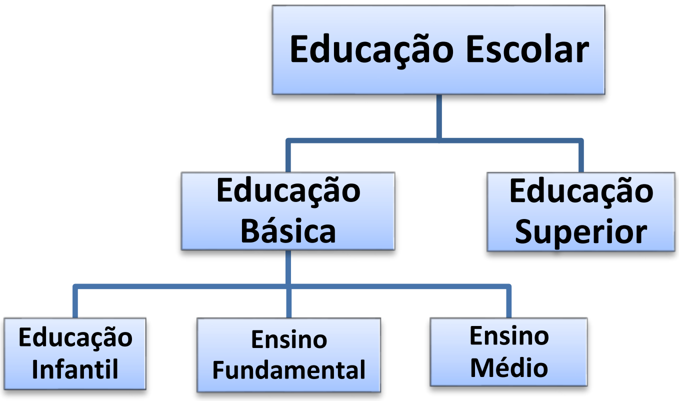
- O desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
- A compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores que se fundamentam a sociedade;
- O desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores;
- O fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, tem como finalidade:

- A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento dos estudos;
- A preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
- O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

- A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Figura 2 – Educação Escolar do Brasil



Fonte: Autor.

Embora presente no organograma anterior, não cabe aqui um detalhamento da Educação Superior. Este pode ser visto em diversos artigos científicos que se mostrarão muito mais esclarecedores. O foco deste trabalho, como os leitores perceberão, está na Educação Básica.

2.3 ESCOLA E SOCIEDADE CONTEMPORÂNEA

Num rápido olhar em direção ao passado brasileiro, mais precisamente entre as décadas de 60 e 70, é possível encontrar grandes disparidades entre a sociedade e a escola da época e a de hoje.

Segundo Lima e Júnior (2016, p.3):

> Nos anos 60, a educação era, sobretudo, considerada um instrumento de mobilidade social. Neste quadro, além das funções de socialização e formação, a educação devia dar ‘status’ aos indivíduos. A educação representava, para o indivíduo, a possibilidade de ascensão na hierarquia de prestígio que caracterizava a estrutura piramidal da sociedade.

Estando em um momento de incertezas, a escola da época segregava a população na medida em que não conseguia atender a todos. Acrescenta-se a este fato, os altos índices de evasão e retenção que contribuíam para o afastamento das pessoas do convívio escolar, assim como para o grande número de analfabetos. A título de exemplo, de acordo com Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), órgão vinculado ao Ministério da Educação e Cultura, no início dos anos 60, havia uma taxa de quase 40% de analfabetos (maiores de 15 anos) no Brasil.

Nas décadas posteriores, importantes mudanças foram sendo implementadas no sentido de diminuir os níveis de segregação, abandono e retenção, consequentemente, do analfabetismo. Destacam-se algumas das principais Leis vindas a partir do final da década de 60, estas com o intuito de modernizarem a primeira LDB, promulgada em 1961:

- Lei 5.540 de 28 de novembro de 1968;
- Lei 5.692 de 11 de agosto de 1971;
- Lei 7.044 de 18 de outubro de 1982;
- Constituição Federal do Brasil de 1988;
- Lei 9.131 de 24 de novembro de 1995;
- Lei 9.192 de 21 de dezembro de 1995;
- Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996;
- Lei 12.796 de 4 de abril de 2013.

Desde os primórdios da educação no Brasil, a segregação se fez presente no ambiente escolar. Nesse sentido, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1996 trouxe uma grande mudança. Em seu artigo 4º; inciso I, a Lei estabeleceu a todos a garantia de acesso ao Ensino Fundamental gratuito. Posteriormente, esse direito foi estendido a todos entre 4 e 17 anos pela Lei 12.796 de 2013.

Se por um lado os legisladores modernizaram as Leis voltadas à educação, por outro, a escola, presa ao passado, continua tendo dificuldade em acompanhar as grandes mudanças que vem acontecendo.

Com o advento do século XXI, o desenvolvimento de modernas tecnologias e a universalidade do ensino, novos anseios e perspectivas surgiram e, com eles, inúmeros problemas. Os dados negativos envolvendo o número de professores, qualificação, métodos de ensino, rendimento escolar, infraestrutura, políticas públicas, entre outros, aliados ao aumento da pesquisa científica no Brasil, fez explodir uma série de críticas ao sistema de ensino como um todo.

Dentre as inúmeras análises, alguns pesquisadores apoiam-se no fato de que os alunos estão em constante mudança no decorrer do tempo e, portanto, diferem cada vez mais daqueles de 40 ou 50 anos atrás. Nesse sentido, entendem que a escola e o ensino também precisam acompanhar tais transformações, ou seja, não podem ser os mesmos de décadas anteriores.

Prensky (2001, p.1) tem a seguinte visão acerca do aluno atual:

> Nossos alunos mudaram radicalmente. Os alunos de hoje não são os mesmos para os quais o nosso sistema educacional foi criado. Os alunos de hoje não mudaram apenas em termos de avanço em relação aos do passado, nem, simplesmente, mudaram suas gírias, roupas, enfeites corporais ou estilos, como aconteceu com as gerações anteriores. Aconteceu uma grande descontinuidade. [...] um evento no qual as coisas são tão mudadas que não há volta.

No contexto dessa mudança, podem-se elencar inúmeras características que corroboram com a afirmação, a principal delas, talvez, esteja no fato de que os métodos de ensino usados por décadas (datam-se do tempo em que as escolas ainda eram para poucos) começam a se tornar um tanto quanto ineficazes. Desse modo, visando contribuir para a melhoria da educação brasileira, diversos pesquisadores embrenham-se por esse mundo, estudando novas estratégias na esperança de que sua implementação reduza o abismo entre as necessidades atuais do aluno e o conservadorismo educacional.

2.3.1 Aprendizagem Significativa

Psicólogo de Educação estadunidense, David Paul Ausubel (1918-2008) veio de família judia. Desde criança, era contra os métodos mecânicos de ensino da época e suas formas de punição, por isso, dedicou-se à busca pela melhoria do verdadeiro aprendizado. (WIKIPÉDIA, 2018).

Segundo Ausubel (1968, p. 59), “Se eu tivesse que reduzir toda a Psicologia da Educação a um único princípio, formularia este: de todos os fatores que influenciam a aprendizagem, o mais importante consiste no que o aluno já sabe. Investigue-se isso e ensine-se ao aluno de uma forma consequente”. Em outras palavras, para que a aprendizagem aconteça, é necessário pressupor o ensino a partir do conhecimento já adquirido pelo aluno.

2.3.2 Contextualização

Quando se pensa em uma sala de aula, imagina-se um grupo de jovens que traz consigo hábitos, costumes, crenças, ou seja, vivências diferentes. Nesse sentido, é perfeitamente plausível que todos esses valores acabem se chocando na sala de aula. Partindo desse pressuposto é que está a relação entre tais saberes e a contextualização no processo ensino-aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000, p. 78) preconizam o uso desta ferramenta pedagógica. Segundo o documento:

> Contextualizar o conteúdo que se quer aprendido significa, em primeiro lugar, que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto. Na escola fundamental ou média, o conhecimento é quase sempre reproduzido das situações originais nas quais acontece sua produção. Por esta razão, quase sempre o conhecimento escolar se vale de uma transposição didática, na qual a linguagem joga papel decisivo.

E, ainda:

> O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleça entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade.

De certo modo, vê-se a contextualização como uma forma de interação professor-aluno onde ambos aprendem juntos. Nesse método, o professor se abstém de ser o único detentor do conhecimento, enquanto o aluno passa de um mero espectador para um personagem mais ativo na aula ao ver que suas vivências estão ligadas ao que ele está aprendendo.

2.3.3 Protagonismo Juvenil

Ao estabelecer, em seu artigo 2º que a educação tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando e seu preparo para o exercício da cidadania, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional deixa claro que o protagonismo juvenil é uma teoria importante e que deve ser explorada no ambiente escolar.

Na visão de Costa (2001, p. 179):

> O termo protagonismo juvenil, enquanto modalidade de ação educativa é a criação de espaços e condições capazes de possibilitar aos jovens envolverem-se em atividades direcionadas à solução de problemas reais, atuando como fonte de iniciativa, liberdade e compromisso. [...] O cerne do protagonismo, portanto, é a participação ativa e construtiva do jovem na vida da escola, da comunidade ou da sociedade mais ampla.

Ainda de acordo com Costa (2001), o protagonismo juvenil evidencia o jovem como elemento central da prática educativa. Desse modo, ao “jogar” a responsabilidade em seus ombros mediante sua participação nas tomadas de decisões, sejam elas em âmbito escolar e/ou comunitário, espera-se que o jovem aumente, de certa forma, sua participação social, contribuindo para a construção de uma identidade com o ambiente ao qual está inserido. Portanto, engajado em questões mais sérias e diretamente ligadas as suas atividades diárias, o aluno terá a oportunidade de ter uma formação mais humanizada, obtendo uma grande oportunidade de praticar o pleno exercício da cidadania conforme também prevê o artigo 2º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

2.3.4 Novas Tecnologias

Quando se diz que os alunos de 40 ou 50 anos atrás não são, não agem e não se portam como os de hoje, muito se deve ao advento das novas tecnologias.

Segundo Dertouzos (1997, p. 106):

> Essas transformações se manifestam na transmissão de dados à velocidade da luz, no uso de satélites, na revolução da telefonia, na difusão da informática na maioria dos setores de produção e dos serviços, e na

> miniaturização dos computadores e sua conexão em redes em escala planetária.

No que se refere ao ambiente escolar, o uso das novas tecnologias tem se tornado uma alternativa ao tradicional tripé professor-giz-lousa. De acordo com Weinert et al. (2011, p. 53):

> [...] Já não é mais suficiente “ensinar por ensinar”. Sem metas a serem atingidas, a simples transmissão de informações não é válida se não agregar conhecimento. Considerando que as tecnologias são parte integrante do dia a dia das crianças e adolescentes, é responsabilidade dos gestores e professores, acolhê-las como aliadas em seu trabalho, utilizando-a como ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem e também formando para o uso correto dessas tecnologias.

Existem diversos tipos de novas tecnologias que podem ser usadas em sala de aula ou até mesmo fora dela. Dentre as quais, tem-se:

- Computador;
- Internet;
- Celular ou tablet;
- Sites de vídeo;
- Aplicativos de mensagem;
- Calculadoras científicas.

Vale ressaltar que o uso de uma nova tecnologia depende da infraestrutura escolar. Para tanto, não pode ser possível que ainda existam, principalmente nas regiões norte e nordeste do país, escolas em situações precárias, sem as mínimas condições de higiene e segurança. A tomar como exemplo, escolas com banheiros improvisados (fossas), alunos de várias séries em uma mesma sala, paredes e tetos em condições de cair em cima dos alunos, falta de merenda, água potável, entre outros problemas.

Tamanho descaso mostra o quão distante nossos governantes estão de políticas públicas que insiram, de fato, o cidadão brasileiro nessa era tecnológica, consequentemente, o quão desigual é o ensino público brasileiro.

Por fim, em se tratando do processo ensino-aprendizagem, as teorias pedagógicas citadas anteriormente, assim como tantas outras, objetivam a melhoria do ensino público. Elas podem auxiliar o professor nesses tempos de mudança e, portanto, não devem, em hipótese alguma, ser encaradas como a salvação para os problemas da educação brasileira.

2.4 A MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM DESAFIO À PARTE

Independente da quantidade de Leis que norteiam a educação brasileira, o grande número de pessoas envolvidas aliado às inúmeras diferenças que cada um possui, faz com que, na prática, nem sempre as coisas transcorram da forma como foram planejadas. Essas inconsistências revelam grandes problemas. A título de exemplo, tem-se a disciplina de Matemática.

O ensino e a aprendizagem em matemática dentro do ensino básico, mais especificamente a partir dos quatro últimos anos do ensino fundamental, têm sido alvo de inúmeras pesquisas com o intuito de tentar resolver um gargalo antigo da educação brasileira, a crônica dificuldade que os alunos têm em aprender e entender matemática.

Segundo VITTI (1999, p.19):

> O fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado por mais fracassos do que sucessos.

Já Moraes e Rens (2005 p. 404) afirmam que:

> A maioria dos alunos não sabe, não compreende ou simplesmente não gosta de Matemática, pois a metodologia utilizada é a mesma de seus avós, bisavós ou até mesmo tetravós. A abordagem ensino-aprendizagem utilizada pelos professores é tradicional, não se fundamenta implícita ou explicitamente em teorias empiricamente validadas, mas em uma prática educativa e na sua transmissão através dos anos.

Embora existam inúmeros estudos, descobrir as circunstâncias pelas quais há o insucesso em matemática, bem como as maneiras de amenizá-lo não é tarefa das mais fáceis, pois os motivos podem variar bastante de uma instituição para outra.

Nesse sentido, os tópicos relacionados, a seguir, evidenciam alguns dos problemas encontrados na escola pública e que podem contribuir, de certa forma, para o fracasso no ensino e aprendizagem da matemática:

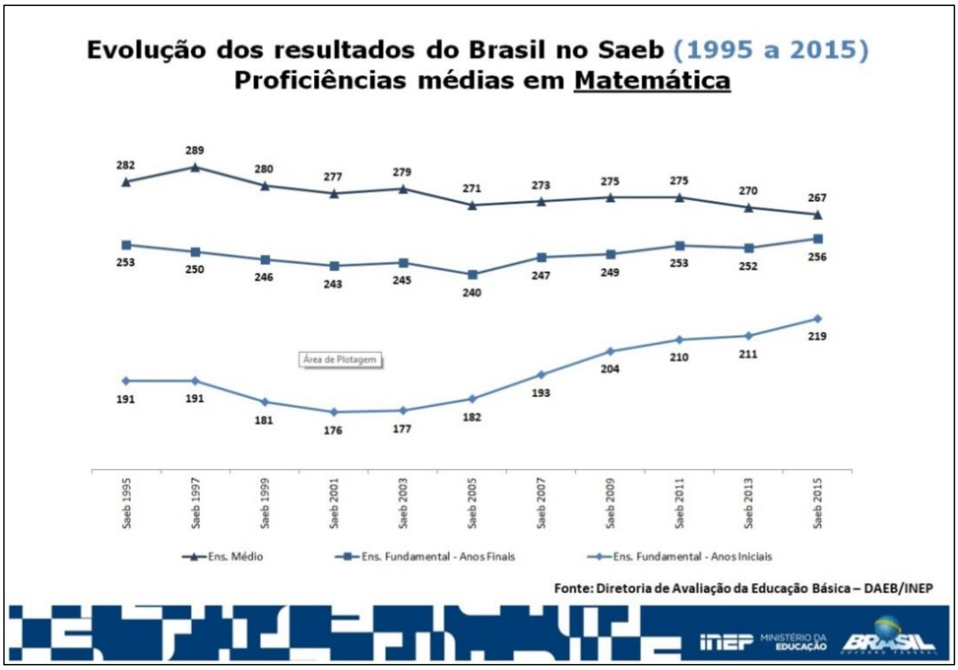
- Evasão escolar;
- Ensino inadequado ou insuficiente;
- Falta de professores;
- Professores mal qualificados;
- Desmotivação de alunos e professores;
- Violência escolar e na comunidade;
- Famílias desestruturadas;
- Infraestrutura precária.

O leitor precisa compreender que, independente de quais forem as razões, essa difícil intelecção no ensino e aprendizado tem criado gerações de homens e mulheres com conhecimentos pífios em matemática, havendo casos extremos em que a pessoa não confere um simples troco por não conseguir pensar mentalmente. Quando se chega a esse ponto, fica evidente que a sociedade brasileira tem em mãos um grande problema, necessitando urgentemente de atenção na busca por soluções, pois o progresso de uma nação está no caminhar de seu povo.

Sistemas nacionais e internacionais como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) corroboram estatisticamente com essa triste realidade e mostram o quão longe estamos de resultados minimamente aceitáveis quando o assunto é matemática.

O SAEB, sistema que avalia os estudantes desde a década de 1990, revela que os resultados acerca da proficiência em Matemática estão praticamente estagnados nesses últimos 20 anos, e que somente o Ensino Fundamental, em sua modalidade Anos Iniciais (1º ao 5º ano), obteve um aumento considerado relevante em seus resultados, conforme ilustra a imagem a seguir.

Figura 3 – Evolução do SAEB

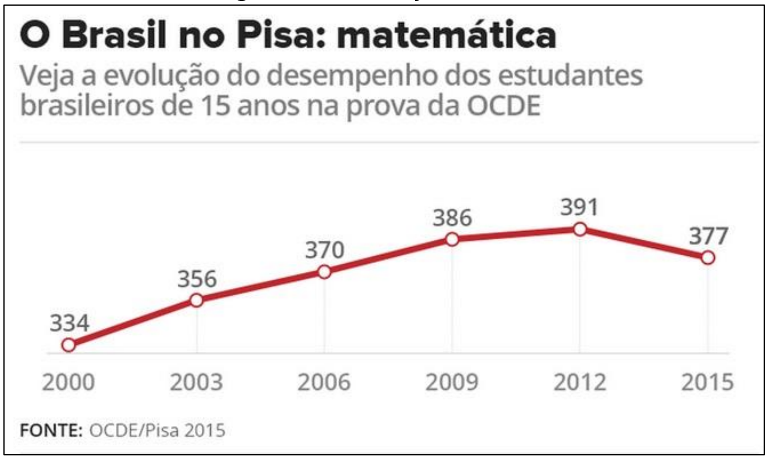


Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/resultados

Já o PISA, realizado desde 2000 e aplicado a cada 3 anos, é organizado pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) e compõe um rede mundial de avaliação de desempenho escolar.

Os países participantes da última edição do PISA, realizada em 2015, obtiveram uma média de 490 pontos. Nesse sentido, o gráfico a seguir ilustra a pontuação que o Brasil conquistou desde a edição de 2000. Percebe-se que a evolução brasileira, embora visível, ainda está aquém de resultados aceitáveis.

Figura 4 – Evolução do PISA



Fonte: https://g1.globo.com/educacao

O próprio relatório do PISA diz que 70% dos alunos avaliados no Brasil não conseguiram chegar ao nível 2, considerado o nível mínimo para se saber calcular, ou seja, 7 em cada 10 estudantes brasileiros não sabem fazer contas simples como multiplicação e divisão, ou mesmo resolver problemas simples de geometria.

Por outro lado, em meio às várias notas acerca das dificuldades com o ensino e o aprendizado da Matemática no Brasil, uma notícia que, a princípio, soa um tanto quanto paradoxal, destaca-se no cenário nacional. Na outra ponta da Educação, onde estão os níveis mais altos e complexos da Matemática, professores e alunos dos programas de mestrado e doutorado estão comemorando. O motivo é que o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) anunciou em janeiro de 2018 que o Brasil entrou para a elite mundial da pesquisa em Matemática. Contendo apenas 11 países (agora com o Brasil), o chamado Grupo 5 reúne grandes potências mundiais em pesquisa, ou seja, mesmo com todas as dificuldades da Educação Básica, o brasileiro possui capacidade para levar o Brasil ao topo da pesquisa mundial.

Entre os altos e baixos da educação (mais baixos do que altos), muitos poderiam achar que, no geral, tudo não passa de exagero, que o problema não é tão grande assim. Entretanto, a realidade mostra exatamente o contrário; que esse fracasso escolar em matemática está afetando direta e grandemente o desenvolvimento do país, pois, diferente do senso comum, é possível embasar tal afirmação, por exemplo, no conhecimento quase nulo que se tem de uma importante subárea da Matemática; a Matemática Financeira. Esta, por sua vez, está intimamente ligada à Educação Financeira, que é uma peça fundamental na grande engrenagem do país.

O que se propõe, a seguir, é o afunilamento da gama de problemas ao qual a Matemática está inserida, concentrando-se em uma análise das consequências que a má educação financeira da população pode trazer ao país e a temas importantes como economia, desemprego, qualidade e vida, entre outros.

2.5 A EDUCAÇÃO FINANCEIRA A PARTIR DA MATEMÁTICA

Dentre as inúmeras dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem da matemática, a educação financeira é, talvez, uma prioridade entre as outras, pois está diariamente interligada com a vida das pessoas e do país.

> Educação financeira é o processo de desenvolvimento da capacidade integral do ser humano de viver bem física, emocional, intelectual, social e

> espiritualmente. Educação financeira não é apenas o conhecimento do mercado financeiro com seus jargões, produtos, taxas e riscos, mas esse conhecimento faz parte. É chegar à sabedoria de perceber que a riqueza só serve para os vivos, e por mais rico que você seja, a riqueza material é temporária. (SILVA, 2004, P. 78)

Em uma linguagem mais clara, a educação financeira é o conjunto de ações que visa proporcionar conhecimento às pessoas acerca de um comportamento saudável no trato com o dinheiro e suas operações; é o domínio sobre o desejo da compra supérflua, extremamente difundida pelas grandes redes varejistas do país, ou seja, é o pensamento voltado para o futuro.

Nesse sentido, ao se olhar para o Brasil, vê-se um país que sofre com a falta dessa educação. Inúmeras pesquisas apontam que o brasileiro, em grande parte, não é educado financeiramente. Essa leviandade gera diversos problemas sociais, como o endividamento familiar, calote, restrição ao crédito, economia frágil, falência de empresas, desemprego, entre outros.

No Brasil, grandes redes varejistas possuem, em seu quadro de funcionários, profissionais responsáveis por estudar o comportamento do brasileiro com o intuito final de fazê-lo comprar mesmo sem necessidade. O principal expoente desta prática é o *Neuromarketing*.

