UNIVASF
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FRÉDSON VALOIS COUTINHO DA ROCHA

A UTILIZAÇÃO DO *GEOGEBRA* NO ESTUDO DOS CONCEITOS DE LIMITE, DERIVADA E INTEGRAL DEFINIDA.

JUAZEIRO – BA

2019

FRÉDSON VALOIS COUTINHO DA ROCHA

A UTILIZAÇÃO DO *GEOGEBRA* NO ESTUDO DOS CONCEITOS DE LIMITE, DERIVADA E INTEGRAL DEFINIDA.

Dissertação de mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT – UNIVASF como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva

JUAZEIRO – BA

2019

Rocha, Frédson Valois Coutinho da
R672u A utilização do GeoGebra no estudo dos conceitos de limite, derivada e integral definida / Frédson Valois Coutinho da Rocha. – Juazeiro - BA, 2020.
x, 95 f.: il.; 29 cm.

Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva.

1. Matemática – Ensino. 2. GeoGebra (Programa de computador). I. Título. II. Silva, Alexandre Ramalho. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.07

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves, CRB 5- 1458.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

Fredson Valois Coutinho da Rocha

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DOS CONCEITOS DE LIMITE, DERIVADA E INTEGRAL DEFINIDA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 12 de dezembro de 2019.

Banca Examinadora

Alexandre Ramalho Silva
Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva, PROFMAT/UNIVASF

Lino Marcos da S.
Prof. Dr. Lino Marcos da Silva, PROFMAT/UNIVASF

Mirian Ferreira de Brito.
Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito, Colegiado MAT/UNEB

À minha esposa Amanda Alves, aos meus pais Helenice Valois e Valter Rocha e aos meus filhos Christian Rocha e Frédson Filho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar hei de agradecer ao Senhor Deus criador de tudo e de todos pelo dom que me concedeste.

Render agradecimentos aos meus pais por terem me ensinado que o caminho mais seguro para o êxito é a educação, agradecer à minha esposa pelo incentivo e a força desprendidas por ela em meu local de trabalho para que eu pudesse me dedicar aos finais de semana aos estudos.

Agradecer aos meus colegas de turma do PROFMAT pela união durante todo o período de aula e mesmo depois, durante a escrita deste trabalho, em especial ao nobre colega Edmilson Soares Nunes que foi parceiro forte durante nossos estudos.

Um agradecimento especial ao professor Fábio Henrique de Carvalho por ter sido, mesmo sem saber, inspiração para meus estudos e trabalho enquanto professor, pela sabedoria demonstrada em suas aulas.

E por fim, agradecer ao meu orientador professor Dr. Alexandre Ramalho Silva pela paciência e perseverança para que este trabalho pudesse ser concluído com qualidade.

RESUMO

O trabalho que segue apresenta os resultados de uma pesquisa de cunho investigativo referente à utilização do software de geometria, o *GeoGebra,* como recurso didático. O principal objetivo é propor uma análise de conceitos e propriedades voltadas ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, mais precisamente do Limite, da Derivada e da Integral Definida por meio de apresentação de exemplos e resolução de atividades. A revisão bibliográfica bem como os resultados obtidos na pesquisa, indicam que é necessária a atualização das metodologias bem como a inserção de recursos computacionais no processo de ensino e aprendizagem. Os resultados foram obtidos através de uma pesquisa de campo, realizada com vinte alunos e alunas dos cursos de Engenharia Civil e Ciências da Computação de instituições federal e privada de Jacobina – Bahia. Inicialmente, foi feita uma exposição dos conceitos, propriedades e teoremas utilizando apenas como recursos didáticos o quadro branco e o pincel marcador seguido de uma avaliação correspondente. Após, em um segundo momento, foram expostos os mesmos tópicos, utilizando além dos recursos anteriores, o software GeoGebra através do notebook e do data-show. Apesar de a tabulação de dados se referir ao número de erros e acertos, a pesquisa teve uma abordagem qualitativa já que foram utilizados questionários subjetivos como instrumentos de coleta de dados. É possível perceber no decorrer do trabalho que a apresentação dos conceitos, propriedades e teoremas do Cálculo Diferencial e Integral através do recurso computacional proposto, demonstra algumas vantagens em relação à exposição tradicional. Seja pelo fato de atrair a atenção dos alunos – com seu dinamismo e interação, despertando a motivação dos mesmos para a observação de comportamentos das funções antes não notadas por alguns, fazendo-nos perceber que a utilização do GeoGebra contribui significativamente para a edificação do conhecimento – ou por simplesmente estimular a percepção, desenvolver o raciocínio lógico matemático e a construção do saber através da observação. Este trabalho também apresenta a sequência didática utilizada na pesquisa para que possa auxiliar professores com os mesmos objetivos expostos ou até mesmo com finalidades distintas. A sequência didática não exige que o mediador detenha total domínio do software e que a sequência possa servir como referência para a construção e desenvolvimento de trabalhos futuros.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Limites. Derivadas. GeoGebra. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This dissertation thesis presents the results of investigative nature regarding research about the use of GeoGebra software, as a didactic resource. The main objective is proposing an analysis of the concepts, properties and theorems of Differential and Integral Calculus, more precisely Limit, Derivative and Definite Integral presenting examples and solving activities. The bibliographic review and the research results indicate that is necessary update the methodologies in the classroom as well as a the insertion of computational resources in the teaching and learning process. The results were obtained through a field research carried out with twenty students, from Civil Engineering and Computer Science higher courses of federal and private institutions from Jacobina - Bahia. Initially an exposition of the concepts, properties and theorems was done using only the whiteboard and the marker brush as didactic resources followed by, a corresponding evaluation was applied. After, in a second moment, the same topics were exposed, using the previous features, GeoGebra software through the notebook and data-show. Despite the tabulation of data related to the number of mistakes and successes the research had a qualitative approach, as well subjective questionnaires were used as instruments of data collection. It is possible to notice during the work, that the presentation of the concepts, properties and theorems of Differential and Integral Calculus through the proposed computational resource, demonstrated some advantages over traditional exposure. In addition to attracting the attention of the students – with their dynamism and interaction, it awoke their motivation to the observation of behaviors of the functions previously not noticed by some of them, making us realize that the use of GeoGebra contributes significantly to the knowledge construction – or by simple stimulate the perception and developing logical mathematical reasoning and the knowledge construction through the observation. This dissertation still presents the didactic sequence used on this research that support the teachers, with the same or different purpose. The way that the didactic sequence is explained does not requires the mediator have complete mastery of the software and the sequence may serve as references for future works.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Limits. Derivatives. GeoGebra.

Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com o surgimento crescente e aparente de novas tecnologias relacionadas ao processo educacional, podemos destacar o uso de softwares computacionais como ferramenta de auxílio à metodologia de ensino. Torna-se necessária, portanto, uma reflexão sobre as práticas pedagógicas, e assim, também ao que se refere o ensino da matemática. Esta necessidade não se apresentou recentemente, no final do século passado já podíamos perceber essa tendência e o apelo para a inserção do computador em sala de aula.

> A pressão em relação ao uso da informática se faz cada vez mais evidente em todas as áreas e isso não é diferente na Educação. A todo momento os professores sentem que quem não for capaz de usar a informática como instrumental para o Ensino-aprendizagem está fora do mercado de trabalho (COSCARELLI, C. V, 1998, P. 36).

Este trabalho mostra a utilização do software de geometria interativo *GeoGebra* como recurso didático com o intuito primordial de propor uma análise de alguns conceitos e propriedades inerentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral mais precisamente do Limite, da Derivada e da Integral Definida por meio de apresentação de exemplos e resolução de atividades.

As tecnologias estão cada vez mais presentes em simples atividades do dia-a-dia inclusive assumindo papéis protagonistas, em algumas vezes, em substituição ao trabalho humano. O avanço da informática tem ganhado força e dominado setores sociais como controle de serviços, automatização de processos de sistemas de comunicação e transporte etc. Sendo assim, a apropriação dessas tecnologias e a incorporação destas no processo de ensino e aprendizagem tem sido cada vez mais necessárias.

O grande problema porém, aparece quando se tenta inserir essas tecnologias como recurso didático em sala de aula, tanto em escolas da rede pública quanto da rede privada e em qualquer segmento de ensino seja da educação básica ou superior. Mesmo com o passar dos anos, já no início deste século, ainda seria possível perceber a desconfiança gerada pela introdução da informática como recurso didático.

> Quando surge uma nova tecnologia, a primeira atitude é de desconfiança e de rejeição. Aos poucos, a tecnologia começa a fazer parte das atividades sociais da linguagem e a escola acaba por incorporá-la em suas práticas pedagógicas. Após a inserção, vem o estágio da normalização, definido por Chambers e Bax (2006, p.465) como um estado em que a tecnologia se integra de tal forma ás práticas pedagógicas que deixa de ser vista como cura milagrosa ou como algo a ser temido. (PAIVA, 2008. p.1).

Essa resistência tem perdido força ao passo que a sociedade tem se apropriado dos recursos tecnológicos e esse tema tem entrado cada vez mais em pauta quando se trata de discutir inovações no processo de educação não só matemática como de forma geral.

> ... inovação educacional pode ser entendida como a busca de respostas aos desafios presentes na dinâmica dos processos escolares, a partir da análise e reflexão que se faz do contexto sócio-cultural e efetivas contribuições que tais inovações podem oferecer para enfrentar estes desafios. (TEIXEIRA, 2011. P. 4)

Mais recentemente, podemos perceber que alguns trabalhos já direcionam o uso das tecnologias em sala de aula de modo não apenas a utilizar a informática como trazer benefício ao aprendizado, como podemos ver em NÓBREGA (2014).

> A incorporação das inovações tecnológicas só tem sentido se contribuir para a melhoria da qualidade de ensino. A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores (NÓBREGA, 2014, p. 52).

Pode-se atribuir também o enfraquecimento dessa resistência aos resultados que os alunos apresentam principalmente no sentido de fixar a atenção e perceber o comportamento de alguns conceitos quando são utilizados recursos computacionais.

> A Informática abre possibilidades de mudanças na construção do conhecimento e a relação dessa com o sujeito que aprende superando os problemas da prática do ensino tradicional. Aulas expositivas tradicionais, onde o professor apresenta o conteúdo, resolve alguns exercícios, passa uma interminável lista de atividades e depois desse período prepara um teste para avaliar a aprendizagem, não mais atrai os alunos. (Calil, 2011. p.22)

Observa-se assim, a necessidade da inserção dos recursos tecnológicos com o intuito, também, de chamar e prender a atenção do aluno para o processo de aprendizagem visto que as tecnologias despertam a curiosidade e a ansiedade pela manipulação.

O ensino da matemática apresenta suas particularidades e uma delas é a grande exploração do raciocínio e da capacidade de generalização. Segundo os

Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p. 24), ”a Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico”.

> Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (BRASIL,1999, p. 40)

É necessário que professores e alunos, agentes envolvidos na ação de ensino e aprendizagem, percebam que a matemática é uma ferramenta essencial no processo de interpretação e resolução de problemas tornando mais fáceis algumas tomadas de decisão ou resoluções de problemas do cotidiano.

Quando há uma exigência maior da capacidade de abstração dos alunos seja para compreender um conceito, uma propriedade ou até mesmo para compreender um problema, tem-se observado uma dificuldade maior de concentração e uma dispersão do foco. Isso pode acontecer pelo fato de os mesmos não conseguirem acompanhar todo o raciocínio ou não conseguirem abstrair o suficiente para compreender os fundamentos do conceito ou da propriedade.Com isso, percebe-se um desinteresse por parte dos alunos quando estes não conseguem compreender os conceitos ou não enxergam uma associação destes com a realidade, deixando-os sem sentido.

É necessária a busca por dinamismo na apresentação e exposição de alguns conceitos e propriedades, principalmente quando estes demandam uma concentração maior e um maior grau de abstração, como é o caso do Cálculo Diferencial e Integral. Assim, este trabalho surge com o intuito de analisar uma nova forma de apresentar alguns conceitos e propriedades do Cálculo Diferencial e integral através do uso do software *GeoGebra*.

É relevante ressaltar que este trabalho não tem o intuito de descaracterizar as aulas tradicionais mas tão somente apresentar um recurso didático que pode ser utilizado nas apresentações de alguns conceitos e propriedades.

Este trabalho está dividido em 6 (seis) capítulos. O primeiro capítulo *(Apresentação do GeoGebra)* traz uma apresentação do programa *GeoGebra*, mostrando um pouco de sua história, apresentando sua *interface* e exibindo alguns comandos e funções.

O segundo capítulo intitulado *Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem histórica e contemporânea,* mostra um breve relato sobre a história do Cálculo Diferencial e Integral, suas origens, sua inserção na educação brasileira e a importância de seu estudo.

O terceiro capítulo *(Noções Básicas do Cálculo Diferencial e Integral)* encarrega-se de apresentar conceitos, proposições e propriedades e exemplos sobre o Cálculo Diferencial e Integral e foi dividido em três seções: *Limite, Derivada e Integral,* bem como a descrição da sequência didática utilizada na pesquisa.

O quarto capítulo (*Metodologia*) exibe um breve relato sobre a metodologia aplicada nesta pesquisa para fins de obtenção dos resultados finais, descrevendo o passo a passo dos meios empregados para que os resultados pudessem ser colhidos e analisados.

O capítulo quinto, intitulado *Resultados e Discussões*, se encarrega de relatar os resultados obtidos com as aplicações descritas no capítulo anterior bem como discutir esses resultados fundamentados no que foi observado nas atividades realizadas.

No sexto e ultimo capítulo faremos as considerações finais do trabalho apresentando os resultados concluídos através da pesquisa.

Capítulo 1

Apresentação do *GeoGebra*

Neste capítulo apresentaremos um pouco da história do programa GeoGebra desde sua criação, passando pela sua importância no processo de construção do conhecimento, mostrando sua *interface* e algumas de suas ferramentas.

1.1 – Conhecendo sua história

O GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica que pode ser utilizado em sala de aula. Foi desenvolvido nos Estados Unidos por Markus Hohenwarter em 2001 como tese de doutorado, na Universidade de Salzburgo, conforme é abordado por Bittencourt (2014). O download do programa pode ser feito no endereço https://www.geogebra.org/download.

O GeoGebra pode ser utilizado como ferramenta de ensino e aprendizagem, possibilitando a criação de uma comunidade aberta capaz de compartilha seus conhecimentos no treinamento, suporte e até desenvolvimento de materiais para alunos e professores.

Segundo Rios de Jesus (2018, p. 13), no Brasil há 3 institutos: o Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro que tem sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, o Instituto GeoGebra de São Paulo, com sede na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP e por último e o mais recente, criado em 2014, o Instituto GeoGebra UESB que tem sede na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e integra as atividades do GPERCEM (Grupo de Pesquisa e Extensão em Recursos Computacionais no Ensino de Matemática).

Ainda segundo Rios de Jesus (2018, p. 13), além da capacidade de construções que proporcionam uma análise geométrica e algébrica ao mesmo tempo, esse software tem algumas características relevantes como possuir uma interface de fácil interação, apresentar recursos variados e sofisticados e encontra-se disponível em vários idiomas tornando-o mais acessível além de ser gratuito e de código aberto.

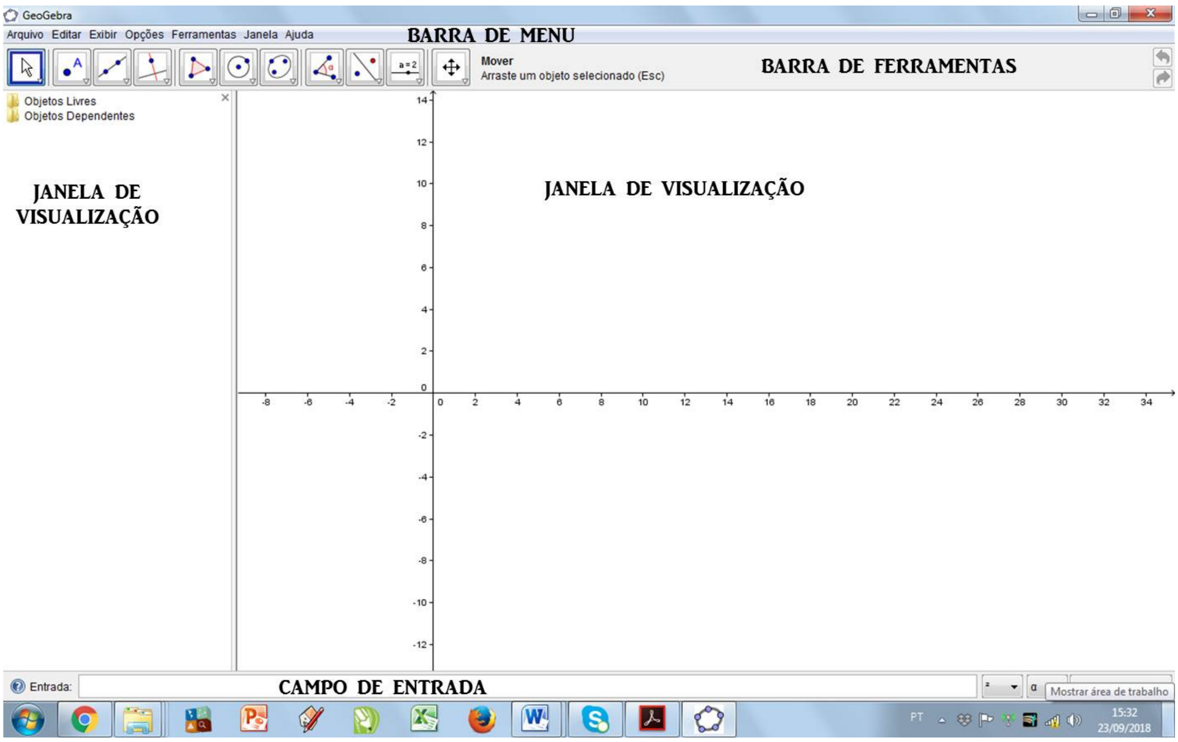
Por essas e outras características, o GeoGebra permite uma maior interação entre os professores, alunos e conteúdos matemáticos, facilitando a visualização de alguns conceitos e propriedades, tornando os agentes da construção do conhecimento capazes de inferir, concluir e até conjecturar sobre algumas generalizações inclusive testar as hipóteses levantadas.

1.2 – Conhecendo sua *interface*

Nesta seção apresentaremos de maneira ilustrativa a *interface* do software *GeoGebra* que é formada basicamente por uma de visualização das curvas, uma janela de visualização da estrutura algébrica, uma barra de ferramentas, uma barra de menu e um campo de entrada, vide *Figura 1.*

Todas as imagens do GeoGebra constante neste trabalho foram feitas a partir de *prints* da tela do computador. As informações referentes as instruções são bastante resumidas e podem ser encontradas com maior riqueza de detalhes em https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/26731/1/VITOR%20RIOS%20DE%20JESUS.pdf.

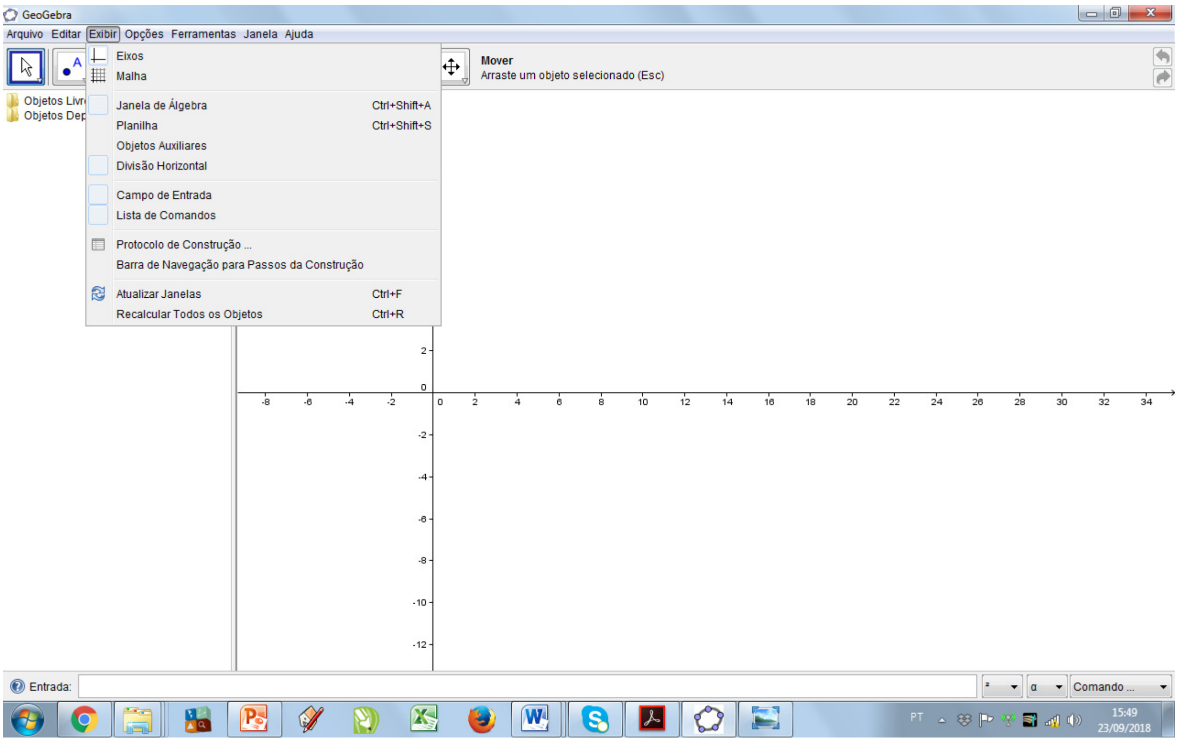
Figura 1 – Interface do GeoGebra



Em geral, a tela inicial apresenta um sistema de eixos ortogonais á direita da tela, à esquerda uma coluna de visualização das estruturas algébricas que serão inseridas durante a utilização.

