UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

Bruno Aguiar Alves de Camargo

Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao ensino médio

Bauru
2020

Bruno Aguiar Alves de Camargo

Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao ensino médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Bauru.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares
UNESP - Câmpus de Bauru

Bauru
2020

C172e

Camargo, Bruno Aguiar Alves de

Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao ensino médio / Bruno Aguiar Alves de Camargo. -- Bauru, 2020

149 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru

Orientador: Marcelo Reicher Soares

1. Matemática (Ensino Médio) - Estudo e ensino. 2. Conjunto Finito. 3. Conjunto Infinito. 4. Cardinalidade. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Bruno Aguiar Alves de Camargo

Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao ensino médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Bauru.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares
UNESP - Câmpus de Bauru
Orientador

Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lazaro
UNESP - Câmpus de Bauru

Prof. Dr. Danilo Elias de Oliveira
UFU - Uberlândia

Bauru
19 de dezembro de 2019

Aos meus pais, por sempre me apoiarem e acreditarem em mim.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Doutor Marcelo Reicher Soares, pelas contribuições e sugestões, por sempre me ajudar e incentivar. Obrigado pelas aulas ministradas durante o curso, onde tive um aprendizado incrível e um grande desenvolvimento pessoal e acadêmico.

À coordenadora Professora Doutora Tatiana Miguel Rodrigues e a todos os professores do PROFMAT que contribuíram imensamente com a minha formação.

À Flávia Previatto Baldini por todo apoio, ajuda, dedicação, atenção e que me deu forças para continuar e concluir este trabalho.

Aos membros da banca, pelas sugestões, críticas e correções.

Aos colegas de turma pelo companheirismo, amizade e experiências compartilhadas.

Aos professores, diretores, coordenadores e alunos dos colégios onde leciono, por contribuírem com a aplicação das atividades apresentadas neste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar, de forma rigorosa, como a matemática aborda o conceito de infinito e propor uma sequência de atividades para que o professor possa explorar esse tema com seus alunos de forma inovadora e estimulante. Muito do que é compreendido acerca do infinito se deve às ideias desenvolvidas por Georg Cantor, que estabeleceu a teoria dos números cardinais transfinitos, gerando uma série de resultados surpreendentes, que serão apresentados ao longo dessa dissertação. Cantor descobriu que existem diversos tipos de infinito e definiu critérios para classificá-los e compará-los. Para compreender esta teoria, é fundamental recordar os conceitos básicos da teoria de conjuntos e funções. Além disso, serão apresentados formalmente os números naturais através dos axiomas de Peano, bem como suas operações e propriedades. A partir deste, será construído o conjunto dos números inteiros, racionais e reais. Dessa forma, será possível definir formalmente a noção de conjunto finito e infinito, bem como a noção de conjuntos enumeráveis, e não-enumeráveis, e estabelecer critérios para comparar a cardinalidade de tais conjuntos. O trabalho é finalizado com a apresentação de uma proposta didática voltada para os alunos de ensino médio, sustentado no relato de duas experiências de sua aplicação. O tema é abordado utilizando atividades diferenciadas e fundamentadas no cotidiano, visando com isto contribuir para que os alunos apresentem um maior interesse e uma participação mais ativa nas aulas.

Palavras-chave: Conjunto Finito, Conjunto Infinito, Cardinalidade, Cantor, Ensino de Matemática.

Abstract

The aim of this work is to present in a rigorous way how mathematics approaches the concept of the infinite and to propose a sequence of activities so that the teacher can explore this theme with his students in an innovative and stimulating way. Much of what is understood about infinite is due to the ideas developed by Georg Cantor who established the theory of transfinite cardinal numbers generating a series of surprising results that will be presented throughout this dissertation. Cantor found that there are several types of infinite and defined criteria for classifying and comparing them. To understand this theory it is essential to remember the basic concepts of set and function theory. In addition natural numbers will be formally presented through Peano axioms as well as their operations and properties. From the natural numbers the sets of integers, rationals and reals will be constructed. Then it will be possible to formally define the notions of finite and infinite sets as well as the notions of countable and uncountable sets and establish criteria for comparing the cardinality of such sets. The work is concluded with the presentation of a didactic proposal aimed at high school students supported by the report of two experiences of its application. The theme is presented through different activities, based on daily life, aiming to contribute to the students to show more interest and participate more actively in the classes.

Keywords: Finite Set, Infinite Set, Cadinality, Cantor, Mathematics Teaching.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

O pensamento acerca do infinito sempre foi uma grande questão que intrigou a humanidade, causou admiração, medo, inspiração, sofrimento e dúvidas. O mistério da natureza do infinito continua causando espanto, gerando diversos questionamentos e há muito o que ser estudado, discutido e esclarecido. Muitos filósofos e matemáticos empenharam um grande esforço intelectual para explicar racionalmente o conceito de infinito. David Hilbert, grande matemático alemão, disse em um discurso proferido em 1925 em Münster: "O infinito sempre despertou as emoções da humanidade mais profundamente do que qualquer outra questão; o infinito estimulou e fertilizou a razão como poucas ideias."

Existem registros que os gregos se depararam com o infinito por volta do quinto século a.C. O filósofo grego, Zenão de Eléia (495-435 a.C.), questionou se uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, se fosse o caso, o espaço e o tempo, quando subdivididos indefinidamente, gerariam uma série de contradições e o movimento seria impossível. Para ilustrar essa ideia, Zenão apresentou uma série de paradoxos, sendo um dos mais famosos o paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Imagine que Aquiles, o corredor mais rápido da antiguidade, decide apostar corrida com uma tartaruga. Como o animal é mais lento, lhe foi dado uma certa vantagem, de forma que Aquiles deve perseguir e ultrapassar a tartaruga. Portanto Aquiles deve alcançar primeiramente o ponto de onde a tartaruga partiu, mas quando chegar nesse ponto a tartaruga já avançou uma certa distância. E novamente quando Aquiles cobrir essa nova distância, a tartaruga já terá atingindo um novo ponto à frente e assim sucessivamente. É claro que a distância entre eles vai diminuir ao longo da corrida, pois Aquiles é mais veloz, porém a tartaruga não permanece imóvel, então ela sempre estará à frente. Usando esse argumento *ad infinitum*, Zenão argumentou que Aquiles não poderia vencer a tartaruga.

Outros grandes matemáticos gregos, como Pitágoras, Eudóxio e Arquimedes fizeram importantes descobertas sobre o infinito. Do século XVI até o século XIX podemos citar as contribuições de Galileu, Bolzano, Riemann e Weierstrass. É praticamente impossível citar todos os grandes pensadores que colaboraram para uma melhor compreensão desse conceito mas, sem sombra de dúvida, o matemático que mais contribuiu para a evolução do conceito de infinito foi Georg Cantor.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em 3 de março de 1845, na cidade de São Petersburgo, Rússia. Em 1856, a família de Cantor mudou-se para Frankfurt, Alemanhã, e em 1862 começou a estudar matemática no Instituto Politécnico de Zurique, mas logo se transferiu para a prestigiada Universidade de Berlim, onde recebeu influência de Weierstrass e obteve o doutorado em 1867. De 1869 a 1905, desenvolveu uma longa carreira como professor na Universidade de Halle. Em 1874 Cantor deu início a uma série de trabalhos que iria revolucionar a matemática e a nossa compreensão sobre o infinito. Seus resultados levaram ao desenvolvimento da teoria de conjuntos, que se mostrou de grande importância e penetrou quase todos os ramos da matemática. Seu trabalho gerou admiração, mas também muitas controvérsias e oposição, principalmente por parte de Leopold Kronecker. O famoso matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) afirmou que a teoria de conjuntos de Cantor era uma moléstia, uma doença perversa da qual, algum dia, os matemáticos estariam curados, porém, David Hilbert respondeu dizendo que “ninguém nos expulsaria do paraíso que Georg Cantor abriu para nós”. As dificuldades lógicas e paradoxos gerados influenciaram a matemática do século XX. Cantor faleceu em 1918, deixando uma das mais surpreendes teorias da história da civilização. Ao longo desta dissertação serão apresentadas seus principais resultados.

Este trabalho foi elaborado para que se possa compreender e apreciar as principais ideias e concepções de finitude, infinitude que temos na matemática e suas implicações. Além disso, foi elaborado uma proposta didática voltado para os alunos do ensino médio, bem como o relato de sua aplicação em duas escolas diferentes, sendo uma escola pública e uma particular. É importante ressaltar que o conceito de infinito está presente na prática escolar, por exemplo, na geometria se diz que em uma reta existem infinitos pontos, é estudado a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, os números racionais e irracionais na forma decimal possuem uma representação infinita, e estas são apenas algumas situações entre tantas outras na matemática. Embora finitude e infinitude sejam assuntos complexos de se abordar, as ideais principais são expressas através de conceitos básicos da matemática, como conjuntos e funções, de forma que um aluno da primeira série do ensino médio é capaz de entender. Portanto, esta dissertação serve como material de apoio para professores e alunos interessados em um maior aprendizado sobre o tema.

Os capítulos foram organizados seguindo uma estrutura que apresenta cada um dos conceitos, necessários para a compreensão do infinito de Cantor. Logo no primeiro capítulo, o trabalho se inicia com a proposta de explorar a teoria de conjuntos, na qual é estruturada a matemática, e definir de forma rigorosa o conceito de função que é fundamental para a compreensão do conceito de infinito. No capítulo 2, será apresentado o conjunto dos números naturais através dos axiomas de Peano, além de suas operações e propriedades. Em seguida, no capítulo 3, será ampliado o conjunto dos números naturais e construído o conjunto dos números inteiros através de pares ordenados de números naturais, de forma análoga, o conjunto dos racionais com pares de números inteiros, e os reais, por sua vez, serão construídos via sequências de Cauchy. O capítulo 4 será dedicado a apresentar formalmente a noção de conjuntos finitos, conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis, além disso serão estabelecidos definições e teoremas para que se possa comparar a cardinalidade de tais conjuntos. Para finalizar a parte teórica do trabalho, no capítulo 5 será feita a comparação entre os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, e também será apresentada a existência de uma hierarquia de conjuntos infinitos e a hipótese do continuum de Cantor e seu aspecto histórico. Tendo definida a parte teórica, o capítulo 6 é uma proposta didática elaborada para ser trabalhada com os alunos do ensino médio, de forma a apresentar as ideias principais presentes nesse trabalho, para que estes tenham a oportunidade de ampliar seu conhecimento a respeito do conceito de infinito.

CAPÍTULO 1

A NOÇÃO DE FUNÇÃO

Uma das noções mais importantes da matemática é a noção de função, a qual passou por muitas evoluções ao longo da história e permeia grande parte da matemática. Participaram da construção desse conceito diversos matemáticos, como Leibnz, Johann Bernoulli, Euler, Fourier, Dirichlet, Grupo Bourbaki, entre outros. A definição mais usual de função se baseia em um tipo especial de relação entre dois conjuntos. A teoria de conjuntos se deve em grande parte à Georg Cantor, e através dela, ocorreu uma unificação da matemática, foi possível acelerar o desenvolvimento de novas teorias e constituiu um dos elos de ligação entre a matemática, a filosofia e a lógica. Esta teoria é fundamental para o estudo de finitude e infinitude. Neste capítulo iremos recordar alguns dos conceitos básicos da teoria de conjuntos e, assim, poderemos definir rigorosamente o conceito de função. Este capítulo foi elaborado a partir das seguintes referências bibliográficas: [1] e [2].

1.1 Conjuntos introdução

Um conjunto (ou coleção) é formado por objetos, chamados *os seus elementos*. A relação básica entre um objeto e um conjunto é a relação de pertinência. Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que x *pertence a* A, e escrevemos

$$x \in A.$$

Se, porém, x não é um dos elementos do conjunto A, dizemos que que x *não pertence* a A, e escrevemos

$$x \notin A.$$

Comumente usam-se três procedimentos para defininir um conjunto.

1. Descrever seus elementos por uma sentença. Por exemplo:
   - conjunto dos números reais;
   - conjunto dos planetas do sistema solar.
2. Listar seus elementos entre chaves. Por exemplo:
   - $\{1, 3, 5, 7\}$
   - $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
3. Dar uma propriedade que identifica seus elementos. Por exemplo:
   - $\{x \mid x \text{ é inteiro e } x > 2\}$
   - $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$

Certos conjuntos, por sua importância e a frequência com que se repetem, são indicados por notações especiais.

Conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}\ e\ q \neq 0\}.$$

Conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$.

Se A e B são conjuntos e todo elemento de A também é elemento de B, dizemos que A é um *subconjunto* de B, ou uma parte de B, e denotamos essa relação por $A \subset B$ (ou $B \supset A$). Quando $A \subset B$ e $B \subset A$ dizemos que os conjuntos são *iguais*, ou seja, $A = B$. No caso em que $A \subset B$ e $A \neq B$, diz-se que A é um *subconjunto próprio* ou uma *parte própria* de B.

As vezes pode ocorrer que nenhum elemento satisfaça a propriedade que define um conjunto, nesse caso, denominamos esse conunjunto por *conjunto vazio* e, para representá-lo, usamos o símbolo $\emptyset$. O conjunto vazio pode ser definido por qualquer propriedade contraditória, nesse caso o conjunto vazio não possui elementos. Por exemplo, $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\} = \emptyset$. Temos que, $\emptyset \subset X$, qualquer que seja o conjunto X.

Dado um conjunto X, indica-se $\mathscr{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são subconjuntos de X. Então, se $A \in \mathscr{P}(X)$, temos que $A \subset X$. $\mathscr{P}(X)$ chama-se o *conjunto das partes* de X.

1.2 Operações entre conjuntos

A *união* de dois conjuntos, A e B, é o conjunto indicado por $A \cup B$ e definido pela propriedade "$x \in A$ ou $x \in B$". Portanto:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$$

A *intersecção* de dois conjuntos, A e B, é o conjunto indicado por $A \cap B$ e definido pela propriedade "$x \in A$ e $x \in B$". Portanto:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}$$

A *diferença* de dois conjuntos, A e B, é o conjunto indicado por $A - B$ e definido pela propriedade "$x \in A$ e $x \notin B$". Portanto:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ } e \text{ } x \notin B\}$$

Quando se tem $B \subset A$, a diferença $A - B$ chama-se *complementar de B em relação a A* e escreve-se

$$(B^c)_A = \complement_A B = A - B.$$

Em geral, dado um conjunto U, as operações descritas acima ocorrem entre elementos de $\mathscr{P}(U)$, ou seja, U contém todos os conjuntos que ocorrem numa certa discussão. O conjunto U é então chamado de *conjunto universo*. Neste caso, sendo $A \subset U$ a diferença $U - A$ chama-se simplesmente complementar de A e indica-se com a notação A^c ou $\complement A$, não sendo necessário mencionar explicitamente que se trata do complementar de A em relação a U.

1.3 Produto cartesiano

Definição 1.1. *Dados dois conjuntos, X e Y, não vazios, chama-se produto cartesiano de X por Y o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), com x em X e y em Y.*

O conceito de par ordenado é tomado aqui como primitivo, postulando-se que $(x, y) = (u, v)$ se, e somente se, $x = u$ e $y = v$.

Costuma-se indicar o produto cartesiano de X por Y com a notação $X \times Y$ (lê-se "X cartesiano Y"). Assim temos:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \ e \ y \in Y\}$$

1.4 Relação binária

Definição 1.2. *Chama-se relação binária de X em Y todo subconjunto R de $X \times Y$. Logo, R é relação de X em Y se, e somente se, $R \subset X \times Y$.*

Conforme essa definição, R é um conjunto de pares ordenados (x, y) pertencentes a $X \times Y$.

Exemplo 1.1. Se $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $Y = \{-2, 1, 3\}$ então:

$X \times Y = \{(-1, -2), (-1, 1), (-1, 3), (0, -2), (0, 1), (0, 3), (1, -2), (1, 1), (1, 3), (2, -2), (2, 1), (2, 3)\}$

Qualquer subconjunto de $X \times Y$ é uma relação de X em Y. Um exemplo de relação de X em Y é:

$$R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x^2 + y^2 = 5\} = \{(-1, -2), (1, -2), (2, 1)\}.$$

1.5 Domínio e imagem

Seja R uma relação de X em Y. Formalizaremos os conceitos de *domínio* e *imagem*.

Definição 1.3. *Chama-se domínio de R o subconjunto de X constituído pelos elementos x para cada um dos quais existe algum $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R$.*

$$D(R) = \{x \in X \mid \exists\ y \in Y \ \textit{tal que}\ (x, y) \in R\}.$$

Definição 1.4. *Chama-se imagem de R o subconjunto de Y constituído pelos elementos y para cada um dos quais existe $x \in X$ tal que $(x, y) \in R$.*

$$Im(R) = \{y \in Y \mid \exists\ x \in X \ \textit{tal que}\ (x, y) \in R\}.$$

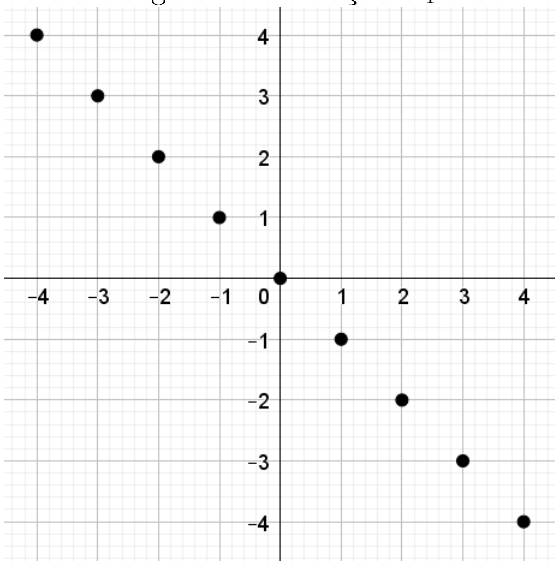
Exemplo 1.2. Voltando ao exemplo 1.1, temos que $D(R) = \{-1, 1, 2\}$ e $Im(R) = \{-2, 1\}$.

1.6 Gráficos cartesianos

Grande parte das relações binárias de X em Y, estudadas em matemática, são relações em que X e Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Nesses casos, o gráfico cartesiano da relação é o conjunto dos pontos de um plano dotado de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujas abscissas são os primeiros elementos e as ordenadas são os segundos elementos dos pares que constitituem a relação. Geometricamente, o eixo das abscissas é representado na horizontal e o eixo das ordenadas é representado na vertical.

Exemplo 1.3. Se $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x, y \in \mathbb{Z} \ e \ x = -y\}$, a representação gráfica de R_1 será (ver figura 1.1):

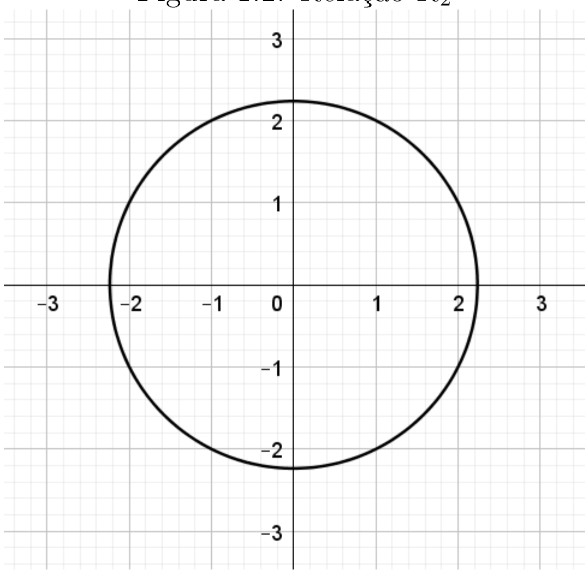
Figura 1.1: Relação R_1



Fonte: Arquivo do autor

Exemplo 1.4. Se $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 5\}$, a representação gráfica de R_2 será (ver figura 1.2):

Figura 1.2: Relação R_2



Fonte: Arquivo do autor

1.7 Relação inversa

Definição 1.5. *Seja R uma relação de X em Y. Chama-se relação inversa de R, e indica-se por R^{-1}, a seguinte relação de Y em X.*

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}$$

1.8 Definição de função

Definição 1.6. *Dados dois conjuntos não vazios, X e Y, seja f uma relação de X em Y. Dizemos que f é uma função de X em Y se, e somente se:*

i. o domínio de f é X, isto é, $D(f) = X$;

ii. dado um elemento $a \in D(f)$, é único o elemento $b \in Y$ tal que $(a, b) \in f$.

Se f é uma função de X em Y, para indicar que $(a, b) \in f$ escrevemos:

$$b = f(a) \text{ (lê-se “b é imagem de a pela função } f\text{”)}$$

Usaremos também a notação

$$f : X \longrightarrow Y$$

para indicar que f é uma função de X em Y. Às vezes, usaremos a notação

$$x \longmapsto f(x)$$

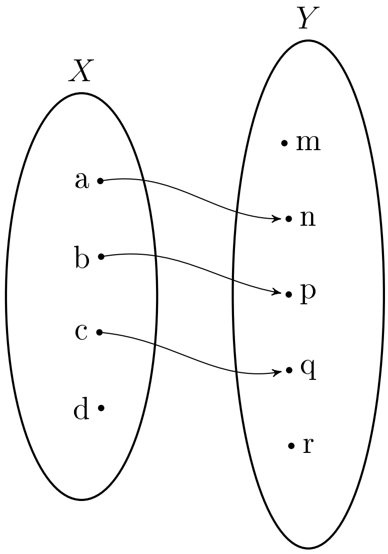
para indicar que $f(x)$ é a imagem do elemento genérico x de X pela função f.

O conjunto Y é chamado *contradomínio* de f. Já a imagem de f, representado por $Im(f)$, indicará o seguinte subconjunto de Y:

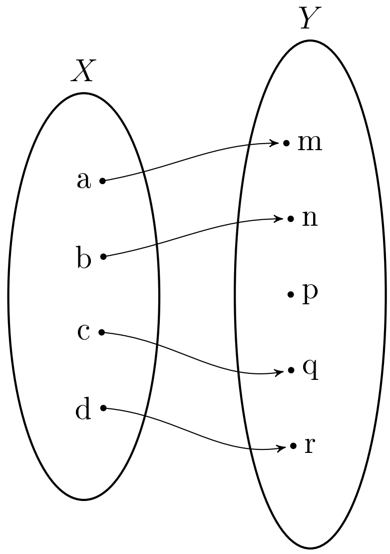
$$Im(f) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X \text{ com } (x, y) \in f\}.$$

Exemplo 1.5. Considere os conjuntos $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{m, n, p, q, r\}$ e as relações R_1, R_2, R_3, R_4 de X em Y seguintes. Vejamos abaixo as representações dessas relações através de diagramas de flechas.

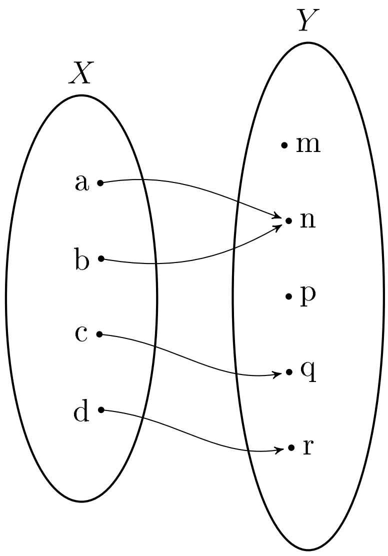
$R_1 = \{(a, n); (b, p); (c, q)\}$.



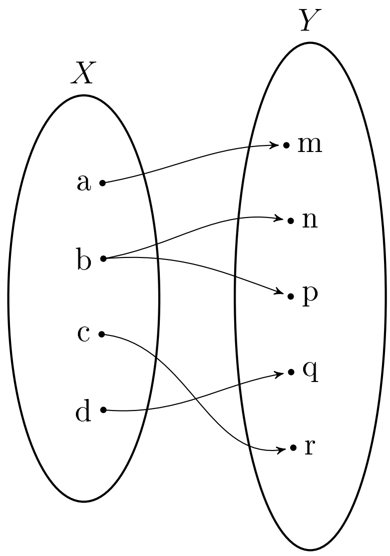
$R_2 = \{(a, m); (b, n); (c, q); (d, r)\}$.



$R_3 = \{(a, n); (b, n); (c, q); (d, r)\}$.



$R_4 = \{(a, m); (b, n); (b, p); (c, r); (d, q)\}$.



Temos que:

- R_2 e R_3 são funções;
- R_1 não é função pois $D(R_1) = \{a, b, c\} \neq X$;
- R_4 não é função , pois $(b, n) \in R_4$ e $(b, p) \in R_4$, portanto b tem dois "correspondentes" em Y.

1.9 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Seja $f : X \longrightarrow Y$, uma função qualquer de X em Y.

Definição 1.7. *Dizemos que f é uma função injetora, ou injetiva, se dois elementos diferentes quaisquer de X têm imagens diferentes. Em outras palavras, se para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ tais que $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$. Neste caso, dizemos que a função é uma injeção.*

Definição 1.8. *Dizemos que f é uma função sobrejetora, ou sobrejetiva, quando for válida a seguinte condição:*

$$Im(f) = Y$$

Portanto, uma função $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetora, se todo elemento de Y está em correspondência, via f, com um elemento X. Em símbolos: $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tal que $f(x) = y$. Neste caso dizemos que a função é uma sobrejeção.

Definição 1.9. *Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma função bijetora ou bijetiva quando f é injetora e sobrejetora.*

Neste caso, a função f é uma bijeção entre X e Y e podemos dizer que existe uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Exemplo 1.6. Considere as funções de A em B seguintes:

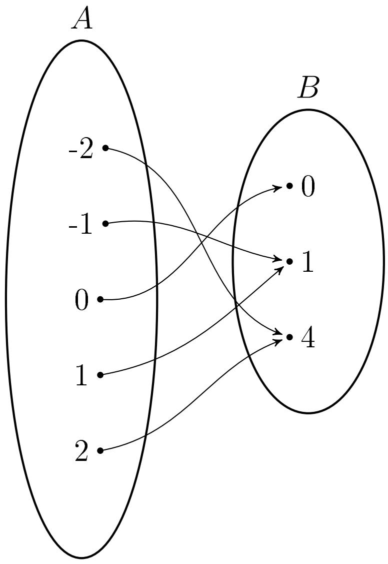
a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 4\}$ com $f(x) = x^2$.

b) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ com $f(x) = 2x + 1$.

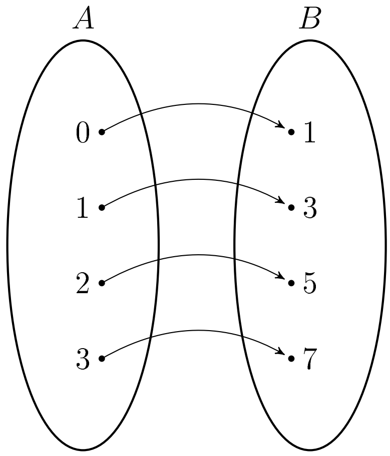
c) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com $f(x) = x + 1$.

d) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ com $f(x) = x^2 - 1$.

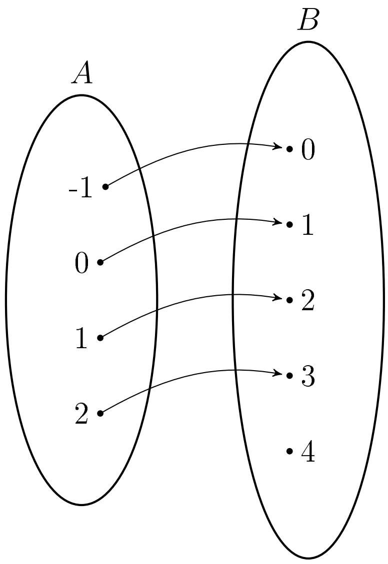
a) $f(x) = x^2$



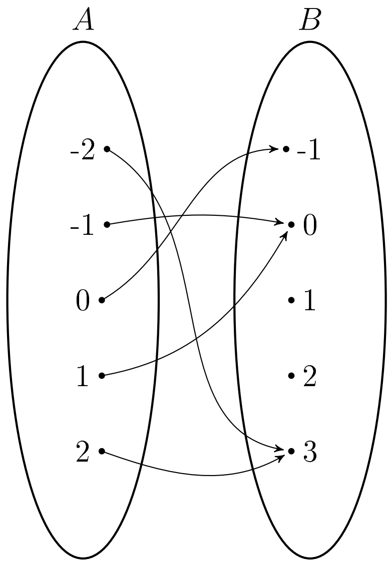
b) $f(x) = 2x + 1$.



c) $f(x) = x + 1$



d) $f(x) = x^2 - 1$



De acordo com as definições, temos que as funções de cada item são:

a) apenas sobrejetora;

b) bijetora;

c) apenas injetora;

d) não é sobrejetora e também não é injetora.

Observação 1.1. Uma função bijetora que iremos utilizar é a função *identidade* $id_A : A \longrightarrow A$, definida por $id_A(x) = x$, para todo $x \in A$.

1.10 Imagem direta e imagem inversa

Seja uma função $f : X \longrightarrow Y$:

Definição 1.10. *Dado $A \subset X$, chama-se imagem direta de A, segundo f, e indica-se por $f(A)$ o seguinte subconjunto de Y:*

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Definição 1.11. *Dado $B \subset Y$, chama-se imagem inversa de B, segundo f, e indica-se por $f^{-1}(B)$ o seguinte subconjunto de X:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

1.11 Função inversa

Seja uma função $f : X \longrightarrow Y$. Por definição, f é uma relação de X em Y com certas particularidades:

i. $D(f) = X$;

ii. todo $x \in X$ tem imagem única $f(x) \in Y$.

Denotaremos por f^{-1} a relação inversa de f. Pode ocorrer que f^{-1} não seja uma função de Y em X. O teorema seguinte estabelece em que condições f^{-1} é uma função.

Proposição 1.1. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Uma condição necessária e suficiente para que f^{-1} seja uma função de Y em X é que f seja bijetora.*

Portanto, uma função $f : X \longrightarrow Y$ possui função inversa se, e somente se, é uma bijeção.

1.12 Composição de funções

Definição 1.12. *Sejam $f : E \longrightarrow F$ e $g : F \longrightarrow G$ duas funções. Chama-se composta de f e g a função (indicada por $g \circ f$) de E em G definida da seguinte maneira:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para todo $x \in E$.

Observação 1.2. i. A composta de f e g só está definida quando o contradomínio de f coincide com o domínio de g (conjunto F).

ii. A composta de f e g tem o mesmo domínio de f (conjunto E) e o mesmo contradomínio de g (conjunto G).

iii. Quando $E = G$, ou seja, $f : E \longrightarrow F$ e $g : F \longrightarrow E$, então é possível definir, além de $(g \circ f)$, a composta de g e f (indicada por $f \circ g$): é uma aplicação de F em F que obedece a lei

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

para todo $x \in F$.

Proposição 1.2. *Se $f : E \longrightarrow F$ e $g : F \longrightarrow G$ são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.*

Proposição 1.3. *Se $f : E \longrightarrow F$ e $g : F \longrightarrow G$ são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.*

Definição 1.13. *Dadas as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$, diremos que g é uma inversa à esquerda para f quando $g \circ f = id_A : A \longrightarrow A$, ou seja, quando $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$.*

Proposição 1.4. *Uma função $f : A \longrightarrow B$ possui inversa à esquerda, se e somente se , é injetora.*

Proposição 1.5. *Se $f : A \longrightarrow B$ é bijetora, então:*

$$f \circ f^{-1} = id_B \text{ e } f^{-1} \circ f = id_A.$$

As demonstrações destes resultados se encontram nas seguintes referências bibliográficas: [1] e [2].

CAPÍTULO 2

OS NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais que, denotaremos por $\mathbb{N}$, será aquele formado pelos elementos $1, 2, 3, ...$, ou seja, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. O símbolo "..." é para representar que sempre podemos continuar o processo de indicar os elementos de $\mathbb{N}$ indefinidamente. A definição formal do que é um conjunto infinito será apresentado adiante.

Para representar os números naturais, no sistema de numeração decimal, utilizamos os símbolos 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Em algumas situações é conveniente incluir o número 0 no conjunto dos números naturais, mas teoricamente é indiferente.

Existe uma apresentação axiomática de $\mathbb{N}$, feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), que se tornou clássica. Nesse sistema temos os "Axiomas de Peano". O mais famoso dentre tais axiomas é conhecido por "princípio da indução" e a partir dele podemos construir definições e fazer demonstrações, ditas por indução. Neste capítulo iremos exibir essa apresentação, além de definir operações e propriedades importantes envolvendo os números naturais.

Este capítulo foi elaborado a partir das seguintes referências bibliográficas: [2] e [3].

2.1 Axiomas de Peano

Toda teoria dos números naturais pode ser deduzida dos três axiomas abaixo, conhecidos como *axiomas de Peano*.

São dados, como objetos não-definidos, um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados *números naturais*, e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, chamada de função sucessora. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, valor que a função s assume no ponto n, é chamado sucessor de n.

A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

Axioma 2.1. *Axiomas de Peano:*

i. $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *é injetiva. Em outros termos: dados* $m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$. *Isto é, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.*

ii. $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ *consta de um só elemento. Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama "um" e é representado pelo símbolo 1. Assim, qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se* $1 \neq s(n)$. *Por outro lado, se* $n \neq 1$, *então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que* $s(n_0) = n$.

iii. (Princípio de indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ *é um subconjunto tal que* $1 \in X$ *e, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tem-se também* $s(n) \in X$, *então* $X = \mathbb{N}$.

O princípio de indução pode também ser enunciado da seguinte maneira: Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 gozar da propriedade P e se, do fato de um número natural n gozar de P puder-se concluir que $n+1$ goza da propriedade P, então todos os números naturais gozam dessa propriedade.

O princípio de indução é muito útil para demonstrar as proposições que se referem a números inteiros. Ele está implícito em todos os argumentos onde se diz "e assim por diante", "e assim sucessivamente" ou "etc". Uma demostração na qual o axioama iii é empregado chama-se uma *uma demonstração por indução*. Não menos importante do que *demonstrar* proposições por indução é saber *definir* objetos indutivamente.

As definições por indução se baseiam na possibilidade de se iterar uma função $f : X \longrightarrow X$ um número arbitrário n de vezes.

Mais precisamente, seja $f : X \longrightarrow X$ uma função cujo domínio e contra domínio são o mesmo conjunto X. A cada $n \in \mathbb{N}$ podemos, de modo único, associar uma função $f^n : X \longrightarrow X$ de tal maneira que $f^1 = f$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$. Em particular, se chamarmos $2 = s(1), 3 = s(2)$, teremos $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$. A função $f^n : X \longrightarrow X$ será chamada a *n-ésima interada de f*. Vejamos um exemplo de definição por indução.

2.2 Adição de números naturais

Usando as iteradas da função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definiremos a adição de números naturais.

