UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA CRÍTICA ÀS PROBABILIDADES DA LOTOGOL

Wellington da Silva Freitas

Instituto de Matemática

Maceió, setembro de 2019

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WELLINGTON DA SILVA FREITAS

UMA CRÍTICA ÀS PROBABILIDADES DA LOTOGOL

Maceió
2019

WELLINGTON DA SILVA FREITAS

UMA CRÍTICA ÀS PROBABILIDADES DA LOTOGOL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

Maceió

2019

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

F866c Freitas, Wellington da Silva.
Uma crítica às probabilidades da Lotogol / Wellington da Silva Freitas. – 2019.
53 f. : il. color.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 52-53.

1. Matemática (Ensino médio). 2. Análise combinatória. 3. Distribuição (Teoria da probabilidade). 4. Jogos de azar. 5. Loteria esportiva. I. Título.

CDU: 519.1/.2: 794.93

Folha de Aprovação

WELLINGTON DA SILVA FREITAS

UMA CRÍTICA ÀS PROBABILIDADES DO LOTOGOL

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 04 de setembro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa – UFAL (Presidente)

Rinaldo V. da S. Júni

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior - UFAL

Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva – UFMA

.

A meus pais, Antonia da Silva e Pedro Martins, a minha esposa e companheira, Janaína, e a minha família, sobretudo a meus irmãos e filhos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, por tudo.

A meus filhos, Guilherme, Pedro e Antonia, e a minha esposa e companheira, Janaína, que esteve ao meu lado em vários momentos importantes da minha vida e está a gestar mais um presente que Deus nos enviou.

A meus pais, Pedro e Antonia, por todo o empenho e amor em minha vida.

A meus irmãos, Simone, Jonathan, Everton e Sueli, pelo companheirismo e pelo ombro amigo em todos os momentos em que precisei.

A meus sobrinhos, Jonathan Júnior, Natally Vitória e Luan Victor, por não me deixarem perder a criatividade e a fascinação pela descoberta do novo.

A meus primos, em especial Isaías Martins, Elias Martins, Miriam Martins, Wanderson e Josineide, por toda a ajuda.

A meus colegas de trabalho, em especial Sylmara Fagundes, Alex Antonio e Luciano Dantas, pelas orientações e ensinamentos.

Às pessoas que não mediram esforços para me ajudar sempre que precisei. Serei sempre grato às tias Djanira, Helena e Carminha e a meus avôs.

A meus colegas e professores da turma do PROFMAT 2016, em especial Givaldo e Edson.

A meu Orientador, Isnaldo, por guiar-me neste trabalho.

A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.

GALILEI, Galileo

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta diferenciada de aplicação de alguns dos principais temas da Matemática no Ensino Médio, Combinatória e Probabilidade, através do jogo de futebol. Existem vários trabalhos relacionando futebol e Probabilidade, sobretudo atualmente, quando se encontram diversos *sites* de apostas voltados ao esporte mais popular do planeta. Por isso, trataremos sobre Probabilidade no futebol recorrendo ao jogo da Lotogol e buscando apoio na Distribuição de Poisson, com o objetivo de atrair a curiosidade dos leitores para esses temas. Apresentaremos um método básico de calcular as Probabilidades de placares de uma partida de futebol, o que é um pouco menos comum na literatura especializada do que as Probabilidades de resultados em uma partida de futebol, sendo as possibilidades da primeira muito maiores do que apenas as chances de vitória, empate ou derrota. Além disso, abordaremos um tema que não é muito popular no Ensino Médio, a Distribuição de Poisson, deixando uma sequência didática de três atividades para o professor que quiser trabalhar esses conteúdos, de modo que a última sequência usa o aplicativo *GeoGebra*.

Palavras-chave: Lotogol, Poisson, Distribuição de Probabilidade, Probabilidade, Combinatória, Educação Básica, Ensino.

ABSTRACT

This work presents a different proposal of application of some of the main themes of Mathematics in High School, Combinatory and Probability, through the game of football. There are several works relating football and Probability, especially nowadays, when there are several betting sites focused on the most popular sport on the planet. Therefore, we will deal with Probability in football using the Lotogol game and seeking support in the Poisson Distribution, with the objective of attracting the curiosity of readers to these topics. We will present a basic method of calculating the odds of a football scoreboard, which is a little less common in the specialized literature than the odds of results in a football match, the chances of the former being much greater than just the odds victory, draw or defeat. In addition, we will address a topic that is not very popular in high school, the Poisson Distribution, leaving a didactic sequence of three activities for the teacher who wants to work on these contents, so that the last sequence uses the *GeoGebra* application.

Keywords: Lotogol, Poisson, Probability Distribution, Probability, Combinatorial, Basic Education, Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em três partes principais: a primeira tem como objetivo entender como são calculadas as probabilidades divulgadas pela Lotogol no verso dos volantes; a segunda, mostrar, através de dados estatísticos, que essas probabilidades não condizem com a realidade; e a terceira parte, sugerir um modelo matemático para calcular essas probabilidades usando a distribuição de Poisson.

Os objetivos fundamentais desta dissertação são proporcionar o aprendizado de alguns conceitos de probabilidade e combinatória e possibilitar o entendimento de como são calculadas as probabilidades subjetivas em eventos esportivos, em particular, na Lotogol. Os conceitos de probabilidade e combinatória serão revistos e introduzidos ao conceito da distribuição de Poisson — primeiramente, com a parte teórica e, depois, com aplicação em uma situação concreta, fazendo com que o entendimento desse tópico seja facilitado.

Estamos, então, interessados em saber como estimar essas probabilidades. Para isso, apresentaremos um modelo que muitos *sites* usam e é de fácil compreensão para os estudantes do ensino básico, mas que os apostadores “comuns” não têm acesso e, em seguida, transformaremos as nossas probabilidades em porcentagens para que fique mais acessível a possibilidade de fazer comparações.

A principal dificuldade em modelar uma situação probabilística para o futebol é traduzir conceitos empíricos e subjetivos do esporte para uma linguagem compreensível e tratável do ponto de vista matemático. Além disso, existe a dificuldade dos currículos escolares em relação aos seus referenciais, que trazem o rol de conteúdos do Ensino Médio. No entanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) deixam isso flexível para que as escolas atendam às necessidades dos alunos, respeitando, é claro, seus direitos de aprendizagem.

Confirmando a tese de que os jogos beneficiam os educandos, os PCN elencam vários benefícios que as atividades matemáticas envolvendo jogos trazem:

> Por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações. Além disso, passam a compreender e a utilizar convenções e regras que serão empregadas no processo de ensino e aprendizagem. Essa compreensão favorece sua integração num mundo social bastante complexo e proporciona as primeiras aproximações com futuras teorizações. A participação em jogos de grupo também representa uma

> conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico (BRASIL, 1997, p. 48–49).

Essa sugestão de aula pode ser utilizada em qualquer série do Ensino Médio a depender do currículo adotado pela escola, até porque o ensino de combinatória e probabilidade já é do conhecimento dos estudantes desde o ensino fundamental — é claro que, em níveis mais elementares, o que pode ser confirmado a seguir, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 32):

> Em função das determinações da Lei nº 13.415/2017, são detalhadas as habilidades de [...] Matemática, considerando que esses componentes curriculares devem ser oferecidos nos três anos do Ensino Médio. Ainda assim, para garantir aos sistemas de ensino e às escolas a construção de currículos e propostas pedagógicas flexíveis e adequados à sua realidade, essas habilidades são apresentadas **sem indicação de seriação** (grifo meu).

Já no referencial curricular de Alagoas, os conteúdos de análise combinatória e probabilidade pertencem à 2ª série do ensino médio. Porém, sugerimos que a nossa sequência didática seja aplicada logo após os alunos já terem visto esses conceitos, já que estes servirão de pré-requisitos.

No capítulo 2, faremos um breve resumo histórico da análise combinatória, probabilidade e seu ensino no Brasil, além de dedicarmos uma seção sobre o jogo como ferramenta de ensino. No terceiro capítulo, revisaremos tópicos elementares de combinatória e probabilidade com ênfase nas variáveis aleatórias e distribuições de probabilidades discretas, sobretudo com destaque para a de Poisson. No capítulo 4, apresentamos um breve resumo sobre o futebol e a Lotogol, apresentando aspectos históricos de ambos combinados com uma superficial apresentação do jogo da Lotogol. Além disso, mostraremos como são calculadas as probabilidades da Lotogol pela ótica dos números divulgados pelo jogo em seus volantes, porém, discordamos completamente dessas probabilidades, de forma que trataremos mais sobre esse assunto nas páginas seguintes. No capítulo 5, mostraremos através de dados estatísticos que os placares dos jogos de futebol não são equiprováveis como supõem os cálculos realizados pela Lotogol. No capítulo 6, apresentaremos uma aplicação da distribuição de Poisson para calcular placares de jogos de futebol, levando em consideração fatores como mando de campo e fatores técnicos das equipes envolvidas nos confrontos, que contribuem de forma direta nos prováveis placares em uma partida de futebol. No capítulo 7, faremos algumas considerações e, no capítulo 8, deixaremos explícita uma sequência didática simples.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA, PROBABILIDADE E JOGOS: HISTÓRICO E ENSINO

Neste capítulo, trataremos, brevemente, sobre o histórico da análise combinatória e da probabilidade, assim como os jogos que estão diretamente ligados a esses conceitos matemáticos.

2.1 Análise combinatória: surgimento

A análise combinatória tomou forma a partir do século XVII, partindo do francês Blaise Pascal e sendo complementada por Fermat, Leibniz e Wallis. Surgiu mediante a necessidade de entender e calcular a probabilidade em um jogo de azar. Ninguém imaginaria que essas grandes mentes demonstrariam cientificamente o procedimento da análise combinatória a partir de um passatempo. Pois bem, foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos jogos que gerou o estudo dos métodos de contagem. Isso permitiu desenvolver procedimentos que possibilitam a contagem — de uma forma indireta — do número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Após vários estudos e demonstrações, definiu-se análise combinatória como sendo um conjunto de possibilidades constituído por elementos finitos, baseando-se em critérios que permitem a contagem e podendo ser estudado na matemática discreta, analisando possibilidades e combinações.

2.2 Probabilidade: um breve histórico

Neste tópico, veremos alguns fatos históricos da construção dos conceitos da probabilidade, os autores e colaboradores para essa belíssima área da Matemática. A fim de um estudo mais detalhado recomendamos as notas de aulas de Gadelha (2004).

Durante as Cruzadas (1096–1270), vários jogos de dados foram trazidos para o Ocidente (a exemplo, o surgimento da palavra “azar”, derivada de *al-zahr*, que significa “dado” em árabe). Já o baralho moderno, surgiu na França no século XIV.