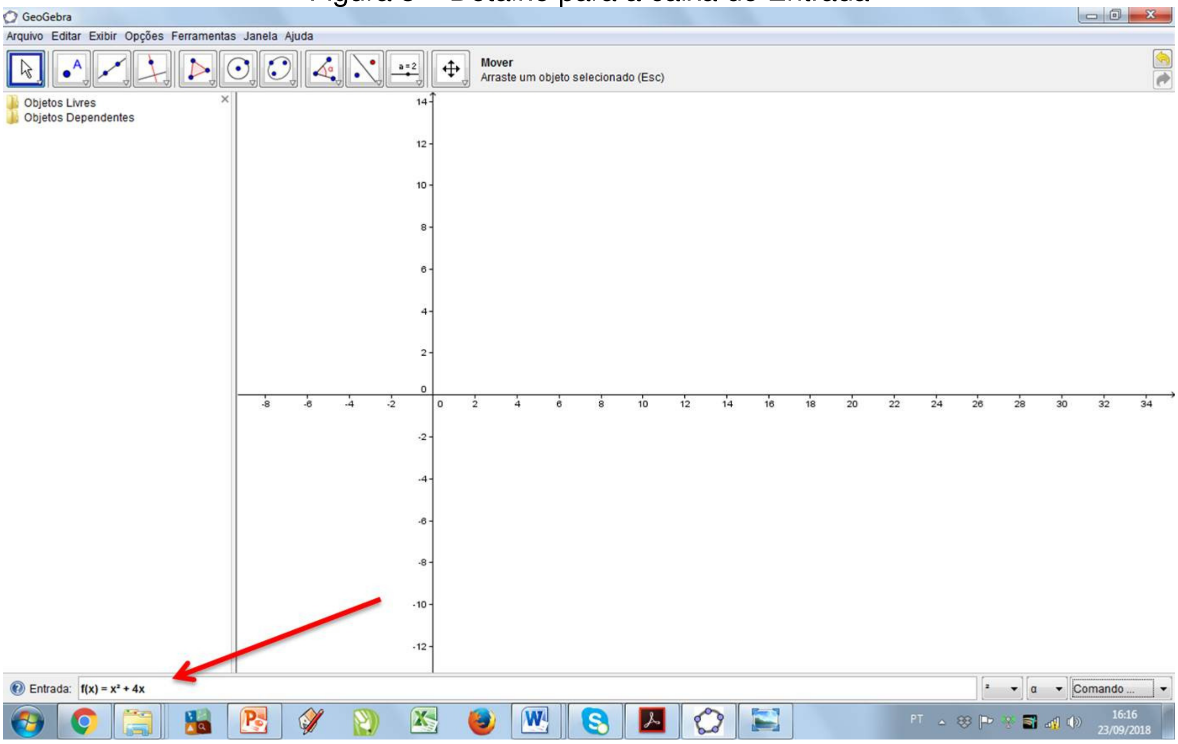
Passando a estudar o software detalhadamente, vemos abaixo o detalhe da opção *Exibir* selecionado na barra de menu onde podemos encontrar as opções *Eixos* e *Malhas* que servem para que o usuário escolha entre aparecer somente os eixos coordenados, os eixos e as malhas quadriculadas ou nenhuma das duas opões, como podemos ver na *Figura 2*. Ainda na *Barra de Menu*, além da opção *Exibir* existem outras opções disponíveis como: *Arquivo, Editar Opções, Ferramentas, Janela* e *Ajuda*

Figura 2 – Detalhe da opção *Exibir* da *Barra de Menu*



Quanto ao campo de Entrada, em destaque na Figura 3, trata-se do local onde serão inseridos os comandos como funções, coordenadas de pontos, coordenadas de vetores, propriedades entre outros.

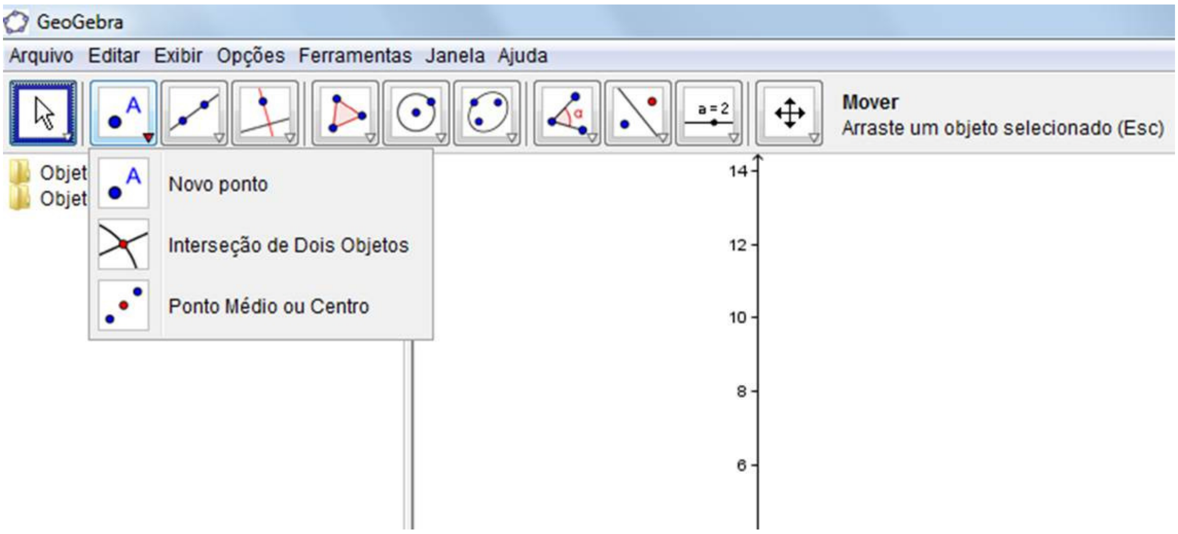
Figura 3 – Detalhe para a caixa de Entrada



Sempre que um comando for digitado no campo de Entrada o mesmo aparecerá na janela de visualização algébrica como uma função, equação, coordenadas de pontos e outros, já a outra janela de visualização exibe a representação gráfica dos pontos, vetores, retas, segmentos, polígonos, cônicas, funções entre outros, por meio de comandos no campo de entrada ou pela barra de ferramentas.

Na *Figura 4*, é destacada a Barra de Ferramentas representada por uma série de opções em forma de ícones. É interessante ressaltar que ao clicar no pequeno triângulo situado na parte inferior direita de cada ícone, abre-se uma lista de opções ocultas.

Figura 4 – Detalhe para a barra de ferramentas



A Barra de Ferramentas apresenta alguns itens capazes de construir entes geométricos como retas, pontos e ícones responsáveis pela movimentação dos objetos na área gráfica. Oferece também ferramentas de polígonos, formas circulares, cônicas, ângulos entre outros itens que tornam o estudo da geometria mais dinâmico e interativo.

Capítulo 2

Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem histórica e contemporânea

Abordaremos neste capítulo uma breve história do Cálculo Diferencial e Integral, falando um pouco da inserção do estudo de seu estudo na educação brasileira, a importância de estudá-lo e algumas de suas aplicações.

2.1 – Momentos históricos do aparecimento do Cálculo

Contrariando o que muitos acreditam e seguem como ordem de estudo nos currículos acadêmicos, o Cálculo Integral surgiu antes do Cálculo Diferencial.

> A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p. 417).

Segundo Fulini (2016, p. 10) o Cálculo Diferencial e Integral é uma poderosa ferramenta matemática utilizada na resolução diversos problemas envolvendo várias áreas do conhecimento.

Vários nomes conhecidos até hoje surgiram posteriormente e deram suas contribuições para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, nomes que encontramos registrados em teoremas, conjecturas, proposições e corolários tais como os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Riemann entre outros, como podem ser estudados com detalhe no trabalho HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL do autor Marco Antônio Fulini.

Contudo, podemos perceber que o surgimento se deu em vários momentos da história e por várias personalidades diferentes fazendo-nos acreditar que não houve um momento apenas da criação e sim um período de êxito na resolução de problemas envolvendo o Cálculo.

Segundo Melchiors e Soares (2013), existem relatos que, se considerarmos o Cálculo nas civilizações mais atuais, século XVII d.C. sua criação foi atribuída a dois grandes nomes da ciência, o inglês Isaac Newton (1643-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646-1716).

Sendo assim não se tem, portanto, nada provado em relação á exclusividade da criação do Cálculo Diferencial e Integral.

De tudo que se tem conhecimento, uma afirmação é comum, tanto Leibniz quanto Newton foram dois grandes impulsionadores do estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

> Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de “fluente” (uma quantidade que flui) e a sua taxa de variação dava o nome de “fluxo” do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. Em notação moderna esse fluxo equivale a dy/dt, onde t representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava “fluxo principal”, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. (EVES, 2011, p. 439)

Segundo Silva (2019, p. 26) foi dessa forma que Newton enunciou os problemas fundamentais do cálculo que conhecemos hoje por Teorema Fundamental do Cálculo.

Segundo Leithold (1994, p.361) Newton e Leibniz, quase que de forma simultânea, mostraram como o Cálculo poderia ser usado para calcular a área de uma região limitada por uma curva ou por um conjunto de curvas. Esse procedimento envolve o Teorema Fundamental do Cálculo.

Os enunciados a seguir referem-se aos Teoremas Fundamentais do Cálculo e foram transcritas na íntegra do livro O Cálculo com Geometria Analítica, volume 1, 3ª edição de Louis Leithold, página 345 e 347 exceto as numerações das equações. As demonstrações podem ser encontradas nas páginas 345 a 348. Seguem seus enunciados.

Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja x um número em $[a, b]$. Se f for uma função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

então,

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

(Se $x = a$, a derivada em (1) pode ser a derivada à direita e se $x = b$, a derivada em (2) pode ser a derivada à esquerda.)

Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que

$$g'(x) = f(x)$$

para todo x em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a) \qquad (2)$$

(Se $x = a$, a derivada em (2) pode ser a derivada à direita e se $x = b$, a derivada em (2) pode ser a derivada à esquerda.)

De acordo com EVES (2011), Leibniz já havia descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo e desenvolvido, inclusive, uma notação própria para o tema e estabelecido muitas das fórmulas elementares que formavam seu Cálculo Infinitesimal.

> Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina “summa” (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas

> semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int x\,dy$ e $\int y\,dx$ para integrais. Seu primeiro artigo sobre o calculo diferencial só apareceu em 1684. Nele se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção $dy : dx = y$: subtangente. (EVES, 2011, pág. 443)

2.2 – Inserção do estudo do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil

Segundo Lima (2008. p. 1), o Cálculo Diferencial e Integral apareceu como disciplina no currículo brasileiro pela primeira vez no ano de 1810 no curso Matemático da Real Academia Militar do Rio de janeiro.

> O ensino de Cálculo Diferencial e Integral nessa instituição baseava-se no livro *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* do francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843). Lacroix era professor da Escola Politécnica de Paris ao lado de Legendre (1752-1833) e Lagrange (1736-1813) e se tornou o principal autor de livros texto de sua época, tendo escrito compêndios de matemática para todos os graus de ensino à exceção do elementar. (LIMA, 2008, p.2)

De acordo com Boyer (1949, p. 264), o livro *O Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* foi traduzido para o português em 1812, pelo professor da Academia Militar do Rio de Janeiro, Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvin (1775-1856).

De acordo com Lima (2008) essa reescrita era uma tradução fiel ao original e se dividia em duas partes onde a primeira tratava do Cálculo Diferencial e a segunda do Cálculo Integral. O autor do original considera que o ponto de partida para o desenvolvimento do Cálculo é o conceito de função, o conceito de Limite não é apresentado em sua obra e que o conceito de Integral é tratado como sendo o inverso da Derivada.

Ainda segundo Lima (2008, p. 5) José Saturnino da Costa publicou, em 1842, “Elementos do Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral Segundo o Sistema de Lacroix, Para Uso da Escola Militar” como sendo, possivelmente, a primeira obra brasileira que trata de Cálculo.

Segundo MIORIM (1998, p. 86), Em 1837 foi criada a primeira escola secundária pública do Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II, e os programas do ensino da Matemática foram modificados radicalmente, de modo que, Aritmética, Geometria e Álgebra passassem a ocupar seu lugar em todas as oito séries do curso.

> (...) em 8 de novembro de 1890, o primeiro ministro Benjamin Constant baixou um decreto, sob o número 891, deste mesmo ano, em que determinava uma reforma com a eliminação das disciplinas tradicionais, como o latim e o grego e a inclusão do ensino de Matemática abstrata bem como da Matemática concreta. Desse modo, foi introduzido o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no terceiro ano. Nenhuma das várias reformas que ocorreram depois da de Benjamin Constant produziu mudanças significativas no ensino brasileiro. Somente na década de 20 começaram as alterações no panorama da Educação em nosso país. (TORRES E GIRAFFA, 2009, p. 23)

Capítulo 3

Noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral

Neste capítulo apresentaremos conceitos fundamentais do Cálculo seguidos de algumas propriedades e teoremas. Após a definição, será apresentada a sequência didática para fins de obtenção dos resultados, expondo o processo de construção dos conceitos e apresentação de exemplos utilizando as ferramentas do GeoGebra. É interessante ressaltar que todos os conceitos, propriedades e teoremas construídos com o uso do GeoGebra também foram expostos anteriormente sem a utilização do software. Utilizaremos a sigla **SD** para indicar no texto a Sequência Didática aplicada.

Dividiremos este capítulo em três seções a saber: Limite, Cálculo Diferencial e Cálculo Integral.

Todos os conceitos, definições e teoremas, apresentados neste capítulo têm como fonte de pesquisa os livros de Fundamentos de Cálculo da Coleção PROFMAT do autor Antonio Carlos Muniz Neto e Fundamentos da Matemática Elementar, volume 8, de Gelson Iezzi, Carlos Murakami e Nilson José Machado. Os textos referentes aos Enunciados e Teoremas descritos a seguir foram copiados na íntegra, citação direta, incluindo a notação, estruturação do desenvolvimento e organização da escrita, conforme as bibliografias citadas.

3.1 – Limite de um Função

3.1.1 – Definição.

Sejam $f\colon D \to \mathcal{R}$, onde $D \in \mathcal{R}$ é o domínio de f, $a \in \mathcal{R}$ tal que todo intervalo aberto I contendo a intersecte $D\backslash\{a\}$ e $L \in \mathcal{R}$. Diz-se que $f(x)$ tende para L quando x tende para a, e se escreve

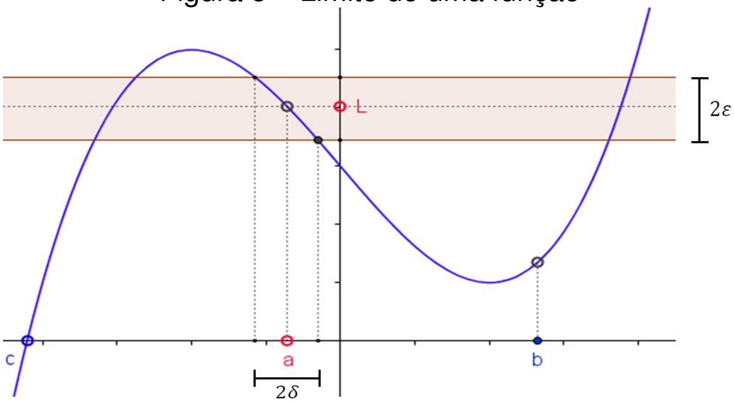
$\lim_{x\to a} f(x) = L$, (lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual a L)

se para cada $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que

$$x \in I\ e\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em palavras, esta última afirmação ocorre quando, fixado um erro $\varepsilon > 0$ para L, existir um erro $\delta > 0$ para a tal que aproximações $x \neq a$ de a em I com erro menor que δ correspondem a aproximações $f(x)$ de L com erro menor que ε.

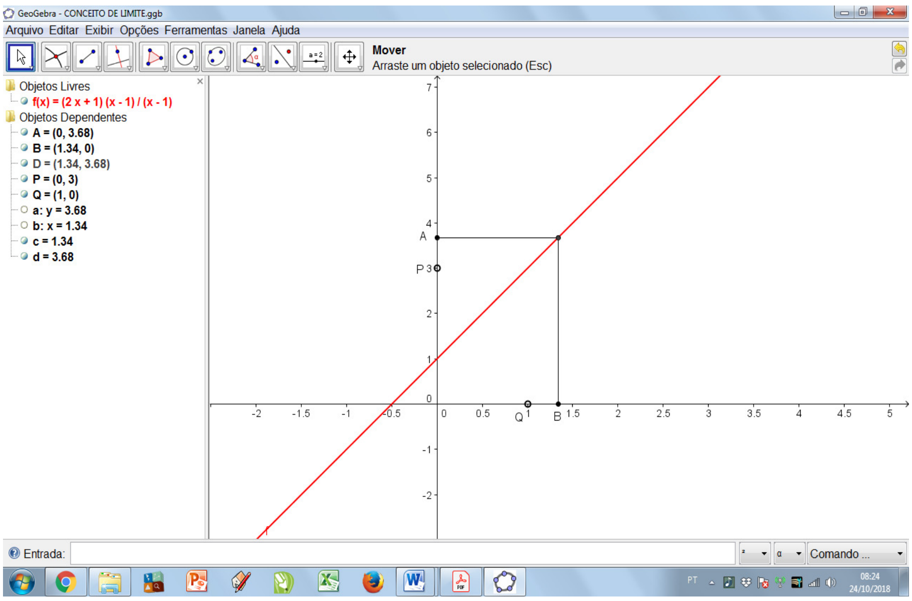
Figura 5 – Limite de uma função



Geometricamente, queremos que, para todo $x \in I$ suficientemente próximo de a mas *diferente* de a, o ponto do gráfico de f com abscissa a pertença à faixa pintada de l, na *Figura 5*.

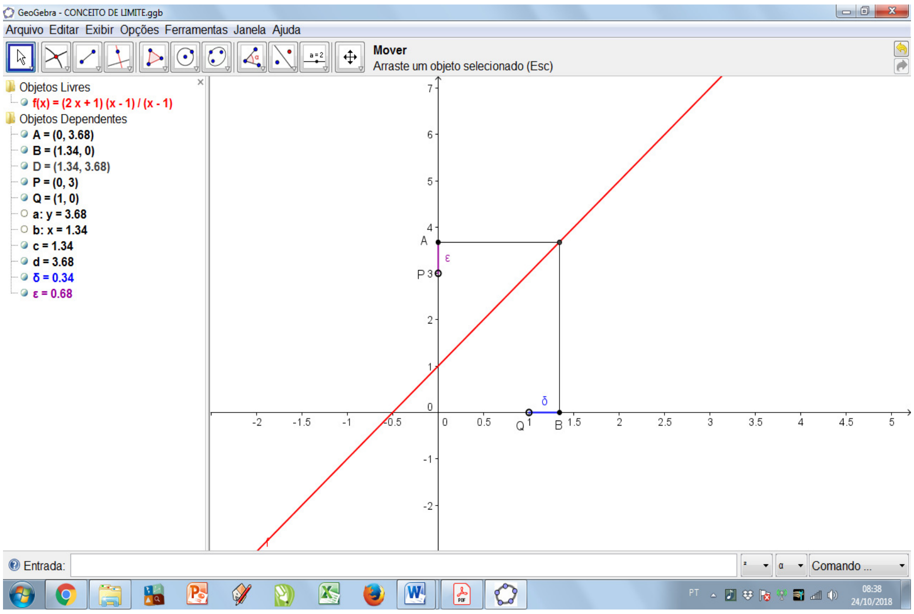
SD – Foi utilizada como exemplo a função $f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$ para exposição deste conceito. Foi criado um ponto P em $y = 3$ e um ponto Q em $x = 1$. Foi criado um ponto móvel A sobre o eixo Oy e associado a este, através da função, foi projetado um outro ponto B em sua abscissa no eixo Ox. Veja a *Figura 6*.

Figura 6 – Conceito de Limite



Posteriormente, foram criados os segmentos AP e BQ onde $\overline{AP} = \varepsilon$ e $\overline{BQ} = \delta$. Vide *Figura 7*.

Figura 7 – Detalhe dos segmentos δ e ε.



Como o ponto B move em função do ponto A, vê-se a variação de δ também em função do ε sempre que variamos o ponto A. Assim, é possível perceber que sempre que aproximamos o ponto A do ponto P simultaneamente o ponto B se aproxima de Q, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ vai existir um δ também positivo que satisfaz a lei de formação da função. É interessante ressaltar que a aproximação de B a Q acontece sempre que aproximamos A de P seja esta feita por baixo ou por cima. Mostrando assim que

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)} = 3$$

3.1.2 – Propriedades do Limite

De acordo com a definição 3.1.1, para que o limite de uma função $f(x)$ quando x tende a a seja L, devemos ser capazes de exibir um $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ dado.

Para que não tenhamos que fazer uso repetidamente da definição de limite para provarmos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, vamos apresentar algumas propriedades algébricas do limite de uma função.

Para o que segue imediatamente, suponhamos que a é um elemento do intervalo aberto I, e que em $I - \{a\}$ estão definidas as funções f, g, h ou outras quaisquer "envolvidas" na propriedade.

As demonstrações das propriedades a seguir podem ser encontradas no livro Fundamentos da Matemática Elementar, volume 8, de Gelson Iezzi, Carlos Murakami e Nilson José Machado

1ª Propriedade

Se f é uma função definida por $f(x) = c$ onde c é uma constante real, para todo x real, então $\lim_{x\to a} c = c$.

2ª Propriedade

Se $c \in \mathcal{R}$ e $\lim_{x\to a} f(x) = l$ então $\lim_{x\to a}[c.f(x)] = c.\lim_{x\to a} f(x) = c.l$

3ª Propriedade

Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$ e $\lim_{x\to a} g(x) = m$ então $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = l + m$

4ª Propriedade

Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$ e $\lim_{x\to a} g(x) = m$ então $\lim_{x\to a}(f - g)(x) = l - m$

5ª Propriedade

Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$ e $\lim_{x\to a} g(x) = m$ então $\lim_{x\to a}(f\ .\ g)(x) = l\,.m$

Esta propriedade também pode ser estendida para o produto de um número finito de funções, isto é:

Se $\lim_{x \to a} f_i\,(x) = l_i\,, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, então

$$\lim_{x \to a} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)(x) = \prod_{i=1}^{n} l_i$$

3.1.3 – Teorema do Confronto

Se $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$ e se f é tal que $g(x) < f(x) < h(x)$ para todo $x \in I \backslash \{a\}$, em que I é intervalo aberto que contém a, então $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Demonstração

Sendo $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$ então, para todo $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon \qquad (01)$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon \qquad (02)$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow b - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < b + \varepsilon \Rightarrow \qquad (03)$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \qquad (04)$$

isto é: $\lim_{x \to a} f(x) = b$

3.1.4 – Continuidade de uma Função

Seja f uma função definida num intervalo aberto I e a um elemento de I. Dizemos que f é *contínua* em a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Dizemos que uma função f é *contínua* num intervalo aberto $I = (a, b)$ se f for *contínua* em qualquer elemento $x \in I$.