Definição 2.1. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sua soma $m + n \in \mathbb{N}$ é definida por*

$$m + n = s^n(m)$$

Assim somar m com 1 é tomar o sucessor de m enquanto que, em geral, somar m com n é partir de m e iterar n vezes a operação de tomar o sucessor. Em outras palavras, temos, por definição:

$$\begin{aligned} m + 1 &= s(m), \\ m + s(n) &= s(m + n). \end{aligned}$$

Exemplo 2.1. Vamos determinar a soma de 2 e 3. Temos:

$$\begin{aligned} 2 + 1 &= s(2) = 3, \\ 2 + 2 &= s(2 + 1) = s(3) = 4, \\ 2 + 3 &= s(2 + 2) = s(4) = 5. \end{aligned}$$

Assim, se quisermos, poderemos dispensar a notação $s(n)$ para indicar o sucessor de n e usar a notação definitiva $n + 1$ para representar esse sucessor. Com a notação definitiva, a última das igualdades da defnição acima le-sê:

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

Temos as seguintes propriedades da adição.

Teorema 2.1. *Dados $m, n, p \in \mathbb{N}$, então:*

(1) Associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$*;*

(2) Comutatividade: $m + n = n + m$*;*

(3) Lei do Corte: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$*;*

(4) Tricotomia: dados $m, n \in \mathbb{N}$*, exatamente uma das três alternativas seguintes pode ocorrer: ou* $m = n$*, ou existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $m = n + p$*, ou existe* $q \in \mathbb{N}$ *com* $n = m + q$*.*

Demonstração. (1) Consideremos, inicialmente, m e n elementos arbitrários fixos de $\mathbb{N}$. Seja X o conjunto dos números naturais p tais que $m + (n + p) = (m + n) + p$. Pela definição de soma, temos que $1 \in X$. Além disso, se $p \in X$, então,

$$m + (n + s(p)) = m + s(n + p) = s(m + (n + p)) = s((m + n) + p) = (m + n) + s(p).$$

(No terceiro sinal de igualdade, usamos a hipótese $p \in X$ e nos demais a definição da soma). Logo, $p \in X \Rightarrow s(p) \in X$. Como $1 \in X$, concluímos, por indução, que $X = \mathbb{N}$, e pela arbitrariedade na escolha de m e n temos que $m + (n + p) = (m + n) + p$, quaisquer que sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$.

□

A demosntração das outras propriedades serão omitidas, mas também podem ser feitas pelo princípio de indução.

2.3 Relação de ordem

É relevante mencionar a relação de ordem que temos no conjunto dos números naturais. Ela tem uma apresentação formal, e é muito utilizada em nossa sociedade.

A relação de ordem entre os números naturais é definida em termos da adição. Formalmente: se m e n são números naturais, definimos que m é menor do que n, o que denotamos $m < n$, no caso de existir um terceiro número natural p tal que $n = m + p$. Nas mesmas condições, dizemos que n é maior do que m e escrevemos $n > m$. Dizemos que m *é menor do que ou igual a* n (denota-se por $m \leq n$), se $m \leq n$ ou $m = n$.

A relação $<$ tem as seguintes propriedades:

Teorema 2.2. *Dados* m, n *e* $p \in \mathbb{N}$*, então*

(1) Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$;

(2) Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$;

(3) Monotonicidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$.

2.4 Boa ordenação

Seja X um conjunto de números naturais. Diz-se que um número $p \in X$ é o menor elemento de X (ou elemento mínimo de X) quando se tem $p \leq n$ para todo $n \in X$. Por exemplo, 1 é o menor elemento do conjunto dos números naturais. Com maior razão, qualquer que seja $X \subset \mathbb{N}$, se $1 \in X$, então 1 será o menor elemento de X. Analogamente, seja X um conjunto de números naturais, diz-se que um número $q \in X$ é o maior elemento de X (ou elemento máximo de X) quando se tem $q \geq n$, para todo $n \in X$. O menor elemento de um conjunto de números naturais é único. Se existir o elemento máximo de um conjunto de número naturais, ele é único.

Um resultado de grande importância, e utilizado como ferramenta para demonstrações diversas, é o fato de que todo conjunto não-vazio de números naturais possui um menor elemento. Este fato é conhecido como o *Princípio da Boa Ordenação.* Ao longo do trabalho, indicaremos por I_n o conjunto dos números naturais desde 1 até n. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$, temo que $I_n = \{p \in \mathbb{N} \mid 1 \leq p \leq n\}$. Por exemplo, temos que $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $I_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Teorema 2.3. *(Princípio da Boa Ordenação) Todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um elemento mínimo.*

Demonstração. Considere o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid I_n \subset (\mathbb{N} - A)\}$. Assim, dizer que $n \in X$ significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores que n também não pertencem a A. Se tivermos $1 \in A$, o teorema está demonstrado, pois 1 será o menor elemento de A. Se, porém, $1 \notin A$, então $1 \in X$. Por outro lado, temos $X \neq \mathbb{N}$, pois $X \subset (\mathbb{N} - A)$ e $A \neq \emptyset$. Assim, X cumpre a primeira parte do princípio de indução (contém 1) mas não satisfaz a conclusão do princípio de indução (não é igual a $\mathbb{N}$). Logo, não pode cumprir a segunda parte da hipótese. Isto quer dizer: deve existir algum $n \in X$ tal que

$(n+1) \notin X$. Seja $p = n+1$. Então todos os números naturais desde de 1 até n não pertencem a A, mas $p = n+1$ pertence a A. Desta maneira, para qualquer $a \in A$, tem-se que $p \leq a$, ou seja, p é o menor elemento do conjunto A, o que demonstra o teorema. □

2.5 Multiplicação de números naturais

Vamos definir a multiplicação em $\mathbb{N}$.

Definição 2.2. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos:*

(1) $n.1 = n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $n.(m+1) = n.m + n.$

Exemplo 2.2. Vamos determinar a multiplicação de 5 e 3.

$5.1 = 5$

$5.2 = 5.(1+1) = 5.1 + 5 = 5 + 5 = 10$

$5.3 = 5.(2+1) = 5.2 + 5 = 10 + 5 = 15.$

Segundo a definição de multiplicação em $\mathbb{N}$, vamos estabelecer algumas proriedades.

Teorema 2.4. *Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$ valem as seguintes proriedades:*

(1) $n.m \in \mathbb{N}$

(2) $m.(n+p) = m.n + m.p$

(3) $m.(n.p) = (m.n).p$

(4) $(n+p).m = n.m + p.m$

(5) $1.n = n$

(6) $m.n = n.m$

A demonstração das propriedades serão omitidas, mas podem ser feitas pelo princípio de indução. O resultado seguinte estabelece propriedades das operações de adição e multiplicação que são compatíveis com a relação de ordem.

Teorema 2.5. *Para todo $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ arbitrários, valem as seguintes proriedades:*

(1) $m < n + 1 \Rightarrow m \leq n$

(2) $m + p \leq n + p \Leftrightarrow m \leq n$

(3) $m < n$ *e* $p < q \Rightarrow m + p < n + q$

(4) $m < n \Rightarrow m.p < n.p$

(5) $m.p = n.p \Rightarrow m = n$

(6) $1 \leq n$

(7) $m < n \Rightarrow m + 1 \leq n$

(8) $m \leq n$ *e* $n \leq m \Rightarrow m = n$*.*

2.6 Potências de números naturais

Definição 2.3. *Seja $a \in \mathbb{N}$, definimos*

(1) $a^1 = a$

(2) $a^{n+1} = a^n.a$*, sempre que* a^n *esteja definido, para* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 2.3. Como $a^1 = a$, temos:

$a^2 = a^{1+1} = a^1.a = a.a$

$a^3 = a^{2+1} = a^2.a = a.a.a$

Teorema 2.6. *Sejam $m, n, a, b \in \mathbb{N}$ quaisquer. Então*

(1) $1^n = 1$

(2) $a^{m+n} = a^m.a^n$

(3) $a^{m.n} = (a^m)^n = (a^n)^m$

(4) $(a.b)^n = a^n.b^n$

2.7 Abordagem inicial sobre finitude e infinitude

Nesta seção iremos introduzir uma ideia inicial do conceito de finitude e infinitude. No capítulo 4 iremos abordar minuciosamente esse conceito. As definições abaixo serão necessárias para explorar os conjuntos numéricos que serão estudados no capítulo 3.

Dado um conjunto X, se for possível encontrar um número natural n, para o qual exista uma função bijetiva $f : I_n \longrightarrow X$, diremos que X é *finito*, e tem n elementos. A função f, que não é unica, é chamada de uma contagem dos elementos de X. Pondo $f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ f(3) = x_3,\ ...,\ f(n) = x_n$, temos $X = \{x_1,\ x_2\ x_3\ ...\ x_n\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito. Convencionamos que o conjunto vazio, $\emptyset$, é finito e não possui elementos. Um conjunto é dito infinito se não é finito. Isto é, se X é um conjunto, não vazio, para o qual, independente da escolha de $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$, então X é *infinito*. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. De fato, dada qualquer função $\varphi : I_n \longrightarrow \mathbb{N}$, seja $p = \varphi(1) + ... + \varphi(n)$. Então, $p > \varphi(x)$, para todo $x \in I_n$, donde $p \notin \varphi(I_n)$. Logo, nenhuma função $\varphi : I_n \longrightarrow \mathbb{N}$ é sobrejetiva.

CAPÍTULO 3

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Após apresentar o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e estabelecer suas propriedades, vamos ampliar esse conjunto e, a partir deste, construir o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Em seguida ampliaremos o conjunto dos números inteiros para o conjuntos dos números racionais $\mathbb{Q}$. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ será construído via sequências de Cauchy. Antes de iniciar tais construções, é importante definir o conceito de relações de equivalência e conjunto quociente pois, como veremos, os números inteiros serão obtidos a partir de relações em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. De forma análoga, os racionais serão obtidos através de relações em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Este capítulo foi elaborado a partir das seguintes referências bibliográficas: [3] e [7].

3.1 Relações de equivalência e conjunto quociente

Definição 3.1. *Uma relação R, definida num conjunto qualquer A, é um subconjunto do produto cartesiano $A \times A$.*

Se R é uma relação em A, é comum escrever: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.

Definição 3.2. *Uma relação de equivalência em A é uma relação tal que, para $a, b, c \in A$, valem as seguintes propriedades:*

(1) aRa, $\forall a \in A$ (Reflexiva)

(2) $aRb \Leftrightarrow bRa$ *(Simétrica)*

(3) aRb *e* $bRc \Rightarrow aRc$. *(Transitiva)*

Definição 3.3. *Seja* R *uma relação de equivalência em* A *e* $a \in A$ *um elemento fixo. O conjunto*

$$\overline{a} = \{x \in A \mid xRa\}$$

denomina-se classe de equivalência de a *pela relação* R.

Teorema 3.1. *Seja* R *uma relação de equivalência em* A. *Se* $a, b \in A$ *temos*

(1) $a \in \overline{a}, \forall a \in A$

(2) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow aRb$

(3) $\overline{a} \neq \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

Demonstração. (1) Sendo R uma relação de equivalência em A, temos que aRa. Logo, por definição temos que $a \in \overline{a}$.

(2) ($\Rightarrow$)De (1) temos que $b \in \overline{b}$, mas como $\overline{b} = \overline{a}$, logo $b \in \overline{a}$ e bRa, portanto aRb.

($\Leftarrow$) Considere $x \in \overline{a}$, ou seja, xRa. Pela transitividade de R, temos que xRb, ou seja, $x \in \overline{b}$ e, assim, $\overline{a} \subset \overline{b}$. Analogamente, temos que $\overline{b} \subset \overline{a}$ e, portanto, $\overline{a} = \overline{b}$.

(3) Seja $\overline{a} \neq \overline{b}$. Vamos supor que $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e vamos considerar $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$, ou seja, $c \in \overline{a}$ e $c \in \overline{b}$. Então, cRa, aRc e cRb, logo aRb e segue de (2), que $\overline{a} = \overline{b}$, contrariando a hipótese.

□

Definição 3.4. *Seja* R *uma relação de equivalência definida num conjunto* A. *A família das classes de equivalência em* A *determinadas pela relação* R, *denotada por* A/R, *denomina-se* conjunto quociente *de* A *por* R:

$$A/R = \{\overline{a} \mid a \in A\}.$$

Definição 3.5. *Seja* A *um conjunto e* $P = \{P_1, P_2, ...\}$ *uma família de subconjuntos de* A. *Dizemos que* P *é uma partição de* A *se:*

(1) Os elementos de P são disjuntos dois a dois: $P_i \neq P_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

(2) A união dos elementos de P é igual a A: $\bigcup\limits_{P_i \in P} P_i = A$, para todo i.

Exemplo 3.1. O conjunto dos números naturais apresenta uma partição $\mathbb{N} = P_1 \cup P_2$, como sendo a união do conjunto dos números ímpares P_1 e o conjunto dos números pares P_2.

Observação 3.1. O número de classes de partição não é necessariamente finito. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ admite um número infinito de classes de partição: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$,..., $\{n\}$,...
.

Teorema 3.2. *Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então, o conjunto quociente A/R é uma partição de A.*

Demonstração. Dado que as classes de equivalência de A/R são disjuntas, precisamos mostrar que a sua união contém o conjunto A. De fato, se $a \in A$, então $a \in \overline{a} \subset \bigcup\limits_{\overline{a} \in A/R} \overline{a}$. Assim fica demonstrado o teorema. □

A recíproca do teorema acima também é válida.

Teorema 3.3. *Seja P uma partição de um conjunto A. Então existe uma relação de equivalência R, definida em A, tal que $A/R = P$.*

Demonstração. Consideremos P como sendo formada por $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Definimos uma relação R em A de seguinte forma

$$aRb \Leftrightarrow \exists P_i \subset P \text{ tal que } a, b \in P_i,$$

ou seja, aRb se, e somente se, estão na mesma classe de partição P_i. Verifica-se facilmente que R é uma relação de equivalência. Por outro lado, vemos que se $a \in P_i$ então $\overline{a} = P_i$. Portanto $A/R = P$. Também se mostra que a relação R definida acima é única.

□

3.2 Conjunto dos números inteiros

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sendo $m > n$, podemos nos questionar se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m+p = m$ ou $m + p = n$. É claro que não existe p natural que satisfaça tal condição. Por exemplo, quais seriam os números que tornariam as seguintes igualdades verdadeiras: $9 + x = 9$ ou $9 + y = 5$? Os números seriam $x = 0$ e $y = -4$, mas ainda não definimos de forma rigorosa, quem seriam essses números, nem a operação subtração. Essa será nossa motivação para ampliarmos o conjunto dos números naturais e construirmos o conjunto dos números inteiros. Essa contrução se dará através de uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que definiremos adiante. Intuitivamente, temos, por exemplo, que $7 - 5 = 3 - 1$ e estes serão associados aos pares ordenados $(7, 5)$ e $(3, 1)$, que serão corresnpondentes ao número natural 2. Podemos reescrever a igualdade anterior na forma $7 + 1 = 5 + 3$. É necessário formalizar essa ideia, isto nos leva a estabelecer a seguinete relação.

Consideremos o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e nele a relação R dada por

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Exemplo 3.2. Temos que:

$(9, 3)R(7, 1)$, pois $9 + 1 = 3 + 7$;

$(1, 4)R(6, 9)$, pois $1 + 9 = 4 + 6$.

Teorema 3.4. *A relação R é uma relação de equivalência.*

Demonstração. (1) Dado $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tem-se que $(a, b)R(a, b)$, pois $a + b = b + a$.

(2) Sejam (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ quaisquer. Se $(a, b)R(c, d)$ temos que $a + d = b + c$, então $b + c = a + d$ e, portanto, $c + b = d + a$. Logo, $(c, d)R(a, b)$.

(3) Se $(a, b)R(c, d)$ e $(c, d)R(e, f)$ temos que $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$. Portanto, $a + d + e = b + c + e$, assim como $a + c + f = a + d + e$. Então,

$$b + c + e = a + c + f \Rightarrow b + e = a + f \Rightarrow a + f = b + e$$

Logo, $(a, b)R(e, f)$.

□

Se $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, denotaremos por $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência de (a,b) determinada pela relação R definida acima, isto é,

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x,y)R(a,b)\}.$$

O par (a,b) é chamado de representante da classe de equivalência $\overline{(a,b)}$.

Exemplo 3.3. Temos que:

- $\overline{(7,4)} = \{(8,5); (9,6); (4,1)...\}$
- $\overline{(9,10)} = \{(5,6); (1,2); (4,5)...\}$
- $\overline{(10,5)} = \{(9,4); (100,95); (6,1)...\}$

O conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por R, formado pela família de classes de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ determinada pela relação R, é

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R = \{\overline{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Definição 3.6. *O conjunto* $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ *é chamado o* conjunto dos números inteiros *e será denotado por* $\mathbb{Z}$.

Cada classe de equivalência $\overline{(a,b)}$ de $\mathbb{Z}$ será chamada de número inteiro. Denotaremos os números inteiros pelas letras $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, ...$

Exemplo 3.4. O conjunto $\theta = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um número inteiro.

De fato, temos que

$\theta = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + n = y + n\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x,y)R(n,n)\} = \overline{(n,n)}.$

Exemplo 3.5. O conjunto $\theta = \{(n+1,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um número inteiro.

De fato, temos que

$\theta = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y + 1\}$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + n = y + 1 + n\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x, y)R(n + 1, n)\} = \overline{(n + 1, n)}.$$

3.2.1 Operações com números inteiros

Definição 3.7. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Se $(a, b) \in \alpha$ e $(c, d) \in \beta$, definimos*

(1) $\alpha + \beta = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$ *(Adição)*

(2) $\alpha.\beta = \overline{(a, b)}.\overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$ *(Multiplicação)*

A soma e o produto foram definidas usando os representantes (a, b) e (c, d) das classes de equivalência α e β. Portanto, devemos garantir que independem da escolha dos representates, ou seja, que a soma e o produto não mudam se escolhermos outros representantes (a', b') e (c', d').

Teorema 3.5. *Se $\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')}$ e $\overline{(c, d)} = \overline{(c', d')}$ temos:*

(1) $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} + \overline{(c', d')}$.

(2) $\overline{(a, b)}.\overline{(c, d)} = \overline{(a', b')}.\overline{(c', d')}$

Demonstração. (1) Como $\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')}$, temos que $(a, b)R(a', b')$ e $a + b' = b + a'$. De forma análoga, temos que $c + d' = d + c'$. Somando as equações temos que:

$$(a + b') + (c + d') = (b + a') + (d + c') \Rightarrow (a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c').$$

Logo $(a + c, b + d)R(a' + c', b' + d')$, ou seja, $\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a' + c', b' + d')}$. Portanto, $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} + \overline{(c', d')}$.

(2) Temos que $(a, b)R(a', b')$ e $a + b' = b + a'$. Multiplicando por c e por d a equação, obtemos: $ac + b'c = bc + a'c$ e $ad + b'd = bd + a'd$. Somando as equações temos:

$$ac + b'c + bd + a'd = bc + a'c + ad + b'd \Rightarrow$$

$$ac + bd + a'd + b'c = ad + bc + a'c + b'd \Rightarrow$$

$$(ac+bd, ad+bc)R(a'c+b'd, a'd+b'c) \Rightarrow$$
$$\overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(a'c+b'd, a'd+b'c)} \Rightarrow$$
$$\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(a',b')}.\overline{(c,d)}$$

Agora, considerando que $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, podemos proceder de maneira semelhante e obter que $\overline{(a',b')}.\overline{(c,d)} = \overline{(a',b')}.\overline{(c',d')}$ e, portanto, temos que

$$\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(a',b')}.\overline{(c',d')}$$

□

3.2.2 Propriedades dos números inteiros

Vamos apresentar agora as principais propriedades envolvendo números inteiros. Não serão demonstradas todas as propriedades, pois não é nosso objetivo, porém as demonstrações utilizam a relação de equivalência estabelecida para definir o conjunto dos números inteiros, as definições de soma e produto, e as proriedades dos números naturais.

Teorema 3.6. *Sejam α, β e $\gamma \in \mathbb{Z}$ quaisquer. Então:*

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

(2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

Demonstração. Considerando $\alpha = \overline{(a,b)}$, $\beta = \overline{(c,d)}$ e $\gamma = \overline{(e,f)}$ com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ temos:

(1) $\alpha+(\beta+\gamma) = \overline{(a,b)}+(\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)}+\overline{(c+e, d+f)} = \overline{(a+(c+e), b+(d+f))} = \overline{((a+c)+e, (b+d)+f)} = \overline{(a+c, b+d)}+\overline{(e,f)} = (\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)})+\overline{(e,f)} = (\alpha+\beta)+\gamma$.

(2) $\alpha+\beta = \overline{(a,b)}+\overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)} = \overline{(c+a, d+b)} = \overline{(c,d)}+\overline{(a,b)} = \beta+\alpha$.

□

No próximo resultado mostramos que o elemento inteiro zero θ (elemento neutro aditivo) é dado pela classe de equivalência $\overline{(n,n)}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.7. *Existe um único elemento $\theta \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha + \theta = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Existência: Considere o elemento $\theta = \overline{(n,n)}$ e seja $\alpha = \overline{(a,b)}$ qualquer, com $a, b \in \mathbb{N}$. Temos que $\overline{(a+n, b+n)} = \overline{(a,b)}$, pois $(a+n, b+n)R(a,b)$. Então:

$$\alpha + \theta = \overline{(a,b)} + \overline{(n,n)} = \overline{(a+n, b+n)} = \overline{(a,b)} = \alpha$$

Unicidade: Suponha que existem elementos θ_1 e θ_2 em $\mathbb{Z}$ satisfazendo $\alpha + \theta_1 = \alpha$ e $\alpha + \theta_2 = \alpha$. Então:

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2.$$

□

Observação 3.2. O elemento θ do teorema acima é chamado elemento neutro aditivo e será denotado por 0.

Teorema 3.8. *Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}$ existe um único $\alpha^* \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha + \alpha^* = 0$*

Demonstração. Existência: Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\alpha^* = (b,a)$, temos que

$$\alpha + \alpha^* = \overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a+b, b+a)} = 0$$

Unicidade: Sejam α_1 e α_2 em $\mathbb{Z}$ tais que $\alpha + \alpha_1 = 0$ e $\alpha + \alpha_2 = 0$. Logo,

$$\alpha_1 = \alpha_1 + 0 = \alpha_1 + (\alpha + \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha) + \alpha_2 = 0 + \alpha_2 = \alpha_2.$$

□

Observação 3.3. O elemento α^* do teorema acima é chamado elemento simétrico, ou oposto de α, e será denotado por $-\alpha$.

Podemos definir a subtração em $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

Definição 3.8. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

Isto permite provar a seguinte propriedade.

Teorema 3.9. *Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, existe um único elemento $\rho \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta + \rho = \alpha$.*

Demonstração. Existência: Basta tomar $\rho = \alpha - \beta$, pois $\beta + \rho = \beta + (\alpha - \beta) = \beta + (-\beta + \alpha) = (\beta + (-\beta)) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$.

Unicidade: Se existe ρ' tal que $\beta + \rho' = \alpha = \beta + \rho$, então $\rho' = \rho$. □

Outras propriedades importantes envolvendo números inteiros serão apresentadas, porém as demonstrações serão omitidas.

Teorema 3.10. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Então:*

(1) $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$

(2) $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$

(3) $\alpha.\beta = \beta.\gamma$

(4) $(\alpha + \beta).\gamma = \alpha.\gamma + \beta.\gamma = \gamma.(\alpha + \beta)$

(5) $\alpha.0 = 0$

(6) $\alpha.\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ *ou* $\beta = 0$

(7) $\alpha.\gamma = \beta.\gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ *(Quando* $\gamma \neq \theta$*)*

(8) $\alpha.(-\beta) = (-\alpha).\beta = -(\alpha.\beta)$

(9) $-(-\alpha) = \alpha$

(10) $(-\alpha).(-\beta) = \alpha.\beta$

3.2.3 Relação de ordem nos inteiros

Definição 3.9. *Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$. Dizemos que α é menor que β se $a + d < b + c$, ou seja*

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow a + d < b + c$$

Diremos que β é maior que α, e escrevemos $\beta > \alpha$, se $\alpha < \beta$, ou seja

$$\beta > \alpha \Leftrightarrow b + c > a + d.$$

Definição 3.10. *Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$. Dizemos que α é menor ou igual que β, e escrevemos $\alpha \leq \beta$, se $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$. Analogamente se define a relação $\alpha \geq \beta$.*

Assim, como as operações definidas nos inteiros, é fácil ver que a relação de ordem estabelecida independe dos representantes escolhidos nas respectivas classes de equivalência.

Teorema 3.11. *A relação $\leq$ em $\mathbb{Z}$ é uma relação de ordem total, ou seja, se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, então*

(1) $\alpha \leq \alpha$

(2) $\alpha \leq \beta$ *e* $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$

(3) $\alpha \leq \beta$ *e* $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$

(4) $\alpha \leq \beta$ *ou* $\beta \leq \alpha$

Definição 3.11. *Um número inteiro α é positivo se $\alpha > 0$.*

Note que, neste caso, sendo $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $0 = \overline{(n,n)}$, com $\alpha > 0$, temos que $n + a > n + b$, ou seja, $a > b$. Portanto, um número inteiro $\alpha = \overline{(a,b)}$ é positivo se $a > b$.

Definição 3.12. *Um número inteiro α é negativo se $\alpha < 0$.*

Note que neste caso, sendo $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $0 = \overline{(n,n)}$, com $\alpha < 0$, temos que $a + n < b + n$, ou seja, $a < b$. Portanto, um número inteiro $\alpha = \overline{(a,b)}$ é negativo se $a < b$.

Podemos estabelecer as seguintes propriedades para os números inteiros:

Teorema 3.12. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Então*

(1) $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0 \Rightarrow \alpha.\beta > 0$

(2) $\alpha < 0$ *e* $\beta < 0 \Rightarrow 0 < \alpha.\beta$

(3) $\alpha < 0$ *e* $0 < \beta \Rightarrow \alpha.\beta < 0$

(4) $\alpha < 0 \Leftrightarrow -\alpha > 0$

(5) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$

(6) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

(7) $\alpha < \beta$ *e* $0 < \delta \Rightarrow \alpha.\gamma < \beta.\gamma$

(8) $-\alpha > -\beta \Rightarrow \alpha < \beta$

(9) $\alpha < \beta + \gamma \Rightarrow \alpha - \beta < \gamma$

A seguir, vamos introduzir a noção de módulo ou valor absoluto para números inteiros.

Definição 3.13. *Para $\alpha \in \mathbb{Z}$ definimos o valor absoluto por*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & se \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & se \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Teorema 3.13. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{Z}$, onde $\gamma \geq 0$. Então*

(1) $|\alpha| \geq 0$

(2) $|\alpha| = |-\alpha|$

(3) $-|a| \leq \alpha \leq |\alpha|$

(4) $|\alpha| \leq \gamma \Leftrightarrow -\gamma \leq \alpha \leq \gamma$

(5) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

(6) $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

(7) $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|$

(8) $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$

(9) $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$

(10) $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$

3.2.4 Os números naturais como subconjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros positivos será denotado por $\mathbb{Z}_+$. Então:

$$\mathbb{Z}_+ = \{\overline{(a, b)}|\ a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a > b\}$$

Nossa intenção agora, é mostrar que existe um bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_+$, além disso, os conjuntos são isomorfos. Isomorfismos são aplicações definidas entre estruturas algébricas e que ao atuarem preservam as operações dessas estruturas.

O conceito de isomorfismo é o de um homomorfismo bijetivo, cuja inversa também é um homomorfismo. Já o conceito de homomorfismo pode ser definido como uma aplicação entre duas estruturas algébricas quaisquer, de modo que a imagem de quaisquer dois elementos operados no domínio, coincide com a operação correspondente das imagens desses mesmos elementos na estrutura que é o contradomínio da função.

Teorema 3.14. *Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_+$ são isomorfos, isto é, a aplicação $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ dada por $\varphi(n) = \overline{(n+1,1)}$ é bijetora e satisfaz as propriedades:*

(1) $\varphi(n_1 + n_2) = \varphi(n_1) + \varphi(n_2)$

(2) $\varphi(n_1.n_2) = \varphi(n_1).\varphi(n_2)$

(3) $n_1 < n_2 \Leftrightarrow \varphi(n_1) < \varphi(n_2)$

Demonstração. A função φ é injetora, pois se $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, ou seja, $\overline{(n_1+1,1)} = \overline{(n_2+1,1)}$, temos que $(n_1+1,1)R(n_2+1,1)$ e, portanto, $n_1 = n_2$.

A função também é sobrejetora, pois se $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}_+$, temos que $a > b$ e, portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + n$. Então,

$$\overline{(a,b)} = \overline{(b+n,b)} = \overline{(n+1,1)} = \varphi(n)$$

Vamos provar agora as três propriedades restantes.

(1) $\varphi(n_1) + \varphi(n_2) = \overline{(n_1+1,1)} + \overline{(n_2+1,1)} = \overline{(n_1+1+n_2+1,1+1)} = \overline{(n_1+n_2+1,1)} =$

$$= \varphi(n_1+n_2)$$

(2) $\varphi(n_1).\varphi(n_2) = \overline{(n_1+1,1)}.\overline{(n_2+1,1)} = \overline{(n_1.n_2+n_1+n_2+1+1, n_1+n_2+1+1)} =$

$$= \overline{(n_1.n_2+1,1)} = \varphi(n_1.n_2)$$

(3) Se $n_1 < n_2$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 = n_1 + r$. Logo,

$$\varphi(n_2) = \varphi(n_1+r) = \overline{(n_1+r+1,1)} > \overline{(n_1+1,1)} = \varphi(n_1)$$

Agora, se $\varphi(n_1) < \varphi(n_2)$, temos que

$$\overline{(n_1+1,1)} < \overline{(n_2+1,1)} \Rightarrow n_1+1+1 < 1+n_2+1 \Rightarrow n_1 < n_2.$$

Assim, a aplicação φ preserva a ordem.

$\square$

O isomorfismo estabelecido no teorema acima permite afirmar que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é um subconjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, pois podemos identificar cada $n \in \mathbb{N}$ com o elemento $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}_+$ onde $a = b+n$, ou seja,

$$(a,b)R(b+n,b) \text{ e } (b+n,b)R(n+1,1).$$

O conjunto dos números inteiros negativos será denotado por $\mathbb{Z}_-$. Então:

$$\mathbb{Z}_- = \{\overline{(a,b)} |\ a,b \in \mathbb{Z} \text{ e } a < b\}.$$

Podemos escrever que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+.$$

Como identificamos cada $n \in \mathbb{N}$ com o elemento $\overline{(n+1,1)}$, podemos utilizar a notação $-n$ para representar o número inteiro negativo $\overline{(1,n+1)}$ ou $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}_-$, onde $b = a+n$.

Já que "$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$", podemos escrever $\mathbb{Z}_- = -\mathbb{N}$. Assim,

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -1, 0, 1, ..., n...\}.$$

Exemplo 3.6. Considerando os números inteiros representados por 2 e -5, podemos identificá-los como $\overline{(3,1)}$ e $\overline{(4,9)}$, respectivamente. Note que poderíamos ter escolhidos outros representantes das classes de equivalência, mas seria indiferente. A soma desses números será $\overline{(3,1)} + \overline{(4,9)} = \overline{(3+4, 1+9)} = \overline{(7,10)}$ que pode ser representado por -3. O produto desses números será $\overline{(3,1)}.\overline{(4,9)} = \overline{(3.4+1.9, 3.9+1.4)} = \overline{(21,31)}$ que pode ser representado por -10.

Definição 3.14. *Dado um conjunto A que contenha um elemento 0, denotaremos $A^* = A - \{0\}$.*

Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z}^* = \{..., -n, ..., -1, 1, ..., n...\}$.

A seguir, utilizaremos um processo semelhante para construir os números racionais por meio de pares ordenados de números inteiros. Mas antes, vamos definir alguns conceitos importantes sobre a relação de divisibilidade de números inteiros.

Definição 3.15. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Dizemos que β divide α (denota-se $\beta|\alpha$), se $\alpha = \beta.\gamma$, para algum $\gamma \in \mathbb{Z}$.*

Observação 3.4. Dizer que β divide α é equivalente a dizer que α é divisível por β, ou que α é múltiplo de β, ou ainda que β é divisor de α.

Teorema 3.15. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ com $\beta \neq 0$. Então, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tais que $\alpha = \beta.q + r$, com $0 \leq r < |\beta|$.*

Definição 3.16. *O número inteiro d é dito o máximo divisor comum de dois números inteiros α e β $(\alpha.\beta \neq 0)$, se*

(1) $d|\alpha$ e $d|\beta$

(2) Se $d'|\alpha$ e $d'|\beta$ então $d'|d$

Denotaremos o máximo divisor comum de α e β por $d = mdc(\alpha, \beta)$

3.3 Conjunto dos números racionais

A construção dos números racionais, como classes de equivalência de pares de números inteiros (a, b), com $b \neq 0$, é similar ao processo de construção dos números inteiros como pares ordenados de números naturais.

Esse processo baseia-se no estudo de soluções de equações da forma $bx = a$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Por exemplo, se $a = -12$ e $b = 3$ temos a solução $x = -4$ e podemos considerar o par $(-12, 3)$ como solução da equação dada. Em geral, se $b|a$, temos que a e b, junto com a equação $bx = a$ determinam um número inteiro escrito na forma $\frac{a}{b}$ (ou na forma (a, b)) que é a solução única da equação dada. Podemos escrever isto na forma $\{x \mid bx = a\} = \{(a, b)\}$. Assim, a cada solução x associamos o par (a, b), e reciprocamente.

De outro lado, se $a = 2$ e $b = 5$, a equação $bx = a$ não tem solução no conjunto dos números inteiros, mas podemos considerar o par $(2, 5)$ como solução simbólica da equação.

Nesta seção, para simplificar a notação, usaremos as letras $a, b, c, ...$ para representar números inteiros.

3.3.1 Equivalência de pares ordenados e números racionais

Sejam a, b, c, d, x números inteiros, com $bd \neq 0$ e tais que $bx = a$ e $dx = c$. Temos que $d(bx) = b(dx) = da$, como $dx = c$, logo $bc = ad$. Vemos assim que os pares ordenados (a, b) e (c, d) definem ambos o mesmo número inteiro, então devemos ter $bc = ad$. Por exemplo os pares $(12, 4)$ e $(6, 2)$ devem ser equivalentes, pois as equações $4x = 12$ e $2x = 6$ possuem a mesma solução. Note que $4.6 = 12.2$.

Definição 3.17. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ com $bd \neq 0$, define-se a relação $\sim$ dada por*

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Dizemos que (a, b) é equivalente a (c, d).

Considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

Teorema 3.16. *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.*

Demonstração. Sejam $(a, b), (a, c), (e, f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Note que, neste caso, b, c, f são não nulos.

(1) Vale que $(a, b) \sim (a, b)$, pois $ab = ba$.

(2) Se $(a, b) \sim (c, d)$, temos que $ad = bc$. Então, $cb = da$ e, assim, $(c, d) \sim (a, b)$.

