UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

CID COSTA NETO

PROBABILIDADE DA OCORRÊNCIA SIMULTÂNEA DE DOIS OU MAIS EVENTOS: ABORDAGEM ADOTADA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Rio de Janeiro
Agosto 2019

CID COSTA NETO

PROBABILIDADE DA OCORRÊNCIA SIMULTÂNEA DE DOIS OU MAIS EVENTOS:
ABORDAGEM ADOTADA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Rio de Janeiro– UFRJ como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação da Profª. Flavia Landim.

Rio de Janeiro
Agosto 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Av. Athos da Silveira Ramos 149, CT, Bloco C
CEP: 21941-909
Caixa Postal 68530
Cidade Universitária – Ilha do Fundão
Rio de Janeiro – RJ
Brasil

CIP - Catalogação na Publicação

C837p

Costa Neto, Cid
Probabilidade da ocorrência simultânea de dois ou mais eventos: abordagem adotada em livros didáticos do Ensino Médio. / Cid Costa Neto. -- Rio de Janeiro, 2019.
45 f.

Orientador: Flavia Landim.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.

1. eventos compostos. 2. regra da multiplicação. 3. probabilidade condicional. 4. livro didático. 5. Ensino Médio. I. Landim, Flavia, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

PROFMAT

Instituto de Matemática

CID COSTA NETO

PROBABILIDADE DA OCORRÊNCIA SIMULTÂNEA DE DOIS OU MAIS EVENTOS:
ABORDAGEM ADOTADA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29 de agosto de 2019

BANCA EXAMINADORA

Flávia Landim

Profa. Flávia Maria Pinto Ferreira Landim- IM/UFRJ (orientadora)

Nei Carlos Rocha

Prof. Nei Carlos dos Santos Rocha – IM/UFRJ

Alexandre Sousa da Silva

Prof. Alexandre Sousa da Silva – UNIRIO

Agosto de 2019.

Dedico a minha família e a todos os amigos do Profmat, alunos e professores.

AGRADECIMENTOS

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

O fato de uma opinião ser amplamente compartilhada não é nenhuma evidência de que não seja completamente absurda. De fato, tendo-se em vista a maioria da humanidade, é mais provável que uma opinião difundida seja tola do que sensata.

Bertrand Russell

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo principal investigar um erro comum em cálculo de probabilidades que consiste na multiplicação das probabilidades incondicionais para obter a probabilidade de ocorrência simultânea de dois ou mais eventos, quando os eventos considerados não são independentes. O estudo realizado envolveu uma análise de 25 livros didáticos com edições dos mais variados anos, desde 1973 até as coleções do PNLD 2018, realizada através de um instrumento de análise composto de afirmações sobre como o assunto probabilidade é apresentado. Apenas seis dos 25 livros analisados apresentam o diagrama de árvore e, em geral, o mesmo aparece na resolução de um de exemplo, sem que todos os seus elementos sejam definidos de forma detalhada. Também foi possível verificar que apenas quatro (16%) dos livros analisados trabalham a interpretação frequentista de probabilidade, além da clássica e vinte e três (92%) desses livros apresentam forte vínculo com a Análise Combinatória. Além disso, para avaliar a frequência em que esse tipo de erro costuma ser cometido, um teste de quatro questões objetivas foi aplicado em turmas de nível superior que em algum momento já estudaram esse conteúdo. Uma das possíveis razões para esse erro tão comum pode ser o fato do diagrama de árvore ser pouco explorado, implicando na não internalização pelo estudante dessa ferramenta útil na resolução de problemas de cálculo de probabilidades de eventos compostos.

Palavras-chave: eventos compostos, regra da multiplicação, probabilidade condicional, livro didático, Ensino Médio

ABSTRACT

The main objective of this work was to investigate a common probability calculation error that consists in multiplying the unconditional probabilities to obtain the probability of simultaneous occurrence of two or more events, when the considered events are not independent. The study involved an analysis of 25 textbooks with editions of varied years, from 1973 to PNLD 2018 collections, performed through an analysis instrument composed of statements about how the probability issue is presented. Only six of the 25 books analyzed present the tree diagram, and generally it appears in the resolution of one example, without all its elements being defined in detail. It was also possible to verify that only four (16%) of the analyzed books work the frequentist interpretation of probability, besides the classic one and twenty three (92%) of these books have a strong link with the Combinatorial Analysis. In addition, to assess the frequency with which such errors are often made, a test of four objective questions was applied to higher-level classes who have already studied this content at some point. One of the possible reasons for this common error may be that the tree diagram is underexplored, implying that the student does not internalize this useful tool for solving compound event probability calculations.

Keywords: compound events, multiplication rule, conditional probability, textbook, High school

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

PROFMAT – Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional.

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático.

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

RPG – Role-playing game

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Desde o rolar de um dado em jogos de *role-playing game* (jogos de RPG) até a condenação injusta de um réu por um crime provável (ou inocência “improvável”), o conceito de probabilidade pode ser notado fortemente presente em nossas vidas. De modo que não se faz necessário, e pode ser mesmo desencorajador aos alunos do Ensino Básico, pelo menos em um primeiro momento, o professor recorrer ao nível de abstração de uma axiomatização matemática da teoria das probabilidades como forma de expor este conteúdo em sala de aula. Inversamente, pode ser mais proveitoso introduzir as suas diversas aplicações imersas no cotidiano, propor problemas e associar ao conceito de “chance”.

A teoria tem por objetivo modelar experiências *aleatórias*, aquelas que, quando repetidas em condições idênticas, produzem resultados diferentes. Do contrário, quando produzem resultados “iguais”, chamam-se experiências deterministas. Nesse ínterim é pertinente questionar o seguinte: quem nunca se viu, devido a uma repetição de fatos aparentemente previsíveis, pensando em uma perspectiva determinista, quando logo em seguida é surpreendido por um acontecimento ou uma série de acontecimentos deveras improváveis? Ou pelo menos que julgamos ser improváveis. A conjuntura política e socioeconômica do Brasil nos tempos atuais é recheada de exemplos, e acarretam incertezas em relação ao desemprego, à qualidade da educação, entre outras.

Compete ao professor de Matemática discutir os conceitos de incerteza envolvidos, por meio de situações do cotidiano, de real interesse dos alunos, à medida que vai extrapolando casos e aliando as definições com a abordagem intuitiva aos problemas. Doravante, se como adverte Mlodinow (2009) em nenhum outro ramo da Matemática é tão fácil, mesmo aos especialistas, cometer erros, então como evitar que os alunos cometam erros procedurais na resolução de problemas que envolvam probabilidade? Ocorre que, em grande parte, os alunos da Educação Básica estão acostumados a decorar uma ou outra forma de resolver problemas em probabilidade, e mesmo na Matemática como um todo. Este problema também se propaga em alguma medida ao Ensino Superior, tal como pontua a famosa narrativa de Richard Feynman em sua visita ao Brasil no livro “Deve ser brincadeira, Sr. Feynman!”. Como veremos no capítulo 4 deste trabalho, poderíamos indagar qual a relação disto com os livros didáticos e a relação com o papel que os mesmos desempenham aos professores de Matemática.

Apesar do sucesso com que matemáticos desde o século das Luzes lidavam com conceitos envolvendo probabilidades, bem antes de sua rigorosa formalização e, portanto, de modo intuitivo e entusiasta, diversas são as ocasiões em que o raciocínio, embora pareça razoável, é falacioso quando explícito no cálculo de probabilidades, seja ao ponderar erroneamente coincidências como improváveis – vide o paradoxo do aniversário – ou por considerar uma sequência de acontecimentos como independentes. Com relação a este último, motivação deste trabalho, cabe citar um caso curioso de erro de justiça que condenou Sally Clark, em 1999, pelo assassinato de seus dois filhos (Schneps e Colmez, 2014). O erro de multiplicar probabilidades de eventos não independentes passou despercebido através do argumento de autoridade conduzido pelo então reconhecido pediatra Roy Meadow. Aliás, o testemunho dele colocou uma chance errônea de "um em 73 milhões" contra a não presunção de inocência de Sally Clark, e rendeu a ela mais de três anos de prisão, uma vida e família destruídas e a sua morte provocada por intoxicação alcoólica logo após sua soltura.

O pediatra Meadow assumiu que a probabilidade de uma segunda criança morrer é independente da morte da primeira criança. Então, como ele conhecia um estudo estatístico que, para uma família de pais não fumantes e não desempregados como a de Sally, apontava um risco de morte de 1 em 8543, multiplicou essas probabilidades obtendo como resultado:

$$8543 \times 8543 \cong 73000000$$

Tal suposição de independência deveria ser validada empiricamente, sendo absolutamente implausível, sem levar em consideração que fatores ambientais e/ou genéticos podem estar envolvidos dada a primeira morte. Para mais a má interpretação de que a chance de 1 em 73 milhões significava a de que Sally fosse inocente se seguiu por parte do júri.

Neste sentido, as probabilidades de eventos que não são independentes, quando multiplicadas, podem resultar em uma probabilidade significativamente menor que a correta. Portanto, a despeito dessa premissa conferir simplicidade no cálculo de probabilidades, é importante ter em mente de que ela não passa exatamente disto, uma premissa (Matthews, 2017).

A chamada lei da probabilidade total é desenvolvida de modo intuitivo, muitas vezes sem consciência de seu uso direto, através do conceito de probabilidade condicional. Esta, por sua vez, pode ser esquematizada pelo diagrama de árvore, um meio de materializar e facilitar a visualização da partição do espaço amostral formada por eventos disjuntos, dispostos paralelamente nos ramos da árvore, e a relação condicional de dependência entre eventos simultâneos, dispostos em série nos ramos da árvore.

Uma aplicação é realizada, por exemplo, no diagnóstico de uma doença. Para tal são necessários três números: um que indique a *sensibilidade* (taxa de acertos quando de fato a doença está presente), outro que indique a *especificidade* (taxa de acertos quando de fato a doença não está presente) e, por fim, um que indique a *prevalência*, ou taxa base da presença da doença na população que está sendo testada. A negligência, sobretudo deste último, pode comprometer significativamente a correta interpretação do resultado do teste. Como exemplo, considere uma doença que esteja presente em 5% de uma população de indivíduos, e um teste para detectar a presença ou não da doença que dê 80% de acertos para ambos os casos, quando dá positivo (sensibilidade) e quando dá negativo (especificidade). Um paciente que seja diagnosticado pelo teste como sendo portador da doença, ao não levar em conta a prevalência, poderia pensar erroneamente que com 80% de chance deveria ser efetivamente portador da doença. Na realidade, o resultado do teste tem como resultado esperado que 80% dos 5% portadores da doença sejam diagnosticados com verdadeiro positivo (que dá 4%) e, somando-se a isso, 20% dos 95% não portadores da doença sejam diagnosticados com falso positivo (que dá 19%), totalizando 23% diagnosticados positivamente para a doença. Então, desses positivos, a proporção dos que de fato teriam a doença seriam 4 a cada 23, ou cerca de 17%. Nesse caso, como veremos após a definição de probabilidade condicional apresentada no capítulo 3 deste trabalho, a probabilidade de ter a doença dado que o teste deu positivo é de 17%, e não de 80% como poderia se pensar.

Este trabalho, tendo como motivação inicial a leitura sobre o grave caso de condenação de Sally Clark exposto no primeiro capítulo do livro *A Matemática nos Tribunais*, tem por objetivo principal investigar a forma como o conteúdo de multiplicação das probabilidades de uma sequência de eventos simultâneos é abordado nos livros didáticos de Ensino Médio e o tratamento concomitante das probabilidades condicionais desses mesmos eventos. A impressão inicial que originou este trabalho de investigação e que reluziu com a leitura do caso da Sally é que se comete muito o erro de multiplicar probabilidades de eventos que não são independentes para obter a probabilidade de ocorrência simultânea dos dois.

Para alcançar este objetivo, o trabalho foi estruturado de forma que no Capítulo 2 faz-se uma revisão de conceitos básicos de Probabilidade, incluindo as interpretações de probabilidade e a importante formalização idealizada por Kolmogorov no início século XX. No Capítulo 3, apresentam-se a definição de probabilidade condicional, aplicações usando o diagrama de árvore e a fórmula de Bayes. Além disso, uma breve discussão sobre a recorrente dúvida sobre quando somar ou multiplicar probabilidades é realizada. O Capítulo 4 apresenta um panorama da importância dos livros didáticos de Matemática na Educação Básica e o instrumento de análise de livros didáticos de Ensino Médio quanto ao conteúdo de Probabilidade utilizado nesse trabalho. O capítulo 5 contém as considerações finais do trabalho.

2. INTERPRETAÇÕES DA PROBABILIDADE E AXIOMAS DE KOLMOGOROV

Os estudos sistemáticos da teoria das probabilidades começaram motivados por jogos de azar, por volta do século XVII. Um dos problemas, conhecido como problema dos pontos, consistia, dada a interrupção prematura de um jogo, em se determinar o valor justo a ser pago aos jogadores baseado nas chances que cada um tinha de ganhar. As correspondências trocadas entre os matemáticos Pascal (1623-1662) e Fermat (1601-1665) na busca por soluções a problemas desse tipo estimularam o rápido crescimento do novo campo, culminaram com a concepção de Laplace (1749-1827) de probabilidade e infligiram o seu forte vínculo com a Análise Combinatória que perdura até hoje nos livros didáticos.