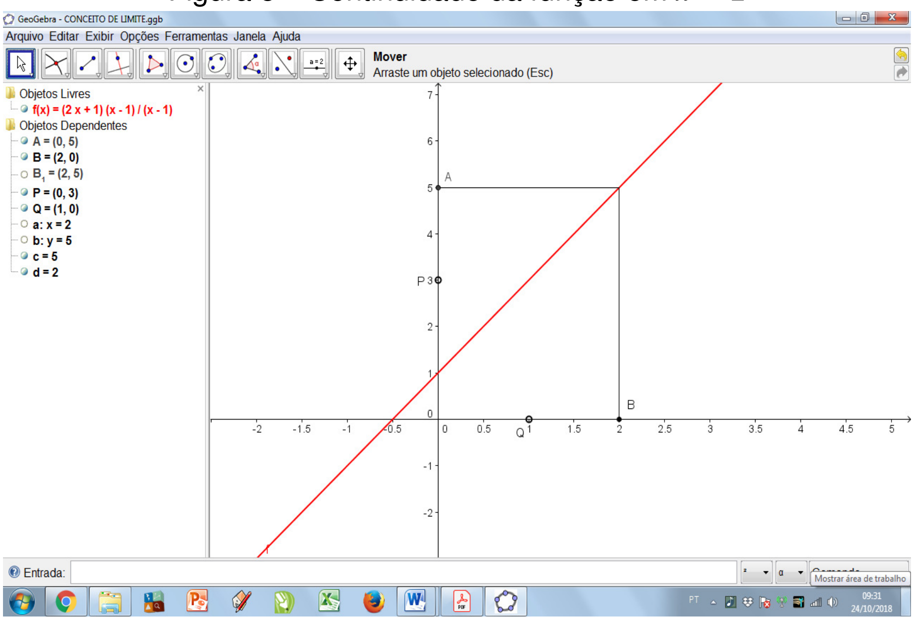
SD – Para esta atividade, foi utilizada a mesma função demonstrada no conceito anterior porém, para este, o ponto A se move em função de B.

Para mostrarmos a continuidade de uma função num ponto de seu domínio, dividimos a atividade em duas partes.

Primeiro aproximamos o ponto B do ponto $x = 2$ tanto pela direita quanto pela esquerda e verificamos o comportamento do ponto A que aproxima de $y = 5$ e quando o ponto B está sobre o ponto $x = 2$ verificamos que o ponto A estaciona sobre o ponto em $y = 5$.

Como o ponto A se aproxima de $y = 5$ sempre que aproximamos B do ponto $x = 2$ tanto pela direita quanto pela esquerda, isso mostra que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ e quando o ponto B está sobre o ponto $x = 2$ o ponto A estaciona sobre o ponto em $y = 5$ isso mostra que $f(2) = 5$ provando assim que a função $f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$ é contínua em $x = 2$ sempre que 2 pertencer ao seu domínio.

Figura 8 – Continuidade da função em $x = 2$

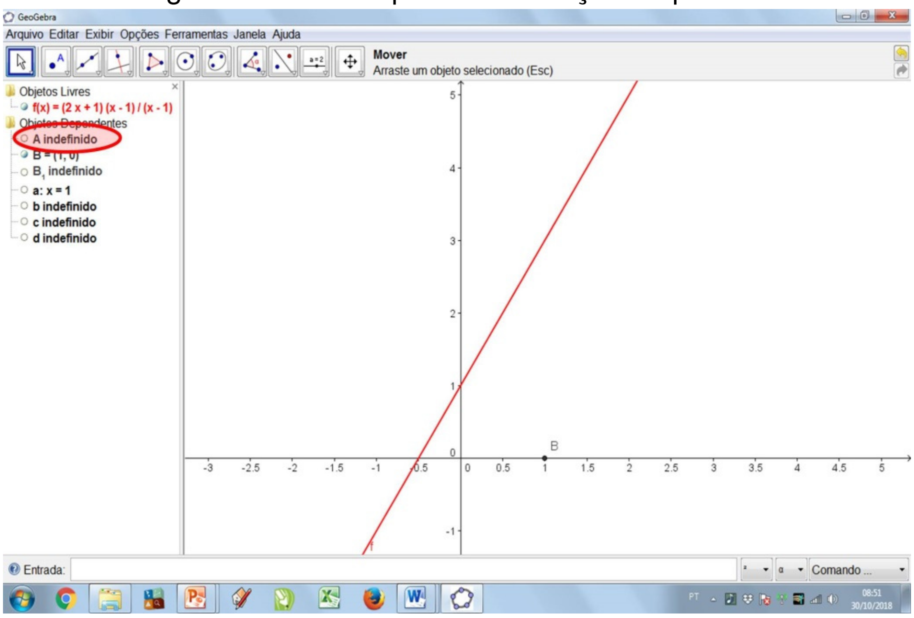


Na segunda parte da atividade, aproximamos o ponto B do ponto $x = 1$ tanto pela direita quanto pela esquerda e verificamos o comportamento do ponto A que aproxima de $y = 3$ e quando o ponto B está sobre o ponto $x = 1$ verificamos que o ponto A se apresenta como **indefinido**.

Como o ponto A se aproxima de $y = 3$ sempre que aproximamos B do ponto $x = 1$ tanto pela direita quanto pela esquerda, isso mostra que $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ e quando o ponto B está sobre o ponto $x = 1$ o ponto A se apresenta indefinido, mostrando que $f(1)$ o que prova que a função $f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$ não é contínua em $x = 1$.

Observe a *Figura 9* a seguir o detalhe da informação fornecida pelo software assim que o ponto B estaciona sobre $x = 1$.

Figura 9 – Detalhe para a indefinição do ponto A



3.1.5 –Teorema de Bolzano

Seja $f: [a, b] \to \mathcal{R}$ uma função contínua e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários, ou seja, $f(a) . f(b) < 0$. Então, existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração

Sem perda de generalidade suponhamos que $f(a) < 0 \; e \; f(b) > 0$. Façamos $a = a_0$ e $b = b_0$. Seja c_0 o ponto médio do segmento $[a_0, b_0]$. Desta forma, temos

$$f(c_0) < 0 \; ou \; f(c_0) \geq 0 \qquad (01)$$

Suponhamos $f(c_0) < 0$ ($f(c_0) \geq 0$ apresenta raciocínio análogo) e façamos $a_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$. Então, $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Seja c_1 o ponto médio do segmento $[a_1, b_1]$. Desta forma

$$f(c_1) < 0 \; ou \; f(c_1) \geq 0 \qquad (02)$$

Suponhamos $f(c_1) < 0$ ($f(c_1) \geq 0$ apresenta raciocínio análogo) e façamos $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$. Então, $f(a_1) < 0$ e $f(b_2) > 0$. Seja c_2 o ponto médio do segmento $[a_2, b_2]$. Desta forma

$$f(c_2) < 0 \; ou \; f(c_2) \geq 0 \qquad (03)$$

Prosseguindo com este raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos encaixados da forma:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots \qquad (04)$$

Note que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$f(a_n) < 0 \; e \; f(b_n) \geq 0 \qquad (05)$$

Pelo *Teorema dos Intervalos Encaixantes*, existe um único $c \in \mathcal{R}$ tal que $a_n \leq c \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

As sequências (a_n) e (b_n) convergem para c devido a maneira como (a_n) e (b_n) foram construídas. Como por hipótese f é contínua e por propriedades de limites segue que

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c) \; e \; \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(c) \qquad (06)$$

então

$$f(c) \leq 0 \; e \; f(c) \geq 0 \qquad (07)$$

portanto

$f(c) = 0$ (08)

A interpretação geométrica deste teorema pode ser verificada na Figura 10.

SD – Só relembrando o teorema temos: seja $f: [a, b] \to \mathcal{R}$ uma função contínua e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários, ou seja, $f(a) . f(b) < 0$. Então, existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Para a visualização do que se refere o teorema acima descrito, usamos a função $f(x) = x^3 - 2x$ e, sem perda de generalidade, adotamos $[a, b] = [1, 2]$. Foi construído o gráfico da função f e posteriormente marcados os pontos P em $x = 1$ e Q em $x = 2$. Criamos um ponto A sobre o eixo Ox e sua respectiva ordenada em Oy, ponto este que se moveria, percorrendo o segmento PQ no sentido de P a Q. Como $a = 1\ e\ b = 2$ e $f(1) = -1\ e\ f(2) = 4$ temos que $f(1) . f(2) < 0$ logo, $f(a) . f(b) < 0$.

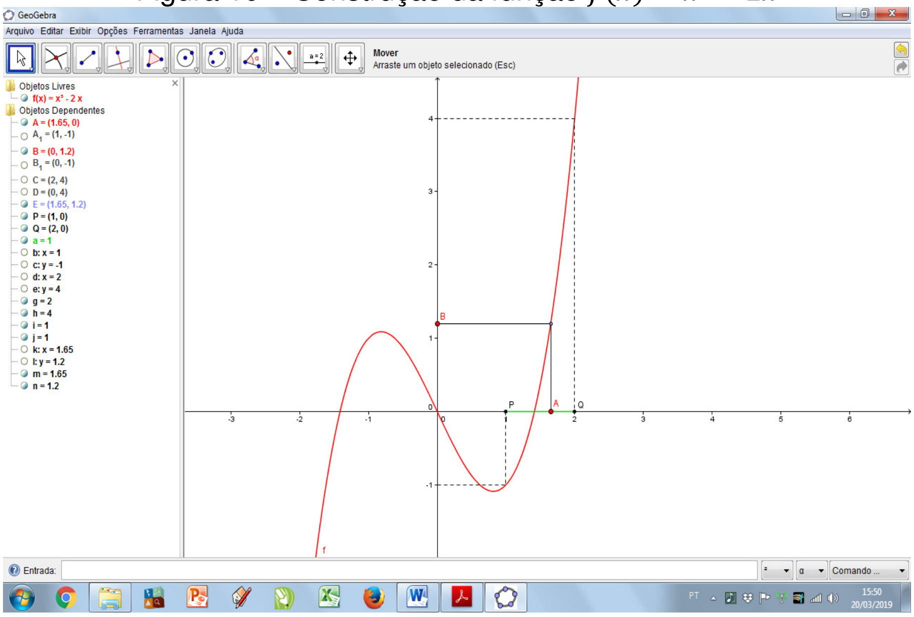
Ao movermos o ponto A sobre o segmento PQ, partindo de P e chegando em Q, observamos que o ponto B, que está sobre a ordenada de A, varia de $y = -1$ a $y = 4$ de forma contínua. Percebe-se que, o ponto A ao passar por um determinado valor em Ox, pertencente ao intervalo$]a, b[$, o ponto B passa sobre a origem do sistema mostrando que existe algum valor de $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$. Para encontrarmos $c \in [1, 2]$, faremos:

$$f(c) = 0 \Rightarrow c^3 - 2c = 0 \Rightarrow c^2 - 2 = 0 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

Como $c \in [1, 2]$, descartamos os outros dois zeros $\{-2, 0\}$ da função.

Vemos na *Figura 10* a seguir, a construção da função supracitada com detalhes do que fora exposto.

Figura 10 – Construção da função $f(x) = x^3 - 2x$



3.1.6 – Teorema do Valor Intermediário

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ uma função contínua e suponha que exista um número real d compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração

Suponhamos sem perda de generalidade que $f(a) < d < f(b)$.

Considere a função $g(x) = f(x) - d$ onde $x \in [a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$ então g também o é. Além disso

$$g(a) = f(a) - d < 0 \; e \; g(b) = f(b) - d > 0 \qquad (01)$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$.

Portanto

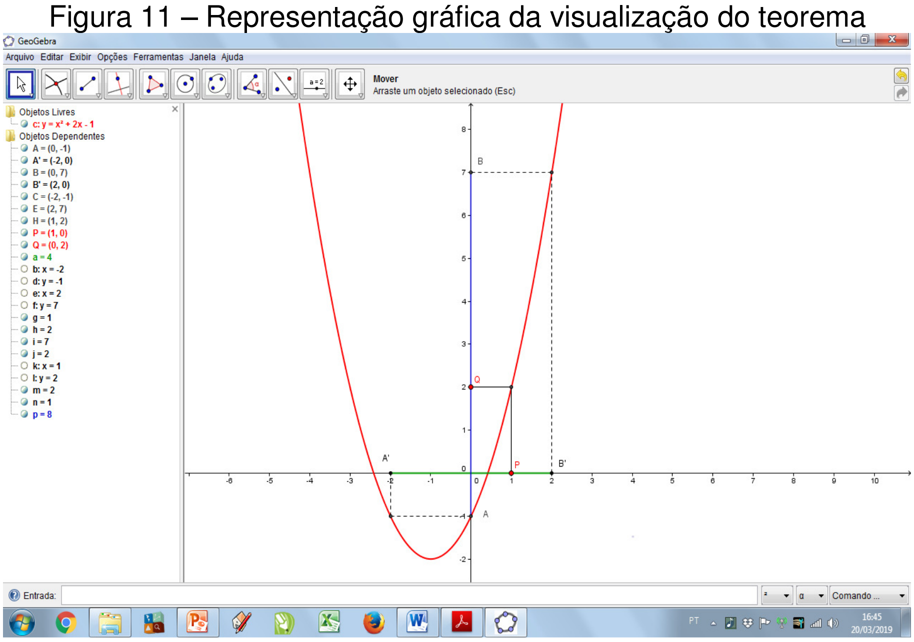
$$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - d = 0 \Rightarrow f(c) = d \qquad (02)$$

Pode-se verificar a interpretação geométrica do teorema através da Figura 11.

SD – Enunciado como: Seja $f: [a, b] \to \mathcal{R}$ uma função contínua e suponha que exista um número real d compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$, consideremos a função $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e o intervalo fechado $[a, b] = [-2, 2]$. Usando a função $f(x) = x^2 + 2x - 1$ como meio de transformação, temos que $f(-2) = -1$ e $f(2) = 7$. Consideremos ainda um $d = 2$ garantindo que $d \in [-1, 7]$ e os pontos A e B sobre as ordenadas -1 e 7 respectivamente. Criamos ainda um ponto Q sobre o eixo Oy e sua abscissa P em Ox, ressaltando que este ponto Q move sobre o eixo de forma deliberada pelo manipulador. Partindo o ponto Q de A e movendo em direção e sentido ao ponto B, percebe-se que ao passar sobre o ponto $y = 2$ vê-se o ponto P, abscissa de Q, sobre o ponto em $x = 1$. Assim, pode-se mostrar que existe um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$ e que este $c = 1$. E ainda, movendo o ponto Q no segmento AB, percebe-se que o ponto P varre o segmento $A'B'$ onde A' e B' as imagens geométricas dos pontos $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ respectivamente.

Vejamos a representação gráfica na *Figura 11* abaixo.

Figura 11 – Representação gráfica da visualização do teorema



3.2 – Derivada

3.2.1 – Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e seja x_0 um elemento de I. Chama-se ***derivada de f no ponto x_0*** o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se existir e for finito.

Nesse caso é denotado por $f'(x_0)$.

Por um lado, fazendo $h = x - x_0$ teremos $x_0 + h = x$, além disso,$x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0$. Por outro lado, podemos dizer que $f(x) = f(x_0 + h)$ e quando o fazemos, estamos supondo implicitamente que h é tão pequeno que $x_0 + h$ também pertence a I. Em resumo, sendo f derivável em $x_0 \in I$, ou seja, a função f apresenta derivada no ponto $x_0 \in I$, podemos escrever

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

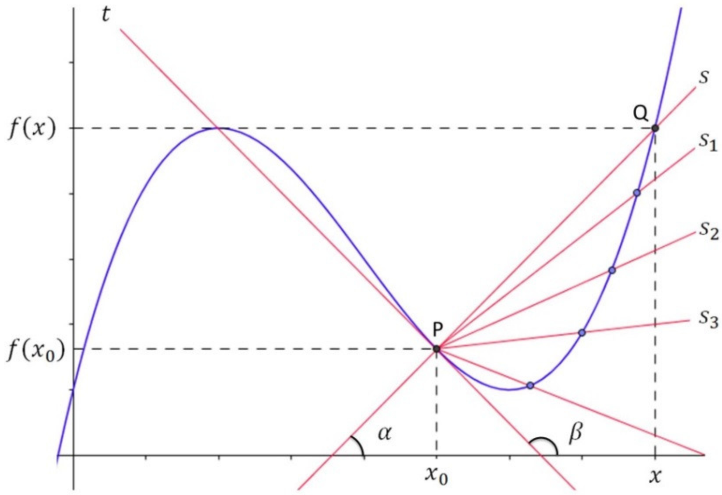
É interessante ressaltar que existem notações para representar a derivada de uma função f no ponto x_0 como $\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$ ou $Df(x_0)$.

3.2.2 – Interpretação Geométrica

Seja f uma função contínua no intervalo aberto I. Admitamos que exista a derivada de f no ponto $x_0 \in I$.

Dado um ponto $x \in I$, tal que $x \neq x_0$, consideremos a reta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$.

Figura 12 – Interpretação geométrica da derivada



A reta s é secante ao gráfico de f e seu coeficiente angular é

$$tg\ \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

portanto, $tg\ \alpha$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Se fé contínua em I, então, quando x tende a x_0, Q se desloca sobre o gráfico da função e aproxima-se de P. Consequentemente, a reta s desloca-se tomando sucessivamente as posições s_1, s_2, $s_3, \ldots$ e tende a coincidir com a reta t, tangente à curva no ponto P.

Como existe $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} tg\ \alpha = tg\left(\lim\limits_{x \to x_0} \alpha\right) = tg\ \beta$,

concluímos que a derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

SD – Para apresentarmos o conceito da derivada de uma função f num ponto x_0, partimos da interpretação geométrica da derivada como sendo, caso exista, a tangente do ângulo de inclinação β da reta tangente ao gráfico da função no ponto x_0, ou seja:

$$f'(x_0) = tg\ \beta$$

Construímos o gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, marcamos um ponto $A(1, 2)$ pertencente ao gráfico da função f. Construímos ainda um ponto B, também pertencente ao gráfico da função, de forma que este se mova livremente sobre o gráfico de f. Traçamos, passando por B, uma reta r tangente ao gráfico e usando a ferramenta *Inclinação*, determinamos a tangente de β, sendo ele o ângulo de inclinação da reta r.

Fazendo o ponto B se mover sobre o gráfico da função f é possível observar a variação da inclinação m da reta tangente a cada instante que a abscissa de B assume valores distintos. Observe na *Figura 13* a seguir a inclinação m da reta r quanto a abscissa de B é $x = 3$.

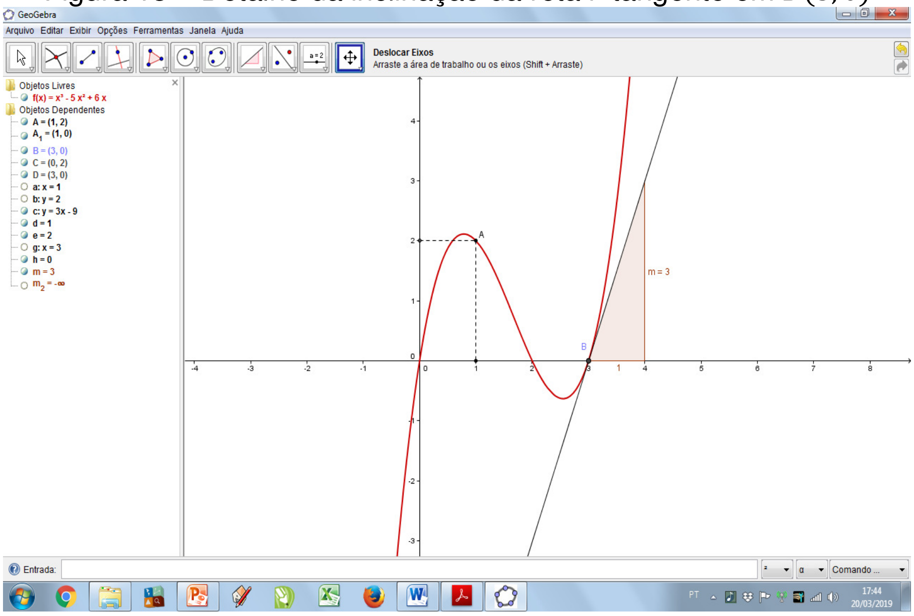
Nota-se que para $x_o = 3$, tem-se que a $f'(x_o) = tg\ \beta = m = 3$. De fato:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x \Rightarrow f'(x_o) = 3x_o^2 - 10x_o + 6 \quad (01)$$

Considerando $x_o = 3$ temos:

$$f'(3) = 3.3^2 - 10.3 + 6 \Rightarrow f'(3) = 27 - 30 + 6 \Rightarrow f'(3) = 3 \quad (02)$$

Figura 13 – Detalhe da inclinação da reta r tangente em $B(3,0)$



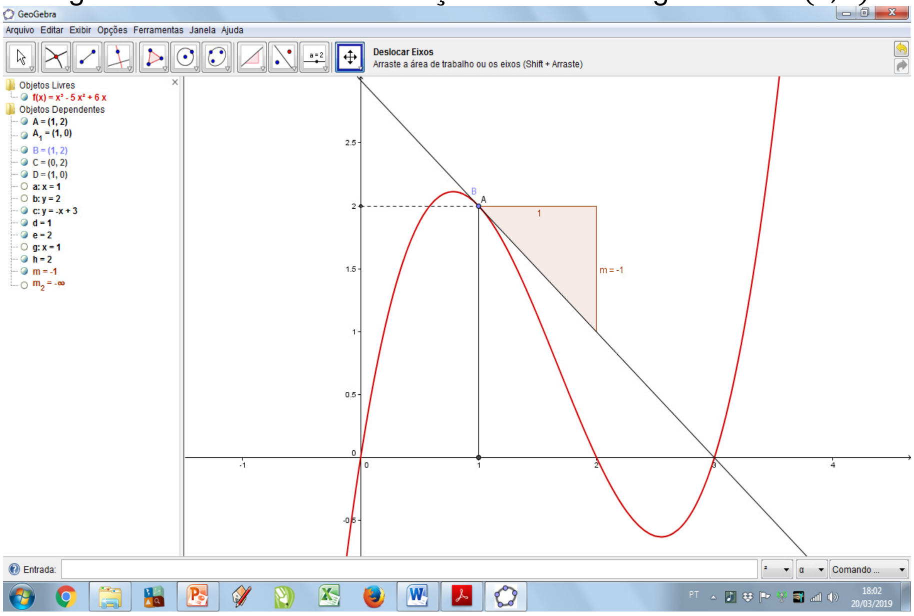
Aproximando-se o ponto B do ponto A, podemos perceber que a inclinação m da reta r também se aproxima da derivada da função f no ponto $x_o = 1$. Assim que o ponto B se sobrepõe ao ponto A verificamos que a inclinação da reta r, tangente nesse ponto, é $m = -1$. Podemos comprovar a eficácia da ferramenta fazendo:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x \Rightarrow f'(x_o) = 3x_o^2 - 10x_o + 6 \quad (03)$$

Tomando agora $x_o = 1$ temos:

$$f'(1) = 3.1^2 - 10.1 + 6 \Rightarrow f'(1) = 3 - 10 + 6 \Rightarrow f'(1) = -1 \qquad (04)$$

Figura 14 – Detalhe da inclinação da reta r tangente em $A(1,2)$



3.2.3 – Função Derivada

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I. Para cada $x_0 \in I$ existe e é único o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Portanto, podemos definir uma função $f': I \to \mathcal{R}$ que associa cada ponto $x_0 \in I$ a derivada de f no ponto x_0. Essa função é chamada de **função derivada de f** ou, simplesmente, **derivada de f**.