> Neuromarketing é a união dos ecossistemas, neurociência e marketing, com o objetivo de mensurar os estados mentais conscientes e inconscientes do consumidor, transformando esse conhecimento em bens de consumo que curem, provisoriamente, a insatisfação do cliente, gerando um estado de fidelidade circunstancial. (PUREZZO, 2015, p. XXII)

Já Almeida, Arruda (2014 p. 282) consideram o *neuromarketing* como:

> Área proveniente da interdisciplinaridade entre conhecimentos da psicologia, neurociência, economia e marketing, que, através do estudo da neurofisiologia, busca complementar a compreensão sobre comportamento humano em suas relações com o mercado.

De maneira clara, o *Neuromarketing* procura estudar o comportamento cerebral do consumidor durante os processos de tomada de decisões. A partir de tais estudos, é possível identificar e testar quais estratégias de marketing podem surtir mais efeito no intuito de agradar e atrair um determinado público.

Tem-se, a seguir, imagens veiculadas por algumas dessas empresas utilizando o *Neuromarketing* como estratégia de aumento de vendas.

Figura 5 – Propaganda (a)

Fonte: www.magazineluiza.com.br

A figura anterior usa de apelo emocional, o termo “vem ser feliz” joga para o consumidor a ideia de que somente comprando nas lojas da rede se encontrará a felicidade. A empresa quer passar a ideia de que a felicidade está nas compras.

Figura 6 – Propaganda (b)

Fonte: www.casasbahia.com.br

Neste caso, utilizando pessoas com sorrisos estampados em seus rostos, a empresa também quer deixar claro que a alegria, a felicidade está atrelado ao consumo, ou seja, quem compra é feliz. Além disso, o relógio em tempo regressivo, a imagem de uma mulher em tom de espanto, a mensagem de desconto de 40% e o parcelamento em até 12x em letras garrafais, induzem o consumidor a não perder tempo e ir comprar já, sem ao menos fazer pesquisa ou pensar se realmente precisa comprar tal produto.

Figura 7 – Propaganda (c)

Fonte: www.caixa.gov.br

Na figura anterior, a utilização de pessoas sorridentes visa passar a mensagem de que a felicidade está no consumo, em pedir um empréstimo. Além disso, a imagem da praia ao fundo suscita o desejo por uma viagem. De certo modo, o impacto dessa mensagem àqueles aposentados que estão passando por momentos difíceis e estão vulneráveis emocionalmente, faz com que, inconscientemente, a pessoa acredite que esse é o caminho da felicidade, sem mesmo pensar se precisa realmente tomar esse empréstimo.

Em geral, esses modelos de propaganda apelarão para o emocional do indivíduo. Tentarão fazer com que a pessoa não pense racionalmente na hora de tomar certa decisão.

Essa prática sombria, quando funciona, tenderá a fazer com que um número muito grande de pessoas perca a noção sobre seus gastos e ganhos, como mostra a pesquisa do site do Serviço de Proteção ao Crédito:

> [...] Um estudo realizado em todas as capitais pelo Serviço de Proteção ao Crédito (SPC Brasil) e pela Confederação Nacional dos Dirigentes Lojistas (CNDL) revela que 45% dos brasileiros admitem não fazer um controle efetivo do próprio orçamento, percentual que sobe para 48% entre as pessoas das classes C/D/E e para 51% entre os homens. (SPC Brasil e CNDL, 2018)

Em muitos casos, o passo seguinte ao do não controle do orçamento pessoal é a inadimplência. A Serasa Experian (2018), outro importante órgão na lida com o crédito, aponta em uma de suas pesquisas que nem mesmo a crise no cenário político e econômico que perdurou nos últimos três anos nos país, teve impacto na nota de educação financeira dos brasileiros e que a inadimplência foi um fator crítico na vida da população brasileira, chegando a exorbitantes 61,1 milhões de brasileiros inadimplentes em novembro de 2017.

Também segundo a Serasa Experian (2018), o número de empresas com CNPJ negativado atingiu novo recorde em janeiro de 2018. Cerca de 5,4 milhões de empresas não podem adquirir qualquer tipo de crédito. Tal restrição dificulta novos investimentos, impedindo a contratação de novos trabalhadores, assim como colocando em risco os postos de trabalhos já existentes e preenchidos.

Números negativos como estes precisam começar a incomodar o leitor, no sentido de que mudanças precisam ser implementadas para que esses níveis diminuam. Talvez, uma maneira rápida (e mesmo assim um tanto quanto demorosa) de se começar a provocar tais mudanças, não esteja em tentar corrigir a população adulta, mas ensinar os mais jovens e até mesmo as crianças, de modo que não cometam os mesmos erros que os adultos de hoje, pois a capacidade de transformação de um indivíduo se mostra mais efetiva nos de pouca idade, do que em adultos que, muitas vezes, possuem um pensamento já consolidado.

Nesse ponto e, partindo-se do pressuposto anterior, é possível perceber que os pais e a escola são fundamentais no processo de aprendizado da Educação Financeira, entretanto, a se pautar pelos números das pesquisas citadas anteriormente, conclui-se que, em muitos casos, ambas as partes não estão cumprindo a função que lhes cabe de forma efetiva.

Independente dos pais terem trabalhado ou não a educação financeira com seus filhos, a escola como um ente transformador da sociedade precisa cumprir seu papel por completo, pois quando uma quantidade tão grande de brasileiros (na casa das dezenas de milhões) perde-se em seus planejamentos e gastos, em algum momento, a escola deixou de cumprir plenamente sua missão.

Quando se consulta os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e o Currículo do Estado de São Paulo para ver como os professores embasam-se ao trabalhar esse assunto, vê-se que ambos os documentos tratam tanto a Matemática Financeira como a Educação Financeira de forma tímida, discreta. No geral, tais conceitos estão implícitos em outras importantes subáreas da Matemática como, por exemplo, a Proporcionalidade e as Progressões Aritméticas e Geométricas.

A pergunta que cabe aqui é: “Porque se fala tanto na escola sobre Educação Física, Educação Ambiental e Educação Sexual, por exemplo, e essa mesma importância não é dada à Educação Financeira?”. Mais que uma enormidade de fórmulas e teoremas, o professor precisar utilizar a Matemática para transformar o pequeno cidadão, de modo que ele aprenda como ser um adulto pleno em nossa sociedade. Assim, é fato que a Educação Financeira caracteriza-se como um desses importantes caminhos, não podendo ser deixada de lado.

2.6 A MATEMÁTICA AUXILIANDO NA TRANSFORMAÇÃO SOCIAL

Desde os primórdios da humanidade, a Matemática vem sendo aprimorada na tentativa de resolver problemas relativos à época, entretanto, durante o decorrer da história, nem sempre essa ciência obteve êxito. Por isso, vale destacar que não é o objetivo deste trabalho encontrar soluções milagrosas aos problemas mencionados, mesmo porque, devido à complexidade das diferenças humanas, os resultados podem ser imprevisíveis. A ideia, aqui, é propor alternativas de trabalho que contribuam para a melhora do modo como se dá a transformação social do aluno através da Matemática. Neste caso, em especial, no uso da Matemática para a construção de uma Educação Financeira que leve mudanças às atitudes dos jovens de hoje; que os transformem em adultos mais conscientes haja vista às armadilhas do mercado financeiro, conhecendo seus limites e utilizando seus recursos com sabedoria.

Para que tais anseios comecem a tomar forma, é necessário mostrar aos alunos a importância da aquisição de saberes voltados à construção de uma educação financeira pessoal, assim como a comprovação de seus benefícios na melhoria da qualidade de vida.

Compreender os tipos de operações e jargões financeiros mais comumente utilizados pelo mercado vem a ser o primeiro passo na jornada pela busca desse conhecimento. Para tanto, a Matemática, dignamente detentora do título de Rainha das Ciências, tem se mostrado uma antiga aliada, trazendo imensas contribuições àqueles que caminham em direção ao saber. Portanto, não vem a ser novidade o fato de que interagir com o mercado financeiro, implique, também, em viajar pelo glorioso mundo da Matemática.

No próximo capítulo, serão elencados os principais conceitos matemáticos responsáveis pelo embasamento das informações financeiras; seu aprendizado é indispensável na construção de um comportamento saudável no que diz respeito às relações de planejamento, consumo e necessidade.

3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Em nosso mundo, diversos fenômenos sofrem mudanças constantemente, cada um com seus padrões e especificidades. A partir do momento que uma determinada mudança ocorre, uma ou mais vezes, por meio de padrões numéricos ou por uma taxa de crescimento ou decrescimento, ambas constantes, estar-se-á, direta ou indiretamente, falando das Progressões Aritméticas ou Geométricas.

No que concerne às Progressões, a seguir, serão apresentados de forma sucinta, conceitos e propriedades básicas que visarão um melhor entendimento do mundo financeiro existente dentro da Matemática.

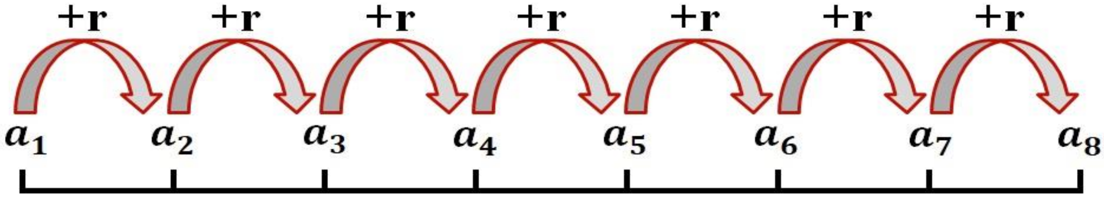
3.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Importante instrumento matemático, a Progressão Aritmética é usada, por exemplo, para descrever variações numericamente constantes de uma grandeza no decorrer de intervalos de tempos também constantes, a exemplificar, o cálculo de Juros Simples.

Segundo Iezzi e Hazzan (1977, p. 5-D):

> Chama-se Progressão Aritmética (P.A.) uma sequência dada pela seguinte equação de recorrência:
>
> $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$, para todo $n \in N$, $n \geq 2$, onde a e r são números reais dados.
>
> Assim, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo é a soma do anterior com uma constante r (chamada razão).

Figura 8 – Progressão Aritmética



Fonte: Autor.

Têm-se, a seguir, exemplos de sequências que são progressões aritméticas:

a_n = (3,9,15,21,...), onde $a_1 = 3$ e $r = 6$;

b_n = (13,10,7,4,1,-2,...), onde $b_1 = 13$ e r = -3;

c_n = (2,2,2,2,...), onde $c_1 = 2$ e $r = 0$.

Cada Progressão Aritmética mostra, implicitamente, uma importante relação, esta possibilita determinar termos de forma aleatória e não somente sequencial. Pela Figura 8, nota-se que $a_{n+1} = a_n + r$, $a_{n+2} = a_n + 2.r, \ldots$, $a_{n+k} = a_n + k.r$, para todo k∈N é uma relação sempre válida. Seguem dois exemplos:

Exemplo 3.1 Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é 12 e a razão é 7. Qual é o décimo sexto termo?
Solução: $a_1 = 12$ e $\mathrm{r} = 7$, assim: $a_{1+15} = a_1 + 15\mathrm{r}$. Logo, $a_{16} = 12 + 15 \text{ x } 7$ e, portanto, $a_{16} = 117$. Portanto, o décimo sexto termo vale 117.

Exemplo 3.2 Se o sétimo termo de uma PA é 31 e a sua razão é 11, qual será o seu primeiro termo? E o vigésimo quinto?
Solução: $a_7 = 31$ e $\mathrm{r} = 11$, assim: $a_{1+6} = a_1 + 6\mathrm{r}$. Desse modo, $31 = a_1 + 6 \text{ x } 11$. Logo, $31 = a_1 + 66$ e, com isso, $a_1 = 31 - 66 = -35$. Analogamente,
$a_{1+24} = a_1 + 24 \text{ x r}$, consequentemente, a_{25} = -35 + 24 x 11 = -35 + 264 = 229. Portanto, o primeiro e o vigésimo quinto termo valem, respectivamente, -35 e 229.

3.1.1 Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Dada uma progressão aritmética em que a_1, r e a_n são, respectivamente, o primeiro termo, a razão e o n-ésimo termo, é possível demonstrar que há uma fórmula geral que possibilita o cálculo de um termo qualquer dessa P.A.

De acordo com Crespo (1997), a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética é representada por $a_n = a_1 + (\mathrm{n}-1)\mathrm{r}$.

Demonstração: Pela própria definição de progressão aritmética, tem-se que $a_n = a_{n-1} + r$. Logo $a_n - a_{n-1} = r$. Desse modo:

$$a_2 - a_1 = r$$
$$a_3 - a_2 = r$$
$$a_4 - a_3 = r$$
$$\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = r$$

Através da adição de ambos os lados nessas (n-1) igualdades, obtém-se $a_n - a_1 = (\text{n}-1)\text{r}$, ou seja, $a_n = a_1 + (\text{n}-1)\text{r}$.

Exemplo 3.3 Uma progressão aritmética possui razão 13 e seu primeiro termo é -20. Determine o valor do centésimo vigésimo quarto termo.

Solução: Sendo $a_1 = -20$ e $\text{r} = 13$, então $a_{124} = -20 + (124\text{-}1)\text{x}13$. Desse modo, tem-se que $a_{124} = -20 + 123 \text{ x } 13 = -20 + 1599 = 1579$. Portanto, o centésimo vigésimo quarto termo desta PA é 1579.

Exemplo 3.4 Quantos múltiplos de 7 existem entre 20 e 510?

Solução: Os múltiplos de 7 compreendidos entre 20 e 510 formam a sequência (21,28,35,...,504) que é uma PA. Esta possui $a_1 = 21$, $\text{r} = 7$ e $a_n = 504$. Assim, a partir da fórmula do termo geral, conclui-se que $504 = 21 + (\text{n-}1)\text{x}7$. Desse modo, $\text{n} = 70$ e, portanto, há 70 múltiplos de 7 entre os números 20 e 510.

Exemplo 3.5 Júlio investiu um capital de R$ 2300,00. Definiu-se que ele receberia R$ 21,00 de juros por mês e que poderia retirar capital mais juro ao final de 5 anos. Sendo fixo o valor do juro, qual o valor total que Júlio retirou ao final desses 5 anos?

Solução: A sequência (2321, 2342, 2363, ...) que é uma PA, representa a evolução do capital investido por Júlio através dos meses. Como o juro é calculado mensalmente, é necessário transformar 5 anos em meses, a saber, 60. Assim, pela fórmula do termo geral, tem-se que $a_{60} = 2321 + (60-1)21 = 2321 + 1239 = 3560$. Portanto, ao final de 5 anos, Júlio retirará um total de R$ 3560,00.

A este último exemplo, faz-se necessário observar que o valor 2300 não pode ser indicado como primeiro termo da PA, pois o início do investimento se dá no mês zero, ocorrendo a incidência do juro apenas após um mês. Dessa maneira, o número definido como primeiro termo da progressão aritmética é 2321 que é o capital inicial mais o valor do juro de um mês de aplicação, ou seja, a_1 representa o valor do montante após um mês de aplicação, a_2 o valor do montante após dois meses de aplicação, a_3 o valor do montante após três meses de aplicação e assim sucessivamente.

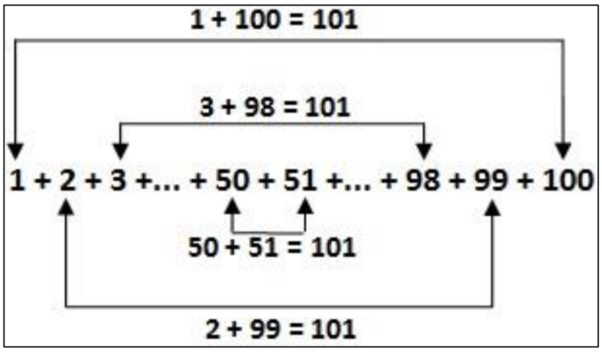
3.1.2 Soma dos termos de uma P.A.

Existem muitas histórias curiosas e pitorescas envolvendo matemáticos famosos. Conta-se, em uma delas, sobre o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Certa vez, em uma escola cujo um professor era tido como muito exigente, o mesmo, para manter a classe ocupada e em silêncio, pediu para que os alunos somassem todos os números de 1 a 100. Gauss, que à época estava com dez anos, terminou quase que imediatamente o exercício, sendo o único a acertar o resultado (5050) e sem apresentar nenhum cálculo por escrito. Conta-se, ainda, que surpreso com a rapidez do aluno, o professor, então, quis saber como ele havia realizado o cálculo. (BEMFICA, 2012)

Ainda na visão de Bemfica (2012), Gauss teria observado que a soma dos termos equidistantes dessa PA é sempre 101, e que agrupando tais termos, dois a dois, continham 50 parcelas iguais a 101. Desse modo, Gauss apenas realizou uma multiplicação, ou seja, 50 x 101 = 5050.

Figura 9 – Soma dos termos de uma P.A.



Fonte: http://www.cmdpii.com.br/images/processo-seletivo-pdf/prova-concurso-6-ano-ensino-%20fundamental.pdf

A genialidade de Gauss contribuiu grandemente para o desenvolvimento da matemática e de outros ramos da Ciência. A soma dos termos de uma progressão aritmética é um bom exemplo de contribuição, pois reduz grandemente o tempo necessário para a realização do cálculo.

As propriedades, a seguir, visam provar, de fato, que em toda P.A. finita, a relação aplicada por Gauss é verdadeira:

A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos. (Xavier & Barreto, 2005).

Demonstração: Considera-se a PA (a_1, a_2, a_3,..., a_{k+1},..., a_{n-k},..., a_{n-1}, a_n) de razão r, onde a_{k+1} e a_{n-k} indicam dois termos genéricos equidistantes dos extremos. Como $a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)r = a_1 + kr$ e $a_{n-1} = a_n - r$, $a_{n-2} = a_n - 2r$,..., $a_{n-k} = a_n - kr$, tem-se que $a_{k+1} + a_{n-k} = (a_1 + kr) + (a_n - kr) = a_1 + a_n$. Portanto,
$a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$.

Ainda na visão de Xavier & Barreto (2005), a soma dos n primeiros termos de uma P.A. (a_1, a_2,..., a_n) é representado por S_n e calculado pela fórmula
$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

Demonstração: Seja S_n escrita em ordem crescente e decrescente:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$
Adicionando-se ambos os lados dessas igualdades, obtém-se:
$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$. Como a soma dos termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita são iguais a soma dos extremos, então $(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = \dots = (a_{n-1} + a_2) = (a_n + a_1)$.
Portanto, ao substituir cada expressão contida nos parênteses por $a_1 + a_n$, tem-se que $2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \leftrightarrow 2.S_n = n(a_1 + a_n)$ e, por fim, $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

Exemplo 3.6 Calcular a soma dos 20 primeiros termos da PA (4, 6, 8,...).
Solução: Sendo $a_1 = 4$ e $r = 2$, então $a_{20} = a_1 + 19r = 4 + 19 \text{ x } 2 = 4 + 38 = 42$. Com isso, $S_{20} = \frac{20(a_1+42)}{2} = \frac{20(4+42)}{2} = \frac{20.46}{2} = 10.46 = 460$. Portanto, a soma dos 20 primeiros termos da PA (4, 6, 8,...) é 460.

Exemplo 3.7 Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira. Qual o comprimento mínimo, em cm, da peça de madeira?
Solução: Como $a_1 = 60$ e $a_5 = 30$, então $S_5 = \frac{5(60+30)}{2} = \frac{5.90}{2} = 5.45 = 225$. Portanto, o comprimento mínimo da madeira deve ser de 225 centímetros.

3.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

A Matemática apresenta grande eficácia na colaboração com os demais ramos da Ciência, essencialmente nas buscas por soluções de problemas. O uso dessa interdisciplinaridade é uma alternativa ao tradicional e abre um leque de novas possibilidades. Além de ser um caminho sólido para diminuir a rejeição e o desestímulo com a disciplina, contribui para a contextualização do saber matemático.

Um modo eficaz de contextualizar o saber matemático está na forma como o conhecimento chega aos alunos. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais corroboram com essa ideia. Segundo os PCN’s (1997, p. 30):

> “O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino, cópias fiéis dos objetos das ciências”.

Ademais:

> “Esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é influenciado por condições de ordem social e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. É o que se pode chamar de contextualização do saber”.

Um bom ponto de partida nessa busca pela contextualização do saber matemático está nas progressões geométricas (P.G.) e no seu modo de unir a matemática a outras disciplinas. Os exemplos, a seguir, mostram algumas aplicações das P.G. nas várias áreas do conhecimento:

- Biologia: Proliferação ou mortandade de uma colônia de bactérias;

- Química: Acúmulo de determinado gás na atmosfera terrestre ou mesmo a taxa de decaimento radioativo de determinado elemento químico;
- Matemática Financeira: Cálculo de juros compostos de uma dada operação financeira;
- Geografia: Crescimento ou decrescimento populacional.

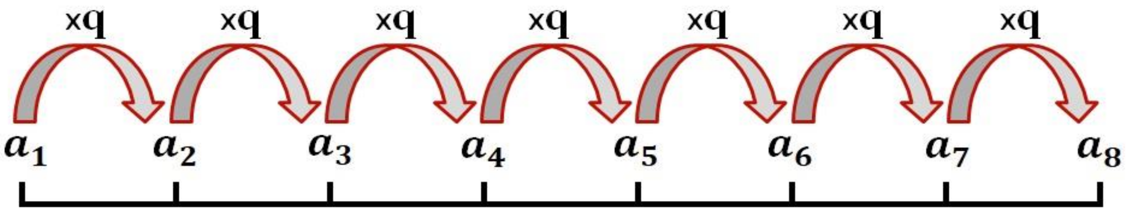
A seguir, serão analisados definições e exemplos que mostrarão como a progressão geométrica, objeto de estudo não só matemático, constitui uma poderosa ferramenta na resolução de problemas, em que determinada taxa de crescimento ou decrescimento é sempre constante.