(3) Se $(a, b) \sim (c, d)$, temos que $ad = bc$, logo $e(ad) = e(bc)$ e, assim, $a(de) = e(bc)$. Considerando que $(c, d) \sim (e, f)$, temos que $cf = de$. Segue que $a(cf) = a(de) = e(bc)$ e, assim, $(af)c = (eb)c$. Se $c \neq 0$, temos que $af = be$, o que implica que $(a, b) \sim (e, f)$. Porém, se $c = 0$, temos que $ad = bc = 0$ e, então, $a = 0$. Da mesma forma, $cf = de = 0$ e $e = 0$. Portanto, $af = be = 0$ e, assim, $(a, b) \sim (e, f)$.

□

Se $(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, denotaremos por $\dfrac{a}{b}$ a classe de equivalência de (a, b) determinada pela relação $\sim$ definida acima, isto é,

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (a, b)\} \ .$$

O par (a, b) é chamado representante da classe de equivalência $\frac{a}{b}$.

Exemplo 3.7. Temos que

- $\frac{2}{5} = \{...; (-6, -15); (-2, -5); (2, 5); (4, 10); ...\}$
- $\frac{-3}{2} = \{...; (-9, 6); (-6, 4); (3, -2); (15, -10); ...\}$

Definição 3.18. *O conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/ \sim$ é chamado o conjunto dos números racionais e será denotado por $\mathbb{Q}$, ou seja,*

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$$

Cada classe de equivalência $\frac{p}{q}$ de $\mathbb{Q}$ será chamada de número racional.

Observação 3.5. Pelo teorema 3.1, dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d)$$

Portanto, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a.d = b.c$. Por exemplo, temos que $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$.

3.3.2 Operações com números racionais

Vamos apresentar uma motivação para as definições de adição e multiplicação que serão estabelecidas a seguir. Sejam a, b, c, d, x, y números inteiros, com $bd \neq 0$ e tais que $bx = a$ e $dy = c$. Multiplicando a primeira equação por d, a segunda por b e somando as equações resultates, temos

$$d(bx) + b(dy) = da + bc \Rightarrow bd(x + y) = ad + bc$$

Assim, se x e y correspondem aos pares ordenados (a, b) e (c, d) respectivamente, então $(x + y)$ corresponde ao par ordenado $(ad + bc, bd)$.

De forma semelhante, fazendo a multiplicação das equações $bx = a$ e $dy = c$, temos que

$$(bx)(dy) = ac \Rightarrow (bd)xy = ac$$

E, portanto, xy corresponde ao par ordenado (ac, bd).

Definição 3.19. *As operações adição e multiplicação com números racionais serão definidas da seguinte forma:*

(1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ *(Adição)*

(2) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ *(Multiplicação)*

Exemplo 3.8. Considerando os números racionais $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$ temos

- $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2.6+3.1}{3.6}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$
- $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2.1}{3.6}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

Observação 3.6. Dado número racional $\frac{a}{b}$, existe um número racional $\frac{m}{n}$ tal que $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ e $mdc(m,n)=\pm 1$.

A seguir, vamos mostrar que as operações definidas independem dos representantes escolhidos em cada classe.

Teorema 3.17. *Se* $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ *e* $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$ *então*

(1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$

(2) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}$

Demonstração. (1) Como $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, temos que $(a,b)\sim(a',b')$. Portanto. $ab'=a'b$ e, da mesma forma, temos que $cd'=c'd$.

Multiplicando a primeira equação por (dd') e a segunda por (bb'), vamos obter $(ab')(dd')=(a'b)(dd')$ e $(cd')(bb')=(c'd)(bb')$. Somando as equações temos $(ab')(dd')+(cd')(bb')=(a'b)(dd')+(c'd)(bb')$ e, portanto, $(ad+bc)(b'd')=(bd)(a'd'+b'c')$. Logo ,

$$(ad+bc, bd)\sim(a'd'+b'c', b'd')\Rightarrow\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$$

(2) Temos que $ab' = a'b$ e $cd' = c'd$. Multiplicando as equações temos:

$(ab')(cd') = (a'b)(c'd)$, ou seja, $(ac)(b'd') = (bd)(a'c')$, o que implica que $(ac, bd) \sim (a'c', b'd')$. Portanto,

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$$

□

Apresentaremos agora algumas propriedades dos números racionais. Nem todas serão demonstradas.

Teorema 3.18. *Cancelamento aditivo e multiplicativo.*

(1) $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, *com* $e \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Vamos exibir agora a existência e a unicidade do elemento neutro aditivo e do elemento neutro multiplicativo em $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.19.

(1) Existe um único elemento $\frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$ *tal que* $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$, *para todo* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *e será chamado elemento neutro aditivo.*

(2) Existe um único elemento $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ *tal que* $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$, *para todo* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *e será chamado elemento neutro multiplicativo.*

Demonstração. (1) Existência: temos que $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1 + b.0}{b.1} = \frac{a}{b}$

Unicidade: Vamos supor que exista outro elemento $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b} + \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{0}{1} = \frac{m}{n} \text{ (Cancelamento aditivo)}$$

(2) Existência: temos que $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b}$

Unicidade: Vamos supor que exista outro elemento $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{m}{n} \text{ (Cancelamento multiplicativo)}$$

Note que, neste caso, devemos ter que $a \neq 0$. No caso específico quando $a = 0$, ou seja do número racional $\frac{0}{b}$, $\frac{1}{1}$ também será o elemento neutro multiplicativo, mas não será único, pois para todo número $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ teremos $\frac{0}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{0}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{0}{b}$.

□

Teorema 3.20. *Sejam* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ *quaisquer. Existe um único número racional* $\frac{x}{y}$ *tal que*

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d}$$

Vamos definir que $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$. Neste caso, $-\frac{a}{b}$ será o inverso aditivo de $\frac{a}{b}$.

Teorema 3.21. *O elemento* $-\frac{a}{b}$ *é o único inverso aditivo de* $\frac{a}{b}$.

Demonstração. Pelo teorema 3.20, a equação $\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{0}{1}$ possui uma única solução. Note que a solução é $\frac{x}{y} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$, pois $\frac{a}{b} + (\frac{-a}{b}) = \frac{a.b + b.(-a)}{b.b} = \frac{0}{b.b} = \frac{0}{1}$. □

Vamos definir a operação subtração com números racionais.

Definição 3.20. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + (-\frac{c}{d})$.

Vamos exibir a seguir, outras propriedades importantes dos números racionais.

Teorema 3.22.

(1) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

(2) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

(3) $-(\frac{-a}{b}) = \frac{a}{b}$

(4) $-(-\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$

(5) $-(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}) = -\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

(6) $(-\frac{a}{b}) \cdot (-\frac{c}{d}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

Como vimos, $\frac{1}{1}$ é o elemento neutro multiplicativo no conjunto $\mathbb{Q}$. Vamos estabelecer agora a existência do inverso multiplicativo em $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.23. *Se $a \neq 0$ então o único inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$.*

Demonstração.

Existência: Temos que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1}$.

Unicidade: Vamos supor que exista outro racional $\frac{m}{n}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{1}{1}$. Neste caso temos

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{m}{n} \text{ (Propriedade cancelativa em } \mathbb{Q})$$

□

3.3.3 Os números inteiros como subconjunto dos números racionais

Teorema 3.24. *Considere o subconjunto $Q' = \{\frac{a}{1} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{Q}$. Então Q' é isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Consideremos a aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow Q'$ dada por $\varphi(a) = \frac{a}{1}$.

Note que

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow \frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} \Rightarrow a_1.1 = 1.a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

ou seja, φ é injetora. Por outro lado, dado o racional $\frac{p}{1} \in Q'$, basta tomar $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(p) = \frac{p}{1}$, portanto φ é sobrejetora.

Logo, esta aplicação é bijetora e satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\varphi(a) + \varphi(b) = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1} = \varphi(a+b)$

(2) $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1} = \varphi(a.b)$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.

Desta forma identificamos $a \in \mathbb{Z}$ com $\frac{a}{1} \in Q'$ e podemos considerar $\mathbb{Z}$ como subconjunto de $\mathbb{Q}$.

□

3.3.4 Relação de ordem no conjunto dos números racionais

A ordem a ser definida em $\mathbb{Q}$ é uma extensão da ordem dada em $\mathbb{Z}$ e é a única possível.

Teorema 3.25. *A única ordem definida em $\mathbb{Q}$ é dada por $\frac{a}{b} > 0$ se, e somente se, $a.b > 0$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.*

Demonstração. Observemos que, se a relação $\frac{a}{b} > 0$ definida por $a.b > 0$ é uma ordem, então é uma extensão da ordem dada em $\mathbb{Z}$, pois se $a \in \mathbb{Z}$, $a = \frac{a}{1} > 0$ se, e somente se, $a.1 = a > 0$.

Vamos mostrar agora que, se $\mathbb{Q}$ tem uma ordem, essa deve ser a ordem dada acima. De fato, dado $b \in \mathbb{Z}^*$ temos que $b > 0$ ou $-b > 0$. Em qualquer caso vamos ter $b^2 = b.b = (-b)(-b) > 0$. Assim, se $\frac{a}{b} > 0$ temos $\frac{a}{b} \cdot b^2 = ab > 0$.

Agora vamos mostrar que a condição $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$ realmente define uma ordem, isto é, devemos mostrar que

(1) Se $\frac{a}{b} > 0$ e $\frac{c}{d} > 0$, então $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > 0$;

(2) Se $\frac{a}{b} > 0$ e $\frac{c}{d} > 0$, então $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > 0$;

(3) $\frac{a}{b} > 0$ ou $-\frac{a}{b} > 0$ ou $\frac{a}{b} = 0$.

No caso (1) temos $ab > 0$, $cd > 0$ e $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Note que $(ad+bc)(bd) = d^2(ab) + b^2(cd) > 0$, pois $(ab), (cd), b^2, c^2$ são todos positivos. Portanto $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} > 0$.

Para o caso (2) temos $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Note que $(ac).(bd) = (ab).(cd) > 0$. Então, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} > 0$.

Para o caso (3) sabemos que uma e somente uma das alternativas $ab > 0, -(ab) > 0$ ou $ab = 0$ é válida. Se $ab = 0$ então $a = 0$ pois $b \neq 0$ e, portanto, $\frac{a}{b} = 0$. Se $(ab) > 0$ então $\frac{a}{b} > 0$. Se $-(ab) = (-a)b > 0$, temos que $\frac{(-a)}{b} = -\frac{a}{b} > 0$.

$\square$

Note que se $\frac{a}{b} > 0$ e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos que $ab > 0$ e $ad = bc$. Como $(bc)^2 > 0$ e $(bc)^2 = (bc)(bc) = (ad)(bc) = (ab)(cd)$, então $(ab)(cd) > 0$ e, portanto, $cd > 0$, ou seja, $\frac{c}{d} > 0$.

Definição 3.21. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0$.

É importante lembrar que $\dfrac{a}{(-b)} = \dfrac{(-a)}{b}$. Neste caso podemos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 3.26. *Se $b > 0$ e $d > 0$ temos*

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc.$$

Demonstração. Por definição $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} > 0$. Mas $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$. Portanto,

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad - bc}{bd} > 0 \Leftrightarrow (ad - bc).(bd) > 0.$$

Como $(bd) > 0$ e pela ordem definida em $\mathbb{Z}$, temos

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow (ad - bc) > 0 \Leftrightarrow ad > bc\ .$$

□

Teorema 3.27. *(Lei Arquimediana): Sejam $x, y \in \mathbb{Q}_+$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Demonstração. Seja $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$. Como $x, y \in \mathbb{Q}_+$, podemos assumir que $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Devemos obter $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$nx > y, \text{ ou seja, } \frac{n}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{na}{b} > \frac{c}{d}$$

Isto acontece se, e somente se, $(na)d = n(ad) > bc$.

Se $ad > bc$, basta tomar $n = 1$. Se $ad = bc$, basta tomar $n = 2$ para obter o resultado desejado.

Se $ad < bc$, pelo algoritimo da divisão, temos que $bc = (ad)q + r$, com $0 \leq r < ad$. Como $ad > r$, podemos afirmar que

$$q(ad) + ad > q(ad) + r = bc \Rightarrow (q + 1)(ad) > bc$$

Então quando $ad < bc$, basta tomar $n = q + 1$ para a propriedade ser satisfeita.

□

Teorema 3.28. *(Densidade de $\mathbb{Q}$). Se r, s são dois números racionais, com $r < s$, então existe um racional t tal que $r < t < s$.*

Demonstração. Como $r < s$, temos $2r < r + s < 2s$. Segue então que $r < \dfrac{1}{2} \cdot (r + s) < s$. Portanto, o número $t = \dfrac{1}{2} \cdot (r + s)$ satisfaz a condição requerida. □

3.4 Conjunto dos números reais

Consideremos a equação $x^2 - 2 = 0$. Existe algum número racional $x = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $(\frac{a}{b})^2 - 2 = 0$? Sabemos que a resposta desta questão é não, e vamos provar. Se a, b tem um fator comum m, então $\frac{a}{b} = \frac{ma_1}{mb_1} = \frac{a_1}{b_1}$, onde $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$. Supondo que existe $x = \frac{a}{b}$ que seja solução da equação, então existe um número racional $\frac{a_1}{b_1}$, tal que $(\frac{a_1}{b_1})^2 - 2 = 0$ onde $mdc(a_1, b_1) = 1$. Assim, podemos assumir que $mdc(a, b) = 1$.

Já que $(\frac{a}{b})^2 - 2 = 0$, então $a^2 = 2b^2$ e assim a^2 é par, o que implica que a é par. Portanto, $a = 2m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$, e assim, $b^2 = 2m$, de onde segue que b^2 é par, o que implica que b também é par. Isso significa que 2 é divisor comum de a e b. Mas isso contraria nossa hipótese de $mdc(a, b) = 1$. Portanto, não existe racional $x = \frac{a}{b}$, tal que $(\frac{a}{b})^2 - 2 = 0$. Então a equação $x^2 - 2 = 0$ não possui solução em $\mathbb{Q}$.

Precisamos de um conjunto onde equações como essa tenham solução. Esse conjunto será o conjunto dos números reais. Para construir os inteiros utilizamos pares de números naturais, para construir os racionais utilizamos pares de números inteiros, mas nesse caso, como veremos, não podemos considerar pares de números racionais para a construção dos números reais. Portanto, será exigido um processo diferente, a construção será feita via sequências de Cauchy, que foi um método utilizado por Georg Cantor.

3.4.1 Números racionais e números decimais

A motivação para o tratamento dos números reais vem do fato que todos os números racionais podem ser expressos como certas classes de decimais. Assim, alguns números racionais podem ser representados como decimais terminantes, por exemplo

$$21 = 21,0 \qquad \frac{10}{8} = 1,25 \qquad \frac{3}{4} = 0,75$$

e outros como decimais periódicos, por exemplo

$$\frac{1}{3} = 0,33333... \qquad \frac{22}{7} = 3,14285714285714...$$

Note que na expressão $\frac{a}{b}$ como decimal (com $a, b \in \mathbb{N}$) ao dividir a por b, os sucessivos restos na divisão usual são sempre menores que b. Assim, as únicas possibilidades para o resto são $0, 1, ..., b-1$ e portanto, se a divisão não é exata, então os restos devem eventualmente se repetir.

Reciprocamente, se temos um decimal terminante ou um decimal periódico temos um número racional. É importante observar que um decimal terminante pode ser considerado como um decimal repetido. Por exemplo, $21,0 = 21,00000....$, basta acrescentar zeros á direita do número, portanto podemos considerar unicamente decimais repetidos. Caso tenhamos decimais não periódicos, teremos um número que não é racional, ou seja, um número irracional.

Mas não foi definido rigorosamente o que seria um número decimal. Vamos formalizar agora esta noção.

3.4.2 Sequências

Consideremos aqui sequências $a_1, a_2, ..., a_k, ...$ de números racionais e denotaremos por $(a_k) = (a_1, a_2, ..., a_k, ...)$ onde $k \in \mathbb{N}$.

Definição 3.22. $(a_k) = (b_k) \Leftrightarrow a_i = b_i, \ \forall i \in \mathbb{N}.$

Definição 3.23. $(a_k) + (b_k) = (a_k + b_k).$

Definição 3.24. $(a_k).(b_k) = (a_k.b_k).$

É importante esclarecer que os símbolos de soma e produto usados nestas definições tem contextos diferentes; trata-se de soma e produto de sequências de um lado e soma e produto de números racionais de outro.

Algumas sequências estão associadas naturalmente com números reais: por exemplo a sequência $(0.3, 0.33, 0.333, ...)$ está associada com $\frac{1}{3}$; já a sequência $(1.4, 1.41, 1.414, ...)$ com $\sqrt{2}$, etc.

Também temos sequências como $(a_k) = (4k - 1) = (3, 7, 11, 15, ...)$ e sequências cujos termos variam repetidamente, como $(b_k) = (1 + (-1)^k) = (0, 2, 0, 2, 0, 2...)$. Vamos formalizar essas ideias estabelecendo definições e teoremas relativos à aritmética de sequências.

Definição 3.25. *Se (a_k) é uma sequência, então $-(a_k)$ é a sequência definida por $-(a_k) = (-a_k)$.*

Definição 3.26. *(1) A sequência (a_k), com $a_k = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ é a sequência identidade. Denota-se por* (1).

(2) A sequência (a_k), com $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ é a sequência zero. Denota-se por (0).

Em geral, se $a_k = r$, $\forall k \in \mathbb{N}$, se escreve $(a_k) = (r)$.

Usando as definições anteriores e as propriedades dos números racionais, podemos provar os seguintes resultados.

Teorema 3.29. *Seja $S = \{(a_k) \mid a_k \in \mathbb{Q}\}$ o conjunto de todas as sequências de números racionais. Então*

(1) $(a_k) + (b_k) = (b_k) + (a_k)$

(2) $((a_k) + (b_k)) + (c_k) = (a_k) + ((b_k) + (c_k))$

(3) Existe a sequência zero $(0) \in S$ tal que $(a_k) + (0) = (a_k), \forall (a_k) \in S$

(4) Para cada $(a_k) \in S$, existe $-(a_k) \in S$ tal que $(a_k) + (-(a_k)) = (0)$

(5) $(a_k).(b_k) = (b_k).(a_k)$

(6) $((a_k).(b_k)).(c_k) = (a_k).((b_k).(c_k))$

(7) Existe a sequência identidade $(1) \in S$ tal que $(a_k).(1) = (a_k), \forall (a_k) \in S$

(8) $(a_k).((b_k) + (c_k)) = (a_k).(b_k) + (a_k).(c_k)$

3.4.3 Sequências de Cauchy

Uma forma de garantir que os termos de uma sequência não "flutuem" rapidamente ou que sejam limitados no seu crescimento, é impor a condição chamada de condição de Cauchy.

Definição 3.27. *Seja $\mathbb{Q}_+$ o conjunto dos números racionais positivos. Se para qualquer $p \in \mathbb{Q}_+$ existe um natural $n_0(p)$ tal que $|a_n - a_m| < p$, quando $n > n_0(p)$ e $m > n_0(p)$, então a sequência (a_k) é dita de Cauchy e a condição $|a_n - a_m| < p$ é chamada de condição de Cauchy.*

Observação 3.7. A notação $n_0(p)$ é para destacar que o número n_0 depende do número racional p escolhido.

Exemplo 3.9. Seja a sequência $(a_k) = (1 - \frac{1}{2^k})$. Mostremos que é uma sequência de Cauchy. Para isso, ao considerar $|a_n - a_m|$, podemos tomar $n \geq m$, pois estamos usando valores absolutos. Assim $n \geq m$ implica que $\frac{1}{2^m} \geq \frac{1}{2^n}$ e, temos:

$$|a_n - a_m| = |(1 - \frac{1}{2^n}) - (1 - \frac{1}{2^m})| = |\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}| < \frac{1}{2^m}$$

Assim, para ter $|a_n - a_m| < p$ precisamos unicamente tomar m tal que $\frac{1}{2^m} \leq p$ ou equivalentemente, escolher m tal que $2^m \geq \frac{1}{p}$. Claramente, tal escolha é sempre possível (pela lei Arquimediana em $\mathbb{Q}$) e, portanto, a sequência é de Cauchy.

Observação 3.8. Para melhor visualizar a sequência $(a_k) = (1 - \frac{1}{2^k})$ vamos exibir alguns de seus termos (ver tabela 3.1). Alguns termos estão aproximados.

Tabela 3.1: Exemplo de sequência de Cauchy

k	$1 - \frac{1}{2^k}$
1	0,5
2	0,75
3	0,875
5	0,96875
10	0,999023438
15	0,999969482
16	0,999984741
24	0,99999994
25	0,99999997

Podemos perceber que conforme k vai aumentando, a diferença entre um termo e seu anterior fica cada vez menor e se aproxima cada vez mais de 0.

Exemplo 3.10. A sequência $(a_k) = (2^k - 1) = (1, 3, 7, 15, 31...)$ não é de Cauchy. Assim é que, se tomarmos $n \geq m$ de forma que $n = m + t$ com $m, n, t \in \mathbb{N}$, e escolhermos $p = 1$ teremos que

$$|a_n - a_m| = |2^n - 1 - (2^m - 1)| = |2^n - 2^m| = |2^{m+t} - 2^m| = |2^m(2^t - 1)| = |2^m|.|(2^t - 1)| > 1$$

para quaisquer m e n.

Teorema 3.30. *Se (a_k) é uma sequência de Cauchy, então existe $B \in \mathbb{Q}_+$ tal que $|a_k| < B$, para todo $k \in \mathbb{N}$ (O número B é chamado de cota superior para a sequência).*

O teorema acima garante que toda sequência de Cauchy é limitada, e sua demonstração se encontra em [3].

Teorema 3.31. *Sejam $(a_k), (b_k)$ sequências de Cauchy. Então,*

(1) $(a_k) + (b_k)$ *é sequência de Cauchy*

(2) $(a_k).(b_k)$ *é sequência de Cauchy.*

Como $(a_k) = (0)$ e $(b_k) = (1)$ são obviamente sequências de Cauchy, temos um resultado análogo ao teorema 3.29.

Teorema 3.32. *Seja $S = \{(a_k)\}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy. Então:*

(1) $(a_k) + (b_k) = (b_k) + (a_k)$

(2) $((a_k) + (b_k)) + (c_k) = (a_k) + ((b_k) + (c_k))$

(3) Existe a sequência zero $(0) \in S$ *tal que* $(a_k) + (0) = (a_k), \forall (a_k) \in S$

(4) Para cada $(a_k) \in S$*, existe* $-(a_k) \in S$ *tal que* $(a_k) + (-(a_k)) = (0)$

(5) $(a_k).(b_k) = (b_k).(a_k)$

(6) $((a_k).(b_k)).(c_k) = (a_k).((b_k).(c_k))$

(7) Existe a sequência identidade $(1) \in S$ *tal que* $(a_k).(1) = (a_k), \forall (a_k) \in S$

(8) $(a_k).((b_k) + (c_k)) = (a_k).(b_k) + (a_k).(c_k)$

Voltemos à motivação dada no início. Estamos tentando associar sequências com números reais. Porém, existe mais de uma sequência associada à qualquer número real. Por exemplo, as sequências

$$(1 - \frac{1}{k}),\ (1 - \frac{1}{2^k}),\ (1 - \frac{1}{k^2}),$$

são naturalmente associadas ao número 1. Para tratar este problema usaremos o conceito de sequência nula.

Definição 3.28. *(a_k) é uma sequência nula se, para cada $p \in \mathbb{Q}_+$ existe $n(p) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n(p)$ implica $|a_n| < p$.*

Exemplo 3.11. A sequência $(\frac{1}{k})$ é nula. De fato, seja $p_0 \in \mathbb{Q}$ onde $p_0 = \frac{1}{q}$ com $q \in \mathbb{Z}_+$. Devemos mostrar que existe $n(p_0) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}, n > n(p_0)$ seja válido que $\frac{1}{n} < p_0 = \frac{1}{q}$. Mas $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{q}$ implica que $n > q$. Logo, tomando $n(p_0) = q$, temos que para todo $n > n(p_0) = q$ vale $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{q} = p_0$, ou seja, $|a_n| < p_0$. Portanto, a sequência $(\frac{1}{k})$ é nula.

As sequências $\frac{1}{2^k}$ e $\frac{1}{k^2}$ também são exemplos de sequências nulas.

Teorema 3.33. *Toda sequência nula é sequência de Cauchy.*

Teorema 3.34. *Sejam $(a_k), (b_k)$ sequências nulas e (c_k) sequência de Cauchy. Então*

(1) $(a_k) + (b_k)$ é uma sequência nula

(2) $(a_k) - (b_k)$ é uma sequência nula

(3) $(a_k).(c_k)$ é uma sequência nula.

Seja $S = \{(a_k)\}$ o conjunto de todas as sequências Cauchy. Estamos preparados agora para definir uma relação no conjunto S que formalize a ideia de que duas sequências de Cauchy, diferentes, podem definir o mesmo número real.

Definição 3.29. *Sejam $(a_k), (b_k)$ sequências em S. Dizemos que $(a_k), (b_k)$ são equivalentes se, e somente se , $(a_k) - (b_k)$ é uma sequência nula. Denotaremos por $(a_k) \sim (b_k)$.*

Exemplo 3.12. As sequências $(1 - \frac{1}{k})$ e $(1 - \frac{1}{2^k})$ são equivalentes pois $((1 - \frac{1}{k}) - (1 - \frac{1}{2^k})) = (\frac{1}{2^k} - \frac{1}{k})$ é uma sequência nula, dado que ambas são nulas (teorema 3.34).

Teorema 3.35. *Seja $S = \{(a_k)\}$ o conjunto de todas as sequências Cauchy. Então $\sim$ é um relação de equivalência sobre S.*

Demonstração. (1) $(a_k) \sim (a_k)$ pois $(a_k) - (a_k) = (0)$ que é uma sequência nula.

(2) Se $(a_k) \sim (b_k)$ então $(a_k - b_k)$ é uma sequência nula. Logo, $(b_k - a_k) = (-(a_k - b_k))$ é também uma sequência nula. Assim, $(b_k) \sim (a_k)$.

(3) Se $(a_k) \sim (b_k)$ e $(b_k) \sim (c_k)$, temos que $(a_k - b_k)$ e $(b_k - c_k)$ são sequências nulas. Logo, pelo teorema 3.34 temos que, $(a_k - b_k) + (b_k - c_k) = (a_k - c_k)$ é uma sequência nula e assim, $(a_k) \sim (c_k)$.

□

3.4.4 Os números reais

Como $\sim$ é uma relação de equivalência definida sobre o conjunto de todas as sequências de Cauchy, então $\sim$ particiona este conjunto em classes de sequências equivalentes.

Definição 3.30. *O conjunto $\mathbb{R}$ de todas as classes de equivalência $\{(a_k)\}$ de sequências de Cauchy é o conjunto dos números reais.*

Exemplo 3.13. As classes $\{(a_k) \mid (a_k) \sim (1)\}$ e $\{(a_k) \mid (a_k) \sim ((1 + \frac{1}{k})^k)\}$ definem números reais.

Agora vamos definir as operações de adição e multiplicação para estas classes.

Definição 3.31. *Sejam as classes de equivalência $A = \{(x_k) \mid (x_k) \sim (a_k)\}$ e $B = \{(y_k) \mid (y_k) \sim (b_k)\}$. Então:*

(1) $A + B = \{(z_k) \mid (z_k) \sim ((a_k) + (b_k))\}$

(2) $A.B = \{(z_k) \mid (z_k) \sim ((a_k).(b_k))\}$.

As operações de adição e multiplicação independem da escolha dos representantes em cada classe de equivalência.

Como já temos definido as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ em termos dos representantes das classes de equivalência, obtemos um resultado análogo para as sequências de Cauchy. Para isso, consideremos em $\mathbb{R}$ as classes $\overline{0} = \{(x_k) \mid (x_k) \sim (0)\}$ (elemento neutro aditivo), $\overline{1} = \{(x_k) \mid (x_k) \sim (1)\}$ (elemento neutro multiplicativo ou identidade); além disso, para cada classe $X = \{(x_k) \mid (x_k) \sim (a_k)\}$ existe a classe $-X = \{(x_k) \mid (x_k) \sim (-a_k)\}$. Assim, temos:

Teorema 3.36. *Seja $\mathbb{R}$ o conjunto de todas as classes de equivalência de sequências de Cauchy. Então, valem as seguintes propriedades*

(1) $\{(a_k)\} + \{(b_k)\} = \{(b_k)\} + \{(a_k)\}$

(2) $(\{(a_k)\} + \{(b_k)\}) + \{(c_k)\} = \{(a_k)\} + (\{(b_k)\} + \{(c_k)\})$

(3) Existe a classe $\overline{0} \in \mathbb{R}$ tal que $\{(a_k)\} + \overline{0} = \{(a_k)\}$ para todo $\{(a_k)\} \in \mathbb{R}$.

(4) Para cada $\{(a_k)\} \in \mathbb{R}$, existe $-\{(a_k)\}$ tal que $\{(a_k)\} + (-\{(a_k)\}) = \overline{0}$

(5) $\{(a_k)\}.\{(b_k)\} = \{(b_k)\}.\{(a_k)\}$

(6) $(\{(a_k)\}.\{(b_k)\}).\{(c_k)\} = \{(a_k)\}.(\{(b_k)\}.\{(c_k)\})$

(7) Existe a classe $\overline{1} \in \mathbb{R}$ tal que $\{(a_k)\}.\overline{1} = \{(a_k)\}$ para todo $\{(a_k)\} \in \mathbb{R}$.

(8) $\{(a_k)\}.(\{(b_k)\} + \{(c_k)\}) = \{(a_k)\}.\{(b_k)\} + \{(a_k)\}.\{(c_k)\}$.

3.4.5 Os números racionais como subconjunto dos números reais

Entre os elementos de $\mathbb{R}$ estão as classes $\{(x_k) \mid (x_k) \sim (r)\}$, onde $r \in \mathbb{Q}$. Por comodidade, vamos escrever $\{(x_k) \mid (x_k) \sim (r)\} = \{(r)\}$.

Teorema 3.37. *O conjunto dos números $\mathbb{Q}$ é isomorfo ao conjunto de elementos da forma $\{(r)\}$ de $\mathbb{R}$ pela correspondência φ dada por $\varphi(r) = \{(r)\}$.*

Demonstração. Isto segue do fato que se $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ então $\{(r_1)\} + \{(r_2)\} = \{(r_1) + (r_2)\} = \{(r_1 + r_2)\}$ e $\{(r_1)\}.\{(r_2)\} = \{(r_1).(r_2)\} = \{(r_1.r_2)\}$. □

3.4.6 Ordem no conjunto dos números reais

A nossa intuição nos diz que uma sequência é positiva se "quase todos os termos" são positivos. Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^k}) = (-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \frac{3}{32}, ...)$ está associada ao número racional $\frac{1}{8}$, e podemos considerar essa sequência positiva. Vamos formalizar essa ideia.

Definição 3.32. *Uma sequência de Cauchy (a_k) é dita positiva se existir $r \in \mathbb{Q}_+$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ implica $a_m \geq r$. Denota-se uma sequência positiva por $(a_k) > (0)$.*

No exemplo anterior, a sequência é positiva, basta tomar $r = \frac{1}{16}$ e $n = 4$.

Por comodidade, o par (n, r) da definição acima será chamado de *par teste* para a sequência (a_k). Podemos dizer então que uma sequência é positiva se possui um par teste.

Teorema 3.38. *Se (a_k) e (b_k) são sequências de Cauchy positivas, então $(a_k) + (b_k)$ e $(a_k).(b_k)$ também são sequências positivas.*

Demonstração. Sejam (n_1, r_1) um parte teste para (a_k) e (n_2, r_2) um parte teste para (b_k). Então, para todo $m \geq max\{n_1, n_2\} = n$ temos que $a_m + b_m \geq r_1 + r_2 = r$. Portanto, (n, r) é um par teste para a sequência $(a_k) + (b_k)$, e assim $(a_k) + (b_k)$ é uma sequência de Cauchy positiva.

Similarmente, verifica-se que $(n, r_1 r_2)$ é um par teste para a sequência $(a_k).(b_k)$ e, portanto, $(a_k).(b_k)$ é uma sequência de Cauchy positiva. □

Definição 3.33. *Uma sequência de Cauchy (a_k) é dita negativa se $-(a_k) = (-a_k)$ é positiva.*

Teorema 3.39. *(Lei da tricotomia para as sequências de Cauchy) Se (a_k) é uma sequência de Cauchy, então uma e somente uma das alternativas seguintes é válida:*

$$(1)\ (a_k) > (0), \qquad (2)\ (a_k) \sim (0), \qquad (3)\ (a_k) < (0).$$

Teorema 3.40. *(1) Se $(a_k) > (0)$ e $(b_k) \sim (0)$, então $(a_k) + (b_k) > (0)$*

(2) Se $(a_k) < (0)$ e $(b_k) \sim (0)$, então $(a_k) + (b_k) < (0)$

Corolário 3.1. *(1) Se $(a_k) > (0)$ e $(b_k) \sim (a_k)$, então $(b_k) > 0$*

(2) Se $(a_k) < 0$ e $(b_k) \sim (a_k)$, então $(b_k) < 0$

Definição 3.34. *Seja $A = \{(x_k) \mid (x_k) \sim (a_k)\} = \{(a_k)\} \in \mathbb{R}$. Então, A é positivo, e se denota por $A > \overline{0}$, se $(a_k) > (0)$.*

Suponha $\{(a_k)\} = \{(b_k)\}$. Então, $(a_k) \sim (b_k)$ e, assim, $a_k > 0$ se, e somente se, $b_k > 0$. Isto significa que a positividade de qualquer número real independe da sequência usada como representante na classe de equivalência do número real.

Teorema 3.41. *Se $A, B \in \mathbb{R}$, com $A > \overline{0}$ e $B > \overline{0}$, então $A + B > \overline{0}$ e $A.B > \overline{0}$*

Demonstração. Sejam $A = \{(a_k)\}$ e $B = \{(a_k)\}$, onde $(a_k) > 0$ e $(b_k) > 0$. Como $(a_k) + (b_k) > 0$ e $(a_k).(b_k) > 0$, então $A + B > \overline{0}$ e $A.B > \overline{0}$. □

Teorema 3.42. *Se $A \in \mathbb{R}$ então uma e somente uma das alternativas é válida:*

$$(1)\ A > \overline{0}, \qquad (2)\ A < \overline{0}, \qquad (3)\ A = \overline{0}.$$

Definição 3.35. *Para $A, B \in \mathbb{R}$ temos:*

(1) $A - B = A + (-B)$

(2) $A > B$ se, e somente se, $A - B > \overline{0}$

(3) $A < B$ se, e somente se, $B - A > \overline{0}$

Teorema 3.43. *Se $A, B \in \mathbb{R}$ então uma e somente uma das alternativas é válida:*

$$(1)\ A > B, \qquad (2)\ A < B, \qquad (3)\ A = B.$$

Teorema 3.44. *Sejam $A, B, C,$ e $D \in \mathbb{R}$, temos que:*

(1) Se $A > B$, então $A + C > B + C$.

(2) Se $A > B$ e $C > D$, então $A + C > B + D$.

(3) Se $A > B$ e $C > \overline{0}$ então, $AC > BC$.