Várias tentativas de definição da probabilidade se seguiram, dando origem às suas diferentes interpretações, sendo as mais comuns: *a clássica ou de Laplace*, em que todos os eventos elementares são considerados igualmente prováveis (modelo equiprobabilístico); *a frequentista*, que atribui a probabilidade de um evento em termos da sua frequência relativa; e *a subjetiva*, que considera que a probabilidade é medida pela experiência que o pesquisador tem sobre o fenômeno em investigação, de modo que as duas primeiras interpretações também são subjetivas.

2.1 INTERPRETAÇÕES DA PROBABILIDADE

Segundo Piaget e Inhelder (1951), o raciocínio combinatório é essencial ao raciocínio probabilístico, sendo prescindível somente para experimentos aleatórios muito elementares (apud Lainetti, 2019). A hipótese deles era que a noção de acaso só começava a se desenvolver na criança por volta dos 12 anos, durante o estágio operatório formal, e concluíram que a necessidade de raciocínio combinatório é um grande obstáculo para a compreensão das probabilidades por parte dos adolescentes. Este fato, de acordo com Lopes (2003), explica o atraso com que o ensino da Probabilidade é introduzido na Educação Básica, uma vez que ela se realiza sempre a partir de um enfoque clássico, baseado no cálculo combinatório, forma predominante de se ensinar Probabilidade no ensino médio de nossas escolas ainda hoje e, talvez por isso, uma grande parte de nossos estudantes saia da escola sem desenvolver uma visão do mundo não determinista.

Por outro lado, Fischbein (1975) renova a opinião de Piaget ao defender que as crianças têm ideias concretas acerca da aleatoriedade, muitas delas apropriadas através dos jogos infantis. Para este autor, e contrariamente ao que pensavam Piaget e Inhelder, a noção de acaso e de probabilidade não deve ser apenas entendida como o resultado da estrutura combinatória, uma vez que quando lhes é pedido para calcular a probabilidade de um determinado acontecimento ocorrer, os adolescentes procuram razões causais que ajudem a diminuir a incerteza desse acontecimento, mesmo em situações onde elas não existem (apud Carvalho e Fernandes, 2005). Com efeito, o fato de as crianças estimarem situações de acaso através de experiências particulares, tais como quando discutem qual time de futebol provavelmente ganhará uma partida, levanta indícios de que o raciocínio probabilístico se desenvolve de modo independente do domínio pleno em Combinatória.

Os problemas associados à definição clássica de probabilidade, tal como a maioria dos livros didáticos aborda, medida como a relação entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis, além da circularidade de considerar na sua definição resultados igualmente prováveis que depende do conceito de probabilidade, incluem a objeção quando o número de casos for infinito ou ainda terem probabilidades distintas. Já a definição frequentista possui a inaplicabilidade notória de requerer a realização de um experimento um número infinito de vezes, embora a Lei dos Grandes Números estabelecida por Jakob Bernoulli (1654-1705) assegure que a frequência relativa de um evento de interesse se aproxime da sua probabilidade à proporção que o número de tentativas aumenta (repetições do experimento), o que pode ser suficiente ao propósito de alguns experimentos.

Outra concepção de probabilidade é conhecida por probabilidade geométrica. O seu primeiro escrito se deve ao naturalista e matemático francês Georges Louis Leclerc, o conde de Buffon, que propôs no século XVIII uma série de problemas geométricos que envolviam o cálculo de probabilidades, entre eles o Jogo de Franc-Carreau, também conhecido por Jogo dos Ladrilhos (Paterlini, 2002). Bastante jogado pelas crianças francesas no século XVIII, este jogo consiste em lançar uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais em uma forma qualquer. Os jogadores apostam sobre a posição final da moeda: ficará ela inteiramente sobre uma única lajota (franc-carreau), ou sobre uma ou mais juntas de lajotas? Supondo que o diâmetro da moeda seja d, no caso em que as lajotas sejam quadradas de lado $L > d$, a probabilidade de a moeda cair completamente dentro de uma delas é dada pela razão entre as áreas do quadrado de lado L - d e da lajota, pois a moeda estará inteiramente no interior da lajota se, e somente se, o centro da moeda cair nesse quadrado (Figura 1). Segue que,

$$P = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

Note que a solução apontada acima para esse problema, ao mesmo tempo em que foge da contagem finita de casos favoráveis e casos possíveis, leva a uma visão clássica alternativa, e ainda assim intuitiva, da probabilidade, uma vez que problemas desse tipo têm espaços amostrais equivalentes a pontos representados por figuras geométricas, cuja probabilidade pode ser calculada pela razão entre medidas geométricas como comprimento, área ou volume. De fato, outra solução a esse problema poderia ser pensada pela perspectiva frequentista, observando-se com que frequência esses fatos ocorrem. Com um grande número de observações, dividindo o número de vezes que um dos eventos ocorreu pelo número de observações feitas, obtém-se uma estimativa da probabilidade desse evento.

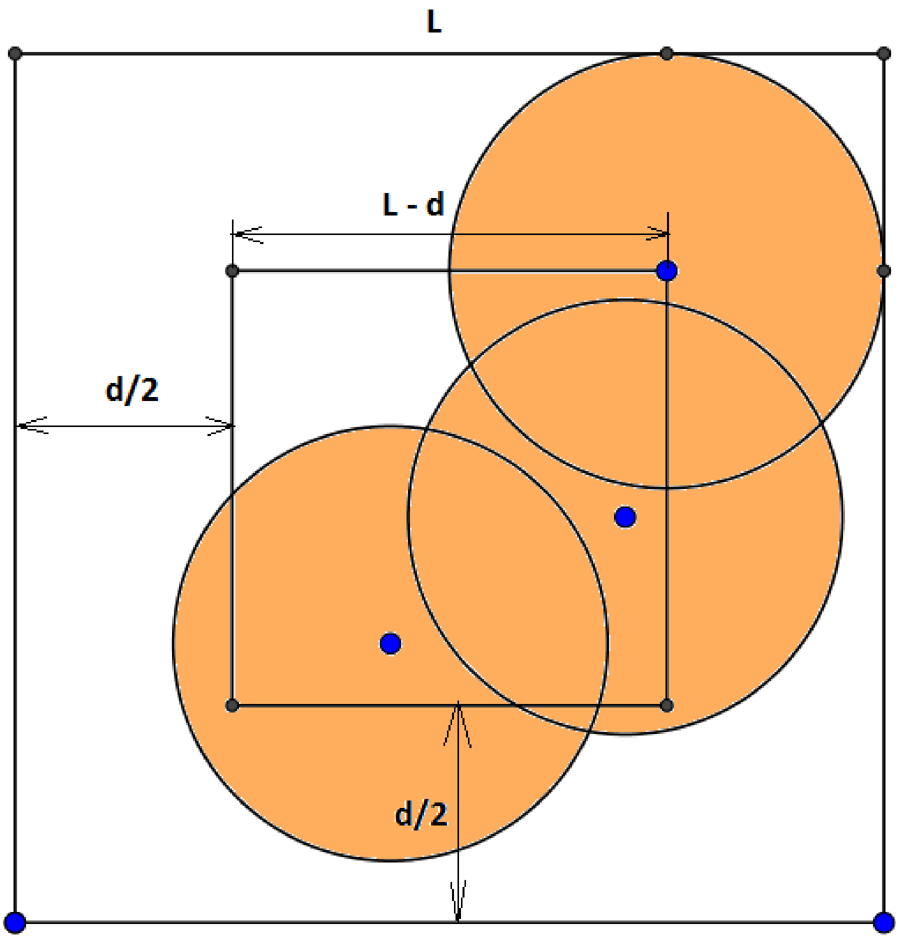

Figura 1 – Jogo dos Ladrilhos com quadrados.

Ainda que possivelmente Buffon talvez não tenha realizado alguns desses experimentos[*], ao formular e resolver matematicamente tais problemas, ele contribuiu pioneiramente na consideração "*de casos envolvendo o contínuo e na experimentação estatística para validar uma hipótese*". (Badizé et al., 1996)

A interpretação subjetiva, por outro lado, cumpre com a tarefa de responder a questionamentos tais como 'qual a probabilidade de Pedro falar a verdade?', ou ainda 'qual a probabilidade de o carteiro entregar a carta?'. Veremos como ela se presta ao modelo probabilístico para quantificar a incerteza de um experimento e possibilitar a tomada de decisão, ao permitir a atualização das probabilidades a priori através da fórmula de bayes.

2.2 AXIOMAS DA PROBABILIDADE

A probabilidade tem como conceitos básicos o *espaço amostral*, comumente denotado por $\mathbf{\Omega}$, representando um conjunto contendo todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e, *evento*, geralmente denotado por uma letra maiúscula ($A, B, C\ etc.$), representando um subconjunto de $\mathbf{\Omega}$.

Como resposta ao movimento de formalização da Matemática proposto por Hilbert, em 1900, o matemático russo Kolmogorov (1903-1983) estabeleceu uma base axiomática à probabilidade. Com base nesses axiomas, o que fazemos hoje é construir uma função que associa a cada evento um número, chamado *probabilidade do evento*, que traduz nossa maior ou menor confiança na capacidade do evento ocorrer na realização do experimento.

Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número P(A), de modo que:

A1) $P(A) \geq 0,\ \forall A \subset \Omega$

A2) $P(\Omega) = 1$ (2.1)

A3) Se A e B são eventos *mutuamente exclusivos*, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \emptyset$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Para a Educação Básica, o enunciado acima da versão particular do axioma 3 para a probabilidade da união de dois eventos disjuntos é mais adequado, apesar de não ser a forma correta do axioma 3 que define a probabilidade como uma medida.. De

---

[*] **Fonte:** https://impa.br/noticias/as-agulhas-de-buffon-realmente-existiram/

fato, o axioma 3 de Kolmogorov é enunciado para uma sequência infinita enumerável de eventos disjuntos 2 a 2 como segue:

A3*) Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma sequência de eventos dois a dois disjuntos, então $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Outra discussão importante relacionada aos problemas de probabilidade se refere à cardinalidade do espaço amostral. Dependendo da natureza do fenômeno aleatório e tendo em vista que a construção do espaço amostral para um mesmo problema não é feita de forma unívoca[*], ele pode ser: finito, infinito enumerável ou infinito não enumerável. Aqui ocorre a preocupação com o enfoque dado nos livros didáticos e, por vezes, o único ensinado pelos professores do Ensino Básico, da definição clássica de probabilidade, com espaço amostral finito e equiprovável, embora a mesma, além de insuficiente, não seja apropriada para resolver diversos problemas.

2.3 PROPRIEDADES

Apresentamos a seguir algumas propriedades da probabilidade que são consequências dos axiomas apresentados em 2.1.

T1) $P(\emptyset) = 0$

Prova: Como $P(\Omega) = 1$ e $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, segue

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + \mathrm{P}(\emptyset) \therefore 1 = 1 + \mathrm{P}(\emptyset) \therefore \mathrm{P}(\emptyset) = 0$$

T2) $P(A^c) = 1 - P(A)$, em que A^c é o evento complementar de A em Ω, isto é, $A^c = \Omega - \mathrm{A}$.

Prova: $1 = P(\Omega) = P(\mathrm{A} \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \therefore \boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$

T3) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

Prova: Escrevendo A como a união de conjuntos disjuntos, temos pelo axioma A3

$$P(A) = P\big((A \cap B^c) \cup (A \cap B)\big) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$$

Logo,

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

[*] Um mesmo fenômeno aleatório pode ter assumir diferentes espaços amostrais. O experimento de lançar um dado e observar a face voltada para cima pode admitir tanto o espaço amostral $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ como o espaço amostral $\Omega_2 = \mathbb{N}$, ou ainda $\Omega_3 = \mathbb{Z}$, tais que as probabilidades $P(n) = 0, n \neq 1,2,3,4,5,6$.

T4) $P(\mathrm{A} \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Prova: Temos $P(\mathrm{A} \cup B) = P\big((A \cap B^C) \cup \mathrm{B}\big) = P(A \cap B^c) + P(B)$. Da propriedade anterior segue imediatamente $P(\mathrm{A} \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$.

T4*) $P(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A}_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j\big) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_k\big) - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_l\big) + \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i)$

Esta é a extensão do teorema T4 para uma coleção finita de eventos e a sua demonstração pode ser feita por indução sobre n.

Prova: Para $n = 2$, temos que $P(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) = \sum_{i=1}^{2} P(\mathrm{A}_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 2} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j\big) = P(\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2) - P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$, o que pela propriedade anterior é verdade.

Suponha que a fórmula valha para algum $n \geq 2$. Então,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{A}_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \cup \mathrm{A}_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) + P(\mathrm{A}_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_{n+1}\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) + P(\mathrm{A}_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_{n+1}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_{n+1}\big)$$

$$- \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_{n+1}\big) + \cdots - (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(\mathrm{A}_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j\big) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_k\big)$$

$$- \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n+1} P\big(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_l\big) + \cdots + (-1)^{(n+1)+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathrm{A}_i\right)$$

T5) Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Prova: Se $A \subset B$, temos $B = A \cup (B \cap A^c)$ com $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$. Assim, pelo axioma **A3**, temos que $P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$ e como, pelo axioma **A1**, $P(B \cap A^c) \geq 0$ segue $P(B) \geq P(A)$.

3. PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

3.1 INTRODUÇÃO

O conceito de independência entre dois eventos, digamos A e B, pode ser entendido em termos da probabilidade condicional. Se considerarmos $A \subset \Omega$ um evento que tenha ocorrido, então temos que A se torna o novo, ou reduzido, espaço amostral (Figura *2*). Ou seja, a probabilidade de ocorrer B, dado que A ocorreu, será definida nesse novo espaço por:

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A) > 0 \tag{3.1}$$

Assim, representando por $P(AB) = P(A \cap B)$ quando não houver prejuízo na notação da probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos A e B, obtemos como corolário a conhecida *regra da multiplicação*:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \tag{3.2}$$

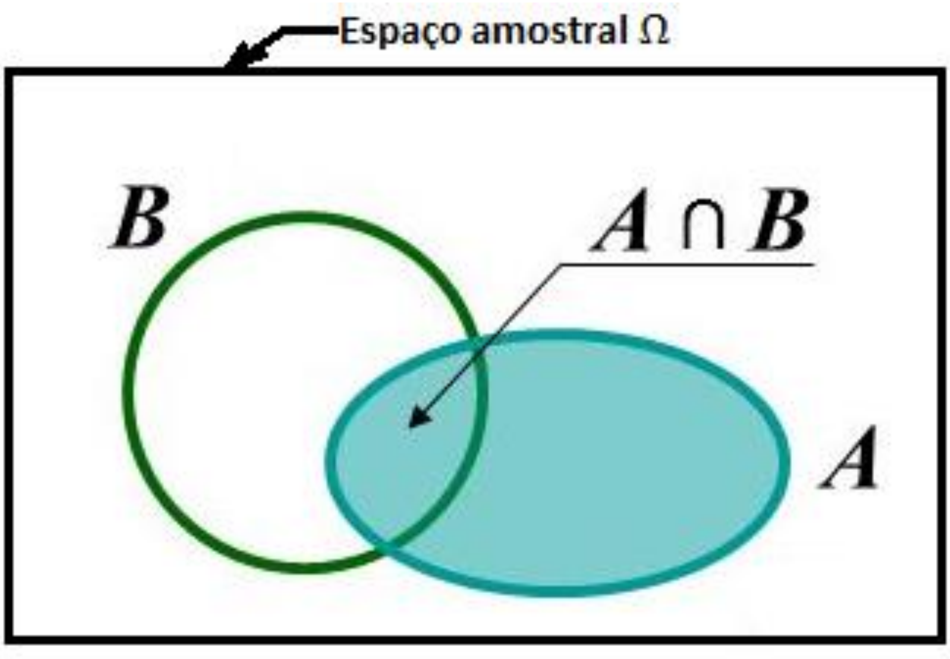

Figura 2 – Na probabilidade condicional, o evento A se torna o novo espaço amostral.

A definição de $P(B|A)$ é consistente com a interpretação frequentista de probabilidade. De acordo com esta interpretação, se um experimento é repetido um grande número de vezes, então a proporção na qual o evento A ocorrerá é aproximadamente P(A) e a proporção de repetições nas quais o evento B e o evento A ocorrerão simultaneamente é aproximadamente P(AB). Portanto, entre as repetições nas quais o evento A ocorre, a proporção de repetições nas quais o evento B também ocorre é aproximadamente igual a:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{3.3}$$

Ou seja, se considerarmos somente as vezes em que A ocorre, então $P(B|A)$ será a proporção na qual B também ocorrerá.

Além disso, observe também que a definição de $P(\cdot\,|A)$ satisfaz os três axiomas da probabilidade (axiomas 2.1):

1) $P(E|A) \geq 0$
2) $P(\Omega|A) = 1$
3) Se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ então $P(E_1 \cup E_2|A) = P(E_1|A) + P(E_2|A)$

Demonstração: Para axioma 1 basta mostrar que $P(E|A) = P(EA)/P(A) \geq 0$, isto é, $P(EA) \geq 0$ o que é óbvio pelo **axioma 1**. Quanto ao axioma 2, observe que

$$P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Finalmente o axioma 3 decorre da propriedade distributiva da união com a interseção

$$P(E_1 \cup E_2|A) = \frac{P((E_1 \cup E_2)A)}{P(A)} = \frac{P(E_1A \cup E_2A)}{P(A)} = \frac{P(E_1A) + P(E_2A)}{P(A)} == P(E_1|A) + P(E_2|A)$$

3.2 INDEPENDÊNCIA ENTRE DOIS EVENTOS

Analisemos agora o conceito de independência entre dois eventos.

Se $P(B|A) = P(B)$ dizemos que B é independente de A. Note que há equivalência simétrica em supor $P(B|A) = P(B)$ ou $P(A|B) = P(A)$, pois se $P(B|A) = P(B)$ então $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$. Por isso, dizemos simplesmente que A e B são independentes.

Neste caso, como $P(B|A) = P(B)$, segue imediatamente de 3.2:

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{3.4}$$

Cabe perguntar se a recíproca também é verdadeira, ou seja, se quando $P(AB) = P(A)P(B)$ então A e B são independentes. A resposta é sim, porque $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$. Um corolário é que um evento com probabilidade zero é trivialmente independente de qualquer outro.

Quando os alunos se deparam com problemas em que a probabilidade de ocorrência de um evento C deve ser determinada a partir das probabilidades de ocorrência de dois eventos A e B, é muito comum surgir a dúvida sobre se devem multiplicar ou somar essas probabilidades. Ora, ao surgir tal indagação claramente os conceitos não foram ainda absorvidos devidamente. A despeito do caráter superficial da dúvida, talvez não saibam distinguir entre eventos disjuntos e eventos independentes.

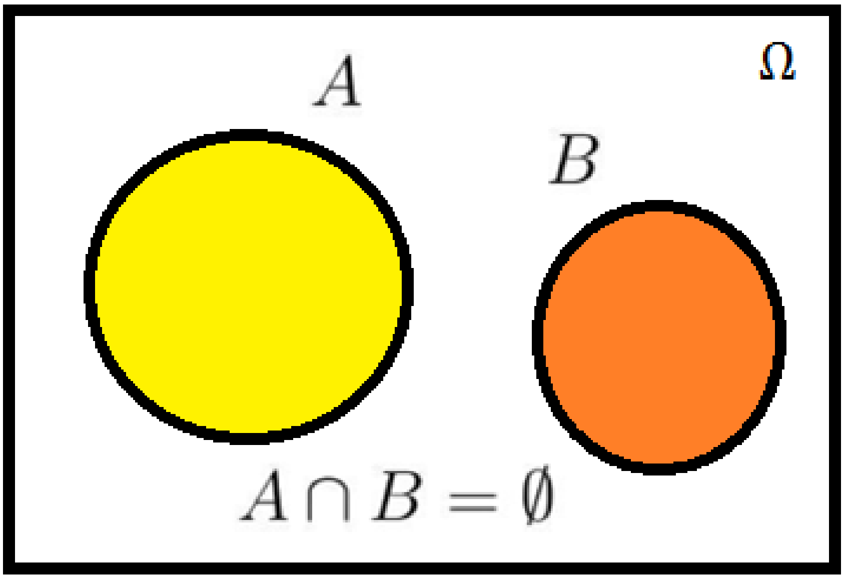

Figura 3 – Diagrama de Venn de eventos mutuamente exclusivos

Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos (ou *disjuntos*) então a ocorrência de um exclui a ocorrência do outro. Logo, assumindo que ambos tenham probabilidade não nula,

$$P(\mathrm{A}|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0 \neq P(A)$$

Vemos, então, que dois eventos (não vazios) mutuamente exclusivos não podem ser independentes, pois a ocorrência de um indica algo estrito sobre o outro (não pode ter ocorrido). A associação entre a ausência de pontos comuns e a ideia intuitiva de independência, embora falsa, é compreensível, podendo se dar pelo Português, pois a palavra independência nos remete a objetos que não são relacionados e a intuição pode levar a pensar em eventos que apresentam interseção vazia (eventos disjuntos). Por essa razão, não é raro haver confusão entre os conceitos de dois eventos independentes e dois eventos disjuntos. No entanto, o conceito de independência em probabilidade apresenta uma "relação" entre os eventos, pois são eventos com a propriedade de que a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro, isto é, a incerteza a cerca de um deles não muda nada se tivermos o conhecimento da ocorrência do outro. Bem construída essa ideia, a confusão entre dois eventos disjuntos e dois eventos independentes pode ser desfeita de forma natural, pois dados dois eventos disjuntos com probabilidade positiva, o conhecimento da ocorrência de um deles torna nula a probabilidade da ocorrência do outro.

A relação de independência entre dois eventos pode ser alterada pela estrutura do espaço amostral. Como exemplo, suponha o experimento que consiste de *n* lançamentos de uma moeda honesta. Nesta sequência de lançamentos, considere os seguintes eventos:

($A;n$): *sair pelo menos uma cara e pelo menos uma coroa*.

($B;n$): *sair pelo menos uma sequência de duas caras seguidas*.

Para $n=2$ lançamentos, ($A;2$) e ($B;2$) são eventos mutuamente exclusivos, pois ($A;2$)={(ca,co),(co,ca)} e ($B;2$)={(ca,ca)}; além disso, ($A;2$) e ($B;2$) não são independentes, pois P(($A;2$)|($B;2$))=0≠P(($A;2$))=1/2 e P(($B;2$)|($A;2$))=0≠P(($B;2$))=1/4.

Para $n=3$ lançamentos, ($A;3$) e ($B;3$) não são mutuamente exclusivos, nem independentes, pois ($B;3$)={(ca,ca,ca), (ca,ca,co), (co,ca,ca)} e ($A;3$)={(ca,ca,co), (ca,co,ca), (ca,co,co), (co,ca,ca), (co,ca,co), (co,co,ca)}, com P(($A;3$))=3/4; P(($B;3$))=3/8; P(($A;3$)|($B;3$))=2/3 e P(($B;3$)|($A;3$))=1/3.

Para $n=4$, ($A;4$) e ($B:4$) são eventos independentes. De fato, é possível mostrar que ($A;n$) e ($B;n$) serão independentes apenas no caso $n=4$.

Para simplificar, vamos calcular tanto a probabilidade de ($A;n$) como a de ($B;n$) ocorrer, calculando as probabilidades de seus eventos complementares:

$$P(A;n) = 1 - P(A^c;n) \ e \ \ P(B;n) = 1 - P(B^c;n) \tag{3.5}$$

Indicamos por $P(A^c;n)$ a probabilidade de sair a mesma face (cara ou coroa) em todos os n lançamentos, em um total de 2^n sequências possíveis. Como só existem duas sequências possíveis (todas as faces caras ou todas as faces coroas), tem-se que $P(A^c;n) = \frac{2}{2^n}$. Logo, P(($A;n$))=$1 - \frac{2}{2^n} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$ e, em particular, P(($A;4$))=$\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

Para obter a probabilidade de não sair duas caras consecutivas $P(B^c;n)$ pode-se construir a quantidade dessas sequências recursivamente da seguinte forma.

Observe que ($B;2$)={(ca,ca)} tal que ($B^c;2$)={(ca,co),(co,ca),(co,co)} compreendendo três (3) sequências com uma delas terminando em cara e, as outras duas, terminando em coroa.

O número de sequências que comporão ($B^c;3$) pode ser obtido a partir do número de sequências em ($B^c;2$) da seguinte forma:

- para as duas sequências em ($B^c;2$) terminadas em coroa, o próximo lançamento poderá tanto resultar em cara como em coroa;

- já para as sequências terminadas em cara, necessariamente o próximo lançamento deverá resultar em coroa para que a sequência pertença à ($B^c;3$).

Portanto, o número de sequências em ($B^c;3$) será dado por 2x2+1=5. Observe que da construção das 5 sequências em ($B^c;3$) duas terminam em cara e três terminam em coroa. Desse modo o número de elementos de ($B^c;4$) será dado por 2 (das sequências terminadas em cara colocando em seguida uma coroa) mais 3x2 (das sequências terminadas em coroa, colocando-se em seguida cara ou coroa), resultando num total de 8 sequências em ($B^c;4$) e P(($B;4$))=$1-\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

Também podemos verificar que P(($A;4$)|($B;4$))=$\frac{7}{8}$ e P(($B;4$)|($A;4$))=$\frac{1}{2}$, pois ($A;4$) tem 14 elementos de 16, ($B;4$) tem 8 elementos de 16 e a interseção entre os dois tem 7 elementos.

Observe que

#($B^c;2$)=3 com uma sequência terminando em cara e duas em coroa;
#($B^c;3$)=1+2x2=5 com duas sequências terminando em cara e 3 em coroa;
#($B^c;4$)=2+3x2=8 com 3 sequências terminando em cara e 5 em coroa;
#($B^c;5$)=3+5x2=13 com 5 sequências terminando em cara e 8 em coroa;
#($B^c;6$)=5+8x2=21 com 8 sequências terminando em cara e 13 em coroa.

Continuando esse processo verifica-se que #($B^c;n$) é uma sequência do tipo sequência de Fibonacci com primeiros termos 3 e 5, considerando o primeiro termo com $n=2$, de modo que para $n\geq 4$, #($B^c;n$) = #($B^c;n$-1) +#($B^c;n$-2). Ou seja, em uma sequência de n lançamentos da moeda, olhando para o primeiro elemento, ele pode ser cara ou coroa: de modo que, se for coroa, então constrói-se o restante da sequência com $n-1$ lançamentos da moeda em que não há nenhuma sequência de duas caras seguidas; e, se o primeiro elemento for cara, o segundo deve ser obrigatoriamente coroa, então completa-se o restante com $n-2$ lançamentos da moeda em que não há nenhuma sequência de duas caras seguidas.

Assim, podemos escrever, P(($B;n$))= $1-\frac{\#(B^c;n)}{2^n}$ (3.5)

Posto isso, podemos investigar para quais valores de n os eventos $(A;n)$ e $(B;n)$ são independentes; em outras palavras, quando teremos a validade da equação $P((B;n)|(A;n)) = P((B;n))$.