Em 1494, foi proposto pelo monge Pacioli um problema conhecido como o problema dos pontos, que consiste em determinar qual deve ser a divisão do “bolo” de apostas quando um jogo é interrompido antes do fim. Mais precisamente, suponhamos uma partida entre dois jogadores que é vencida pelo primeiro que fizer 6 pontos. Na hipótese de ambos os jogadores terem a mesma habilidade no jogo, como se deve dividir o "bolo", se a partida for interrompida quando um dos jogadores tiver 4 pontos e outro 3? a solução sugerida é dividir o "bolo" proporcionalmente às chances (probabilidades) de cada jogador vencer o jogo. O problema está em como calcular essas chances. Esse problema intrigou muitos matemáticos da época e foi exposto a Pascal por Chevalier de Méré.

Em 1654, Blaise Pascal (1623–1662) deu início a uma série de correspondências com Pierre Fermat (1601–1665), a partir das quais estabeleceram um método sistemático para calcular probabilidades e solucionaram o problema de Pacioli. Em 1653, Pascal já havia comentado em uma carta a Fermat sobre o seu manuscrito *Traité du triangle arithmétique*, no qual faz um estudo detalhado do triângulo compondo os coeficientes binomiais, conhecido, hoje, como o Triângulo de Pascal. Sendo assim, Pascal determinou a solução do problema de Pacioli usando esse triângulo aritmético, obtendo o resultado que, se ao jogador A faltam *m* pontos para ganhar e a B faltam *n* pontos, então, a razão das probabilidades de ganharem é dada por:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\binom{m+n-1}{0}+\cdots+\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n-1}{0}+\cdots+\binom{m+n-1}{m-1}}$$

A primeira publicação em teoria de probabilidade foi um pequeno livro intitulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, escrito em 1657 por Christiaan Huygens (1629–1695). Nele, Huygens afirma que "[...] não estamos tratando apenas com jogos, mas com os fundamentos de uma nova teoria, tanto profunda como interessante." Seu trabalho influenciou vários matemáticos da época, notadamente J. Bernoulli (1654–1705), e teve papel fundamental, comparável ao de Pascal e Fermat, para estabelecer a teoria de probabilidade.

O primeiro grande tratado de probabilidade foi *Ars Conjectandi* (*A Arte da Conjectura*), escrito pelo matemático suíço Jacob (Jacques) Bernoulli (1654–1705). Ao morrer, seu livro estava incompleto, tendo sido concluído por seu sobrinho Nicolaus (I) Bernoulli (1687–1759) e publicado em 1713. *Ars Conjectandi* foi dividido em quatro partes: a primeira reeditou o livro de Huygens, complementado com vários comentários; a segunda, intitulada *A Doutrina de Permutações e Combinações*, foi usada como livro-texto em análise combinatória durante o século XVIII; a terceira fez a aplicação da teoria de combinações na solução detalhada de 24 problemas de jogos de azar; finalmente, na quarta, denominada *Pars Quarta*, em que se propôs fazer aplicações em problemas cívicos, morais e econômicos. Em seu livro, J. Bernoulli provou a Lei dos Grandes Números e, com isso, deu uma contribuição que marcou o início de uma era na teoria de probabilidade.

Leonhard Euler (1707–1783), matemático e físico suíço, deu contribuições na aplicação de probabilidade na análise de loterias em demografia e seguros. Ele foi comissionado pelo rei Frederico II, o Grande, da Prússia para avaliar e organizar uma loteria.

Em 1718, o matemático francês Abraham De Moivre (1667–1754) publicou, em inglês, *Doctrine of Chances*, dedicando o trabalho a seu amigo Isaac Newton. Nesse livro notável, De Moivre propôs, mesmo de forma implícita, técnicas de reduzir problemas de probabilidade a equações diferenciais e de usar funções geratrizes para solucionar essas equações, que foram, mais tarde, aperfeiçoadas por Laplace.

Em 1777, Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, propôs o famoso “problema da agulha de Buffon”, hoje, um exercício em cursos elementares. O problema consiste em determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento l atravessar um feixe de paralelas, distantes entre si de $a > l$, quando lançada aleatoriamente. A solução é $\frac{2l}{a}$ e Buffon usou-a para calcular experimentalmente o valor de π.

Marquês Pierre Simon de Laplace (1749–1827) escreveu, com base em trabalhos que desenvolveu entre 1771 e 1786, seu grande tratado, *Théorie Analytique dês Probabilités*. A partir disso, os fundamentos da teoria de probabilidade foram colocados por Laplace em uma forma — hoje, dita clássica — que se manteve praticamente inalterada até o início do século XX. Laplace também publicou o clássico *Ensaio Filosófico Sobre as Probabilidades*, no qual afirma:

> Pode-se mesmo dizer, rigorosamente, que quase todos os nossos conhecimentos são apenas prováveis; e no pequeno número de coisas que podemos saber com certeza, mesmo nas ciências matemáticas, os principais meios para se chegar à verdade — a indução e a analogia — são fundados nas probabilidades (LAPLACE, 1814).

A Lei dos Grandes Números é um conceito fundamental em probabilidade, que declara:

> Se um evento de probabilidade p é observado repetidamente em ocasiões independentes, a proporção da frequência observada deste evento em relação ao total número de repetições converge em direção a p à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande (FELLER, 1976).

Thomas Bayes (1702–1761), um ministro protestante inglês com interesse em filosofia e lógica, escreveu um único trabalho matemático, *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, publicado pela Royal Society em 1763, três anos após sua morte. A originalidade e a importância do conceito de probabilidade inversa introduzido por Bayes nesse trabalho o imortalizou.

Em *Recherches sur la probabilité de jugements en matière criminelle et matière civile*, um importante trabalho sobre probabilidade publicado em 1837, a distribuição de Poisson aparece pela primeira vez. A distribuição de Poisson descreve a probabilidade de que um evento aleatório ocorra em um intervalo de tempo ou espaço sob condições nas quais a probabilidade de ocorrência do evento é muito pequena, mas o número de tentativas é grande o suficiente para que o evento venha a ocorrer algumas vezes. Além disso, ele introduziu a expressão "lei dos grandes números". E, embora, agora, classifiquemos esse trabalho como sendo de grande importância, ele encontrou pouco a seu favor na época — a exceção ocorreu na Rússia, onde Chebyshev desenvolveu suas ideias.

Em 1929, foi publicado o trabalho de Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987), *Teoria geral de medidas e teoria de probabilidade*, no qual era apresentada a primeira descrição de uma construção axiomática da probabilidade, baseada na teoria de medidas, que havia sido criada em torno de 1901 por Henri Lebesgue (1875–1941) e Èmile Borel (1871–1956). Em 1933, Kolmogorov publicou, em alemão, um pequeno livro intitulado *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (traduzido para o inglês sob o título *Foundations of the Calculus of Probability*), no qual desenvolve a teoria de probabilidade de forma matematicamente rigorosa a partir dos fundamentos axiomáticos baseados na teoria de medidas.

Para o nosso estudo, destacamos a estreita relação da probabilidade com o estudo sobre jogos de azar. Nas palavras de Laplace:

> A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto. [...] É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano (LAPLACE, 1814).

2.3 Ensino de probabilidade no Brasil

A probabilidade, juntamente com a estatística, é um tema fundamental para a educação, que visa formar cidadãos conscientes e, segundo LOPES, C. E. (2008), permite o crescimento de um senso crítico sobre diversas perspectivas, sejam elas científicas ou não. O ensino de probabilidade na educação básica constitui umas das recomendações que constam no PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais):

> A construção da ideia de probabilidade deve apoiar-se em situações elaboradas de tal forma que o estudante possa experimentar e realizar simulações. dessa maneira, em etapas posteriores, o estudante poderá estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento (BRASIL, 2019).

E completa:

> A ideia de probabilidade deve ser ampliada durante o Ensino Médio, de forma que o estudante, ao fim dessa etapa, seja capaz de estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento. O conceito pode ser ampliado também para situações em que seja necessário identificar a probabilidade da união e da interseção de eventos, os eventos disjuntos e o conceito de independência de eventos [...] (BRASIL, 2008).

Como principal base para o cálculo de probabilidades, as ideias da combinatória devem estar muito claras para o aluno, tanto no que tange à compreensão, como também a sua execução para a resolução de problemas. Para isso, consideramos de extrema importância as seguintes recomendações para os professores (LIMA et al. 2006, p. 118–119):

> (i) Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas;
> (ii) Aprenda, e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar o motivo do erro;
> (iii) Combinatória não é difícil. Resista aos truques imediatos. Devemos procurar métodos mais gerais e não truques específicos para determinados formatos de problemas;
> (iv) Resista às enfadonhas listas de exercícios que ninguém sabe resolver e que só fazem com que os alunos se desinteressem, cada vez mais pelo tema.

2.4 O jogo como ferramenta de ensino

No cenário atual da educação pública brasileira, as aulas tradicionais já não satisfazem as demandas dos alunos, em grande medida porque deixaram de ser atraentes, já que os estudantes são rodeados por diversas formas de distração. Exemplo disso é a presença de *smartphones*, o que faz com que nós, professores, tenhamos de nos adaptar a essa realidade. Uma saída para isso é adotar os jogos como ferramenta de apoio para as nossas práticas na sala de aula, pois, além de despertarem e motivarem os alunos, alguns jogos apresentam, também, um bom nível de conceituação por parte de muitos teóricos da educação.

Em relação ao uso de jogos no ensino da Matemática, destacamos as palavras de Vygotsky (1984): “os jogos propiciam o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração” e, mais ainda, “o lúdico influencia no desenvolvimento do aluno, ensinando-o a agir corretamente em uma determinada situação e estimulando sua capacidade de discernimento”.

Os jogos educacionais são uma alternativa de ensino e aprendizagem, ganhando popularidade nas escolas, e sua utilização deve ser empenhada pelos professores como um valioso incentivador para a aprendizagem, de maneira a estimular as competências cognitivas, como o desenvolvimento da inteligência, das relações afetivas, verbais, psicomotoras e sociais.

Nesse sentido, destacamos, também, as palavras de Borin (2004): “Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la”. Ou seja, dentro da situação de jogo, em que é impossível uma atitude passiva e a motivação é maior, notamos que, ao mesmo tempo em que esses alunos lidam com a Matemática, também apresentam um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.

No Brasil, essas ideias são reforçadas através dos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor, analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que deseja desenvolver (BRASIL, 2001, p. 49).

Os jogos constituem um recurso favorável ao ensino da Matemática, pois apresentam situações problema significativas que desafiam o pensamento, desencadeando o processo de equidade e sendo responsáveis pela construção de novos conhecimentos. A linguagem matemática, que é, muitas vezes, difícil para que o aluno entenda em sala de aula, pode ser melhor entendida em um contexto lúdico. Assim, sob essa perspectiva, ressaltamos que o futebol, enquanto jogo, pode ser utilizado na educação básica como uma ferramenta de ensino e de aplicação de eixos como a combinatória e a probabilidade.