De acordo com Crespo (1989), uma sequência de números não nulos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$ é uma progressão geométrica se, e somente se, o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, e o termo imediatamente anterior é constante.

A progressão geométrica é dita finita quando seus termos são finitos. A mesma será infinita quando seus termos forem infinitos.

Gelson Iezzi e Samuel Hazzan definem de outra maneira a progressão geométrica. Segundo Iezzi e Hazzan (1977, p. 18-D), chama-se progressão geométrica (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} . q \end{cases}$, para todo n ∈ N, n ≥ 2, onde a e q são números reais dados.

Figura 10 – Progressão Geométrica



Fonte: Autor.

A seguir, exemplos de sequências que são progressões geométricas:

a_n = (2,8,32,128,...), onde $a_1 = 2$ e $q = 4$;

b_n = (5,-10,20,-40,80,-160,...), onde $b_1 = 5$ e $q = -2$;

c_n = (2,0,0,0,0,...), onde $c_1 = 2$ e $q = 0$;

$d_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...)$, onde $d_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

De forma análoga às progressões aritméticas, cada progressão geométrica indica, implicitamente, uma importante relação, esta possibilita determinar termos de forma aleatória e não somente sequencial. Observando a Figura 10, pode-se notar que $a_{n+1} = a_n.q$, $a_{n+2} = a_n.q^2$, $a_{n+3} = a_n.q^3$,..., $a_{n+k} = a_n.q^k$, sendo válido para todo k ∈ N.

Exemplo 3.8 Em uma progressão geométrica, o primeiro termo é 3 e a razão é 5. Qual é o quarto termo?

Solução: $a_1 = 3$ e q $= 5$, assim: $a_{1+3} = a_1 \,.\, q^3$. Logo, $a_4 = 3 \,.\, 5^3$ e, assim, $a_4 = 375$. Portanto, o quarto termo vale 375.

Os exemplos, a seguir, serão mais complexos e exigirão que o professor adentre em conteúdos de outras disciplinas, sendo necessário ao educador, um conhecimento prévio de terminologias e interpretações não comumente utilizadas na matemática.

Exemplo 3.9 Uma amostra contendo 10 células sofre mitose constantemente e dobra sua quantidade a cada 30 minutos. Desse modo, quantas células haverá na amostra após 5 horas?

Solução: Note que $a_1 = 10$, q $= 2$ e o termo procurado é $a_{11} = a_{1+10}$, pois 5 horas correspondem a 10 blocos de 30 minutos cada. Assim, tendo que $a_{11} = a_{1+10} = a_1.q^{10} = 10 \,.\, 2^{10} = 10 \,.\, 1024 = 10240$. Portanto, chega-se a resposta de que, em 5 horas, a amostra conterá 10240 células.

Exemplo 3.10 O césio-137 possui meia-vida de 30 anos. Qual será a massa de uma porção de 48 gramas de césio-137 passados 180 anos?

Solução: A meia-vida é a quantidade de tempo característica de um decaimento exponencial, mais especificamente, é o tempo levado para que a massa de um certo elemento seja reduzida pela metade. Desse modo, percebe-se que $a_1 = 48$, q $= \frac{1}{2}$ e o termo desejado é $a_7 = a_{1+6}$, pois 180 anos correspondem a 6 blocos de 30 anos. Então, vê-se que $a_7 = a_{1+6} = 48 \,.\, (\frac{1}{2})^6 = 48 \,.\, \frac{1}{64} = 0{,}75$. Assim, após 180 anos, a massa inicial do elemento césio-137 será reduzida para 0,75 gramas.

Exemplo 3.11 A população de certa cidade é de 96000 habitantes. Segundo o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia Estatística), a taxa de crescimento populacional nessa cidade é de 2% ao ano. Se essa taxa se mantiver, qual será o número aproximado de habitantes que haverá nessa cidade decorridos 5 anos?

Solução: Para a resolução desse problema, serão utilizados dois métodos. O primeiro será pela definição das progressões geométricas e o segundo por meio do uso de uma tabela.

Considerando-se a resolução pelas progressões geométricas, tem-se que o valor de $a_1 = 96000$, $\mathrm{q} = 1{,}02$ e o termo procurado é $a_6 = a_{1+5} = 96000 \,.\, 1{,}02^5 = 105991{,}7$. Portanto, a população aproximada dessa cidade, decorridos 5 anos, é de 105992 habitantes.

Pela tabela, segue a resolução:

Tabela 1 – Aumento Populacional

POPULAÇÃO HOJE	96000
POPULAÇÃO APÓS 1 ANO	96000 x 1,02 = 97920
POPULAÇÃO APÓS 2 ANOS	96000 x 1,02 x 1,02 = 99878,4
POPULAÇÃO APÓS 3 ANOS	96000 x 1,02 x 1,02 x1,02 = 101876
POPULAÇÃO APÓS 4 ANOS	96000 x 1,02 x 1,02 x 1,02 x 1,02 = 103913,4
POPULAÇÃO APÓS 5 ANOS	96000 x 1,02 x 1,02 x 1,02 x 1,02 x 1,02 = 105991,7

Fonte: Autor.

Devido ao excessivo número de processos aritméticos que a resolução deste último exemplo possui, cabe ao professor perceber que trabalhar de forma tradicional pode não ser a melhor maneira de manter a atenção e o interesse pela disciplina. Utilizar novas tecnologias como, por exemplo, o tablet ou celular para o auxílio na realização de alguns cálculos, pode tornar a aprendizagem mais divertida e, ao mesmo tempo, adicionar um toque diferenciado à aula.

Tal importância às novas tecnologias no ambiente escolar é tamanha que no Estado de São Paulo foi sancionada a Lei nº 16567 em 6 de novembro de 2017 que permite o uso de telefone celular em sala de aula para fins pedagógicos.

O professor deve se permitir mudar, entender que a escola e a sociedade a sua volta estão em constante mudança, que o método de ensino-aprendizagem tradicional se mostra cada vez mais ineficaz diante de tantas novidades tecnológicas e que sua aula precisa acompanhar tais mudanças.

3.2.1 Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Dada uma progressão geométrica qualquer onde a_1 é o primeiro termo e q é sua razão, é possível demonstrar que há uma fórmula geral que possibilita determinar um termo qualquer dessa PG.

Para Crespo (1989), a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica é representada por $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$.

Demonstração: Por meio da própria definição de PG, tem-se que $a_n = a_{n-1}$. q $\leftrightarrow$ $\frac{a_n}{a_{n-1}} =$ q, onde $a_{n-1} \neq 0$. Assim:

$$\frac{a_2}{a_1} = \mathrm{q}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \mathrm{q}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \mathrm{q}$$

$$\ldots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \mathrm{q}$$

Aplicando a multiplicação em ambos os lados de todos os elementos dessas (n-1) igualdades, obtém-se $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} \leftrightarrow a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$.

3.2.2 Soma dos n Primeiros Termos de uma P.G.

Um dos preceitos básicos da matemática está na agilização de processos. Em um mundo cada vez mais tecnológico, a redução de tempo se tornou uma demanda mundial. Em todo o mundo, cientistas e pesquisadores ligados à indústria, comércio, agricultura e serviços em geral, se esforçam na tentativa de encontrar métodos que acelerem determinado procedimento ou operação.

De forma semelhante, ao somar um número finito de termos de uma progressão geométrica, operar termo a termo, na maioria dos casos, não é a opção mais adequada no que diz respeito ao tempo, pois o número de operações aritméticas pode ser extremamente alto. Novamente, o que se quer, é que o aluno veja a matemática de forma prazerosa e não tediosa. O professor precisa estar sempre ciente disso.

No sentido de evitar grandes quantidades de operações aritméticas, há uma fórmula capaz de somar um número finito de termos de uma P.G. sem que seja preciso operar termo a termo. Para isso, são necessários os elementos S_n, a_1 e q que representam, respectivamente, a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, o primeiro termo e a razão.

Conforme evidencia Crespo (1997), a soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G. finita de razão $q \neq 1$ é dada por $S_n = \frac{a_1 \,.\, (1-q^n)}{1-q}$, para todo n inteiro e positivo.

Demonstração: Seja S_n a soma dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Assim, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ (1). Multiplicando ambos os lados pela razão q, tem-se $q.S_n = a_1.q + a_2.q + a_3.q + \ldots + a_{n-1}.q + a_n.q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1}$ (2). Da subtração de (2) por (1) conclui-se que $S_n - q.S_n = a_1 - a_{n+1} \leftrightarrow S_n(1-q) = a_1 - a_1.q^n \leftrightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \leftrightarrow S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$.

Exemplo 3.12 Calcular a soma dos dez primeiros termos da PG (1,2,4,8,...).

Solução: Para a PG acima, tem-se que $a_1 = 1$, $q = 2$ e S_{10} é a soma procurada, logo, $n = 10$. Assim, substituindo os devidos valores na fórmula da soma finita de termos de PG conclui-se que $S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} \leftrightarrow S_{10} = \frac{1.(1-2^{10})}{1-2} \leftrightarrow S_{10} = \frac{1-1024}{-1} = \frac{-1023}{-1} = 1023$. Portanto, a soma dos 10 primeiros termos da PG é 1023.

Exemplo 3.13 Uma empresa, fundada exatamente há quatro anos, pagou durante o decorrer de seu 1º ano, a quantia de R$ 10000,00 reais em impostos. Nos anos subsequentes, o valor total dos impostos pagos por esta empresa aumentou em 10% ao ano. Assim sendo, qual é o valor total em impostos que essa empresa pagou durante seus quatro anos de existência?

Solução: De acordo com o problema, $a_1 = 10000$, $q = 1{,}1$ (10% de aumento) e S_4 é a soma procurada. Consequentemente, $n = 4$. Desse modo, $S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} \leftrightarrow S_4 = \frac{10000.(1-(1{,}1)^4)}{1-1{,}1} \leftrightarrow S_4 = \frac{10000.(1-1{,}4641)}{-0{,}1} = \frac{10000\,.\,(-0{,}4641)}{-0{,}1} = \frac{-4641}{-0{,}1} = 46410$. Portanto, o valor total em impostos pagos pela empresa durante os seus 4 anos de existência foi de R$ 46410,00 reais.

3.2.3 Soma dos infinitos termos de uma P.G.

Supõe-se que o governo de uma cidade possui 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais. É determinado que no 1º ano será aplicado metade dessa verba e, em cada ano seguinte, metade do que sobrou da verba do ano anterior. A progressão geométrica infinita a seguir representa os valores, em milhão de reais, aplicados ano a ano.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

Nota-se que, a cada ano que passa, a soma do total aplicado em obras sociais aumenta e se aproxima cada vez mais de 1 milhão de reais.

- 1º ano → $\frac{1}{2}$ = 0,5
- 2º ano → $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ = 0,75
- 3º ano → $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ = 0,875
- 4º ano → $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ = 0,9375
- 5º ano → $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ = 0,96875
- 6º ano → $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ = 0,984375

...

Por mais que se adicione termos a esta PG, a soma de todos os termos jamais será 1; porém, ao adicionar cada vez mais elementos, o valor da adição de todos estes elementos se aproximará de 1 tanto quanto seja necessário, ou seja, é dito que 1 é o limite dessa soma infinita.

Obviamente não são todos os casos de progressões geométricas infinitas ao qual isso acontece. A seguir, será provado para quais casos o limite da soma de uma PG infinita resultará em um número.

Consoante à Xavier & Barreto (2005), a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$) de razão q, onde $-1 < q < 1$ é dada por $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$.

Demonstração: Foi visto que, $S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$. Assim, calculando o $\lim_{n\to\infty} S_n$, tem-se que: $\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_{1}.q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$.

Observe-se que, na demonstração anterior, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ pois, pela hipótese do teorema, -1 $<$ q $<$ 1.

Exemplo 3.14 Calcular a soma dos infinitos termos da PG (5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$, ...).

Solução: Sendo a_1 = 5, q = $\frac{1}{2}$ e S_∞ o termo desejado, então $S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \leftrightarrow S_\infty = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} \leftrightarrow S_\infty = \frac{5}{\frac{1}{2}} \leftrightarrow S_\infty = 10$. Portanto, a soma dos infinitos termos da PG é igual a 10.

Exemplo 3.15 Determinar a fração geratriz da dízima periódica d = 2,77777...

Solução: $\mathrm{d} = 2{,}77777\ldots = 2 + 0{,}77777\ldots = 2 + (0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots)$, onde $(0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots)$ é a soma infinita dos termos de uma PG cujo $a_1 = \frac{7}{10}$, $\mathrm{q} = \frac{1}{10}$ e S_∞ é o termo desejado. Assim, $S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \leftrightarrow S_\infty = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} \leftrightarrow S_\infty = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} \leftrightarrow S_\infty = \frac{7}{9}$. Desse modo, $\mathrm{d} = 2 + (0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots) = 2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9}$. Com isso, conclui-se que a fração geratriz da dízima periódica $\mathrm{d} = 2{,}77777$... é $\frac{25}{9}$.

Exemplo 3.16 O motorista de um caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio da rodovia e aciona os freios imediatamente, estando a exatos 62 metros de distância da pedra. Após pisar no freio, o veículo se desloca 30 metros no primeiro segundo e, a partir daí, a cada segundo, percorre a metade da distância do segundo anterior. Haverá o choque entre o caminhão e a pedra? Justificar.

Solução: Nesse caso, a sequência que representa a distância percorrida pelo caminhão a cada segundo após acionar os freios é dada pela progressão geométrica (30, 15, $\frac{15}{2}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{15}{8}$, ...). Para saber se o caminhão irá ou não colidir com a pedra, basta somar todas as distâncias da PG dada. Assim, sendo $a_1 = 30$, $\mathrm{q} = \frac{1}{2}$ e S_∞ o valor desejado, então $S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \leftrightarrow S_\infty = \frac{30}{1-\frac{1}{2}} \leftrightarrow S_\infty = \frac{30}{\frac{1}{2}} \leftrightarrow S_\infty = 60$. Portanto, a soma de todas as distâncias percorridas pelo caminhão após o motorista acionar o freio é de 60 metros e, como a distância inicial era de 62 metros, conclui-se que o caminhão não colidirá com a pedra.

3.3 MATEMÁTICA FINANCEIRA

3.3.1 História da Matemática Financeira

A Matemática Financeira não deve ser considerada como um conceito novo; tábuas sumérias presentes no Museu do Louvre atestam que tais movimentações aconteciam muito antes da chamada Era Cristã. Embora o seu uso tenha se mostrado mais evidente a partir do momento em que o homem percebeu a poderosa relação que havia entre o dinheiro e o tempo, a valorização ou depreciação de um produto em função do mesmo já se fazia presente muito antes do uso do dinheiro como base de troca. Na época em que o escambo era predominante entre as relações comerciais, o empréstimo de produtos sofria reajuste quando esses eram devolvidos, mostrando que longe da modernidade dos dias atuais, naquele tempo, o seu uso era muito mais rudimentar.

Com o passar dos séculos, tais métodos foram sendo aprimorados, assim, a Matemática Financeira se tornaria cada vez mais presente no dia a dia das pessoas. Essa evolução trouxe consequências como aponta Pedro Júnior (2013, p.15 e 16):

> “[...] ao uso da Matemática Comercial e Financeira, está o surgimento dos bancos. Essa instituição passou a ser necessária para mediar, com certo grau de garantia, as relações comerciais entre as pessoas possuidoras de muito dinheiro e as que precisavam de empréstimos. [...] Assim, os bancos foram um dos grandes responsáveis pelo aprimoramento da Matemática Comercial e Financeira”.

Com a transição entre as Idades Moderna e Contemporânea aliada à frenética expansão industrial e capitalista a partir do século XVIII, deu-se início uma transformação que moldaria os bancos ao patamar do que se conhece atualmente. Tais mudanças fizeram com que os bancos, apoiados integralmente pela Matemática Financeira, se tornassem instituições especializadas em “vender dinheiro”. Hoje é possível encontrar uma gama enorme de produtos e serviços bancários que vão desde um simples cofre para guarda de pertences, passando por seguros de bens, títulos de capitalização, consórcios, empréstimos, financiamentos, penhores e até investimentos nos mais diversos níveis de complexidade.

Tamanha evolução trouxe consequências. O alto número de informações e a ausência de conhecimento acerca da Matemática Financeira fizeram com que muitos bancos e/ou lojas começassem a ludibriar seus consumidores, fazendo-os adquirir produtos ou serviços que, na grande maioria das vezes, eram caros e desnecessários.

Assim, visando fugir das armadilhas comerciais é que a Matemática Financeira tornou-se um estudo indispensável. Entender esse universo é o primeiro passo àqueles que procuram tal escudo.

3.3.2 Matemática Financeira nos Dias Atuais

Um bom ponto de partida na busca por esse conhecimento é entender de que forma a Matemática Financeira atua na sociedade atual. Para exemplificar esse pressuposto, Santos (2005, p.157) dá sua contribuição:

> “[...] a Matemática Financeira é o ramo da Matemática Aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. A Matemática Financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo (*time value money*). As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são a taxa de juros, o capital e o tempo”.

Além disso, qualquer estudo na área financeira requer certo grau de conhecimento sobre seus elementos básicos. Entre os principais estão o Capital (C), Capital Inicial (Co) ou Principal (P) que é o valor disponível representado por moeda ou por um bem que pode ser convertido em dinheiro, o Juro (J) como o valor da remuneração paga sobre o capital acordado entre as partes, o Montante (M) ou Valor Futuro (VF) que é a soma do capital mais o juros de uma operação financeira, o Período representando o intervalo de tempo existente entre dois termos consecutivos e a Taxa de juro que é a relação entre o capital emprestado e o juro devido (MACEDO, 2014).

Dos elementos citados, o juro é o mais evidente em qualquer operação financeira, podendo ser classificado em simples ou composto.

O regime de juro simples é pouco utilizado atualmente. Nessa modalidade, o valor total do juro é o resultado da aplicação da taxa sobre o capital inicial multiplicada pela quantia de períodos, ou seja, nesse sistema, o valor resultante do juro a cada passagem de tempo pré-estabelecida é constante.

Acerca do juro simples, Castanheira e Macedo (2012, p.20) corroboram:

> "O juro é calculado sempre sobre o valor do capital inicial. Observe que é indiferente se o tomador do empréstimo pagará o juro periodicamente (por exemplo, mensalmente) ou pagará em uma parcela única ao final do período contratado, uma vez que ele é constante e proporcional ao capital sobre o qual incide."

Na análise de Hazzan e Pompeo (1993), o juro na modalidade simples corresponde à seguinte fórmula:

$$\boxed{J = C.i.n}$$

Além do mais, caso o cálculo do juro simples seja realizado em um único período (n=1), basta multiplicar o capital pela taxa de juro, ou seja, é o mesmo que calcular a porcentagem de certo valor. Desse modo:

$$\boxed{J = C.i}$$

A seguir, ilustra-se o cálculo do juro simples por meio da aplicação em um exemplo:

Exemplo 3.17 Um capital de R$ 150,00 foi investido a uma taxa de juros simples de 8% ao ano, não podendo ser sacado antes. Desse modo, qual o valor do juro após o decorrer do tempo mínimo?

Solução: Partindo-se da fórmula tem-se: $J = C.i. = 150 \;.\; 8\% = 150 \;.\; 0{,}08 = 12$. Portanto, após um ano, a quantia referente ao juro será de R$ 12,00.

Se o exemplo anterior fosse colocado mudando-se apenas o regime de juros simples para composto, o resultado seria o mesmo, entretanto, vale ressaltar que ambos os regimes só causam essa coincidência quando o período em questão é igual a um. Diferente disso, os sistemas gerarão números diferentes quanto ao cálculo dos juros, como será visto mais adiante.

O juro composto, por sua vez, ocupa o status de queridinho do mundo financeiro. Usado em larga escala, nesse regime o cálculo do juro dentro de um período se dá pela multiplicação da taxa pelo montante resultante do período anterior. Como o montante é o capital acrescido do juro, esse método de capitalização ganhou o pseudônimo de “juro sobre juro”.

Conforme Hazzan e Pompeo (1993), há uma fórmula que relaciona o montante em função do capital investido e do tempo no sistema de juro composto. Essa relação é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{M = C\,.\,(1 + i)^{n}}}$$

Demonstração: Como dito anteriormente, montante é o resultado do capital mais o juro, então, $\mathrm{M} = \mathrm{C} + \mathrm{j}$. Assim, tem-se que $\mathrm{M} = \mathrm{C} + \mathrm{C.i} \leftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{C}\ (1+\mathrm{i})$. Portanto:

Tabela 2 – Montante após n períodos

MONTANTE APÓS O 1º PERÍODO
$M_1 = \mathrm{C}\,.\,(1 + \mathrm{i})$
MONTANTE APÓS O 2º PERÍODO
$M_2 = M_1\,.\,(1 + \mathrm{i}) = \mathrm{C}\,.\,(1 + \mathrm{i})\,.\,(1 + \mathrm{i}) = \mathrm{C}\,.\,(1 + \mathrm{i})^2$
MONTANTE APÓS O 3º PERÍODO
$M_3 = M_2\,.\,(1 + \mathrm{I}) = \mathrm{C}\,.\,(1 + \mathrm{i})^2\,.\,(1 + \mathrm{i}) = \mathrm{C}\,.\,(1 + \mathrm{i})^3$
...
MONTANTE APÓS O N-ÉSIMO PERÍODO
$M_n = M_{n-1}\,.\,(1 + \mathrm{i}) = \mathrm{C}\,.\,(1 + i)^{n-1}\,.\,(1 + \mathrm{i}) = \mathrm{C}\,.\,(1 + i)^n$

Fonte: Autor.