Habitualmente, a derivada de f é representada por $f', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$ ou Df.

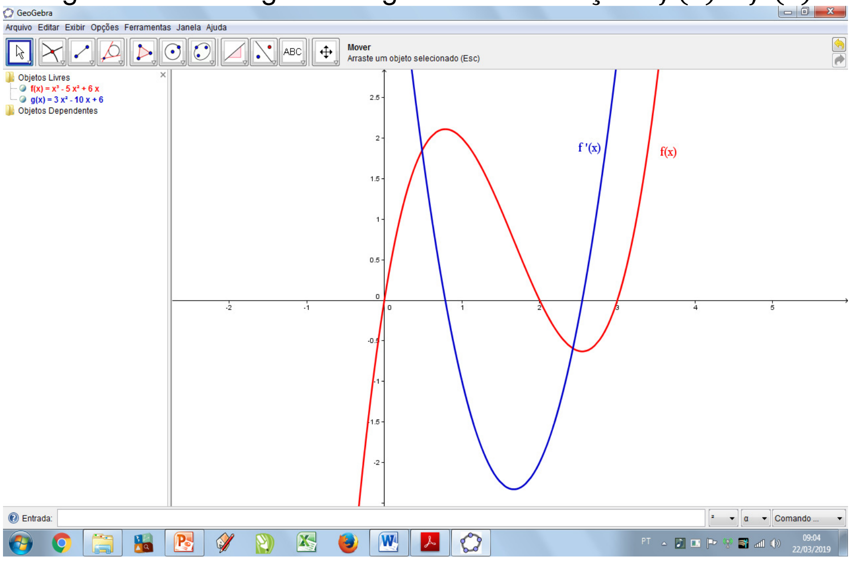
Se aplicarmos a definição da derivada de uma função f num ponto genérico $x \in I$ temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

SD – Para que pudéssemos visualizar o comportamento da derivada de uma função, a apresentação seguiu com a seguinte metodologia.

Construímos inicialmente o gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, contínua em $\mathcal{R}$, para que fosse possível analisar o comportamento de sua derivada $f'(x)$. Em seguida construímos o gráfico da função $f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$ como podemos verificar na *Figura 15* a seguir.

Figura 15 – Plotagem dos gráficos das funções $f(x)$ e $f'(x)$

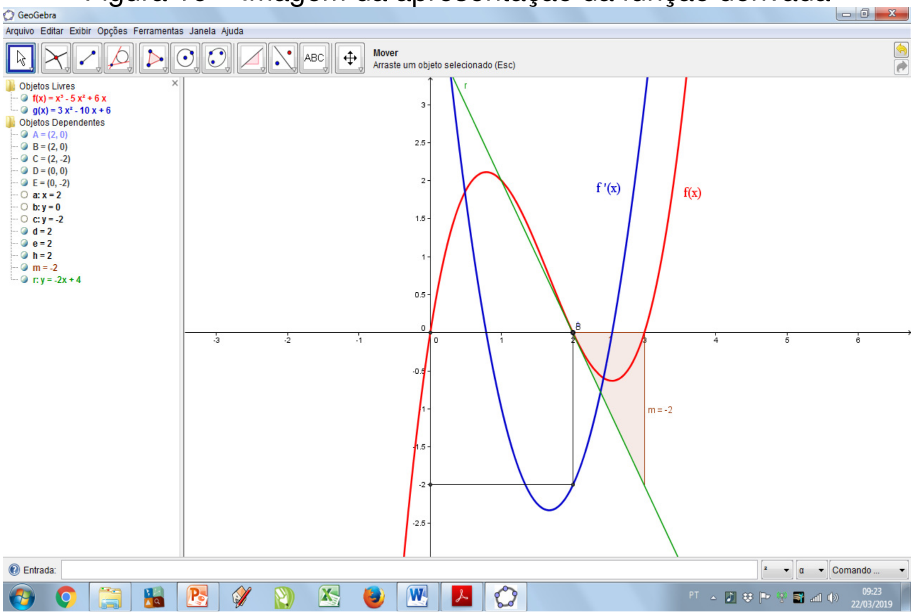


Posteriormente foi criado um ponto A em Ox, móvel sobre o eixo, e os pontos B e C com a mesma abscissa de A transformada através das funções f e f' respectivamente.

A partir do ponto B foi traçada uma reta r tangente ao gráfico da função f e, através da ferramenta *Inclinação*, pudemos visualizar a inclinação da reta r na *interface* do software.

Movendo deliberadamente o ponto A sobre o eixo Ox pode-se perceber que em qualquer das posições o valor da inclinação de r será sempre coincidente com a coordenada do ponto C mostrando geometricamente que $f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$é a função derivada de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Figura 16 – Imagem da apresentação da função derivada



3.2.4 – Derivada da Função Constante

Usaremos os conceitos expostos anteriormente para mostrarmos a derivada da função constante.

Dada a função constante $f(x) = c, c \in \mathcal{R}$, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \qquad (01)$$

Logo,

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \qquad (02)$$

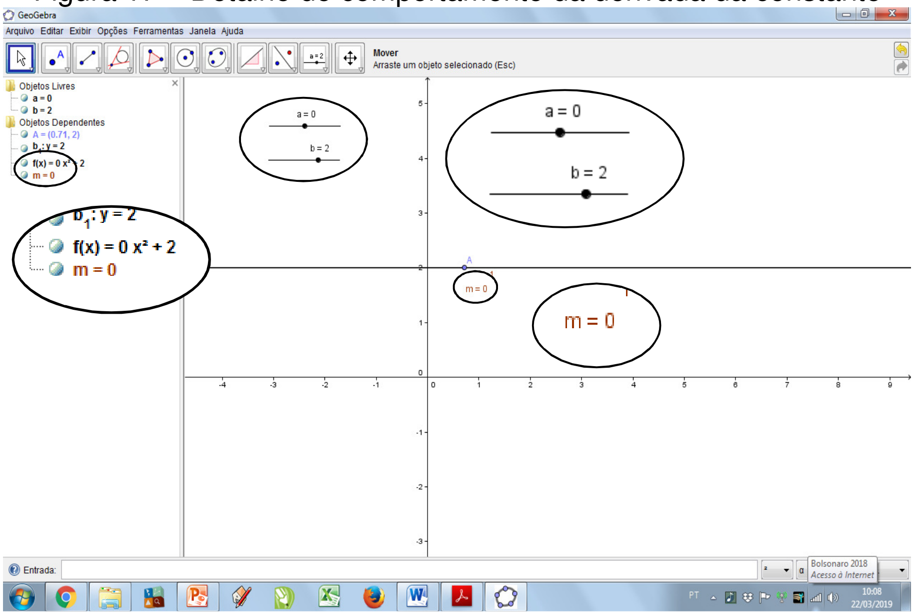
SD – Segundo (ELON, 2014) a função do tipo $f(x) = b$ com $b \in \mathcal{R}$ é um caso particular da *função afim* chamada de *função constante*.

Para efeito de nosso estudo, consideramos a função constante $f(x) = 2$ que tem por gráfico uma reta paralela ao eixo Ox e passa pelos pontos de ordenada 2.

Como o software não permite a construção de uma reta tangente á outra, precisamos utilizar um recurso bastante útil do programa, a ferramenta *seletor*. Esta ferramenta permite adicionar à função uma nova variável que pode ser modificada deliberadamente pelo usuário na forma de sua necessidade assim, para que pudéssemos criar a reta tangente à reta do gráfico da função $f(x) = 2$, criamos os seletores a e b e a função $f(x) = ax^2 + b$ com a e b variando de -5 a 5. Sendo assim, para todo $a \neq 0$ teremos uma função quadrática, o que torna possível a construção de uma reta r tangente ao seu gráfico e consequentemente a determinação de sua inclinação.

Quando $a = 0$ e $b = 2$, teremos o que se espera, a função $f(x) = 2$ e na janela de visualização algébrica é possível perceber a equação da reta r e o valor m de sua inclinação. Mais genericamente, mantendo o seletor $a = 0$ e variando o seletor b podemos perceber que a equação da reta tangente coincide com a função f e que o valor de sua inclinação será sempre $m = 0$, mostrando assim que a derivada de uma constante será sempre nula.

Figura 17 – Detalhe do comportamento da derivada da constante



3.2.5 – Propriedades das Derivadas

Definidas algumas derivadas a partir do conceito de limites, vamos sistematizar o cálculo das derivadas procurando obter regras de derivação para determinar a derivada de uma função sem ter que recorrer necessariamente à definição. Os enunciados das propriedades a seguir e suas respectivas demonstrações podem ser encontradas no livro Fundamentos da Matemática Elementar, volume 8, de Gelson Iezzi, Carlos Murakami e Nilson José Machado.

1ª Propriedade

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) + v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

2ª Propriedade

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) . v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é:

$$f'(x) = u'(x). v(x) + u(x). v'(x)$$

3ª Propriedade

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ também é derivável em I e sua derivada é:

$$f'(x) = \frac{u'(x). v(x) - u(x). v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Dessas propriedades, seguem algumas outras derivadas importantes como derivada da função tangente, das funções secante e cossecante, entre outras.

4ª Propriedade

Sejam as funções $f: A \longrightarrow B$ dada pela lei $y = f(x)$ e $g: B \longrightarrow C$ dada pela lei $z = g(y)$. Existe a função composta $F: A \longrightarrow C$ dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$.

Supondo que f seja derivável no ponto x e g seja derivável no ponto y tal que $y = f(x)$, provemos que F também é derivável em x e sua derivada é:

$$F'(x) = g'(y). f'(x)$$

A essa propriedade, da derivada de uma função composta, damos o nome de ***Regra da Cadeia***.

3.2.6 – Estudo das Variações das Funções

Nesta parte do trabalho, apresentaremos de forma sucinta algumas aplicações das derivadas. Veremos que, a partir da derivada de uma função, muitas são as conclusões que podem ser tiradas sobre a variação da função e, consequentemente, sobre seu gráfico.

i) – Máximos e Mínimos

- ✓ Seja a função $f: D \longrightarrow \mathcal{R}$ e seja $x_0 \in D$. Chamamos de **vizinhança de $\boldsymbol{x_0}$** um intervalo $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, em que δ é um número real positivo.
- ✓ Dizemos que x_0 é um **ponto de máximo local** de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $(\forall x)(x \in V \Rightarrow f(x) \leq f(x_0))$

Nesse caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado **máximo local** de f.

- ✓ Dizemos que x_0 é um **ponto de mínimo local** de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $(\forall x)(x \in V \Rightarrow f(x) \geq f(x_0))$

Nesse caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado **mínimo local** de f.

- ✓ Dizemos que x_0 é **ponto extremo** ou **extremante** se x_0 for um ponto de máximo local ou de mínimo local de f.

Nesse caso, o valor de $f(x_{0)}$ é chamado de valor **extremo** de f.

Os pontos de máximo ou mínimo locais que não são extremos do intervalo em que a função está definida são chamados **pontos de máximo ou mínimo locais** interiores.

- ✓ Dizemos que $f(x_0)$ é um **valor máximo absoluto** de f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o maior valor que f assume.
- ✓ Dizemos que $f(x_0)$ é um **valor mínimo absoluto** de f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o menor valor que f assume.

Teorema de Fermat

Se $f: D \longrightarrow \mathcal{R}$ é uma função derivável em $x_0 \in D$ e x_0 é um ponto de extremo local interior de f, então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

Suponhamos, sem perda de generalidade, que x_0 seja ponto de mínimo local interior de f. Existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V$, temos:

$$f(x_0) \leq f(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \; para \; x < x_0 \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \; para \; x > x_0 \end{cases} \quad (01)$$

Sendo f derivável em x_0, existe e é finito o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad (02)$$

que coincide com os limites laterais à esquerda e à direita de x_0. Assim

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad (03)$$

O teorema de Fermat garante que num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo Ox. Vejamos as *Figuras 18* e *19* a seguir a interpretação geométrica.

Figura 18 – $f(x_0)$ é máximo local interior

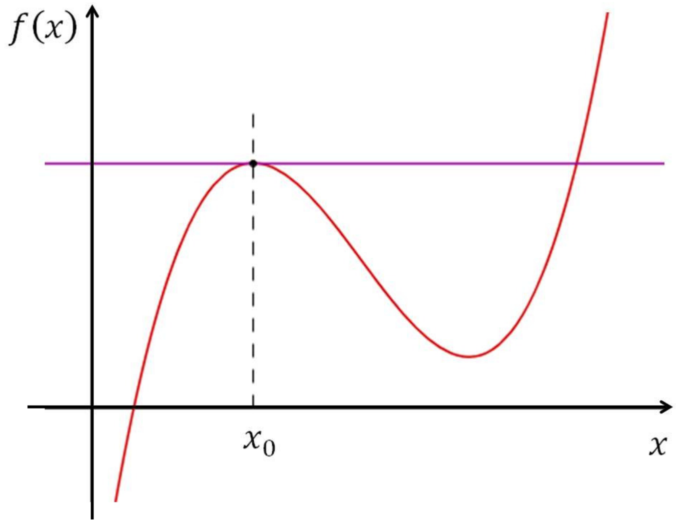
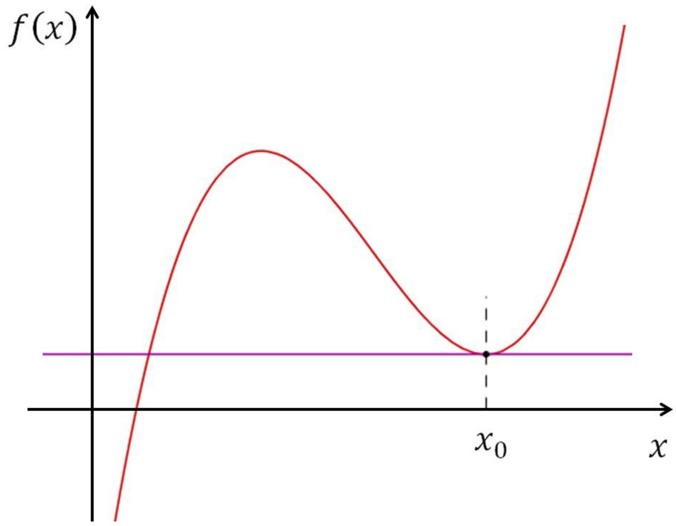


Figura 19 – $f(x_0)$ é mínimo local interior



SD – O teorema de Fermat garante que num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo Ox. Isso significa dizer que se um ponto de extremo local interior for $P(x_o, y_o)$ então $f'(x_o) = 0$.

Para melhor visualização deste teorema construímos o gráfico da função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$, marcamos sobre o gráfico um ponto móvel A com suas projeções sobre os eixos Ox e Oy denominados de pontos B e C respectivamente e construímos por A uma reta r tangente ao gráfico de f com a indicação de sua inclinação m.

Consideramos para efeito desta análise, o intervalo $I = [0, 1]$ do domínio de f.

Variando o ponto A de modo que B percorra o segmento contido em Ox com extremidades de abscissas $x = 0$ e $x = 1$, podemos perceber que a inclinação m de r varia continuamente de $m = 3$ a $m = -2$ e que a ordenada do ponto A atinge um valor máximo nesse intervalo. É interessante ressaltar que esse valor máximo é atingido justamente no momento em que a inclinação m é nula, mostrando que no ponto em que $A(x_o, y_o)$ se torna um extremo local interior a derivada da função nesse ponto é nula, ou seja, existe $x_o \in I$ tal que $f'(x_o) = 0$. Podemos ainda encontrar o valor de x_o.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

Fazendo:

$f'(x_o) = 0$ temos:

$$3{x_o}^2 - 8x_o + 3 = 0 \Rightarrow x_o = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.3.3}}{2.3} \Rightarrow$$

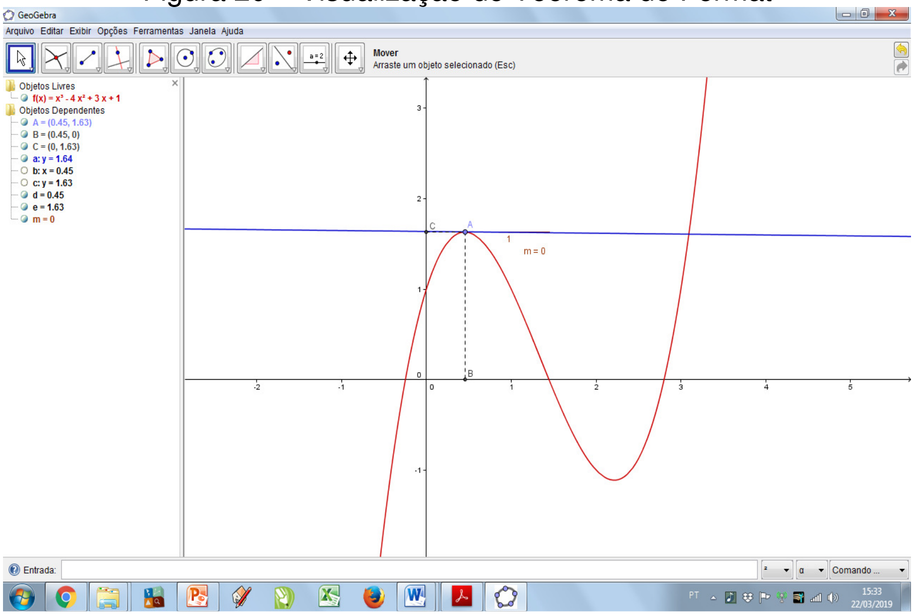
$$x_o = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{6} \Rightarrow x_o = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

Como adotamos para efeito da análise o intervalo real $I = [0, 1]$ logo:

$$x_o = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$$

Vejamos a seguir a representação da construção gráfica na *Figura 20*.

Figura 20 – Visualização do Teorema de Fermat



ii) – Derivada – crescimento e decrescimento

Neste item provaremos dois importantes teoremas que estabelecem um elo de ligação entre a derivada de um função e o crescimento ou decréscimo desta.

Teorema de Rolle

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ é derivável em $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

1º caso: f é constante em $[a, b]$

Neste caso $f'(x) = 0$ em $]a, b[$, isto é, para todo $x_0 \in]a, b[$, temos $f'(x_0) = 0$.

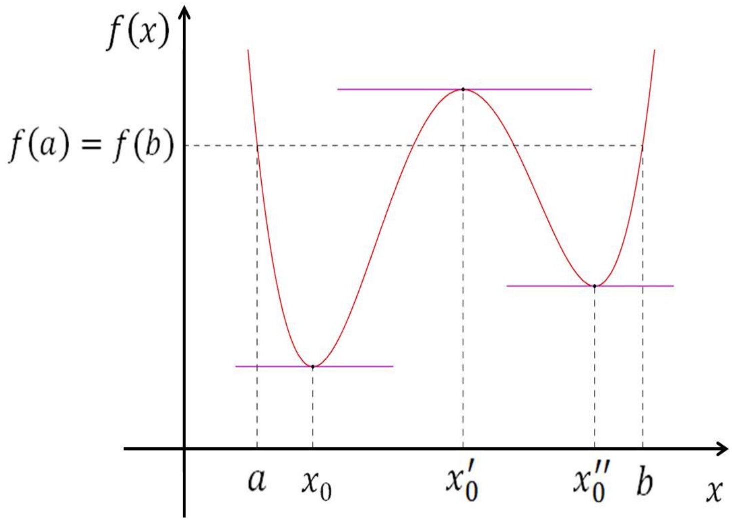
2º caso: f nãoé constante em $[a, b]$

Neste caso existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Como f é contínua em $[a, b]$, f tem um mínimo e um máximo em $[a, b]$. Se existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$ então o valor $f(a) = f(b)$ não é o máximo de f em $[a, b]$; portanto, f assume valor máximo em algum ponto $x_0 \in]a, b[$ e, sendo f derivável em $]a, b[$, temos $f'(x_0) = 0$.

Se existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$ a prova é análoga.

Vejamos a interpretação geométrica do teorema de Rolle na *Figura 21* abaixo.

Figura 21 – Interpretação geométrica do Teorema de Rolle



SD – Como enunciado anteriormente, devemos mostrar que existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$ em uma função f contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ quando se tem $f(a) = f(b)$. Para tanto decidimos escolher a função $f(x) = sen(x)$ e o intervalo $[a, b] = [0, \pi]$. Inicialmente há de ressaltar que a função f é contínua e derivável no intervalo escolhido e que as igualdades $f(0) = sen(0) = sen(\pi) = f(\pi)$ são verdadeiras.

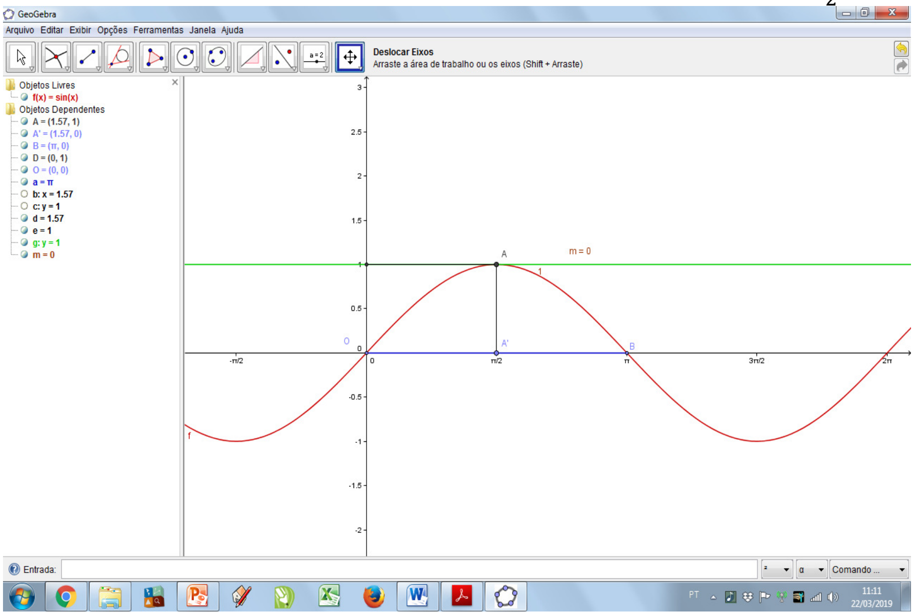
Criamos um ponto A, móvel, sobre o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ e representamos por A' a sua projeção ortogonal no eixo Ox. Construímos também uma reta r tangente a f no ponto A e determinamos sua inclinação m. Marcamos ainda os ponto $O(0, 0)$ e $B(\pi, 0)$ como extremidades do intervalo escolhido.