3 NOÇÕES BÁSICAS DE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Neste capítulo, revisaremos alguns tópicos de probabilidade e análise combinatória para que o texto seja autossuficiente, mas, para uma leitura mais abrangente, recomendamos A. C. Morgado e P. C. Carvalho (2015).

3.1 Combinatória

A fim de não promover a exaustão, apenas mencionamos aqui algumas definições e resultados básicos de análise combinatória, até porque são conteúdos de fácil acesso, uma vez que se encontram na maioria dos livros didáticos para o 2º ano do Ensino Médio.

Definição (princípio fundamental da contagem). Se uma tarefa tem k etapas e cada etapa i tem n_i maneiras diferentes de ser realizada, então o número total de alternativas para realizar a tarefa é dado pelo produto:

$$n_1 n_2 \ldots n_k.$$

Definição (permutações e combinações simples). Dado um conjunto de n elementos, chama-se permutação simples dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos. Consideremos que desejamos escolher k dentre n objetos. Caso a ordem não importe, o agrupamento formado é a combinação de n objetos tomados k a k. O número de diferentes agrupamentos que podem ser formados é apresentado a seguir:

• Permutação: $P_n = n!$;

• Combinação: $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3.2 Probabilidade

Veremos a seguir resultados clássicos da probabilidade que são ensinados para alunos das modalidades de ensino médio e fundamental (anos finais). Esses resultados serão de grande ajuda para nossas atividades.

Experimento determinístico é o experimento que, quando repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos. No caso dos jogos, são aqueles que seguem padrões e, encontrando o padrão, ganha-se sempre. Já **experimento aleatório**, é todo o experimento que, quando repetido sob as mesmas condições várias vezes, produz resultados imprevisíveis. É o caso da maioria dos jogos: antes de se iniciarem as jogadas, não é possível saber com exatidão qual será o resultado obtido. Outro conceito comum nos livros didáticos sobre probabilidade é o **espaço amostral**, que é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e é representado por Ω.

3.2.1 Definição axiomática de probabilidade

Seja Ω um espaço amostral e F uma σ-álgebra associado a um experimento aleatório. **Probabilidade** é uma função $P : F \to R$, que associa a cada evento A de Ω um número real $P(A) \epsilon$ [0; 1], que satisfaz os seguintes axiomas:

I. Axioma 1: $P(A) \geq 0$;

II. Axioma 2: $P(\Omega) = 1$;

III. Axioma 3: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3.2.2 Propriedades da probabilidade

Vamos, agora, estabelecer propriedades da probabilidade, que resultam diretamente dos axiomas I a III:

1. $P(\emptyset) = 0$.

Demonstração. Com $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, resulta que $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset)$. Mas Ω e $\emptyset$ são mutuamente excludentes. Portanto, podemos aplicar o Axioma III para obter:

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0.$$

2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demonstração. Sabemos que

$$\Omega = (A \cup \bar{A}).$$

Mas, pelo Axioma II, $P(\Omega) = 1$. Assim,

$$1 = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

3. $P(A \backslash B) = P\big(A \cap \underline{B}\big) = P(A) - P(A \cap B)$.

Demonstração. Sabe-se que

$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B).$$

Assim,

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Por outro lado, como $A\backslash B \ = \ A \cap \underline{B}$, segue que

$$P(A\backslash B) = \ P\big(A \cap \underline{B}\big) = \ P(B) - P(A \cap B).$$

4. Para dois eventos A e B quaisquer:

$$P(A \cup B) = \ P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração. Observe que esse resultado generaliza o Axioma III para dois eventos quaisquer, ou seja, não é exigido que A e B sejam mutuamente exclusivos.

Podemos escrever:

$$A \cup B \ = \ (A\backslash B) \cup B.$$

E, como os últimos são mutuamente excludentes, segue que

$$P(A \cup B) = \ P(A\backslash B) + P(B).$$

Assim, pela propriedade 3:

$$P(A \cup B) = \ P(A\backslash B) + P(B) = \ P(A) - P(A \cap B) + P(B) = \ P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5. Se $A \subset B,$ então, $P(A) \ \leq \ P(B)$.

Demonstração. Se $A \subset B$, então $A \cap B \ = \ A$. Segue, pela propriedade 3, que

$$P(B\backslash A) = \ P(B) - P(A\backslash B) = \ P(B) - P(A).$$

Porém, pelo Axioma I, a probabilidade de qualquer evento é não negativa. Logo,

$$P(B\backslash A) \geq 0 \Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

6. $P(A) \geq \ 1$ para qualquer evento $A \subset \Omega$.

Demonstração. Usando a propriedade 5 e o Axioma II, temos que

$$A \ \subset \ \Omega \Rightarrow P(A) \ \leq \ P(\Omega) \ = \ 1) \Rightarrow P(A) \ \leq 1.$$

3.2.3 Espaços amostrais finitos e equiprováveis

Vamos considerar, agora, uma situação especial, em que o espaço amostral Ω é finito e todos os seus eventos elementares são igualmente prováveis. Esse contexto leva à definição clássica de probabilidade, tendo sido explicitada por Girolamo Cardano (1501–1576).

Sejam $A_1;\ A_1;\ \ldots;\ A_N$ os eventos elementares de **Ω**. Então,

$$\Omega \ = \ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{N.}$$

Esses eventos elementares são mutuamente excludentes dois a dois. Pode-se provar, por indução, que

$$P(\Omega) = \ 1 \ = \ P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N) = \ P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_N).$$

Como estamos supondo que todos eles são igualmente prováveis, segue que

$$P(A_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{n(\Omega)}, \forall i \in \{1,2,\dots,N\}.$$

Como qualquer evento $E \subset \Omega$ pode ser escrito como união de eventos elementares, resulta que

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

3.2.3.1 Definição clássica de probabilidade

Essa definição é a que os alunos têm contato em primeira instância, a que chamamos, na maioria das vezes, de “chances” e usamos como exemplo as faces de dados e moedas.

Definição segundo Laplace (1814):

> A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é, portanto, uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.

Seja Ω um espaço amostral finito cujos eventos elementares são todos igualmente prováveis, então, para qualquer evento $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

3.2.4 Probabilidade condicional

Definição. Define-se a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu, ou simplesmente probabilidade de A dado B, por

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Quando $P(B) = 0$, definimos:

$$P(B) = P(A).$$

3.2.5 Regra do produto

A regra do produto permite expressar a probabilidade da ocorrência simultânea de diversos eventos a partir do valor de cada probabilidade condicional, dados os eventos anteriores.

Teorema (regra do produto): este será, assim como os outros, de grande importância para a combinação dos placares, pois: suponhamos que a probabilidade de um time *A* fazer 1 gol em um time *B* seja de 11% e a de o time *B* não fazer gol no time *A* seja 16%. Qual seria a chance de o jogo sair *1x0* para o time *A*? a resposta para essa e outras perguntas serão respondidas facilmente pelo seguinte resultado:

Dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$, eventos (subconjuntos) de $\boldsymbol{\Omega}$, vale:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n. Para $n = 1$, o resultado é trivial:

$$P(A_1) = P(A_1).$$

Para $n = 2$, temos:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_2 \cap A_1) = P(A_1)P(A_1).$$

Supondo verdadeira a igualdade para $n = k$, temos:

$$P(A_{k+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1})}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)}.$$

E, portanto, usando a hipótese de indução:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_1 \cap A_2) \ldots P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k).$$

Assim, pelo Princípio da Indução Finita (natural, como queríamos),

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}), \forall n.$$

3.3 Distribuições de probabilidades

As distribuições de probabilidades são de grande importância no estudo de probabilidades, com destaque para as distribuições binômias, normais e de Poisson.

3.3.1 Variáveis aleatórias

Uma variável cujos valores referem-se a eventos aleatórios é chamada **variável aleatória**; seus valores dependem dos resultados de um experimento. Pode ser **discreta,** ou seja, que tem valores contáveis, como uma lista de inteiros não negativos, ou **contínua**, que pode assumir qualquer valor numérico em um determinado intervalo ou série de intervalos, dependendo dos valores que ela assume. Para nossos fins, vamos focar nas variáveis discretas.

3.4 Distribuições de probabilidades discretas

As distribuições de probabilidades podem ser discretas ou contínuas, mas para Feller (1976, p. 135) "as três distribuições principais, que se estendem por toda a teoria das probabilidades, são a distribuição binomial, a distribuição normal e a distribuição de Poisson".

Porém, neste trabalho, vamos focar nas distribuições discretas e, em especial, na distribuição de Poisson.

Uma distribuição discreta descreve a probabilidade de ocorrência de cada valor de uma variável aleatória discreta.

Nas partidas de futebol, a partir do número de gols de cada equipe, podem ser consideradas situações em que se avalie o número de ocorrências de um tipo de evento por unidade de tempo. Isso porque uma partida de futebol pode ser entendida como resultado de um jogo de 90 minutos ou como o somatório de noventa jogos de 1 minuto cada.

.

3.4.1 Distribuição de Poisson

O comportamento das variáveis aleatórias, as quais representam o número de ocorrências de eventos em um intervalo de tempo ou no espaço (superfície ou volume), pode ser descrito pela chamada **distribuição de Poisson**, cuja função de probabilidade é:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 1,2,3, \ldots$$

A partir disso: e = 2,71828 e λ é o parâmetro da distribuição, que representa o número médio de ocorrências do evento por unidade de tempo ou espaço.

3.4.1.1 Propriedades

(i) A probabilidade de ocorrência é a mesma para dois intervalos quaisquer de comprimentos iguais;

(ii) A ocorrência ou não em determinado intervalo é independente da ocorrência ou não em outro intervalo;

(iii) Uma suposição que se faz usualmente em relação a essa distribuição é de que a probabilidade de se obter mais de um evento num intervalo muito pequeno é desprezível;

De acordo com as propriedades anteriores, temos as seguintes adequações ao futebol:

1. O número de gols por partidas são independentes de uma partida para a outra;
2. Os intervalos vão ser as partidas observadas;
3. Uma partida de 90 minutos pode ser considerada como noventa partidas de 1 minuto cada.

4 O FUTEBOL E A LOTOGOL

Segundo Marinho (2011, p. 41): “Teoria dos Jogos é um ramo da matemática aplicada que estuda situações estratégicas em que os participantes — os jogadores — escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu retorno”. Nessa teoria, o futebol entra como um exemplo de jogo simultâneo com informações imperfeitas e competitivo. Simultâneo porque as decisões são tomadas a cada instante, antes de saber qual o movimento do adversário — nesse caso, o movimento de cada jogador acontece ao mesmo tempo em relação aos movimentos de outros jogadores. Além disso, em uma partida de futebol, temos informações imperfeitas, pois são permitidas novas estratégias ao longo do jogo, como o drible, interpretações do árbitro e outros. Já competitivo, porque há a essência da competição, caracterizando-se por um estímulo ou motivação.