Para obter $P((B;n)|(A;n))$ basta contar as sequências com duas caras seguidas (exceto a que contém todos os lançamentos iguais a cara) dentre as sequências que contêm mandatoriamente ambas as faces, conforme a equação (3.6).

$$P((B;n)|(A;n)) = \frac{2^n - \#(B^c;n) - 1}{2^n - 2} \tag{3.6}$$

Igualando as equações (3.5) e (3.6), obtém-se a condição para independência dada por

$$\frac{2^n - \#(B^c;n) - 1}{2^n - 2} = 1 - \frac{\#(B^c;n)}{2^n} \tag{3.7}$$

Após simplificações, conduz à seguinte condição

$$\#(B^c;n) = 2^{n-1} \tag{3.8}$$

Veja na tabela 1 valores de $\#(B^c;n)$ e 2^{n-1} para n=2, 3, 4, 5, 6 e 7.

n	2	3	**4**	5	6	7
$\#(B^c;n)$	3	5	**8**	13	21	34
2^{n-1}	2	4	**8**	16	32	64

Tabela 1 - Valores de $\#(\boldsymbol{B^c};\boldsymbol{n})$ e $\boldsymbol{2^{n-1}}$ para n=2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Na coluna em negrito na Tabela **1** destaca-se uma solução para a equação (3.8). É possível, aliás, mostrar que esta é a única solução para $n \in \mathbb{N}$, como foi mencionado anteriormente. Conjecturamos que para $n \geq 5$ ocorre $2^{n-1} > \#(B^c;n)$ e vamos provar isso por indução sobre n.

1) Para n=5, $2^{5-1} = 16 > \#(B^c;5) = 13$, se verifica.
2) Suponha que para algum $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} > \#(B^c;n)$ seja válida. Então, como $\#(B^c;n+1) = \#(B^c;n) + \#(B^c;n-1) \leq 2\#(B^c;n)$, temos para $n \geq 5$

$$2^{n-1} > \#(B^c;n) \tag{3.9}$$

$$2^n > 2\#(B^c;n) \geq \#(B^c;n+1) \therefore \boxed{2^n > \#(B^c;n+1)}$$

3.3 A REGRA DA MULTIPLICAÇÃO E EXTENSÃO DO CONCEITO DE INDEPEDÊNCIA PARA MAIS DE DOIS EVENTOS

A equação (3.2), conhecida como regra da multiplicação, pode ser generalizada para obter a probabilidade da ocorrência simultânea de mais de dois eventos, por exemplo dos eventos $E_1, E_2, E_3 \dots, E_n$ como segue:

$$P(E_1E_2E_3 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) \dots P(E_n|E_1 \dots E_{n-1}) \qquad (3.10)$$

com P($E_1E_2E_3 \dots E_n) > 0$.

No caso de três ou mais eventos serem independentes, a mera suposição de que eles são independentes dois a dois não é suficiente. De fato, suponha o experimento de lançar um dado honesto, com a forma de um octaedro regular, cujas faces estão numeradas de 1 a 8, e os seguintes eventos A = {1,2,3,4}, B = {3,4,5,6} e C = {3,4,7,8}. Logo $P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A)$, da mesma forma que $P(A|C) = \frac{1}{2} = P(C)$ e $P(B|C) = \frac{1}{2} = P(B)$. Porém, $P(ABC) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Por outro lado, suponha agora que A seja independente de B e também de C, como o é no exemplo acima. Perguntamos: o evento A é nesse caso necessariamente independente de BC? A resposta é não, embora possa parecer estranho. Observe que, no exemplo acima, claramente, A não é independente de BC, já que $P(A|BC) = P(A|\{3,4\}) = 1$.

Com isso, os eventos $E_1, E_2, E_3 \dots, E_n$ são independentes se para cada $k \leq n$ (k = 2,3,...,n) e cada subconjunto de índices $i_1, i_2, \dots, i_k$,

$$P\left(E_{i_1}E_{i_2} \dots E_{i_k}\right) = P\left(E_{i_1}\right)P\left(E_{i_2}\right) \dots P\left(E_{i_k}\right) \qquad (3.14)$$

3.4 O DIAGRAMA DE ÁRVORE

Uma ferramenta que permite a rápida visualização da estrutura desenvolvida no cálculo da probabilidade condicional é o *diagrama de árvore*. Injustificadamente pouco explorado nos livros didáticos em geral, ele desenvolve a ideia presente na lei da probabilidade total, de forma a auxiliar o cálculo da probabilidade de eventos compostos. Com exceção dos ramos que vêm do primeiro nó, cujos números são as probabilidades incondicionais, cada ramo subsequente da árvore contém um número que representa a probabilidade condicional do evento ao final do ramo ocorrer, dado a sequência de eventos que conduz ao início do ramo. Observe que em caso de independência tais probabilidades condicionais coincidirão com as probabilidades incondicionais. Então, pela regra da multiplicação, a probabilidade de ocorrer uma determinada sequência de eventos é calculada multiplicando-se as probabilidades dos ramos que levam a essa sequência. Além disso, os ramos da árvore representam uma partição do espaço amostral, de modo que a probabilidade de um evento A ocorrer é calculada somando-se as probabilidades dos ramos que representam uma sequência de eventos que conduz à ocorrência de A.

Vejamos como exemplo na Figura 4 uma questão do exame discursivo de matemática do vestibular da UERJ 2018.

QUESTÃO 10

Um jogo individual da memória contém oito cartas, sendo duas a duas iguais, conforme ilustrado a seguir.

Observe as etapas do jogo:

1. viram-se as figuras para baixo;
2. embaralham-se as cartas;
3. o jogador desvira duas cartas na primeira jogada.

O jogo continua se ele acertar um par de figuras iguais. Nesse caso, o jogador desvira mais duas cartas, e assim sucessivamente. Ele será vencedor se conseguir desvirar os quatro pares de cartas iguais em quatro jogadas seguidas. Se errar algum par, ele perde o jogo.

Calcule a probabilidade de o jogador perder nesse jogo.

Figura 4 – Questão do exame discursivo do vestibular da UERJ 2018

A questão é sobre o conhecido Jogo da Memória contendo oito cartas, cujo jogador individual vence se conseguir desvirar os quatro pares de cartas iguais em quatro jogadas. A fim de resolver essa questão, que pede a probabilidade de o jogador perder, cabe citar como ressalva a hipótese de desconsiderar a informação inicial do jogador ao visualizar as cartas antes de iniciar a primeira jogada, de modo que ele não consegue memorizar nenhuma das posições das cartas. Então é possível modelar cada lance como um fenômeno aleatório em um espaço amostral equiprovável.

A cada rodada o jogador vira uma carta qualquer, e a probabilidade de acertar o seu par logo em seguida é representada na árvore a seguir. Podemos então calcular a probabilidade de ele não acertar todos os pares e, portanto, ele perder o jogo ao errar quaisquer dos pares virados. Logo,

$$P(\text{perder}) = 1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{104}{105}$$

Veja na Figura 5 uma representação do diagrama de árvore para a solução da questão.

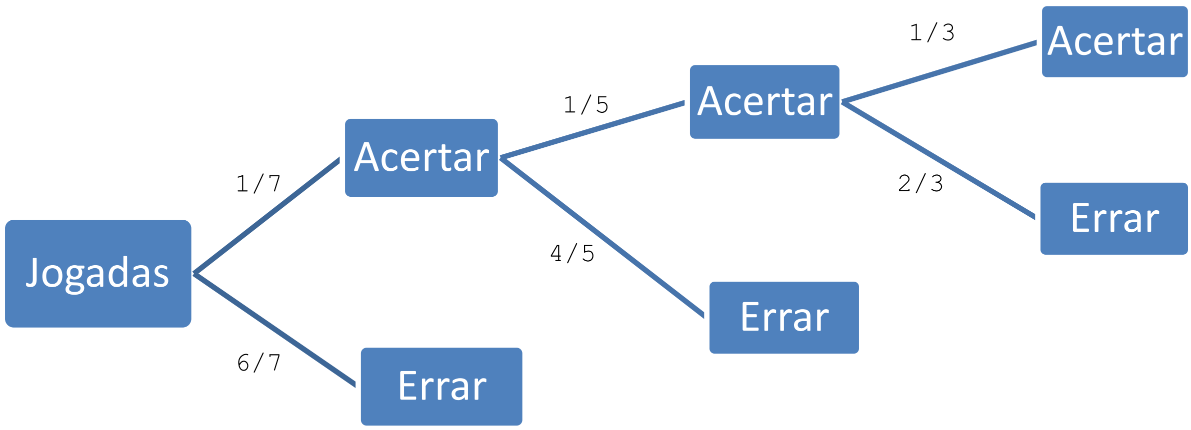

Figura 5 – Diagrama de árvore para solução da questão da UERJ 2018

Outra possibilidade, mais abrangente, de se pensar essa questão seria supor que na mesa, após algumas rodadas, sobraram *2n* cartas, e o jogador conhece a posição de *k* dessas cartas, com nenhum par casado dentre essas *k* cartas (caso contrário, o par conhecido teria sido virado por ele, e não entraria nos cálculos da probabilidade). Então, pergunta-se: qual é a probabilidade de ele virar corretamente algum par na sua próxima tentativa?

Como, obviamente, não é vantajoso ele virar, de primeira, uma carta cuja posição lhe é conhecida, há duas possibilidades: ou ele vira duas cartas cujas posições lhe eram desconhecidas (escolhendo, primeiramente, uma carta dentre os *(n-k)* pares desconhecidos, portanto uma das *2(n-k)* cartas dentre as *2n-k* cartas disponíveis e, depois, a carta correta dentre as *(2n-k-1)* cartas restantes), ou ele vira um par cuja posição de uma das cartas lhe era conhecida (ao escolher uma das *k* cartas, cujo par corresponde a uma das k cartas conhecidas, dentre as *2n-k* cartas disponíveis).

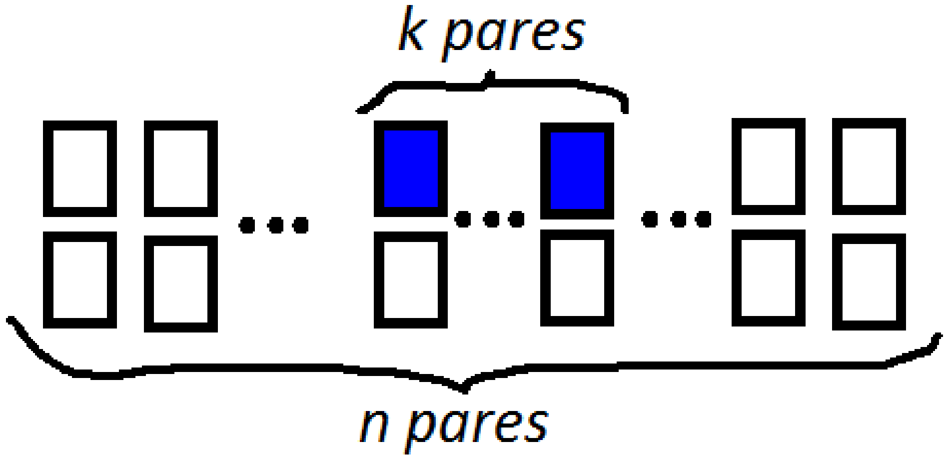

Figura 6 – Ilustração dos *n* pares de cartas, com as *k* cartas (em azul) conhecidas

Visto que a segunda possibilidade descrita corresponde a *não* escolher, na primeira carta virada, uma das *2(n-k)* cartas dentre as *2n-k* disponíveis, forma-se uma partição com um evento e o seu complementar, de sorte que podemos representar no diagrama de árvore da seguinte forma:

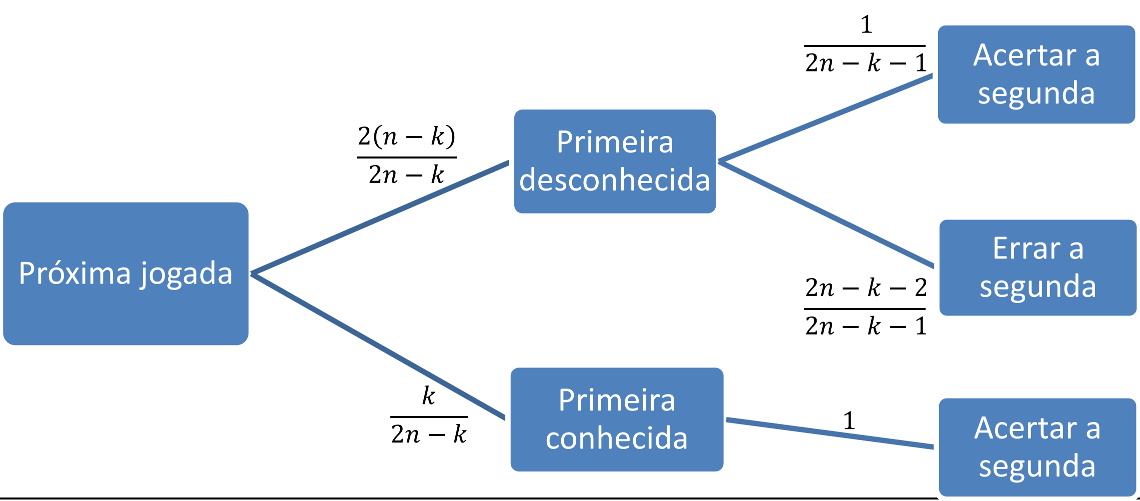

Figura 7 – Diagrama de árvore para o cálculo genérico da probabilidade de acertar o próximo par.