3.4.7 O corpo dos números reais

Na linguagem da álgebra abstrata, dizemos que os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, munidos das operações adição e subtração, possuem estrutura algébrica de anel comutativo com elemento identidade. Estes conjuntos satisfazem as propriedades associativas, comutativas, existência de elementos neutros aditivos e multiplicativos e distributivas.

Definição 3.36. *Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(x, y) \mapsto x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \mapsto xy$ (ou $x.y$), é chamado de anel comutativo com elemento identidade se, para $a, b, c \in A$, temos:*

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(2) $a + b = b + a$

(3) existe um elmento $0 \in A$ *tal que* $a + 0 = a$ *para qualquer* $a \in A$

(4) qualquer $a \in A$ *existe um elemento* $-a$ *tal que* $a + (-a) = 0$

(5) $a(bc) = (ab)c$

(6) $a(b + c) = ab + ac$ *e* $(a + b)c = ac + bc$

(7) $ab = ba$

(8) existe um elmento $1 \in A$*,* $1 \neq 0$*, tal que* $a.1 = 1.a = a$ *para qualquer* $a \in A$*.*

No caso existe uma diferença entre os números inteiros quando comparados com os racionais ou os reais. Todos os números reais, diferentes de 0, possuem inverso multiplicativo, ou seja, dado $a \in \mathbb{R}^*$, existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}^*$ tal que $a.a^{-1} = 1$. No conjunto dos números inteiros apenas os elementos 1 e -1 possuem inverso multiplicativo. Podemos adotar a notação $U(A)$ para indicar os elementos de um anel que têm inverso multiplicativo.

Definição 3.37. *Seja* K *um anel comutativo com elemento identidade. Se* $U(K) = K^*$*, então* K *recebe o nome de corpo.*

Portanto, o conjuto dos números racionais e dos números reais possuem estrutura de corpo. Além disso, são corpos ordenados, pela relação de ordem estabelecida em cada caso.

Os números racionais, para efeito de análise matemática, possuem uma insuficiência: alguns conjuntos limitados de números racionais não possuem supremo. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é completo. Já no conjunto dos números reais, todo subconjunto X não vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$, possui supremo em $\mathbb{R}$. Dizemos, portanto, que o conjunto dos números reais é um *corpo ordenado completo.*

O mesmo processo de formar classes de equivalência de sequências de Cauchy pode ser usado com qualquer corpo ordenado no lugar de $\mathbb{Q}$. O corpo obtido dessa forma é chamado de *completação* do corpo dado. Assim $\mathbb{R}$ é a completação de $\mathbb{Q}$.

Vamos supor que repetimos o processo, definindo sequências de Cauchy (a_k), com $(a_k) \in \mathbb{R}$. Podemos formar classe de equivalência com essas sequências e obter um corpo $\overline{\mathbb{R}}$, que é a completação de $\mathbb{R}$. No entanto, prova-se que $\overline{\mathbb{R}}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$. Qualquer corpo cuja completação é isomorfo a ele mesmo é completo.

Como veremos, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. A construção de $\mathbb{Z}$ a partir de pares ordenados de $\mathbb{N}$ é possível pois existe uma função bijetora entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Também é possível construir $\mathbb{Q}$ a partir de pares ordenados de $\mathbb{Z}$ pois existe uma função bijetora entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. No capítulo seguinte vamos apresentar essas bijeções, ou seja, vamos mostrar que $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{Q})$.

Porém, não é possível a contrução de $\mathbb{R}$ como classes de equivalência de pares ordenados de números racionais, pois, como veremos, não existe uma bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Decorrerá que $card(\mathbb{R}) > card(\mathbb{Q})$.

CAPÍTULO 4

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Após termos apresentado os conceitos principais de conjuntos e funções, e ampliarmos os conjuntos dos números naturais para os inteiros, racionais e reais, passaremos agora a definir formalmente as noções de conjunto finito e de conjunto infinito, bem como as noções de conjuntos enumeráveis e de conjuntos não-enumeráveis. Também serão estabelecidos critérios para comparar conjuntos finitos e conjuntos infinitos.

Os axiomas de Peano definem os números naturais como números em uma determinada ordem assim, cada número ocupa um lugar específico dentro de uma sequência, sendo 1 o primeiro natural, 2 o número subsequente ao 1, 3 o consecutivo do 2, etc. Um exemplo de utilização prática das propriedades dos números naturais é a distribuição de senhas de atendimento.

Além da ordenação, temos associado aos números naturais, um outro conceito de muita utilidade e que tem uma rigorosa apresentação formal, que é o de "número de elementos de um conjunto", ou seja, seu número cardinal. A história do pastor de ovelhas que para não perder nenhuma delas guardava, em um saquinho, uma pedrinha para cada ovelha que tinha. Ao final do dia recolhia as ovelhas, aferindo se, para cada pedrinha do saquinho correspondia uma ovelha, se sim, ele não havia perdido nenhuma delas. Isso ilustra as origens dessa aplicação. Com o passar do tempo e a elaboração da estrutura organizacional da sociedade humana, o saquinho com as pedrinhas foi substituido pelo conjunto dos números naturais.

Em termos modernos, isto corresponde a estabelecer uma correspondência um a um, isto é, uma bijeção entre dois conjuntos. Assim, a cada ovelha ele passou a associar um número natural, se à última ovelha correspondesse o número n, ele teria então n ovelhas e ao final do dia repetia a "contagem". Contagem? Mas o que é contagem?

Para estabelecer o conceito de contagem, intimamente ligado ao conceito de finitude, vamos retomomar um tipo especial de subconjunto do conjunto dos números naturais, que foi apresentado na seção 2.4 (página 31) . Denotaremos por I_n, o subconjunto de $\mathbb{N}$, formado pelos números naturais desde 1 até n. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$I_n = \{p \in \mathbb{N} \mid 1 \leq p \leq n\}.$$

Este capítulo foi elaborado a partir das seguintes referências bibliográficas: [2] e [8].

4.1 Conjuntos finitos

Definição 4.1. *Dado um conjunto X, se for possível encontrar um número natural n, para o qual exista uma função bijetiva $f : I_n \longrightarrow X$, diremos que X é finito, e tem n elementos. Diremos então que a cardinalidade de X, denotada por $card(X)$, é n, e escrevemos $card(X) = n$. Por convenção, o símbolo 0 indicará a cardinalidade do conjunto vazio, ou seja, $card(\emptyset) = 0$ e também que $\emptyset$ é finito e sem elementos.*

A função f, que não é única, é chamada de uma contagem dos elementos de X. Pondo $f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ f(3) = x_3,\ ...,\ f(n) = x_n$, temos $X = \{x_1,\ x_2\ x_3\ ...\ x_n\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito.

Existe um processo formal para mostrar que a cardinalidade de um conjunto é única. Isto é, o número de elementos de um conjunto é sempre o mesmo, independente da contagem.

Uma vez estabelecido esses conceitos, uma pergunta interessante é: a parte é sempre menor que o todo?

Exemplo 4.1. Se dissermos que um casal tem seis filhos, alguns loiros, outros morenos. Poderíamos pensar na possibilidade de que os seis filhos sejam morenos?

Podemos reformular a pergunta acima, no contexto da matemática, da seguinte maneira: $F = L \cup M, M \neq \emptyset$ e $L \neq \emptyset$. Pode existir bijeção $b : F \longrightarrow M$ ou $b : F \longrightarrow L$?

Equivalentemente: se $Y \subset X$, $\emptyset \neq Y \neq X$ é possível encontrar uma bijeção $b : X \longrightarrow Y$?

Se $card(X) = n$, $card(Y) = m$, $m < n$, é possível encontrar uma bijeção $b : X \longrightarrow Y$? Suponha que sim. Então teríamos bijeções b_1, f_1 e f_2 tais que:

$$I_n \xrightarrow{f_2} X \xrightarrow{b_1} Y \xleftarrow{f_1} I_m$$

Mas isso implicaria que $b = {f_1}^{-1} \circ b_1 \circ f_2 : I_n \longrightarrow I_m$ seria uma bijeção? Mas $m < n$?

Para que o número de elementos de um conjunto não seja uma noção ambígua, devemos provar que, se existem duas bijeções $\varphi : I_n \longrightarrow X$ e $\psi : I_m \longrightarrow X$, então $m = n$. Considerando a função composta $f = \psi^{-1} \circ \varphi : I_n \longrightarrow I_m$, basta então provar que se existe uma bijeção $f : I_n \longrightarrow I_m$, então tem-se $m = n$ Para fixar ideias, suponhamos m $\leq$ n. Daí, $I_m \subset I_n$. A unicidade do número de elementos de um conjunto finito será, portanto, uma consequência da proposição mais geral seguinte:

Teorema 4.1. *Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \longrightarrow A$, então $A = I_n$.*

Demonstração. Usaremos indução em n. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponhamos que ele seja válido para um certo n e consideremos uma bijeção $f : I_{n+1} \longrightarrow A$. Seja $a = f(n+1)$. A restrição de f a I_n fornece uma bijeção $f' : I_n \longrightarrow A - \{a\}$. Se tivermos $A - \{a\} \subset I_n$, então, pela hipótese de indução, concluiremos que $A - \{a\} = I_n$, donde $a = n + 1$ e $A = I_n$. Se, porém, não for $A - \{a\} \subset I_n$, então deve-se ter $n+1 \in A - \{a\}$. Neste caso, existe $p \in I_{n+1}$ tal que $f(p) = n+1$. Então definiremos uma nova bijeção $g : I_{n+1} \longrightarrow A$ pondo $g(x) = f(x)$ se $x \neq p$ e $x \neq n+1$, enquanto $g(p) = a$, $g(n+1) = n+1$. Agora, a restrição de g a I_n nos dará uma bijeção $g' : I_n \longrightarrow A - \{n+1\}$. Evidentemente, $A - \{n+1\} \subset I_n$. Logo, pela hipótese de indução, $A - \{n+1\} = I_n$, donde $A = I_{n+1}$. Isto conclui a demonstração. □

Corolário 4.1. *Se existir uma bijeção $f : I_m \longrightarrow I_n$ então $m = n$. Consequentemente, se existem duas bijeções $\psi : I_n \longrightarrow X$ e $\varphi : I_m \longrightarrow X$, deve-se ter $m = n$.*

Demonstração. De fato, podemos supor, para fixar as ideias, que $m \leq n$. Então, $I_m \subset I_n$. Tomando-se $A = I_m$ no teorema anterior, obtemos $I_m = I_n$ e, portanto, $m = n$. □

Podemos nos questionar de quantas formas diferentes é possível fazer uma contagem dos elementos de um conjunto finito X, ou seja, quantas bijeções $f : I_n \longrightarrow X$ existem. E quantas bijeções existem entre dois conjuntos de mesma cardinalidade?

Exemplo 4.2. Se $card(X) = card(Y) = n$, sendo $n \in \mathbb{N}$, então existem $n!$ bijeções de X em Y.

Demonstração. Se $card(X) = card(Y) = n$, vamos demonstrar a proposição,

$$P(n)\text{: existem } n! \text{ bijeções de } X \text{ em } Y,$$

através dos axiomas de Peano.

Seja $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ \textit{é verdadeira}}\}$, vamos mostrar que $A = \mathbb{N}$. Note que $1 \in A$ pois se $X = \{x_1\}$ e $Y = \{y_1\}$, existe uma única bijeção de X em Y tal que $f(x_1) = y_1$. Vamos supor agora que $n \in A$ e vamos mostrar que isso implica que $n + 1 \in A$. Se $n \in A$, então existem $n!$ bijeções de X em Y. Sejam X e Y tais que $card(X) = card(Y) = n + 1$ e $X = \{x_1, x_2, x_3, ...x_n, x_{n+1}\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, ...y_n, y_{n+1}\}$. Podemos estabelecer bijeções da seguinte forma:

- Podemos fazer a correnpondência $f(x_1) = y_1$ e temos $n!$ formas diferentes de fazer a correnpondência dos n elementos do conjunto $X - \{x_1\}$ com os n elementos do conjunto $Y - \{y_1\}$.

- Podemos fazer a correnpondência $f(x_1) = y_2$ e temos $n!$ formas diferentes de fazer a correnpondência dos n elementos do conjunto $X - \{x_1\}$ com os n elementos do conjunto $Y - \{y_2\}$.

  $\vdots$

- Podemos fazer a correnpondência $f(x_1) = y_n$ e temos $n!$ formas diferentes de fazer a correnpondência dos n elementos do conjunto $X - \{x_1\}$ com os n elementos do conjunto $Y - \{y_n\}$.

- Podemos fazer a correnpondência $f(x_1) = y_{n+1}$ e temos $n!$ formas diferentes de fazer a correnpondência dos n elementos do conjunto $X - \{x_1\}$ com os n elementos do conjunto $Y - \{y_{n+1}\}$.

Note que cada bijeção é diferente da outra, pois, em cada item, x_1 se corresponde com um elemento diferente. Como existem $n+1$ formas de escolher com quem x_1 vai se corresponder, e para cada uma dessas formas existem $n!$ bijeções com os outros elementos, o total de bijeções entre X e Y seria $(n+1).n! = (n+1)!$. Portanto, $n+1 \in A$ e, pelo princípio de indução, $A = \mathbb{N}$, o que demonstra o resultado do nosso exemplo.

$\square$

Consequentemente se X é um conjunto finito tal que $card(X) = n$, existem $n!$ bijeções $f : I_n \longrightarrow X$ e podemos afirmar que existem $n!$ formas de fazer a contagem dos elementos de X.

Corolário 4.2. *Não pode existir uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ de um conjunto finito X sobre uma parte própria $Y \subset X$.*

Demonstração. De fato, sendo X finito, existe uma bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$. Seja $A = \varphi^{-1}(Y)$. Então, A é uma parte própria de I_n e a restrição φ a A fornece uma biejeção $\varphi' : A \longrightarrow Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ I_n \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dotted, "g"'] & A \arrow[u, "\varphi'"'] \end{tikzcd}$$

A composta $g = (\varphi')^{-1} \circ f \circ \varphi \longrightarrow A$ seria uma bijeção de I_n sobre sua parte própria A, o que contraria o teorema anterior. Logo não existe a bijeção f. $\square$

Teorema 4.2. *Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $Y \subset X$ é finito. O número de elementos de Y não excede o de X e só é igual quando $Y = X$.*

Corolário 4.3. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um função injetiva. Se Y for finito, então X também será. Além disso, o número de elementos de X não excede o de Y.*

Corolário 4.4. *Seja $g : X \longrightarrow Y$ um função sobrejetiva. Se X for finito então, Y também será e o seu o número de elementos não excede o de X.*

As demonstrações do teorema e dos corolários são apresentadas em [2]. Vamos imaginar agora, a seguinte situação.

Exemplo 4.3. Pensemos nos números pares, que denotaremos por $2\mathbb{N}$. Podemos descrever esse conjunto da seguinte maneira: $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ou seja, $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, ...\}$.

Claramente temos que $2\mathbb{N}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$.

Vamos analisar a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$ tal que $f(n) = 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

Claramente temos que f é bijetiva, isto é, temos uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e seu subconjunto próprio $2\mathbb{N}$. Mas a parte não é sempre menor que o todo? O que mudou?

4.2 Conjuntos Infinitos

Definição 4.2. *Um conjunto é dito infinito se não é finito. Isto é, se X é um conjunto, não vazio, para o qual, independente da escolha de $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$, então X é infinito.*

Exemplo 4.4. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. De fato, dada qualquer função $\varphi : I_n \longrightarrow \mathbb{N}$, seja $p = \varphi(1) + ... + \varphi(n)$. Então, $p > \varphi(x)$, para todo $x \in I_n$, donde $p \notin \varphi(I_n)$. Logo, nenhuma função $\varphi : I_n \longrightarrow \mathbb{N}$ é sobrejetiva.

Uma outra maneira de verificar que $\mathbb{N}$ é infinito é através do exemplo 4.2. Considerando a bijeção $\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$, onde $f(n) = 2n$, como $2\mathbb{N}$ é parte próia de $\mathbb{N}$, segue-se do Teorema 4.1 e do Corolário 4.2 que $\mathbb{N}$ não é finito. Os fatos que acabamos de estabelecer sobre conjuntos finitos fornecem por exclusão, resultados sobre conjuntos infinitos.

Outros exemplos de conjuntos infinitos são $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, pois ambos contém $\mathbb{N}$. Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se *limitado* quando existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq n$, seja qual for $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.3. *Seja $X \subset \mathbb{N}$ não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) X é finito;

(b) X é limitado;

(c) X possui maior elemento.

Uma propriedade que caracteriza um conjunto infinito é a de possuir um subconjunto próprio que tem tantos elementos quanto ele mesmo. A partir do que dito acima, fica fácil aceitar que o conjunto dos números naturais é infinito. A chave para demonstrar a propriedade acima está na resposta à pergunta: se eu retiro um elemento de um conjunto infinito o conjunto que sobra continua sendo infinito? Se concordarmos que a resposta à pergunta anterior é sim, teremos como consequência que: Se X é infinito, então é possível definir uma função injetora, $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Isto é, se X é infinito, então ele tem, no mínimo tantos elementos quanto $\mathbb{N}$. Assim, a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é a menor cardinalidade para um conjunto infinito. Ou, informalmente, $\mathbb{N}$ é o "menor" infinito.

Mas, que história é essa de "menor" infinito?

4.3 Conjuntos enumeráveis

Definição 4.3. *Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. No segundo caso, X diz-se que infinito enumerável. Considerando $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $f(3) = x_3$, ..., $f(n) = x_n, ...$, temos $X = \{x_1,\ x_2\ x_3\ ...\ x_n, ...\}$. Cada bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ chama-se uma enumeração (dos elementos) de X.*

Teorema 4.4. *Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração. Basta definifir uma função injetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Para isso, começamos escolhendo, em cada subconjunto não-vazio $A \subset X$, um elemento $x_A \in A$. Em seguida, definimos f por indução. Pomos $f(1) = x_X$ e, supondo já definidos $f(1), ..., f(n)$, escrevemos $A_n = X - \{f(1), ..., f(n)\}$. Como X não é finito, A_n, não é vazio. Poremos então $f(n+1) = x_{A_n}$. Isto completa a definição indutiva da função $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Afirmamos que f é injetiva. Com efeito, dados $m \neq n$ em $\mathbb{N}$ tem-se, digamos $m < n$. Então, $f(m) \in \{f(1), ..., f(n-1)\}$, enquanto que $f(n) \in \complement\{f(1), ..., f(n-1)\}$. Logo, $f(m) \neq f(n)$. A imagem $f(\mathbb{N})$ é, portanto, um subconjunto infinito enumerável de X. □

Corolário 4.5. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$, de X sobre uma parte própria $Y \subset X$.*

Demonstração. Com efeito, se uma tal bijeção existir, X será infinito, pelo corolário 4.2. Reciprocamente, se X é infinito, contém um subconjunto infinito enumerável $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Seja $Y = (X - A) \cup \{a_2, a_4, ..., a_{2n}, ...\}$. Evidenetemente, Y é parte própria de X. Definimos uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ pondo $f(x) = x$ se, $X \in (X - A)$, e $f(a_n) = a_{2n}$. □

Teorema 4.5. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Se X for finito, é enumerável. Se for infinito, definiremos indutivamente uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Poremos $f(1) =$ (menor elemento de X). Suponhamos $f(1), ..., f(n)$ definidos de modo a satisfazerem duas condições: (a) $f(1) < f(2) < ...f(n)$; (b) pondo $B_n = X - \{f(1), ..., f(n)\}$, tem-se $f(n) < x$ para todo $x \in B_n$. Em seguida, notando que $B_n \neq \emptyset$ (pois X é infinito) definimos $f(n+1) =$ (menor elemento de B_n. Isto completa a definição de $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$, de modo a serem mantidas as condições (a) e (b) para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se de (a) que f é injetiva. Por outro lado, (b) implica que f é sobrejetiva, pois se existisse algum $x \in X - f(\mathbb{N})$, teríamos $x \in B_n$ para todo n e, portanto, $x > f(n)$, qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$. Então o conjunto infinito $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ seria limitado, uma contradição, em vista do teorema 4.3 (página 74).

□

Corolário 4.6. *Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Ou: Se* $f : X \longrightarrow Y$ *é injetiva e* Y *é enumerável, então* X *é enumerável.*

Uma função $f : X \longrightarrow Y$, onde $X, Y \subset \mathbb{N}$ chama-se crescente quando, dados $m < n$, tem-se $f(m) < f(n)$.

Corolário 4.7. *Dado um subconjunto infinito* $X \subset \mathbb{N}$, *existe uma bijeção crescente* $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Teorema 4.6. *Seja* X *um conjunto enumerável. Se* $f : X \longrightarrow Y$ *é sobrejetiva, então,* Y *é enumerável.*

Demonstração. Existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = id_y$. Logo, f é uma inversa à esquerda de g, e, portanto, g é injetiva. Segue-se que Y é enumerável. Corolário 4.6 do teorema 4.5. □

Teorema 4.7. *Sejam* X *e* Y *conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano* $X \times Y$ *é enumerável.*

Demonstração. Existem funções injetivas $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{N}$. Logo, $g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $g(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ é injetiva. Assim sendo, pelo corolário 4.6 do teorema 4.5 (página 75), basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isso definimos a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, onde $f(m, n) = 2^m.3^n$. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, f é injetiva, donde fornece uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre o conjunto enumerável $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. □

Corolário 4.8. *Sejam* $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ *conjuntos enumeráveis. A reunião* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *é enumerável. Em outras palavras: uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Observação 4.1. Em particular, uma reunião finita $X_1, X_2, ..., X_n$ de conjuntos enumeráveis é enumerável: basta aplicar o corolário acima, com $X_{n+1} = X_{n+2} = ... = \emptyset$.

As demonstrações dos teoremas e corolários que não foram apresentadas se encontram em [2].

4.4 Conjuntos não enumeráveis

Um conjunto infinito X é não enumerável quando não existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. O principal exemplo de conjunto não enumerável é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Isto será demonstrado mais adiante. Vamos mostrar também que, dado qualquer conjunto X, existe sempre um conjunto cuja cardinalidade é maior do que o de X.

Podemos ampliar o conceito de cardinalidade para conjuntos infinitos.

Definição 4.4. *Dois conjuntos* X *e* Y *tem o mesmo número cardinal quando existir uma bijeção* $f : X \longrightarrow Y$. *Escrevemos* $card(X) = card(Y)$, *e dizemos que* X *e* Y *tem a mesma cardinalidade ou são equipotentes.*

Se X for infinito enumerável, tem-se $card(X) = card(Y)$ se, e somente se, Y for infinito enumerável.

Definição 4.5. *Dados os conjuntos* X, Y, *diremos que a cardinalidade de* X *é menor do que a cardinalidade de* Y, *o que denotamos por* $card(X) < card(Y)$, *quando existir uma função injetiva* $f : X \longrightarrow Y$ *mas não existir uma função sobrejetiva* $f : X \longrightarrow Y$.

Definição 4.6. *Dados os conjuntos* X, Y, *diremos que a cardinalidade de* X *é menor do que ou igual a cardinalidade de* Y, *o que denotamos* $card(X) \leq card(Y)$, *quando existir uma função injetiva* $f : X \longrightarrow Y$.

O teorema 4.4 mostra que, para todo conjunto infinito X, tem-se $card(\mathbb{N}) \leq card(X)$, pois sempre existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Assim, o número cardinal de um conjunto infinito enumerável é o menor dos números cardinais dos conjuntos infinitos.

Os números cardinais dos conjuntos finitos podem ser identificados com os números naturais. Os números cardinais dos conjuntos infinitos recebem o nome de *números transfinitos*. Cantor designou a cardinalidade dos conjuntos infinitos pela letra $\aleph$ (alef), a primeira letra do alfabeto hebraico. A cardinalidade de $\mathbb{N}$ foi denotada por $\aleph_0$ (lê-se alef-zero), ou seja, $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Observação 4.2. É importante perceber que utilizamos as notações $<$ e $\leq$ para relacionar a cardinalidade dos conjuntos. Caso os conjuntos sejam finitos, as notações coincidem com aquelas estabelecidas na seção 2.3, (relação de ordem, pág. 30), respeitam as mesmas propriedades e as definições 4.4, 4.5 e 4.6. No caso de conjuntos infinitos, optamos pela mesma notação, mas quando utilizadas estaremos nos referindo as definições 4.4, 4.5 e 4.6.

CAPÍTULO 5

COMPARANDO CONJUNTOS INFINITOS

Neste capítulo, vamos comparar e discutir a cardinalidade dos principais conjuntos númericos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$. Além disso, vamos mostrar que dado um conjunto finito ou infinito, sempre existe um conjunto que possui uma cardinalidade maior que esse conjunto, existindo assim uma hierarquia de conjuntos infinitos. Também iremos discorrer sobre a hipótese do continuum e a luta de Cantor para solucioná-la.

Um teorema importante e que será usado para comparar a cardinalidade de dois conjuntos é o teorema Cantor-Schroder-Bernstein.

Teorema 5.1 (Cantor-Schroder-Bernstein). *Dados dois conjuntos A e B, se $card(A) \leq card(B)$ e também $card(B) \leq card(A)$, então $card(A) = card(B)$.*

O teorema acima pode ser enunciado da seguinte forma: Dados dois conjuntos A e B, se existir uma função injetora $f : A \longrightarrow B$ e uma função injetora $g : B \longrightarrow A$, então existe uma bijeção entre A e B, ou seja, $card(A) = card(B)$.

Demonstração. Ver [17]. $\square$

5.1 Cardinalidade do conjunto dos números inteiros

O que podemos dizer sobre a cardinalidade do conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ em relação ao conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$? Será que o conjunto dos números inteiros é enumerável ou não? A seguir vamos demonstrar que eles possuem a mesma cardinalidade.

Proposição 5.1. $card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{N})$

Demonstração. Considere $k \in \mathbb{N}$ e a função f definida como:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n = 1 \\ k, & \text{se} \quad n = 2k \\ -k, & \text{se} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Olhando para o diagrama abaixo podemos concluir que a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é uma bijeção.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 2k & 2k+1 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & k & -k & \cdots \end{array}$$

Dessa forma, temos que $card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$, e o conjunto dos inteiros é infinito enumerável.

Observação 5.1. Uma outra forma de representar essa bijeção seria através da função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, onde:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se n é par.} \\ \\ \dfrac{1-n}{2}, & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

$\square$

5.2 Cardinalidade do conjunto dos números racionais

E o que podemos dizer sobre a cardinalidade do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$? Veremos que ele possui a mesma cardinalidade dos números naturais.

Proposição 5.2. $card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N})$

Demonstração. A figura abaixo irá ajudar a responder nossa pergunta. Ela é conhecida como "o passeio de Cantor". Para isso vamos considerar a formação em que a primeira linha contém, em ordem decrescente, todas as frações positivas de numerador 1, a segunda linha contém, em ordem decrescente, todas as frações positivas de numerador 2, a terceira linha contém, em ordem decrescente, todas as frações de numerador 3 etc. Todo número racional positivo aparece nessa formação e podemos fazer uma lista na ordem de sucessão indicada pelas flechas abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[d] & \frac{1}{2} \arrow[r] & \frac{1}{3} \arrow[dl] & \frac{1}{4} \arrow[r] & \frac{1}{5} \arrow[dl] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{2}{1} \arrow[ur] & \frac{2}{2} \arrow[dl] & \frac{2}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{4} \arrow[dl] & \frac{2}{5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{3}{1} \arrow[d] & \frac{3}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{3} \arrow[dl] & \frac{3}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{4}{1} \arrow[ur] & \frac{4}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{4} \arrow[dl] & \frac{4}{5} \arrow[ur] & \cdots \\
\vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

Dessa forma, podemos estabelecer uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ tal que:

$f(1) = \frac{1}{1}$, $f(2) = \frac{2}{1}$, $f(3) = \frac{1}{2}$, $f(4) = \frac{1}{3}$, $f(5) = \frac{2}{2}$, $f(6) = \frac{3}{1}$, $f(7) = \frac{4}{1}$, ... Note que f é sobrejetiva e $\mathbb{N}$ é enumerável, logo pelo teorema 4.6 (página 76) temos que $\mathbb{Q}_+$ é enumerável . Podemos provar, de forma semelhante, que $\mathbb{Q}_-$ também é enumerável. Portanto, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ será enumerável, pois a união de conjuntos enumeráveis é enumerável (corolário 4.8 da página 77).

Dessa forma, temos que $card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Z}) = \aleph_0$, e o conjunto dos números racionais é infinito enumerável. $\square$

Observação 5.2. Na demosntração anterior, não é apresentado explicitamente uma função sobrejetora $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$, porém, tal função pode ser obtida. Para isso, vamos organizar os elementos de $\mathbb{Q}_+$ de acordo com o diagrama abaixo e considerar a função f tal que $f(1) = \frac{1}{1}, f(2) = \frac{1}{2}, f(3) = \frac{2}{1}, f(4) = \frac{1}{3}$ e assim sucessivamente, seguindo a direção das setas.

$$\begin{tikzcd}
L_1 : & & & \frac{1}{1} \arrow[dl] & & \\
L_2 : & & \frac{1}{2} \arrow[rr] & & \frac{2}{1} \arrow[dlll] & \\
L_3 : & \frac{1}{3} \arrow[rr] & & \frac{2}{2} \arrow[rr] & & \frac{3}{1}
\end{tikzcd}$$

$$\vdots$$

Note que primeira linha (L_1), possui apenas um elemento, a fração $\frac{1}{1}$ cuja soma do numerador com o denominador é igual 2. A segunda linha (L_2) possui dois elementos, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{1}$ cuja soma do numerador com o denominador é igual a 3. Seguindo esse raciocínio, a n-ésima (L_n) possui n elementos, as frações $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n-1}$, ... , $\frac{n}{1}$, sendo que a soma do numerador com o denominador de cada fração será igual a $n + 1$. Note que cada linha, possui uma fração a mais que a linha anterior.

Se quisermos calcular, por exemplo, a fração correspondente a $f(19)$, temos que descobrir inicialmente em qual linha ela estará e depois sua posição na linha. Como $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 < 19 < 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, podemos afirmar que $f(19)$ se encontra na sexta linha (L_6) e, como $19 = 15 + 4$, $f(19)$ será o quarto elemento de L_6. Logo, $f(19) = \frac{4}{3}$.

Vamos defininir a sequência $a_m = \sum_{i=1}^{m} i$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Para algum m considere a linha L_{m+1}. Temos que seu primeiro elemento será $f(a_m + 1)$, seu último elemento será $f(a_m + m + 1)$ e a soma do numerador e do denominador de cada uma de suas frações será igual a $m + 2$. O elemento de posição q, nesta linha, será dado por $f(a_m + q)$, onde $q \in \mathbb{N}$ e $1 \leq q \leq m + 1$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, são únicos m e q tal que $n = a_m + q$, podemos definir a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ da seguinte forma:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{1}, & \text{se n=1.} \\ \\ \dfrac{q}{m+2-q}, & \text{se n>1.} \end{cases}$$

Onde $n = a_m + q$, m e q são naturais com $1 \leq q \leq m+1$.

Podemos afirmar que tal função é sobrejetora, pois dada uma fração $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}_+$, tal que $\frac{x}{y} \neq \frac{1}{1}$, basta tomar $x = q$ e $y = m+2-q$, dessa forma obtemos m e q e, consequentemente, n, pois $n = a_m + q$. Assim, podemos obter n tal que $f(n) = \frac{x}{y}$. Portanto, f é sobrejetora e de forma análoga a demonstração anterior, concluímos que $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Q})$.

Observação 5.3. Outra maneira de provar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável é através do teorema 4.7 (página 76). De fato, se indicarmos por $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos números inteiros diferentes de 0, temos que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Logo é também enumerável o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Ora, a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(m,n) = \dfrac{m}{n}$, é sobrejetiva. Segue-se que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Observação 5.4. Ainda existe outra forma de provar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável. Vamos considerar os conjuntos $X_1 = \{\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, ...\}$, $X_2 = \{\dfrac{2}{1}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{2}{5}, ...\}$, $X_3 = \{\dfrac{3}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{5}, ...\}$ e assim sucessivamente.

Ou seja, sendo $n \in \mathbb{N}$, temos que $X_n = \{\frac{n}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Note que os conjuntos $X_1, X_2, X_3, ...X_n, ...$ são enumeráveis. Portanto a reunião $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável(corolário 4.8 da página 77). Mas $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \mathbb{Q}$, portanto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Mas será que todos os conjuntos possuem a mesma cardinalidade que a do conjunto dos números naturais. Será que é sempre assim?

5.3 Cardinalidade dos números reais

Vamos agora analisar o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Para discutir a cardinalidade de $\mathbb{R}$, vamos deixar claro que: se conseguirmos encontrar uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ teremos provado que as cardinalidades são iguais. Para isso, devemos exibir uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja, simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Se mostrarmos que qualquer função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nunca é sobrejetiva, decorrerá desse fato que não existe bijeção possível. Cantor fez mais que isso! Ele mostrou que não é possssível encontrar uma função sobrejetora $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$. Vamos demonstrar esse resultado.