Por outro lado, a Lotogol é, segundo a teoria dos jogos, um jogo de soma zero, porque desde o início sabe-se a quantidade que está sendo apostada e o ganho de um (uns) jogador (es) — no caso, uma porcentagem das apostas — é a perda dos outros apostadores. É um jogo simultâneo, porque todos os apostadores fazem suas apostas antes de um prazo pré-determinado e não podem mudar, e é, também, um jogo de informação imperfeita, porque os apostadores não conhecem as apostas prévias feitas por todos os outros.

4.1 Histórico do futebol

Neste tópico, apresentaremos um breve resumo do histórico do jogo de futebol, a fim de que nos familiarizemos com o esporte mais popular do mundo.

A organização do futebol coube aos ingleses, porém, a sua origem data de muito antes disso. Duarte (1997) relata que há cerca de 2600 anos A.C., na China, foi criado um jogo denominado *kemari*, no qual oito jogadores de cada lado tentavam passar uma bola entre duas estacas. Ainda na China, durante a dinastia do imperador Huang-Ti, havia o costume de se chutar os crânios dos inimigos derrotados num esporte denominado *tsu-chu*.

Na Grécia, há cerca de 3500 anos, um esporte disputado com os pés por duas equipes de nove a quinze jogadores era denominado *epyskiros*. No Império Romano, por volta de 200 anos A.C., disputava-se o *harpastum*, que era um exercício militar jogado com uma bola feita de bexiga de boi. Na França, jogava-se o *soule* e, na Inglaterra, na mesma época, jogava-se um futebol selvagem, violento e sem regras. Na Itália, em 1529, criou-se o *calcio*.

No Brasil, o futebol chegou em 1894, quando Charles Miller, vindo da Inglaterra, trouxe em sua bagagem duas bolas que possibilitaram aos Brasileiros praticarem um pouco do esporte que veio a se tornar uma paixão nacional.

4.2 A Lotogol

A Lotogol é uma modalidade de loteria criada e realizada pela Caixa Econômica Federal desde 2002. Consiste em acertar placares de jogos pré-determinados. Ganha o apostador que acertar 3, 4 ou 5 placares de 5 jogos.

As apostas funcionam da seguinte forma: basta marcar no volante o número de gols de cada time de futebol participante dos 5 jogos do concurso. Você pode assinalar 0, 1, 2, 3 ou mais gols (opção representada pelo sinal +). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal. O preço da aposta simples é de R$ 1,00; R$ 2,00 para concorrer com duas apostas iguais ou R$ 4,00 para concorrer com quatro apostas iguais. Os concursos do Lotogol são realizados semanalmente. Se algum jogo não for realizado no período programado, por motivo de antecipação, adiamento ou cancelamento, o resultado da partida (para fins do concurso da Lotogol) será definido por sorteio.

O prêmio bruto corresponde a 39,3% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem, são distribuídos: 40% entre os acertadores dos cinco placares; 30% entre os acertadores de quatro placares; e 30% entre os acertadores de três placares.

Não havendo acertador em qualquer faixa de premiação, o valor acumula para o concurso seguinte na respectiva faixa de premiação. E o encerramento das apostas ocorre com algumas horas que antecede o primeiro jogo do concurso.

O primeiro concurso da Lotogol aconteceu em 18 de fevereiro de 2002 e não teve ganhador no prêmio principal, mas três apostadores acertaram quatro placares e ganharam R$ 3.278,38 cada e 481 apostadores ganharam R$ 20,38 cada por acertar três placares. Os resultados dos jogos do primeiro concurso foram: Flamengo-RJ 2 x 0 São Paulo-SP; Vasco-RJ 3 x 0 Americano-RJ; Santos-SP 2 x 1 São Caetano-SP; Desporto-SP 1 x 0 Corinthians-SP; e Cruzeiro-MG 0 x 0 América-MG.

Qual é a probabilidade de ganhar na Lotogol?

Tabela 1- Faixas, quantidades de placares acertados e probabilidades.

Faixas	Quantidade de placares acertados	Probabilidade de acerto
1	5	1: 9.765.625
2	4	1: 81.380
3	3	1: 1.695

Fonte: *site* da Lotogol (2019).

Será que podemos afirmar que a probabilidade de 1: 9.765.625, anotada no verso de todos os volantes da Lotogol, é exato? A estatística – e outros fatores do campo da matemática – podem explicar que não, que esse é um número relativo e é sobre isso que esse texto vai abordar.

A Lotogol é composta por 5 jogos por rodada, em que os apostadores devem dizer quais serão os placares exatos de cada uma das partidas, jogando em 0, 1, 2, 3 ou + gols.

4.2.1 Probabilidades segundo o método da Lotogol

As probabilidades calculadas pela Lotogol são feitas da seguinte forma: ao todo, na Lotogol, podem ocorrer 25 placares por jogo: 0 a 0, 0 a 1, 0 a 2, 0 a 3, 0 a +, 1 a 0, 1 a 1, 1 a 2, 1 a 3, 1 a +, 2 a 0, 2 a 1, 2 a 2, 2 a 3, 2 a +, 3 a 0, 3 a 1, 3 a 2, 3 a 3, 3 a +, + a 0, + a 1, + a 2, + a 3, + a +. Portanto, como temos cinco jogos, segue-se:$Total\ de\ casos = 25 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 = 25^5 = 9765625$, o que acarreta 1:9765625 as chances de ganhar o prêmio principal.

Já acertar 4 placares entre os 5 jogos possíveis é equivalente a errar o placar de um jogo entre os 5 jogos, pois $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$, ou seja, temos 5 opções para errar um placar, ou no primeiro jogo, no segundo, terceiro, quarto, ou quinto jogo, mas a probabilidade de errar o placar em um jogo é dada por $\frac{24}{25}$; já a probabilidade de acertar o placar em um jogo é igual a $\frac{1}{25}$. Logo, $P(4) = \binom{5}{1} x \frac{24}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} = 5x \frac{24}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} = \frac{120}{25^5} = \frac{120}{9765625}$, ou seja, $P(4) = \frac{1}{81380{,}208333\ldots} \cong \frac{1}{81380}$, em que *P (4)* significa a probabilidade de acertar 4 placares.

Para o prêmio mínimo, ou seja, acertar 3 entre os 5 placares, devemos escolher de 3 jogos entre os 5 jogos possíveis, $\binom{5}{3} = 10$, ou seja, temos 5 jogos e temos de acertar os placares de três deles e errar os placares de dois deles. Já a probabilidade de errar o placar em um jogo é dada por $\frac{24}{25}$ e a de acertar o placar em um jogo é igual a $\frac{1}{25}$. Logo,$P(3) = \binom{5}{3} x \frac{24}{25} x \frac{24}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} = 10x \frac{24}{25} x \frac{24}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} x \frac{1}{25} = \frac{5760}{25^5} = \frac{5760}{9765625}$, Ou seja, admitindo que P *(3)* signifique a probabilidade de acertar 3 placares, temos: $P(3) = \frac{1}{1695{,}4210069444\ldots} \cong \frac{1}{1695}$.

Ressaltamos que essas probabilidades não são bem verdades absolutas, porque elas desconsideram alguns fatores importantes, como a força das equipes, o mando de campo, entre outros. Além disso, é considerado que um placar de + x + (completamente improvável) terá a mesma chance de acontecer do que um placar de 2 a 0 (mais provável de acontecer). Resumindo, cada placar, então, tem 4% chance de ocorrer, se formos levar ao pé da letra, pois basta dividir 100% por 25 possibilidades.

5 ESTATÍSTICAS

Neste capítulo, falaremos sobre dados estatísticos, que, inclusive, são muito explorados nos exames do ENEM. A tabela 2, a seguir, esboça os resultados dos primeiros 957 concursos da Lotogol, mostrando que as ocorrências dos placares dos jogos escolhidos não ocorreram com as mesmas frequências. Também, isso comprova que os placares que mais ocorreram foram 1 x 0 e 1 x 1 e o que menos ocorreu foi + x +, ou seja, no qual as duas equipes marcariam mais de 3 gols cada. Porém, para a Lotogol, esses placares têm as mesmas chances de ocorrências, o que, no nosso ponto de vista, é absurdo.

Tabela 2 - Os resultados dos primeiros 957 concursos da Lotogol.

Placares	Jogo 1	Jogo 2	Jogo 3	Jogo 4	Jogo 5	Total	Porcentagem
0 a 0	78	67	75	70	69	359	7,5026%
0 a 1	74	68	71	76	74	363	7,5862%
0 a 2	39	49	38	38	34	198	4,1379%
0 a 3	11	22	10	16	14	73	1,5256%
0 a +	10	13	11	14	13	61	1,2748%
1 a 0	114	107	124	114	107	566	11,8286%
1 a 1	128	104	119	94	116	561	11,7241%
1 a 2	60	66	55	59	59	299	6,2487%
1 a 3	19	27	24	22	26	118	2,4660%
1 a +	6	11	9	13	13	52	1,0867%
2 a 0	67	71	64	87	82	371	7,7534%
2 a 1	88	92	109	72	92	453	9,4671%
2 a 2	50	47	46	48	47	238	4,9739%
2 a 3	19	26	22	19	17	103	2,1526%
2 a +	9	6	7	13	9	44	0,9195%
3 a 0	43	42	36	41	30	192	4,0125%
3 a 1	44	38	29	44	42	197	4,1170%
3 a 2	16	30	24	37	24	131	2,7377%

3 a 3	8	9	8	8	11	44	0,9195%
3 a +	5	4	7	4	1	21	0,4389%
+ a 0	26	15	31	30	32	134	2,8004%
+ a 1	20	21	14	20	24	99	2,0690%
+ a 2	15	15	18	11	11	70	1,4629%
+ a 3	6	7	4	6	7	30	0,6270%
+ a +	2	0	2	1	3	8	0,1672%

Fonte: *Doctor Loto* (2019).

Então, percebemos que o total de jogos é de 4785.

Para a próxima tabela, pesquisamos os campeonatos brasileiros de 2003 a 2018, com o intuito de comparar com qual frequência os placares ocorrem. Mais uma vez, comprovamos que, apesar de os números não serem totalmente fiéis, pois fizemos a pesquisa manualmente, dos 6506 jogos analisados observa-se, novamente, que os placares 1 x 0 e 1 x 1 são os que aparecem com mais frequência enquanto os + x + aparecem com menor frequência.

Tabela 3 - Os resultados dos placares dos campeonatos brasileiros de 2003 a 2018

Placares	**Total**	**Porcentagens**
0 a 0	505	7,76%
0 a 1	432	6,64%
0 a 2	227	3,49%
0 a 3	88	1,35%
0 a +	29	0,04%
1 a 0	849	13,05%
1 a 1	774	11,90%
1 a 2	379	5,84%
1 a 3	126	1,94%
1 a +	50	0,77%
2 a 0	561	8,62%
2 a 1	619	9,51%
2 a 2	345	5,30%

2 a 3	111	1,71%
2 a +	32	0,49%
3 a 0	299	4,60%
3 a 1	302	4,65%
3 a 2	190	2,93%
3 a 3	62	0,95%
3 a +	28	0,43%
+ a 0	163	2,51
+ a 1	169	2,60%
+ a 2	114	1,75%
+ a 3	40	0,61%
+ a +	12	0,18%

Fonte: Própria (2019)

Assim, percebemos que o total de jogos é de 6506.