Fazendo o ponto A mover-se do ponto O ao ponto B sobre o gráfico da função pode-se perceber a movimentação do A' sobre o segmento OB no sentido de O para B e a inclinação m da reta r, tangente ao gráfico de f, que varia continuamente de $m = -1$ até $m = 1$.

Assim que o ponto A assume as coordenadas $A(\frac{\pi}{2}, 1)$, vê-se que a inclinação assume o valor $m = 0$, ou seja, para $x_o = \frac{\pi}{2}$, a inclinação da reta r é $m = 0$. Portanto, a derivada da função f no ponto $x_o = \frac{\pi}{2}$ é 0, o que mostra que existe $x_0 \in]0, \pi[$, com

$f(0) = f(\pi)$ tal que $f'(x_0) = 0$ já que $0 < \frac{\pi}{2} < \pi$ e $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Veja a estrutura montada na Figura 22 a seguir.

Figura 22 – Detalhe da inclinação nula no ponto em $x_o = \frac{\pi}{2}$



Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Demonstração

1º caso: $f(a) = f(b)$

Neste caso $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ e, pelo teorema de Rolle, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$f'(x_0) = 0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (01)$$

2º caso: $f(a) \neq f(b)$

Consideremos a função

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a). \quad (02)$$

Observemos que:

I) g é contínua em $[a, b]$ por ser a diferença entre $f(x) - f(a)$ e $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} . (x - a)$ que são contínuas em $[a, b]$;

II) g é derivável em $]a, b[$e sua derivada é $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

III) nos extremos do intervalo $[a, b]$, temos:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} . (a - a) = 0 \qquad (01)$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} . (b - a) = 0 \qquad (02)$$

portanto,

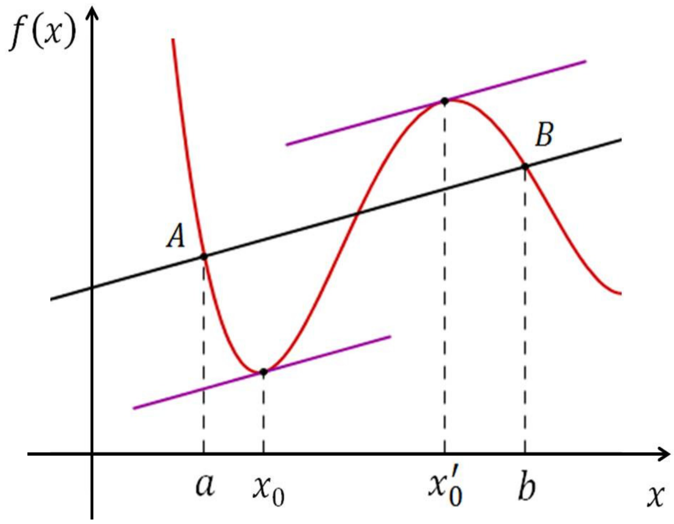
$$g(a) = g(b) = 0. \qquad (03)$$

Sendo assim, é válido para g o teorema de Rolle: existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g'(x) = 0$, isto é,

$$g'^{(x_0)} = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (04)$$

Segundo o teorema de Lagrange, se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, por terem coeficientes angulares iguais. Veja na *Figura 23* abaixo.

Figura 23 – Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange



SD – Como enunciado anteriormente, o teorema afirma que se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em$]a, b[$ então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$. Em outras palavras, existe um ponto $x_0 \in]a, b[$tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, por terem coeficientes angulares iguais.

Vamos considerar ainda a função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ e o intervalo $[a, b] = [0, 2]$ para fins de visualização deste teorema. Após a construção do gráfico de f, criamos um ponto $P(x_0, f(x_0))$, móvel sobre o gráfico, e construímos uma reta r, tangente ao gráfico em P e indicamos sua inclinação m_r. Em seguida criamos os pontos $B(0, 1)$ e $C(2, -1)$ pertencentes a f e traçamos uma reta $t = \overleftrightarrow{BC}$.

Encontramos em seguida a inclinação m_t de t, temos:

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 1}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow m_t = -1$$

Devemos buscar agora um ponto $x_0 \in]0, 2[$ tal que $f'(x_0) = -1$. Ao movermos o ponto P no sentido de B até C, sobre o gráfico da função, percebemos que para algum valor de $x_0 \in]0, 2[$, a reta r torna-se paralela à reta t, momento em que se tem $m_r = m_t$, ou seja, para este x_o temos que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Para encontrarmos o valor de x_o basta fazer $f'(x_0) = -1$, assim:

$$f'(x_0) = -1 \Rightarrow 3{x_o}^2 - 8x_o + 3 = -1 \Rightarrow \qquad (01)$$

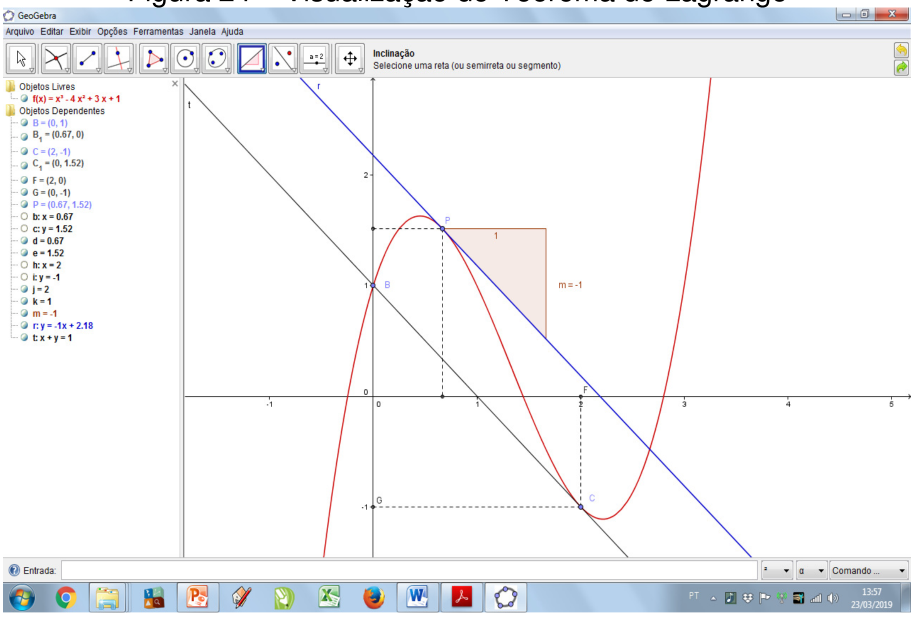
$$3{x_o}^2 - 8x_o + 4 = 0 \Rightarrow x_o = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4.3.4}}{2.3} \Rightarrow \qquad (02)$$

$$x_o = \frac{8\pm\sqrt{16}}{6} \Rightarrow x_o = \frac{2}{3}\ ou\ x_o = 2 \qquad (03)$$

Como consideramos inicialmente o intervalo real $I =]0,2[$ logo:

$$x_o = \frac{2}{3}$$

Figura 24 – Visualização do Teorema de Lagrange



Lembremos agora os conceitos de função crescente e de função decrescente num intervalo I.

- ✓ Uma função $f: D \longrightarrow \mathcal{R}$ é **crescente** num intervalo $I \subset D$ quando, quaisquer que sejam $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, temos:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- ✓ Uma função $f: D \longrightarrow \mathcal{R}$ é **decrescente** num intervalo $I \subset D$ quando, quaisquer que sejam $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, temos:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Podemos dizer que f é uma função crescente num intervalo I quando, aumentando o valor atribuído a x, aumenta o valor de $f(x)$.

Notemos ainda que se f é uma função crescente, então $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ para todos $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 \neq x_2$.

Podemos dizer que f é uma função decrescente num intervalo I quando, aumentando o valor atribuído a x, diminui o valor de $f(x)$.

Analogamente, se f é uma função decrescente, então $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$ para todos $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 \neq x_2$.

Sendo assim, segue o seguinte teorema:

Teorema

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ então:

$i)\ f'(x) \geq 0\ em\ ]a, b[\Leftrightarrow f\ \text{é}\ crescente\ em\ [a, b]$

$ii)\ f'(x) \leq 0\ em\ ]a, b[\Leftrightarrow f\ \text{é}\ decrescente\ em\ [a, b]$

Demonstração

1ª parte: $\Leftarrow$

- ✓ Seja $x_0 \in I =]a, b[$. Dado um outro ponto $x \in I$, consideremos o quociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Conforme vimos anteriormente, se f é crescente em I, este quociente é positivo. De acordo com o teorema da conservação de sinal, decorre que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

- ✓ Analogamente pode-se provar no caso de f ser decrescente.

2ª parte: $\Rightarrow$

- ✓ Sejam $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ com $x_1 < x_2$.

Como $[x_1, x_2] \subset [a, b], f$ é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$. De acordo com o teorema de Lagrange, existe ao menos um ponto $x_0 \in]x_1, x_2[$tal que $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_0)$, isto é, $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1). f'(x_0)$.

Sendo $f'(x) \geq 0$ em $]a, b[$, decorre $f'(x_0) \geq 0$. Como $x_2 - x_1 > 0$, vem: $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, isto é: $f(x_2) \geq f(x_1)$ e, portanto, f é crescente.

- ✓ Análogo ao anterior.

SD – O teorema que se segue teve sua demonstração apresentada anteriormente. Vamos apenas representá-lo geometricamente e mostrar seu comportamento no plano cartesiano.

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em$]a, b[$ então:

$i)\ f'(x) \geq 0\ em\ ]a, b[\Leftrightarrow f$ é $crescente\ em\ [a, b]$

$ii)\ f'(x) \leq 0\ em\ ]a, b[\Leftrightarrow f$ é $decrescente\ em\ [a, b]$

Para conseguirmos visualizar sua representação geométrica, vamos considerar ainda a função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ e sua derivada $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$ agora no intervalo $[-1, 3]$.

Criamos dois pontos A e B de intersecção do gráfico da função f' com o eixo Ox, traçamos a partir de cada um desses pontos uma reta paralelo ao eixo Oy e marcamos os pontos C e D de intersecção dessas retas com o gráfico da função f determinando assim os segmentos AC e BD. Criamos ainda um ponto P móvel sobre o gráfico da função f e uma reta r tangente ao gráfico de f passando por P e representamos sua inclinação m.

Estudando o sinal da função f' temos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$i)\ f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right[\ ou\ x \in \left]\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$$

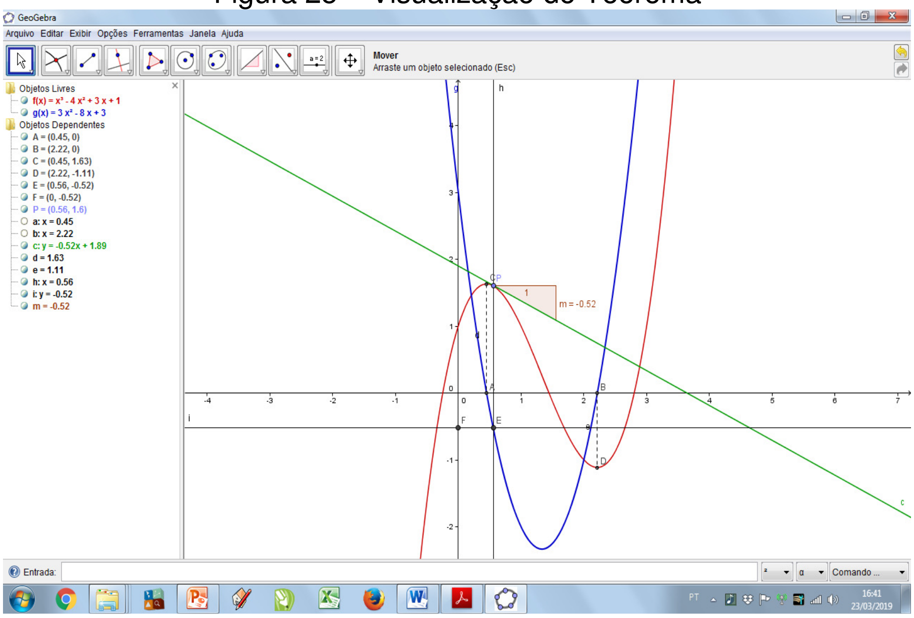
$$ii)\ f'(x) < 0 \ \Leftrightarrow x \in \left]\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right[$$

$$iii)\ f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right\}$$

Ao movermos o ponto P sobre o gráfico de f percebemos a variação da inclinação da reta t. Se movemos P do ponto de abscissa -1 sentido ao ponto de abscissa 3, fica fácil perceber que quando P se aproxima de C sua ordenada varia de $f(-1)$ crescendo até $f\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ enquanto inclinação de r ainda é $m \geq 0$. Se P varia de C a D, percebemos que a função decresce de $f\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ a $f\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$, intervalo em que a inclinação de r é $m \leq 0$. E após passar por D a ordenada de P volta a crescer enquanto a inclinação de r volta a ser $m > 0$.

Vejamos na *Figura 25* a seguir, a representação da construção feita na aplicação deste trabalho.

Figura 25 – Visualização do Teorema



Sendo assim, podemos perceber que $f'(x) \geq 0 em\ ]a, b[$ se, e somente se f é $crescenteem\ [a, b]$ enquanto que $f'(x) \leq 0\ em\ ]a, b[$ se, e somente se f é $decrescenteem\ [a, b]$.

3.3 – Noções de Cálculo Integral

Para fins de fundamentação desta pesquisa, trabalharemos nesta seção apenas os conceitos iniciais do Cálculo Integral referentes à áreas de figuras planas e o conceito da integral definida.

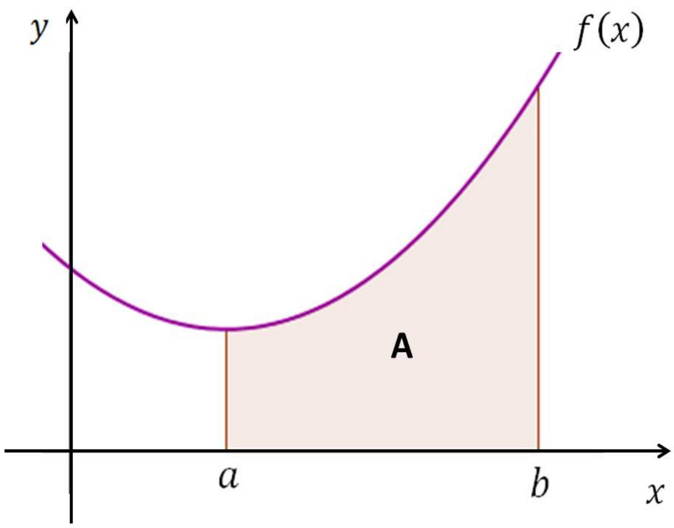
3.3.1 – Área

O Cálculo Integral vem de um passado onde os geômetras usavam o quadrado para calcular as áreas de figuras planas, pois essa era a figura mais simples para ser usada. Então a palavra ***quadratura*** passou a tornar-se sinônimo da determinação de áreas.

Com a necessidade de calcular a área de figuras planas cujos contornos não são segmentos de reta que surgiu a noção de integral.

Consideremos o problema de calcular a área A da região sob o gráfico da função $f: [a, b] \longrightarrow \mathcal{R}$, em que $f(x) \geq 0$ como o que mostra a Figura 26 a seguir.

Figura 26 – Cálculo de área

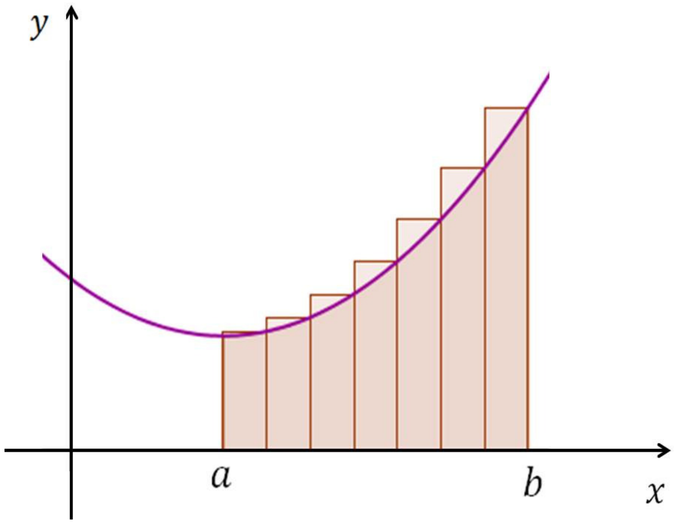


Admitindo conhecida a noção intuitiva de área de uma figura plana e, ainda, que a área de um retângulo de base b e altura h é $b.h$, vamos descrever um processo para determinar a área A.

Esse processo consiste em dividirmos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos suficientemente pequenos para que neles $f(x)$ possa ser considerada uma função constante com uma boa aproximação.

Em cada subintervalo podemos calcular, aproximadamente, a área sob o gráfico, calculando a área do pequeno retângulo que fica determinado quando supomos $f(x)$ constante; a área procurada será, aproximadamente, a soma das áreas destes retângulos.

Figura 27 – Divisão em subintervalos

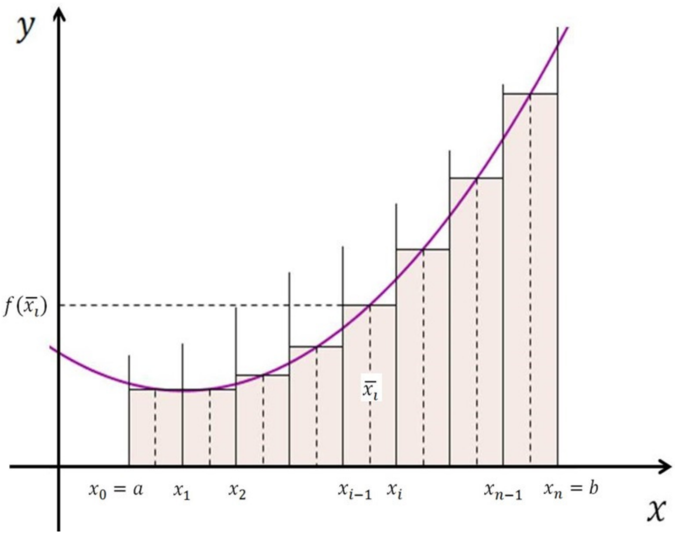


Descrevendo de forma mais precisa o procedimento, a divisão em subintervalos é feita intercalando-se os pontos $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ entre a e b, como segue:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Os n subintervalos em que [a, b] fica dividido tem comprimentos $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ com $i = 1, 2, \dots, n$. Escolhemos $\overline{x_i} \in [x_{i-1},\ x_i]$ e supondo f(x) constante e igual a $f(\overline{x_i})$ em $[x_{i-1},\ x_i], i = 1, 2, \dots, n$. Graficamente, temos:

Figura 28 – Divisão em subintervalos



A área A é aproximadamente a soma das áreas dos retângulos, e podemos escrever da seguinte maneira:

$$A \cong f(\overline{x_1})\Delta_1 x + f(\overline{x_2})\Delta_2 x + \cdots + f(\overline{x_i})\Delta_i x + \cdots + f(\overline{x_n})\Delta_n x, \tag{01}$$

ou seja,

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta_i x. \tag{02}$$

De um modo geral, se f é uma função contínua definida em $[a, b]$, o número do qual as somas $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta_i x$ se aproxima arbitrariamente à medida que todos os $\Delta_i x$ se tornam simultaneamente pequenos é chamado **integral de** f **em** $[a, b]$ e é representado por $\int_a^b f(x)dx$. Assim, podemos dizer que, sendo $\Delta_i x$ pequeno, com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, temos a igualdade aproximada:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta_i x$$

No caso da área A que estávamos calculando, podemos escrever:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

3.3.2–Integral Definida

Vamos agora estabelecer de um modo geral a noção de integral de uma função f definida em um intervalo $[a, b]$.

i) – Partição

Uma **partição** de $[a, b]$ é um conjunto

$\wp = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ com $x_i \in [a, b], i = 1, 2, 3, \ldots, n$ e

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

ii) – Norma

Chamamos de **norma** da partição $\wp$ o número μ, máximo do conjunto $\{\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_i x, \ldots, \Delta_n x\}$ em que $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.

iii) – Soma de Riemann

Sendo $\overline{x_i}$ escolhido arbitrariamente no intervalo $[x_{i-1},\ x_i], i = 1, 2, \ldots, n$, a soma $f(\overline{x_1})\Delta_1 x + f(\overline{x_2})\Delta_2 x + \cdots + f(\overline{x_i})\Delta_i x + \cdots + f(\overline{x_n})\Delta_n x$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta_i x$ se chama **soma de Riemann** de f em $[a, b]$ relativa à partição $\wp$ e à escolha feita dos $\overline{x_i}$.

iv) – Função Integrável

Sob algumas condições bem gerais, as somas de Riemann se aproximam arbitrariamente de um número fixo I, quando a norma μ da partição $\wp$ se torna cada vez menor, independentemente das escolhas dos $\overline{x_i}$. Quando isto acontece, dizemos que a função f é **integrável** em $[a, b]$ e I é a integral de f em $[a, b]$.

Precisamente, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ se existe um número I real, satisfazendo a seguinte condição:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que todas as partições $\wp$ com norma $\mu < \delta$ temos $|\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta_i x - I| < \varepsilon$, e qualquer que seja a escolha dos $\overline{x_i}$ em $[x_{i-1},\ x_i]$.

v) – Integral

Sendo f integrável em $[a, b]$, o número I é chamado **integral** de f em $[a, b]$ou **integral definida** de f em $[a, b]$e é representado por $\int_a^b f(x)dx$; resulta que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\mu < \delta \Rightarrow \left|\sum f(\overline{x_i})\Delta_i x - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

E assim, podemos estabelecer uma condição geral da integrabilidade.