Então, a fórmula da probabilidade de o jogador virar um par correto de um total de *2n* cartas, se em determinado momento ele conhece as posições de *k* dessas cartas é:

$$P(\text{Acertar próximo par}) = \frac{2(n-k)}{2n-k} \cdot \frac{1}{2n-k-1} + \frac{k}{2n-k}$$

Assim, por exemplo, como na questão da UERJ 2018, se há 8 cartas (n = 4 pares ao todo) na mesa, sendo que 1 das quais a posição é conhecida, a probabilidade de virar um par correto na próxima tentativa é:

$$P(\text{Acertar próximo par}) = \frac{2(4-1)}{2 \cdot 4-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4-1-1} + \frac{1}{2 \cdot 4-1} = \frac{2}{7}$$

Um simples fato que dobra a probabilidade de acertar quando não se conhece nenhuma das posições das cartas. Agora se, por exemplo, há 8 cartas na mesa, 4 das quais as posições são conhecidas, a probabilidade de virar um par correto na próxima tentativa é, obviamente, de 100%. Pela fórmula:

$$P(\text{Acertar próximo par}) = \frac{2(4-4)}{2 \cdot 4-4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4-4-1} + \frac{4}{2 \cdot 4-4} = 0 + 1 = 1$$

Observe, com o auxílio do diagrama de árvore, que o zero da primeira parcela nos diz que não há nenhum par cujas duas cartas estão em posições desconhecidas. E o 1 da segunda parcela nos diz que a chance de virar um par com uma das cartas em posição conhecida é de 100%. Aliás, sempre que houver na mesa 2*n* cartas, sendo *n* delas com posições conhecidas, a probabilidade de virar corretamente um par na próxima tentativa será de 100%, pois fazendo *k* = *n* temos:

$$P(\text{Acertar próximo par}) = \frac{2(n-n)}{2 \cdot n-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot n-n-1} + \frac{n}{2 \cdot n-n} = 0 + 1 = 1$$

3.5 A FÓRMULA DE BAYES.

Em muitos casos na ciência faz-se a utilização da ocorrência de alguma evidência a fim de inferir sobre determinada hipótese ou parâmetro de um fenômeno associado a ela. A fórmula de bayes é útil exatamente no sentido que permite conhecer ou estimar a probabilidade de um evento segundo a condição de ocorrência ou não de uma evidência (evento) associada a ele.

Suponha um evento A particionado por um segundo evento B conforme segue

$$A = AB \cup AB^c$$

Uma vez que AB *e* AB^c são mutuamente disjuntos, temos pelo axioma **A3**

$$P(A) = P(AB\ ) + P(AB^c)$$
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \tag{3.15}$$
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)[1 - P(B)]$$

A equação (2.7) diz que a probabilidade do evento A é uma média ponderada da probabilidade condicional de A dado que B ocorreu e da probabilidade condicional de A dado que B não ocorreu, com cada uma recebendo um maior peso quanto mais provável for a ocorrência do evento ao qual está relacionada.

A generalização disso, considerando um número arbitrário de subconjuntos disjuntos B_i que formam uma partição do espaço amostral $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ tais que $B_i \cap B_j = \emptyset\ , i \neq j$, é conhecida como a *lei da probabilidade total*, escrita como

$$P(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i) \tag{3.16}$$

Já vimos que a interpretação que pode ser dada à probabilidade como *grau de crença* é conhecida como interpretação subjetiva ou *bayesiana*. Neste contexto, a probabilidade de um evento deve ser alterada após considerar evidências sobre a ocorrência deste evento. Na sua forma simples, podemos escrever a fórmula de bayes como,

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \tag{3.17}$$

O que mostra que a chamada probabilidade *a posteriori* $P(B|A)$ pode ser medida como uma proporcionalidade da probabilidade *a priori* ou grau de crença inicial, $P(B)$, e da probabilidade condicional ou verossimilhança, $P(A|B)$. Alternativamente, substituindo (3.15) em (3.16) temos:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)} \tag{3.18}$$

Além desse efeito de atualização da probabilidade a priori, a importância da fórmula de bayes consiste também na possibilidade de perguntar a “probabilidade inversa”. Ou seja, o que ocorre muitas vezes é que ao invés de termos os dados e calcularmos a probabilidade da ocorrência de um evento em particular, temos o resultado do experimento e queremos obter informação a respeito do conteúdo dos dados. Por exemplo, considere uma urna contendo 6 bolas, entre as quais há bolas pretas e brancas. Suponha que uma pessoa, desconhecendo o conteúdo da urna, realizou o experimento de sacar 3 bolas da urna, obtendo 2 pretas e 1 branca. Ora, qual deve ser o conteúdo da urna? Mais especificamente, gostaríamos de responder, por exemplo, qual seria a probabilidade de a urna conter 3 bolas pretas e 3 bolas brancas.

Se A for o evento “sacar 2 bolas pretas e 1 bola branca” e B_i o evento “a urna contém i bolas pretas e $6 - i$ bolas brancas”, então por 3.17:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{\sum_{i=0}^{6} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Ou seja, considerando $P(B_i) = p$ (supondo equiprováveis cada um dos eventos elementares B_i) e $P(A|B_i) = \frac{i}{6} \cdot \frac{i-1}{5} \cdot \frac{6-i}{4} \cdot \frac{3!}{2!1!}$, temos

$$P(B_3|A) = \frac{0{,}45p}{0{,}2p + 0{,}45p + 0{,}6p + 0{,}5p} = 0{,}257$$

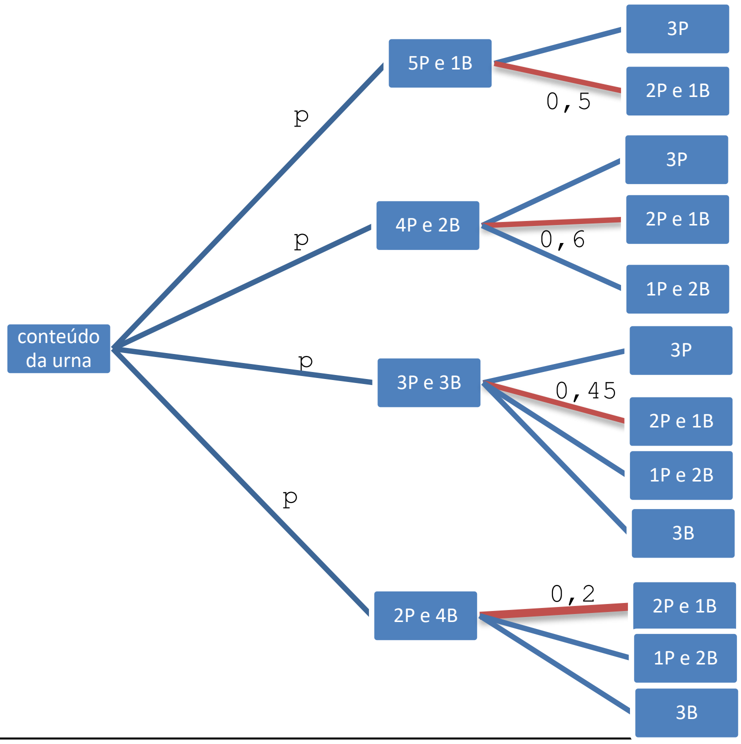

Figura 8 – Diagrama de árvore para o experimento de descobrir o conteúdo da urna

Agora suponha que, após repor todas as bolas à urna, o experimento seja realizado uma segunda vez, obtendo-se novamente o evento A_2: sacar 2 bolas pretas e 1 bola branca. Como este experimento é condicionalmente independente do primeiro, segue:

$$P(B_3|AA_2) = \frac{P(AA_2|B_3)P(B_3)}{\sum_{i=0}^{6} P(AA_2|B_i)\, P(B_i)} = \frac{P(A|B_3)P(A_2|B_3)P(B_3)}{\sum_{i=0}^{6} P(A|B_i)P(A_2|B_i)\, P(B_i)}$$

E, supondo novamente as probabilidades $P(B_i) = p$:

$$P(B_3|AA_2) = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}45p}{0{,}2 \cdot 0{,}2p + 0{,}45 \cdot 0{,}45p + 0{,}6 \cdot 0{,}6p + 0{,}5 \cdot 0{,}5p} = 0{,}238$$

Observe que, após a realização do segundo experimento, a probabilidade de que a urna contenha 3 bolas pretas e 3 bolas brancas diminuiu de 0.257 para 0.238; ao passo que, a título de curiosidade, segundo os mesmos resultados experimentais, a probabilidade de que a urna contenha 4 bolas pretas e 2 bolas brancas aumenta de 0.343 para 0.422. É possível mostrar ainda que, independentemente dos valores das probabilidades a priori $P(B_i)$, repetindo-se os mesmos resultados do experimento, a probabilidade de que a urna contenha 4 bolas pretas e 2 bolas brancas, isto é $P(B_4)$, tende a 1, enquanto $P(B_i)$, $i \neq 4$, tende a 0 (Figura).

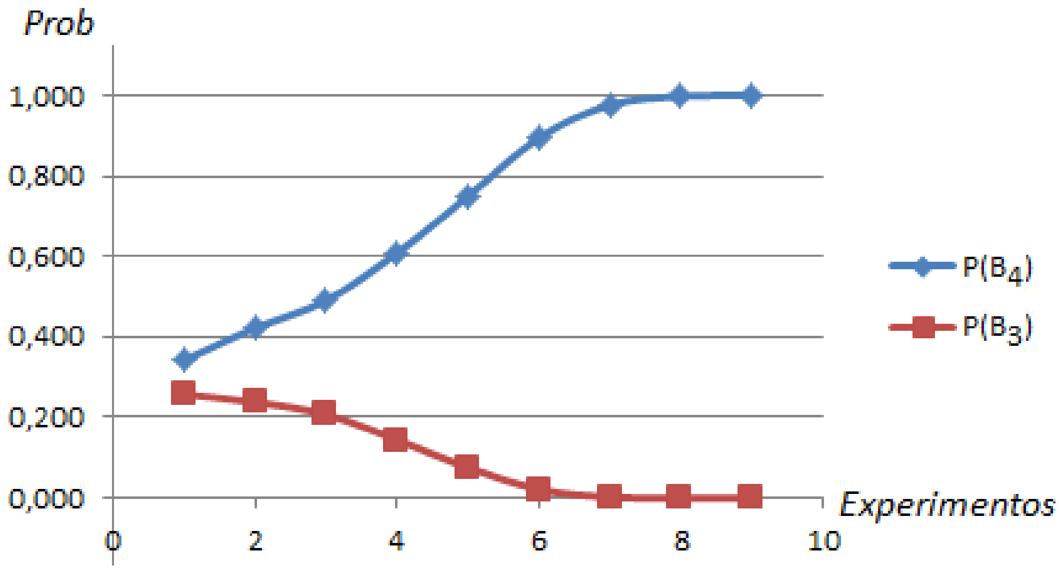

Figura 9 - Atualização das probabilidades do conteúdo da urna usando a fórmula de bayes.

Com isso, ressalta-se a relevância do uso da regra de bayes a fim de fazer inferências a partir dos dados, com o potencial de aplicação poderoso de atualizar o grau de crença a partir das evidências, ao invés de somente computar os dados a serem obtidos quando de posse de toda a informação relevante do problema, o que se faz imediatamente útil no diagnóstico de doenças, na investigação forense, entre outras aplicações.

4. ABORDAGEM DA PROBABILIDADE DA OCORRÊNCIA SIMULTÂNEA DE DOIS OU MAIS EVENTOS ADOTADA NOS LIVROS DIDÁTICOS E O PNLD (PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO)

Neste capítulo discute-se como o livro didático de Matemática é relacionado ao professor de Matemática e a avaliação realizada pelo PNLD. Em seguida, uma análise de 25 livros didáticos com edições dos mais variados anos, desde 1973 até as coleções do PNLD 2018, é realizada através de um instrumento de análise composto de afirmações sobre como o assunto probabilidade é apresentado.

4.1 O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA E O PNLD

O livro didático é um eficiente recurso da aprendizagem no contexto escolar, visto que ele é uma das principais fontes de consulta do professor para elaborar e guiar as suas aulas. O papel que ele desempenha como fonte confiável de saber dificilmente pode ser inteiramente substituído por apostilas, materiais e/ou recursos digitais extras, ainda que disponibilizados aos montes na vastidão da internet nos dias de hoje.

Além disso, de acordo com Romanatto (2004), o livro didático tem presença tão forte em sala de aula que chega até, em muitos casos, substituir o professor, enquanto deveria apenas lhe servir de apoio. Ainda segundo o autor, os livros didáticos de matemática costumam atribuir uma importância maior a técnicas operatórias, dando mais ênfase pela memorização e mecanização do que pela compreensão dos conceitos (apud Marinho, 2013).

No tocante à probabilidade e, em particular, aos erros no tratamento da probabilidade condicional, em uma consulta ao Guia PNLD 2018, o mesmo diz observar que:

> (...)frequentemente, no Ensino Médio, não é apresentada, de maneira apropriada, a noção de independência probabilística entre dois eventos definidos em um mesmo espaço amostral. Nesse caso, é conveniente, antes da abordagem de independência, estudarmos o conceito de probabilidade condicional, e definirmos independência a partir da condicional. Há uma inversão que, apesar de não ser muito adequada, é muitas vezes encontrada: a de se “assumir”, a priori, que há independência entre os eventos e, então, aplicar a definição para cálculo da probabilidade. (Guia PNLD 2018)

O PNLD surgiu em 1995, e com a sua implantação, os livros didáticos passaram a ser avaliados por meio de uma análise criteriosa realizada por uma comissão de especialistas de diversas áreas: Matemática, Ciências, Língua Portuguesa, Geografia e História. Como resultado a cada três anos um guia é publicado, contendo as resenhas das coleções aprovadas.