Teorema 5.2. *O intervalo* $(0,1)$ *não é enumerável.*

Demonstração. Para verificar esse fato denotaremos os números reais entre 0 e 1 na sua forma decimal:

$$0, a_1\ a_2\ a_3\ a_3\ a_4\ a_5 ...$$

A ideia de Cantor foi supor que existia uma função sobrejetora $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$. Nesse caso poderíamos enumerar todos os elementos de $(0,1)$.

$$x_n = f(n) = 0, a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ a_{n3}\ a_{n4}\ a_{n5} ...$$

Existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$. Mas será que existe uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$? Se esse fosse o caso todos os números reais entre 0 e 1 estariam na seguinte lista:

$$\begin{gathered}
x_1 = 0, a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}\ a_{17}\ a_{18}\ \cdots \\
x_2 = 0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\ a_{27}\ a_{28}\ \cdots \\
x_3 = 0, a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}\ a_{36}\ a_{37}\ a_{38}\ \cdots \\
x_4 = 0, a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ a_{45}\ a_{46}\ a_{47}\ a_{48}\ \cdots \\
x_5 = 0, a_{51}\ a_{52}\ a_{53}\ a_{54}\ a_{55}\ a_{56}\ a_{57}\ a_{58}\ \cdots \\
x_6 = 0, a_{61}\ a_{62}\ a_{63}\ a_{64}\ a_{65}\ a_{66}\ a_{67}\ a_{68}\ \cdots \\
x_7 = 0, a_{71}\ a_{72}\ a_{73}\ a_{74}\ a_{75}\ a_{76}\ a_{77}\ a_{78}\ \cdots \\
x_8 = 0, a_{81}\ a_{82}\ a_{83}\ a_{84}\ a_{85}\ a_{86}\ a_{87}\ a_{88}\ \cdots \\
\vdots
\end{gathered}$$

Consideremos agora um número real $y = 0, b_1\ b_2\ b_3\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ ...\ b_n\ ...$ onde, $y \in (0,1)$, de tal forma que sejam válidos: $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}, ...\ b_n \neq a_{nn} ...$ e $b_n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

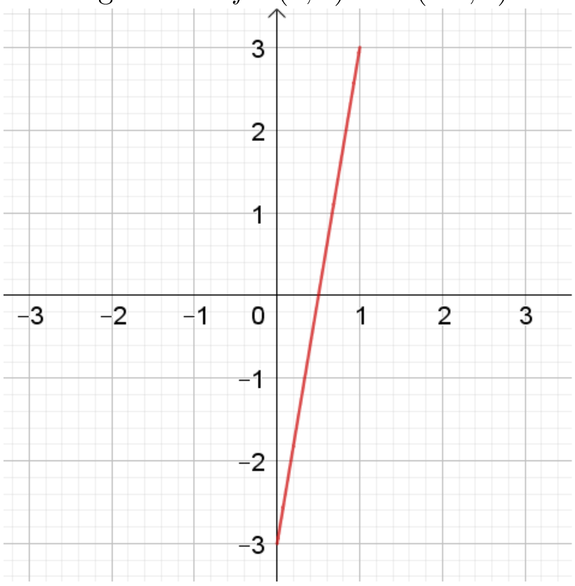
$$\begin{gathered}
x_1 = 0, {\color{blue}a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}\ a_{17}\ a_{18}\ \cdots \\
x_2 = 0, a_{21}\ {\color{blue}a_{22}}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\ a_{27}\ a_{28}\ \cdots \\
x_3 = 0, a_{31}\ a_{32}\ {\color{blue}a_{33}}\ a_{34}\ a_{35}\ a_{36}\ a_{37}\ a_{38}\ \cdots \\
x_4 = 0, a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ {\color{blue}a_{44}}\ a_{45}\ a_{46}\ a_{47}\ a_{48}\ \cdots \\
x_5 = 0, a_{51}\ a_{52}\ a_{53}\ a_{54}\ {\color{blue}a_{55}}\ a_{56}\ a_{57}\ a_{58}\ \cdots \\
x_6 = 0, a_{61}\ a_{62}\ a_{63}\ a_{64}\ a_{65}\ {\color{blue}a_{66}}\ a_{67}\ a_{68}\ \cdots
\end{gathered}$$

$$x_7 = 0, a_{71}\ a_{72}\ a_{73}\ a_{74}\ a_{75}\ a_{76}\ a_{77}\ a_{78}\ \cdots$$
$$x_8 = 0, a_{81}\ a_{82}\ a_{83}\ a_{84}\ a_{85}\ a_{86}\ a_{87}\ a_{88}\ \cdots$$
$$\vdots$$

Logo, $y \neq x_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Dessa forma, y não está na lista, embora esteja no intervalo $(0,1)$. Portanto, não existe uma função sobrejetora $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$ e não existe bijeção entre $\mathbb{N}$ e o intervalo $(0,1)$. Esse processo é conhecido como diagonal de Cantor. Então, podemos concluir que $card(\mathbb{N}) < card(0,1)$. □

Observação 5.5. Além disso, para todo $a,\ b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, dado o intervalo (a,b), podemos concluir que $card((0,1)) = card((a,b))$. Para isso, basta exibir uma bijeção $f : (0,1) \longrightarrow (a,b)$. Por exemplo, a bijeção $f : (0,1) \longrightarrow (-3,3)$, onde $f(x) = 6x - 3$ nos garante que $card((0,1)) = card((-3,3))$. Observemos o gráfico de f abaixo:

Figura 5.1: $f : (0,1) \longrightarrow (-3,3)$



Fonte: Arquivo do autor

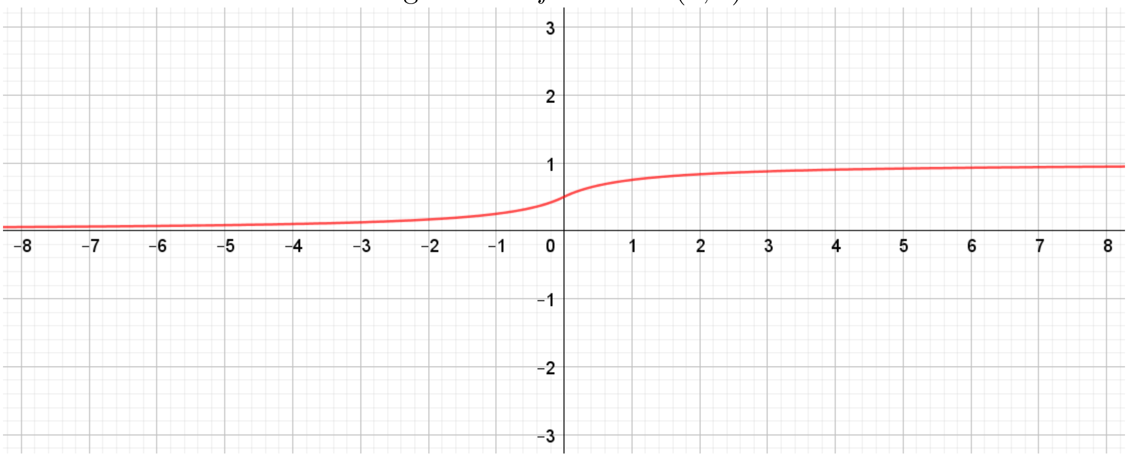
Então sempre podemos encontrar uma bijeção $f : (0,1) \longrightarrow (a,b)$. Basta tomar f como a função afim tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Com isso concluimos que $card((0,1)) = card((a,b))$, ou seja, qualquer intervalo (a,b) tem a mesma cardinalidade que o intervalo $(0,1)$.

Observação 5.6. Além disso, o próprio conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade do intervalo $(0,1)$. Para demonstrar essa fato, podemos considerar uma função bijetora $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{x}{1+|x|} + 1)$$

Observemos o gráfico de f abaixo:

Figura 5.2: $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1)$



Fonte: Arquivo do autor

Logo, podemos concluir que $card((0, 1)) = card(\mathbb{R})$. Portanto o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável e $card(\mathbb{N}) < card(\mathbb{R})$. Então, $card(\mathbb{R}) > \aleph_0$. Podemos denotar a cardinalidade dos números por c, ou seja, $card(\mathbb{R}) = c$. Dizemos que c é cardinalidade do *continuum*.

O que podemos afirmar sobre o conjunto dos números irracionais?

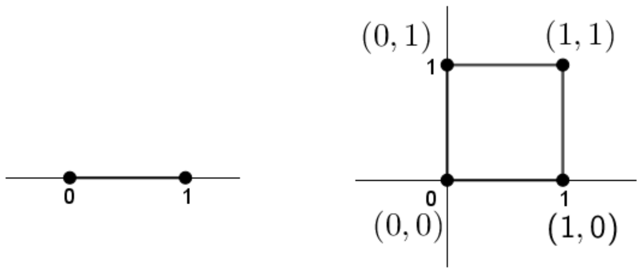
Proposição 5.3. *O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais não é enumerável.*

Demonstração. Vamos supor que $\mathbb{I}$ fosse enumerável, decorre do corolário 4.8 (página 77), que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ seria enumerável. Mas, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$, que não é enumerável, e teríamos uma contradição. Logo, $\mathbb{I}$ não é enumerável. $\square$

5.4 Comparando a cardinalidade das dimensões

Ao estudar as propriedades do infinito, Cantor utilizou o sistema de coordenadas cartesianas. E fez a si mesmo a pergunta: existem mais pontos no plano do que na reta real? Cantor demonstrou que qualquer intervalo de números na reta real tinha o mesmo número de pontos que qualquer outro intervalo. Portanto, ele resolveu analisar o intervalo dos números reais entre 0 a 1, considerou o conjunto S dos pontos pertencentes a esse segmento e o conjunto de pontos Q pertencentes ao interior de um quadrado de lado unitário. Podemos definir $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ e $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \ ; \ 0 < y < 1\}$. Cantor demonstrou que $card(S) = card(Q)$.

Figura 5.3: Segmento e quadrado.



Fonte: Arquivo do autor

Proposição 5.4. *Sendo* $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ *e* $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \ ; \ 0 < y < 1\}$, *temos que* $card(S) = card(Q)$.

Demonstração. Note que os pontos representados por S na reta real também estão representados em Q pelos pares ordenados $(x, 0)$. Existe uma função injetiva $f : S \longrightarrow Q$ tal que $f(x) = (x, 0)$. Portanto, $card(S) \leq card(Q)$.

Agora vamos provar que existe uma função injetiva $g : Q \longrightarrow S$. Considere um ponto $(a, b) \in Q$ onde $a = 0, a_1a_2a_3...a_n...$ e $b = 0, b_1b_2b_3...b_n...$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, b_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Para cada $(a, b) \in Q$, podemos obter um número real r sendo $r = 0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3...a_nb_n....$ Note que $0 < r < 1$ e $r \in S$. É importante observar que, se $(a, b) \neq (a', b')$, com $(a', b') \in Q$, $a \neq a'$ ou $b \neq b'$. Podemos associar (a, b) com r e (a', b') com r', sendo r', sendo $0 < r' < 1$, de acordo com relação estabelecida anteriormente. Sendo $(a, b) \neq (a', b')$ teremos que $r \neq r'$, pois a expressão decimal de $a \neq a'$ ou a expresão decimal de $b \neq b'$, logo a esxpressão decimal de r será diferente de r'. Portanto, podemos definir uma função injetiva $g : Q \longrightarrow S$, onde $f(a, b) = r$, sendo $(a, b) \in Q$ e $r \in S$. Logo, $card(Q) \leq card(S)$ e, como ja vimos que $card(S) \leq card(Q)$, pelo teorema 5.1, temos que $card(S) = card(Q)$. □

Cantor concluiu que existem exatamente tantos pontos na linha como no plano. De forma semelhante é possível mostrar que existem tantos pontos na linha como no espaço tridimensional ou até de dimensões superiores. Foi um descoberta controversa e desafiou o pensamento tradicional de sua época. O própio cantor chegou a afirmar que podia ver, mas não podia acreditar.

Observação 5.7. Lembrando que alguns números reais podem ter duas expressões decimais. Nesse caso, na demonstração, não consideramos aquelas que possuem uma sequência de infinitos nove.

5.5 Cardinalidades maiores ainda

Mas será que existem outros conjuntos cuja cardinalidade é maior do que $\aleph_0$? Existem conjuntos cuja cardinalidade é maior do que dos números reais $\mathbb{R}$?

Cantor foi além, e provou que a cardinalidade do conjunto das partes de qualquer conjunto, incluindo qualquer conjunto infinito, é sempre maior que a cardinalidade do conjunto original, isso levou-o a imaginar uma hierarquia cada vez maior de números que se estendiam aos números transfinitos, sendo $n \in \mathbb{N}$, temos: $1 < 2 < 3 < ... < n < ... < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < ... < \aleph_n < ....$

Teorema 5.3. *Dado um conjunto A, temos que $card(A) < card(\mathscr{P}(A))$.*

Demonstração. Existe uma função injetiva evidente $f : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$, dada por $f(x) = \{x\}$. Vamos mostrar agora que não existe uma fução sobrejetiva $f : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Suponha que exista uma função $f : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$ sobrejetiva. Então, se $x \in A$, temos que $f(x) \in \mathscr{P}(A)$. Considere o conjunto $X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Note que $X \subset A$, e sendo assim, $X \in \mathscr{P}(A)$. Caso $x \notin X$ temos que $x \in f(x)$. Vamos analisar agora a seguinte situação: como supomos que f é sobrejetiva, deve existir $a \in A$ tal que $f(a) = X$. Consideremos dois casos, se $a \in X$ e se $a \notin X$. Se $a \in X$, então $a \notin f(a)$, mas $f(a) = X$ o que implicaria que $a \notin X$ (Contradição) . Se, $a \notin X$ então $a \in f(a)$, mas $f(a) = X$ o que implicaria que $a \in X$ (Contradição). Nos dois casos encontramos uma contradição, o que contraria nossa hipótese de f ser sobrejetiva, indepentemente da escolha da função f. Assim, não existe função sobrejetiva $f : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Portanto, $card(A) < card(\mathscr{P}(A))$. □

Decorre que podemos afirmar que $card(\mathbb{N}) < card(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ e também que $card(\mathbb{R}) < card(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$. Consequentemente podemos criar conjuntos com cardinalidades cada vez maiores, pois $card(A) < card(\mathscr{P}(A)) < card(\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))) < ....$

Vamos agora utilizar o princípio de indução para demonstrar um resultado sobre o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto dado.

Teorema 5.4. *Dado um conjunto finito A com n elementos, onde $n \in \mathbb{N}$, então $\mathscr{P}(A)$ possui 2^n elementos.*

Demonstração. Considere a seguinte proposição

$P(n)$: para qualquer conjunto A com n elementos, sendo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\mathscr{P}(A)$ possui 2^n elementos.

Seja $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$, vamos mostrar pelo princípio de indução que $X = \mathbb{N}$.

Note que $1 \in X$, pois se $A = \{a_1\}$, temos que $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a_1\}\}$, isto é, se A possui 1 elemento então $\mathscr{P}(A)$ possui $2^1 = 2$ elementos.

Suponha que $n \in X$, isto é, se $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, um conjunto com n elementos então $\mathscr{P}(A) = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_{2^n}\}$ possui 2^n elementos. Sem perda de generalidade, seja $B = A \cup \{a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}\}$, um conjunto com $n+1$ elementos. Como $A \subset B$, temos que $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$ e, para cada $i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq 2^n$, podemos obter os conjuntos $B_i = A_i \cup \{a_{n+1}\}$, onde $B_i \in \mathscr{P}(B)$ mas $B_i \notin \mathscr{P}(A)$. Logo, $\mathscr{P}(B) = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_{2^n}, B_1, B_2, B_3, ..., B_{2^n}\}$ que possui $2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$ elementos, então $(n+1) \in X$. Então, pelo princípio de indução, $X = \mathbb{N}$.

□

Portanto, se a cardinalidade de um conjunto finito A é n, ou seja, $card(A) = n$, provamos que $card(\mathscr{P}(A)) = 2^n$. O resultado continua válido para o conjunto vazio $\emptyset$, temos que $card(\emptyset) = 0$ e $card(\mathscr{P}(\emptyset)) = 2^0 = 1$. Note que $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Caso A seja infinito, podemos então utilizar uma notação semelhante e escrever que $card(\mathscr{P}(A)) = 2^{card(A)}$. Por exemplo, podemos escrever que $card(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$ e $card(\mathscr{P}(\mathbb{R})) = 2^c$.

Outra questão que surge naturalmente é que, se $card(\mathbb{N}) < card(\mathbb{R})$ e se $card(\mathbb{N}) < card(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, qual seria a relação entre $card(\mathbb{R})$ e $card(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$? Cantor provou que eles possuem a mesma cardinalidade.

Teorema 5.5. $card(\mathbb{R}) = card(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Demonstração. Como $card(\mathbb{R}) = card((0,1))$, vamos mostrar que $card((0,1)) = card(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Inicialmente, vamos demonstrar que $card((0,1)) \leq card(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Para isso, devemos exibir uma função injetiva $f : (0,1) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Para isso, vamos considerar todos os números reias $x \in (0,1)$ escritos na forma de decimal binário:

$$x = a_1.\frac{1}{2} + a_2.\frac{1}{2^2} + a_3.\frac{1}{2^3} + ... + a_n.\frac{1}{2^n} + ... = 0, a_1a_2a_3...a_n...,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \{0,1\}$.

Por exemplo, a fração $\frac{13}{16}$ no sistema decimal seria escrito em decimal binário da seguinte forma:

$$1.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2^2} + 0.\frac{1}{2^3} + 1.\frac{1}{2^4} + 0.\frac{1}{2^5} + ... = 0,1101\overline{0}$$

A fração $\frac{2}{5}$ no sistema decimal seria escrito em decimal binário da seguinte forma:

$$0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2^2} + 1.\frac{1}{2^3} + 0.\frac{1}{2^4} + 0.\frac{1}{2^5} + ... = 0,\overline{0110}$$

De acordo com a expressão decimal binária de $x \in (0,1)$, para cada x podemos associar um conjunto A_x, cujos os elementos são $n \in \mathbb{N}$, mas com a seguinte condição:

- Se $a_n = 1$, então $n \in A_x$;
- Se $a_n = 0$, então $n \notin A_x$.

Por exemplo, o número $0,100101\overline{0}$ na forma decimal binária é associado aos conjunto $\{1,4,6\}$. O número $0,001001\overline{001}$ na forma decimal binária seria associado ao conjunto $\{3,6,9,...\}$. Pode ocorrer que um número possa ser escrito de dois modos diferentes na forma decimal binária. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ pode ser expresso como $0,1\overline{0}$ ou $0,0\overline{1}$. Nesses casos vamos considerar a forma que possua a menor quantidade de números 1. É importante observar que se tivermos dois números $x_1, x_2 \in (0,1)$, sendo $x_1 \neq x_2$, temos que $A_{x_1} \neq A_{x_2}$. De fato, se considerarmos os números na forma decimal binária sendo $x_1 = 0, a_1a_2a_3...a_n...$ e $x_2 = 0, b_1b_2b_3...b_n...$ ($a_n, b_n \in \{0,1\}$ e $n \in \mathbb{N}$), existe algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \neq b_k$, então k pertencerá somente a um dos conjuntos A_{x_1} ou A_{x_2}. Então, $A_{x_1} \neq A_{x_2}$.

Vamos definir a função $f : (0,1) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{N})$, tal que $f(x) = A_x$. Como $A_x \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$ e cada x difirente, possui uma representação decimal binária diferente, ou seja, dados $x_1 \neq x_2$, com $x_1, x_2 \in (0,1)$, temos que $A_{x_1} \neq A_{x_2}$, logo f será injetiva e temos que:

$$card((0,1)) \leq card(\mathscr{P}(\mathbb{N})).$$

Agora vamos mostrar que $card(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \leq card((0,1))$. Então, precisamos exibir uma função injetora $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow (0,1)$.

Considere um conjunto $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Para cada conjunto A podemos associar um número real $x \in (0,1)$, escrito na forma decimal, da seguinte forma:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 ... a_n ...,$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \{0,1\}$. Mas, com a condição que:

- Se $n \in A$, então $a_n = 1$;
- Se $n \notin A$, então $a_n = 0$.

Por exemplo, o conjuto $\{1,4,5\}$ corresponde ao número $0,10011\overline{0}$. O conjunto dos números pares $\{2,4,6,8,...\}$ corresponde ao número $0,010101\overline{01}$. Note que dois conjuntos A_1, $A_2 \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, sendo $A_1 \neq A_2$, correspondem a números reais x_1, x_2 diferentes. De fato, sendo $A_1 \neq A_2$, existe algum $k \in \mathbb{N}$ que não pertence simultaneamente aos dois conjuntos. Então na expressão decimal dos números x_1 e x_2, existe a_k que é igual a 1 para um dos números e 0 para o outro número. Logo, $x_1 \neq x_2$.

Então, podemos estabelecer uma função injetora $g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow (0,1)$ que a associa cada $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ um número real $x \in (0,1)$ da forma como foi descrito acima, ou seja, $g(A) = x$. Caso $A = \emptyset$, podemos associar com outro número pertencente ao intervalo $(0,1)$ mas que não seja formado apenas por 0 e 1, por exemplo, podemos definir $g(\emptyset) = 0,5$. Dessa forma, mostramos que existe uma função injetora $g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow (0,1)$ e podemos concluir que $card(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \leq card((0,1))$.

Como $card(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \leq card((0,1))$ e $card((0,1)) \leq card(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, pelo teorema 5.1 podemos concluir que $card(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = card((0,1))$. Mas, se $card(\mathbb{R}) = card((0,1))$, temos que $card(\mathbb{R}) = card(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

$\square$

Portanto, podemos afirmar que $2^{\aleph_0} = c$.

5.6 Aritmética transfinita

Ao desenvolver a teoria sobre os números transfinitos, foi necessário estabelecer novas definições e novas regras para a aritmética desses números. Sendo $n \in \mathbb{N}$, algumas regras dessa nova matemática são:

- $\aleph_0 + n = \aleph_0$;
- $\aleph_0 . n = \aleph_0$;
- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;
- $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$;
- $n^{\aleph 0} = c$.

5.7 Hipótese do continuum

Uma questão que intrigou Cantor foi a seguinte: existe outro número cardinal entre alef-zero e o número cardinal do continuum? Se a resposta fosse não, Cantor poderia chamar a ordem do infinito do continuum, c, de $\aleph_1$ ou seja, poderia afirmar que $c = \aleph_1$. Sem a resposta, não era possível ordenar os cardinais transfinitos, pois não havia como determinar qual cardinal sucede ao $\aleph_0$. Cantor não podia designar $\aleph_1$ nem nenhum alef maior que $\aleph_0$. Cantor sabia que $c = 2^{\aleph_0}$ e esperava provar que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ou seja, não existe um conjunto U, tal que $card(\mathbb{N}) < card(U) < card(\mathbb{R})$.

Essa afirmação ficou conhecida como *hipótese do continuum* e Cantor dedicou muito tempo tentando provar essa hipótese. Esta hipótese foi o número 1 dentre os 23 Problemas de Hilbert, apresentados na conferência do Congresso Internacional de Matemática de 1900. Algumas vezes Cantor acreditou ter provado que *hipótese do continuum* era verdadeira, outras vezes acreditou ter provado que era falsa, mas sempre encontrou falhas em suas demonstrações. Esse padrão continuou enquanto abordava o problema, Cantor mudava de ideia o tempo todo, ora achava ter provado a *hipótese do continuum*, ora achava que tinha provado o inverso.

Hoje entendemos que a difícil situação de Cantor não era totalmente decorrente de um raciocínio falho. O que ele não sabia era que estava trabalhando em um problema sem solução. A *hipótese do continuum*, no nosso sistema de matemática, não tem solução. Isso só foi descoberto após a morte de Cantor, destacando-se as contribuições dos matemáticos Gödel e Cohen. Podemos expandir o problema e estabelecer a *hipótese do continuum generalizada*, em que cada alef é ligado com seu antecessor por meio da potenciação, ou seja, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO NO ENSINO

A partir dos conceitos apresentados nesta dissertação, foi elaborada uma sequência de atividades que podem ser aplicadas à alunos do Ensino Médio, visando uma abordagem inicial a respeito do conceito de infinito. Neste capítulo serão apresentadas as atividades desenvolvidas, bem como o relato de sua aplicação em duas escolas diferentes, sendo uma pública e outra particular. As atividades foram realizadas com alunos da 1ª série do Ensino Médio, pois os conteúdos de conjuntos e funções são amplamente abordados nesta série. O tempo total estimado para as atividades foi de 225 a 270 minutos, considerando de cinco a seis aulas de 45 minutos cada.

Foram elaboradas cinco atividades, sendo que a ideia inicial é trabalhar uma atividade por aula porém, com a consciência de que algumas das atividades poderiam se estender além desse tempo. A primeira atividade tem como objetivo propor uma discussão inicial sobre os conceitos de finito e infinito, na segunda é trabalhada a noção de contagem, a terceira aborda a noção de função e suas classificações, a quarta faz uma discussão sobre conjuntos finitos e infinitos e a quinta, e última, faz uma comparação entre os principais conjuntos numéricos.

6.1 Atividades propostas

6.1.1 Atividade 1

A primeira atividade tem como objetivo realizar uma abordagem inicial sobre o conceito de infinito, buscando despertar o interesse dos alunos e atraí-los para uma discussão sobre o tema, verificando o conhecimento prévio que cada aluno possui. Por ser um conceito complexo, as atividades foram elaboradas para que os alunos possam refletir por si mesmo além de ouvir a opinião dos colegas. No final da atividade, os alunos podem ver a relação do infinito com as outras disciplinas, segundo seus professores. O tempo previsto de aplicação será de 45 minutos e a primeira atividade possui quatro questões. Cada aluno recebeu uma folha com as questões e espaço para respondê-las. Abaixo, está descrita cada questão com o seu respectivo objetivo.

1) Quando você escuta a palavra *infinito*, qual a primeira coisa que vem à mente? E quando você escuta a palavra *finito*, qual a primeira coisa que vem à mente? Escreva em poucas palavras na folha entregue.

Finito	Infinito

Escreva numa folha de papel e cole na lousa o que você pensou.

Essa questão tem como motivação ter contato com a ideia primitiva de finito e infinito dos alunos. O aluno deve pensar por si próprio para responder na folha de respostas e depois poderá ver as respostas dos outros alunos na lousa. O professor deve ler as respostas e dialogar com os alunos, sobre o porquê das respostas, abrindo espaço para alguns alunos se manifestarem, e deixar claro que a questão do infinito é uma questão muito antiga da humanidade e que ela pode ser abordada de diversas formas, bem como explicar que a primeira atividade é apenas uma abordagem inicial sobre esse conceito e que as próximas atividades têm como objetivo trabalhar esse conceito dentro da área de matemática.

2) Escreva agora, com mais palavras, o que seria algo finito e infinito para você após a discussão anterior.

   Essa pergunta tem como objetivo explorar melhor a ideia de cada aluno após a discussão anterior, dando um espaço maior para que ele responda de forma mais completa sobre o assunto. Após os alunos responderem, o professor deve abrir espaço para os alunos que queiram se manifestar e relatar sua resposta para a sala.

3) Você escuta essas palavras no seu dia a dia? Onde? Você já tinha pensado sobre isso antes?

   Essa pergunta tem como objetivo fazer uma relação com o conceito de finitude e infinidade no dia a dia do aluno. O aluno também terá espaço para escrever se essa é uma questão pertinente, se eles já se depararam com esse questionamento em algum momento da vida. Após os alunos responderem, o professor deve abrir espaço para os alunos que queiram se manifestar e relatar sua resposta para a sala.

4) Para os professores da primeira série do Ensino Médio foi feito a seguinte pergunta: "Na sua área de conhecimento, o conceito de finito e infinito são abordados? Onde e como?".

   Quais das respostas você mais se identificou? Escreva porquê.

   Observação 6.1. Para a realização dessa questão, esta pergunta foi enviada para os professores da sala e eles retornaram as respostas descritas abaixo. Algumas das respostas foram resumidas, pois houve professores que apresentaram respostas muito extensas e o objetivo não era se aprofundar na discussão de cada uma. Como a atividade foi aplicada em duas escolas distintas, segue abaixo as respostas dos professores de cada escola.

   Respostas dos professores da escola estadual Professor João Queiroz Marques:

   - Português: Infinito é um adjetivo ou substantivo utilizado para definir algo que não tem limites ou fim; que não tem um princípio e nunca terá um fim. No âmbito religioso, Deus é sempre associado ao "Infinito" , pois é o criador do Universo. O infinito é representado simbolicamente através do símbolo ∞. É conhecido como lemniscata e é oriundo do latim.

- Filosofia: Desde de a antiguidade até o século XIX prosseguiu uma tradição filosófica que foi muito alimentada pelo pensamento cristão. Nessa tradição, o mais importante sempre foi a ideia do infinito, do Deus eterno. A filosofia do século XX tendeu a dar maior importância ao finito. Uma corrente filosófica chamada existencialismo definiu o homem como ser que sabe que termina e que precisa encontrar em si mesmo o sentido da sua existência.
- Química: A ideia de finito é abordada no estudo da constituição da matéria para trabalhar o conceito de átomo.
- Física: Existem fontes de energia fósseis que seriam uma fonte finita. E existem as fontes de energia renováveis que seriam uma fonte "infinita". No estudo da temperatura, temos uma temperatura mínima finita (zero absoluto). Para temperaturas altas, não se tem limite, talvez poderia ser considerada infinita.
- Biologia: A capacidade de fotossíntese de uma planta aumenta com o tempo de luz, mas depois de 13 horas não aumenta mais, portanto seria finita. Já a capacidade de manter células humanas vivas em culturas de tecidos é por tempo indeterminado, portanto seria infinito.
- Artes: O conceito de infinito pode ser trabalhado nas formas geométricas. O conceito de finito é trabalhado nas obras de arte e também na pintura.
- Geografia: Na estatística estudamos população finita e infinita. População finita quando o número de elementos não é grande. População infinita é quando o número de elementos é muito elevado.
- História: Não trabalho o conceito de finito e infinito na minha disciplina.

Respostas dos professores da escola CEPRA - Centro Educacional Professor Reinaldo Anderlini:

- Redação: Na matemática os termos finito e o infinito têm conotação racional. Contudo, ao trabalharmos na área de Linguagens e códigos essas palavras podem nos passar significados emotivos, como por exemplo ao analisarmos um poema e pegarmos o amor como tema teríamos a evaporação do sentimento ou o ato finito de amar. Nosso poeta Vinícius de Moraes em Soneto da Felicidade ilustra também o contrário: "...Eu possa me dizer do amor (que tive): Que não seja imortal, posto que é chama. Mas que seja infinito enquanto dure"

- Literatura: Na literatura esse assunto pode aparecer quando se fala em métrica e versificação, na construção dos poemas, pois o poeta pode escolher uma forma fixa, como por exemplo, um soneto que têm 14 versos divididos em 4 estrofes (2 quartetos e 2 tercetos), o tamanho do verso pode ser de 10 ou 12 sílabas. Ou ele pode usar uma forma livre na qual ele escolhe quantas estrofes vai fazer, quantos versos, depende da inspiração do poeta.

- Sociologia, Filosofia e História: A História na questão finita temos algumas visões de história cíclica, ou seja, que sempre se renova e se repete da mesma maneira. Na questão infinita outros defendem as mudanças sempre ocorrerão e não há limites. Na filosofia é mais conceitual ainda. Filosoficamente a capacidade de conhecimento humana é infinita para aqueles que defendem o método experimental, ou seja, o conhecimento se aprende. Já para aqueles que acreditam que o conhecimento é inato, ou seja, já nascemos com o conhecimento, a capacidade se torna finita.

- Biologia: Em biologia/ciências estudamos o ciclo da água, que é de extrema importância para todos os seres vivos da Terra. Se avaliarmos a quantidade de água, ela é um recurso infinito, pois o ciclo hidrológico que rege a Terra a renova constantemente com a evaporação e a precipitação. Porém se levarmos em conta apenas a água potável necessária e disponível para o consumo humano podemos dizer que ela pode ser considerada um recurso finito pois a ação antrópica está degradando sua qualidade fazendo com que uma parcela significativa da população mundial não tenha acesso a ela.

- Física: Nos temas da física, o finito/infinito aparece quando falamos de termometria. No estudo das medidas de temperatura, consideramos que em teoria, existe um valor mínimo (finito) que é o 'zero absoluto', temperatura de -273 °C, porém não existe uma temperatura máxima, então pode-se dizer que pode aumentar infinitamente. Quando falamos de energia, o princípio de conservação da energia nos diz que a energia total do universo é constante, portanto um valor finito. Ela pode ser transformada de um tipo de energia em outro, passar de um corpo a outro, mas não pode ser criada nem destruída. O tempo também é outra grandeza que podemos falar de finito e infinito. Ao estudar um fenômeno, fazemos a observação e medição por um intervalo de tempo finito. A gente só pode fazer afirmações por aquilo que pode ser medido.

- Química: Em Química podemos abordar os conceitos de finito e infinito nos assuntos de recursos energéticos renováveis e não renováveis. Esse tema é incluído, por exemplo, ao trabalhar as aulas sobre combustão, hidrocarbonetos, e outras funções orgânicas.
- Geografia: Os recursos naturais são divididos em duas categórica: Recursos finitos que acabam se não forem usados com responsabilidade como a água, que é renovável, mas se usada de forma predatória pode não estar disponível para essa e para as gerações futuras, por conta da poluição, desperdício, etc...Recursos Infinitos como o sol. Dentro da perspectiva humana (do nosso tempo de vida).
- Espanhol: O conceito finito em espanhol é a forma de conjugação dos verbos, sempre se deve conjugar a última sílaba do verbo em infinitivo. Exemplo: cantar= canté...O conceito infinitivo se pode observar quando fazemos diálogos em espanhol, o uso dos verbos é infinitivo, já que a pessoa pode usá-los as vezes que for preciso e em variadas situações.
- Arte: O infinito, em arte, está ligado à profundidade, acontecendo através da perspectiva. O pintor Giotto, usa a perspectiva para mostrar o tempo e o espaço, o movimento em sua obra. Utilizando-se dos elementos da geometria, a perspectiva torna possível representar o tempo e o espaço na superfície da Terra, onde as principais linhas do quadro vão convergir para o ponto de fuga, um ponto imaginário que estaria localizado no infinito.

Esta questão tem como objetivo dar a oportunidade de os alunos lerem a resposta dos seus professores e ver como o finito e o infinito se relacionam com cada área do conhecimento. O aluno deverá escrever qual das respostas ele achou mais interessante e relatar o porquê. Após os alunos responderem, ficará aberto para eles se manifestarem e comentarem sobre sua resposta. Ao final, o professor deve propor que os alunos questionem pessoas próximas (pais, tios, avós, amigos,...) sobre esses conceitos. Os alunos também devem ser orientados a perguntar aos professores, para saber mais sobre as respostas dadas. Na *aula seguinte eles deverão trazer as respostas dessas pessoas que serão apresentadas para o professor e para os colegas.*

6.1.2 Atividade 2

A segunda atividade tem como objetivo explorar a noção de contagem. Primeiramente, será abordado o aspecto histórico do surgimento dos números. Depois será proposto que os alunos realizem contagens com graus de dificuldades diferentes. O tempo previsto de aplicação será de 45 minutos e a segunda atividade possui quatro questões. Abaixo, estão descritas as questões com seus respectivos objetivos.

1) Imagine que você é um pastor de ovelhas com um grande rebanho. Imagine-se vivendo muito tempo atrás, onde não existia televisão, celular, internet. Imagine que os números não haviam sido inventados. Todos os dias de manhã você deve levar as ovelhas para pastar. A noite você deve recolher as ovelhas em um cercado para que elas fiquem protegidas de outros animais. Como você pode ter certeza que guardou todas as ovelhas no cercado? Como ter certeza que você não esqueceu de nenhuma? Como você faria?

   Essa atividade tem como motivação trazer um aspecto histórico para os alunos, fazendo um questionamento sobre o surgimento da contagem e dos números. Inicialmente o aluno é convidado a pensar e tentar responder à pergunta. Em seguida será feita uma discussão sobre as respostas. Após a discussão o professor poderá discutir que provavelmente a numeração e a matemática surgiram em resposta para necessidades práticas, por exemplo: uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros, quantos eram seus inimigos, saber quantos animais possuíam e se o rebanho estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseava em algum método de registro simples, empregando um processo de correspondência biunívoca. Podia fazer entalhes em madeira, ranhuras no barro, marcas em ossos, utilizar nós em uma corda, guardar pedrinhas em saquinho. Mais tarde com o aprimoramento da escrita, foram surgindo símbolos para representar esses números. Para finalizar o professor deve apresentar o conjunto dos números naturais e seu símbolo. Pode ser dito para os alunos que o 0 pode ser considerado natural ou não, mas não é necessário se aprofundar nessa discussão e deixar claro que nesse momento, vamos considerar o 0 não sendo natural, mas é importante ressaltar que no ensino médio, em sua grande maioria, os livros didáticos consideram o 0 como número natural.

2) Quantos professores você tem na escola? Observe o horário escolar e complete a tabela para ajudar a responder essa pergunta.