Para uma melhor compreensão, tem-se, a seguir, um exemplo:

Exemplo 3.18 Um banco oferece uma taxa de 0,9% ao mês, no sistema de capitalização composta, àqueles que quiserem investir a partir de R$ 5000,00. O dinheiro precisa ficar aplicado por no mínimo um ano. Desse modo, uma aplicação de R$ 6000,00 que permaneça o tempo mínimo resultará em qual montante?

Solução: Sendo $\mathrm{C} = 6000$, $\mathrm{i} = 0{,}9\% = 0{,}009$ e $\mathrm{n} = 12$, então, pela fórmula do montante, $\mathrm{M} = \mathrm{C} \,.\, (1 + i)^n \leftrightarrow \mathrm{M} = 6000 \,.\, (1 + 0{,}009)^{12} \leftrightarrow \mathrm{M} = 6000 \,.\, 1{,}009^{12}$ e, portanto, $\mathrm{M} = 6000 \,.\, 1{,}113509675 \leftrightarrow \mathrm{M} = 6.681{,}06$. Assim, o montante após um ano de aplicação será de R$ 6.681,06.

Como dito anteriormente, as taxas de juro simples e composta são diferentes. Por isso, a fim de proporcionar um melhor esclarecimento acerca do comportamento do montante em função do tempo ao usar as duas taxas, segue a imagem contendo um exemplo particular.

Figura 11 – Juros Simples e Composto (a)

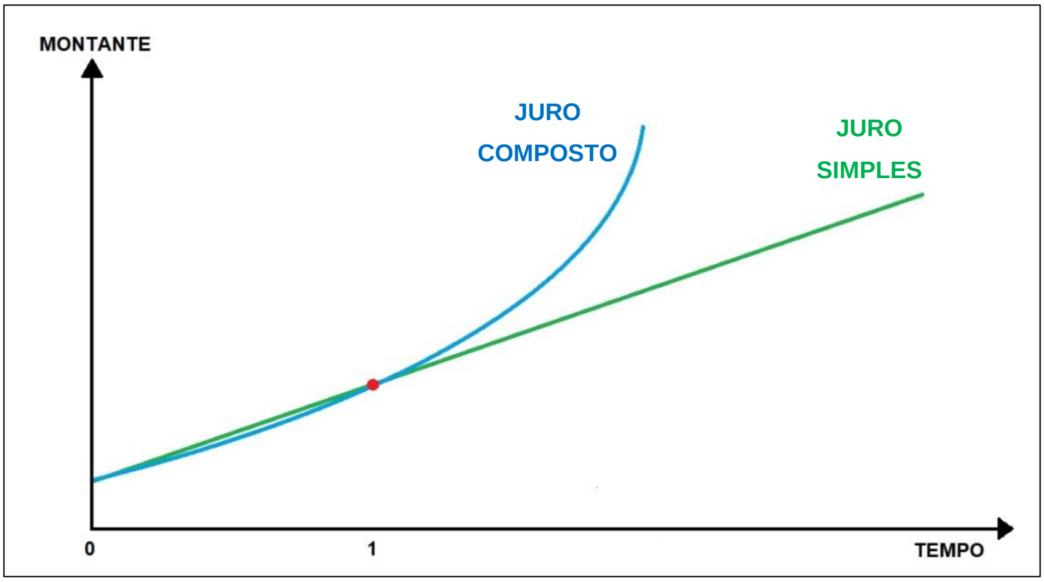
CAPITAL DE R$ 100,00 A UMA TAXA DE JURO DE 10% AO PERÍODO		
PERÍODO	VALOR NO JURO SIMPLES	VALOR NO JURO COMPOSTO
0	R$ 100,00	R$ 100,00
1	R$ 110,00	R$ 110,00
2	R$ 120,00	R$ 121,00
3	R$ 130,00	R$ 133,10
4	R$ 140,00	R$ 146,41
5	R$ 150,00	R$ 161,05
6	R$ 160,00	R$ 177,16
7	R$ 170,00	R$ 194,87
8	R$ 180,00	R$ 214,36

Fonte: Autor.

Uma das virtudes da Matemática está em sua capacidade de mostrar um mesmo resultado por caminhos diferentes. No exemplo citado anteriormente, não seria diferente. Para esse caso, a diferença acerca do comportamento pode ser visualizada, também, através de um gráfico cartesiano. Este possibilita uma análise não somente discreta, pois, diferentemente da tabela onde só é possível analisar pontos isolados, no sistema de coordenadas cartesianas pode-se estudar a continuidade de cada função.

A seguir, tem-se o gráfico de coordenadas cartesianas que mostra a evolução do montante em função do tempo nos dois diferentes regimes, os juros simples e composto.

Figura 12 – Juros Simples e Composto (b)



Fonte: Autor.

Este é o momento que a relação entre as Progressões e a Matemática Financeira se torna evidente. Os regimes de juros simples e composto geram montantes no decorrer de seus períodos que, se colocados sequencialmente, formam, respectivamente, progressões aritméticas e geométricas.

No intuito de um melhor esclarecimento acerca de tais afirmações, segue a explicação baseada no exemplo da Figura 11:

- A sequência formada por (100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180...) é uma progressão aritmética onde o primeiro termo é 100 e a razão igual a 10;
- A sequência formada por (100; 110; 121; 133,1; 146,41; 161,05; 177,16; 194,87; 214,36...) forma uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 100 e a razão é igual a 1,1 que, por sua vez, corresponde a (1 + i).

Além da relação com a progressão aritmética, ao analisar graficamente o comportamento do montante no sistema de juro simples, vê-se a correspondência com a função polinomial de 1º grau, também conhecida como função afim. De forma análoga, na capitalização composta, o mesmo comportamento do montante remete a função exponencial. Neste sentido, a inserção desta matéria pode ser feita relacionando-se ambos os conteúdos, seja na Progressão Aritmética ou Geométrica.

3.3.3 Amortização

No Brasil, todo cidadão que, por ventura, se aventurar num financiamento habitacional ou de outro segmento, ouvirá o termo amortização. Infelizmente, na quase totalidade dos casos, essa será a primeira vez que tal conceito fará parte do convívio desse indivíduo. Tal causa deve-se ao fato do conhecimento pífio por parte da população acerca dos jargões pertencentes à Matemática Financeira, bem como o funcionamento de cada um deles numa dada operação financeira.

De acordo com Souza (2013, p.81.), “Amortização é o processo de redução de uma dívida por meio de pagamentos parciais, que podem ser mensais, bimestrais, anuais, entre outros”.

Pensando de maneira mais simples, amortização é o pagamento apenas do capital tomado ou de parte dele, valendo, aqui, ressaltar que o juro entra no valor da parcela e não na amortização. Logo, faz-se necessário entender que uma parcela a ser paga em um dado financiamento ou empréstimo é composta pelo capital emprestado (dívida) mais o juro (compensação pela tomada do capital). Nesse sentido, a redução dessa dívida é o que compreende o significado da amortização.

3.3.4 Os Sistemas SAC e PRICE

Voltados principalmente para as operações que envolvem algum tipo de financiamento ou empréstimo, os sistemas SAC e PRICE nada mais são do que modelos de amortizações, ou seja, maneiras diferentes de efetuar o pagamento de uma operação financeira.

No sentido de propiciar uma melhor compreensão acerca das diferenças entre os modelos SAC e PRICE, seguem as tipificações de cada um.

3.3.4.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Muito comum nos financiamentos de imóveis, o sistema SAC, segundo Hazzan e Pompeo (1993), consiste em fazer com que todas as parcelas de amortização sejam iguais, isto é, constantes. Esse valor é calculado através do quociente entre o capital tomado e o número de parcelas estipuladas, e, como consequência deste modelo, as parcelas a serem pagas são decrescentes, pois, como o juro incide apenas sobre o saldo devedor, ele será maior no início do financiamento, assim como a parcela.

Exemplo 3.19 Certa pessoa financiou (sem entrada) uma casa no valor de 150 mil reais a uma taxa de juro composto de 10% ao ano. Elabore uma tabela SAC para o pagamento em 20 anos, sabendo que os mesmos são anuais.

Solução:

Tabela 3 – Sistema SAC

Período (anos)	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Parcela
0	R$ 150.000,00			
1	R$ 142.500,00	R$ 7.500,00	R$ 15.000,00	R$ 22.500,00
2	R$ 135.000,00	R$ 7.500,00	R$ 14.250,00	R$ 21.750,00
3	R$ 127.500,00	R$ 7.500,00	R$ 13.500,00	R$ 21.000,00
4	R$ 120.000,00	R$ 7.500,00	R$ 12.750,00	R$ 20.250,00
5	R$ 112.500,00	R$ 7.500,00	R$ 12.000,00	R$ 19.500,00
6	R$ 105.000,00	R$ 7.500,00	R$ 11.250,00	R$ 18.750,00
7	R$ 97.500,00	R$ 7.500,00	R$ 10.500,00	R$ 18.000,00
8	R$ 90.000,00	R$ 7.500,00	R$ 9.750,00	R$ 17.250,00
9	R$ 82.500,00	R$ 7.500,00	R$ 9.000,00	R$ 16.500,00
10	R$ 75.000,00	R$ 7.500,00	R$ 8.250,00	R$ 15.750,00
11	R$ 67.500,00	R$ 7.500,00	R$ 7.500,00	R$ 15.000,00
12	R$ 60.000,00	R$ 7.500,00	R$ 6.750,00	R$ 14.250,00
13	R$ 52.500,00	R$ 7.500,00	R$ 6.000,00	R$ 13.500,00
14	R$ 45.000,00	R$ 7.500,00	R$ 5.250,00	R$ 12.750,00
15	R$ 37.500,00	R$ 7.500,00	R$ 4.500,00	R$ 12.000,00
16	R$ 30.000,00	R$ 7.500,00	R$ 3.750,00	R$ 11.250,00
17	R$ 22.500,00	R$ 7.500,00	R$ 3.000,00	R$ 10.500,00
18	R$ 15.000,00	R$ 7.500,00	R$ 2.250,00	R$ 9.750,00
19	R$ 7.500,00	R$ 7.500,00	R$ 1.500,00	R$ 9.000,00
20	R$ 0,00	R$ 7.500,00	R$ 750,00	R$ 8.250,00
Total		R$ 150.000,00	R$ 157.500,00	R$ 307.500,00

Fonte: Autor.

O problema anterior é um bom exemplo para que o professor mostre a seus alunos as inúmeras informações acerca dos perigos de um financiamento mal pensado, entre as quais, duas estão entre as que quase nunca são levadas em consideração. São elas:

- O financiamento no Brasil é uma operação cara. Os juros brasileiros estão entre os maiores do mundo. A título de exemplo, no caso anterior, em apenas 20 anos, o financiamento fez com que o tomador pagasse um valor equivalente a duas casas;
- Operações financeiras de longo prazo escondem um risco quase invisível, pois nunca se sabe se no decorrer desse tempo, acontecerá algum imprevisto financeiro que possa inviabilizar o pagamento.

Muitos fatores estão envolvidos quando se trata de um financiamento. O consumidor precisa atentar-se as suas reais necessidades, evitando ser impulsivo. Como dito anteriormente, o planejamento é sempre a melhor opção ante o consumo imediato. Este último só deve ser utilizado para as atividades vitais e eventuais emergências.

3.3.4.2 Sistema PRICE

Apresentado ao mundo por Richard Price em 1771 na obra "*Observations on reversionary payments*", o sistema que leva seu sobrenome é largamente utilizado por todos aqueles que, direta ou indiretamente, oferecem algum tipo de financiamento ou empréstimo de menor escala, como, por exemplo, as financeiras, bancos, lojas de varejo e muitos outros. (WIKIPÉDIA, 2018)

Diferentemente do SAC que prioriza a amortização fixa, o sistema Price, também conhecido como Sistema de Amortização Francês (SAF), estabelece que o valor da parcela seja constante em uma dada operação financeira. Assim, tem-se que a amortização cresce e o juro decresce com o decorrer do tempo.

Ainda de acordo com Wikipédia (2018), para o cálculo da parcela (P) no sistema PRICE, utiliza-se uma das fórmulas a seguir:

$$\boxed{C = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = C.\frac{[(1+i)^{n}].i}{(1+i)^{n}-1}}$$

Demonstração: Tomando como ponto de partida a fórmula do montante para juro composto, tem-se que $M = C\ .\ (1+i)^k \leftrightarrow C = \frac{M}{(1+i)^k}$ (1). Supondo, então, uma operação financeira em que haja o parcelamento do capital, torna-se evidente que o somatório de todas as parcelas equivalerá ao montante, ou seja, $\sum_{k=1}^{n} P_k = M$. (2)

Portanto, de (1) e (2), conclui-se que:

$C = \sum_{k=1}^{n} P_k\ .\ \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{P_1}{(1+i)^1} + \frac{P_2}{(1+i)^2} + \frac{P_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P_n}{(1+i)^n}$, onde, pelo Sistema PRICE, $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \ldots = P_{n-1} = P_n$, e por isso:

$C = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n}$, em que P é o valor da parcela da operação financeira. Assim:

$$C = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n} \leftrightarrow$$

$C = P\ .\left(\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right)$, de forma que o conteúdo do parênteses é uma soma de PG finita cujo primeiro termo e a razão possuem valor igual $\frac{1}{(1+i)}$.

Utilizando o Teorema 3.5, chega-se ao seguinte resultado:

$$C = P.\left(\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right) \leftrightarrow$$

$$C = P.\left(\frac{\frac{1}{(1+i)}.(1-(\frac{1}{(1+i)})^n}{1 - \frac{1}{(1+i)}} \right) \leftrightarrow C = P.\left(\frac{\frac{1}{(1+i)}.(1-\frac{1}{(1+i)^n})}{\frac{(1+i)}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)}} \right) \leftrightarrow$$

$$C = P.\left(\frac{\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i).(1+i)^n}}{\frac{(1+i)-1}{(1+i)}} \right) \leftrightarrow C = P.\left(\frac{\frac{(1+i)^n}{(1+i).(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i).(1+i)^n}}{\frac{(1+i)-1}{(1+i)}} \right) \leftrightarrow$$

$$C = P.\left(\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i).(1+i)^n}}{\frac{(1+i)-1}{(1+i)}}\right) \leftrightarrow C = P.\left(\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{(1+i)-1}\right) \leftrightarrow C = P.\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.[(1+i)-1]}\right) \leftrightarrow$$

$$C = P.\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1} - (1+i)^n}\right) \leftrightarrow C = P.\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.[(1+i)-1]}\right).\left(\frac{(1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n}}\right) \leftrightarrow$$

$$C = P.\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{1.[(1+i)-1]}\right) \leftrightarrow C = P.\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1}\right) \leftrightarrow C = P.\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right).$$

A segunda fórmula é uma derivação da primeira. Portanto:

$$C = P.\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \leftrightarrow \frac{C}{P} = \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \leftrightarrow \frac{P}{C} = \left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right) \leftrightarrow$$

$$P = C.\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right) \leftrightarrow P = C.\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right).\left(\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right) \leftrightarrow$$

$$P = C.\left(\frac{(1+i)^n \,.\, i}{(1+i)^n - 1}\right).$$

No intuito de esclarecer qualquer dúvida, segue-se um exemplo particular sobre a construção da tabela PRICE:

Exemplo 3.20 Em uma concessionária de motos, para se comprar o modelo X, era preciso dar 40% de entrada. O restante seria dividido em 12 parcelas mensais fixas com juro composto de 1% ao mês. Sabendo que o preço total da moto em questão era de 20 mil reais, elabore uma tabela PRICE que represente o financiamento.

Solução: Para montar a tabela com toda a evolução da operação financeira, primeiro é preciso determinar o valor que será financiado, pois parte do preço da moto será dado na entrada e, portanto, não fará parte da operação. Dos 20 mil reais correspondente ao preço total da moto, 40% corresponde a 8 mil reais. Assim, o valor que será, de fato, financiado (capital) será de 12 mil reais. O próximo passo é o uso de uma das fórmulas da demonstração anterior para o cálculo da parcela. Desse modo:

$$P = C \cdot \frac{[(1+i)^n] \cdot i}{(1+i)^n - 1} = 12000 \cdot \frac{[(1+0,01)^{12}] \cdot 0,01}{(1+0,01)^{12} - 1} = 12000 \cdot \frac{0,01126825}{0,12682503} =$$

$$12000 \cdot 0,088848786 \cong 1066,19.$$

Assim, a parcela será fixa no valor de R$ 1.066,19. Com, isso, a tabela que representa o financiamento é:

Tabela 4 – Sistema PRICE

Período (meses)	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Parcela
0	R$ 12.000,00			
1	R$ 11.053,81	R$ 946,19	R$ 120,00	R$ 1.066,19
2	R$ 10.098,15	R$ 955,66	R$ 110,53	R$ 1.066,19
3	R$ 9.132,94	R$ 965,21	R$ 100,98	R$ 1.066,19
4	R$ 8.158,07	R$ 974,87	R$ 91,32	R$ 1.066,19
5	R$ 7.173,46	R$ 984,61	R$ 81,58	R$ 1.066,19
6	R$ 6.179,00	R$ 994,46	R$ 71,73	R$ 1.066,19
7	R$ 5.174,60	R$ 1.004,40	R$ 61,79	R$ 1.066,19
8	R$ 4.160,15	R$ 1.014,45	R$ 51,74	R$ 1.066,19
9	R$ 3.135,56	R$ 1.024,59	R$ 41,60	R$ 1.066,19
10	R$ 2.100,72	R$ 1.034,84	R$ 31,35	R$ 1.066,19
11	R$ 1.055,53	R$ 1.045,19	R$ 21,00	R$ 1.066,19
12	- R$ 0,10	R$ 1.055,63	R$ 10,56	R$ 1.066,19
Total		R$ 12.000,10	R$ 794,18	R$ 12.794,28

Fonte: Autor.

Neste momento, é necessário esclarecer que o saldo devedor ficou negativo no 12º período por conta de um arredondamento no valor da parcela de forma que todas ficassem no formato de dinheiro (duas casas decimais).

3.4 CONCLUSÕES

Seria comum se, diante da insistência do planejamento ante o consumo imediato, alguém que estivesse ouvindo tentasse contra-argumentar com a clássica frase: “Mas se eu não fizer assim, se eu não financiar, eu nunca conseguirei comprar nada, pois não tenho dinheiro para pagar à vista”.

A frase do parágrafo anterior, embora pareça fazer sentido, esconde um péssimo hábito do brasileiro; o de que muitos não poupam. Em geral, no Brasil, não se é educado para planejar a médio e longo prazo. A consequência disso são pessoas que gastam além de seus recebimentos e que não possuem reserva alguma diante das possíveis emergências ao qual todos estão sujeitos. Além do mais, no caso da compra de casa, tema, este, abordado aqui, resta ao brasileiro que não faz planejamento, recorrer à única opção disponível; o financiamento. Este, por sua vez, é demasiado caro e traz riscos enormes a segurança das famílias.

Assim, é preciso estar sempre atento e dar prioridade às suas reais necessidades, entendendo que o endividamento da população está diretamente associado às decisões equivocadas quanto ao consumo imediato e desenfreado. Neste momento, cabe mencionar, novamente, que o planejamento sempre deve prevalecer ante o consumo imediato para os produtos e serviços que não são considerados de primeira linha, primeira necessidade. Além do mais, o ato de poupar gera segurança àqueles que, por ventura, venham precisar de recursos em momentos de emergência.

Por fim, na tentativa de auxiliar a população, a matemática financeira tem a importante missão de dar embasamento teórico e prático às tomadas de decisões de cada cidadão no que diz respeito ao trato com o dinheiro. Por isso, quanto antes as crianças tiverem contato com as informações sobre a importância do dinheiro e do consumo, melhores serão as chances delas se tornarem adultos conscientes de seus direitos e deveres enquanto consumidores e mais perto estar-se-ão de uma sociedade plena e sadia financeiramente.

4 ATIVIDADES: UMA PROPOSTA DIFERENCIADA

Como visto anteriormente, boa parte dos brasileiros não possui hábitos saudáveis no que diz respeito ao uso do dinheiro. Essa inabilidade traz consigo um comportamento que, com o tempo, pode culminar em situações danosas à sociedade, ou seja, pessoas que não foram educadas financeiramente e que, em geral, não conhecem nem praticam o significado de palavras como orçamento e planejamento, tendem a se descontrolar entre seus ganhos e gastos. Esse desgoverno financeiro vem a ser o primeiro passo de uma cadeia desastrosa de eventos, entre os quais estão:

- Inadimplência;
- Restrição comercial;
- Baixa qualidade de vida;
- Diminuição das vendas;
- Empresas em dificuldades;
- Falências;
- Demissões.

Desse modo, é preciso ensinar as crianças o quanto antes sobre a importância do desenvolvimento e prática da educação financeira. Nesse papel, a escola como instituição transformadora é fundamental, não podendo eximir-se da responsabilidade mesmo numa eventual negligência dos pais da criança.

Assim, as atividades propostas, a seguir, objetivam auxiliar o professor que deseja levar informações que agreguem novos conhecimentos, mostrando aos alunos como funcionam as operações financeiras mais usuais, bem como a importância em se priorizar o planejamento ante o consumo imediato e impulsivo; sendo esta última premissa básica da educação financeira.

Concomitantemente a essa benesse, presume-se que o aluno seja capaz de ver a relação extremamente próxima entre a Matemática e o mundo financeiro, ou seja, que a Matemática não é uma disciplina engessada na abstração, mas que pode ser contextualizada de modo a dar significado ao aprendizado. Outrossim, espera-se que o aluno generalize que tal aplicabilidade está presente nas mais diversas áreas do conhecimento; aqui, em especial, no uso da Matemática Financeira para a construção da educação financeira.

Vale ressaltar, neste momento, que embora já mencionada a importância da escola em começar o quanto antes a construção da educação financeira nas crianças, este trabalho foca seus esforços no Ensino Médio, podendo, o leitor interessado, procurar por pesquisas que trabalhem o tema no Ensino Infantil ou Fundamental.