6 DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Siméon Denis Poisson (1781–1840) foi um matemático e físico francês. As publicações de Poisson sobre a teoria da probabilidade começaram a aparecer em 1811, quando ele publicou resumos de duas das primeiras memórias de Laplace. Em 1812, continuou esse trabalho com um resumo da Théorie analytique des probabilités. Laplace também foi o primeiro a introduzir a noção de uma variável aleatória discreta, mas as funções de distribuição só se tornaram geralmente usadas no século XX. Porém, o nosso objeto de estudo foi publicado conjuntamente com a sua teoria da probabilidade, em 1838, no seu trabalho *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* (*Inquérito sobre a probabilidade em julgamentos sobre matérias criminais e civis*). O trabalho focava-se em certas variáveis aleatórias que contavam, entre outras coisas, o número de ocorrências discretas de certo fenômeno durante um intervalo de tempo de determinada duração.

Apesar de as distribuições de probabilidades não fazerem parte do currículo do Ensino Médio, podemos aplicá-las como atividade extraclasse, pois, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 463): "E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem" (grifo do autor). Isso fica ainda mais claro nas páginas seguintes, a saber:

> Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentada. O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores – e que se refletem nos contextos atuais –, **abrindo-se criativamente para o novo**." (BRASIL, 2018, p. 463) (grifo meu).

Além disso, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, 1996, Art. 35, Inciso IV) consolida ainda mais que devemos trabalhar com alguns conteúdos que possam relacionar a teoria com a prática, pois cita, como finalidade do Ensino Médio, "a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando **a teoria com a prática**, no ensino de cada disciplina." (grifo meu).

Ainda sobre as finalidades do ensino médio, no que diz respeito à consolidação e ao aprofundamento dos conhecimentos do ensino fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018, p.14) reforça as “aprendizagens sintonizadas com as necessidades, **as possibilidades e os interesses dos estudantes** e, também, com os desafios da sociedade contemporânea” (grifo meu).

Vamos, a seguir, tratar um pouco sobre a distribuição de probabilidade de Poisson, mas recomendamos, para um estudo mais detalhado, a *Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações - parte 1* (FELLER, William, 1976).

6.1 Distribuição de Poisson: prevendo placares das partidas de futebol

A distribuição de Poisson, juntamente com dados históricos, fornece um método simples e razoável para calcular os placares mais prováveis em uma partida de futebol. Esse simples passo a passo mostra como calcular as medidas de força de ataque e debilidade de defesa, necessárias, junto ao aplicativo *GeoGebra*, para gerar os valores da distribuição de Poisson.

A distribuição de Poisson, como dito antes, é um conceito matemático para traduzir médias em uma probabilidade de resultados variáveis através de uma distribuição. Por exemplo, suponhamos que a fórmula de distribuição de Poisson indica que o número provável de gols que um time *A* pode marcar jogando como mandante é 1,7 (isto é feito multiplicando a força de ataque do time *A* pela debilidade de defesa do seu adversário e o número médio de gols em casa no campeonato). Essa média revela que o time *A* tem 18,27% de probabilidade de não marcar gol, 31,06% de probabilidade de marcar 1 gol, 26,40% de probabilidade de marcar 2 gols, 14,96% de probabilidade de marcar 3 gols, 6,36% de probabilidade de marcar 4 gols e 2,16% de probabilidade de marcar 5 gols.

6.2 Distribuição de Poisson: calculando as probabilidades de placares em uma partida de futebol

Antes de podermos usar a distribuição de Poisson para calcular os placares mais prováveis de uma partida de futebol, precisamos calcular o número médio de gols que cada time pode marcar nessa partida. Isso pode ser calculado determinando-se “força de ataque” e “debilidade de defesa” para cada equipe e comparando-as.

A seleção de um intervalo de dados representativo é determinante ao calcular a força de ataque e a Debilidade de Defesa de um time de futebol, pois não pode ser muito tempo, porque os dados não serão relevantes para a força atual da equipe, enquanto tempos curtos demais podem permitir que os valores discrepantes distorçam os dados. Os 13 primeiros jogos disputados por cada equipe no campeonato brasileiro da série A, na temporada de 2019, forneceram um tamanho de amostra suficiente para aplicar a distribuição de probabilidade de Poisson.

A seleção de um intervalo de dados representativo é vital ao calcular a força de ataque e a debilidade de defesa. Caso o tempo seja muito longo, os dados não serão relevantes para a força/debilidade atual da equipe, enquanto, se for curto demais, pode acontecer que os valores discrepantes distorçam os dados.

6.2.1 Como calcular a força de ataque

O primeiro passo para calcular a força de ataque sobre os resultados até uma rodada qualquer de uma temporada das principais ligas de futebol é determinar o número médio de gols marcados por equipe, como mandante e como visitante, sendo que, quanto mais jogos observados, mais precisos serão os dados.

Calcula-se isso tomando o número total de gols marcados e dividindo-o pelo número de jogos disputados. Exemplo disso foi nossas observações na temporada de 2019 do Campeonato Brasileiro da série A até a 13ª rodada. Houve 200 gols marcados pelas equipes mandantes, em um total de 132 jogos, e 114 gols marcados pelas equipes visitantes, em um total de 132 jogos, com médias: $\underline{x}_{gm} = \frac{200}{132} \cong 1{,}5152$ gols marcados por mandantes e$\underline{x}_{gv} = \frac{114}{132} = 0{,}8636$ gols marcados por visitantes. Em resumo:

$$Média\ de\ gols\ marcados\ pelas\ equipes\ mandantes = \ \underline{x}_{gm}(= 1{,}5152);$$

$$Média\ de\ gols\ marcados\ pelas\ equipes\ visitantes = \ \underline{x}_{gv}(= 0{,}8636).$$

A razão entre a média de uma equipe e a média do campeonato, até a rodada observada, é o que constitui a dita “força de ataque”.

6.2.2 Como calcular a debilidade de defesa

Também precisaremos do número médio de gols sofridos pelas equipes. Este é, simplesmente, o inverso dos números acima (como o número de gols marcados por uma equipe mandante é igual ao número de gols sofrido pela equipe visitante e vice-versa). Sendo assim, temos:

$$Média\ de\ gols\ sofridos\ pelas\ equipes\ mandantes\ = \underline{x}_{sm}\ (= 0{,}8636);$$

$$Média\ de\ gols\ sofridos\ pelas\ equipes\ visitantes = \underline{x}_{sv}\ (= 1{,}5152).$$

A razão entre a média de uma equipe e a média do campeonato é o que constitui a debilidade de defesa.

6.3 Distribuição de Poisson para CSA vs. Fortaleza

Agora, podemos usar os números acima para calcular a força de ataque e a debilidade de defesa tanto do Fortaleza quanto do CSA no campeonato brasileiro da série A de 2019 na 14ª rodada. Assim, fica dado que:

$$Média\ de\ gols\ marcados\ pelo\ CSA\ como\ mandante\ = \underline{x}_{mg(CSA)} = \frac{3}{7} \cong 0{,}4286;$$

$$Média\ de\ gols\ sofridos\ pelo\ CSA\ como\ visitante\ = \underline{x}_{gs(CSA)} = \frac{9}{7} \cong 1{,}2857;$$

$$Média\ de\ gols\ marcados\ pelo\ Fortaleza\ como\ mandante\ = \underline{x}_{gm(For)} = \frac{6}{7} \cong 0{,}8571;$$

$$Média\ de\ gols\ sofridos\ pelo\ Fortaleza\ como\ visitante\ = \underline{x}_{gs(For)} = \frac{13}{7} \cong 1{,}8571.$$

6.3.1 Cálculo da força de ataque do CSA

Passo 1: pegamos o número de gols marcados em casa pela equipe mandante (CSA: três) e dividimos pelo número de jogos (7) em casa. Com isso, temos a média de gols marcados pelo CSA como mandante:$\frac{3}{7} \cong 0{,}4286$.

Passo 2: dividimos esse valor pelos gols marcados em média por jogo no campeonato até a 13ª rodada (1,5152), para obter a força de ataque do CSA. Assim, temos:

$$F_{am} = \frac{0{,}4286}{1{,}5152} \cong 0{,}2829.$$

6.3.2 Cálculo da debilidade de defesa do Fortaleza

Temos a média de gols sofridos pelas equipes como visitantes: $\underline{x}_{gsv} \cong 1{,}5152$. Ainda, temos a média de gols sofridos pelo Fortaleza como visitante: $\underline{x}_{gs(For)} = \frac{13}{7} \cong 1{,}8571$.

Passo 1: pegamos o número de gols sofridos pela equipe do Fortaleza até a 13ª rodada (13) e dividimos pelo número de jogos como visitante (7): $\underline{x}_{gs(For)} = \frac{13}{7} \cong 1{,}8571$.

Passo 2: dividimos a média de gols sofridos pelo número médio de gols das 13 primeiras rodadas concedidos por um time visitante por jogo ($\underline{x}_{gsv} = 1{,}5152$) para obter a debilidade de defesa:

$$D_{d(For)} = \frac{1{,}8571}{1{,}5152} \cong 1{,}2322.$$

6.3.3 Cálculo da taxa média de sucesso do CSA

Podemos, agora, usar a seguinte fórmula para calcular o número provável de gols que o CSA pode marcar (isto é feito multiplicando a força de ataque do CSA pela debilidade de defesa do Fortaleza e a média de gols das equipes como mandantes até a 13ª rodada):

$$\mu_{m(CSA)} = 0{,}2829 \times 1{,}2322 \times 1{,}5152 \cong 0{,}5282.$$

6.3.4 Cálculo da força de ataque do Fortaleza

Temos a média de gols marcados pelo Fortaleza como visitante: $\underline{x}_{gmv(For)} = \frac{6}{7} \cong 0{,}8571$.

Assim como a média de gols marcados pelas equipes visitantes: $\underline{x}_{gv} (= 0{,}8636)$.

Passo 1: pegamos o número de gols marcados em casa pela equipe visitante (Fortaleza: 6) e dividimos pelo número de jogos (7) para obter a média de gols marcados pelo Fortaleza como mandante: $\underline{x}_{gmv(For)} = \frac{6}{7} \cong 0{,}8571$.