Figura 6.1: Horário Escolar

HORÁRIO DAS AULAS - ENSINO MÉDIO – NOTURNO - 2019

		HORÁRIO	1ª D	2ª C	3ª B
2º FEIRA	1ºAULA	19:00 – 19:45	PORTUGUÊS	MATEMÁTICA	FILOSOFIA
	2º AULA	19:45 – 20:30	PORTUGUÊS	MATEMÁTICA	FILOSOFIA
	3º AULA	20:30 – 21:15	FILOSOFIA	QUÍMICA	MATEMÁTICA
	4º AULA	21:30 – 22:15	QUÍMICA	INGLÊS	MATEMÁTICA
	5º AULA	22:15 – 23:00	MATEMÀTICA	QUÍMICA	INGLÊS
3º FEIRA	1ºAULA	19;00 – 19:45	MATEMÁTICA	FILOSOFIA	FÍSICA
	2º AULA	19:45 – 20:30	FÌSICA	FILOSOFIA	MATEMÁTICA
	3º AULA	20:30 – 21:15	QUÍMICA	FÍSICA	BIOLOGIA
	4º AULA	21:30 – 22:15	BIOLOGIA	MATEMÁTICA	QUÍMICA
	5º AULA	22:15 – 23:00	BIOLOGIA	MATEMÁTICA	QUÍMICA
4º FEIRA	1ºAULA	19;00 – 19:45	HISTÓRIA	BIOLOGIA	PORTUGUÊS
	2º AULA	19:45 – 20:30	HISTÓRIA	BIOLOGIA	PORTUGUÊS
	3º AULA	20:30 – 21:15	MATEMÁTICA	FÍSICA	BIOLOGIA
	4º AULA	21:30 – 22:15	FÍSICA	PORTUGUÊS	MATEMÁTICA
	5º AULA	22:15 – 23:00	MATEMÁTICA	PORTUGUÊS	FÍSICA
5º FEIRA	1ºAULA	19:00 – 19:45	ARTE	HISTÓRIA	PORTUGUÊS
	2º AULA	19:45 – 20:30	ARTE	HISTÓRIA	PORTUGUÊS
	3º AULA	20:30 – 21:15	PORTUGUÊS	ARTE	HISTÓRIA
	4º AULA	21:30 – 22:15	INGLÊS	PORTUGUÊS	SOCIOLOGIA
	5º AULA	22:15 – 23:00	SOCIOLOGIA	PORTUGUÊS	INGLÊS
6º FEIRA	1ºAULA	19;00 – 19:45	GEOGRAFIA	ARTE	GEOGRAFIA
	2º AULA	19:45 – 20:30	GEOGRAFIA	SOCIOLOGIA	ARTE
	3º AULA	20:30 – 21:15	SOCIOLOGIA	INGLÊS	ARTE
	4º AULA	21:30 – 22:15	PORTUGUÊS	GEOGRAFIA	HISTÓRIA
	5º AULA	22:15 – 23:00	INGLÊS	GEOGRAFIA	SOCIOLOGIA

Fonte: Arquivo do autor

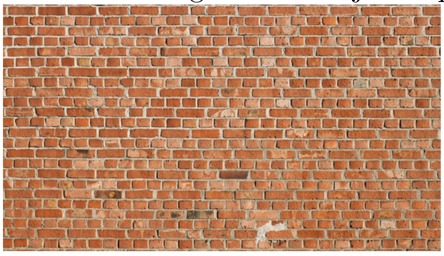
Numeração	Professor
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

Essa atividade tem como objetivo propor que os alunos façam uma contagem simples, estabelecendo uma correspondência biunívoca para determinar quantos professores eles têm. Após os alunos finalizarem sua atividade, pode ser discutido se todos os alunos preencheram de forma idêntica e se todos chegaram à mesma resposta. É possível discutir de quantas formas diferentes esse quadro poderia ser preenchido e observar que a forma de fazer a contagem não é única. Ao final da atividade é importante ressaltar que os números naturais podem ser utilizados para contagem, para ordenação como, por exemplo, as senhas nas filas de um supermercado, para codificação como por exemplo o número dos carros em uma corrida e para fazer medições.

3) Olhe para parede onde está localizado a lousa. Quantos tijolos são necessários para construção dessa parede? Para isso meça a parede e as dimensões do tijolo. Escreva os cálculos abaixo.

Essa atividade tem como objetivo propor que os alunos façam um processo de contagem com um grau de dificuldade maior que a anterior. Na escola estadual temos muitos alu-

Figura 6.2: Tijolo e parede.



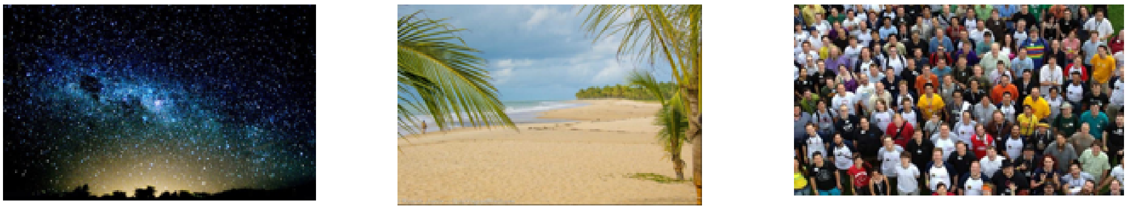
Fonte: Domínio público

nos que trabalham como pedreiro ou servente de pedreiro, ou possuem parentes e amigos trabalhando na área de construção. O professor irá levar uma trena na sala e um tijolo para que os alunos possam medir e tentem desenvolver uma forma de realizar essa contagem. Deve ser feita uma discussão sobre como cada aluno tentou resolver o problema. Após a discussão o professor deve comentar que no dia a dia, muitas vezes é necessário estabelecer um critério para realizar a contagem. Isso é importante nesse problema, para saber quantos tijolos são necessários comprar, de forma que não faltem e nem sobrem muitos tijolos quando você for realizar uma construção. Caso algum aluno trabalhe e tenha experiência em construção, é possível pedir para que ele explique para a sala como ele realiza essa atividade. Caso nenhum aluno se manifeste, ou a questão não seja resolvida, deve ser comentado que o cálculo pode ser feito através de uma quantidade estabelecida de tijolos por metro quadrado. Então é possível medir as dimensões da parede, calcular sua área e depois multiplicar pela quantidade estimada de tijolos por metro quadrado que será utilizado. A quantidade varia de acordo com a posição que será colocado o tijolo e seu tipo. Feito o cálculo com um tipo de tijolo pode ser exibido um tipo diferente de tijolo e fazer uma comparação entre a quantidade usada de cada tipo de tijolo e o preço gasto com cada tipo na construção da parede.

4)) Como você acha possível contar o número de estrelas que existem no céu? Como seria possível contar o número de grãos de areia na praia? Como seria possível contar o total de pessoas na foto? (ver figura 6.3).

Essa atividade tem como motivação provocar os alunos e discutir sobre como fazer a contagem de um grupo muito grande de objetos. Inicialmente, o aluno deve tentar responder sozinho, desenvolvendo métodos próprios para realizar essa contagem e registrar

Figura 6.3: Estrelas, praia e multidão.



Fonte: Domínio público

seu raciocínio. Após os alunos responderem, será feita uma discussão sobre as respostas. Nessa atividade não existe uma resposta exata, o importante é discutir o raciocínio para fazer uma estimativa e encorajar os alunos a fazerem uma reflexão. O professor deve comentar que é importante fazer estimativas de quantas pessoas estão em um show ou festival, quantas pessoas estão participando de uma passeata, por questões de segurança. Os cientistas necessitam fazer estimativas de quantos animais habitam determinada área. O professor pode deixar questões em aberto como: Será que o número de estrelas no céu ou grãos de areia em uma praia é infinito? Será que existem mais grãos de areia ou estrelas no céu? No caso do número de estrelas no céu, o professor pode comentar que é uma questão que intriga a humanidade a muito tempo. No caso de grãos de areia, seria necessário fazer uma estimativa da extensão, a faixa de areia e a profundidade da praia em questão e calcular o volume de areia. No caso das pessoas numa multidão é possível estimar quantas pessoas têm em cada metro quadrado e comparar com a área do local analisado.

6.1.3 Atividade 3

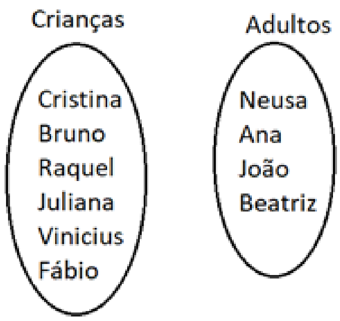
Esta atividade tem como objetivo apresentar o conceito de função e suas classificações: injetora, sobrejetora e bijetora. Esse conceito é fundamental para o entendimento do conceito de conjunto finito e infinito. O tempo previsto de aplicação será de 45 minutos e a terceira atividade possui três questões. Abaixo, está descrita cada questão com o seu respectivo objetivo.

1) Quatro irmãos: Ana, João, Neusa e Beatriz foram passear em um parque. Todos eles são adultos. Eles levaram um grupo de crianças para brincar. Ana levou seus filhos: Bruno

e Vinicius. João levou seus filhos: Fábio, Cristina e Raquel. Neusa levou sua única filha Juliana. Beatriz não tem filhos.

a) Complete o diagrama, ligando cada filho com seu pai ou sua mãe. (Ver figura 6.4)

Figura 6.4: Diagrama da questão 1 item a).



Fonte: Arquivo do autor

b) As pessoas foram divididas em dois grupos. Ligue as pessoas do grupo 1 com o seu irmão que está no grupo 2. (Ver figura 6.5)

Figura 6.5: Diagrama da questão 1 item b).

Fonte: Arquivo do autor

c) Imagine que Ana foi embora e seus filhos ficasse sobre os cuidados dos outros adultos. Complete o diagrama, ligando cada filho com seu pai ou sua mãe. (Ver figura 6.6)

Figura 6.6: Diagrama da questão 1 item c).

Fonte: Arquivo do autor

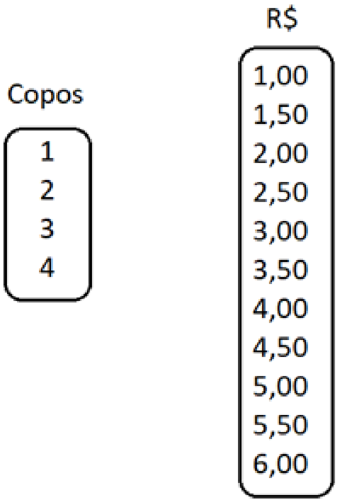
d) Qual das relações acima pode ser considerado uma função?

A primeira atividade tem como objetivo propor situações para entender a noção básica de função em matemática. Os alunos devem fazer uma correspondência entre os elementos do conjunto da esquerda e os elementos do conjunto da direita de acordo com o enunciado. Feita a correspondência, o professor pode questionar se os alunos saberiam qual das relações pode ser considerado uma função. Caso os alunos não saibam, o professor pode apresentar uma definição informal de função: que para ser considerado uma função, cada elemento do lado esquerdo deve se corresponder com um único elemento do lado direito e que todo elemento do lado esquerdo deve fazer correspondência com um elemento do lado direito. Após apresentar essa definição, o professor deve pedir para que os alunos classifiquem quais das relações podem ser consideradas uma função. É importante ressaltar que cada grupo recebe o nome de conjunto em matemática e cada pessoa do grupo é chamado de elemento. Para encerrar, o professor deve apresentar a definição dos conjuntos domínio, contradomínio e imagem utilizando o item a) que representa uma função.

2) Em cada item abaixo, estabeleça a relação entre os conjuntos de acordo com o a situação apresentada.

   a) Um grupo de estudantes deseja arrecadar dinheiro para a formatura. Para isso eles vendem copos com refrigerante no intervalo. Um copo de refrigerante custa R$ 1,50. O diagrama abaixo representa uma relação entre preço que será pago em função da quantidade de copos. (Ver figura 6.7)

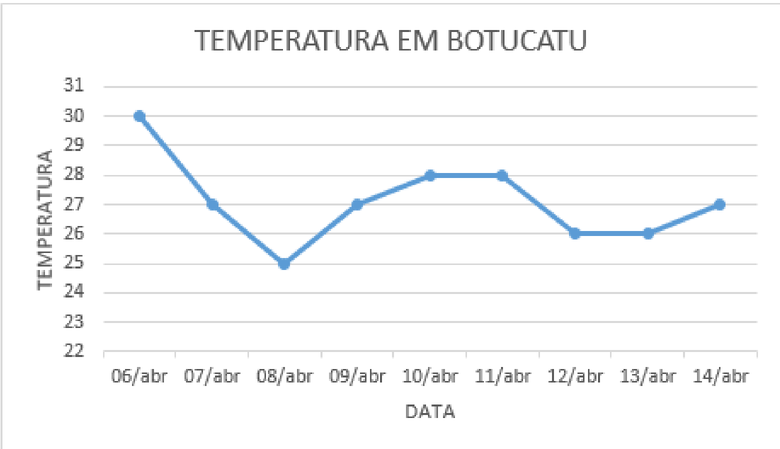
Figura 6.7: Diagrama questão 2 item a).



Fonte: Arquivo do autor

b) O gráfico abaixo mostra a temperatura máxima na cidade de Botucatu nos dias 6 até o dia 14 de abril.

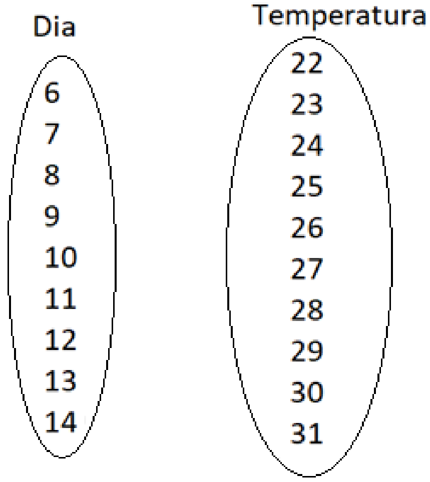
Figura 6.8: Temperatura em Botucatu.



Fonte: Arquivo do autor

O diagrama abaixo representa uma relação entre o dia de abril e a temperatura. (Ver figura 6.9)

Figura 6.9: Diagrama questão 2 item b).



Fonte: Arquivo do autor

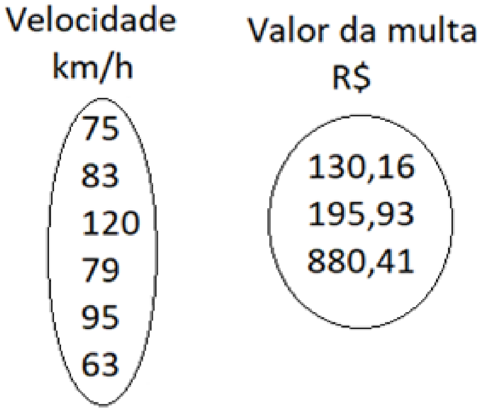
c) Em uma avenida a velocidade máxima permitida é de 60 km/h. Nela existe um radar que faz o controle da velocidade. Se uma pessoa passar acima da velocidade ele poderá tomar uma multa e até perder a habilitação. O quadro abaixo mostra a velocidade, o tipo de infração e o valor da multa aplicada.

Tabela 6.1: Multas por infração

Velocidade	Classificação da infração	Valor (R$)
De 61 até 72 km/h	Média	130,16
De 73 até 90 km/h	Grave	195,93
Acima de 90 km/h	Gravíssima	880,41

Obs: No caso da infração gravíssima por velocidade, a pessoa perderá o direito de dirigir. O diagrama abaixo mostra a velocidade de alguns motoristas que foram multados e o valor da multa. (Ver figura 6.10)

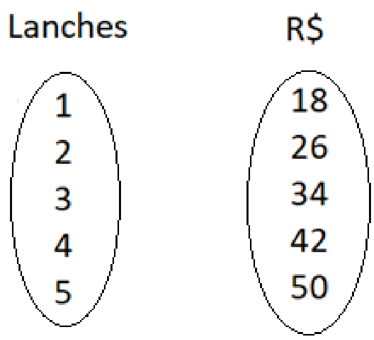
Figura 6.10: Diagrama questão 2 item c).



Fonte: Arquivo do autor

d) Uma empresa de fast-food cobra R$ 8,00 por um lanche. Além disso, a pessoa pode escolher pagar R$ 10,00 e beber refrigerante à vontade. Suponha que a pessoa vai comer alguns lanches e optou por pagar os R$10 para beber refrigerante à vontade. O diagrama abaixo representa o valor total que será pago em função do número de lanches que a pessoa comer. (Ver figura 6.11)

Figura 6.11: Diagrama questão 2 item d).



Fonte: Arquivo do autor

e) Considere as funções do item anterior. Classifique cada função como injetora, sobrejetora, bijetora ou sem classificação.

A motivação desse exercício é apresentar as classificações das funções: injetora, sobrejetora e bijetora. Inicialmente os alunos farão a correspondência entre os conjuntos de cada item de acordo com o enunciado. É importante retomar o conceito de função *e discutir cada item, questionando aos alunos qual seria o domínio, o contradomínio e a imagem. Provavelmente os alunos não conheçam as classificações e o professor pode apresentá-las: uma função é injetora quando dois elementos diferentes do domínio têm imagens diferentes, uma função é sobrejetora quando todo elemento do contradomínio é imagem pela função, ou seja, o conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio e uma função é bijetora quando a função for injetora e sobrejetora. Quando uma função não for nem injetora nem sobrejetora, diremos que ela não possui classificação. Após a apresentação das definições o professor deve pedir que eles classifiquem as funções. Após as classificações, o professor pode utilizar o item a) para apresentar a seguinte notação: denotando a função por f temos que f(1) = 1,50; f(2)=3,00; f(3)= 4,50 e f(4)=6,00 e explicar que em função de comprar 1 copo você pagará R$ 1,50, em função de comprar 2 copos você pagará R$ 3,00 e, assim por diante, ressaltando que o preço depende da quantidade de copos. É interessante discutir se os alunos saberiam alguma fórmula ou uma lei matemática que represente a função em cada item. Caso os alunos não saibam, deve ser explicado como obter a função do item a). O professor pode definir que a variável x representa a quantidade de copos e f(x) o preço a ser pago, a relação entre os dois é expressa através da operação que fazemos para obter o preço em função do número de copos: 3 = 2 . 1,50; 4,50 = 3 .1,50 e concluir que a função é f(x) = 1,50x. Após a explicação, pedir para os alunos tentarem deduzir a função no item d), no caso a função f(x) = 10 + 8x. É importante comentar que nos itens b e c, é possível obter uma lei que represente a função, mas seria muito trabalhoso e que até existe um método matemático para isso, mas não é estudado no ensino fundamental e médio.*

3) Considere uma função f definida de A em B. Para cada item, faça a representação da função através do diagrama e classifique como injetora, sobrejetora, bijetora ou sem classificação.

   a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 4\}$ com $f(x) = x^2$.

   b) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 3, 1, 7\}$ com $f(x) = 2x + 1$.

   c) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ com $f(x) = x + 1$.

   d) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ com $f(x) = x^2 - 1$.

O objetivo da terceira questão é levar o aluno a trabalhar com a linguagem de funções, através de fórmulas algébricas. É importante o aluno ter essa noção para entender a função que relaciona os naturais com os inteiros que será apresentada na atividade 5. Através desse exercício, também será retomado e reforçado as classificações das funções. O professor pode iniciar o primeiro item e explicar como o aluno deve proceder e deixar que os alunos desenvolvam os outros itens e classifiquem as funções. No final da aula é importante destacar que a função bijetora será muito importante nas próximas discussões sobre o conceito de finito e infinito.

6.1.4 Atividade 4

O ojetivo dessa atividade é discutir a noção de conjunto finito e conjunto infinito, segundo a concepção matemática moderna, e para isso são, necessárias as classificações de função apresentados na atividade anterior. Antes de iniciar a atividade é importante retomar o conceito de função bijetora, pois esta é fundamental para comparação de conjuntos. As questões apresentadas têm como objetivo definir critérios para poder classificar um conjunto como finito ou infinito. O tempo previsto de aplicação será de 45 minutos e a quarta atividade possui quatro questões. Abaixo, está descrito cada questão com o seu respectivo objetivo.

1) Lembra de quantos professores você tem? Uma forma de fazer a contagem seria estabelecer a relação entre os dois conjuntos, considerando o conjunto dos números naturais de 1 até 9 e o conjuntos dos professores.

Numeração	Professor
1 $\longrightarrow$	Professor 1
2 $\longrightarrow$	Professor 2
3 $\longrightarrow$	Professor 3
4 $\longrightarrow$	Professor 4
5 $\longrightarrow$	Professor 5
6 $\longrightarrow$	Professor 6
7 $\longrightarrow$	Professor 7
8 $\longrightarrow$	Professor 8
9 $\longrightarrow$	Professor 9

Que tipo de função é essa? Você possui uma quantidade finita ou infinita de professores?

O objetivo dessa questão é apresentar uma definição matemática para o conceito de conjunto finito. É possível mostrar para os alunos que o conjunto dos professores faz uma bijeção com o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Esse conjunto pode ser chamado de* I_9 *e dizemos que o conjunto dos professores tem 9 elementos. Podemos definir mais precisamente que um conjunto* X *é finito quando faz uma bijeção com o conjunto* I_n*, para algum* n *natural. O conjunto* I_n *é o conjunto formado pelos números naturais desde* 1 *até* n*:* $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$. *Nesse caso diremos o conjunto* X *é finito e tem* n *elementos. Podemos usar também o exemplo do número de tijolos necessários para construir a parede da sala de aula, contagem realizada na atividade 2. Pensando cada tijolo da parede como um elemento de um conjunto, podemos encontrar um* n *natural tal que exista uma bijeção entre* I_n *e conjunto formado por esses tijolos. Portanto, também é um conjunto finito.*

2) Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. Esse conjunto é finito ou infinito? Justifique sua resposta.

Os números naturais foram apresentados no início da atividade 2. O objetivo dessa questão é mostrar de maneira informal que o conjunto dos números naturais é infinito. Os alunos devem fazer uma tentativa de justificar essa afirmação. Não será exibido uma demonstração dessa afirmação, já que está além do esperado para ser desenvolvido no ensino médio. Podemos apenas argumentar que no conjunto dos números naturais, todo elemento possui o seu sucessor, logo não existe um maior elemento. Sempre podemos continuar a sequência dos números naturais indefinidamente.

3) Imagine uma escola que tenha duas salas de primeiro ano: 1ºA e 1ºB. O 1ºA possui 20 alunos, todos homens. O 1º B possui 20 alunas, todas mulheres. Na festa junina deseja-se formar casais para dançar uma quadrilha. Cada casal deve ser formado por um aluno do 1ºA e uma aluna da 1º B. Responda:

a) É possível formar uma quadrilha de forma que todos participem? Justifique sua resposta.

b) Imagine que as alunas de números ímpares do 1ºB vão viajar no dia da festa junina e não poderão participar. Seria possível montar essa quadrilha ainda? Justifique sua resposta.

O objetivo do item a) é discutir com os alunos de que forma pode se estabelecer a relação entre os dois conjuntos, representados pelas salas da aula, 1º A e 1º B, onde cada aluno é um elemento de um desses conjuntos. Deve ser questionado qual critério eles usariam para fazer essa relação. É importante ressaltar que existe uma função bijetora entre os dois conjuntos e consequentemente eles têm o mesmo número de elementos. No item b) fica óbvio que o conjunto formado pelo 1ºB, após a saída das alunas de números ímpar, possui menos elementos que o conjunto formado pelos alunos do 1ºA. O objetivo desse item é mostrar intuitivamente para os alunos que um conjunto finito não pode fazer uma bijeção com uma parte própria sua. É possível discutir com os alunos como eles poderiam proceder para resolver esse impasse, como fariam para organizar a quadrilha nessa situação.

4) Imagine uma escola hipotética com dois primeiros anos com infinitos alunos em cada sala. Vamos supor que o 1º A tenha os alunos ordenados da seguinte forma: 1,2,3,4,5,6,... ou seja, conforme os números naturais e que todos os alunos sejam homens. Da mesma forma, considere que o 1º B tenha infinitas alunas, todas mulheres. Na festa junina deseja-se formar casais para dançar uma quadrilha. Cada casal deve ser formado por um aluno do 1ºA e uma aluna da 1º B. Responda:

   a) É possível montar uma quadrilha com essas turmas? Justifique sua resposta.

   b) Imagine que as alunas de números ímpares do 1ºB vão viajar no dia da festa junina e não poderão participar. Seria possível montar essa quadrilha ainda? Justifique sua resposta.

O objetivo do item a) é discutir de que forma pode se estabelecer a relação entre os dois conjuntos, representados pelas salas da aula, 1º A e 1º B, onde cada aluno é um elemento de um desses conjuntos. Questionar os alunos qual critério eles usariam para fazer essa relação. É importante ressaltar que existe uma função bijetora entre os dois conjuntos e consequentemente elas têm o mesmo "número de elementos". Note que aqui, como os conjuntos são infinitos, o conceito de número de elementos se torna vago. Nesse caso, dizemos que os conjuntos têm o mesmo número cardinal ou a mesma cardinalidade. No item b), inicialmente é possível discutir com os alunos como eles poderiam proceder para resolver o problema, se existiria uma solução e como eles fariam para organizar a *quadrilha nessa situação. Após as discussões o professor pode explicar que o objetivo dessa questão é mostrar intuitivamente para os alunos um fato surpreendente, que um conjunto infinito pode fazer uma bijeção com uma parte própria sua, diferentemente dos conjuntos finitos. Este é um critério que podemos adotar para distinguir um conjunto finito de um conjunto infinito. Podemos também discutir qual seria a lei matemática que pode representar essa bijeção, e então, obter com os alunos, uma das possíveis respostas. Uma das respostas poderia ser a função:*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N} \text{ tal que } f(n) = 2n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \cdots & 2n & \cdots
\end{array}$$

E, portanto, chegar a conclusão que seria possível montar a quadrilha pois as salas ainda teriam o "mesmo número de elementos", neste caso, dizemos que os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade.

6.1.5 Atividade 5

Esta atividade tem como objetivo comparar a cardinalidade dos principais conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, *e* $\mathbb{R}$. Será apresentado um pouco do aspecto histórico e as ideias do grande matemático Georg Cantor. Antes de iniciar a atividade, é fundamental relembrar quais são os principais conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e quais elementos pertencem a cada conjunto. Durante a atividade será utilizada a notação $card(A)$ para se referir a cardinalidade de um conjunto A, e explicado que no caso de um conjunto finito, a cardinalidade é equivalente ao número de elementos que o conjunto possui, por exemplo, sendo $A = \{5, 7, 8, 9\}$ denotamos que $card(A) = 4$. No caso de conjuntos infinitos, não faz sentido falar em número de elementos desse conjunto. Dizemos que dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade, quando existe uma bijeção entre eles. Cantor adotou o símbolo $\aleph_0$ para representar a cardinalidade dos números naturais e escrevemos que $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$, sendo $\aleph$ a primeira letra do alfabeto hebraico. O conjunto dos números naturais é considerado o infinito mais "simples", o "menor infinito" e é definido como um conjunto infinito enumerável. Qualquer conjunto que faça uma bijeção com os naturais também será dito enumerável. Durante a atividade utilizaremos expressões como: "o infinito dos números reais é maior que o dos naturais" ou "o conjunto dos números naturais possuem o mesmo número de elementos que o conjunto dos números inteiros", mas no caso de conjuntos infinitos essa expressão é vaga. No caso isso significa que os reais não fazem bijeção com os naturais e que os naturais fazem bijeção com os inteiros. O objetivo não é apresentar rigorosamente todas as definições e demosntrações, o foco da atividade é apresentar um pouco das ideias de Cantor para os alunos. O tempo previsto de aplicação será de 45 minutos e a quinta atividade possui quatro questões. Abaixo, estão descritas cada uma das questões com o seus respectivos objetivos.

1) Considere o conjunto dos números naturais e dos números inteiros. Qual possui mais elementos?

   Essa questão tem como objetivo fazer os alunos refletirem se é possível estabelecer uma bijeção entre os números naturais e os números inteiros. Os alunos devem pensar por si prórpio e tentar estabelecer a bijeção. Após discutir as respostas dos alunos, o professor pode apresentar uma função que faz a bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. A função é dada por:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se n é par.} \\ \\ \dfrac{1-n}{2}, & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

   Olhando para o diagrama abaixo podemos concluir que a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é uma bijeção.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 2k & 2k+1 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & k & -k & \cdots \end{array}$$

   Dessa forma, fica claro que os naturais e os inteiros possuem o mesmo número de elementos. Ou seja, $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Z}) = \aleph_0$ e que o conjunto dos números inteiros é enumerável.

2) Considere o conjunto dos números naturais e dos números racionais. Qual possui mais elementos?

Tabela 6.2: Números racionais positivos

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\cdots$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Essa questão tem como objetivo fazer os alunos refletirem se é possível estabelecer uma bijeção entre os números naturais e os números racionais. Estes devem pensar e tentar estabelecer a bijeção. Após discutir as respostas, pode ser feita a associação com a contagem de tijolos em uma parede, desenvolvida na atividade dois, porém, considerando a "parede" formada pelos números racionais como se fosse uma parede infinita de tijolos. Para isso, basta considerar a formação em que a primeira linha contém, em ordem decrescente, todas as frações positivas de numerador 1, a segunda linha contém, em ordem decrescente, todas as frações positivas de numerador 2, a terceira linha contém, em ordem decrescente, todas as frações de numerador 3 etc.

Após discutir as respostas dos alunos é possível apresentar uma função que faz a bijeção entre $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Q}$*. A função não será apresentada de maneira formal, mas é possível descrever a ideia adotada por Cantor. A figura abaixo irá ajudar a responder nossa pergunta. Ela é conhecida como "o passeio de Cantor". Todo número racional positivo aparece nessa formação e podemos fazer uma lista na ordem de sucessão indicada pelas flechas abaixo.*

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[d] & \frac{1}{2} \arrow[r] & \frac{1}{3} \arrow[dl] & \frac{1}{4} \arrow[r] & \frac{1}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{2}{1} \arrow[ur] & \frac{2}{2} \arrow[dl] & \frac{2}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{4} \arrow[dl] & \frac{2}{5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{3}{1} \arrow[d] & \frac{3}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{3} \arrow[dl] & \frac{3}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{4}{1} \arrow[ur] & \frac{4}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{4} \arrow[dl] & \frac{4}{5} \arrow[ur] & \cdots \\
\vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

Dessa forma, fica estabelecida uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ *tal que:*

$f(1) = \frac{1}{1},\ f(2) = \frac{2}{1},\ f(3) = \frac{1}{2},\ f(4) = \frac{1}{3},\ f(5) = \frac{3}{1},\ f(6) = \frac{4}{1},\ f(7) = \frac{3}{2},\ ....$

Note que foi exlcuída a fração $\frac{2}{2}$ *pois ela é uma fração equivalente a fração* $\frac{1}{1}$. *Serão excluídas todas as frações equivalentes para que não haja redundâncias. Dessa forma cada número natural é associado a um número racional positivo. De maneira análoga pode ser estabelecida uma correpondência com os números racionais negativos. Portanto, os naturais e os racionais possuem o mesmo número de elementos, ou seja,* $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, *e o conjunto dos números racionais é enumerável. É um fato surpreendente, levando-se em consideração que entre cada par de números naturais existem infinitos números racionais.*

3) Considere o conjunto dos números naturais e conjunto dos números reais que estão entre 0 e 1. Qual possui mais elementos? Para comparar os números naturais com os números reais entre 0 e 1 considere os conjuntos abaixo:

Esta questão é de dificuldade muito elevada para os alunos do ensino médio. Podemos escutar as opiniões e as ideias dos alunos e discutí-las. Mas, neste caso, provavelmente, o professor terá que explicar o raciocínio adotado por Cantor. Supondo que o conjunto dos números reais entre 0 e 1 seja enumerável, poderia ser estabelecida um bijeção entre ele e os números naturais. Cada elemento do intervalo $(0, 1)$ *teria como correspondente*

$\mathbb{N}$	Números reais entre 0 e 1
1	0,0367834562...
2	0,0467823467...
3	0,1237786353...
4	0,1863383737...
5	0,2394746888...
6	0,2678393474...
7	0,4889498421...
8	0,6383777363...
9	0,7788029278...
10	0,9990883361...
⋮	⋮

um único elemento do conjunto dos números naturais. Por exemplo, a bijeção poderia ser feita de acordo com a tabela, o número 1 faria correspondência com o número 0,0367834562..., o número dois com o número 0,0467823467... e assim sucessivamente, formando uma lista. Mas Cantor percebeu que era possível definir um número diagonal, para construí-lo, basta pegar o primeiro algarismo depois da vírgula do primeiro número da lista, em seguida, o segundo algarismo depois da vírgula do segundo número e assim sucessivamente. Assim o número 0,0433798371... . Agora se mudar cada algarismo desse número, por exemplo, acrescentando 1 a cada dígito, formando o número 0,0544809482... (note que trasnformamos o algarismo 9 em 0). Esse número pertence ao intervalo (0,1), porém é diferente em pelo menos um algarismos em relação a qualquer número da lista, logo é impossível listar todos os números reais entre 0 e 1. Isso mostra que este conjunto é "maior" que o conjunto dos números naturais. Então o intervalo $(0,1)$ *não é enumerável e temos que* $card((0,1)) > card(\mathbb{N})$. *Cantor mostrou que existiam diferentes ordens de infinito.*

4) E considerando o conjunto dos números naturais e de todos os números reais? Qual possui mais elementos?

Esta questão tem como objetivo expandir o raciocínio da questão anterior para todos os número reais. Os alunos devem refletir e tentar responder utilizando o conhecimento *desenvolvido. Pode-se argumentar que o intervalo* $(0,1)$ *está contido em* $\mathbb{R}$ *e portanto* $card(\mathbb{R}) > card(\mathbb{N}) = \aleph_0$*. Mas, para comparar a* $card((0,1))$ *e* $card(\mathbb{R})$*, basta notar que qualquer intervalo na reta real tem a mesma cardinalidade. Inicialmente note que* $card((0,1)) = card((0,2))$*, pois existe uma bijeção* $f : (0,1) \longrightarrow (0,2)$ *onde* $f(x) = 2x$*. Note também que a função bijetora* $f : (0,1) \longrightarrow (-3,3)$ *onde* $f(x) = 6x - 3$ *garente que* $card((0,1)) = card((-3,3))$*. Então, todo intervalo real possui a mesma cardinalidade, assim como toda a reta real. Os números reais são uma ordem de infinito "maior" que os naturais, ou seja,* $card(\mathbb{R}) > card(\mathbb{N}) = \aleph_0$*.*

Para finalizar a atividade, o professor pode comentar que Cantor foi além e descobriu conjuntos "maiores" que os reais. Ele demonstrou que o conjunto das partes de um conjunto possui cardinalidade superior que o próprio conjunto. Assim, Cantor pode constatar que sempre haveria um conjunto com cardinalidade maior que outro e não havia fim. Outro fato interessante é que Cantor provou que o conjunto das partes dos naturais possui mesma cardinalidade que os reais. Uma outra questão que intrigou Cantor foi: "Existe um conjunto cuja cardinalidade está entre os Naturais e os Reais?". Essa questão foi uma das mais importantes da história da matemática no final do século XIX e início do século XX, conhecida como a hipótese do continuum, expressa na equação $2^{\aleph_0} = \aleph_1$*.*

Observação 6.2. Esta atividade vai além do conteúdo trabalhado no Ensino Médio e por isso, talvez seja de díficil compreesão para grande maioria dos alunos, mas é importante apresentar as questões e discutí-las, de forma que desperte o interesse dos alunos e eles possam ver como a matemática trabalha questões fundamentais e intrigantes. O professor deve se aprofundar nas questões de acordo com o tempo e conforme o desenvolvimento dos alunos.