O PNLD 2018, nessas resenhas de matemática, apresenta a organização dos conteúdos, expressa a porcentagem, em relação ao total de páginas em cada livro, das quantidades de páginas dedicadas a cada um dos seguintes campos: números, álgebra, geometria, estatística e probabilidade. A respeito dessa análise, constata-se entre as coleções aprovadas no PNLD 2018 que a maioria dedica insuficiente atenção aos conteúdos de probabilidade e estatística.

Segundo Lopes (2003), “no mundo de informações que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizar a tomada de decisão e fazer previsões”.

Ao se agregar a essa constatação de deficiência dos livros didáticos do Ensino Médio um dos objetivos da investigação desse trabalho que é, por exemplo, a identificação, entre os livros analisados, da definição correta ou não de eventos independentes, então, além dos prejuízos no equilíbrio dos quatro conteúdos temáticos, desenvolve-se uma crítica à qualidade dos mesmos em relação à probabilidade e estatística. Além disso, o problema alcança dimensão ainda maior no que se refere aos livros didáticos enquanto entendidos como o apoio do professor de matemática na prática escolar, ou até como o complemento da lacuna na formação acadêmica docente.

Alguns livros, devido à temática correlata de probabilidade e estatística, mesmo que por vezes separem entre volumes diferentes a discussão centrada em um ou no outro tema, retomam os conceitos ontologicamente indissociáveis de ambos, como é o caso da natureza frequentista da probabilidade empiricamente determinada pela frequência relativa de um evento quando um experimento é repetido uma quantidade suficientemente grande de vezes. Ademais, como pontua o PNLD 2018, quando é realizada uma pesquisa estatística iniciada por uma questão de interesse, a sua finalização com tomadas de decisão pode, quando pertinente, ser construída através de uma análise de inferência formal por meio de argumentos de natureza probabilística.

4.2 ABORDAGEM DA PROBABILIDADE DA OCORRÊNCIA SIMULTÂNEA DE DOIS OU MAIS EVENTOS ADOTADA NOS LIVROS DIDÁTICOS

A fim de tornar reprodutíveis e válidas as conclusões que possam ser inferidas dos conteúdos dos livros didáticos de Matemática verificados neste trabalho, fez-se necessária a definição de um instrumento de análise. Esse instrumento foi concebido com base em oito afirmações, a fim de avaliar quão próximo de uma abordagem esperada o livro se mostra. As afirmações elaboradas para este instrumento são apresentadas as seguir.

AF1) A definição apresentada de probabilidade inclui mais de uma interpretação, além da definição clássica (Negação: Apenas a definição clássica é considerada).

AF2) O vínculo com a Análise Combinatória é fraco.

AF3) Após a definição de probabilidade condicional, a regra da multiplicação geral é explorada.

AF4) A definição de eventos independentes usa o argumento via probabilidade condicional (Negação: Apenas simplifica a regra da multiplicação sem nenhuma discussão).

AF5) O diagrama de árvore é utilizado.

AF6) Eventos disjuntos e eventos independentes são comparados.

AF7) Os exemplos exploram situações aleatórias que incluem espaços amostrais finitos não equiprováveis, espaços amostrais infinitos enumeráveis ou não enumeráveis, probabilidade geométrica etc.

AF8) Os exercícios exploram situações aleatórias que incluem espaços amostrais finitos não equiprováveis, espaços amostrais infinitos enumeráveis ou não enumeráveis, probabilidade geométrica etc.

As afirmações AF1 e AF2 foram estabelecidas para avaliar se os livros didáticos estão trazendo outras interpretações da Probabilidade além da clássica, fortemente vinculada à Análise Combinatória. As afirmações AF3 até AF6 foram estabelecidas em função do objetivo desse trabalho. As demais afirmações foram estabelecidas, considerando habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, envolvendo probabilidade. Por exemplo, a BNCC inclui a seguinte habilidade para o conteúdo de Probabilidade: (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Esta análise dos livros foi realizada basicamente em duas etapas: *pré-análise* e *análise*. Na pré-análise, realizou-se a seleção e a preparação do material que foi efetivamente foco da análise. Esta foi feita basicamente em três momentos: leituras sucessivas de livros didáticos, notadamente do 2º ano do Ensino Médio; arquitetura do instrumento de análise de acordo com o estabelecimento do espectro das abordagens dos livros, a fim de realizar a sua categorização na fase de análise; e a seleção propriamente dos livros, que foi feita de modo exaustivo devido à dificuldade de acesso do autor aos mesmos, seguida da identificação do livro, com nome da coleção, autor, ano etc. a estrutura e disposição dos capítulos, sobretudo, dos capítulos de análise combinatória e probabilidade. Na análise, os livros foram então submetidos ao olhar objetivo do instrumento de análise e, em seguida, a uma classificação com duas respostas “Sim” ou “Não”, em uma variável binária com uma representação numérica natural. Observe que atribuindo o número 1 para a resposta "Sim" e o número 0 para a resposta "Não", essa estratégia permite somar todas as respostas e as médias revelam a proporção de livros na amostra que seguem uma determinada abordagem, a saber:

1) Sim – adota uma interpretação de probabilidade para além da clássica, tais como a frequentista ou a geométrica. ou Não - é enviesada sob a ótica única da interpretação clássica.
2) Sim – é razoavelmente desvinculada à análise combinatória. ou Não – é fortemente vinculada à análise combinatória.
3) Sim – explora a regra da multiplicação através da condicional ou Não – não apresenta a regra da multiplicação de probabilidades condicionais (ou apresenta somente para o caso de eventos independentes).
4) Sim – utiliza o diagrama de árvore. ou Não – não apresenta nem discute o diagrama de árvore.
5) Sim – define eventos independentes corretamente ou Não – não define ou define incorretamente.
6) Sim – compara eventos disjuntos e eventos independentes ou Não – não elucida a comparação entre eventos disjuntos e independentes.

7) Sim – dá exemplos com situações aleatórias que fogem ao convencional tais como espaço amostral infinito enumerável ou não enumerável, probabilidade geométrica etc. ou Não – carece de exemplos com situações aleatórias que fogem ao convencional.
8) Sim – possui exercícios com situações aleatórias que fogem ao convencional ou Não – não possui exercícios com situações aleatórias que fogem ao convencional.

As proporções de respostas “SIM”, portanto, revelam a proporção de livros que acreditamos, via o instrumento de análise proposto, seguir uma abordagem enriquecedora e não convencional, sob o ponto de vista de uma concepção da probabilidade que possibilite ser mais adequadamente compreendida e melhor aplicada ao cotidiano do aluno.

Por essa estratégia de classificação proposta e de acordo com o resultado agregado da análise dos livros, observa-se que as afirmações podem ser agrupadas segundo as proporções de respostas “Sim”, como segue. Todas as afirmações tiveram uma proporção de respostas iguais a “Não” maior, com exceção da proporção de aproximadamente 2/3 (dois terços) de respostas “Sim” para as afirmações AF3 - Após a definição de probabilidade condicional, a regra da multiplicação geral é explorada e AF4 - A definição de eventos independentes usa o argumento via probabilidade condicional, as quais englobam os livros que exploram a regra da multiplicação e apresentam a definição correta de eventos independentes, respectivamente.

As afirmações AF6 - Eventos disjuntos e eventos independentes são comparados e AF7 - Os exemplos exploram situações aleatórias que fogem ao convencional tais como espaços amostrais infinitos enumeráveis ou não enumeráveis, probabilidade geométrica, etc. receberam o valor “Não” para praticamente todos os livros analisados, tendo somente um livro para cada com valor “Sim”. Isso significa que, dentre os livros de Ensino Médio, muito raramente (1 em cada 25) eventos disjuntos e independentes são comparados e também dificilmente o livro possui exemplos que exploram situações aleatórias que fogem ao convencional tais como espaços amostrais infinitos enumeráveis ou não-enumeráveis, probabilidade geométrica, entre outras. Em outras palavras, não há uma preocupação com a conceituação no sentido de desconstruir a vertente clássica pela qual a probabilidade é apresentada. A afirmação anterior é reforçada pela proporção de respostas iguais a “Sim” às afirmações AF2 - O vínculo com a Análise Combinatória é fraco (de aproximadamente 1 em cada 12) e às afirmações AF1 - A definição apresentada de probabilidade inclui mais de uma interpretação e AF8 - Os exercícios exploram situações aleatórias que fogem ao convencional (de aproximadamente 1 em cada 6). Em outras palavras, apenas cerca de 8% dos livros aborda a probabilidade de maneira razoavelmente desvinculada com a análise combinatória. Além disso, somente 16% dos livros arrisca um olhar diferente da interpretação clássica da probabilidade como sendo a tradicional expressão número de casos favoráveis sobre número de casos possíveis em espaço amostral finito equiprovável, e propõe exercícios que fogem ao convencional. Por fim, conforme já indagado neste trabalho, com relação à afirmação AF5 - O diagrama de árvore é utilizado, ocorre a injustificada proporção de somente 1 em cada 4 livros apresentando e explicando o diagrama de árvore.

As proporções de respostas "Sim" a cada afirmação foram registradas na Tabela 2 e uma ilustração desses números é apresentada na Figura 9.

Afirmações	Freq. Rel. “SIM” (%)
AF1 - A definição apresentada de probabilidade inclui mais de uma interpretação, além da definição clássica.	16%
AF2 - O vínculo com a Análise Combinatória é fraco.	8%
AF3 - Após a definição de probabilidade condicional, a regra da multiplicação geral é explorada.	68%
AF4 - A definição de eventos independentes usa o argumento via probabilidade condicional.	68%
AF5 - O diagrama de árvore é utilizado.	24%
AF6 - Eventos disjuntos e eventos independentes são comparados.	4%
AF7 - Os exemplos exploram situações aleatórias que fogem ao convencional tais como espaços amostrais infinitos enumeráveis ou não enumeráveis, probabilidade geométrica etc.	4%
AF8 - Os exercícios exploram situações aleatórias que fogem ao convencional.	16%
Média	26%

Tabela 2 – Frequências de valores “SIM” por afirmações.

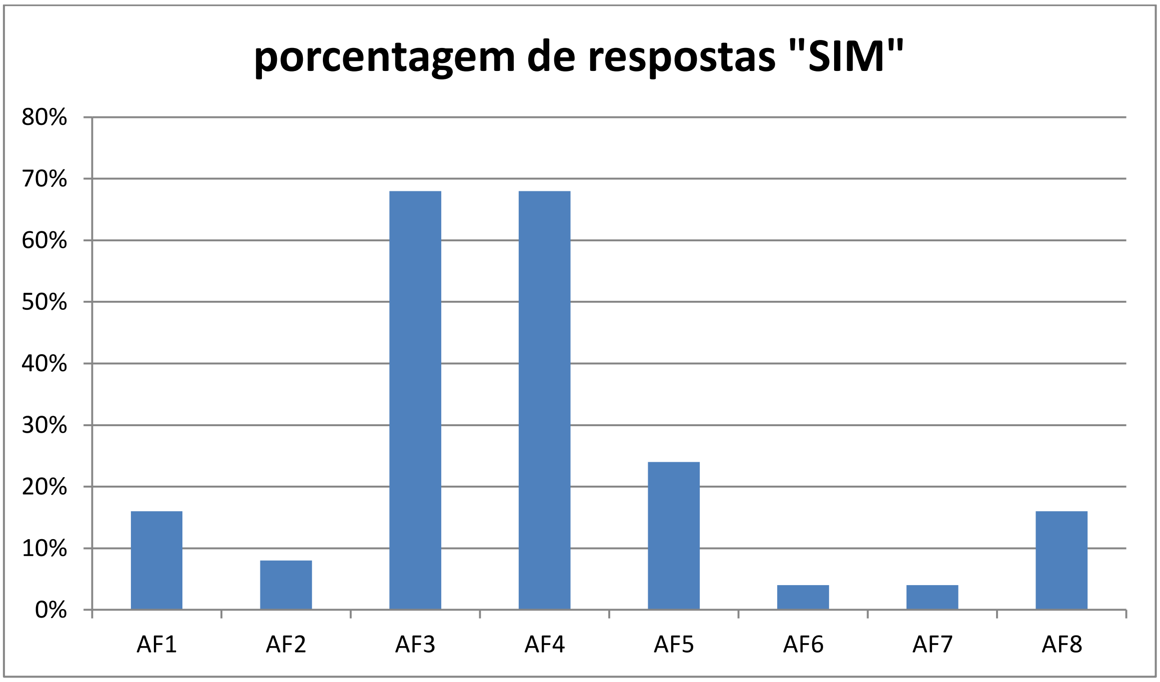

Figura 9 – Porcentagem de afirmações com valores iguais a “SIM”

De um modo geral, as respostas iguais a “Sim” corresponderam a aproximadamente 1/4 (um quarto) do total de respostas. Em especial, com relação à probabilidade condicional, analisando as afirmações AF3, AF4, AF5 e AF6, temos que, dentre os livros analisados, menos da metade (cerca de 40%) se mostram adequados, pesando bastante neste sentido a questão da não utilização do diagrama de árvore e a ausência de uma explicação comparando eventos disjuntos e eventos independentes.