Passo 2: dividimos esse valor pelos gols marcados em média por jogo no campeonato até a 13ª rodada (0,8636) das equipes visitantes, para obter a força de ataque do Fortaleza:

$$F_{av(For)} = \frac{0{,}8571}{0{,}8636} \cong 0{,}9925.$$

6.3.5 Cálculo da debilidade de defesa do CSA:

Passo 1: pegamos o número de gols sofridos pela equipe mandante até a 13ª rodada (CSA: 9) e dividimos pelo número de jogos como mandante (7): $\underline{x}_{gs(CSA)} = \frac{9}{7} \cong 1{,}2857.$

Passo 2: dividimos a média de gols sofridos pelo número médio de gols das 13 primeiras rodadas concedidos por um time mandante por jogo ($\underline{x}_{gsm} = 0{,}8636$) para obter a debilidade de defesa:

$$D_{dm(CSA)} = \frac{1{,}2857}{0{,}8626} \cong 1{,}4888.$$

6.3.6 Cálculo da taxa média de sucesso do Fortaleza

Temos a média de gols marcados pelas equipes visitantes:$\underline{x}_{gv}(= 0{,}8636).$ Assim como a debilidade de defesa do CSA: $D_{dm(CSA)} = \frac{1{,}2857}{0{,}8626} \cong 1{,}4888.$ Além da força de ataque do Fortaleza: $F_{av(For)} = \frac{0{,}8571}{0{,}8636} \cong 0{,}9925.$

Podemos, agora, usar a seguinte fórmula para calcular a taxa média de sucesso do Fortaleza (isto é feito multiplicando a força de ataque do Fortaleza pela debilidade de defesa do CSA e a média de gols das equipes como visitantes até a 13ª rodada):

$$\mu_{v(For)} = 0{,}9925 \times 1{,}4888 \times 0{,}8636 \cong 1{,}2761.$$

6.3.7 Distribuição de Poisson: prevendo múltiplos resultados

Não faz sentido em uma partida de futebol obter o placar $\mu_{m(CSA)} \cong 0{,}5282$ a $\mu_{v(For)} \cong 1{,}276$. Então, esse placar representa apenas a média. A distribuição de Poisson, fórmula criada pelo matemático francês Simeon Denis Poisson, como visto anteriormente, permite-nos usar esses números para distribuir 100% de probabilidade em uma série de resultado para cada lado. Assim, temos a fórmula da distribuição de Poisson:

$$P(x, \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

No entanto, podemos usar o aplicativo *GeoGebra* como a calculadora de distribuição de Poisson, para fazer a maior parte dos cálculos. Tudo que precisaremos fazer será inserir as ocorrências de eventos diferentes — no nosso caso, os resultados 0, 1, 2 ou 3 — e usar as probabilidades de eventos complementares ($P(A) = 1 - P(\underline{A})$) e as ocorrências esperadas, que são as probabilidades de cada equipe marcar — em nosso exemplo, o CSA tem 0,5282 como sua taxa média de sucesso e 1,2761 é a taxa média de sucesso do Fortaleza.

A calculadora do *GeoGebra* gera a probabilidade da pontuação para o resultado dado observado na tabela abaixo.

Tabela 4 - Distribuição de Poisson para CSA vs. Fortaleza.

Gols	**0**	**1**	**2**	**3**	**+**
CSA	58,97%	31,15%	8,23%	1,44%	0,21%
For	27,91%	35,62%	22,73%	9,67%	4,07%

Fonte: própria (2019).

Como as duas pontuações são independentes (falando matematicamente), podemos observar, pela tabela acima, que o placar esperado é de 0 x 1, com aproximadamente 21% de chance de ocorrer. Já os outros placares têm possibilidades, respectivamente, de marcarem: 0 x 0, 0 x 2, 1 x 1 e 1 x 0, com 16,46%, 13,40%, 11,09% e 8,69%, aproximadamente, de chance, pareando os resultados mais prováveis para cada equipe. Se multiplicarmos essas duas probabilidades juntas, obteremos as probabilidades dos placares.

6.4 Os limites da distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é um modelo preditivo simples que não permite vários fatores. Fatores situacionais como circunstâncias do clube, *status* do jogo e avaliação subjetiva da mudança de cada equipe durante a janela de transferência são completamente ignorados.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo Neves (2015), ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Nós, como educadores, devemos procurar alternativas de aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, estimulando a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas.

Os jogos, se convenientemente planejados, são um recurso pedagógico eficaz para a construção do conhecimento matemático. Seu uso no ensino da Matemática tem o objetivo de fazer com que os estudantes gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do estudante. O ensino por meio de jogos permite que o estudante faça da aprendizagem um processo instigante e até divertido. Para isso, eles devem ser utilizados ocasionalmente para sanar as lacunas que se produzem na atividade escolar diária.

Nesse sentido, verificamos que há três aspectos que, por si só, justificam a incorporação do jogo nas aulas; são eles: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais. Jogar não é estudar nem trabalhar, porque jogando o aluno aprende, sobretudo, a conhecer e compreender o mundo social que o rodeia (MOURA, 1996)

Já que os jogos em sala de aula são importantes, devemos ocupar a eles um horário dentro de nosso planejamento, de modo a permitir a exploração de todo o seu potencial, processos de solução, registros e discussões sobre possíveis caminhos que poderão surgir. Os jogos podem ser utilizados para introduzir, amadurecer conteúdos e preparar o estudante para aprofundar os itens já trabalhados. Devem ser escolhidos e preparados com cuidado para levar o estudante a adquirir conceitos matemáticos de importância.

De acordo com Borin (1998),

> Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos estudantes que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.

Segundo Malba Tahan (1968), "para que os jogos produzam os efeitos desejados é preciso que sejam, de certa forma, dirigidos pelos educadores". Assim, partindo do princípio de que as crianças pensam de maneira diferente dos adultos e de que nosso objetivo não é ensiná-las a jogar, devemos acompanhar a maneira como as crianças jogam, sendo observadores atentos e interferindo a fim de colocar questões interessantes (sem perturbar a dinâmica dos grupos). A partir disso, estaremos auxiliando-as a construir regras e a pensar de modo simples.

Devemos escolher jogos que estimulem a resolução de problemas, principalmente quando o conteúdo a ser estudado for abstrato, difícil e desvinculado da prática diária, não nos esquecendo de respeitar as condições de cada comunidade e o querer de cada aluno. Essas atividades não devem ser muito fáceis nem muito difíceis e devem ser testadas antes de sua aplicação, a fim de enriquecer as experiências através de propostas de novas atividades com alguma regularidade.

A partir dessa discussão, é possível sugerir aos colegas docentes uma atividade lúdica diferenciada, relacionando temas como a análise combinatória e a probabilidade. Ressaltamos que essas sugestões foram praticadas em uma escola do interior de Alagoas e não surtiram efeito revolucionário, mas foram de grande ajuda, sobretudo, como elemento motivador, podendo ser tomado como uma opção de abordagem destes tópicos.

Futuramente, pode-se estudar, além das abordagens aqui vistas, a função gama para a extensão da função fatorial, que contribui para o caso contínuo da distribuição de Poisson, além do método bivariado para a distribuição de Poisson, através do qual podemos acrescentar mais parâmetros para enriquecer nossas análises. Todas essas variantes vêm sendo estudadas recentemente e pouco se conhece sobre elas, tornando-as muito propícias a investigações futuras.

8 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esta sequência didática, com tempo estimado de 6 aulas, tem como público-alvo os alunos dos 2° anos do ensino médio. Porém, pode ser adaptada para outras séries.

8.1 Conteúdos

Princípio fundamental da contagem, combinação, probabilidade, produto de probabilidades em espaço amostral equiprovável e distribuição de Poisson.

8.1.1 Objetivos

- Entender como são feitos os cálculos das probabilidades da Lotogol diante de seus resultados divulgados, revisando conteúdos: princípio fundamental da contagem, combinação, probabilidade e produto de probabilidades em espaço amostral equiprovável;
- Pesquisar dados estatísticos dos campeonatos brasileiros e resultados da Lotogol entre 2002 a 2019 para verificar que os placares não são equiprováveis;
- Usar probabilidade subjetiva para aprender a modelar, através da distribuição de Poisson, a probabilidade de placares em uma partida de futebol, considerando fatores como: mando de campo e dados técnicos, além de força de ataque e debilidade de defesa.

8.2 Procedimentos

8.2.1 1ª etapa

Nesta etapa (duração: 2 horas/aula ou 120 minutos), devemos revisar com os alunos os principais conceitos de combinatória e probabilidade (princípio fundamental da contagem, combinações simples e a definição clássica da probabilidade).

Também, devemos fazer uma breve apresentação da Lotogol e de suas regras básicas, mostrando e discutindo as notações — por exemplo, explica-se que o símbolo + representa

4 ou mais gols, ou seja, representa um conjunto, sendo resumido da seguinte forma: $+= \ 4,5,6,7,8$ ... ou $+= \ \{x\epsilon N; x \geq 4\}$.

Depois, apresentamos aos alunos o problema a seguir e devemos pedir para que resolvam individualmente: calcule as probabilidades apresentadas no verso dos volantes da Lotogol, explicitando os cálculos.

Aconselhamos, também, que o professor faça a correção da atividade proposta, dando oportunidade para que os estudantes socializem suas respostas.

8.2.2 2ª etapa

Nesta etapa (duração: 2 horas/aula ou 120 minutos), devemos pedir aos estudantes que pesquisem dados estatísticos sobre os campeonatos brasileiros e resultados da Lotogol entre 2002 a 2019, a fim de que seja verificado que os placares no jogo de futebol não são equiprováveis. Esses dados estão disponíveis em vários *sites* da *internet*, ficando a critério do professor selecionar fontes confiáveis. Sugerimos o capítulo 5 para conferir os dados estatísticos.

Sabendo que é um assunto muito frequente no ENEM e em vestibulares no geral, esta etapa é uma grande oportunidade de revisar e aprofundar conteúdos tais como: leitura e interpretação de gráficos e tabelas.