6.2 Relato da aplicação das atividades na escola estadual

As atividades descritas na seção anterior foram aplicadas com os alunos que estudam no período noturno e estão na 1ª série do ensino médio da escola estadual Professor João Queiroz Marques, que se localiza no distrito de Rubião Junior, na cidade de Botucatu-SP. A sala possui cerca de 20 alunos, número que apresentou variação devido a transferências.

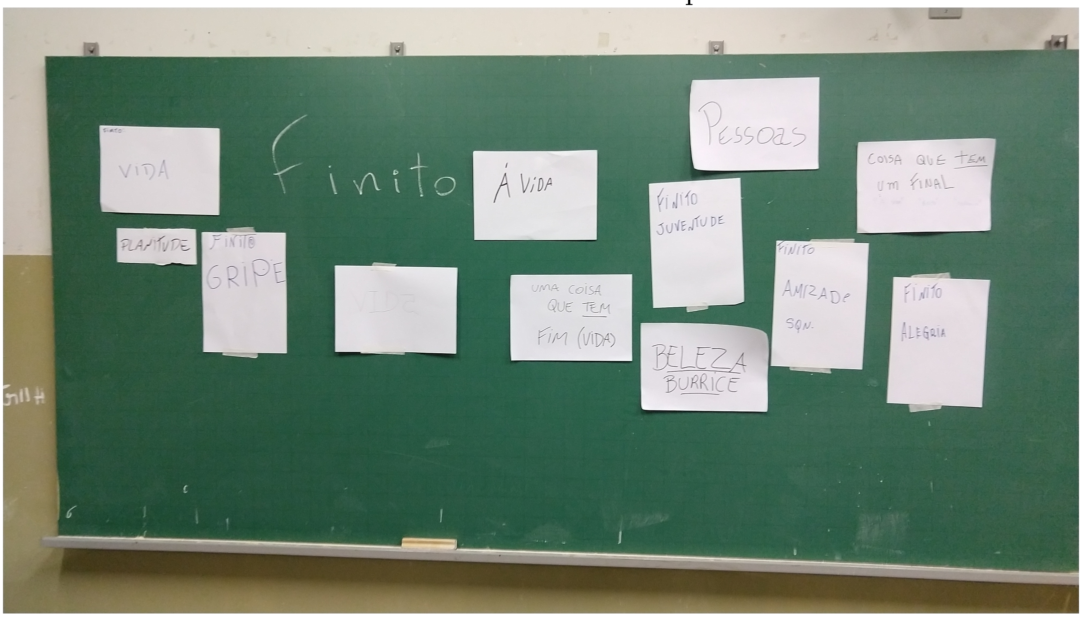
O perfil socioeconômico é caracterizado por alunos cujas as famílias pertencem as classes D e E e que trabalham duranto o dia, sendo que alguns residem na área rural. A duração da aplicação foi de aproximadamente 295 minutos, não tendo a participação de toda a sala em todas as atividades.

6.2.1 Relato da aplicação da atividade 1

A atividade teve duração aproximada de 50 minutos e contou com a participação de 15 alunos.

A primeira questão os alunos responderam primeiramente na folha de atividade e depois foram entregues pedaços de papel para que os mesmos preenchessem com suas respostas e colassem na lousa para que os demais pudessem ver e analisar as diferentes percepções. Esses papéis ficaram colados na lousa durante toda a atividade.

Figura 6.12: Palavras associadas ao conceito de finito para os alunos da escola estadual



Fonte: Arquivo do autor

Durante o processo, vários alunos perguntaram se estava certo o que tinham escrito, e foi respondido que não existe a resposta "certa" ou "errada", naquele momento o importante era que eles falassem o que pensavam. Conforme as respostas foram sendo coladas na lousa, alguns alunos se manifestaram dizendo que não concordavam como, por exemplo, a resposta de que a vida é finita. Foi comentado que é uma questão a ser discutida, mas que não seria

Figura 6.13: Palavras associadas ao conceito de infinito para os alunos da escola estadual

Fonte: Arquivo do autor

aprofundada nesta atividade. Outra questão polêmica foi o amor, apesar de não ter sido colocado na lousa, alguns alunos falaram que escutam a afirmação "te amo infinitamente" e se questionaram se o amor é finito ou não. Nesse momento foi comentado que essa é uma discussão muito antiga e que existe até uma obra de Platão - O Banquete - que discute a temática do amor. De forma geral, os alunos participaram bastante e houve discussões interessantes, porém três alunos tiveram pequena participação, alunos estes que dificilmente participam das aulas normalmente e possuem grande dificuldade de aprendizagem.

As respostas apresentadas pelos alunos na primeira questão da atividade foram:

- Finito: Vida, pessoas, algo que tem fim, juventude, amizade, beleza, burrice, feiura, gripe, alegria, comida, petróleo, doenças, família, algo que um dia vai acabar, corrida de carro, borracha, fotos, segundos.

- Infinito: Espaço, Jesus, amizade, algo que não tem fim, câncer, depressão, numeração, contagem numérica, algo que nunca acaba, estrelas, Deus, dinheiro, sentimentos, algo que a gente leva para a vida toda.

Nem todos os alunos quiseram colocar suas repostas na lousa, sendo respeitada a vontade dos alunos, algumas respostas ficaram restritas apenas à folha da atividade.

Na segunda questão, os alunos não se aprofundaram nas explicações além do que foi feito na primeira questão. Em geral, todos responderem que finito é algo que tem fim ou acaba enquanto infinito é algo que não tem fim, não acaba, dura para sempre, e depois acabaram utilizando os mesmos exemplos da primeira questão.

Na terceira questão, a grande maioria respondeu que se deparam com as palavras finito e infinito no seu dia a dia em lugares como: casa, trabalho, escola, na televisão, no Facebook, WhatsApp, Instagram e aula de ciências. Mas, quando questionados se já haviam pensado sobre o assunto, a sala se dividiu praticamente na metade entre sim e não. Vale ressaltar que um aluno respondeu que nessa atividade foi a primeira vez em que parou para pensar sobre isso.

Na quarta questão, os alunos não compreenderam todas as respostas dos professores, sendo necessário que algumas fossem explicadas para que eles pudessem entendê-las. Após a intervenção para esclarecer algumas dúvidas, os alunos responderam à questão de forma breve, sendo que alguns deram respostas baseados na afinidade com o professor em questão. Foi sugerido para os alunos que perguntassem para os professores sobre a resposta de cada um para que estes pudessem explicá-las melhor. Grande parte das respostas foram curtas e não trouxeram muitas informações ou pautas para discussões em sala, como por exemplo, “eu achei interessante a fala de tal professor”, ou “eu achei a resposta mais esclarecedora”, ou “tal professor é legal”. Poucos alunos responderam com mais detalhes e explicaram melhor sua resposta. Por exemplo, um aluno disse somente que gostou da resposta do professor de português pois fez associação do infinito a Deus, outro gostou da resposta dos professores de biologia e química, pois conseguiu associar com a vida, ou então, o aluno que se identificou com o professor de história, pois ele nunca havia estudado o conceito de infinito.

No final, as folhas de atividades foram recolhidos pelo professor e foi solicitado que os alunos questionassem amigos e parentes sobre o entendimento deles em relação ao conceito de finito e infinito e trouxessem as repostas na próxima aula. De forma geral, os alunos se envolveram na atividade e gostaram de refletir sobre as questões apresentadas. Foi possível perceber que esse tema é relevante para a grande maioria dos alunos e é um campo muito fértil para discussões e estudos, podendo ser mais explorado de diversas formas e com muito mais profundidade. Porém, o objetivo da primeira atividade foi apenas fazer uma provocação inicial a respeito do tema.

6.2.2 Relato da aplicação da atividade 2

A atividade teve duração aproximada de 70 minutos e contou com a participação de 16 alunos.

Ao começar a aula, apenas um aluno relatou ter perguntado em casa sobre o conceito de infinito e finito. Ele questionou a mãe, que respondeu que infinito era algo que não tinha fim era algo pequeno, e o irmão, que respondeu que infinito era algo sem fim, por exemplo, a numeração e finito era algo que tinha limite.

Ao iniciar a atividade, os alunos não souberam a princípio responder a questão 1, sendo que em sua maioria os alunos tentaram usar os números ou a linguagem, mas foi reforçado a todo momento, lembrando a eles que não existiam números ou linguagem segundo o enunciado. Após aguardar mais alguns minutos, um aluno respondeu que era possível contar fazendo algumas marcas em uma madeira, essa resposta especificamente surpreendeu, pois o aluno em questão possui muita dificuldade mesmo com operações básicas, sendo que ele mesmo faz marcações verticais para fazer contas de adição e subtração nas atividades em sala e provas. Foi questionado a este aluno de onde que ele tirou essa ideia de fazer marcações em uma madeira e o mesmo relatou que viu em um filme. Após essa resposta, outros alunos começaram a ter ideias semelhantes e falaram que era possível fazer marcações em tecido, na terra, utilizar pedras ou gravetos. Após a discussão das respostas dos alunos, foi comentado que também era possível fazer marcações em ossos ou utilizar nós e foi contado a história do surgimento dos números. Por último nesta questão, foi apresentado o conjunto dos números naturais, e alguns alunos comentaram que lembravam desse termo e seu símbolo e outro aluno ainda comentou que lembrava de outros conjuntos numéricos como os inteiros, os racionais e os irracionais, e a questão foi encerrada com a apresentação de outros sistemas de numeração como os romanos e os egípcios.

A questão 2 foi facilmente respondida, apenas alguns alunos tentaram copiar os nomes do horário escolar e acabaram contando duas vezes os professores que tinham aulas duplas, confusão esta que foi rapidamente resolvida. Após as dúvidas serem esclarecidas, todos chegaram à mesma conclusão, que o total de professores é igual a 9. Para finalizar a discussão da questão 2, foi comentado que os números naturais são utilizados para contar, ordenar, medir e codificar.

Para a questão 3, foram utilizados 2 tipos diferentes de tijolos, o maciço e o tijolo baiano de 6 furos, trena e régua para realizar as medições. Inicialmente os alunos foram questionados de como poderia ser feita a contagem do número de tijolos necessários para a construção da parede, e a princípio, ninguém soube responder. Foi solicitado então que um aluno ajudasse a medir as dimensões da parede e as medidas foram 7 metros de comprimento por 3,2 metros de altura. Também foram medidas as dimensões de um dos tijolos, as medidas foram 21,5 cm por 4,5 cm. Mesmo com as medidas, os alunos não souberam como proceder para resolver o problema e foi necessário intervir, explicando que era possível calcular a área da parede e comparar com a área de cada tijolo. Um aluno lembrou que a área do retângulo que forma a parede é dada pela multiplicação da base e da altura, assim calcularam a área da parede ($7\ .\ 3{,}2 = 22{,}4\ m^2$) e outro aluno questionou a notação (m^2) que foi utilizada para representar a área, querendo entender porque tinha o número 2 como expoente em relação ao m. Foi explicado que a notação pode ser justificada pois a área desse retângulo seria dada pelo produto das dimensões $7\ \mathrm{m}\ .\ 3{,}2\ \mathrm{m} = 7\ .\ 3{,}2\ .\ \mathrm{m}\ .\ \mathrm{m} = 22{,}4\ m^2$, ou seja, estavam multiplicando duas medidas dadas em metros e por isso era possível representar a área daquela forma. Foi informado aos alunos que, segundo um pedreiro, a estimativa de tijolos que são utilizados por metro quadrado, para o primeiro tipo de tijolo é de 74 tijolos por m^2 e para o segundo tipo de tijolo é de 35 tijolos por m^2. Para facilitar o entendimento, foi desenhado na lousa um quadrado de 1 metro de comprimento por 1 metro de largura, ou seja, com 1 m^2 de área para eles pudessem visualizar a situação. Desta forma, um aluno percebeu que bastava multiplicar 74 pela área da parede para calcular o total de tijolos (do primeiro tipo) necessários na construção da parede, e assim os alunos conseguiram realizar os cálculos e responder à questão. Alguns alunos perceberam que para fazer a estimativa, era importante lembrar que seria necessário pensar no cálculo da quantidade de argamassa de assentamento, mas foi explicado que a estimativa apresentada pelo pedreiro já levava em consideração a quantidade de argamassa empregada. Um fato surpreendente que ocorreu na escola neste dia, foi que os alunos das outras salas, viram os tijolos, régua e trena e ficaram curiosos, perguntaram para que seria usado tudo aquilo. Foi explicado que seria feita uma atividade de medir a sala e ver quantos tijolos seriam necessários para construir a parede. Eles pediram para fazer essa atividade com eles também e foi muito interessante. Nas outras salas tinham alunos que já trabalharam ou trabalhavam como serventes de pedreiro e se identificaram muito com o exercício. Foi realizada a atividade de forma semelhante nas outras duas salas do período noturno e, como foi feita apenas esta atividade, foi possível ir além e pensar em outras questões relativas à construção. Foi conversado sobre o preço dos tijolos e como fazer os cálculos para ver o preço final da parede. Os próprios alunos explicaram como é feito para assentar o tijolo e mostraram fotos de construções que fizeram. Falaram da espessura da camada de argamassa de assentamento, do preço do saco do cimento para a argamassa e o preço do milhar do tijolo. No 1º ano não tinham alunos que trabalharam com construção, então essa questão foi mais produtiva nas outras salas devido às discussões e outros exercícios gerados com as informações dadas pelos alunos.

Na atividade 4 os alunos responderam que era impossível contar exatamente todas as estrelas e os grãos de areia na praia. Um aluno falou que o número de grãos de areia em uma praia ou a quantidade de estrelas eram infinitos, mas outro logo questionou e disse que o número de grãos de areia numa praia era finito, por mais que fosse difícil contar, em algum momento chegaríamos ao total de grãos. Um aluno comentou que era possível medir um punhado de areia numa caixa e depois medir a as dimensões da praia e assim, realizar o cálculo do total de grãos de areia. Já na foto da multidão, os alunos responderam que era possível contar pessoa por pessoa, mais isso levaria tempo e exigiria paciência, e alguns se aventuraram em fazer essa contagem e disseram que o número total de pessoas era um pouco maior que 70. Não foi possível discutir profundamente a última questão devido ao fim do tempo da aula, portanto, a atividade foi encerrada.

6.2.3 Relato da aplicação da atividade 3

A atividade teve duração aproximada de 70 minutos e contou com a participação de 15 alunos.

Inicialmente foi explicado que, na matemática, para realizar o estudo do conceito de finito e infinito, é fundamental ter noção de função e suas classificações e o objetivo da atividade era explorar essa ideia. A primeira questão chamou atenção dos alunos quando foi afirmado que as pessoas do problema eram membros da família do professor e logo eles questionaram se o mesmo não tinha filhos, se eu era tio e quiseram saber mais. Os alunos fizeram a correspondência entre os conjuntos facilmente. No item c) houve questionamentos sobre os elementos Bruno e Vinícius, que ficariam sem correspondência, assim como houve questionamentos de como responder o item d). Foi explicado que o objetivo era utilizar os exemplos para retomar o conceito de função. Quando questionados sobre esse conceito, os alunos não se recordavam ou nunca tinham estudado, então foram explicadas as condições para que as relações fossem consideradas uma função e eles responderam o item d) sem dificuldade.

Na segunda questão, a maioria dos alunos conseguiu realizar a correspondência, terminaram rapidamente e não apresentaram dificuldade, porém uma minoria precisou de intervenção ou alguma explicação extra para concluir as correspondências. Os diagramas da questão 2 foram escritos na lousa e explicados os conceitos de domínio, contradomínio e imagem utilizando os exemplos. Quando questionados sobre os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora, todos os alunos desconheciam os termos, e, após explicado o conceito de função injetora, foi pedido para eles classificarem os itens, o que fizeram sem maiores dificuldades. O procedimento foi repetido com os conceitos de função sobrejetora e bijetora, e os alunos conseguiram classificar e finalizar a tarefa. Para encerrar a atividade, foi apresentada a lei matemática que representava a correspondência do item a), onde x é o número de copos e $f(x)$ é o preço que será pago. Os alunos não tinham noção de como seria essa lei e foi explicado que esta era dada por $f(x) = 1,50.x$ porque dessa forma que era calculado o valor a ser pago: 1 copo $(1,50.1 = 1,50)$, 2 copos $(1,50.2 = 3,00)$, e assim por diante. Aos alunos, foi pedido que fizessem um raciocínio análogo no item d), imaginando qual seria a operação utilizada para fazer a correspondência entre os conjuntos. Um aluno conseguiu responder corretamente dizendo que a função era $f(x) = x.8 + 10$. Utilizando esse exemplo, foi dito aos alunos que poderiam escrever $f(1) = 18$, $f(2) = 26$, $f(3) = 34$, e assim por diante, foi natural para eles compreenderem essa notação. Foi comentado que era possível encontrar as leis das funções do item b) e c), porém seria muito trabalhoso.

Para a questão três, foi necessário montar o diagrama e explicar o item a). Os alunos tentaram resolver os outros itens, alguns alunos resolveram rapidamente e classificaram corretamente as funções, mas a maioria encontrou dificuldades e precisou de intervenções e mais explicações. No fim, nem todos conseguiram terminar a última questão.

6.2.4 Relato da aplicação da atividade 4

A atividade teve duração aproximada de 45 minutos e contou com a participação de 16 alunos.

Para retomar o conceito de função bijetora, foi utilizada a questão 1, onde os alunos foram questionados sobre que tipo de função relacionava o conjunto dos números de 1 até 9 com o conjunto formado pelos professores e um aluno respondeu corretamente que era a função bijetora. Quase todos responderam corretamente que a quantidade de professores era finita, apenas três alunos tiveram dúvidas, mas com uma pequena intervenção estes entenderam e conseguiram responder. Foi explicado que era dessa forma que é classificado um conjunto finito, quando existe uma bijeção com o subconjunto dos números naturais de 1 até n e se diz que esse conjunto tem n elementos.

A questão dois foi iniciada comentando sobre o fato do 0 ser considerado natural ou não, foi explicado que era indiferente e era uma questão de escolha e que, no caso a ser trabalhado, o 0 não seria considerado natural, apesar dos livros didáticos da escola o considerarem. Quase todos os alunos responderam que os números naturais são infinitos e, para justificar esse fato, a maioria respondeu que era uma sequência que não tinha fim. Alguns alunos chegaram a mencionar que no conjunto dos números naturais sempre seria possível encontrar um próximo número, sugerindo a ideia que todo número natural possui um número subsequente. Apesar de os alunos não mencionarem o termo “sucessor”, foi utilizada essa linguagem e explicado que é possível afirmar que todo número natural possui um sucessor e, portanto, seria infinito. Neste caso, não foi apresentada uma demonstração formal sobre o assunto.

Na questão 3 a) os alunos responderam que era possível fazer a quadrilha, pois as duas salas possuíam a mesma quantidade de alunos e um aluno mencionou que daria para formar a quadrilha pois existia uma função bijetora entre os conjuntos. No item b) a maioria respondeu que não era possível fazer a quadrilha, pois existiria mais homens do que mulheres. Alguns alunos argumentaram que seria possível desde que dois homens dançassem com a mesma mulher. Foi falado que dessa forma não seria uma função bijetora, e os alunos foram questionados sobre qual tipo de função seria. Como eles não se lembravam, foram retomadas as definições de função injetora e sobrejetora e explicado que nessa situação seria uma função sobrejetora. Alguns alunos argumentaram que poderiam dançar um homem com outro homem para resolver o problema, e perguntaram que tipo de função seria aquela. Foi explicado que no caso dessa questão, deveriam obrigatoriamente relacionar os elementos de um conjunto com os elementos do outro conjunto e que não seria possível relacionar os elementos dentro do mesmo conjunto, mas que caso fosse possível mudar alguns alunos de sala seria possível estabelecer uma função bijetora e organizar a quadrilha de modo que todos participassem. Para finalizar, os alunos foram questionados se era possível fazer uma bijeção entre os dois conjuntos no item a e no item b, e estes viram que no item a) era possível e no b) não e, de maneira informal, foi mostrado que um conjunto finito não poderia fazer uma bijeção com uma parte própria sua.

Na atividade 4 a) os alunos responderam que era possível formar a quadrilha pois as salas possuem o mesmo número de alunos, não sobrando e nem faltando ninguém. Questionados novamente que tipo de função poderia ser estabelecida entre os conjuntos, alguns alunos responderam que seria uma função bijetora. No item 4 b) teve uma discussão interessante entre dois alunos, enquanto um dizia que ainda seria possível fazer a quadrilha, porque mesmo saindo infinitos alunos do 1B, ainda teriam infinitos alunos para formarem os pares, o outro aluno pensou de forma diferente e argumentou da seguinte maneira: "Imagine um número muito grande de alunos, por exemplo, 15000, saindo metade da outra sala, não teria como formar essa quadrilha", neste momento um terceiro aluno concordou e disse que sobrariam muitos alunos, porém o primeiro aluno contra-argumentou que era diferente nesse caso, porque tinha infinitos alunos. Foi possível perceber que este fato realmente provocou uma reflexão por parte dos alunos, que começaram a se questionar sobre essas características peculiares dos conjuntos infinitos. Outro aluno ainda falou que poderiam juntar o aluno de número 1 do 1A e o número 2 do 1B, o aluno de número 2 do 1A e o número 4 do 1B, e assim por diante, e disse de maneira informal: "1 com 1 da 2, 2 com 2 da 4 e assim por diante". Pareceu, desta forma, sugerir uma função $f(x) = x + x$, mas não usou o termo e a notação de função. Quando questionado sobre qual função poderiam fazer para representar o que o aluno disse, eles não conseguiram responder e foi exibida a função $f(x) = 2x$ e questionada se a mesma era bijetora. Neste momento os alunos concordaram que era e, por fim, foi explicado que essa era uma forma de caracterizar um conjunto infinito. Diferente da questão 3, era possível estabelecer uma bijeção entre um conjunto e uma parte própria sua. A atividade não atingiu todos os alunos e nem todos conseguiram refletir sobre essa característica, mas foi interessante porque alguns realmente perceberam e foram provocados por essa noção matemática e os alunos que entenderam a última questão gostaram muito de pensar sobre esse assunto.

6.2.5 Relato da aplicação da atividade 5

A atividade teve duração aproximada de 60 minutos e contou com a participação de 15 alunos.

Inicialmente, os alunos foram questionados sobre os principais conjuntos numéricos: "quais seriam os números pertencentes ao conjunto dos números naturais?" e dois alunos logo responderam quais eram. Outro aluno disse que os naturais eram números inteiros, e foi explicado que o nome números inteiros é utilizado para representar outro conjunto e os alunos foram questionados, sobre quais seriam os números pertencentes ao conjunto dos números inteiros. Novamente, os mesmos dois alunos responderam que os inteiros eram os números de "menos infinito... -2, -1, 0, 1, 2, ... até mais infinito". Depois foi perguntado a sala sobre quais seriam os números racionais e dois alunos responderam que eram as frações. Outro aluno deu os exemplos $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $1,20$, no caso, se lembrou que $1,20$ podia ser escrito como fração, só não se lembrava o procedimento utilizado, o que foi preciso ser retomado. Também foi explicado que os números racionais possuem como elementos os números decimais finitos e também os que possuem dízima periódica e, como exemplo, foi dada a fração $\frac{1}{3}$. Um aluno logo respondeu dizendo que $\frac{1}{3} = 0,3333...$. Aproveitando o interesse dos alunos, foi questionado qual seria o conjunto dos números reais e ninguém soube explicar exatamente, então foi explicado que os reais englobavam os racionais e os irracionais e que os irracionais são números que possuem expressão decimal infinita e não periódica, como por exemplo o número $\sqrt{2}$. Após retomar os principais conjuntos numéricos, foi possível começar a responder as questões referentes à atividade do dia.

Na questão 1 alguns alunos responderam inicialmente que os dois conjuntos eram infinitos e por isso tinham a mesma quantidade de elementos. Outros disseram que os inteiros tinham mais elementos que os naturais, pois os inteiros possuíam tanto os números positivos como os números negativos. Foi solicitado que tentassem estabelecer uma correspondência bijetora entre os dois conjuntos. Alguns fizeram a correspondência entre o número 1 dos naturais com o 1 dos números inteiros, 2 com o 2, 3 com o 3 e assim por diante, mas dessa forma, o zero e os números negativos não seriam imagem pela função. Então foi mostrado a eles que existia um modo de fazer a correspondência de modo que cada natural tivesse seu correspondente nos inteiros e não sobrasse ninguém, ou seja, era possível estabelecer uma função bijetora entre os conjuntos. Nenhum aluno conseguiu desenvolver essa função e acabou sendo apresentado a função para eles na lousa explicando da seguinte forma: "Os números pares serão divididos por dois, os ímpares serão subtraídos uma unidade, dividido o resultado por dois e transformado em um número negativo". No caso o número 1 seria correspondente do 0. Desse modo, foi possível exibir uma função bijetora entre os dois conjuntos e por isso, pode-se afirmar que os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos. No caso, é dito que eles possuem a mesma cardinalidade.

Na questão 2 os alunos responderam inicialmente que o conjunto dos números racionais era infinito assim como os naturais e por isso possuíam o mesmo número de elementos. Um aluno observou que os números naturais correspondiam aos elementos da primeira coluna dos racionais, dispostos na forma de tabela, e então, aparentemente, os racionais possuíam mais elementos. Foi questionado aos alunos se não teria uma forma de fazer uma correspondência como no item anterior, ou seja, uma função bijetora entre os dois conjuntos. Nenhum aluno conseguiu desenvolver uma forma de estabelecer essa correspondência bijetora e então foi necessário explicar o método desenvolvido por Cantor, no caso, o "passeio de Cantor". Dessa forma foi concluído que os naturais e os racionais possuem a mesma cardinalidade.

Na questão 3 os alunos também responderam que os conjuntos possuíam o mesmo número de elementos, pois ambos eram infinitos. Para explicar que essa era uma situação diferente, foi utilizado o argumento de diagonalização de Cantor, mas não foi possível identificar se os alunos realmente entenderam, pois se trata de uma demonstração por contradição, que está distante da realidade dos alunos. Foi explicado que o infinito dos números entre 0 e 1 é um infinito "maior" que o infinito dos naturais e que existem diversos tipos de infinito, no caso, infinitos de cardinalidade diferentes. Essas explicações fizeram com que ficasse difícil saber o quanto os alunos compreenderam da demonstração, mas alguns alunos se surpreenderam ao saber que existe "infinitos maiores que os outros". Foi comentado que isso era estudado em matemática no ensino superior, indo além da matéria do ensino médio e foi perceptível que alguns alunos gostaram de saber que eles estavam vendo algo que era estudado só na Universidade.

Para a questão 4 não houve tempo de trabalhar adequadamente, e os alunos ficaram na dúvida na hora de responder, então foi dito a eles que se os números reais entre 0 e 1 já representavam um conjunto "maior" que os naturais, todos os reais também seriam maior que os naturais, já que os reais continham o intervalo $]0,1[$.

Durante essa atividade não foi possível ser muito rigoroso na linguagem com os alunos. Foi comentado que utilizamos o termo cardinalidade na comparação dos conjuntos infinitos, mas para simplificar, a expressão "um infinito é maior que o outro" foi utilizada diversas vezes, de maneira informal. Uma parte dos alunos não se interessou pelas atividades nesse dia e foi muito difícil trabalhar esse assunto complexo, sendo necessário explicar individualmente, para cada aluno que estava interessado. Para alguns alunos essa atividade foi de difícil compreensão e não teve significado, porém uma parte da sala realmente se interessou e foram instigados a pensar além do conceito tradicional de infinito, como algo que não tem fim, e puderam ter um pequeno vislumbre sobre os diferentes tipos de infinito e como a matemática aborda esse assunto.

6.3 Relato da aplicação das atividades na escola particular

As atividades também foram aplicadas com os alunos que estudam nos períodos matutino e vespertino e estão na 1ª série do ensino médio da escola particular Centro Educacional Professor Reinaldo Anderlini - CEPRA - que se localiza na cidade de Botucatu-SP. A sala possui 33 alunos. O perfil socioeconômico é caracterizado por alunos cuja as famílias pertencem as classes C e D. A duração da aplicação foi de aproximadamente 270 minutos, não tendo a participação de toda a sala em todas as atividades.

6.3.1 Relato da aplicação da atividade 1

A atividade teve duração aproximada de 45 minutos e contou com a participação de 29 alunos.

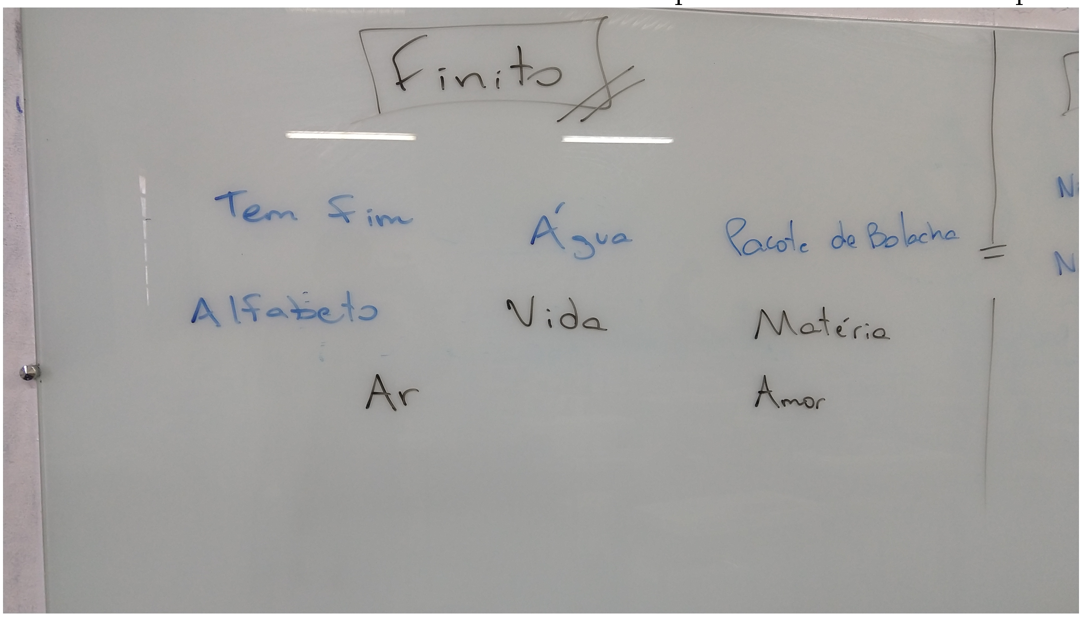
A primeira questão foi respondida na folha de atividade pelos alunos e, após essa etapa, foram reescritas na lousa pelo professor pois os alunos se mostraram com vergonha de ir na lousa e escrever. Ainda assim, alguns alunos preferiram não se manifestar, desta forma nem todas as respostas dos alunos puderam ser vistas pela classe e discutidas durante a atividade, apenas após recolher as folhas de atividades foi possível observar todas as respostas.

As respostas apresentadas pelos alunos na primeira questão foram:

- Finito: Algo que tem fim, água, pacote de bolacha, alfabeto, vida, matéria, ar, amor, matéria, água potável, animais, filme, séries, jogos, pessoas, recursos minerais, alimento, paixão, recursos naturais.

- Infinito: Algo que não tem fim, números, matéria, evolução, tempo amor, espaço, universo, vingadores, céu celestial, não chega no final, tempo, não tem limite, algo que começa e continua para sempre, amor a Deus, o símbolo ∞, vida, pessoas, um pacote de bolachas que nunca acaba, água, temperatura, matéria, ar.

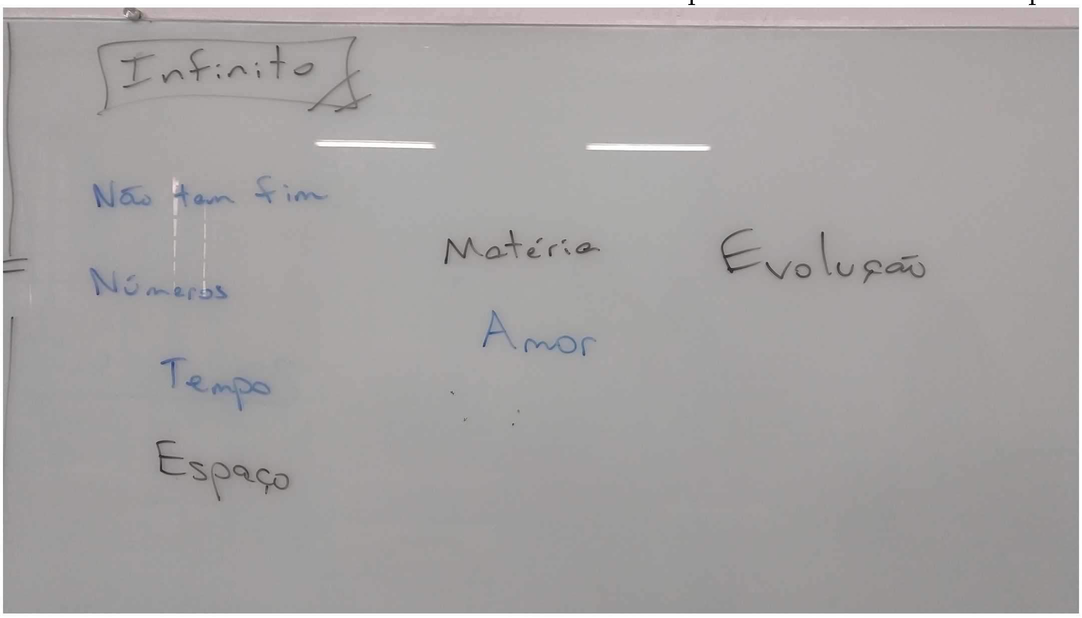
Figura 6.14: Palavras associadas ao conceito de finito para os alunos da escola particular



Fonte: Arquivo do autor

Na primeira questão, as palavras vida, água, amor, matéria, evolução geraram discussão na sala, dependendo da perspectiva de cada aluno. A palavra vida, por exemplo, alguns alunos afirmaram que a vida era finita e acabava após a morte do corpo, enquanto outros alunos argumentaram que existe vida após a morte, considerando, portanto, que a vida seria infinita. Essa discussão acabou entrando em questões relacionadas à crença e religião, mas não de foram aprofundadas, pois não era de interesse para a atividade. A água também foi outro tema de discussões, sendo considerada finita na perspectiva de um grupo de alunos, já o outro grupo argumentou que a água potável era um recurso finito, mas a água em si era infinita. A discussão chegou a receber a argumentação de um aluno quanto ao uso da água

Figura 6.15: Palavras associadas ao conceito de infinito para os alunos da escola particular



Fonte: Arquivo do autor

doce com consciência, caso contrário ela pode acabar pois esse sim seria um recurso finito. No caso do amor, parte dos alunos disseram que era algo finito, porém outros argumentaram que o amor verdadeiro era infinito, no caso, o amor que acaba era apenas uma paixão. A pergunta inicial gerou uma grande discussão entre os alunos e foi muito interessante o debate a respeito do tema finito e infinito. Houve várias discussões, porém nenhum tema específico foi aprofundado, explicando à classe que todas aquelas eram questões que podem ter diferentes pontos de vista e que as opiniões de cada um devem ser respeitadas.