Antes de iniciar, é recomendável que o professor se familiarize com os níveis de conhecimento que seus alunos possuem acerca do mundo financeiro. Para isso, o professor pode elaborar, previamente, um questionário, pedindo para que seus alunos respondam. Neste caso, há a preferência por alunos que estejam cursando a partir do 2º ano do Ensino Médio, pois pertencem ao grupo escolar mais apropriado para este trabalho.

Quanto ao questionário, é livre a escolha das perguntas pelo professor, entretanto, a seguir, são dados alguns exemplos:

- O que é mercado financeiro?
- O que são juros?
- O que é a caderneta de poupança?
- O que é um consórcio?
- O que é um empréstimo?
- O que é um financiamento?
- O que é um investimento?
- O que é planejamento?
- Qual a utilidade de um Cartão de Crédito? Como ele funciona?
- Ao comprar um produto, você prefere comprar à vista ou parcelado?

As respostas dadas servirão de base para descobrir o que seu aluno sabe ou não acerca de tais temas, bem como, obter informações sobre seu comportamento diante de uma situação que envolva o consumo. É importante obter esse conhecimento prévio dos alunos, pois dará ao professor um claro norte sobre quais estratégias usar.

No mais, é importante deixar claro que as proposições a seguir são meras sugestões, cabendo ao professor escolher e modificar as atividades de modo que melhor convir; logicamente pensando em atingir as deficiências de seus alunos e, com isso, aumentar as chances de se obter um resultado satisfatório.

4.1 O JURO SIMPLES E A PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma forma simples e direta de suscitar o desejo de uma pessoa por um determinado assunto, é que este faça parte de seus anseios, ou seja, que o assunto esteja diretamente relacionado com algo que o indivíduo interaja com interesse. Nesse sentido, ao se trabalhar com alunos do 3º ano do Ensino Médio, um tema importante e que certamente estará presente no coração da maioria deles, é a tão esperada formatura.

Relacionando-se determinado assunto matemático ao ritual da formatura, esse tão importante na vida de muitos alunos, aumentam-se, consideravelmente, as chances de prender a atenção dos mesmos, pois se trata de algo de seu interesse. Alia-se a este fato que a presença das empresas de formatura, cada uma com suas propostas, darão aos alunos uma segurança maior de que o tema é importante e que a matemática é fundamental nesse processo.

4.1.1 Planejamento da Atividade

Título: Juros Simples e a Progressão Aritmética

Modalidade: Ensino Médio

Disciplina: Matemática

Conteúdo: Juro simples, desconto, acréscimo e progressão aritmética.

Aulas necessárias para o desenvolvimento: 03 a 04

Objetivos Gerais: Compreender a diferença entre a compra à vista e a prazo; analisar a proposta mais vantajosa na obrigatoriedade da compra a prazo.

Objetivos Específicos: Interpretar gráficos e tabelas; utilizar os conceitos de juro simples e progressão aritmética para os cálculos de parcela e montante, percebendo a relação que há entre ambos.

Observação: São raríssimos os casos em que o mercado financeiro utiliza o juros simples, portanto, este exemplo é meramente ilustrativo.

4.1.2 Descrição do Problema

O professor proporá a situação em que duas empresas de formatura estão visitando a escola para oferecer seus serviços em consonância ao tipo de evento que os alunos do 3º ano do Ensino Médio desejam. Nesta proposição, os representantes das empresas apresentam aos alunos os seus métodos de trabalho, bem como os valores praticados por cada uma delas. Com relação a este último, cada empresa entrega uma tabela aos alunos contendo os planos de pagamento que são aceitos pelas mesmas. As tabelas são as seguintes:

Tabela 5 – Proposta da empresa 1

FORMA DE PAGAMENTO	**VALOR**	**-**
À VISTA	R$ 1250,00	DESCONTO DE 6%
PARCELADO EM ATÉ 10 VEZES	-	JURO SIMPLES DE 2 % A.M.

Fonte: Autor.

Tabela 6 – Proposta da empresa 2

FORMA DE PAGAMENTO	**VALOR**	**-**
À VISTA	R$ 1300,00	DESCONTO DE 10%
PARCELADO EM ATÉ 10 VEZES	-	JURO SIMPLES DE 1% A.M.

Fonte: Autor.

Problemas como este que envolvem a compra de um produto ou serviço desejável, são os que, instantaneamente, “acendem uma luz na cabeça do aluno”. Essa luz representa um conhecimento intrínseco às vivências de qualquer cidadão, ou seja, independentemente do saber/conhecer matemático, toda pessoa traz consigo, arraigada em sua estrutura cognitiva, uma vontade quase que intuitiva de querer pagar o menor valor possível em uma operação de consumo. Nesse sentido, visando satisfazer essa necessidade, o professor pode reforçar o intento de todos ao perguntar qual empresa oferece a melhor proposta para pagamento à vista e para o pagamento parcelado.

4.1.3 Alternativa para Resolução

Há algumas formas de se resolver o problema, em uma delas, os alunos seriam orientados a calcular a quantia referente ao juro simples de cada situação e, assim, construir outra tabela com os valores totais mês a mês. Nesse caso, a tabela poderá ser feita manualmente ou com ajuda da planilha eletrônica Excel. A utilização desse recurso tecnológico é bastante eficaz na elaboração de planilhas e no cálculo de valores como o deste problema. A seguir, tem-se uma ilustração da proposta:

Figura 13 – Proposta de pagamento (1)

	A-B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1-2		PROPOSTA DA EMPRESA 1										
3	FORMA DE PAGAMENTO	À VISTA	1X	2X	3X	4X	5X	6X	7X	8X	9X	10X
4												
5	VALOR TOTAL	R$ 1.175,00	R$ 1.275,00	R$ 1.300,00	R$ 1.325,00	R$ 1.350,00	R$ 1.375,00	R$ 1.400,00	R$ 1.425,00	R$ 1.450,00	R$ 1.475,00	R$ 1.500,00

Fonte: Autor.

Figura 14 – Proposta de pagamento (2)

	A-B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1-2		PROPOSTA DA EMPRESA 2										
3	FORMA DE PAGAMENTO	À VISTA	1X	2X	3X	4X	5X	6X	7X	8X	9X	10X
4												
5	VALOR TOTAL	R$ 1.170,00	R$ 1.313,00	R$ 1.326,00	R$ 1.339,00	R$ 1.352,00	R$ 1.365,00	R$ 1.378,00	R$ 1.391,00	R$ 1.404,00	R$ 1.417,00	R$ 1.430,00

Fonte: Autor.

As planilhas deixam de maneira clara em quais casos a empresa 1 oferece a melhor proposta e, em quais opções de pagamento a empresa 2 se torna mais vantajosa. Cabe ao professor, a partir desse momento, discutir e acompanhar seus alunos às devidas conclusões que remeterão à resposta do problema.

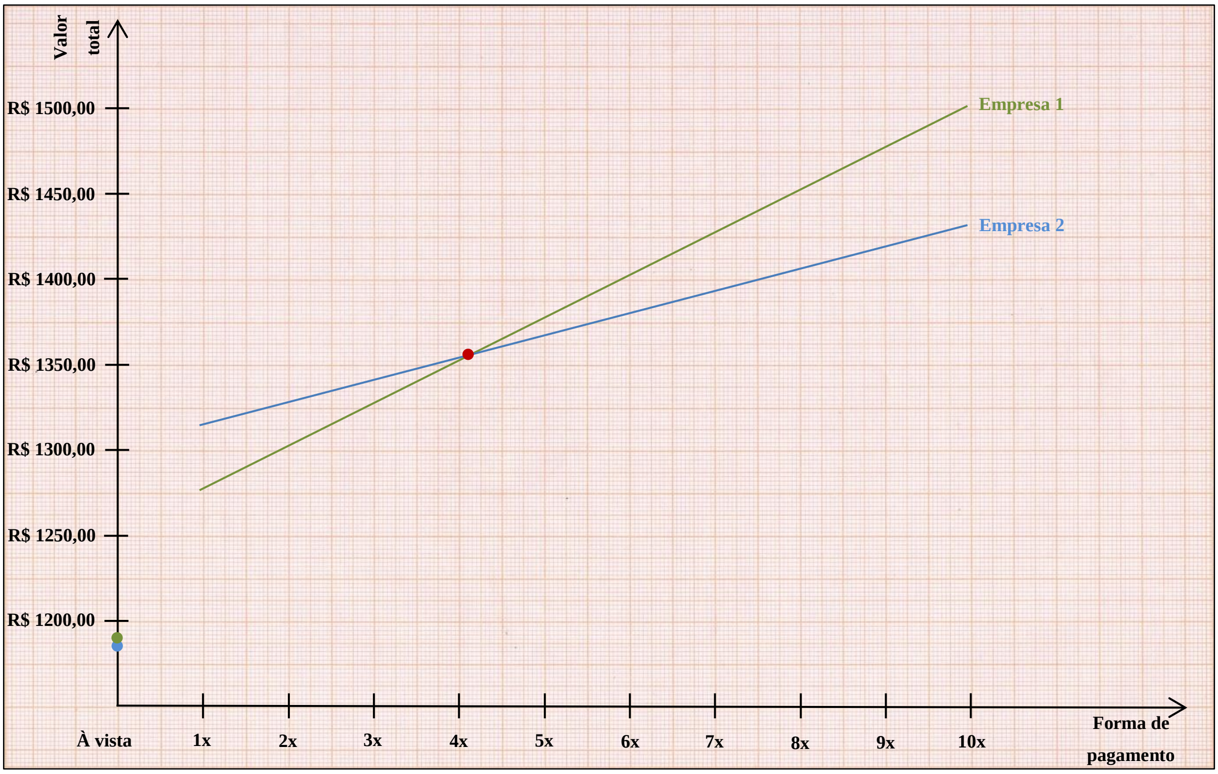
Em um olhar mais apurado, o leitor pode perceber que é neste momento que as Progressões Aritméticas se mostram aos alunos. Ao observar os montantes nos parcelamentos de 1 até 10 vezes da empresa 1, nota-se que a sequência numérica forma uma PA crescente onde a_1=1275 e a razão é 25 (2% de 1250). Analogamente, os montantes dos parcelamentos da empresa 2 formam uma PA crescente onde a_1=1313 e a razão é 13 (1% de 1300).

Essa estreita relação entre as Progressões Aritméticas e os Juros Simples trás um novo modo de calcular o valor de cada montante. Assim, estando em posse do valor do juro cobrado e do montante referente ao parcelamento em uma vez, é possível determinar os valores a serem pagos em cada caso. Para isso, basta que o professor ou o aluno aplique os conhecimentos de Progressão Aritmética, utilizando o primeiro elemento e a razão.

Para aqueles que optarem por um tratamento matemático mais amplo, a solução referente ao problema também poderá ser representada e esclarecida por meio do gráfico da função afim, também conhecida como função polinomial de grau 1 ou de 1º grau. De certo modo, e, a fim de evitar contratempos, recomenda-se que o professor construa o gráfico que represente o problema junto aos seus alunos ou que retome o conteúdo de gráfico de função afim antes de partir para a solução do problema.

A imagem, a seguir, representa o gráfico de uma função afim com as informações do problema. Além disso, estarão presentes no gráfico os valores referentes ao pagamento à vista.

Figura 15 – Comparativo das propostas



Fonte: Autor.

Assim como nas Figuras 13 e 14, o gráfico anterior (Figura 15) representa os valores cobrados pelas duas empresas em função da maneira como será feito a quitação, ficando nítido que a forma de pagamento e a quantidade de parcelas definem qual empresa oferece o preço menor, ou seja, em qual delas é mais vantajoso assinar o contrato para a festa de formatura.

4.1.4 Avaliação

A avaliação pode ser feita através da observação do professor no que diz respeito à interação dos alunos na busca por soluções para o problema. Além do mais, visando um senso de justiça que contemple a todos, é importante mencionar que a avaliação deve ser individual, levando-se em consideração as limitações de cada aluno.

4.1.5 Conclusões

Esse tipo de problema envolvendo o consumo de um produto ou serviço desejável é muito comum no dia a dia. Em todo caso, é preciso analisá-lo com calma e julgar se realmente é preciso no momento. No caso da festa de formatura, ela ocorre uma única vez e servirá de boas lembranças no futuro, essa casualidade pode ofuscar o equilíbrio entre o planejar e o consumir imediatamente, visto que ninguém irá ficar de fora. Desse modo, na imediata vontade de participar do evento, aliado ao pouco dinheiro que o aluno normalmente possui, o parcelamento parece a única alternativa. Dito isso, espera-se que o aluno entenda que mesmo na obrigatoriedade do parcelamento, é possível encontrar melhores opções de compra.

No mais, é importante dizer que alguns momentos em nossas vidas são tão raros que a emoção até pode sobressair ante a racionalidade, entretanto, a regra principal para a educação financeira é saber o momento certo e a real necessidade de se comprar um produto ou serviço, ou seja, planejar.

4.2 O JURO COMPOSTO NO FINANCIAMENTO DE PRODUTOS

Com o advento da tecnologia, tornou-se muito mais comum o uso de aparelhos eletrônicos (o celular é um grande exemplo). Seus jogos e aplicativos mostram-se cada vez mais presente no dia a dia de todos, inclusive dos alunos.

A importância deste aparelho é tamanha, que reportagem da ANATEL (Agência Nacional de Telecomunicações) de março de 2018, revelou haver mais de 235 milhões de linhas ativas no Brasil, ou seja, uma média de mais de um aparelho por pessoa.

Levando essa estatística em consideração, problematizar a compra de um aparelho celular (especialmente os modelos mais caros) como tema principal desta atividade, se mostra uma maneira simples e eficiente de atrair a atenção daqueles que o usam. Em geral, independente do motivo da compra, este é um produto que desperta grande anseio nesta jovem população.

Enfim, vale relembrar que a ideia central desta atividade é mostrar aos alunos a importância em lidar, de modo saudável, com o dinheiro. Portanto, os problemas elaborados pelo professor devem priorizar formas de planejamento ao invés do consumo imediato e impulsivo. O aluno precisa perceber que o planejamento é sempre a melhor saída e que o consumo imediato só deve ser utilizado em caso de emergência; de outro modo, não faria sentido todo o trabalho, aqui, empreendido.

4.2.1 Planejamento da Atividade

<u>Título</u>: O Juro Composto no financiamento de produtos

<u>Modalidade</u>: Ensino Médio

<u>Disciplina</u>: Matemática

<u>Conteúdo</u>: Planejamento, investimento, parcelamento, juro composto, acréscimo e progressão geométrica.

<u>Aulas necessárias para o desenvolvimento</u>: 04 a 06

<u>Objetivos Gerais</u>: Analisar os meios de pagamentos e compreender que o planejamento é a forma mais saudável de compra de um produto ou serviço.

<u>Objetivos Específicos</u>: Interpretar folhetos de propaganda; construir e interpretar tabela; utilizar o conceito de juro composto para o cálculo de parcelas; realizar operações multiplicativas; entender a aplicação na caderneta de poupança.

4.2.2 Descrição do Problema

Nesta atividade, aplicável ao 2º ou 3º ano do Ensino Médio, o professor pode começar perguntando aos seus alunos se eles conseguiriam guardar dinheiro para comprar um i-Phone ou se pagariam parcelado para ter o produto rapidamente. Com isso, busca-se colocar os alunos para pensar sobre as diferenças existentes nesses dois tipos de compra.

Ao mesmo tempo, usar esse tipo de chamada aumenta a possibilidade de alcançar o interesse de um grande número de alunos, visto que o modelo citado é altamente desejável entre os jovens.

Assim, após ouvir o que os alunos têm a dizer (analisando o comportamento de cada um diante desta situação), o professor pode intervir no sentido de mostrar a eles a importância do planejamento na hora de comprar um produto ou serviço e dos riscos da compra por impulso.

Neste momento, torna-se conveniente mostrar aos alunos alguns folhetos ou sites de vendas de aparelhos para que os mesmos vejam a enorme diferença entre planejar e comprar por impulso. Complementarmente, uma ida ao comércio local (para visitar algumas lojas de varejo) agregaria teoria e prática, dando uma experiência completamente diferente do que se teria apenas com o aprendizado em sala de aula, além de colocar os alunos diante do conceito de juro composto que está presente em quase todas as operações feitas no modo parcelado.

Após essa possível visita, o professor escolhe um dos panfletos com a seguinte situação:

Tabela 7 – Propaganda de celular

LOJA MEIO PREÇO	
	**IPhone 8 Plus 64GB Vermelho Special Edition Tela 5.5” IOS11 4G Câmera 12MP – Apple** **R$ 3990,00** **10% de desconto à vista** **Taxa de 2,99% a.m. em até 24x.**

Fonte: Autor.

As perguntas que cabem aqui são:

- Qual é o preço do aparelho se for pago à vista?

- Qual o valor da parcela e o total se o produto for parcelado em 12 vezes?
- Qual o valor da parcela e o total se o produto for parcelado em 24 vezes?
- Se ao invés de pagar parcelado em 12 vezes, a pessoa aplicar essa quantia todo mês na poupança, em quanto tempo o celular poderá ser comprado com o preço à vista?
- Se ao invés de pagar parcelado em 24 vezes, a pessoa aplicar essa quantia todo mês na poupança, em quanto tempo o celular poderá ser comprado com o preço à vista?

Antes de continuar com a atividade, o professor pode explicar quais são as características principais da caderneta de poupança, bem como o porquê de sua preferência entre os brasileiros. Nesse sentido, torna-se essencial fazer uma abordagem acerca dos diversos tipos de investimentos existentes, além do que, citar as variações da rentabilidade e do risco de cada operação. Esse conhecimento dará ao aluno uma visão clara da importância do investimento, sendo, este último, um dos principais pilares do planejamento.

4.2.3 Alternativa para Resolução

Além do cálculo tradicional, o professor pode solicitar que os alunos instalem e usem determinados aplicativos de celular. Tais softwares podem transformar o aparelho em uma calculadora financeira, trazendo tecnologia e rapidez para dentro de sala de aula. Essa dualidade entre o tradicional e novo deve ser vista como uma complementação, e não meramente como oposição.

Assim, para a continuação e resolução do problema, o aluno utilizará conceitos de porcentagem e desconto para o cálculo do preço à vista do celular. Em seguida, ao utilizar a fórmula de cálculo de parcela do sistema PRICE (capítulo 3), espera-se que eles consigam determinar os valores das parcelas no caso da compra em 12 e em 24 meses. Consequentemente, fazendo-se valer de algumas simples multiplicações, os valores totais serão obtidos.

Os resultados encontrados constarão nas imagens a seguir, mostrando aos alunos a enorme diferença entre o pagamento à vista (menor ainda por conta do desconto) e parcelado, assim como a disparidade nos valores totais da compra em 12 e 24 parcelas.