Teorema

Se f é contínua em $[a, b]$ então é integrável em $[a, b]$

A demonstração deste teorema está além dos objetivos destas noções iniciais e pode ser encontrada no livro de Fundamentos de Cálculo da Coleção PROFMAT do autor Antonio Carlos Muniz Neto, 1ª edição, 2015, na página 219.

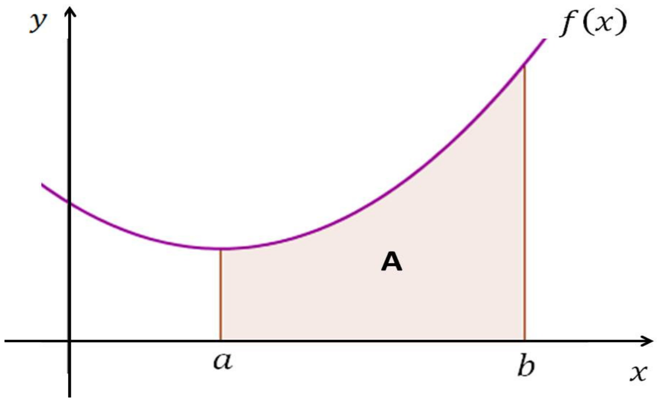
3.3.3 – O cálculo da Integral

Procuraremos agora um processo para calcular a integral de f em $[a, b]$ sem a necessidade de recorrermos à definição.

Consideremos f uma função contínua e não negativa em $[a, b]$. O número $\int_a^b f(x)dx$ representa a área A sob o gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Figura 29 – Cálculo de área



A escolha da letra para a variável independente pode ser feita de forma arbitraria sem prejuízo, assim:

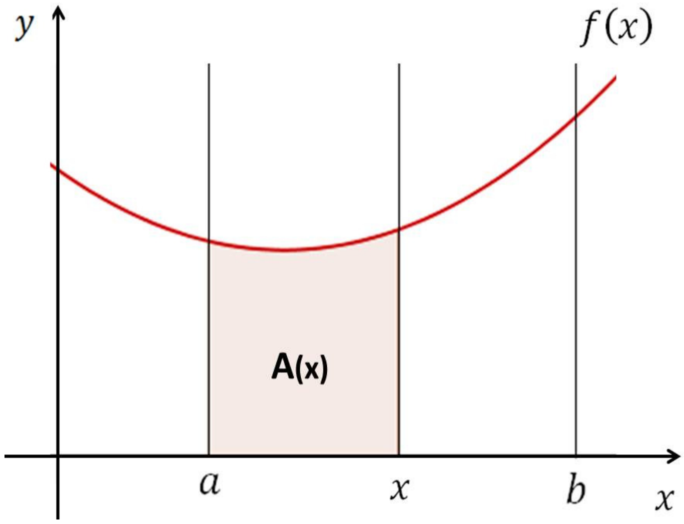
$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Chamaremos de $A(x)$ a função que cada$x$ associa a área sob o gráfico de f no intervalo $[a, x]$. Vide *Figura 30.*

Segue que:

$A(a) = 0, A(b) = \int_a^b f(x)dx$ e de um modo geral, $A(x) = \int_a^x f(t)dt$

Figura 30 – Cálculo da integral



Evitamos escrever $A(x) = \int_a^x f(x)dx$ para poder destacar que a variável x é um dos extremos do intervalo de integração.

Com as hipóteses já admitidas anteriormente, vamos mostrar que a derivada da função $A(x)$ é a função $f(x)$.

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. A função $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável em $[a, b]$ e $A(x) = f(x)$.

Demonstração

Seja $x \in [a, b]$ e $h > 0$ com $x + h \in [a, b]$. Sendo f contínua em $[a, b]$, ela o será em $[x, x + h]$, e portanto admite um ponto de máximo x_M e um ponto de mínimo x_m em $[x, x + h]$.

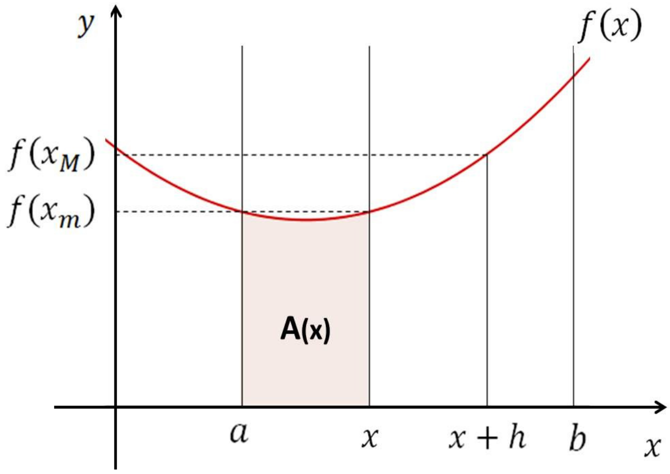
Raciocinando geometricamente, em termos de área, na *Figura 31*, temos:

$$f(x_m).h \leq A(x + h) - A(x) \leq f(x_M).h \qquad (01)$$

Logo,

$$f(x_m) \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq f(x_M) \qquad (02)$$

Figura 31 – Cálculo da integral



Quando h tende a zero, $f(x_m)$ e $f(x_M)$ se aproximam simultaneamente de $f(x)$ enquanto o quociente $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ se aproxima da derivada à direita de $A(x)$, isto é:

$$f(x) \leq A'(x^+) \leq f(x) \tag{01}$$

Resulta que

$$A'(x^+) = f(x) \tag{02}$$

Analogamente, sendo $h < 0$, considerando o intervalo $[x+h, x]$, temos:

$$f(x_m).(-h) \leq A(x+h) - A(x) \leq f(x_M).(-h) \tag{03}$$

Segue que:

$$f(x_m) \leq \frac{A(x)-A(x+h)}{-h} \leq f(x_M) \tag{04}$$

$$f(x_m) \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq f(x_M) \tag{05}$$

e como no caso anterior, quando h tende a zero, $f(x_m)$ e $f(x_M)$ se aproximam simultaneamente de $f(x)$ enquanto o quociente $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ se aproxima da derivada à esquerda de $A(x)$, isto é:

$$f(x) \leq A'(x^-) \leq f(x) \Rightarrow A'(x^-) = f(x) \tag{06}$$

Isso mostra que $A'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. Temos portanto como resultado

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x) \qquad (07)$$

SD – Nesse tópico iremos mostrar que a integral de uma função f, definida num intervalo real $[a, b]$ é igual a área determinada pelo gráfico da função e o eixo Ox nesse intervalo.

Vamos considerar a função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ e um intervalo $I = [2, 4]$ contido em seu domínio.

Inicialmente vamos calcular a integral dessa função definida em I:

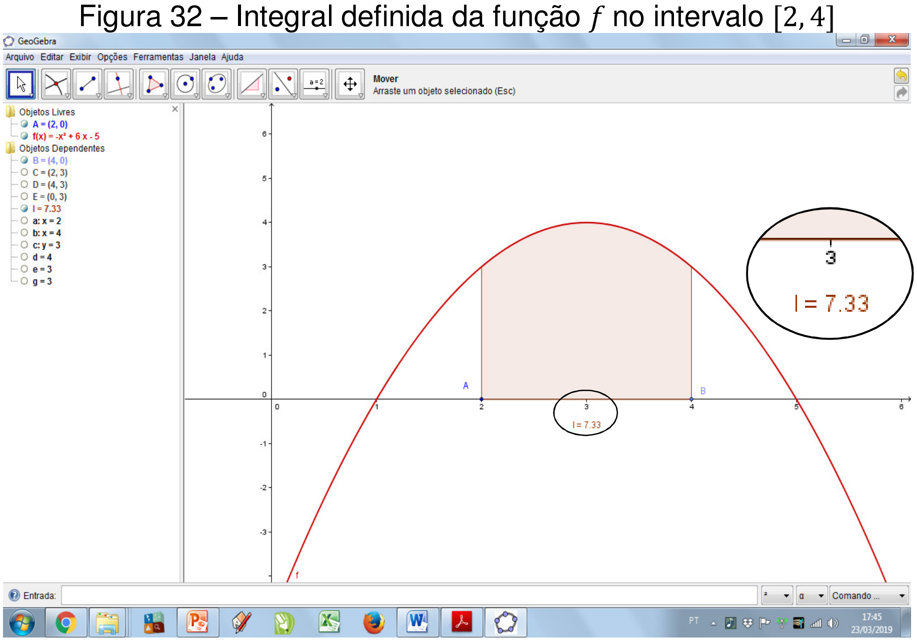
$$\int_2^4 (-x^2 + 6x - 5)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\Bigg|_2^4 = -\frac{4^3}{3} + 3.4^2 - 5.4 + \frac{2^3}{3} - 3.2^2 + 5.2 \Rightarrow$$

$$\int_2^4 (-x^2 + 6x - 5)dx = -\frac{64}{3} + 48 - 20 + \frac{8}{3} - 12 + 10 = \frac{22}{3} \approx 7{,}33$$

Para verificarmos essa aproximação geometricamente, construímos o gráfico da função f e limitamos o intervalo $[2, 4]$ de seu domínio criando os pontos $A(2, 0)$ e $B(4, 0)$.

Digitando na caixa de entrada a sequência Integral[f, x(A), x(B)] aparece automaticamente o valor da integral definida de f no intervalo citado juntamente com a equivalente área hachurada. Veja na *Figura 32* a seguir.

Figura 32 – Integral definida da função f no intervalo $[2, 4]$



Para mostrarmos que esse valor se aproxima da área hachurada seguiremos da seguinte forma. Voltamos à construção somente do gráfico da função e criamos um seletor n para determinarmos em quantos retângulos dividiremos esta área.

Introduzindo no campo de entrada o texto SomaInferior[f, x(A), x(B), n]podemos perceber que o programa divide a área em n retângulos internos à área como mostra a *Figura 33*, enquanto que, digitando o texto SomaSuperior[f, x(A), x(B), n]o programa divide a área em n retângulos superiores como mostra a *Figura 34*. Observe que o número de retângulos que o programa divide pode ser controlado deliberadamente pelo usuário bastando alterar o seletor n criado inicialmente.

Figura 33 – Detalhe da construção dos retângulos inferiores à área.

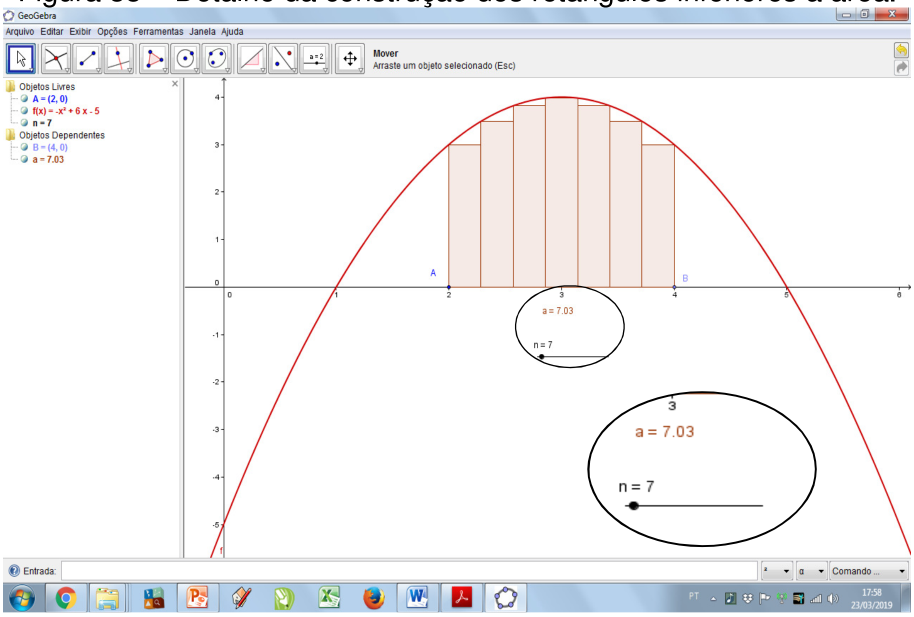
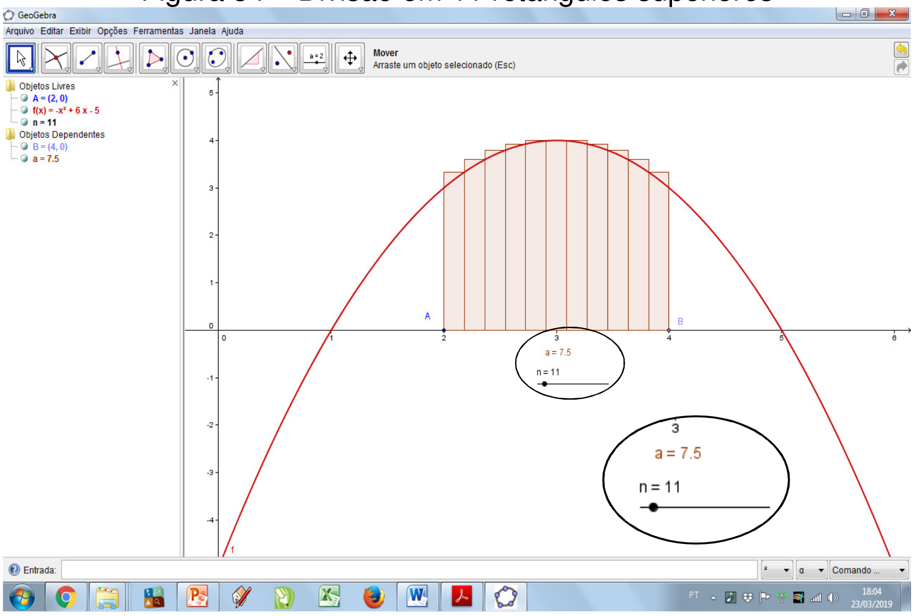


Figura 34 – Divisão em 11 retângulos superiores



Podemos observar na *Figura 33* que se escolhermos dividir a área em $n = 7$ retângulos sua soma inferior é $a = 7{,}03$, ou seja, menor que a integral calculada anteriormente. Já na *Figura 34* a opção escolhida para a quantidade de retângulos superiores foi $n = 11$ e sua soma é $a = 7{,}5$, valor maior que a integral.

Mostraremos agora o que acontece se dividirmos em retângulo inferiores e superiores e aumentarmos o valor do seletor n, ou seja se aumentarmos o número de retângulos a ser dividido a área.

Na *Figura 35* a seguir, a área foi dividida em $n = 20$ retângulos e observe que a soma inferior $Inf = 7{,}23$ e soma superior $Sup = 7{,}43$ começam a se aproximar do valor da integral. Já na *Figura 36* em que $n = 200$, temos que $Inf = 7{,}32$ e $Sup = 7{,}34$ já são valores muito próximos do valor da integral e esses valores se aproximam indefinidamente se n tende ao infinito.

Figura 35 – Somas superior e inferior quando $n = 20$

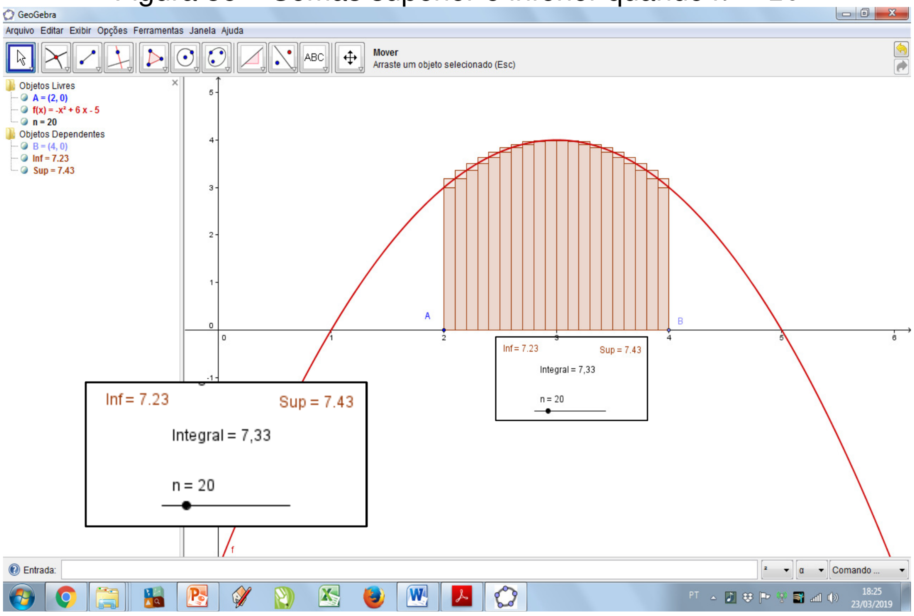
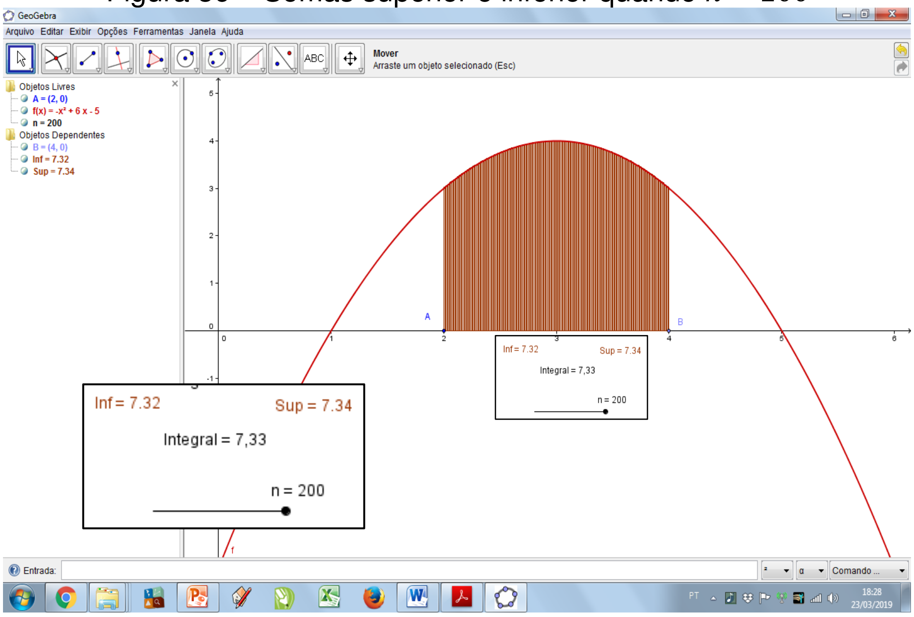


Figura 36 – Somas superior e inferior quando $n = 200$



3.3.4 – Propriedades da Integral

Como consequência das propriedades conhecidas e demonstradas anteriormente das derivadas, listaremos algumas propriedades operatórias importantes da integral sem a demonstração. São elas:

1ª Propriedade (Integral da soma)

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

1ª Propriedade (Integral do produto por escalar)

$$\int_a^b \left(k.f(x)\right)dx = k.\int_a^b f(x)dx,\ \ k \in \mathcal{R}^*$$

3ª Propriedade (Integração por partes)

$$\int_a^b v(x).u'(x)dx = u(x).v(x) - \int_a^b u(x).v'(x)dx$$

Os temas descritos deste capítulo são de total importância já que contém os conceitos e propriedades fundamentais do cálculo Diferencial e Integral. Para que a metodologia aplicada nesta pesquisa pudesse fundamentar as conclusões deste trabalho, os alunos escolhidos para participar da sequência didática bem como da resolução dos questionários (descritos nos apêndices) já tinham um conhecimento básico destes tópicos.

Capítulo 4

Metodologia

A proposta desta pesquisa foi aplicada a estudantes dos cursos de Computação e Engenharia Civil de uma Universidade Particular e de um Instituto da Rede Federal de ensino da cidade de Jacobina na Bahia. Foram convidados todos os aluno das duas turmas porém compareceram ao todo 20 alunos e alunas que já tinham cursado em suas instituições a disciplina Cálculo I.

Podemos classificar esta pesquisa, quanto á abordagem como qualitativa, quanto á natureza como aplicada e quanto aos objetivos como exploratória.

Segundo GERHARDT & SILVEIRA (2009, p. 31), a pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização.

Ainda de acordo com GERHARDT & SILVEIRA (2009, p. 35), a pesquisa aplicada tem como objetivo gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos.

A pesquisa exploratória, segundo GIL (2007), tem como objetivo, entre outros, construir hipóteses. A grande maioria dessas pesquisas envolve: (a) levantamento bibliográfico; (b) entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e (c) análise de exemplos que estimulem a compreensão.

Inicialmente houve uma apresentação dos conteúdos listados no plano de aula A, no Apêndice A, utilizando como recurso didático apenas o quadro branco e pincéis, mostrando os conceitos e as propriedades escritos no quadro e desenhando à mão livre os gráficos e as representações geométricas dos mesmos. Esta exposição durou 140 minutos e cada conceito e/ou propriedade exposta seguia de um exemplo e uma discussão a respeito da representação geométrica.

Segundo Gil (1999, p.128), questionário pode ser definido "como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc.".

Após a apresentação do conteúdo foi aplicado o questionário 01 constante no Apêndice C com um tempo limite de 140 minutos, questionário este que foi entregue por todos os alunos antes do vencimento do tempo determinado. Os questionários foram recolhidos e não foram entregues corrigidos nem insinuado a resposta de qualquer questão em algum momento.

Os questionários 01 e 02 aplicados em momentos diferentes, constam de perguntas relacionadas aos temas expostos durante as aulas com o objetivo de avaliar o conhecimento dos alunos envolvidos na pesquisa, referentes a alguns conceitos, propriedades e teoremas do Cálculo Diferencial e Integral.

Em outro momento, também por um período de 140 minutos, os mesmos conceitos e propriedades foram expostos novamente aos mesmos alunos, porém seguindo o plano de aula B constante no Apêndice B onde, desta vez, com o auxílio do recurso didático GeoGebra para construção dos gráficos e apresentação do comportamento geométrico dos conceitos e das propriedades inerentes ao conteúdo. Tratam-se de questionários distintos, mas com exigências de habilidades e competências parecidas, necessárias à resolução de cada questão.

Num segundo momento um questionário 02, com mesmo nível de exigência e cobrando as mesmas habilidades do primeiro, vide Apêndice D, foi aplicado por um período de tempo de 140 minutos.