Na segunda questão, as respostas foram muito semelhantes entre si e à primeira questão, a maioria fez a referência de finito como algo que tem fim e infinito algo que não tem fim, e neste momento um aluno comentou que certas questões era difícil dizer se era finito ou infinito, como o universo, além de outros exemplos discutidos anteriormente. Um resposta que chamou a atenção foi a de que "finito é tudo aquilo que conhecemos o limite e infinito é o que chamamos aquilo que desconhecemos o limite", e por ser uma resposta diferente das outras, o aluno leu para a sala. Muitas respostas chamaram a atenção e se destacaram das demais como: "finito é tudo aquilo que se tem um fim de acordo com a perspectiva do homem e infinito é tudo aquilo que seu fim não é perceptível pelo homem não acabando", "finito é tudo que pode atingir um máximo e infinito é algo que não tem um máximo", "o infinito é algo que não acaba, ele se reinicia", "infinito é algo imortal", "infinito é algo que nunca vai acabar independente das ações que agem sobre ele", "finito é algo que é temporariamente existente, ou seja, algo que tem começo, meio e fim. Infinito é exatamente ao contrário que o finito, ele é algo existente, não tem fim". Outra resposta interessante, principalmente pela criatividade e pela colocação com uma situação cotidiana, foi a resposta em que o aluno afirmou que algo finito era como um pacote de bolachas "normal", você vai comendo de uma em uma e uma hora acaba, já o infinito era como um pacote de bolachas que nunca acabava, você sempre poderia tirar mais uma bolacha do pacote. Essa resposta pode ser associada com os números naturais, por isso ela foi lida para toda a classe e comentada pelo professor. Esse exemplo foi utilizado posteriormente, na atividade 4, para falar dos números naturais.

Na questão três, a maioria dos alunos relatou escutar as palavras finito e infinito no dia a dia, sendo uma minoria os que escutam muito pouco ou não as escutam. Disseram que esses conceitos são ouvidos principalmente no ambiente da escola, nas matérias de matemática, física, química, biologia, e também encontradas no dia-a-dia em jornais, programas de televisão, em casa, em conversas com família e discussões entre amigos. Em relação a última parte da pergunta, as respostas ficaram bem divididas, enquanto alguns alunos disseram que nunca haviam pensado no conceito de finito e infinito, outros disseram que já pensaram mas nunca se aprofundaram nessa questão e outros ainda disseram que já tinham pensado muito sobre isso. Dos alunos que disseram que já pensaram sobre o conceito de finito e infinito, as respostas mais interessantes foram: "penso desde a infância nesse assunto, tentando descobrir a continuidade ou o fim de certos assuntos ou matérias", "já parei várias vezes para pensar, principalmente no Universo. O Universo é tão grande que ele parece ser infinito, tão vasto, cheio de planetas que parece que não acaba", "quando penso em amor, me vem na cabeça a palavra infinito", "tive pensamentos sobre o universo das coisas que vão embora, mas mesmo depois de séculos ainda é válido. Então é uma questão a ser muito discutida", "já tinha pensado sobre a vida, se ela tem fim ou não".

Na quarta questão, as respostas foram variadas e houve identificação com todas as disciplinas por parte dos alunos. Muitos responderam que se identificaram com a resposta de determinado professor pois o mesmo tinha os mesmos pontos de vista que ele, ou eram assuntos que eles gostavam e se interessavam, ou as respostas lhe pareciam mais lógicas e faziam mais sentido. Poucas foram as respostas nas quais os alunos não justificaram a escolha.

Um grupo de alunos se identificou com as respostas dos professores de Biologia, Química e Geografia pois trataram assuntos da vida cotidianas das pessoas e são coisas importantes para os seres vivos, como os recursos naturais. Neste momento parte dos alunos citaram a preocupação que têm com os recursos naturais, considerados finitos por eles. Outro grupo se identificou com o professor de Arte, como o aluno que citou que o professor de arte "vai muito além do que em relação de matérias". Outro grupo se identificou com a resposta do professor que leciona Sociologia, Filosofia e História em relação ao conhecimento humano, se é finito ou infinito e como desenvolvemos esse conhecimento. Outros alunos se identificaram com o professor de redação, pela fala em relação ao amor, como por exemplo a aluna citando que "...o amor é o que melhor define o infinito". Já a resposta do professor de Física foi escolhida pelos alunos que se identificaram com as grandezas físicas estudadas na matéria, como o tempo e temperatura, que podem ser finita ou infinita.

De maneira geral, a atividade foi muito interessante, gerou muitas discussões e alguns alunos relataram que estas questões faziam eles pensarem e refletirem bastante, deixando-os sempre intrigados sobre o assunto. O tempo utilizado para a realização da atividade foi de uma aula de 45 minutos, não existindo tempo hábil para discutir e questionar todas as respostas para entendê-las de forma clara.

6.3.2 Relato da aplicação da atividade 2

A atividade teve duração aproximada de 45 minutos e contou com a participação de 29 alunos.

Na primeira questão, em um primeiro momento os alunos acharam que seria impossível fazer a contagem sem números ou algum tipo de linguagem, mas após refletirem por mais tempo, começaram a descobrir algumas soluções e citaram que era possível fazer a contagem através de pedrinhas (fazendo a correspondência de cada pedra com uma ovelha), através de gravetos, fazendo marcações em superfícies como madeira entre outros, alguns pensaram em ter um lugar próprio para guardar cada ovelha no cercado, para ver se não faltou nenhuma e pensaram também em marcar cada ovelha de uma forma diferente para saber qual era cada uma. Outras respostas interessantes e diferentes foram que poderiam desenhar o rebanho para comparar depois, poderiam limitar o local onde as ovelhas iriam pastar e amarrar uma ovelha na outra para que elas ficassem juntas. Após os alunos responderem, foi comentado sobre as formas que os povos antigos procediam, contando um pouco da parte histórica até o surgimento da numeração. Foi explicado que cada povo criou um tipo de sistema numérico diferente e foi falado sobre o conjunto dos números naturais, seus elementos e seu símbolo.

A segunda questão foi facilmente respondida pelos alunos, mas tiveram respostas diferentes pois alguns alunos consideraram na contagem outros professores além da grade horária. Isso aconteceu porque alguns alunos faziam atividades extras em outro período na escola, como aula de capoeira, teatro, ginástica rítmica e também a situação da disciplina de educação física que possui dois professores diferentes para meninas e meninos, e alguns contaram apenas um deles enquanto outros contaram os dois professores. Mas o importante foi que todos entenderam como fazer e conseguiram responder à questão.

Na questão 3, alguns alunos prontamente ajudaram a medir a parede e foram obtidas as dimensões de 6,10 metros de comprimento por 3,40 metros de altura. Mediram também o tijolo e chegaram aos valores de 21,5 cm por 4,5 cm. Após um momento para que os alunos respondessem, alguns tomaram a iniciativa e falaram que era possível fazer a área da parede e do tijolo e comparar os valores. A área da parede foi 6,10 . 3,40 = 20,74 m^2 e a área do tijolo foi 0,215 . 0,04 = 0,0086 m^2. Foi necessário relembrar como fazer a conversão entre metros e centímetros, já que alguns alunos não lembravam. A estimativa do número de tijolos foi de 20,74 : 0,0086 = 2412 tijolos aproximadamente. Após realizarem os cálculos os alunos foram questionados sobre a argamassa de assentamento necessária para assentar os tijolos e foi questionado também como resolver esse problema levando isso em consideração. Parte dos alunos falou que seria necessário calcular a área da argamassa de assentamento também. Por fim, foi apresentado aos alunos que um pedreiro utiliza 74 tijolos por m^2 , e era dessa forma que ele fazia a contagem já levando em consideração a argamassa de assentamento empregada. Os alunos fizeram o cálculo apresentado pelo pedreiro e obtiveram o resultado de 20,74 . 74 = 1535 tijolos aproximadamente. Não foi discutido mais sobre o assunto e feito o cálculo com o outro tipo de tijolo devido ao tempo de aula.

Ao final da aula, os alunos responderam a última questão, mas não houve tempo hábil para discutir as respostas. Para alguns alunos o número de estrelas é infinito, outros responderam que os astrônomos conseguiam contar utilizando telescópio e algum tipo de máquina que fizesse a contagem, porém não especificaram que tipo de máquina seria utilizado, outros ainda disseram que era possível fazer apenas uma estimativa, pois existem bilhões de estrelas e que também a cada dia surgem estrelas novas e algumas desaparecem. Da mesma forma, em relação aos grãos de areia disseram que seria muito difícil realizar a contagem, levaria muito tempo ou seria difícil devido ao tamanho reduzido de cada grão. Novamente citaram que máquinas poderiam fazer a contagem, mas sem especificar que tipo de máquina, e dois alunos chegaram a considerar o número de grãos de areia como infinito. Já na foto da multidão, a grande maioria respondeu que era possível contar o total de pessoas e citaram que poderiam contar pessoa por pessoa na imagem, ou que existiam formas de fazer a estimativa pois existe algo que detecta as pessoas, mas assim como nos casos anteriores não explicaram exatamente como, também comentaram que se for um show, por exemplo, é possível contar o número de pessoas na entrada do evento. Uma minoria da sala respondeu que seria possível empregar uma contagem de forma parecida com os tijolos na questão anterior, analisando quantas pessoas têm por metro quadrado e fazendo uma estimativa do total. De forma análoga, disseram que isso poderia ser feito com as estrelas ou com os grãos de areia.

6.3.3 Relato da aplicação da atividade 3

A atividade teve duração aproximada de 45 minutos e contou com a participação de 31 alunos.

Antes de iniciar a atividade, foi comentado com os alunos como seria possível responder a última pergunta da atividade anterior. Para contar o número de grãos de areia em uma praia, poderíamos estimar essa quantidade em um cm^3 por exemplo, depois em um m^3 e analisar o volume de areia da praia segundo a topografia do local. Quanto às pessoas na foto, foi explicado que era possível fazer uma estimativa da quantidade de pessoas por m^2 e analisar a área a ser estudada. Já para fazer a contagem do número de estrelas, foi comentado que os astrônomos possuíam métodos diferentes para fazer essa análise, como análise da luminosidade, mas não seria possível explicá-los por uma falta de conhecimentos específicos sobe o assunto.

Na primeira questão, os alunos conseguiram fazer facilmente a correspondência entre os conjuntos e foram questionados sobre o item d), quais eram as condições para que a relação recebesse o nome de função. Os alunos recordaram que existia tais condições, mas não souberam dizer exatamente quais eram. Foi novamente apresentado a eles a definição de função e, após isso, os alunos responderam o item d) corretamente. Um aluno comentou que no item c), se Bruno e Vinicius ficassem aos cuidados de Beatriz, e eles se correspondessem com ela, a relação poderia ser considerada uma função. Depois os alunos foram questionados sobre a nomenclatura utilizada para representar os conjuntos e um aluno respondeu corretamente dizendo qual era o domínio, o contradomínio e a imagem, assim foi possível retomar esses conceitos com a turma.

Na segunda questão, todos os alunos conseguiram fazer a correspondência entre os conjuntos sem dificuldade. Foi solicitado para eles classificarem o domínio, contradomínio e imagem em cada item para reforçar esses conceitos. Como os alunos nunca tinham estudado as classificações das funções - injetora, sobrejetora e bijetora -, foi entregue uma folha com a definição de cada termo e explicada cada definição. Assim, os alunos conseguiram classificar as funções corretamente sem maiores dificuldades. Depois, foi questionado qual seria a lei que representa a função do item a), os alunos não entenderam, e foi explicado que a função era $f(x) = 1,5.x$ onde $f(x)$ era o preço e x a quantidade de copos. O conceito de função já havia sido trabalhado com os alunos no início do ano e isso facilitou o entendimento dessa questão. Assim, foi perguntado qual seria então uma possível função para o item d), e um aluno rapidamente respondeu que era $f(x) = x.8 + 10$. Foi comentado que era possível encontrar as leis das funções do item b) e c), porém seria muito trabalhoso.

A questão 3 não pôde ser concluída pois era fim de aula e foi solicitado que os alunos resolvessem em casa e trouxessem pronto para discutir no outro dia.

6.3.4 Relato da aplicação da atividade 4

A atividade teve duração aproximada de 90 minutos e contou com a participação de 30 alunos.

A aula foi iniciada retomando tudo que foi feito nas outras atividades, explicando que a primeira atividade foi uma abordagem inicial sobre o infinito, a atividade 2 foi sobre a noção de contagem que é um conceito importante na discussão do infinito, a atividade 3 sobre as classificações de funções também necessárias para explorar os conjuntos infinitos e que nas atividades 4 e 5 será discutido bastante sobre o infinito na matemática propriamente dito. Antes de iniciar a nova atividade, foi retomada a questão 3 da atividade anterior, conforme combinado anteriormente. Os conjuntos de cada item foram desenhados na lousa e, de forma coletiva, foram completados os diagramas e as funções classificadas. Foi possível retomar as classificações das funções e os alunos não apresentaram dificuldades.

Após finalizar a atividade 3, foi dado início à atividade 4, comentando que o conceito do infinito é uma questão que intriga a humanidade há muitos anos, foi citado então o paradoxo de Zenão - sobre a tartaruga e a lebre - e isso gerou uma discussão acalorada na turma. Alguns alunos já conheciam esse paradoxo, outros compreenderam o paradoxo proposto, porém outra parcela dos alunos achava claramente que a lebre iria ultrapassar a tartaruga e não havia o que ser discutido. Como houve grande interesse dos alunos, foi explorada a situação e explicado que a ideia de dividir o espaço e o tempo da corrida em várias etapas, infinitamente, geraria esse paradoxo. Um aluno disse que já conhecia esse paradoxo e que sabia outros paradoxos de Zenão, e foi abordado assim o paradoxo da pessoa que deseja sair de uma sala de forma que cada vez dá um passo que vale metade da distância que falta para chegar a porta de saída, mesmo com um número infinito de etapas, jamais a pessoa poderia sair da sala. Após essa discussão, o mesmo aluno citou o paradoxo do viajante no tempo, que volta e mata seu pai antes de ter concebido o viajante, o que gerou outra discussão acalorada e se tornou difícil acompanhar todas as falas e ideias dos alunos neste momento. Foi citado depois o paradoxo do barbeiro, o que acabou gerando outro grande debate, alguns alunos tentando entender, outros sem compreender e outros ainda que haviam compreendido, e aproveitando a situação, foi comentado da importância desse paradoxo na teoria dos conjuntos, porém não foram abordados detalhes teóricos sobre o assunto. Para finalizar, outro aluno citou um paradoxo envolvendo o personagem Pinóquio, caso o personagem dissesse: “meu nariz vai crescer” e isso acabaria gerando um outro paradoxo. O assunto dos paradoxos gerou grande interesse por parte dos alunos e houveram diversas discussões entre eles, sendo impossível relatar tudo que foi dito. Por fim, foi proposto a elaboração de uma aula sobre paradoxos futuramente, pois as discussões se prolongaram e foi preciso encerrá-las, para dar início a quarta atividade. O aluno que citou os paradoxos de Zenão, e que foi muito participativo nesta aula, falou que gostava muito desses assuntos e já tinha lido a respeito, pois eram coisas que o intrigavam.

Para iniciar a primeira questão da atividade 4, a primeira questão abordou a correspondência entre os conjuntos na lousa e os alunos foram questionados sobre qual era a correspondência estabelecida entre o conjunto formado pela numeração e os conjuntos dos professores. Os alunos responderam que era uma função bijetora e que eles tinham um número finito de professores. Foi explicado que a ideia de um conjunto ser finito se baseava na existência de uma bijeção entre o conjunto com $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$, para algum n natural, dizemos nesse caso que o conjunto tem n elementos.

Na segunda questão, todos os alunos disseram que os naturais eram infinitos, mas tiveram uma dificuldade inicial para justificar tal afirmação, e foi falado que em matemática é provado isso rigorosamente, mas que a ideia era que eles tenteassem explicar utilizando as próprias palavras. Alguns argumentaram que os naturais eram infinitos porque não tinham fim ou não conhecíam seu limite. Outros argumentaram que não existia o maior número natural, pois sempre tinha o próximo número que é maior que ele, sempre existindo um sucessor para ele. Foi recordado então o exemplo do pacote de bolachas que nunca acaba, proposto pelo aluno na primeira atividade, da qual sempre era possível tirar mais uma bolacha.

Na questão 3 a), todos os alunos concordaram que era possível formar a quadrilha pois tinha a mesma quantidade de alunos nas duas salas, muitos falaram que bastava fazer os pares entre o número "iguais", 1 com 1, 2 com 2, e assim por diante, e foi desenhado na lousa os conjuntos com os números de 1 até 20 e foi feito o diagrama e a correspondência entre esses elementos. Os alunos foram então questionados sobre a existência de outra forma de fazer a correspondência, e todos disseram que existe. Um aluno disse que existiam infinitas formas de montar a quadrilha enquanto outro disse que existiam 20 formas diferentes, e diante das respostas divergentes, foi comentado que existiriam 20 fatorial formas diferentes de fazer a correspondência e que o assunto seria estudado no próximo ano. Foi pedido para os alunos classificarem a função que representaria a quadrilha e alguns logo responderam que existia uma função bijetora entre os dois conjuntos e o item foi finalizado comentando que, se existia uma bijeção entre dois conjuntos, então eles tinham o mesmo número de elementos. Na questão 3b), foram apagados os números ímpares de um dos conjuntos para representar a situação, e alguns alunos responderam que não era possível montar a quadrilha, outros responderam que daria mas alguns homens iriam ficar de fora. Sugeriram também dançar em trio (2 homens com uma mulher), mas foi lembrado que o enunciado dizia que o casal deveria ser formado por um homem e uma mulher e de forma que não sobrasse ninguém. Foi questinado se era possível estabelecer uma relação bijetora entre os dois conjuntos. Os alunos perceberam que não era possível, e foi reforçado o fato de os números do conjunto $\{2, 4, 6, ..., 20\}$ eram uma parte própria do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., 20\}$ e seria impossível estabelecer uma bijeção entre um conjunto e uma parte própria sua, no caso de conjuntos finitos.

Na questão 4 a), os alunos responderam prontamente que ainda era possível fazer a quadrilha, mesmo tendo infinitos alunos em cada sala, o número de alunos era o mesmo, bastava ligar o aluno 1 com 1, 2 com 2 e assim por diante, semelhante a questão anterior. Durante o debate, um aluno trouxe uma fala interessante, dizendo que era possível formar infinitas quadrilhas. Novamente foi pedido para eles argumentarem através da classificação de função e eles responderam que a relação era uma função bijetora. À partir daí, foi questionado qual era a função que fazia essa relação, porém os alunos não compreenderam ou não souberam responder, então foi apresentada a função $f(x) = x$.

A questão 4 b) trouxe uma grande discussão, alguns alunos afirmaram que não seria possível pois teria menos meninas enquanto outros falaram que seria possível porque os dois conjuntos eram infinitos. Acabou sendo explicado que realmente era possível formar essa quadrilha, sem sobrar ninguém, e uma forma era fazer a correspondência do aluno número 1 com a aluna número 2, o 2 com o 4 e assim por diante. Um aluno acabou comentando que se fizesse a correspondência do 2 com o 2, o 4 com o 4, o 6 com 6 e assim por diante, os ímpares iriam ficar de fora, sugerindo que não era possível montar a quadrilha, sem sobrar ninguém, mas foi argumentado que existia a outra forma de fazer a correspondência e foi citado o fato de existir uma função bijetora entre os dois conjuntos. Perguntados se alguém saberia dizer qual era a função que fazia essa bijeção, alguns alunos arriscaram $f(x) = x+1$ e foi mostrado que não era, dando exemplos como $f(1) = 1 + 1 = 2$, mas $f(2) = 2 + 1 = 3$, ou seja, não seria correto. Outro aluno falou que era $f(x) = \frac{x}{2}$, e foi explicado que dependendo da forma analisada poderia ser sim, mas considerando o esquema na lousa seria a função f(x) = 2x e mostrando exemplos como $f(1) = 2.1 = 2$, $f(2) = 2.2 = 4$ e assim por diante. Foi comentado o fato de existir uma bijeção entre os dois conjuntos infinitos, então poderia dizer que eles têm o mesmo número de elementos, mas nesse caso utiliza-se o termo cardinalidade, dizendo que os dois conjuntos são infinitos, mas possuem a mesma cardinalidade. Novamente foi falado sobre o fato de o conjunto $\{2, 4, 6, ...\}$ ser um parte própria de $\{1, 2, 3, 4, 5, ..\}$ e que mesmo assim era possível estabelecer uma bijeção entre eles, ou seja, era possível estabelecer uma bijeção de um conjunto com uma parte própria sua, mostrando que essa que era a grande diferença entre um conjunto finito e um conjunto infinito, e essa era uma forma de distingui-los. Comentado que Galileu Galilei ficou intrigado com essa mesma questão, os alunos ficaram muito interessados e acharam estimulantes essas ideias. Também foi falado sobre Cantor, que foi o grande matemático que trabalhou com essas noções de conjuntos infinitos e ajudou a desenvolver a matemática nessa área, contribuindo para a estruturação da matemática atual.

Acabou sendo utilizada uma aula e meia para realizar a atividade 4, mas como faltavam cerca de 20 minutos para o término da aula, esse tempo foi utilizado para questionar os alunos de quais eram os principais conjuntos numéricos como uma preparação para a atividade 5. Como esse conteúdo já tinha sido trabalhado no início do ano letivo, foi possível perceber que muitos alunos ainda se recordavam quais eram os conjuntos e quais elementos pertenciam a cada um. No caso dos alunos que não lembravam de algum conjunto especificamente, através do diálogo foi possível retomar esse conteúdo. Para continuar a explanação sobre o tema, foi solicitado para que os alunos pensassem a respeito dos infinitos desses conjuntos, se existia alguma diferença, quais conjuntos possuíam mais elementos, e foi comentado que Cantor fez esse estudo e descobriu o fato surpreendente de existirem infinitos maiores que outros e apresentou ideias revolucionárias nessa área e seriam discutidas na próxima atividade.

No fim da aula, alguns alunos falaram que gostaram muito da atividade e do fato de pensar a respeito do infinito e dos paradoxos, sendo que um aluno chegou a afirmar que não gostava muito de matemática, mas que pensar nessas coisas era estimulante e ele gostava disso. Outro aluno que participou bastante durante a atividade relatou achar interessante como o tempo passa e certas questões continuam as mesmas. Foi percebido que alguns alunos realmente foram instigados por essas questões e ficaram fascinados com as propriedades dos conjuntos infinitos.

6.3.5 Relato da aplicação da atividade 5

A atividade teve duração aproximada de 45 minutos e contou com a participação de 30 alunos.

A aula foi iniciada relembrando a forma que se distingue um conjunto finito e infinito, como visto na atividade anterior e que iria ser comparada a cardinalidade dos principais conjuntos numéricos. Foi comentado que o conjunto dos números naturais é considerado o infinito mais "simples" e denominamos que o infinito dos naturais possui cardinalidade alef

0 e se escreve $card(N) = \aleph_0$. Foi explicado que a letra $\aleph$ é de origem hebraica, sendo a primeira letra do alfabeto e que Cantor foi quem escolheu a notação.

Na questão 1, os alunos foram questionados sobre qual conjunto tem mais elementos, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, alguns argumentaram que os inteiros eram maiores pois continham os naturais e possuíam o 0 e os números negativos, outros disseram que ambos os conjuntos eram infinitos e, portanto, possuíam o mesmo número de elementos. Um aluno chegou a afirmar que nos inteiros existem dois infinitos, enquanto nos naturais existe apenas um infinito. Foi dito que os conjuntos possuíam o mesmo número de elementos e foi pedido para eles tentarem justificar através de uma bijeção entre os conjuntos. A princípio, falaram em fazer a correspondência entre o número 1 com o número 1, 2 com o 2, e assim sucessivamente, mas sobrariam o zero e os negativos. Após os alunos discutirem sem chegar a uma solução, foi apresentada a função que fazia a correspondência entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ e juntamente dos alunos foi estabelecida a correspondência bijetora entre os conjuntos e concluído que os dois conjuntos possuíam o mesmo número de elementos. No caso, era possível dizer que eles possuem a mesma cardinalidade e é denotado que $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

Na questão 2 foi seguido o mesmo procedimento da questão 1, questionando os alunos qual seria a relação entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ que estavam organizados de acordo com a tabela 6.2 (pág. 116) . Alguns perceberam que a primeira coluna de $\mathbb{Q}$ eram os próprios naturais e que existiam números que estavam listados mais de uma vez na tabela, como as frações equivalentes $\frac{1}{1}$ e $\frac{2}{2}$. Alguns alunos acharam que $\mathbb{Q}$ era maior que $\mathbb{N}$ e outros acharam que, como ambos eram infinitos, possuíam a mesma cardinalidade. Foi argumentado que existe um modo de fazer uma bijeção e era possível mostrar que os conjuntos possuíam a mesma cardinalidade e foi pedido para eles tentarem estabelecer essa bijeção. Como nenhum aluno apresentou uma resposta, foi mostrado através do “passeio de Cantor” como isso era possível, deixando claro que não seria apresentado de maneira formal a função, mas apenas uma noção de como fazer o processo. Um aluno percebeu que se dois números naturais diferentes fizessem correspondência, um com a fração $\frac{1}{1}$ e outro com a fração $\frac{2}{2}$ a função não seria bijetora, pois as frações são equivalentes, no caso, foi necessário argumentar que excluindo as frações equivalentes era possível seguir o mesmo processo. Alguns alunos ficaram na dúvida de como era estabelecido o “caminho” durante “o passeio de Cantor”, mas outro aluno citou que o processo lembrava um pouco o diagrama de Pauling que eles haviam estudado na matéria de Química. Essa fala pareceu fazer mais sentido para os alunos que estavam na dúvida e disseram compreender melhor a ideia. Mas foi notado que para alguns alunos as discussões não estavam fazendo muito sentido enquanto outros conseguiram compreender melhor. Foi finalizado o assunto denotando que $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Q}) = \aleph_0$.

Na questão 3 os alunos não tinham ideia de como proceder para fazer a correspondência entre os conjuntos e assim responder a pergunta. Foi explicado que era uma questão interessante, pois havia uma diferença em relação as questões anteriores e exibido o argumento da diagonalização de Cantor, mostrando que não existia uma bijeção entre os conjuntos. Dessa forma foi argumentado que a cardinalidade do intervalo $]0, 1[$ é maior que a cardinalidade dos naturais. Neste momento muitos alunos ficaram na dúvida e não compreenderam, mas, de qualquer forma, acharam bem interessante imaginar que existem diferentes tipos de infinito, foi uma ideia surpreendente para eles. Foi uma questão difícil de ser trabalhada, pois está muito distante da realidade dos alunos, mas levar uma pequena noção dessa ideia para eles se mostrou significativo.

A questão 4 não foi trabalhada em detalhes, apenas foi mostrado que como os reais continham o intervalo]0,1[então a cardinalidade dos reais é maior que cardinalidade dos naturais.

O tempo para realização dessa atividade foi de cerca de 45 minutos. Porém, foram utilizadas metade de uma aula e metade de outra aula para sua realização, pois a aula foi interrompida pela coordenação para discutir assuntos internos. Como sobrou um tempo na segunda aula, foi possível contar um pouco mais da vida e das ideias de Cantor, de como suas teorias foram consideradas excêntricas na época e tiveram muita rejeição, mas foram muito importantes para o desenvolvimento da matemática. Foi falado sobre a doença que o abalou, sobre os cardinais transfinitos e sua hierarquia e sobre a hipótese do continuum. Também foi discutido sobre os problemas em aberto na matemática, o que se mostrou interessante de ser apresentado para os alunos.

6.4 Comentários dos alunos

Após o término das atividades, foi proposto aos alunos que escrevessem comentários e críticas sobre as aulas, falando o que eles acharam interessante, o que eles aprenderam, sugestões para melhoria da atividade e se a visão em relação ao conceito de infinito havia sido alterada.

6.4.1 Comentários dos alunos da escola João Queiroz

Os alunos acharam as atividades interessantes e gostaram de pensar a respeito do conceito de finito e infinito. Apesar de as respostas serem curtas e não trazerem muitas informações, foi possível perceber que os alunos acharam o tema estimulante e alguns alunos citaram que as atividades foram divertidas e bem diferente do tradicional. Já outros citaram que acharam interessante ver e analisar as respostas dos outros professores.

Em relação a mudança de visão dos alunos, alguns falaram que foi alterada e eles aprenderam muito mais sobre o assunto, outros disseram que as atividades apenas reforçaram o pensamento que eles tinham a respeito do tema, e outros ainda responderam que suas visões não foram alteradas.

Quanto às sugestões de melhorias, alguns alunos comentaram que gostariam que aulas da escola fossem diferentes como foram as atividades, dois alunos sugeriram que as aulas deveriam envolver mais os alunos e fazer com que todos participassem mais e um aluno sugeriu que o professor ajudasse mais durante a realização da atividade.

6.4.2 Comentários dos alunos da escola CEPRA

Os alunos avaliaram de forma positiva as atividades, disseram que foi diferente das aulas tradicionais e gostaram de pensar sobre o tema proposto. Um grupo de alunos citou a atividade 1 como mais interessante pois eles puderam debater a opinião de cada um, assim como ver as respostas dos professores em relação ao tema. Um pequeno número de alunos citou que gostou mais da atividade 2 e disseram que o motivo foi que ela fez sentido. Alguns alunos gostaram mais da atividade 3 que envolveu os estudos das funções, mas não deram maiores explicações do motivo. Outro grupo de alunos gostou mais das atividades 4 e 5 pois elas aprofundaram a discussão sobre o conceito do infinito, trazendo a ideia de comparar e mostrar que existem infinitos “maiores” que os outros. Disseram que essa atividade ampliou o conhecimento que eles possuíam a respeito do tema. E por fim, alguns alunos citaram que acharam interessante a discussão sobre os paradoxos.

Em relação a alteração da visão a respeito do infinito, as respostas foram semelhantes aos alunos da escola estadual, muitos disseram que essa noção foi ampliada e acharam interessante pensar que existem diferentes tipos de infinitos, algo que nunca imaginaram. Outros disseram que a sua visão não mudou, as atividades só reforçaram ou aprofundaram a noção que possuíam trazendo novos pontos de vista.

Em relação as sugestões e as críticas, alguns alunos citaram que as últimas atividades, que abordaram o conceito de infinito através da matemática, foram de difícil compreensão e confusas em certos pontos e um aluno citou que as atividades deveriam ser mais diversificadas. Muitos alunos citaram que o professor deveria trazer mais temas interessantes como esse para serem debatidos em sala de aula, que trouxessem mais questionamentos e estimulassem o pensamento, assim como fazer mais aulas diferentes do tradicional, que saíssem da rotina.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na escola estadual, apesar do número reduzido de alunos, existiram problemas disciplinares que dificultaram a execução das atividades, assim como, os mesmos apresentam problemas de aprendizado e defasagem em relação ao conteúdo. Já na escola particular, as atividades foram melhor desenvolvidas e contaram com maior participação e entendimento por parte dos alunos. É importante relatar que as atividades foram aplicadas com três semanas de diferença entre as escolas, sendo que primeiramente a aplicação ocorreu na escola estadual, o que proporcionou uma melhora na aplicação na escola particular devido a experiência adquirida. Mas em ambas, houve participação massiva dos alunos e foi surpreende os resultados gerados e a compreensão do assunto.

Foi possível perceber que as questões trabalhadas levantaram discussões interessantes, fizeram os alunos refletirem e gerou curiosidade e inspiração. Fica claro que o tema apresentado e as aulas diferenciadas, com questões em aberto, discussões e fazendo comparações com o cotidiano, levaram os alunos a se interessarem e participarem mais ativamente das aulas.

REFERÊNCIAS

[1] IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna.** São Paulo: Atual, 2013.

[2] LIMA, Elon Lages. **Um curso de análise.** Rio de Janeiro: SBM, 1987.

[3] RODRIGUES, Jaime Edmundo Apaza. **Construção dos números reais via sequências de Cauchy.** Ilha Solteira: Unesp, 2014.

[4] ACZEL, Amir O. **O mistério do Alef.** São Paulo: Globo, 2000.

[5] BOYER, Carl B. **História da Matemática.** São Paulo: Blucher, 2010.

[6] EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Campinas: Unicamp, 2008.

[7] COHEN, Leon; EHRLICH, Gertudre. **The Structure of the Real Number System.** Huntington: Robert E. Krieger Publishing Company, Inc, 1977.

[8] RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis.** Singapore: McGraw-Hill Book Co, 1976.

[9] ACHTNER, Wolfgang. Infinity in Science and Religion: The creative Role of thinking about Infinity. **Neue Zeitschrift für Systematicsche Theologie Und Religionsphilosophie**, 2005.

[10] DAUBEN, Joseph W. Georg Cantor and the battle for transfinite set theory. **American Mathematical Society**, New York, 1988.

[11] SOARES, Marcelo Reicher ; BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. Uma Resposta da Matemática Moderna para os Paradoxos de Zenão: Dicotomia e Aquiles e a tartaruga. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 13, p. 40-45, 2008.

[12] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. **MacTutor History of Mathematics archive**, out. 1998. Disponível em: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html. Acesso em: 27 de novembro de 2019.

[13] CANTOR'S theorem. **Britannica *online***, abr. 2009. Disponível em: https://www.britannica.com/science/Cantors-theorem. Acesso em: 27 de novembro de 2019.

[14] GEORG Cantor. **Britannica *online***, jul. 1998. Disponível em: https://www.britannica.com/biography/Georg-Ferdinand-Ludwig-Philipp-Cantor. Acesso em: 27 de novembro de 2019.

[15] THE German Mathematical Society. **MacTutor History of Mathematics archive**, ago. 2004. Disponível em: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Societies/German.html. Acesso em: 27 de novembro de 2019.

[16] STOLL, Robert R.; ENDERTON, Herbert. Set theory. **Britannica *online***, jul. 1999. Disponível em: https://www.britannica.com/science/set-theory/Operations-on-sets. Acesso em: 27 de novembro de 2019.

[17] PINHEIRO, Gabriel Faria; BERTOLOTO, Fábio José. Um pouco sobre a sabedoria da teoria ingênua dos conjuntos. **Revista eletrônica matemática e estatística em foco**, Uberlândia, Volume 3 - Número 1, p. 73-89, maio de 2015.

[18] BORGES, Bruno Andrade. **O infinito na matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, Universidade de São Paulo, Sao Carlos, 2015.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, _____/_____/____

____
Bruno Aguiar Alves de Camargo