Preço base: R$ 3990,00

Valor à vista: R$ 3591,00

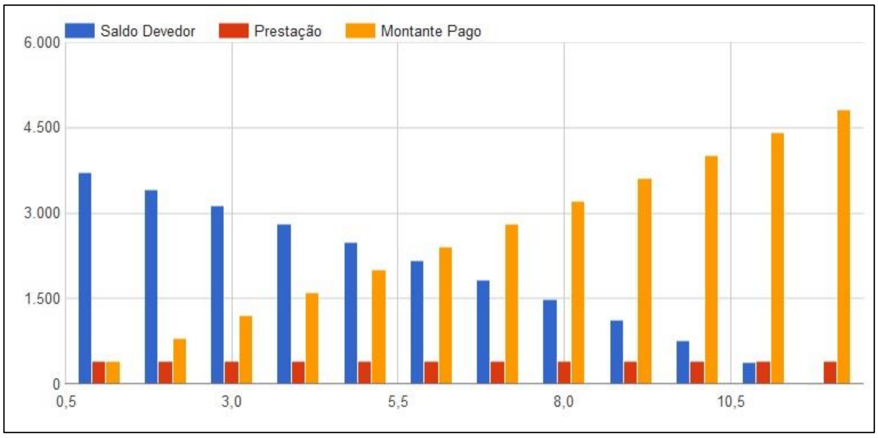
Figura 16 – Sistema PRICE (a)

Tabela Price	
Entrada:	R$ 0
Valor Financiado:	R$ 3.990,00
Juros:	2,99 % ao mês
Meses:	12
Valor da Prestação:	R$ 400,60

Mês	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação	Montante Pago
-	3.990,00	-	-	-	0
1	3.708,70	281,30	119,30	400,60	400,60
2	3.418,99	289,71	110,89	400,60	801,20
3	3.120,62	298,37	102,23	400,60	1.201,80
4	2.813,33	307,29	93,31	400,60	1.602,40
5	2.496,85	316,48	84,12	400,60	2.003,00
6	2.170,91	325,94	74,66	400,60	2.403,60
7	1.835,22	335,69	64,91	400,60	2.804,20
8	1.489,49	345,73	54,87	400,60	3.204,80
9	1.133,43	356,06	44,54	400,60	3.605,40
10	766,72	366,71	33,89	400,60	4.006,00
11	389,04	377,68	22,92	400,60	4.406,60
12	0,00	388,97	11,63	400,60	4.807,20
Total:	-	3.990,00	817,27	4.807,20	4.807,20

Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 17 – Comparação gráfica (a)



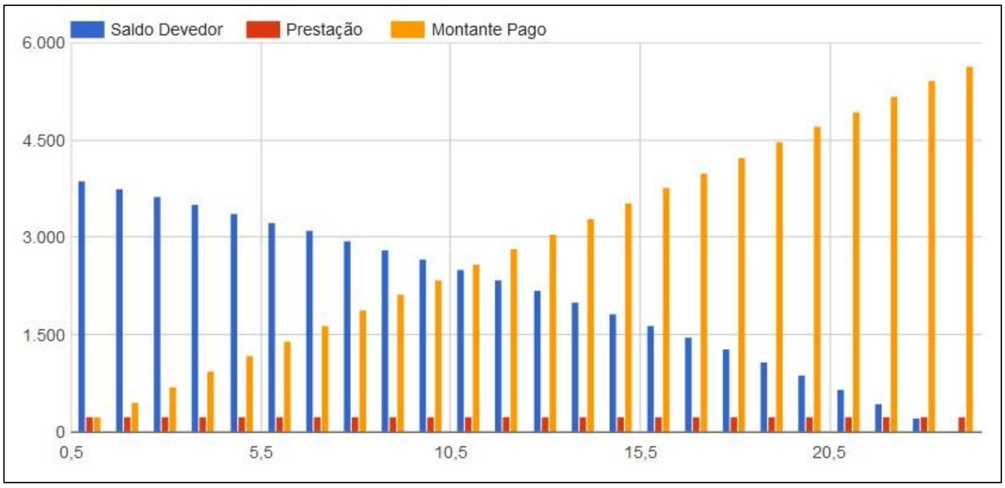
Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 18 – Sistema PRICE (b)

Tabela Price					
Entrada:		R$ 0			
Valor Financiado:		R$ 3.990,00			
Juros:		2,99 % ao mês			
Meses:		24			
Valor da Prestação:		R$ 235,35			
Mês	**Saldo Devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**	**Montante Pago**
-	3.990,00	-	-	-	0
1	3.873,95	116,05	119,30	235,35	235,35
2	3.754,43	119,52	115,83	235,35	470,70
3	3.631,34	123,09	112,26	235,35	706,05
4	3.504,57	126,77	108,58	235,35	941,40
5	3.374,01	130,56	104,79	235,35	1.176,75
6	3.239,54	134,47	100,88	235,35	1.412,10
7	3.101,05	138,49	96,86	235,35	1.647,45
8	2.958,42	142,63	92,72	235,35	1.882,80
9	2.811,53	146,89	88,46	235,35	2.118,15
10	2.660,24	151,29	84,06	235,35	2.353,50
11	2.504,43	155,81	79,54	235,35	2.588,85
12	2.343,96	160,47	74,88	235,35	2.824,20
13	2.178,69	165,27	70,08	235,35	3.059,55
14	2.008,48	170,21	65,14	235,35	3.294,90
15	1.833,18	175,30	60,05	235,35	3.530,25
16	1.652,64	180,54	54,81	235,35	3.765,60
17	1.466,70	185,94	49,41	235,35	4.000,95
18	1.275,20	191,50	43,85	235,35	4.236,30
19	1.077,98	197,22	38,13	235,35	4.471,65
20	874,86	203,12	32,23	235,35	4.707,00
21	665,67	209,19	26,16	235,35	4.942,35
22	450,22	215,45	19,90	235,35	5.177,70
23	228,33	221,89	13,46	235,35	5.413,05
24	0,00	228,52	6,83	235,35	5.648,40
Total:	-	3.990,00	1.658,21	5.648,40	5.648,40

Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 19 – Comparação gráfica (b)



Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

As figuras ilustram claramente uma diferença nos valores de R$ 1216,20 e de R$ 2057,40 entre as compras feitas à vista e parceladas em 12 e 24 vezes, respectivamente. Essa disparidade deve ser evidenciada pelo professor, de modo que os alunos possam perceber que a divergência é abissal.

Caso os respectivos valores das parcelas fossem aplicados mês a mês no investimento mais tradicional e menos rentável do Brasil (caderneta de poupança), além de não se comprometer com dívidas desnecessárias, o aparelho celular poderia ser comprado no preço à vista e em muito menos tempo se comparado aos meses de parcelamento.

Figura 20 – Evolução de Investimento (a)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	INVESTIMENTO MENSAL DE R$ 400,60 NA CADERNETA DE POUPANÇA (RENDIMENTO MÉDIO DE 0,4% a.m.)											
2												
3												
4												
5	1º mês	2º mês	3º mês	4º mês	5º mês	6º mês	7º mês	8º mês	9º mês	10º mês	11º mês	12º mês
6	R$ 400,60	R$ 802,80	R$ 1.206,61	R$ 1.612,04	R$ 2.019,09	R$ 2.427,76	R$ 2.838,08	R$ 3.250,03	R$ 3.663,63	R$ 4.078,88	R$ 4.495,80	R$ 4.914,38

Fonte: Autor.

Figura 21 – Evolução de Investimento (b)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	INVESTIMENTO MENSAL DE R$ 235,35 NA CADERNETA DE POUPANÇA (RENDIMENTO MÉDIO DE 0,4% a.m.)											
2												
3												
4												
5	1º mês	2º mês	3º mês	4º mês	5º mês	6º mês	7º mês	8º mês	9º mês	10º mês	11º mês	12º mês
6	R$ 235,35	R$ 471,64	R$ 708,88	R$ 947,06	R$ 1.186,20	R$ 1.426,30	R$ 1.667,35	R$ 1.909,37	R$ 2.152,36	R$ 2.396,32	R$ 2.641,25	R$ 2.887,17
7	13º mês	14º mês	15º mês	16º mês	17º mês	18º mês	19º mês	20º mês	21º mês	22º mês	23º mês	24º mês
8	R$ 3.134,07	R$ 3.381,95	R$ 3.630,83	R$ 3.880,70	R$ 4.131,58	R$ 4.383,45	R$ 4.636,34	R$ 4.890,23	R$ 5.145,14	R$ 5.401,07	R$ 5.658,03	R$ 5.916,01

Fonte: Autor.

As figuras anteriores apresentam informações importantes no que diz respeito ao investimento na caderneta de poupança e na compra à vista do i-Phone. Na primeira situação, onde eram aplicados R$ 400,60 mensalmente, percebe-se que no 9º mês já seria possível comprar o aparelho. Já para o caso onde o valor investido a cada mês era de R$ 235,35, conclui-se que seria possível adquirir o celular a partir do 15º mês, ou seja, em ambos os casos, daria para comprar o aparelho celular em um tempo menor do que o parcelamento, e com um valor de até R$ 2057,40 de diferença.

4.2.4 Avaliação

O professor pode avaliar os alunos individualmente ou em grupos, para isso, poderá observá-los em sua interação na busca por soluções para o problema, assim como propor outras situações que demandem soluções semelhantes.

Desse modo, assim como em qualquer atividade que precise ser avaliada, o professor deve levar em conta o potencial e o limite de cada indivíduo.

4.2.5 Conclusões

As informações transmitidas aos alunos através das situações propostas na atividade e nos resultados obtidos são fundamentais para mostrar aos mesmos que planejar a compra de um produto ou serviço é invariavelmente mais seguro e quase sempre mais barato do que optar pelo parcelamento, excetuando-se a este último, a compra parcelada (sem juros) via cartão de crédito.

Para tanto, o professor deve deixar claro que a evidência maior da citada segurança do planejamento está na eventualidade de um imprevisto financeiro acontecer no decorrer do processo, ou seja, considerando-se ambas as situações de consumo, tem-se como incomum que uma pessoa que elabore planos de consumo possua dívidas futuras, estando livre para usar o capital investido num eventual contratempo. Entretanto, as pessoas que não costumam se planejar, tendem a se perder entre seus ganhos e gastos. Para essas pessoas, um imprevisto financeiro se torna potencialmente desastroso, pois as dívidas acumuladas serão as primeiras a serem sacrificadas caso haja mudanças nas prioridades de pagamento, culminando com a inadimplência e suas consequências negativas para a sociedade.

4.3 O SONHO DA CASA PRÓPRIA?

Qualquer um que se aventure no mundo das pesquisas estatísticas com a pergunta “Qual seu maior sonho?”, certamente encontrará entrevistados cuja resposta será imediata: “Comprar a casa própria; sair do aluguel”. Tal resposta não vem a ser uma surpresa se a pessoa que a responde cresceu vendo seus pais “se matando de trabalhar” para conseguir sair do aluguel. Acrescenta-se a esse fato, as empresas do setor de construção que usam a mídia para bombardear a todos com suas propagandas, deixando sempre claro a importância de se comprar a casa própria. Assim, vê-se compreensível e quase natural que tamanho estímulo deixe marcas profundas em uma criança, ou seja, para esse futuro adulto, custe o que custar, a compra da casa própria provavelmente se tornará o principal objetivo de vida.

É importante deixar claro ao leitor que esta atividade não tem o intuito de menosprezar àqueles que optam por comprar uma casa, mas mostrar que essa “importância” imposta tão fortemente pelo senso comum, pode causar um bloqueio de racionalidade, levando muitos dos que não possuem recursos a entrar em um financiamento de 20, 25 e até 30 anos sem ponderar os perigos aos quais se está sujeito ao comprometer parte da renda durante um período de tempo tão grande.

4.3.1 Planejamento da Atividade

Título: O sonho da casa própria?

Modalidade: Ensino Médio

Disciplina: Matemática

Conteúdo: Planejamento, investimento, juro composto, parcelamento, acréscimo e tabela SAC.

Aulas necessárias para o desenvolvimento: 04 a 08

Objetivos Gerais: Compreender que quanto maior o valor do bem, mais alto é o risco do financiamento; enxergar no planejamento uma alternativa mais barata e segura de se adquirir uma casa.

Objetivos Específicos: Utilizar a tabela SAC para calcular o valor de um financiamento de imóvel; entender que há aplicações mais rentáveis que a caderneta de poupança.

4.3.2 Descrição do Problema

O professor pode iniciar esta atividade perguntando aos seus alunos sobre as prioridades que possuem na vida. A ideia, aqui, é que através das inúmeras respostas, o professor possa direcionar a atividade convenientemente, ou seja, utilizando como base os que responderem pela compra de um imóvel, o assunto poderá ser aprofundado pela turma. Todavia, na excepcionalidade de haver uma sala em que não haja aqueles que optem por tal caminho, caberá ao professor perguntar aos jovens se a compra da casa própria faz ou não parte da lista de prioridades. A partir de então, o mesmo poderá prosseguir com a atividade, aqui, sabiamente direcionada.

Diante da importância do tema, tem-se como natural que, a esta altura, algumas perguntas relacionadas à compra da casa própria possam surgir. Esse será o momento propício para utilizar um bom tempo e explicar o funcionamento dos métodos mais comuns para a aquisição de um imóvel no Brasil (consórcio, financiamento e a compra à vista), bem como os perigos inerentes a cada tomada de decisão.

A partir da explanação, espera-se uma ação quase que instintiva dos alunos em compreender que compra à vista é a opção mais barata e, ao mesmo tempo, sentimentos de apreensão e questionamentos por eles não possuírem recursos para a aquisição à vista. Por isso, com o intuito de acalmar os ânimos, o professor poderá se utilizar de tais afeições para mostrar aos alunos que é possível comprar uma casa à vista, mas que o processo não é fácil, pois necessita de tempo e disciplina.

Após o desfecho dessa conversa que tende a ser esclarecedora, caberá ao professor instigar seus alunos, propondo uma atividade como a seguinte:

Uma empresa está comercializando apartamentos populares que custam, à vista, R$ 150.000,00 cada. A companhia garante uma valorização média de 3% do imóvel ao ano e, além disso, oferece financiamento próprio (sem recorrer a bancos) com entrada de 20% e o restante financiado a juro composto de 10,5% ao ano pelo período de 180 meses (15 anos).

Carlos gostaria de comprar um apartamento, mas está em dúvida se financia para ter o imóvel agora (aproveitando a valorização), opta por um consórcio ou investe seu dinheiro mensalmente para comprar à vista no futuro. Na esperança de se decidir, Carlos pesquisou valores de consórcios (180 meses de R$1.050,00) e de investimentos (aplicações mensais a partir de R$ 1.000,00 com rendimento de 0,6% ao mês). Diante do exposto, faça os cálculos, analise as três situações e decida qual seria a melhor opção caso você fosse Carlos. Em seguida, responda o porquê de sua resposta.

Antes de iniciar a resolução do problema, o professor deve alertar os alunos que o personagem da história (Carlos) possui o valor referente aos 20% da entrada caso opte pelo financiamento, ou seja, ele pode usar esse valor tanto no consórcio quanto como aplicação inicial no investimento.

4.3.3 Alternativa para Resolução

Podendo ser realizada individualmente ou em grupo de três pessoas, por exemplo, esta atividade requererá o uso de calculadoras científicas ou softwares de planilha eletrônica, pois a resolução possui um elevado número de processos aritméticos, tornando desinteressante apenas o uso do método tradicional.

Primeiramente, caso o aluno opte por começar com o financiamento, ele precisará saber qual será o preço (valorização) do imóvel decorridos os 15 anos do financiamento e, também, o capital referente aos 20% da entrada; nesse caso, respectivamente, R$ 233.695,11 e R$ 30.000,00. Para encontrar tais valores, basta utilizar a fórmula do juro composto e o conceito de porcentagem.

Num segundo momento, o cálculo dos elementos do financiamento através da tabela SAC será necessário para se compreender o comportamento evolutivo com o passar dos 15 anos. Desse modo, aconselham-se utilizar as calculadoras financeiras que estão disponíveis na internet, elas trarão tecnologia e rapidez para a sala de aula, assim como as figuras, a seguir, ilustram isso.

Figura 22 – Sistema SAC (1)

Mês	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação	Montante Pago
-	120.000,00	-	-	-	30.000,00
1	119.333,33	666,67	1.002,62	1.669,29	31.669,29
2	118.666,66	666,67	997,05	1.663,72	33.333,01
3	117.999,99	666,67	991,48	1.658,15	34.991,16
4	117.333,32	666,67	985,91	1.652,58	36.643,74
5	116.666,66	666,66	980,34	1.647,00	38.290,74
6	116.000,00	666,66	974,77	1.641,43	39.932,17
7	115.333,34	666,66	969,20	1.635,86	41.568,03
8	114.666,68	666,66	963,63	1.630,29	43.198,32
9	114.000,02	666,66	958,06	1.624,72	44.823,04
10	113.333,36	666,66	952,49	1.619,15	46.442,19
11	112.666,70	666,66	946,92	1.613,58	48.055,77
12	112.000,04	666,66	941,35	1.608,01	49.663,78
13	111.333,38	666,66	935,78	1.602,44	51.266,22
14	110.666,72	666,66	930,21	1.596,87	52.863,09
15	110.000,06	666,66	924,64	1.591,30	54.454,39
16	109.333,40	666,66	919,07	1.585,73	56.040,12
17	108.666,74	666,66	913,50	1.580,16	57.620,28
18	108.000,08	666,66	907,93	1.574,59	59.194,87
19	107.333,42	666,66	902,36	1.569,02	60.763,89
20	106.666,76	666,66	896,79	1.563,45	62.327,34
21	106.000,10	666,66	891,22	1.557,88	63.885,22
22	105.333,44	666,66	885,65	1.552,31	65.437,53
23	104.666,78	666,66	880,08	1.546,74	66.984,27
24	104.000,12	666,66	874,51	1.541,17	68.525,44
25	103.333,46	666,66	868,94	1.535,60	70.061,04
26	102.666,80	666,66	863,37	1.530,03	71.591,07
27	102.000,14	666,66	857,80	1.524,46	73.115,53
28	101.333,48	666,66	852,23	1.518,89	74.634,42
29	100.666,82	666,66	846,66	1.513,32	76.147,74
30	100.000,16	666,66	841,09	1.507,75	77.655,49

Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 23 – Sistema SAC (2)

31	99.333,50	666,66	835,52	1.502,18	79.157,67
32	98.666,84	666,66	829,95	1.496,61	80.654,28
33	98.000,18	666,66	824,38	1.491,04	82.145,32
34	97.333,52	666,66	818,81	1.485,47	83.630,79
35	96.666,86	666,66	813,24	1.479,90	85.110,69
36	96.000,20	666,66	807,67	1.474,33	86.585,02
37	95.333,54	666,66	802,10	1.468,76	88.053,78
38	94.666,88	666,66	796,53	1.463,19	89.516,97
39	94.000,22	666,66	790,96	1.457,62	90.974,59
40	93.333,56	666,66	785,39	1.452,05	92.426,64
41	92.666,90	666,66	779,82	1.446,48	93.873,12
42	92.000,24	666,66	774,25	1.440,91	95.314,03
43	91.333,58	666,66	768,68	1.435,34	96.749,37
44	90.666,92	666,66	763,11	1.429,77	98.179,14
45	90.000,26	666,66	757,54	1.424,20	99.603,34
46	89.333,60	666,66	751,97	1.418,63	101.021,97
47	88.666,94	666,66	746,40	1.413,06	102.435,03
48	88.000,28	666,66	740,83	1.407,49	103.842,52
49	87.333,62	666,66	735,26	1.401,92	105.244,44
50	86.666,96	666,66	729,69	1.396,35	106.640,79
51	86.000,30	666,66	724,12	1.390,78	108.031,57
52	85.333,64	666,66	718,55	1.385,21	109.416,78
53	84.666,98	666,66	712,98	1.379,64	110.796,42
54	84.000,32	666,66	707,41	1.374,07	112.170,49
55	83.333,66	666,66	701,84	1.368,50	113.538,99
56	82.667,00	666,66	696,27	1.362,93	114.901,92
57	82.000,34	666,66	690,70	1.357,36	116.259,28
58	81.333,68	666,66	685,13	1.351,79	117.611,07
59	80.667,02	666,66	679,56	1.346,22	118.957,29
60	80.000,36	666,66	673,99	1.340,65	120.297,94

Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 24 – Sistema SAC (3)

61	79.333,70	666,66	668,42	1.335,08	121.633,02
62	78.667,04	666,66	662,85	1.329,51	122.962,53
63	78.000,38	666,66	657,28	1.323,94	124.286,47
64	77.333,72	666,66	651,71	1.318,37	125.604,84
65	76.667,06	666,66	646,14	1.312,80	126.917,64
66	76.000,40	666,66	640,57	1.307,23	128.224,87
67	75.333,74	666,66	635,00	1.301,66	129.526,53
68	74.667,08	666,66	629,43	1.296,09	130.822,62
69	74.000,42	666,66	623,86	1.290,52	132.113,14
70	73.333,76	666,66	618,29	1.284,95	133.398,09
71	72.667,09	666,67	612,71	1.279,38	134.677,47
72	72.000,42	666,67	607,14	1.273,81	135.951,28
73	71.333,75	666,67	601,57	1.268,24	137.219,52
74	70.667,08	666,67	596,00	1.262,67	138.482,19
75	70.000,41	666,67	590,43	1.257,10	139.739,29
76	69.333,74	666,67	584,86	1.251,53	140.990,82
77	68.667,07	666,67	579,29	1.245,96	142.236,78
78	68.000,40	666,67	573,72	1.240,39	143.477,17
79	67.333,73	666,67	568,15	1.234,82	144.711,99
80	66.667,06	666,67	562,58	1.229,25	145.941,24
81	66.000,39	666,67	557,01	1.223,68	147.164,92
82	65.333,72	666,67	551,44	1.218,11	148.383,03
83	64.667,05	666,67	545,87	1.212,54	149.595,57
84	64.000,38	666,67	540,30	1.206,97	150.802,54
85	63.333,71	666,67	534,73	1.201,40	152.003,94
86	62.667,04	666,67	529,16	1.195,83	153.199,77
87	62.000,37	666,67	523,59	1.190,26	154.390,03
88	61.333,70	666,67	518,02	1.184,69	155.574,72
89	60.667,03	666,67	512,45	1.179,12	156.753,84
90	60.000,36	666,67	506,88	1.173,55	157.927,39

Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 25 – Sistema SAC (4)

91	59.333,69	666,67	501,31	1.167,98	159.095,37
92	58.667,02	666,67	495,74	1.162,41	160.257,78
93	58.000,35	666,67	490,17	1.156,84	161.414,62
94	57.333,68	666,67	484,60	1.151,27	162.565,89
95	56.667,01	666,67	479,03	1.145,70	163.711,59
96	56.000,34	666,67	473,46	1.140,13	164.851,72
97	55.333,67	666,67	467,89	1.134,56	165.986,28
98	54.667,00	666,67	462,32	1.128,99	167.115,27
99	54.000,33	666,67	456,75	1.123,42	168.238,69
100	53.333,66	666,67	451,18	1.117,85	169.356,54
101	52.667,00	666,66	445,61	1.112,27	170.468,81
102	52.000,34	666,66	440,04	1.106,70	171.575,51
103	51.333,68	666,66	434,47	1.101,13	172.676,64
104	50.667,02	666,66	428,90	1.095,56	173.772,20
105	50.000,36	666,66	423,33	1.089,99	174.862,19
106	49.333,70	666,66	417,76	1.084,42	175.946,61
107	48.667,04	666,66	412,19	1.078,85	177.025,46
108	48.000,38	666,66	406,62	1.073,28	178.098,74
109	47.333,72	666,66	401,05	1.067,71	179.166,45
110	46.667,06	666,66	395,48	1.062,14	180.228,59
111	46.000,40	666,66	389,91	1.056,57	181.285,16
112	45.333,74	666,66	384,34	1.051,00	182.336,16
113	44.667,08	666,66	378,77	1.045,43	183.381,59
114	44.000,42	666,66	373,20	1.039,86	184.421,45
115	43.333,76	666,66	367,63	1.034,29	185.455,74
116	42.667,10	666,66	362,06	1.028,72	186.484,46
117	42.000,44	666,66	356,49	1.023,15	187.507,61
118	41.333,78	666,66	350,92	1.017,58	188.525,19
119	40.667,12	666,66	345,35	1.012,01	189.537,20
120	40.000,46	666,66	339,78	1.006,44	190.543,64

Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 26 – Sistema SAC (5)