Para que pudesse ser feita uma análise mais minuciosa e uma apreciação das respostas aos questionários aplicados antes e depois, e para que não houvesse uma exposição da identificação dos alunos, cada aluno foi identificado por um número de 1 a 20 a fim de, posteriormente, os questionários do mesmo aluno pudesse ser comparado.

E por fim um questionário subjetivo, contendo questões sobre o conhecimento, uso e habilidades com o software, foi destinado para que os alunos pudessem tecer comentários sobre o programa utilizado, falando da experiência vivenciada e da importância da inserção de um recurso computacional na apresentação dos conceitos e propriedades do Cálculo Diferencial e Integral como constante no Apêndice E.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Neste capítulo apresentaremos como a sequência didática foi desenvolvida em sala de aula bem como a aplicação dos questionários para fins de obtenção dos resultados que descreveremos a seguir.

Durante a exposição inicial dos conteúdos pude observar um clima de recordação, já que os alunos teciam comentários a respeito de terem visto certos conceitos e que estariam relembrando bem como de surpresa quando eram expostos algo que ou eles não recordavam ou que afirmavam nunca terem visto a exemplo de termos como teorema de Bolzano, teorema de Rôlle e de Lagrange.

Para efeito de correção das questões, estabelecemos o seguinte parâmetro:

- ✓ *Branco* – (B) Questão que por ventura o aluno não iniciou o procedimento de resolução ou que apenas reescreveu os dados da questão.
- ✓ *Errada* – (E) Questão que o aluno iniciou a resolução, mas que já inicia de forma equivocada mostrando um entendimento diferente do que é exigido no problema.
- ✓ *Incompleta* – (I) Aquela que o aluno iniciou corretamente, mas que não concluiu a questão ou que concluiu de forma errada mesmo tendo interpretado corretamente ou até mesmo tendo errado alguns cálculos.
- ✓ *Correta* – (C) O aluno demonstra total domínio sobre o problema e apresenta as habilidades necessárias para a resolução da questão, respondendo-a corretamente.

5.1 – Resultados obtidos sem o auxílio do GeoGebra

Apresentaremos nesta seção os resultados obtidos após a aplicação do primeiro questionário, Apêndice C, que ocorreu imediatamente depois da explanação dos conteúdos sem o auxílio do recurso GeoGebra.

Na *Figura 37* podemos visualizar os dados coletados na correção do primeiro questionário.

Figura 37 – Resultados após aplicação do primeiro questionário

Resultados da primeira aplicação

	IDENTIFICAÇÃO DOS ALUNOS																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
QUESTÃO 01	C	B	E	E	E	E	C	B	I	I	E	E	C	C	E	E	E	B	C	C
QUESTÃO 02	C	I	C	I	I	I	C	I	C	C	I	I	C	C	C	E	E	I	C	C
QUESTÃO 03	C	E	C	C	B	B	C	B	C	C	E	I	C	C	I	I	I	I	C	I
QUESTÃO 04	I	I	C	E	I	B	I	E	I	B	I	B	B	C	I	B	B	E	I	B
QUESTÃO 05	C	E	C	I	I	I	C	C	C	I	I	C	I	C	C	C	I	B	C	C
QUESTÃO 06	C	C	C	C	I	C	C	I	C	C	C	C	I	C	C	E	I	C	C	C
QUESTÃO 07	B	B	I	B	E	E	C	E	C	I	E	B	I	C	I	B	B	E	I	E
QUESTÃO 08	C	I	C	I	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I	I	C	C
QUESTÃO 09	I	E	I	E	E	I	C	C	C	E	E	I	I	I	C	B	E	E	I	E
QUESTÃO 10	C	I	I	E	B	B	C	C	C	I	E	C	I	C	C	E	E	I	I	I

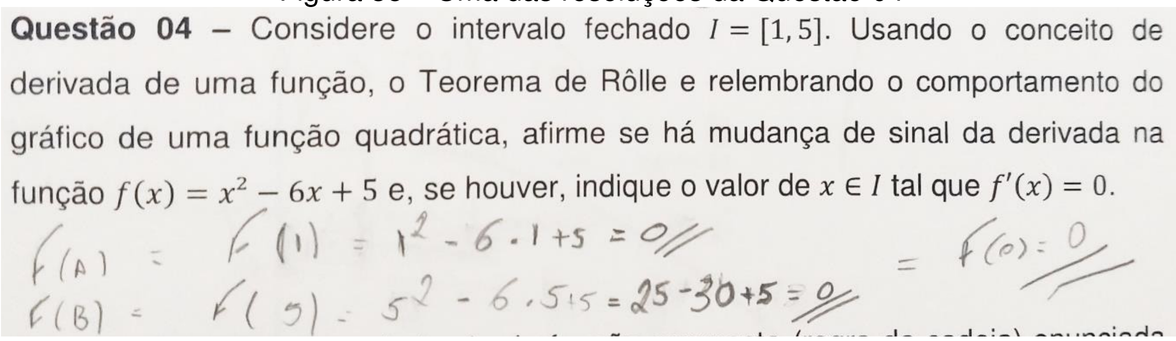
Analisando o quadro apresentado na Figura 37, é perceptível que os alunos sentiram alguma dificuldade na resolução de algumas questões e como podemos perceber com maior evidência nas questões 01, 04 e 07.

A questão 01 exige que o aluno tenha conhecimento da interpretação geométrica do conceito de limite e que demonstre domínio sobre quem são ε e δ bem como a relação de dependência entre essas duas variáveis. Obtivemos nesta questão um acerto de apenas 30% dos alunos envolvidos.

A questão 04, que cita o Teorema de Rôlle, traz a possibilidade de uma interpretação e resolução mesmo que o aluno não tenha conhecimento do enunciado do teorema já que, tendo conhecimento do conceito da derivada, é perfeitamente possível que este seja conjecturado analisando o gráfico da função no intervalo indicado. Mesmo assim os alunos sentiram dificuldade na resolução da questão apresentando um percentual de acerto de apenas 10%.

É interessante ressaltar que alguns alunos conseguiram verificar que há mudança de sinal da derivada, porém não conseguiram chegar ao valor $x \in I; f'(x) = 0$, como podemos perceber na *Figura 38* que segue.

Figura 38 – Uma das resoluções da Questão 04



Questão 04 – Considere o intervalo fechado $I = [1, 5]$. Usando o conceito de derivada de uma função, o Teorema de Rôlle e relembrando o comportamento do gráfico de uma função quadrática, afirme se há mudança de sinal da derivada na função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e, se houver, indique o valor de $x \in I$ tal que $f'(x) = 0$.

$f(A) = f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$ $= f(0) = 0$

$f(B) = f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$

Em relação à questão 07, a exigência era que o aluno soubesse o conceito geométrico da derivada de uma função num ponto de seu domínio, ou seja, que conseguisse associar esta derivada com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto. Vale salientar que apenas 15% dos alunos conseguiram fazer a questão por completo e que 30% deixaram a questão em branco.

Em contrapartida, os alunos demonstraram domínio dobre a resolução de algumas questões como podemos notar na Figura 40, como foi o caso das questões 06 e 08.

Para que um aluno conseguisse resolver a questão 06 bastava recordar que se existe $x \in I$ tal que $f'(x) = 0$ então a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é paralela ao eixo Ox. Diferente da 04, a questão 06 apresenta o gráfico da função, o que pode ter facilitado a resolução por parte do aluno. Ressaltamos que 75% dos alunos conseguiram resolver corretamente o problema.

O processo de resolução da questão 08 não exigia que o aluno tivesse conhecimento básico do Cálculo Diferencial nem mesmo que soubesse associar integral definida com o cálculo de área num intervalo, esse problema poderia ser resolvido usando princípios básicos da geometria plana e geometria analítica, como aproximação do cálculo de área através da área de retângulos representados no plano cartesiano. Podemos perceber que o nível de acerto foi relativamente grande já que a porcentagem de acertos chega a 80%.

A *Figura 39* e a *Figura 40* a seguir, apresentam como um aluno resolveu o problema 06 e como outro resolveu a questão 08 respectivamente.

Figura 39 – Uma das resoluções da Questão 06

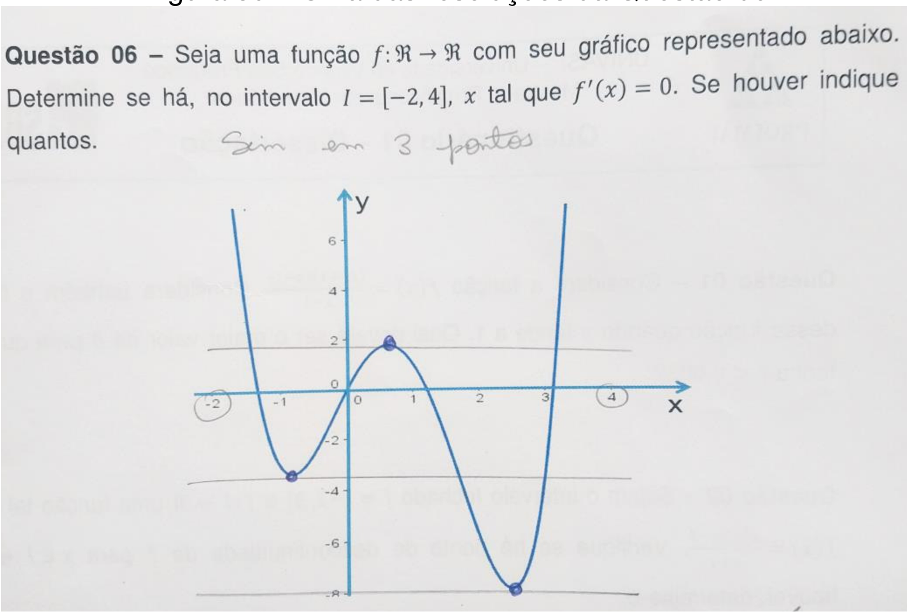
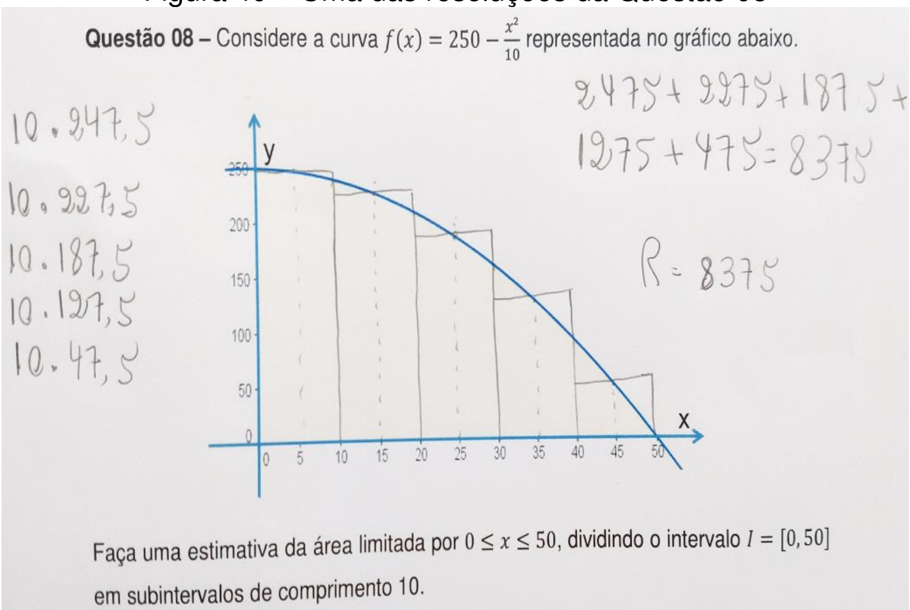
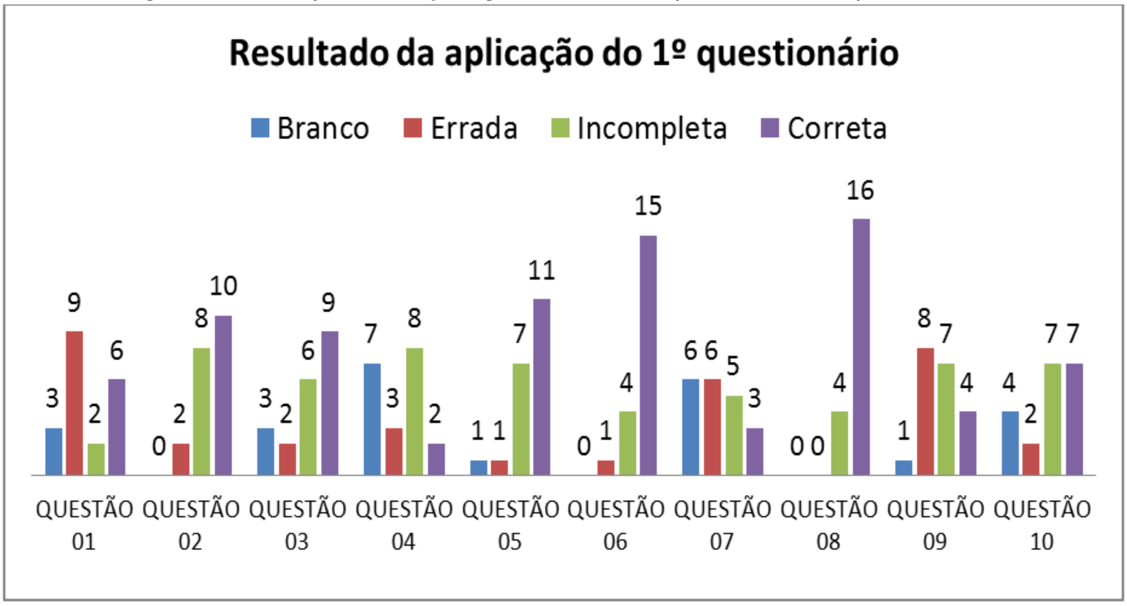


Figura 40 – Uma das resoluções da Questão 08



Para facilitar a visualização dos resultados e a comparação entre questões, representamos num gráfico o desempenho dos alunos obtido após aplicação do primeiro questionário como podemos ver na *Figura 41* a seguir.

Figura 41 – Representação gráfica das respostas do 1º questionário



Como o intuito neste momento é saber o nível de acerto e não qual aluno acertou ou deixou de acertar, não identificamos a numeração dos alunos na representação anterior.

Tomando como parâmetro apenas se a questão está ou não correta, apresentamos na *Figura 42* a seguir o resultado do desempenho dos alunos e a porcentagem de acertos e não acertos no gráfico da *Figura 43*.

Figura 42 – Classificação quanto a acerto ou não acerto

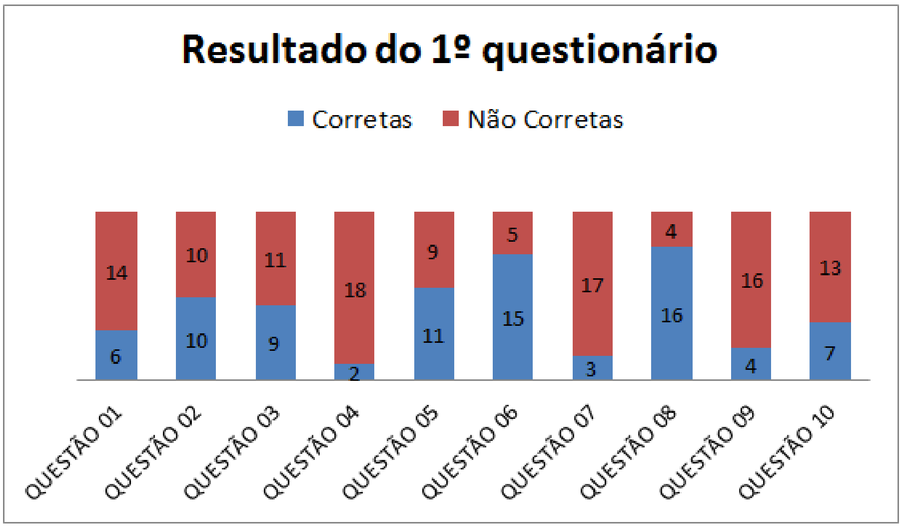
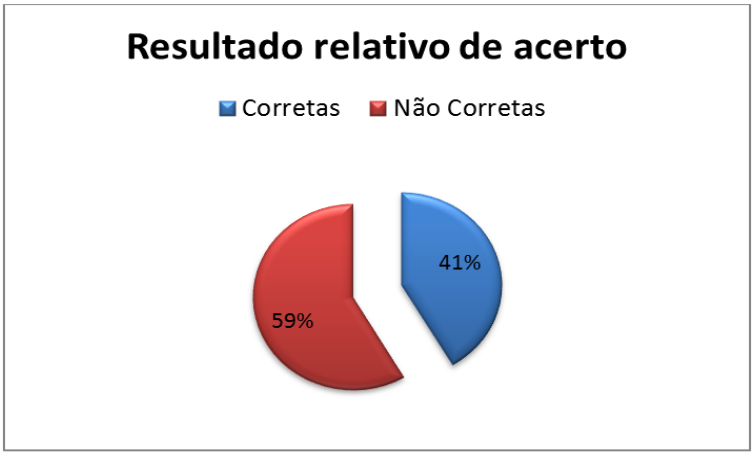


Figura 43 – Apresentação da porcentagem de acertos e não acertos



5.2 – Resultados obtidos com o auxílio do GeoGebra

Como discutido na metodologia, após a aplicação do primeiro questionário, num outro momento, retomamos a explanação dos conteúdos desta vez utilizando a ferramenta motivo deste trabalho, GeoGebra, na apresentação dos conceitos, das propriedades e da visualização dos teoremas bem como o comportamento geométrico dos itens descritos. Analisaremos agora os resultados obtidos através da correção do segundo questionário, Apêndice D, que foi aplicado logo após a exposição dos conteúdos.

Podemos visualizar na *Figura 44* os dados coletados na correção do segundo questionário.

Figura 44 – Resultados após aplicação do segundo questionário

Resultados da segunda aplicação

	IDENTIFICAÇÃO DOS ALUNOS																			
QUESTÕES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	C	C	C	I	E	E	C	I	C	C	E	I	C	C	I	E	I	E	C	C
2	C	C	C	I	C	I	C	I	C	C	I	C	C	C	C	E	C	I	C	C
3	C	C	C	C	E	E	C	I	C	C	E	C	C	C	I	C	I	C	C	I
4	C	C	C	E	I	I	I	E	I	B	I	I	B	C	C	B	E	E	I	E
5	C	E	C	I	C	I	C	C	C	I	C	C	I	C	C	C	C	I	C	C
6	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
7	I	C	C	C	I	E	C	E	C	C	E	E	C	C	C	I	E	C	C	C
8	C	C	C	I	C	I	C	C	C	I	C	C	C	C	C	C	I	C	C	C
9	I	E	I	B	E	I	C	C	C	E	E	C	I	C	C	B	E	E	C	E
10	C	I	I	E	B	B	C	C	C	I	E	C	C	C	C	E	E	I	C	I

Analisando os resultados projetados no quadro da Figura 44 podemos perceber que a quantidade de acertos das questões mais críticas da primeira análise melhorou, porém a questão 04 ainda continua com um resultado relativamente baixo apesar da quantidade de acertos ter subido para 25%. Mas é possível perceber que 2 dos alunos que tinham deixado a questão em branco no primeiro momento, já conseguiram resolver parte da questão neste segundo momento..

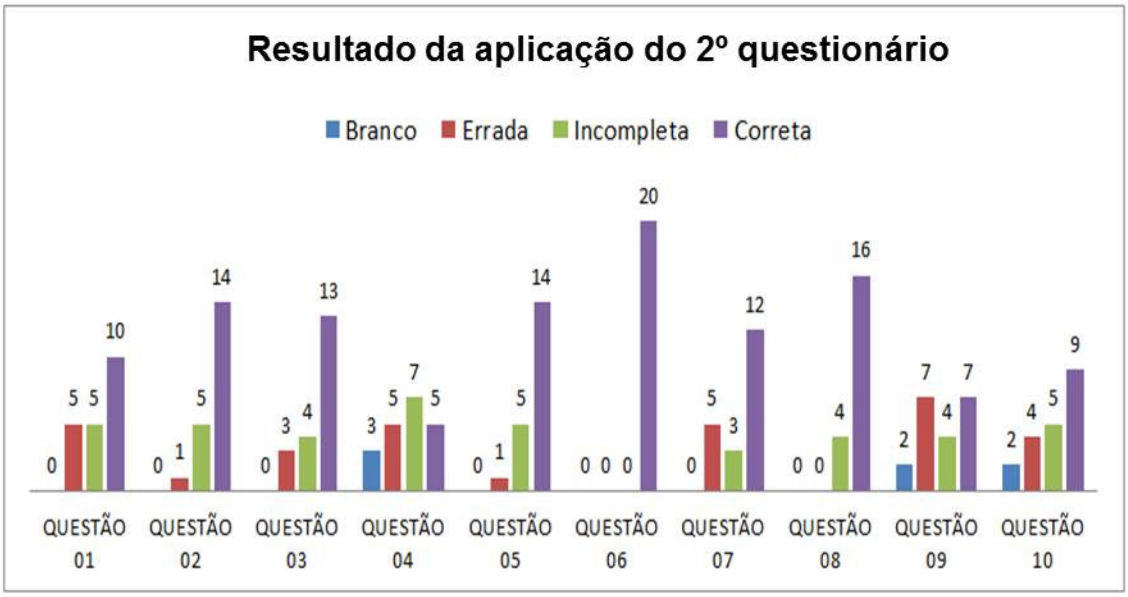
Em relação às questões 01 e 07 suas porcentagens de acerto que eram 30% e 15% respectivamente, passaram para 50% e 60% respectivamente, deixando transparecer que alguns conceitos de limite, como a compreensão da variação do valor de ε em função de δ, como também o entendimento de que a derivada de uma função num ponto é o coeficiente angular da reta tangente à curva naquele ponto foram melhor compreendidos pelos alunos. É interessante ressaltar que o aluno 02 que tinha deixado estas questões em branco no primeiro questionário, conseguiu resolver de forma correta as questões equivalentes na segunda aplicação e que, desta vez, nenhum dos alunos deixou a questão 07 em banco.

Podemos perceber também que, analisando a questão 06, após a exposição dos conceitos com o uso do recurso GeoGebra, os alunos alcançaram 100% de acerto, ou seja, conseguiram compreender o comportamento geométrico da derivada de uma função num ponto.

Quanto a questão 08 não há o que salientar, a quantidade de acertos foi a mesma para os dois momentos mesmo que tenha acontecido dos alunos 06 e 10 terem acertado a questão anteriormente e errado desta vez. Já em relação a questão 09 o nível de acertos subiu de 20% para 35%, apesar de não ter sido trabalhado em sala de aula os métodos de integração. Ou seja, os alunos que erraram inicialmente e depois acertaram, simplesmente entenderam que o cálculo de área é feito, neste caso, utilizando a integral definida.