8.2.3 3ª etapa

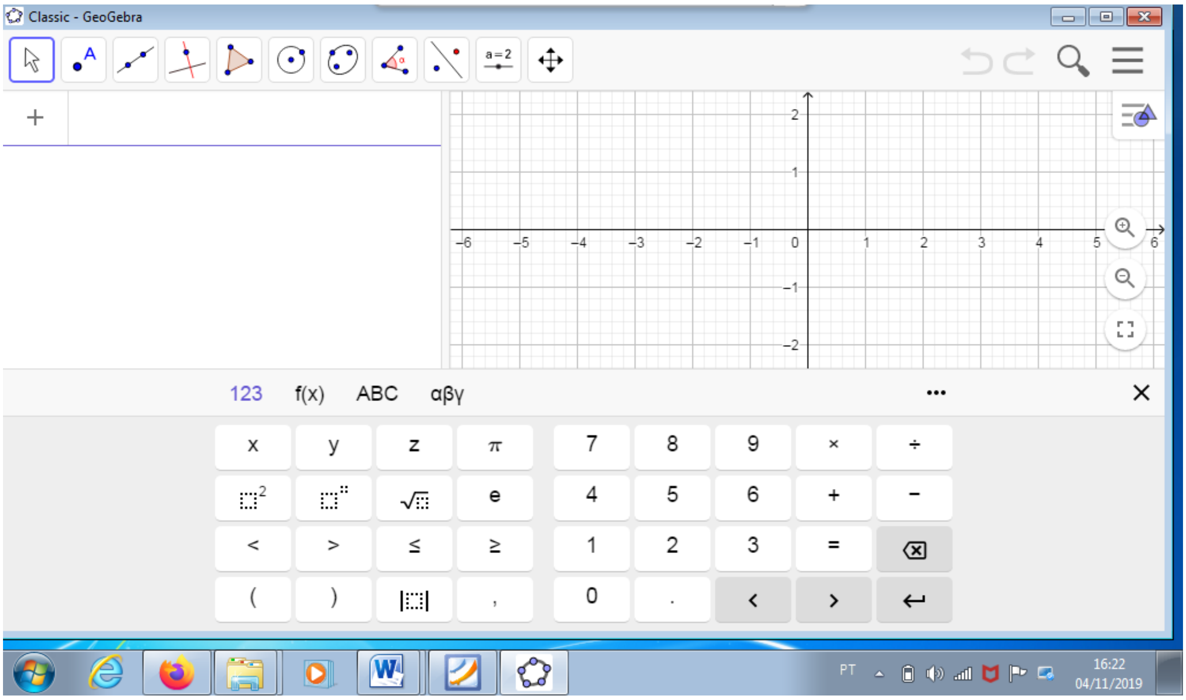
Nesta etapa (duração: 2 horas/aula ou 120 minutos), devemos apresentar a distribuição de Poisson e calcular com os estudantes o parâmetro μ da distribuição, que representa o número médio de ocorrências do evento. É importante sugerir à classe o passo a passo da seção 6.2.

Depois de feito o cálculo do parâmetro μ, usamos a expressão da distribuição de Poisson e calculamos as probabilidades de o time marcar 1, 2, 3 ou + gols:

$$P(x, \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}.$$

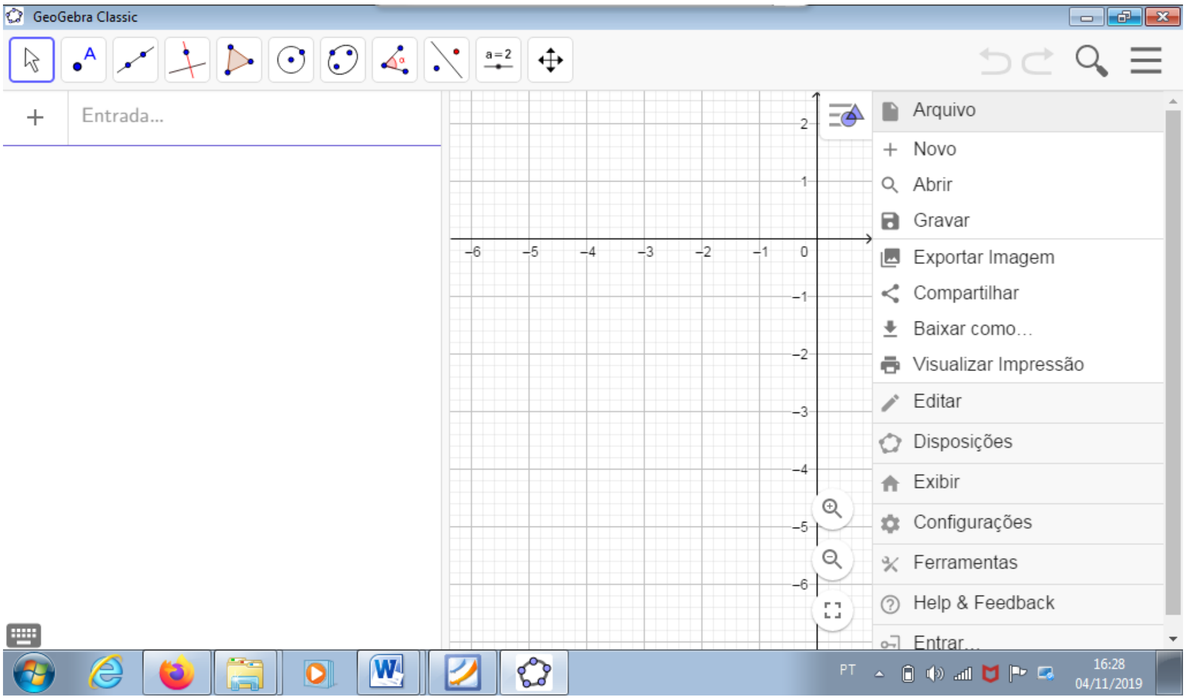
Porém, o aplicativo *GeoGebra* faz isso com facilidade, como pode ser observado na sequência de imagens do processo a seguir:

Figura 1 - Página inicial do *GeoGebra*.



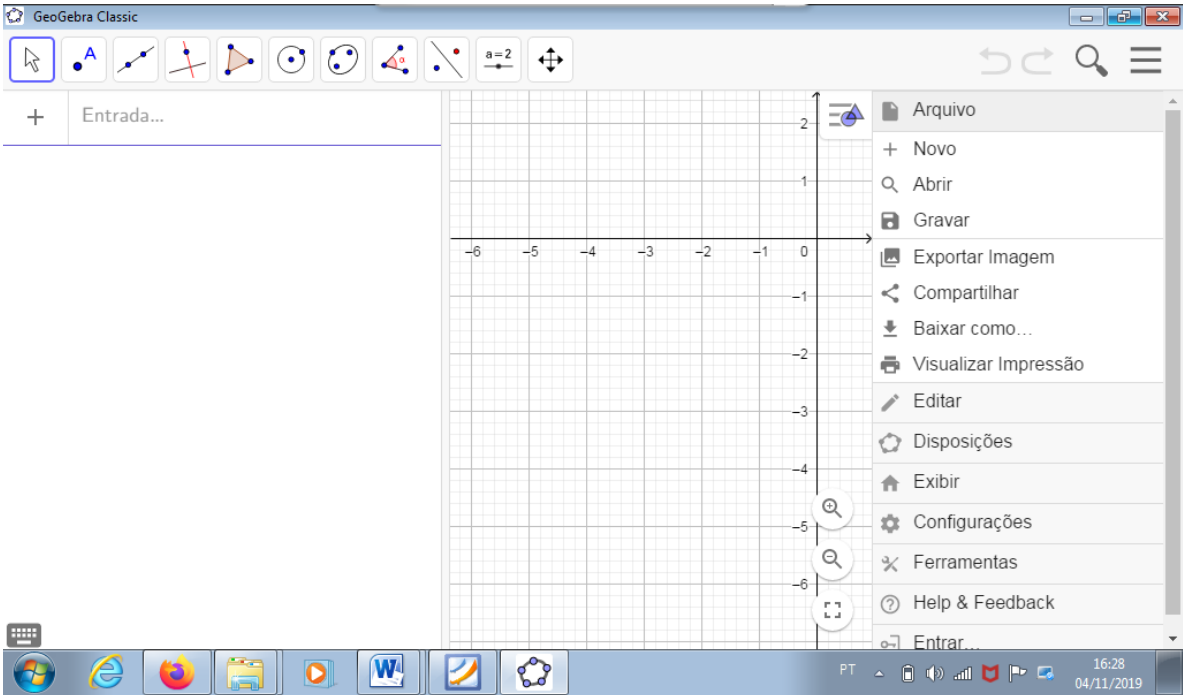
Fonte: *print screen* da aplicação no sistema operacional Windows 7 (2019).

Figura 2 - Seleção da opção no canto superior direito.



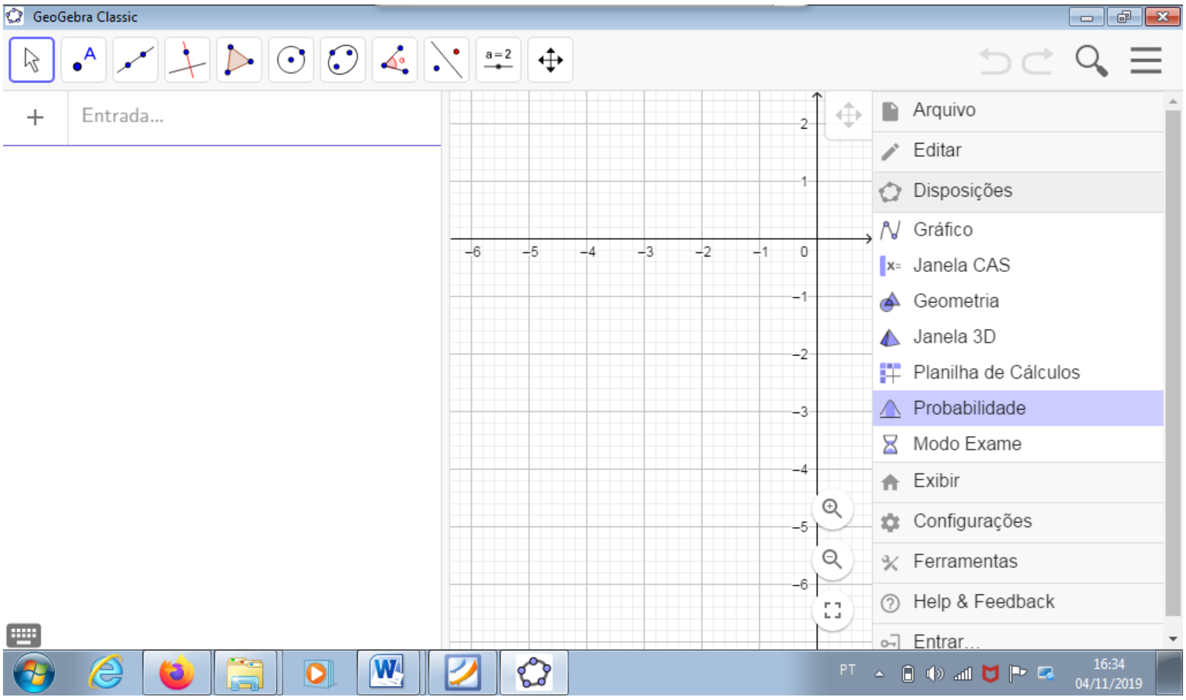
Fonte: *print screen* da aplicação no sistema operacional Windows 7 (2019).

Figura 3 - Opção: “Disposições”.