121	39.333,80	666,66	334,21	1.000,87	191.544,51
122	38.667,14	666,66	328,64	995,30	192.539,81
123	38.000,48	666,66	323,07	989,73	193.529,54
124	37.333,82	666,66	317,50	984,16	194.513,70
125	36.667,16	666,66	311,93	978,59	195.492,29
126	36.000,50	666,66	306,36	973,02	196.465,31
127	35.333,84	666,66	300,79	967,45	197.432,76
128	34.667,18	666,66	295,22	961,88	198.394,64
129	34.000,52	666,66	289,65	956,31	199.350,95
130	33.333,86	666,66	284,08	950,74	200.301,69
131	32.667,20	666,66	278,51	945,17	201.246,86
132	32.000,54	666,66	272,94	939,60	202.186,46
133	31.333,88	666,66	267,37	934,03	203.120,49
134	30.667,22	666,66	261,80	928,46	204.048,95
135	30.000,56	666,66	256,23	922,89	204.971,84
136	29.333,90	666,66	250,66	917,32	205.889,16
137	28.667,24	666,66	245,09	911,75	206.800,91
138	28.000,58	666,66	239,52	906,18	207.707,09
139	27.333,92	666,66	233,95	900,61	208.607,70
140	26.667,26	666,66	228,38	895,04	209.502,74
141	26.000,60	666,66	222,81	889,47	210.392,21
142	25.333,94	666,66	217,24	883,90	211.276,11
143	24.667,28	666,66	211,67	878,33	212.154,44
144	24.000,62	666,66	206,10	872,76	213.027,20
145	23.333,96	666,66	200,53	867,19	213.894,39
146	22.667,30	666,66	194,96	861,62	214.756,01
147	22.000,64	666,66	189,39	856,05	215.612,06
148	21.333,98	666,66	183,82	850,48	216.462,54
149	20.667,32	666,66	178,25	844,91	217.307,45
150	20.000,66	666,66	172,68	839,34	218.146,79

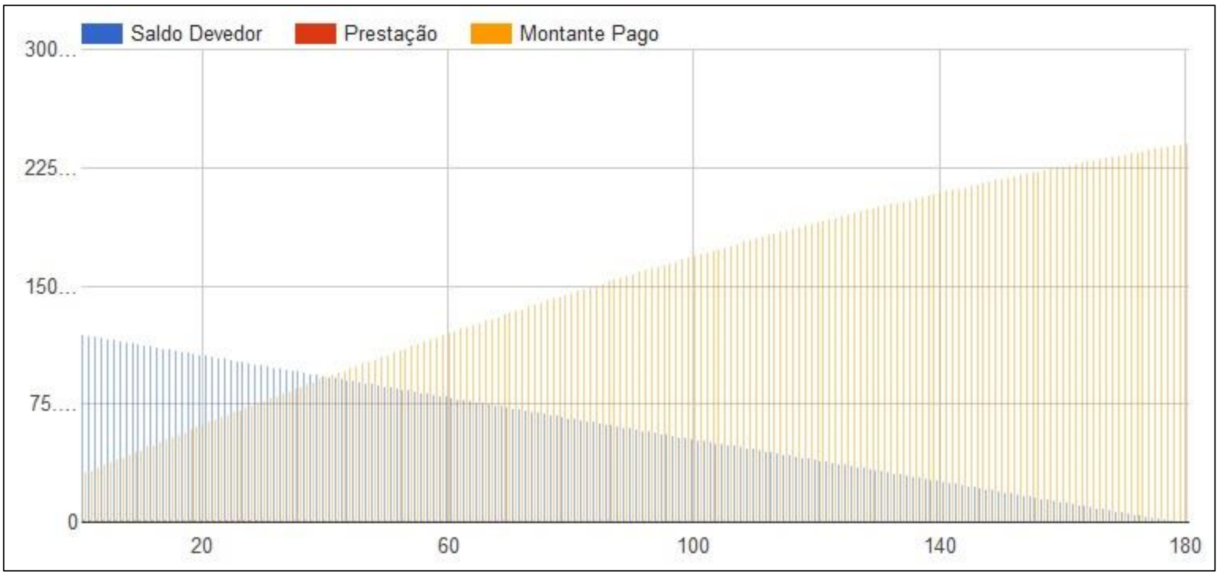
Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 27 – Sistema SAC (6)

151	19.334,00	666,66	167,11	833,77	218.980,56
152	18.667,34	666,66	161,54	828,20	219.808,76
153	18.000,68	666,66	155,97	822,63	220.631,39
154	17.334,02	666,66	150,40	817,06	221.448,45
155	16.667,36	666,66	144,83	811,49	222.259,94
156	16.000,70	666,66	139,26	805,92	223.065,86
157	15.334,04	666,66	133,69	800,35	223.866,21
158	14.667,38	666,66	128,12	794,78	224.660,99
159	14.000,72	666,66	122,55	789,21	225.450,20
160	13.334,06	666,66	116,98	783,64	226.233,84
161	12.667,40	666,66	111,41	778,07	227.011,91
162	12.000,74	666,66	105,84	772,50	227.784,41
163	11.334,08	666,66	100,27	766,93	228.551,34
164	10.667,42	666,66	94,70	761,36	229.312,70
165	10.000,76	666,66	89,13	755,79	230.068,49
166	9.334,10	666,66	83,56	750,22	230.818,71
167	8.667,44	666,66	77,99	744,65	231.563,36
168	8.000,78	666,66	72,42	739,08	232.302,44
169	7.334,12	666,66	66,85	733,51	233.035,95
170	6.667,46	666,66	61,28	727,94	233.763,89
171	6.000,80	666,66	55,71	722,37	234.486,26
172	5.334,14	666,66	50,14	716,80	235.203,06
173	4.667,48	666,66	44,57	711,23	235.914,29
174	4.000,82	666,66	39,00	705,66	236.619,95
175	3.334,16	666,66	33,43	700,09	237.320,04
176	2.667,50	666,66	27,86	694,52	238.014,56
177	2.000,84	666,66	22,29	688,95	238.703,51
178	1.334,18	666,66	16,72	683,38	239.386,89
179	667,52	666,66	11,15	677,81	240.064,70
180	0,00	666,66	5,58	672,24	240.736,94
Total:	-	120.000,00	90.737,80	210.736,94	240.736,94

Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

Figura 28 – Comparativo Gráfico



Fonte: www.calculadoraonline.com.br/financeira

As ideias presentes nesta modalidade mostrarão ao aluno que, por um lado, o financiamento traz a possibilidade de possuir o bem imediatamente, entretanto, a um custo elevado, pois o imóvel cujo valor inicial estava em R$ 150.000,00 custará, efetivamente, R$ 240.736,94. Soma-se a este fato que a valorização do imóvel é toda anulada devido ao juro do financiamento, além do que, tal cenário só será possível se, no decorrer dos 15 anos, nenhum imprevisto ocorrer, pois caso haja algum problema de ordem financeira, tornar-se-á altamente improvável que o consumidor consiga honrar o pagamento de parcelas que estão acima dos R$ 1500,00 por mês, gerando problemas nas mais diversas escalas da sociedade.

No caso em que o discente optar pelo consórcio, ele rapidamente perceberá que mesmo sendo uma modalidade em que não incide juro, o custo efetivo final será bem maior que o valor contratado. Nesse momento, competirá ao professor explicar que no consórcio estão embutidas taxas que nem sempre são mencionadas. Tais cobranças como a Taxa de Administração, Fundo de Reserva, Fundo Comum, Taxa de Adesão e Seguro encarecem o preço final, ultrapassando, em grande parte dos casos, exorbitantes 25%.

Para o caso citado na atividade, mesmo que Carlos utilize como lance os R$ 30.000,00 que possui, restará contar com a sorte para poder conseguir a carta de crédito no início. Na hipótese de sucesso, tal valor abaterá, aproximadamente, 28 meses, restando 12 anos e 8 meses para o término do consórcio, o que levará Carlos a pagar R$ 189.000,00 por uma carta de crédito de R$ 150.000,00. Caso ele não consiga obter a carta de crédito no início do consórcio por meio de lance e resolva utilizar o valor para o abatimento, Carlos não conseguirá comprar o apartamento ao final, pois o mesmo valerá R$ 213.864,13 (devido à valorização do imóvel após 12 anos) e o valor da carta de crédito será de apenas R$ 150.000,00. Para este último caso, o consórcio é o menos recomendado.

Ainda em se tratando do consórcio, na iminência de um imprevisto financeiro, a descontinuação do pagamento das parcelas não acarretará na perda do valor já pago, mas em seu bloqueio, sendo possível a sua devolução e com as devidas correções monetárias somente ao final do consórcio.

Por fim, na modalidade em que há o planejamento para a compra futura, o dinheiro será periodicamente investido, sempre incidindo o percentual de 0,6% ao mês. Neste método, existe uma dificuldade oculta, ou seja, seu sucesso dependerá da disciplina do consumidor. Todavia, tamanha dedicação será recompensada, pois o planejamento se revelará como sendo o mais rentável das três opções.

Para obter o valor acumulado após 15 anos de investimento ininterrupto, os alunos poderão usar:

- Fórmula da Série Uniforme de Pagamento;

$$\boxed{VF = PMT.\left[\ \frac{(1+i)^n - 1}{i}\ \right]}$$

onde:

VF = Valor futuro;
PMT = Parcela periódica;
i = Taxa de juro;
n = Período.

- Planilha Eletrônica.

No caso da planilha eletrônica, a seguir, tem-se uma imagem na qual se ilustra uma maneira de resolução:

Figura 29 – Comparativo de Investimento

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**1º mês**	R$ 1.000,00	**37º mês**	R$ 41.290,57	**73º mês**	R$ 91.263,03	**109º mês**	R$ 153.243,95	**145º mês**	R$ 230.118,98
2	**2º mês**	R$ 2.006,00	**38º mês**	R$ 42.538,31	**74º mês**	R$ 92.810,61	**110º mês**	R$ 155.163,41	**146º mês**	R$ 232.499,69
3	**3º mês**	R$ 3.018,04	**39º mês**	R$ 43.793,54	**75º mês**	R$ 94.367,47	**111º mês**	R$ 157.094,39	**147º mês**	R$ 234.894,69
4	**4º mês**	R$ 4.036,14	**40º mês**	R$ 45.056,30	**76º mês**	R$ 95.933,68	**112º mês**	R$ 159.036,96	**148º mês**	R$ 237.304,06
5	**5º mês**	R$ 5.060,36	**41º mês**	R$ 46.326,64	**77º mês**	R$ 97.509,28	**113º mês**	R$ 160.991,18	**149º mês**	R$ 239.727,88
6	**6º mês**	R$ 6.090,72	**42º mês**	R$ 47.604,60	**78º mês**	R$ 99.094,33	**114º mês**	R$ 162.957,13	**150º mês**	R$ 242.166,25
7	**7º mês**	R$ 7.127,27	**43º mês**	R$ 48.890,23	**79º mês**	R$ 100.688,90	**115º mês**	R$ 164.934,87	**151º mês**	R$ 244.619,25
8	**8º mês**	R$ 8.170,03	**44º mês**	R$ 50.183,57	**80º mês**	R$ 102.293,03	**116º mês**	R$ 166.924,48	**152º mês**	R$ 247.086,96
9	**9º mês**	R$ 9.219,05	**45º mês**	R$ 51.484,67	**81º mês**	R$ 103.906,79	**117º mês**	R$ 168.926,03	**153º mês**	R$ 249.569,49
10	**10º mês**	R$ 10.274,37	**46º mês**	R$ 52.793,58	**82º mês**	R$ 105.530,23	**118º mês**	R$ 170.939,58	**154º mês**	R$ 252.066,90
11	**11º mês**	R$ 11.336,01	**47º mês**	R$ 54.110,34	**83º mês**	R$ 107.163,41	**119º mês**	R$ 172.965,22	**155º mês**	R$ 254.579,31
12	**12º mês**	R$ 12.404,03	**48º mês**	R$ 55.435,00	**84º mês**	R$ 108.806,39	**120º mês**	R$ 175.003,01	**156º mês**	R$ 257.106,78
13	**13º mês**	R$ 13.478,45	**49º mês**	R$ 56.767,61	**85º mês**	R$ 110.459,23	**121º mês**	R$ 177.053,03	**157º mês**	R$ 259.649,42
14	**14º mês**	R$ 14.559,32	**50º mês**	R$ 58.108,22	**86º mês**	R$ 112.121,99	**122º mês**	R$ 179.115,35	**158º mês**	R$ 262.207,32
15	**15º mês**	R$ 15.646,68	**51º mês**	R$ 59.456,87	**87º mês**	R$ 113.794,72	**123º mês**	R$ 181.190,04	**159º mês**	R$ 264.780,56
16	**16º mês**	R$ 16.740,56	**52º mês**	R$ 60.813,61	**88º mês**	R$ 115.477,49	**124º mês**	R$ 183.277,18	**160º mês**	R$ 267.369,25
17	**17º mês**	R$ 17.841,00	**53º mês**	R$ 62.178,49	**89º mês**	R$ 117.170,35	**125º mês**	R$ 185.376,85	**161º mês**	R$ 269.973,46
18	**18º mês**	R$ 18.948,05	**54º mês**	R$ 63.551,56	**90º mês**	R$ 118.873,38	**126º mês**	R$ 187.489,11	**162º mês**	R$ 272.593,30
19	**19º mês**	R$ 20.061,74	**55º mês**	R$ 64.932,87	**91º mês**	R$ 120.586,62	**127º mês**	R$ 189.614,04	**163º mês**	R$ 275.228,86
20	**20º mês**	R$ 21.182,11	**56º mês**	R$ 66.322,47	**92º mês**	R$ 122.310,14	**128º mês**	R$ 191.751,72	**164º mês**	R$ 277.880,23
21	**21º mês**	R$ 22.309,20	**57º mês**	R$ 67.720,40	**93º mês**	R$ 124.044,00	**129º mês**	R$ 193.902,24	**165º mês**	R$ 280.547,52
22	**22º mês**	R$ 23.443,05	**58º mês**	R$ 69.126,73	**94º mês**	R$ 125.788,26	**130º mês**	R$ 196.065,65	**166º mês**	R$ 283.230,80
23	**23º mês**	R$ 24.583,71	**59º mês**	R$ 70.541,49	**95º mês**	R$ 127.542,99	**131º mês**	R$ 198.242,04	**167º mês**	R$ 285.930,19
24	**24º mês**	R$ 25.731,22	**60º mês**	R$ 71.964,74	**96º mês**	R$ 129.308,25	**132º mês**	R$ 200.431,49	**168º mês**	R$ 288.645,77
25	**25º mês**	R$ 26.885,60	**61º mês**	R$ 73.396,52	**97º mês**	R$ 131.084,10	**133º mês**	R$ 202.634,08	**169º mês**	R$ 291.377,64
26	**26º mês**	R$ 28.046,92	**62º mês**	R$ 74.836,90	**98º mês**	R$ 132.870,60	**134º mês**	R$ 204.849,89	**170º mês**	R$ 294.125,91
27	**27º mês**	R$ 29.215,20	**63º mês**	R$ 76.285,93	**99º mês**	R$ 134.667,83	**135º mês**	R$ 207.078,99	**171º mês**	R$ 296.890,66
28	**28º mês**	R$ 30.390,49	**64º mês**	R$ 77.743,64	**100º mês**	R$ 136.475,83	**136º mês**	R$ 209.321,46	**172º mês**	R$ 299.672,01
29	**29º mês**	R$ 31.572,83	**65º mês**	R$ 79.210,10	**101º mês**	R$ 138.294,69	**137º mês**	R$ 211.577,39	**173º mês**	R$ 302.470,04
30	**30º mês**	R$ 32.762,27	**66º mês**	R$ 80.685,36	**102º mês**	R$ 140.124,46	**138º mês**	R$ 213.846,85	**174º mês**	R$ 305.284,86
31	**31º mês**	R$ 33.958,84	**67º mês**	R$ 82.169,48	**103º mês**	R$ 141.965,20	**139º mês**	R$ 216.129,94	**175º mês**	R$ 308.116,57
32	**32º mês**	R$ 35.162,60	**68º mês**	R$ 83.662,49	**104º mês**	R$ 143.816,99	**140º mês**	R$ 218.426,72	**176º mês**	R$ 310.965,27
33	**33º mês**	R$ 36.373,57	**69º mês**	R$ 85.164,47	**105º mês**	R$ 145.679,90	**141º mês**	R$ 220.737,28	**177º mês**	R$ 313.831,06
34	**34º mês**	R$ 37.591,81	**70º mês**	R$ 86.675,45	**106º mês**	R$ 147.553,97	**142º mês**	R$ 223.061,70	**178º mês**	R$ 316.714,05
35	**35º mês**	R$ 38.817,36	**71º mês**	R$ 88.195,51	**107º mês**	R$ 149.439,30	**143º mês**	R$ 225.400,07	**179º mês**	R$ 319.614,33
36	**36º mês**	R$ 40.050,27	**72º mês**	R$ 89.724,68	**108º mês**	R$ 151.335,93	**144º mês**	R$ 227.752,47	**180º mês**	R$ 322.532,02

Fonte: Autor.

A tabela anterior evidencia que ao aplicar um valor de R$ 1000,00 por mês durante 15 anos (180 meses) a uma taxa de juro de 0,6% ao mês, o investidor obterá um montante de R$ 322.532,02 ao final do período. Mesmo que se leve em consideração a valorização do apartamento, passados 15 anos, ainda assim a quantia total investida será superior, pois o valor do imóvel após esse tempo será de R$ 233.695,11.

O professor poderá enfatizar aos alunos que, na situação acima, Bruno não utilizou os R$ 30.000,00 que dispunha e que, caso o utilizasse desde o início do investimento, o montante final seria ainda maior que o constante na tabela. Portanto, torna-se incontestável outra grande vantagem do planejamento, ou seja, na ocasião de imprevistos de ordem financeira, há a possibilidade de se empregar tanto o dinheiro investido quanto os R$ 30.000,00 não utilizados como medida de segurança temporária, fazendo com que os imprevistos não causem problemas maiores.

Por fim, além de todas as contramedidas mencionadas, ainda é possível, como último recurso, cessar o investimento por um período de tempo até que as coisas retornem a normalidade.

4.3.4 Avaliação

A avalição da atividade poderá ser feitas por meio da observação do professor acerca da interação dos grupos na procura por soluções para o problema. No caso de análise individual, permanece a mesma orientação.

O limite de cada pessoa deve ser respeitado na avaliação, de forma que o ensino seja mais justo as necessidades de cada um.

4.3.5 Conclusões

Em nenhum momento a atividade vem com o intuito de depreciar aqueles que sonham com a compra da casa própria. O que se procura, é que essa compra seja feita com responsabilidade, ou seja, que cada pessoa analise suas possibilidades e que não se deixem levar por capricho, pressão familiar ou mesmo pelas necessidades vindas da imposição do senso comum.

Por se tratar de um bem de valor elevado, planejar a compra requererá tempo e disciplina do consumidor. Para aqueles que desejam adquirir um imóvel nestas condições, é possível comprá-lo à vista, porém, torna-se imprescindível começar a investir o quanto antes. Assim, pensando nessa antecipação, tem-se que o trabalho desse tema na escola, com os jovens, é tão importante quanto qualquer outra disciplina. Tais experiências serão as bases do conhecimento necessário para transformá-los em adultos mais conscientes das armadilhas que um financiamento ou mesmo um consórcio podem esconder.

4.4 PLANEJANDO UMA APOSENTADORIA COMPLEMENTAR

Todo brasileiro que adentra ao mercado de trabalho, seja a primeira vez ou não, deveria começar a planejar sobre como envelhecer com qualidade de vida. Nesse sentido, enxerga-se com tristeza que, em geral, o trabalhador brasileiro não pensa a longo prazo e tende a observar com indiferença o passar de seus anos.

Com isso, ao deixar que o destino molde seu futuro, torna-se provável que, assim como milhões de brasileiros, essa pessoa passe a depender, única e exclusivamente dos proventos recebidos através dos órgãos oficiais de seguridade social.

Portanto, visando divulgar informações que são muitas vezes desconhecidas pela maior parte da população, esta atividade elucidará o conhecimento acerca dos investimentos em longo prazo, bem como da sua utilização futura na forma de aposentadoria complementar.

4.4.1 Planejamento da Atividade

Título: Planejando uma aposentadoria complementar.

Modalidade: Ensino Médio

Disciplina: Matemática

Conteúdo: Planejamento, investimento e juro composto.

Aulas necessárias para o desenvolvimento: 02 a 04

Objetivos Gerais: Investir com sagacidade de modo a compreender a importância da não dependência de um único sistema de aposentadoria como fonte de renda, principalmente em uma fase tão importante da vida.

Objetivos Específicos: Utilizar os conceitos da Matemática Financeira para acompanhar o crescimento de um montante cujas aplicações são constantes; Calcular possíveis recebimentos mensais após 30 anos de aplicação.

4.4.2 Descrição do Problema

Quando se pensa no inicio de uma atividade cujo tema é importante, um bom ponto de partida reside na forma como se instiga a curiosidade do aluno por meio de algum questionamento. Partindo desse pressuposto e, utilizando o planejamento de uma aposentadoria que complemente proventos futuros como tema, o professor poderá incitar seus alunos perguntando, por exemplo, sobre as expectativas que cada um possui em relação a sua aposentadoria. Espera-se, a partir de então, que eventuais dúvidas possam surgir e que o professor explique alguns assuntos inerentes ao tema, como a previdência social, tempo de contribuição, salário mínimo, aposentadoria por tempo de serviço, aposentadoria por idade, etc.

É de suma importância, também, sensibilizá-los acerca das dificuldades que boa parte dos idosos possui no que diz respeito à aposentadoria. Tocar nessa ferida evidenciará um sistema previdenciário deficitário e suscetível ao colapso, bem como fará com que os alunos parem pra pensar em como evitar que o mesmo aconteça a eles no futuro. Esse será o momento mais adequado para que o professor intervenha e explique sobre as possibilidades de se planejar uma fonte de renda extra, assim como a respeito das instituições financeiras que oferecem tal serviço.