Com base na proporção de afirmações verificadas como positivas, o instrumento de análise busca evidenciar que tipo de interpretação os livros didáticos do Ensino Médio privilegiam para introduzir o conceito de probabilidade e a subsequente definição de probabilidade condicional. E, em um segundo momento, como são explorados a regra da multiplicação e a sua vinculação aos casos de independência, a utilização do diagrama de árvore e se são apresentados exemplos ou exercícios que fogem ao convencional.

Na tabela 3, apresenta-se a lista de livros analisados, organizadas segundo o ano, e as respectivas porcentagens de respostas "Sim", considerando-se as 8 afirmações.

	Freq. rel. SIM (%)
C1 – 1973, Matematica no ensino de segundo grau vol.2 – Andraus	63%
C2 – 1977, Estudos de matematica 2 grau - Sampaio, Lapa, Cavallantte	13%
C3 – 1977, Fundamentos_de_matemática_elementar – Iezzi et. al.	63%
C4 – 1986, Curso de Matemática - Nery e Jakubovic	13%
C5 – 1991, Os elos da matemática - Roku Carlos Kazuhito	25%
C6 – 1992, Matematica vol unico - Bucchi, Paulo	25%
C7 – 1992, Matemática vol2 – Signorelli	0%
C8 – 2000, Matemática Vol. Unico -Manoel Paiva	25%
C9 – 2003, Matemática atividade humana - Adilson Longen	0%
C10 – 2003, Matematica - Marcondes, Atica	0%
C11 – 2004, Matematica - Vasconcellos; Scordamaglio; Cândido	38%
C12 – 2005, Matematica - Nicolau, Vicente e Elizabeth	25%
C13 – 2005, Quanta Matemática vol 2	38%
C14 – 2005, Matemática Aula por Aula -Benigno Barreto Filho	25%
C15 – 2005, Matematica Componentes Curricular - Manual Paiva	38%
C16 – 2005, Matemática completa Vol.2 - Bonjorno	38%
C17 – 2005, Matemática e suas tecnologias	25%
C18 – 2005, Matemática no ensino medio - Goulart	25%
C19 – 2006, MATEMATICA Ciencia e Aplicacoes – Iezzi et. al.	38%
C20 – 2010, Matemática ciência, linguagem e tecnologia vol 2 - Jackson Ribeiro	38%
C21 – 2010, Matematica vol 2 6 ed-Smole, Katia Cristina Stocco	0%
C22 – 2011, Matemática(editora bernoulli)	25%
C23 – 2013, Matemática Contexto e Aplicações vol.2 - Dante	25%
C24 – 2013, Matemática novo olhar -Joamir Souza	25%
C25 – 2016, Matematica Interacao e Tecnologia - Rodrigo Balestri	25%
Média	26%

Tabela 3 – Frequências de valores “SIM” por livro.

É importante notar que de fato a grande maioria dos livros (92%) possui porcentagem de “Sim” menor que 50%. Na Tabela 4 a seguir os valores de “Sim” e de “Não” por afirmação para cada um dos livros são representados por 1 e 0, respectivamente.

	AF1	AF2	AF3	AF4	AF5	AF6	AF7	AF8	**Soma**
C1	1	0	1	1	1	1	0	0	5
C2	0	0	0	0	1	0	0	0	1
C3	1	1	1	1	1	0	0	0	5
C4	0	0	0	1	0	0	0	0	1
C5	0	0	1	1	0	0	0	0	2
C6	0	0	1	1	0	0	0	0	2
C7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C8	0	0	1	1	0	0	0	0	2
C9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C11	1	1	0	1	0	0	0	0	3
C12	0	0	1	1	0	0	0	0	2
C13	0	0	1	1	0	0	0	1	3
C14	0	0	1	1	0	0	0	0	2
C15	1	0	1	1	0	0	0	0	3
C16	0	0	1	0	1	0	1	0	3
C17	0	0	1	0	0	0	0	1	2
C18	0	0	0	1	0	0	0	1	2
C19	0	0	1	1	1	0	0	0	3
C20	0	0	1	0	1	0	0	1	3
C21	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C22	0	0	1	1	0	0	0	0	2
C23	0	0	1	1	0	0	0	0	2
C24	0	0	1	1	0	0	0	0	2
C25	0	0	1	1	0	0	0	0	2
Média	0,16	0,08	0,68	0,68	0,24	0,04	0,04	0,16	2,08

Tabela 4 - Respostas das afirmações por livro (0 = Não, 1 = Sim).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou identificar as causas de ser tão comum o erro de multiplicar probabilidades de dois eventos que não são independentes a fim de obter a probabilidade da ocorrência simultânea de ambos. A hipótese mais natural foi suspeitar de a fonte do problema estar relacionada ao principal recurso didático utilizado pelos professores e, consequentemente, pelos estudantes: os livros didáticos. Então, o trabalho confluiu para a análise feita através de um instrumento composto de oito afirmações sobre o conteúdo de probabilidade de cada livro.

Tal como pontuado neste trabalho, o instrumento de análise proposto, por meio da avaliação binária das afirmações referentes ao conteúdo de probabilidade, tinha como intuito revelar através das suas respectivas proporções de afirmações positivas aqueles livros que almejavam uma abordagem enriquecedora e não convencional.

Por outro lado, duas das afirmações do instrumento de análise apontavam de forma mais decisiva na questão do erro conceitual sobre a independência discutido na introdução quando da apresentação do conteúdo, a saber, as afirmações AF3 - *Após a definição de probabilidade condicional, a regra da multiplicação geral é explorada.* e AF4 - *A definição de eventos independentes usa o argumento via probabilidade condicional.*. Como resultado, porém, surpreende notar que na Figura 9 as mesmas afirmações AF3 e AF4, as quais praticamente representam o cerne investigativo deste trabalho, com respeito ao mau uso da regra da multiplicação e definição de eventos independentes, foram as que obtiveram a maior incidência (68%) de valores “Sim”. Ainda que o resultado signifique uma surpresa no sentido que, antes da análise, se esperava obter um percentual maior de valores iguais a “Não” para essas afirmações, ou seja, mais livros pecando ao introduzir o conceito de independência, a gravidade que eles representam de maneira nenhuma pode ser menosprezada. Com efeito, uma vez que ambas estão diretamente relacionadas à motivação do trabalho, o autor julga que obter “Não” em qualquer uma delas compromete seriamente a qualidade do conteúdo do livro no tratamento da probabilidade da ocorrência simultânea de dois ou mais eventos.

Cabe ressaltar, aliás, que apenas 24% dos livros apresentam o diagrama de árvore e quando apresentado, o que geralmente se faz em algum exercício de exemplo, ele vem acompanhado de explicação insuficiente.

Em face a essas constatações, uma conjectura que pode ser feita é a de que apesar da exploração da regra da multiplicação após a definição de probabilidade condicional e da motivação da definição de probabilidade condicional para a definição de dois eventos independentes serem contempladas na maioria dos livros analisados, esses conteúdos são pouco ou mal explorados em seguida o que, consequentemente, pode levar ao esquecimento ou pior, à lembrança da equação mais simples, $P(A \cap B)=P(A).P(B)$, apesar da mesma não valer em geral. Uma verificação que reforça essa conjectura é o trabalho insuficiente e inadequado com o diagrama de árvore ao se trabalhar esse conteúdo nos livros analisados.

Com o objetivo de avaliar a frequência na qual esse tipo de erro é cometido, um teste de quatro questões objetivas foi elaborado e aplicado em três turmas distintas. As questões do teste estão no Apêndice A, enquanto que os resultados da correção completa dos testes encontram-se no Apêndice B.

Na tabela 4 são listados detalhes de cada turma em que foi aplicado o teste.

Disciplina	Curso(s)	FASE	Número de alunos
Matemática Discreta	Profmat	Final	12
Cálculo das Probabilidades II	Estatística Ciências Atuariais Matemática Aplicada	Início	25
Cálculo das Probabilidades I	Estatística Ciências Atuariais Matemática Aplicada	Início	32

Tabela 5: Lista de turmas e número de alunos que realizaram o teste de questões objetivas

De fato, apenas as duas primeiras questões do teste avaliam de forma direta o erro investigado.

Na primeira delas, questão 1, pede-se $P(A \cap B)$, com A o evento “acertar a primeira questão” e B o evento “acertar a segunda questão”. A resposta certa, $P(A).P(B|A)$ está na opção (B). Na opção (A) está o “erro comum” $P(A).P(B)$, na opção (C) um erro que classificamos como erro de aplicação da regra da multiplicação, a saber, $P(B).P(B|A)$ e, na opção (D) um erro de má interpretação, a saber, $P(B|A)$. No caso deste último erro, a confusão pode se dar devido à estrutura semântica implícita da probabilidade condicional por conta da ausência da conexão “dado que ocorreu” no enunciado.

Na turma do profmat todos os alunos acertaram a questão 1. Na turma de Cálculo das Probabilidades II, 83% dos alunos acertaram, e os erros foram cometidos uniformemente com percentual de 4% para cada erro. Na turma de Cálculo das Probabilidades I, 53% dos alunos acertaram e os erros foram cometidos uniformemente com percentual de cerca de 16% para cada erro.

Na questão 2, novamente pede-se $P(A \cap B)$ com A o evento “ter barba” e B o evento “ser careca”. A resposta certa, $P(B).P(A|B)$ está na opção (B). Na opção (A) está o “erro comum” $P(A).P(B)$, na opção (C) um erro que classificamos como erro de aplicação da regra da multiplicação, a saber, $P(A).P(A|B)$ e, na opção (D) o erro de somar $P(A)$ e $P(B)$.

Na turma do profmat, 83% dos alunos acertaram a questão e, os erros, na proporção de 8% cada, distribuíram-se pelos itens (A) e (C). Na turma de Cálculo das Probabilidades II, 80% dos alunos acertaram, e os erros, na proporção de 10% cada, distribuíram-se novamente pelos itens (A) e (C). Na turma de Cálculo das Probabilidades I, 47% dos alunos acertaram e os erros foram cometidos nas seguintes proporções: 12,5% no item (A), 34% no item (C) e 6,5% no item (D).

Os resultados obtidos nessas turmas não revelaram a hipótese de que o erro de multiplicar probabilidades incondicionais de eventos para obter a probabilidade conjunta quando os eventos não são independentes é mais frequente. No entanto, vale lembrar que as três turmas investigadas fazem parte de um grupo seleto no sentido de que são pessoas que fazem ou fizeram cursos de nível superior em áreas nas quais estuda-se com mais detalhe o conteúdo de probabilidade. Mas, a maioria das pessoas possivelmente apenas estudará esse conteúdo na Educação Básica.

Seria interessante aplicar o mesmo teste, considerando apenas as duas primeiras questões, a outras pessoas de outras áreas tendo concluído pelo menos o Ensino Médio para avaliar a frequência na qual esse erro é cometido.

Já com respeito à análise dos livros didáticos, projetos tais como o Livro Aberto de Matemática poderiam ser tomados como referência. Uma análise rápida do capítulo de probabilidade desse projeto indica respostas “Sim” às oito afirmações do instrumento de análise utilizado neste trabalho.

Verificou-se que 75% dos livros didáticos de Matemática analisados não apresentaram o diagrama de árvore como ferramenta de solução de problemas, nem mesmo em exemplos nem mesmo em exercícios resolvidos, de modo que uma atenção especial à inclusão e explicação detalhada dessa ferramenta na resolução de problemas que envolvem o uso da regra da multiplicação parece ser importante. Além disso, seria interessante a exploração de exemplos não convencionais do uso da probabilidade, envolvendo espaços amostrais infinitos enumeráveis ou não enumeráveis, probabilidade geométrica etc., assim como a introdução das interpretações frequentista e subjetiva da probabilidade, por exemplo, contrapondo-se à interpretação clássica e ao mesmo tempo enriquecendo a percepção do aluno da relevância da probabilidade na sua realidade cotidiana e contexto histórico.

REFERÊNCIAS

Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). Le jeu du franc-carreau – une activité probabiliste au Collège. Rouen : IREM de Rouen.

Carvalho, C., & Fernandes, J. A. (2005). Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da psicologia. Revista Quadrante, vol. 14, nº 2.

Lainetti, T. S. F. (2019). Explorando a Não Equiprobabilidade de Eventos na Educação Básica. Dissertação de Mestrado Profmat, UFRJ.

Lopes, C. A. E. (2003). O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil. Campinas: Universidade Estadual de Campinas.

Marinho, A. (2013). AS FRAÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL. Dissertação de Mestrado.

Matthews, R. (2017). *As leis do acaso: Como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza*. Zahar.

Mlodinow, L. (2009). *O andar do bêbado*. Zahar.

Romanatto, M. C. (2004); O livro didático: alcances e limites. Disponível em http://www.miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/mr19-Mauro.doc Acesso em 12 ago. 2019.

R. R. Paterlini (2002), "O problema do jogo dos discos", Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 48.

Schneps, L., & Colmez, C. (2014). A matemática nos tribunais: uso e abuso dos números em julgamentos. Tradução George Schlesinger.

APÊNDICE A – Questões do teste aplicado

UFRJ - CCMN - IM - PROFMAT - Questões sobre probabilidade

Atenção: Em cada questão há apenas uma resposta correta.