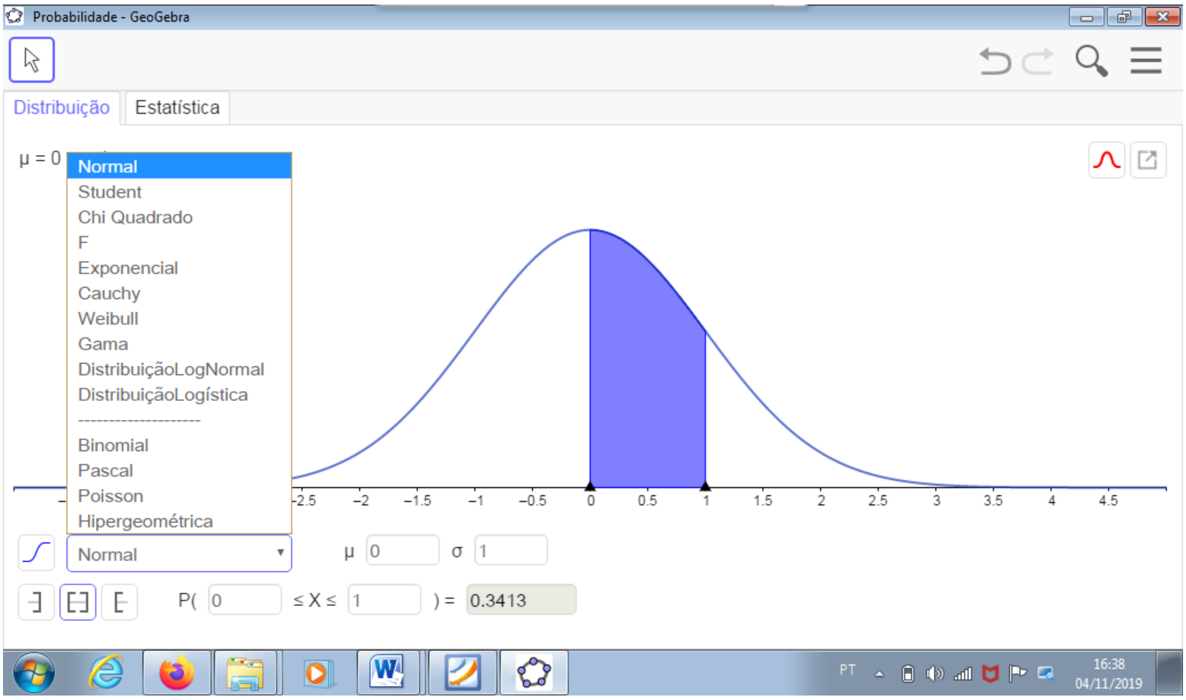
Fonte: *print screen* da aplicação no sistema operacional Windows 7 (2019).

Figura 4 - Opção: “Probabilidade”.



Fonte: *print screen* da aplicação no sistema operacional Windows 7 (2019).

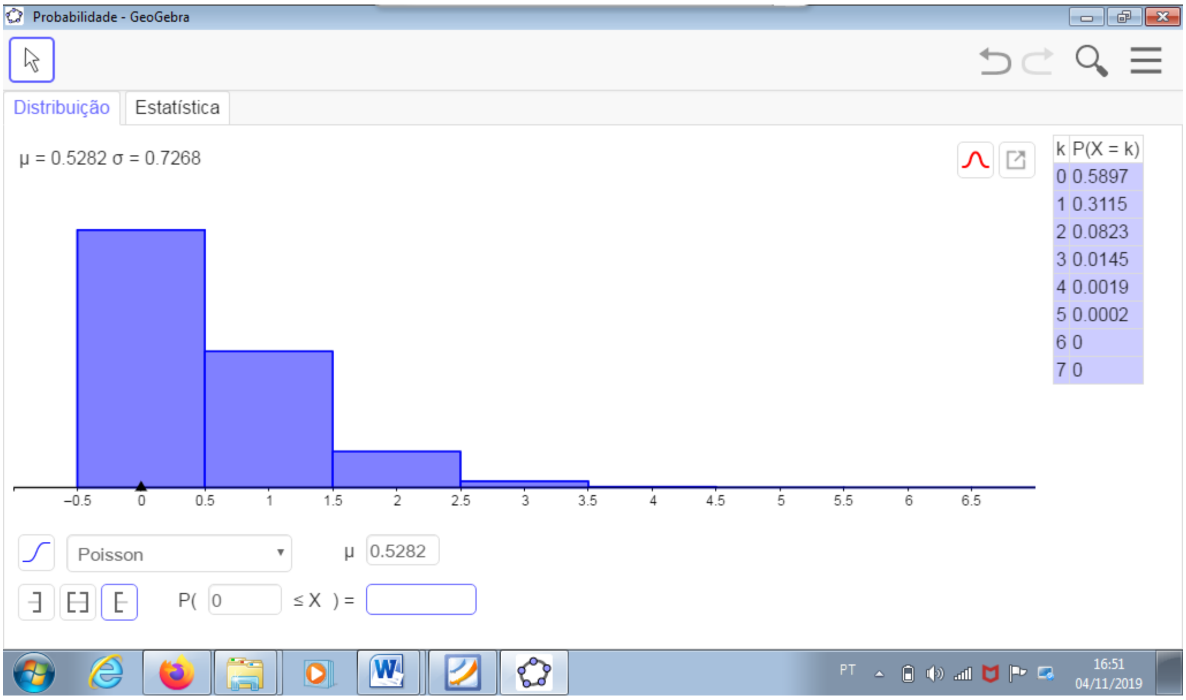
Figura 5 - Opção: “Poisson”.



Fonte: *print screen* da aplicação no sistema operacional Windows 7 (2019).

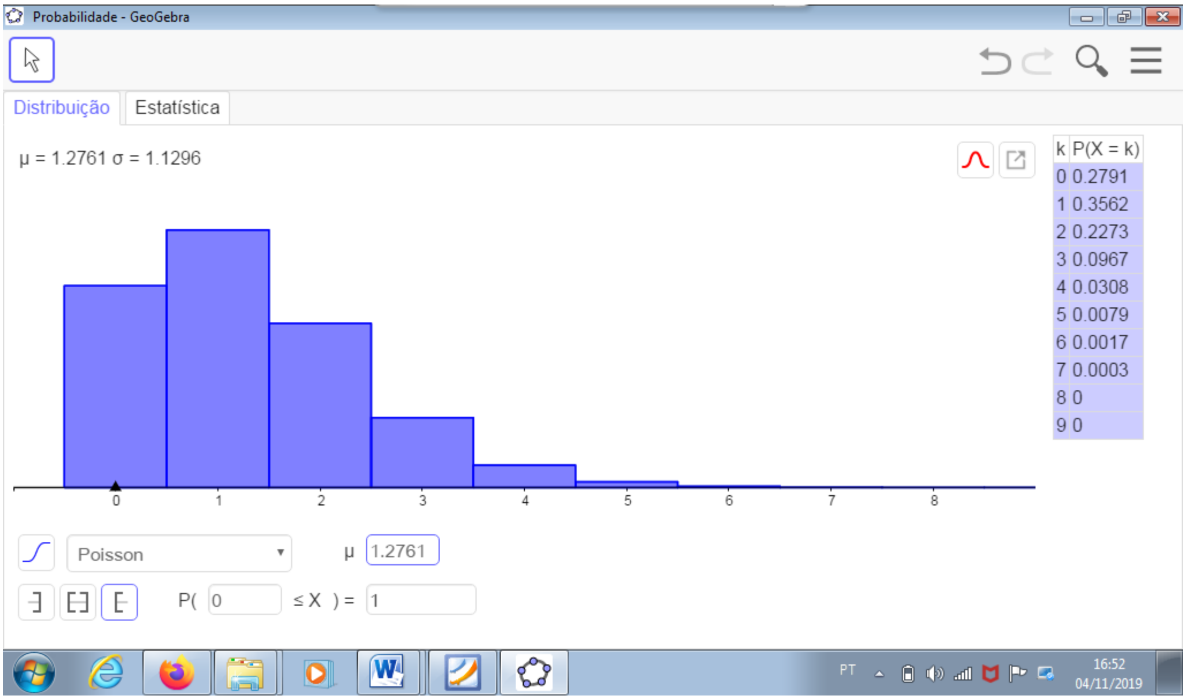
Agora, basta adicionar os parâmetros (usaremos os parâmetros da seção 6.2):

Figura 6 - Resultados para o CSA.



Fonte: *print screen* da aplicação no sistema operacional Windows 7 (2019).

Figura 7 - Resultados para o Fortaleza.



Fonte: *print screen* da aplicação no sistema operacional Windows 7 (2019).

Na tabela a seguir, podemos ver as porcentagens que dizem respeito às possibilidades de cada time fazer 0, 1, 2, 3 ou + gols:

Tabela 5 - Distribuição de Poisson para CSA vs. Fortaleza.

gols	**0**	**1**	**2**	**3**	**+**
CSA	58,97%	31,15%	8,23%	1,44%	0,21%
For	27,91%	35,62%	22,73%	9,67%	4,07%

Fonte: própria (2019).

Sendo assim, podemos aproveitar para revisar o produto de probabilidades para calcular as probabilidades dos prováveis resultados.

Reforçando o que foi dito antes, temos que as duas pontuações são independentes (em termos matemáticos) e podemos observar, na tabela acima, que o placar esperado é de 0 x 1, com aproximadamente 21% de chance de ocorrer. Já os outros placares têm as possibilidades de marcarem: 0 x 0, 0 x 2, 1 x 1 e 1 x 0, com, respectivamente, 16,46%, 13,40%, 11,09% e 8,69% de chance aproximada, pareando os resultados mais prováveis para cada equipe. Se multiplicarmos essas duas probabilidades juntas, obteremos as probabilidades dos placares.

REFERÊNCIAS

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**, 1998.

BRASIL. **Ministério de Educação e do Desporto.** ***Parâmetros curriculares nacionais: Matemática – Ensino Médio***. Brasília: SEF/SEMTEC, 2000.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 01 fev. 2019.

FOMIN, Dmitri; S. G; I. I. **Círculos Matemáticos. A Experiência Russa**. Tradução de

GADELHA, Augusto. **História da Probabilidade. Notas de Aula: Teoria da Probabilidade I.** Curso de Pós-Graduação em Estatística, DME/IM/UFRJ. Março/2004.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio volume 2**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM. 2006.

LOPES, C. E. **O estudo da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. Artigo. Campinas, São Paulo, 2008.

MAGALHÃES, M. Nascimento. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**, EDUSP, 2006.

MARINHO, Raul. **Prática na teoria: aplicação da teoria dos jogos e da evolução aos negócios**. - 2ª ed. - São Paulo - SP: Saraiva, 2011.

MORGADO, Augusto César. **Análise Combinatória e Probabilidade**. IMPA, 1991.

NEVES, E. A. **Jogos Matemáticos como Recursos Didáticos**. **Brasil Escola**, 2015. Disponivel em: <http://meuartigo.brasilescola.uol.com.br/matematica/jogos-matematicos-co
mo-recursos-didaticos.htm>. Acesso em: 27 novembro 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, 1999.

VYGOTSKY, L. L. **A formação social da mente.** São Paulo, Martins Fontes, 1984.