Com o alicerce bem construído, "levantar a casa" será fácil. Para isso, aconselha-se que o professor proponha uma atividade onde certa pessoa deseja investir pensando na aposentadoria. Aqui, faz-se necessário lembrar que esta é uma ação longa e que requer disciplina do investidor, portanto, essa informação deve estar bem clara para o aluno.

O professor, então, poderá apresentar o seguinte problema:

Marcela tem 20 anos e acabou de conseguir seu primeiro emprego. Pensando em longo prazo, ela quer ter uma aposentadoria mais tranquila e, por isso, decidiu que era hora começar a investir parte de seu salário. Ela estipulou as seguintes metas:

- Investir por 30 anos (360 meses);
- Utilizar mensalmente R$ 500,00.

Ao procurar uma instituição financeira de credibilidade, Marcela encontrou um plano onde o juro a ser pago era de 0,65% ao mês no sistema composto.
Supondo que as metas de Marcela se concretizem e que o plano acima seja o escolhido, responda as seguintes perguntas:

1) Passados os 30 anos de aplicação, qual será o total (montante) a ser resgatado por Marcela?
2) Se, ao final do tempo dedicado ao investimento, Marcela optar por querer receber apenas o juro mensal, quanto ela receberá por mês?
3) É possível que Marcela se torne uma pessoa milionária investindo apenas esses R$ 500,00 por mês? Explique sua resposta.

4.4.3 Alternativa para Resolução

Para este problema, os alunos poderão trabalhar individualmente ou em pequenos grupos, fazendo uso da calculadora científica ou mesmo de aplicativos de celular que possam realizar os cálculos.

A fim de aguçar ainda mais a curiosidade dos alunos, o professor poderá, previamente, perguntar acerca do valor que eles acham que Marcela resgatará ao final dos 30 anos. Essa pergunta provavelmente fará com que eles tentem encontrar um valor “aproximado” se utilizando de cálculos mais rápidos. Consequentemente, após um pequeno debate sobre os possíveis valores, a verdadeira resposta será obtida por meio do uso da fórmula da Série Uniforme de Pagamentos. Nesse momento, haverá um sentimento de perplexidade pairando sobre os jovens devido a enorme diferença entre os valores das respostas subjetivistas e a do conhecimento científico. Tal fato simplesmente mostrará que o aluno, assim como a grande parte da população desconhece o funcionamento do juro composto em longo prazo, ou seja, o crescimento exponencial.

A título de curiosidade e de utilização posterior, a quantia que Marcela resgatará passados os 30 anos é de R$ 715.609,58.

No que se concerne à segunda pergunta, para o cálculo do valor que Marcela receberá apenas com o juro mensal, será preciso fazer uma simples conta de porcentagem, ou seja, calcular 0,65% do montante de R$ 715.609,58, resultando em R$ 4.651,46 por mês. É importante que o professor mencione que esse valor não reduz o montante acumulado, pois se trata apenas do juro, desse modo, por mais que ela retire todo mês essa quantia, o valor base de R$ 715.609,58 não será alterado.

Enfim, para a terceira pergunta, caso o montante não seja resgatado em 30 anos e Marcela continue fazendo aportes mensais de R$ 500,00, ao acrescer 5 anos, ou seja, com 35 anos de investimento, Marcela será a mais nova milionária, pois utilizando a mesma fórmula da Série Uniforme de Pagamento, ao final desse tempo, o montante final será de R$ 1.092.156,09.

No mais, vale lembrar ao leitor que, para todos os cálculos, é possível utilizar tanto as calculadoras financeiras disponíveis na internet quanto às planilhas eletrônicas. Elas darão um ar diferenciado à aula, fugindo, assim, do desgaste rotineiro.

4.4.4 Avaliação

Ao observar a interação do aluno com o problema e seu modo de trabalho na procura por soluções, é possível analisar se o contexto foi entendido. Do mesmo modo, as respostas dadas serão bons parâmetros para a avaliação, assim como a proposição de atividades similares para uma melhor compreensão do assunto. Enfim, é importante deixar claro que toda atividade deve ser adaptada, levando em consideração as limitações de cada pessoa.

4.4.5 Conclusões

Assim como os outros problemas, este se pôs a mostrar sobre a importância do planejamento e do investimento como método mais seguro para a aquisição de um produto ou serviço. Como mencionado anteriormente, planejar é uma tarefa árdua e que requer muita disciplina. Renunciar às futilidades tentadoras do dia a dia é, talvez, a maior provação da força de vontade dos que procuram um modo de realizar seus sonhos numa sociedade marcada pela pressão das grandes empresas e da mídia pelo consumismo.

Portanto, muitos estarão de olho em você, principalmente os Bancos, Financeiras, Governo, Indústria, Comércio e, logicamente, a Mídia que trabalha para todos. Em comum, eles querem o seu dinheiro e farão de tudo para que você, enquanto consumidor, não planeje, não invista, não poupe, não pense no futuro, apenas compre, apenas consuma.

Essa é, de fato, a principal mensagem que se pode deixar aos alunos, pois quanto mais se deixarem levar pelo consumismo, menores serão as chances de, assim como Marcela, conseguirem construir um patrimônio que lhe deem uma melhor qualidade de vida após a aposentadoria.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A história retrata as inúmeras mudanças ocorridas ao longo dos últimos 50 anos na educação do Brasil, consequências de uma necessidade pelo alinhamento das políticas educacionais brasileiras às tendências internacionais. Entre as maiores conquistas, a principal, talvez, esteja na implementação da obrigatoriedade e gratuidade do ensino fundamental e médio a toda população. Esse, de fato, tornou-se um marco importante na construção de uma escola mais justa e igualitária.

Não obstante, o decorrer do tempo evidenciou uma escola despreparada ante o arsenal de transformações que os novos tempos passaram a exigir. Problemas com a infraestrutura, qualidade da educação, qualificação docente e inclusão social, por exemplo, tornaram-se motivos de grande discussão à comunidade acadêmica, levando, consequentemente, a um aumento significativo da produção científica e à procura por respostas às dificuldades, bem como técnicas, métodos e experiências positivas que cooperassem de algum modo com a melhoria do ensino e da aprendizagem escolar.

Dentre os obstáculos encontrados atualmente, os baixos índices relacionados ao ensino e aprendizagem da matemática estão entre os maiores entraves da educação brasileira, visto que o conhecimento matemático é o motor do desenvolvimento econômico e social de uma nação. Por isso, cientistas das mais variadas áreas, atentos às mudanças sociais e ao avanço tecnológico, empenham-se na busca por respostas ou alternativas que, no mínimo, amenizem a crônica dificuldade que os alunos, em geral, possuem no aprendizado da matemática.

> [...] a Matemática é reconhecida pela sua vasta importância por todos os países e governos, sendo matéria universal e obrigatória, funcionando como mola propulsora no movimento da sociedade. [...] Dessa forma, deveria ter raízes profundas, bem sustentadas, a fim de ser consideradas em nossos sistemas culturais como uma motivação a mais para o aluno, e não como algo inacessível e distante da realidade (FELICETTI, 2007, p. 40)

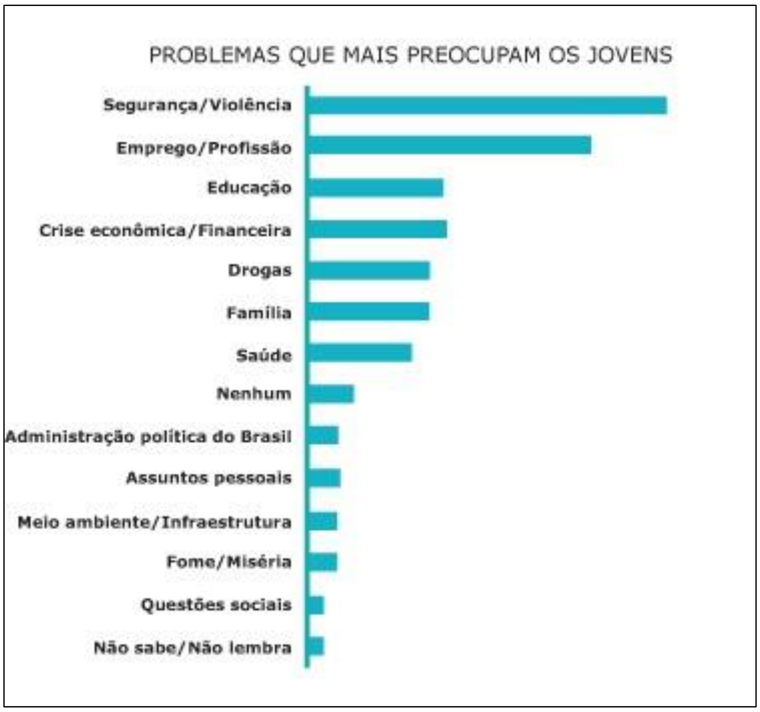
Tamanha mobilização pela melhora da educação brasileira fundamenta-se em boas intenções, pois os novos tempos e o avanço tecnológico passaram a exigir novas habilidades aos ingressantes do mercado de trabalho, sendo naturalmente excluídos aqueles que não optaram pela qualificação. Nesse sentido, a escola passa a ter papel fundamental na formação e, de certo modo, na adequação desse novo trabalhador às altas exigências do mundo globalizado.

> A nova realidade exige qualificações cada vez mais elevadas para qualquer área profissional ou qualquer posto de serviço, tornando as necessidades educacionais das populações cada vez maiores [...]. Quem não acompanha as mudanças científicas e tecnológicas prematuramente estará inabilitado para o trabalho e para a vida em sociedade que, contraditoriamente, produz também o "não-trabalho" (FERREIRA, 2004, p. 1232).

Diante do exposto, o presente trabalho alinha-se às pesquisas que buscam, de alguma forma, contribuir com a melhora da qualidade de vida da sociedade brasileira. Entre elas, ajudar na construção de escolas públicas de qualidade que, entre outras coisas, preparem adequadamente os jovens aos desafios e obstáculos impostos pelo mundo.

A imagem a seguir ilustra alguns problemas enfrentados pelos jovens.

Figura 30 – Preocupações dos jovens



Fonte: https://educacaoeparticipacao.org.br/especialjuventude

Além do mais, espera-se que este trabalho leve conhecimento sobre o uso da matemática em situações problemas que envolvam a vida do aluno ou de sua família, ajudando a proporcionar ao cidadão um comportamento saudável no trato com o dinheiro, bem como nas relações de consumo, ou seja, construir uma educação financeira.

No entanto, vale ressaltar que, devido à unicidade de cada pessoa, torna-se comum o fato de haver uma imprevisibilidade quanto aos resultados. Nesse sentido, é necessário ter em mente que o final do processo pode não sair como o planejado.

Por fim, deseja-se que as informações contidas neste trabalho possam ajudar, de algum modo, professores, alunos e todos aqueles que se interessam pelo tema a libertarem-se das amarras da ignorância. Outrossim, há o anseio pela compreensão de que o conhecimento sempre será a mola propulsora do desenvolvimento humano e social; quer queira ou não, ele estará sempre presente, não importando quão longínqua seja a jornada ao qual segue a humanidade.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Carlos Felipe Cavalcante de; ARRUDA, Danielle Miranda de Oliveira. **O neuromarketing e a neurociência do comportamento do consumidor**: o futuro por meio da convergência de conhecimentos. Vol. 19(2) 278-297. Fortaleza: Ciências & Cognição, 2014. Disponível em: <http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/article/view/909/pdf_23>. Acesso em: 15 maio 2018.

AUSUBEL, David Paul (1968). **Educational Psychology**: a cognitive view. New York: Holt, Rinehart and Winston.

BEMFICA, Andrios. **Um pouco de história – Gauss e seu raciocínio brilhante**. Disponível em: <http://professorandrios.blogspot.com/2012/03/um-pouco-de-historia-gauss-e-o-seu.html>. Acesso em: 03 abril 2018.

BRASIL. Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL). **Brasil tem 236,2 milhões de linhas móveis em janeiro de 2018**. Disponível em: <http://www.anatel.gov.br/institucional/noticias-destaque/1903-brasil-tem-236-2-milhoes-de-linhas-moveis-em-janeiro-de-2018>. Acesso em: 01 julho 2018.

BRASIL. Caixa Econômica Federal. Disponível em <www.caixa.gov.br>. Acesso em 26 março 2018.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília: Senado Federal, 1988. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm>. Acesso em: 15 fevereiro 2018.

BRASIL. Lei n. 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 1996. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm>. Acesso em: 01 março 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Mapa do Analfabetismo no Brasil**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/documents/186968/485745/Mapa+do+analfabetismo+no+Brasil/a53ac9ee-c0c0-4727-b216-035c65c45e1b?version=1.3>. Acesso em: 08 junho 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sistema de Avaliação da Educação Básica - Edição 2015, Resultados**. Brasília, 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/aneb_anresc/resultados/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf>. Acesso em: 05 abril 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Bases Legais. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério do Planejamento, Desenvolvimento e Gestão. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). [...] **94,2% das pessoas que utilizaram a internet o fizeram para trocar mensagens**. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/20073-pnad-continua-tic-2016-94-2-das-pessoas-que-utilizaram-a-internet-o-fizeram-para-trocar-mensagens>. Acesso em: 03 outubro 2018.

CALCULADORA ONLINE. **Calculadora Financeira**: calcule qualquer variável financeira nas diversas funções disponíveis. Disponível em: <http://www.calculadoraonline.com.br/financeira>. Acesso em: 12 setembro 2018.

CASAS BAHIA. Loja virtual de comércio de produtos. 2018. Disponível em: <https://www.casasbahia.com.br/>. Acesso em: 26 março 2018.

CASTANHEIRA, Nelson Pereira; MACEDO, Luiz Roberto Dias de. **Matemática Financeira Aplicada**. Curitiba: intersaberes, 2012.

COLÉGIO MILITAR DOM PEDRO II. **Concurso de Admissão de Novos Alunos 2013/2014 Caderno de Provas Língua Portuguesa e Matemática 6º ano do Ensino Fundamental**. Disponível em: <http://www.cmdpii.com.br/images/processo-seletivo-pdf/prova-concurso-6-ano-ensino-%20fundamental.pdf>. Acesso em: 12 outubro 2018.

COSTA, Antonio Carlos Gomes da. **O adolescente como protagonista.** In: BRASIL, Ministério da Saúde. Secretaria de Políticas de Saúde. Área da Saúde do Adolescente e do jovem. Cadernos de juventude, saúde e desenvolvimento. Vol. 1. Brasília, 1999.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática Comercial e Financeira**: fácil. 4ª ed. São Paulo: Saraiva, 1989.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática Comercial e Financeira**: fácil. 12ª ed. São Paulo: Saraiva, 1997.

DAVID AUSUBEL. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=David_Ausubel&oldid=53503658>. Acesso em: 27 novembro 2018.

DERTOUZOS, Michael Leonidas. **O que será**: como o novo mundo da informação transformará nossas vidas. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

EDUCAÇÃO E PARTICIPAÇÃO. **Especial Juventude**. Disponível em: <https://educacaoeparticipacao.org.br/especialjuventude>. Acesso em: 30 setembro 2018.

FELICETTI, Vera Lúcia. **Um estudo sobre o problema da matofobia como agente influenciador nos altos índices de reprovação na 1ª série do Ensino**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

FERREIRA, N. S. **Repensando e ressignificando a gestão democrática da educação na "cultura globalizada"**. Educação e Sociedade, Campinas, vol. 25, n. 89, p.1227-1249, set/dez. 2004.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. **Matemática Financeira**. 4ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

IEZZI, Gelson; SAMUEL, Hazzan. **Fundamentos da Matemática Elementar 4**. 2ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

INSPER; BRAVA; INSTITUTO UNIBANCO; INSTITUTO AIRTON SENNA. **Políticas públicas para redução do abandono e evasão escolar de jovens.** Disponível em: <http://gesta.org.br/wp-content/uploads/2017/09/Politicas-Publicas-para-reducao-do-abandono-e-evasao-escolar-de-jovens.pdf>. Acesso em: 9 outubro 2018.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Brasil é promovido à elite da matemática mundial**. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://impa.br/page-noticias/brasil-e-promovido-a-elite-da-matematica-mundial/>. Acesso em: 16 abril 2018.

KIMURA, Fernando. **Neuromarketing**: Entenda o que é e como ele pode influenciar o inconsciente do consumidor. Disponível em: <https://www.sas.com/content/dam/SAS/pt_br/doc/events/ci-forum-2016/e-book%20neuromarketing%20kimura.pdf>. Acesso em: 12 janeiro 2018.

LIMA, Antonio José Araujo; JÚNIOR Ronaldo Silva. **Panorama da educação brasileira na década de 1960**. In: III Congresso Nacional de Educação, 2016, Natal. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV056_MD1_SA1_ID2286_14082016222320.pdf>. Acesso em: 08 junho 2018.

MACÊDO, Álvaro Fabiano Pereira de. **Matemática Financeira**. Mossoró: EdUFERSA, 2014.

MAGAZINE LUIZA. Loja virtual de comércio de produtos. 2018. Disponível em: <https://www.magazineluiza.com.br/>. Acesso em: 25 março 2018.

MORAES, M.; RENZ S. P. A importância da linguagem na solução de problemas matemáticos no ensino fundamental. In: LEHENBAUER, S.; PICAWY, M. M.; STEYER, V. E.; WANDSCHEER, M. S. X. **O Ensino Fundamental no século XXI**: Questões e desafios. Canoas: ULBRA, 2005.

NEIVA, Luísa do Amaral. **O neuromarketing e a comunicação visual**: uma análise da contribuição do estudo de neuromarketing para a comunicação visual das embalagens. 2012. Monografia (Conclusão de Curso) – Faculdade de Ciências Aplicadas, FATECS do Centro Universitário de Brasília, UniCEUB. Disponível em: <http://repositorio.uniceub.br/bitstream/123456789/1887/2/20839451.pdf>. Acesso em: 19 janeiro 2018.

ORGANIZACÃO PARA COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO. **Resultados do Pisa 2015**: Brazil. 2016. Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-Brazil.pdf>. Acesso em: 05 abril 2018.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** Vol. 1, 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PEDRO JÚNIOR, Simão. **Matemática Financeira**: aprendendo a usar essa poderosa ferramenta no dia a dia. 2013. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

PRENSKY, Mark. **Nativos Digitais, Imigrantes Digitais**. De On the Horizon (NCB University Press. Vol. 9, No. 5, Outubro 2001). Disponível em: <http://www.colegiongeracao.com.br/novageracao/2_intencoes/nativos.pdf>. Acesso em: 18 junho 2018.

PROGRAMA INTERNACIONAL DE AVALIAÇÃO DE ALUNOS. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Programa_Internacional_de_Avalia%C3%A7%C3%A3o_de_Alunos&oldid=51574923>. Acesso em: 05 abril 2018.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Progress%C3%A3o_aritm%C3%A9tica&oldid=52948529>. Acesso em: 27 março 2018.

PUREZZO, Marcelo. **As Três mentes do *Neuromarketing***. Rio de Janeiro: Alta Books, 2015.

SÁNCHEZ, Jesús-Nicasio García. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica.** Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTOS, G. L. da C. **Educação Financeira**: a matemática financeira sob nova perspectiva. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

SÃO PAULO. Lei n. 16567, de 06 de novembro de 2017. Altera a Lei n. 12730, de 11 de outubro de 2007, que proíbe o uso de telefone celular nos estabelecimentos de ensino do Estado, durante o horário de aula. São Paulo, 2017.

SERASA EXPERIAN. **Mesmo com crise econômica e política, educação financeira do brasileiro fica estável em dois anos**. São Paulo, 2018. Disponível em: <https://www.serasaexperian.com.br/sala-de-imprensa/mesmo-com-crise-economica-e-politica-educacao-financeira-do-brasileiro-fica-estavel-em-dois-anos-revela-serasa>. Acesso em: 18 abril 2018.

SERASA EXPERIAN. **Número de empresas inadimplentes chega a 5,4 milhões**. São Paulo, 2018. Disponível em: <https://www.serasaexperian.com.br/sala-de-imprensa/numero-de-empresas-inadimplentes-chega-a-54-milhoes-revela-serasa>. Acesso em: 28 abril 2018.

SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática aula por aula**. Vol. 2, 2ª ed. renov. São Paulo: FTD, 2005.

SILVA, Eduardo D. **Gestão em Finanças Pessoais:** uma metodologia para se adquirir educação e saúde financeira. 1ª ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2004.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio.** Vol. 1, 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar:** Matemática. Vol. 1, 2ª ed. São Paulo: FTD, 2013.

TABELA PRICE. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Tabela_Price&oldid=53644085>. Acesso em: 28 novembro 2018.

SPC BRASIL. **45% dos brasileiros não controlam as próprias finanças [...]**. São Paulo, 2018. Disponível em: <https://www.spcbrasil.org.br/pesquisas/pesquisa/4072>. Acesso em: 16 abril 2018.

SPC BRASIL. **Além dos efeitos da crise, descontrole financeiro está entre principais causas da inadimplência no país [...]**. São Paulo, 2018. Disponível em: <https://www.spcbrasil.org.br/pesquisas/pesquisa/5233>. Acesso em: 15 outubro 2018.

TODOS PELA EDUCAÇÃO (ONG). **Educação Já! Uma proposta suprapartidária de estratégia para a educação básica brasileira e prioridades para 2019-2022**. Versão para debate. São Paulo, 2018.

VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer:** a partir da história e da geometria. 2ª ed. Piracicaba: UNIMEP, 1999.

WEINERT et al. **O uso das tecnologias de informação e comunicação no cotidiano escolar das séries iniciais:** panorama inicial. R. B. E. C. T., v. 4, n. 3, set. – dez. 2010.