Marque a disciplina que está sendo cursada:

( ) Matemática Discreta ( ) Estatística e Probabilidade ( ) Cálculo das Probabilidades I ( ) Cálculo das Probabilidades II

1. A probabilidade de Artur resolver a primeira questão da prova final de Matemática é 0,5. A probabilidade dele resolver a segunda questão da prova final de Matemática é 0,6. A probabilidade de Artur resolver a segunda questão da prova final de Matemática, sabendo que ele resolveu a primeira questão dessa prova é 0,8. A probabilidade de Artur resolver as duas primeiras questões da prova final de Matemática é:

   (A) 0,30
   (B) 0,40
   (C) 0,48
   (D) 0,80

2. Em uma comunidade, a probabilidade de um homem ter barba é 0,5; a probabilidade de um homem ser careca é 0,4 e a probabilidade de um homem careca ter barba é 0,6. A probabilidade de um homem dessa comunidade ter barba e ser careca é:

   (A) 0,20
   (B) 0,24
   (C) 0,30
   (D) 0,90

3. Sabe-se que 10% das garrafas produzidas numa indústria de sucos apresentam defeitos. Se uma garrafa apresenta defeito, o inspetor de qualidade tem probabilidade 0,8 de perceber o defeito e removê-la do processo de enchimento. Por outro lado, se a garrafa não apresenta defeito, o inspetor tem probabilidade 0,01 de considerá-la defeituosa e removê-la do processo de enchimento. Uma garrafa acaba se ser removida do processo de enchimento, qual é a probabilidade de que a garrafa seja defeituosa?

   (A) $\frac{8}{100}$

   (B) $\frac{1}{10}$

   (C) $\frac{89}{1000}$

   (D) $\frac{80}{89}$

4. Considere dois eventos A e B em um espaço amostral S tais que $P(A) = 0,3$ e $P(B) = 0,8$. Classifique cada uma das afirmações a seguir em

   (V) verdadeira,

   (F) falsa ou

   (I) faltam informações para classificar a afirmação em verdadeira ou falsa.

   (   ) $P(A \cap B) = 0,24$
   (   ) $P(A \cap B) \leq 0,3$
   (   ) A e B são eventos disjuntos.
   (   ) A e B são eventos independentes.

APÊNDICE B – Análise dos resultados dos testes

Os testes aplicados às turmas de nível Superior foram elaborados contendo alternativas segundo descritores por tipo de erro cometido.

Tabela 6: Medidas resumo das notas obtidas

	Número de alunos	Mínimo	Q1	Q2	Média	Q3	Máximo	Desvio padrão
PROB2	25	2,5	6,3	7,5	7,5	9,4	10	2,3
PROB1	32	0,6	3,0	3,8	4,7	6,9	10	2,9
PROFMAT	12	3,8	6,7	8,8	8,0	9,4	10	1,9

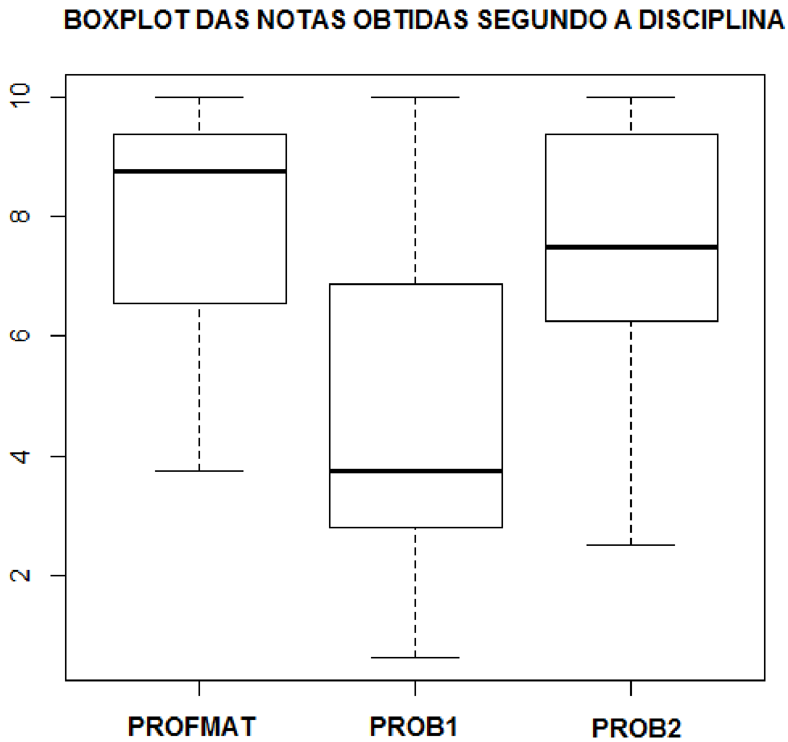

Figura 10 – Boxplots dos desempenhos no teste para as três turmas

Análise dos resultados de cada questão

1. Na primeira questão a resposta correta corresponde à $P(A).P(B|A)=P(A\cap B)$ em que A é o evento acertar a primeira questão e B é o evento acertar a segunda questão. A resposta correta está na opção (B).
   A resposta (A) indica $P(A).P(B)$.
   A resposta (C) indica $P(B).P(B|A)$.
   A resposta (D) indica $P(B|A)$.

Questão 1	ACERTOS	A	C	D
PROFMAT	**100%**	0	0	0
PROB2	88%	4%	4%	4%
PROB1	53%	16%	16%	16%

Com relação à primeira questão do teste, a turma do PROFMAT acertou-a integralmente. A turma de PROB2 teve um índice de acerto de 88% e os erros distribuíram-se uniformemente nas opções (A), (C) e (D) na proporção de 4% cada, não correspondendo à expectativa de que haveria maior proporção de respostas no item (A), relacionado ao erro de multiplicação das probabilidades incondicionais. De qualquer maneira, é bom realçar que se trata de um grupo seleto, no sentido de que são pessoas que fazem um curso de nível superior no qual estuda-se o conteúdo de probabilidade, quando a maioria das pessoas possivelmente apenas trabalha com esse conteúdo na Educação Básica. Com desempenho bem menor, a turma de PROB1 teve um índice de acerto de 53% e, também nesta turma, os erros distribuíram-se uniformemente (de forma aproximada) nas opções (A), (C) e (D) na proporção de 16% cada, não correspondendo á expectativa de que haveria maior proporção de respostas no item (A), valendo a mesma observação anterior.

2. Na segunda questão a resposta correta corresponde à $P(B).P(A|B)=P(A\cap B)$ em que A é o evento “ter barba” e B é o evento “ser careca”. A resposta correta está na opção (B).

   A resposta (A) indica $P(A).P(B)$.
   A resposta (C) indica $P(A).P(A|B)$.
   A resposta (D) indica $P(A)+ P(B)$.

Questão 2	ACERTOS	A	C	D
PROFMAT	**83%**	8%	8%	0
PROB2	80%	10%	10%	0
PROB1	47%	12,5%	34%	6,5%

Quanto à segunda questão do teste, a turma do PROFMAT teve um índice de acerto de 83%, com cerca de 8% de erros nos itens (A) e (C) cada um e sem marcações no item (D). De modo semelhante, a turma de PROB2 teve um índice de acerto de 80%, com cerca de 10% de erros nos itens (A) e (C) cada um e sem marcações no item (D). Já a turma de PROB1 teve um índice de acerto de cerca de 47%. O erro mais cometido por esta turma foi a opção (C), com cerca de 34%, levando–nos a pensar em uma possível má interpretação do texto, ao inverter as probabilidades condicionais, entendo

P(B|C) como se fosse P(C|B). Os demais erros foram cometidos nas seguintes proporções: 12,5% no item (A) e 6,5% no item (D).

3. Na terceira questão a resposta correta corresponde à $P(D|R)=P(D\cap R)/P(R)=P(D\cap R)/[P(D\cap R)+P(D^c\cap R)]$, em que D é o evento "apresentar defeito" e R é o evento "ser removida do processo". A resposta correta está na opção (D).
A resposta (A) indica $P(R\cap D)$.
A resposta (B) indica P(D).
A resposta (C) indica P(R).

Questão 3	ACERTOS	A	B	C
PROFMAT	**75%**	8,30%	0	16,70%
PROB2	56%	20%	0	24%
PROB1	34%	34%	6,30%	25%

Na terceira questão, a turma do PROFMAT teve índice de acerto de 75%, com erros nas proporções de 17% no item (C) e 8% no item (A), sem marcações ao item (B). Na turma PROB2 metade da turma (56%) aproximadamente acertou à questão, enquanto os erros se distribuíram na proporção de 24% de marcações ao item (D) e 20% ao item (A). Os erros sugerem uma má interpretação do texto, no sentido de considerar a probabilidade conjunta $P(R\cap D)$ como se fosse a probabilidade condicional P(D|R) que é pedida na questão, além do erro da consideração da probabilidade P(R), marcando-se os itens (A) e (C), respectivamente. A turma PROB1 teve uma dispersão aproximadamente uniforme de marcações aos itens D (34%), A (34%) e C (25%) e um índice residual de marcações de 6,3% no item (B).

4. A quarta questão envolveu quatro afirmações para serem classificadas em Falsa(F), Verdadeira(V) ou "faltam informações para classificar a informação em verdadeira ou falsa (I)".

O enunciado apresenta dois eventos A e B com probabilidades P(A)=0,3 e P(B)=0,8.

4.1. A primeira afirmação é $P(A\cap B)=0,24$.

A opção correta então é a terceira: "faltam informações para classificar a informação em verdadeira ou falsa(I)".

Q4_a1	**Acertos**	V	F
PROFMAT	**75%**	0	25%
PROB2	**76%**	4%	20%
PROB1	56%	28%	16%

O primeiro item teve índice de acerto de aproximadamente 75% nas turmas de PROB2 e do PROFMAT. Na turma PROB2, cerca de 20% consideraram a afirmação "falsa" e, na turma PROFMAT, cerca de 25%, o que indica o equívoco de considerar que os eventos não poderiam ser independentes. Na turma de PROB1, 56% acertaram e 16% classificaram a afirmação como "falsa", enquanto 28% consideraram-na "verdadeira", isto é, que os eventos são independentes, multiplicando consequentemente as probabilidades incondicionais.

4.2. A segunda afirmação é $P(A \cap B) \leq 0,3$.

A opção correta é "Verdadeiro" já que $A \cap B \subset A$ e $P(A)<P(B)$

Q4_a2	**Acertos**	F	I	
PROFMAT	75**%**	25%	0%	
PROB2	**92%**	4%	4%	
PROB1	69%	19%	12%	

O segundo item teve 92% de acertos na turma de PROB2. Na turma do PROFMAT 75% acertaram, e 25% classificaram erroneamente a afirmação como "falsa", violando a propriedade T5 apresentada no capítulo 2 deste trabalho, já que $A \cap B \subset A$. Na turma de PROB1, o índice de acerto foi de 69%, enquanto 19% classificaram a afirmação como "falsa" e 12% marcaram que "faltam informações para classificar a informação em verdadeira ou falsa".

4.3. A terceira afirmação é A e B são eventos disjuntos.

A opção correta é "Falso" já que $P(A)+P(B)=1,1>1$.

Q4_a3	**Acertos**	V	I
PROFMAT	50**%**	17%	33%
PROB2	**72%**	8%	20%
PROB1*	44%	0%	53%

* Um aluno de PROB1 deixou essa resposta em branco.

O terceiro item teve índice de acerto de 50% na turma do PROFMAT, 72% na turma de PROB2 e 44% na turma de PROB1. Quanto aos erros, 17% na turma do PROFMAT e 8% na turma de PROB2 classificaram a afirmação como “verdadeira”, ou seja, que os eventos poderiam ser disjuntos; 33% na turma do PROFMAT, 20% na turma de PROB2 e 53% na turma de PROB1 consideraram que “faltam informações para classificar a informação em verdadeira ou falsa”, ao não observar que $P(A) + P(B) = 1{,}1 > 1 = P(\Omega)$ e portanto os eventos não podem ser disjuntos.

4.4. A quarta afirmação é A e B são eventos independentes.

A opção correta é, como na primeira afirmação, “faltam informações para classificar a informação em verdadeira ou falsa”.

Q4_a4	Acertos	F	V
PROFMAT	50%	25%	25%
PROB2	**60%**	40%	0%
PROB1	56%	25%	19%

O quarto item teve índice de acerto de 50% na turma do PROFMAT, 60% na turma de PROB2 e 56% na turma PROB1. Na turma do PROFMAT 25% consideraram que a afirmação é “verdadeira”, ou seja, que os eventos são independentes, e na turma de PROB1 esse mesmo erro teve índice de 19%. Por outro lado, 25% na turma do PROFMAT, 40% na turma de PROB2 e 25% na turma de PROB1 classificaram a afirmação como “falsa”, considerando que os eventos não são independentes quando na verdade “faltam informações para classificar a informação em verdadeira ou falsa".

Cabe notar que, analisando cada uma das questões do teste individualmente, nas turmas PROFMAT e PROB2, todas obtiveram porcentagem maior ou igual a 75% de acertos, com exceção dos dois últimos itens da quarta questão do teste. Um desses itens era sobre se são, ou não, disjuntos e, o outro, sobre se são, ou não, independentes dois eventos A e B, com probabilidades 0,3 e 0,8 respectivamente, em um mesmo espaço amostral. Na turma do PROFMAT, mais de 75% erraram um ou outro desses dois itens, e na turma de PROB2 esse índice foi de 64%, o que é um indicativo de que os conceitos de eventos disjuntos e independência são possivelmente mal assimilados ou passíveis de confusão mesmo pelos professores de Matemática e estudantes de graduação que reviram o conteúdo recentemente em uma disciplina de nível Superior. Na turma de PROB1 o índice de erro em um ou outro desses dois itens da quarta questão foi de 81%. Em especial, com relação à afirmação sobre os eventos serem disjuntos, a turma PROB1 errou mais (53%) do que acertou (44%) e um aluno, que foi bem no teste de modo geral, deixou-a em branco.