Veremos na *Figura 45* a seguir, os resultados obtidos e a comparação entre questões, bem como o desempenho dos alunos após aplicação do segundo questionário.

Figura 45 – Representação gráfica das respostas do 2º questionário



Comparando o gráfico da *Figura 41* com o da *Figura 45* é possível perceber um aumento do número de acerto das questões de forma geral.

Considerando as questões apenas como correta ou não correta, apresentamos na *Figura 46* a seguir o resultado do desempenho dos alunos nesta segunda etapa de resolução de problemas bem como os valores relativos de acertos e não acertos como mostra a *Figura 47* a seguir.

Figura 46 – Classificação quanto a acerto ou não acerto

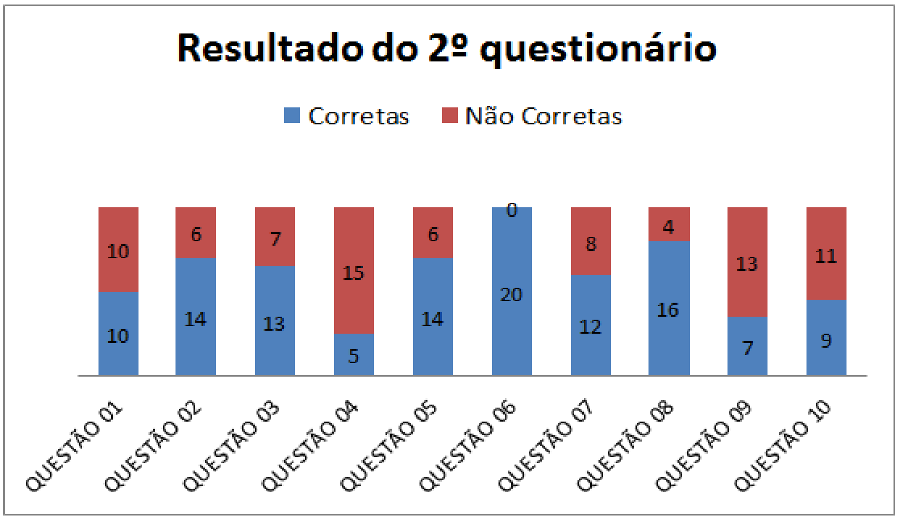


Figura 47 – Apresentação da porcentagem de acertos e não acertos

5.3 – Resultados do questionário subjetivo

Para finalizar a apresentação dos resultados obtidos através dos questionamentos feitos aos alunos envolvidos no processo, apresentaremos nesta seção recorte de algumas de suas respostas quanto ao perguntado no questionário subjetivo, objeto do Apêndice E.

É interessante enfatizar que dos alunos entrevistados todos conheciam o GeoGebra, alguns mais a fundo a ponto de já terem utilizado para realização de algumas tarefas, enquanto outros já tinham visto algum colega ou professor utilizando, mas que declaram não possuir habilidades para utilizar o programa.

Quando perguntado se já conhecia o GeoGebra o aluno 07 respondeu: “Sim, mas não possuo conhecimento para manusear o aplicativo”

Quando questionados se o conceito de derivada de uma função num ponto já tinha sido compreendido sem que tenham visto a explanação com o uso do programa, grande parte dos alunos responderam que não, outros responderam que tinham mais ou menos uma noção e outros que sim, ou seja, já tinha construído o conceito mesmo antes do uso do GeoGebra.

A maioria das respostas foram no sentido de que o uso do GeoGebra na apresentação de alguns dos conceitos, propriedades e teoremas do Cálculo Diferencial e Integral auxiliou na compreensão e entendimento. Por exemplo, o aluno 12 escreveu: “Ajudou sim e espero que continue sendo utilizado, principalmente como auxílio aos alunos para resolver as questões de forma mais compreensiva”.

Capítulo 6

Conclusões

Com a realização deste trabalho podemos inferir algumas afirmações a respeito do uso do *software* GeoGebra na apresentação de conceitos, propriedades e teoremas inerentes ao Cálculo Diferencial e Integral.

A análise feita através dos resultados obtidos com a realização de testes antes e depois do uso do programa são indícios de que seu uso, no sentido de dar dinâmica ao comportamento das funções, das definições e das propriedades, auxilia de forma eficaz na apresentação dos temas e na dinâmica dos conceitos.

Os resultados deste trabalho vão ao encontro das dificuldades relatadas por professores para tornar o processo ensino-aprendizagem de matemática mais atraente e dinâmico. De fato, o trabalho sugere uma ferramenta, um recurso, um instrumento que pode ser utilizado com o intuito de tornar possível esse dinamismo deixando as aulas mais interativas e atraentes.

Ressaltamos que este trabalho tem o desígnio de ser um adicional aos professores e alunos no que diz respeito à apresentação de conceitos, propriedades e teoremas relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral.

Ademais não consideramos este um trabalho acabado, definitivo e arrematador, mas sim uma fonte de investigação e inspiração para que os novos pesquisadores possam dar continuidade nessa área, descobrindo e mostrando outras formas do uso do GeoGebra, como de outros programas afins nem só na apresentação de Cálculo Diferencial e Integral como também de qualquer outro tema da matemática.

Referências

ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Ed. Edgar Blucher. 2006

BARBOSA, Marcos Antonio. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral**. Dissertação (Mestrado em Educação) PUCRS, Curitiba, 2004.

BARDI, Jason Socrates.**A Guerra do Cálculo** [tradução Aluizio Pestana da Costa] – Rio deJaneiro: Record, 2008.

BARDI, Jason Sócrates. **A Guerra do Cálculo**; tradução de Aluizio Pestana da Costa. 2º Ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2010.

BARON, M. E. & Bos, H. J. M. (1985). **Curso de história da matemática: origem e desenvolvimentodo cálculo**. Brasília: Ed. Universidade de Brasília.

BIOGRAFIA DE ISAAC NEWTON. 2018. Disponível em: http://www.biografiaisaacnewton.com.br/2013/12/Tangentes-Calculo-Integral-e-Diferencial.html. Acesso em: 02.10.2018

BITTENCOURT, P. M. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014, 65p. Dissertação de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática. Coleção "Tendências em Educação Matemática"**, 2a.ed., Editora Autêntica, 2005.

BOYER, C. B. (1949). **The History of thr Calculus and its Conceptual Development.** Nova Iorque: Dover Publications.

BRASIL Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio** - matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Matemática. Brasília: [s.n.], 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acesso em: 21/01/2020

BRASIL Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Brasília: [s.n.], 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 21/01/2020

CASTANHO, Maria Eugênia L. M. (Orgs). **O que há de novo no ensino superior. Do projeto pedagógico à prática transformadora**. Campinas, SP: Papirus, 2000, p.75-92.

CORRÊA, J. F., Santos, J. R. V. S., & Cyrino, M. C. C. T. **Métodos das Fluxões, Derivadas e Integrais: A Constituição e Difusão de um Conhecimento Matemático na Formação do Professor**.In: Brolezzi, A. C. & Abdounur, O. J. (Org.). I Seminário Paulista de História e Educação Matemática – SP, São Paulo: 2005. Anais... São Paulo: IME – USP, p. 414-424.

COSCARELLI, C. V. **O uso da informática como instrumento de ensino-aprendizagem**. Presença Pedagógica. Belo Horizonte, mar./abr., 1998, p.36-45.

CALIL, Alessandro M. **Caracterização da utilização das TICs pelos professores de matemática e diretrizes para ampliação do uso**. Minas Gerais: 2011. Disponível em: https://www.UFJF.br/mestradoedumat. Acesso em 25/07/2019

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FULINI, Márcio Antônio. **História do Cálculo Diferencial e Integral**. UFSJ – DEMAT. São João Del-Rei-MG: 2016. Disponível em: http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/86/MARCIO%20ANTONIO%20FULINI_11929_assignsubmission_file_TCC%20Final%2003.12.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 21/01/2020

GERHARDT, Tatiana Engel & SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de Pesquisa.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em 21/01/2020

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GIL, Antônio Carlos**. Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral** / Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado – 7. ed. – São Paulo: Atual, 2013.

JAPIASSU, Hilton. **Pedagogia da incerteza**. Rio de Janeiro: Imago, 1983

LOUIS, Leithold. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v. 1. 3. ed. São Paulo.. Harbra. 1994.

LOUREIRO LIMA, Gabriel. **O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934: Os cursos das Escolas Militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo**. São Paulo. 2008. Disponível em: https://www2.rc.unesp.br/eventos . Acesso em 19/07/2019

MELCHIORS, Angeline; SOARES, Maricélia. **História do Cálculo Diferencial e Integral**. 2013.

MIORIM, Maria A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Fundamentos do Cálculo** – Coleção PROFMAT, 15 – Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NÓBREGA, W. **Dificuldades de aprendizagem no ensino da matemática e o uso das novas tecnologias**. Monografia. Universidade Estadual da Paraíba. Paraíba: 2014. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/6292/1/PDF%20- Acesso em 20 de janeiro, 2020.

PAIVA, Vera Lucia M. O. **O uso da Tecnologia no Ensino de Línguas Estrangeiras: breve retrospectiva histórica**. 2008. Disponível em: www.veramenezes.com/techist.pdf. Acesso em 01/07/2019.

RIBEIRO, Helena Corrêa. **Cálculo : uso de recursos computacionais para inserir conceitos2018 de limites, derivadas e integrais no ensino médio**. Curitiba, 2018.

RIOS DE JESUS, Vitor. **A utilização do software GeoGebra no estudo dos pontos notáveis do triângulo**. Salvador: UFBA, 2018, p.13

SILVA, Clovis Pereira. **A Matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento**. São Leopoldo: Unisinos, 1999.

SILVA, Marciel Fernandes da. **Teorema fundamental do cálculo: origem, demonstração e aplicação** / **Marciel Fernandes da Silva**;.- Cajazeiras-PB, 2019.- Disponível em https://repositorio.ifpb.edu.br/bitstream/177683/879/1/TCC%20-%20TFC%20%20Origem%2C%20Demonstra%C3%A7%C3%A3o%20e%20Aplica%C3%A7%C3%A3o.%20Marciel%20Fernandes%20da%20Silva.pdf. Acesso em 21/02/2020

TEIXEIRA, Claudia Maria Francisca. **Inovar é Preciso: Concepções de inovação em Educação**, Santa Catarina: 2011. Disponível em: www.portal.pmf.sc.gov.br. Acesso em 06/07/2019.

TORRES, Terezinha I. M. & GIRAFFA, Lucia M. M - **O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE.** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V4.1, p.18-25, UFSC: 2009. Disponível em: file:///C:/Users/Fr%C3%A9dson/Downloads/13057-40283-1-PB%20(2).pdf. Acesso em: 21/01/2020

XX EREMAT – **Encontro Nacional de Estudantes de Matemática da Região Sul** – Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé-Rs, Brasil, 13 – 16. nov. 2014

Apêndices

Apêndice A – Plano de Aula 01

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PLANO DE AULA	
Área do conhecimento:	**MATEMÁTICA**
Unidade do conhecimento:	**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Facilitador:	**FRÉDSON VALOIS COUTINHO DA ROCHA**	**Carga horária:**	**4 H**

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO	
1 - Conceito de Limite	7 - Derivada de uma Constante
2 - Continuidade de uma Função	8 - Teorema de Rôlle
3 - Teorema de Bolzano	9 - Teorema de Fermat
4 - Teorema do Valor Intermediário	10 - Teorema de Lagrange - Valor Médio
5 - Derivada de uma Função num Ponto	11 - Um outro Teorema
6 - Derivada de uma Função	12 - Integral Definida de uma Função

OBJETIVO DA AULA

OBJETIVO GERAL

Promover o desenvolvimento de algumas habilidades de raciocínio relacionadas à interpretação do Cálculo Diferencial e Integral e a resoluções de problemas matemáticos ligados ao estudo de **Limites, Derivadas** e **Integral**.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Compreender o conceito do Limite de uma Função e sua continuidade;

Visualizar a demonstração dos teoremas de Bolzano e do Valor Intermediário bem como compreender os meandros de suas demonstrações;

Entender o conceito da Derivada de uma Função;

Familiarizar com os termos relacionados à demonstração dos Teoremas de Fermat e de Lagrange, compreendendo a linguagem matemática inerente ao estudo;

Compreender a definição da Integral de uma Função definida num intervalo;

AVALIAÇÃO

Aplicação do questionário 01 de forma individual

RECURSOS

Quadro branco e pincel marcador

Apêndice B – Plano de Aula 02

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PLANO DE AULA	
Área do conhecimento:	**MATEMÁTICA**
Unidade do conhecimento:	**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Facilitador:	**FRÉDSON VALOIS COUTINHO DA ROCHA**	**Carga horária:**	**4 H**

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO	
1 - Conceito de Limite	7 - Derivada de uma Constante
2 - Continuidade de uma Função	8 - Teorema de Rôlle
3 - Teorema de Bolzano	9 - Teorema de Fermat
4 - Teorema do Valor Intermediário	10 - Teorema de Lagrange - Valor Médio
5 - Derivada de uma Função num Ponto	11 - Um outro Teorema
6 - Derivada de uma Função	12 - Integral Definida de uma Função

OBJETIVO DA AULA

OBJETIVO GERAL

Promover o desenvolvimento de algumas habilidades de raciocínio relacionadas à interpretação do Cálculo Diferencial e Integral e a resoluções de problemas matemáticos ligados ao estudo de **Limites, Derivadas** e **Integral**.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Compreender o conceito do Limite de uma Função e sua continuidade;

Visualizar a demonstração dos teoremas de Bolzano e do Valor Intermediário bem como compreender os meandros de suas demonstrações;

Entender o conceito da Derivada de uma Função;

Familiarizar com os termos relacionados à demonstração dos Teoremas de Fermat e de Lagrange, compreendendo a linguagem matemática inerente ao estudo;

Compreender a definição da Integral de uma Função definida num intervalo;

AVALIAÇÃO

Aplicação do questionário 02 de forma individual

RECURSOS

Quadro branco, pincel marcador, notebook, data-show e o recurso GeoGebra

Apêndice C – Questionário 01

PROFMAT

UNIVASF – Universidade do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário 01 – Dissertação

SBM

Questão 01 – Considere a função $f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$. Considere também o limite dessa função quando x tende a 1. Qual deverá ser o maior valor de δ para que se tenha $\varepsilon < 0{,}003$?

Questão 02 – Sejam o intervalo fechado $I = [-2, 3]$ e $f: I \to \Re$ uma função tal que $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x+1}$. Verifique se há ponto de descontinuidade de f para $x \in I$ e se houver, determine-o.

Questão 03 – Considere a função $f: \Re \to \Re$ tal que $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3$. Usando o Teorema de Bolzano verifique se há zero dessa função no intervalo $I = [2, 5]$.

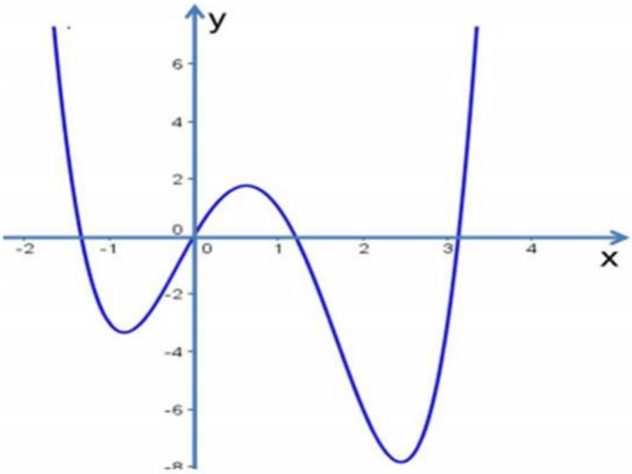
Questão 04 – Considere o intervalo fechado $I = [1, 5]$. Usando o conceito de derivada de uma função, o Teorema de Rôlle e relembrando o comportamento do gráfico de uma função quadrática, afirme se há mudança de sinal da derivada na função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e, se houver, indique o valor de $x \in I$ tal que $f'(x) = 0$.

Questão 05 – Usando a derivada da função composta (regra da cadeia) enunciada como

$$Se\ h(x) = g\big(f(x)\big)\ então\ h'(x) = g'\big(f(x)\big)\,.\,f'(x)$$

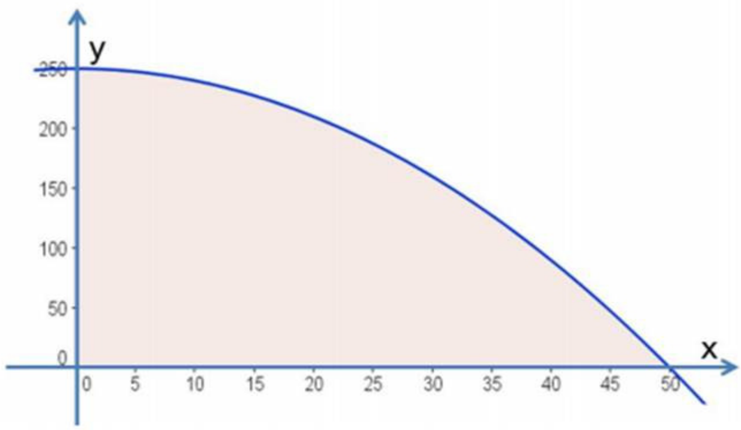
encontre a derivada da função $f(x) = sen(x^2)$.

Questão 06 – Seja uma função $f: \Re \to \Re$ com seu gráfico representado abaixo. Determine se há, no intervalo $I = [-2, 4]$, x tal que $f'(x) = 0$. Se houver indique quantos.



Questão 07 – Determine o coeficiente angular da reta tangente à curva de equação $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ no ponto $x = 2$.

Questão 08 – Considere a curva $f(x) = 250 - \frac{x^2}{10}$ representada no gráfico abaixo.



Faça uma estimativa da área limitada por $0 \leq x \leq 50$, dividindo o intervalo $I = [0, 50]$ em subintervalos de comprimento 10.

Questão 09 – Usando a Integral de Riemann definida no intervalo $I = [0, 50]$, encontre a área em destaque na questão anterior.

Questão 10 – Sabendo que a área compreendida entre duas funções $g(x) \geq f(x)$ num intervalo $I = [a, b]$ é dada por

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

determine a área delimitada pelas funções $g(x) = x$ e $f(x) = x^2 - 2x$ no intervalo $I = [a, b]$ em que a e b são as abscissas dos pontos em que $f(x) = g(x)$.

Apêndice D – Questionário 02

PROFMAT

UNIVASF – Universidade do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário 02 - Dissertação

SBM

Questão 01 – Seja a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$. Considere o limite desta função quando x tende a -1. Qual o maior valor que δ deve assumir para que se tenha $\varepsilon < 0{,}002$?

Questão 02 – Considere $f: I \to \Re$, a função $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{2x-1}$ e o intervalo $I = [0,2]$. Determine, se houver, ponto de descontinuidade da função f para $x \in I$.

Questão 03 – Considere a função $f: \Re \to \Re$, de modo que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Use o Teorema de Bolzano para verificar se há zero da função pertencente ao intervalo $I = [1, 3]$.

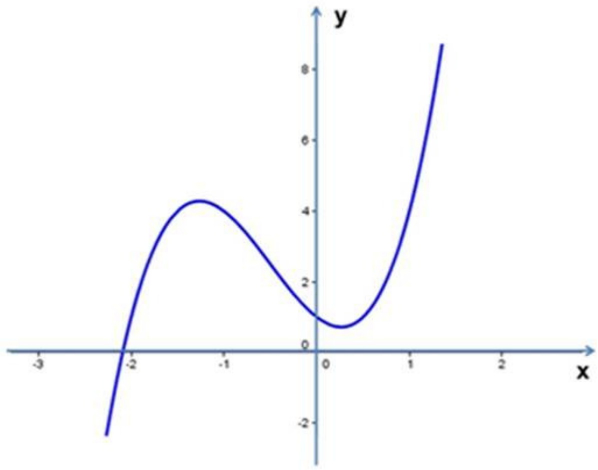
Questão 04 – Usando o conceito da derivada de uma função e o Teorema de Rôlle, afirme se há mudança de sinal da derivada da função $f(x) = x^2 + 2x - 1$ no intervalo $I = [-3, 2]$. Em caso positivo, indique o valor de $x \in I; f'(x) = 0$.

Questão 05 – Usando a "regra da cadeia" estudada anteriormente e enunciada como

$$Se\ h(x) = f(g(x))\ então\ h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

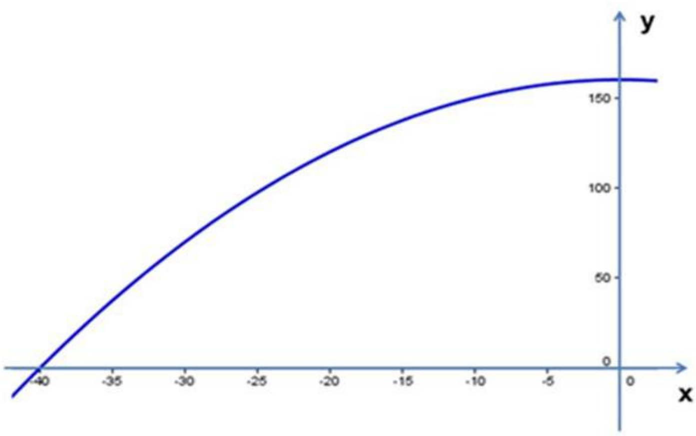
encontre a derivada da função $f(x) = \cos(x^2 - 1)$.

Questão 06 – Seja a função $f: \Re \to \Re$ de gráfico plotado a seguir. Considere ainda o intervalo $I = [-2\ 1]$ contido no domínio. Verifique se há, e caso haja indique quantos valores de $x \in I$ satisfazem a condição $f'(x) = 0$.



Questão 07 – Utilizando a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, encontre o coeficiente angular da reta tangente á curva de equação $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ no ponto $x = -1$.

Questão 08 – Considere a curva $f(x) = -\frac{x^2}{10} + 160$ com gráfico expresso a seguir.



Faça uma estimativa da área limitada no intervalo $I = [-40,0]$, dividindo-o em subintervalos de comprimento 10.

Questão 09 – Usando a Integral de Riemann encontre a área limitada no intervalo $I = [-40, 0]$, requisitada na questão anterior.

Questão 10 – Sabendo que a área compreendida entre duas funções $g(x) \geq f(x)$ num intervalo $I = [a, b]$ é dada por:

$$\int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)dx$$

determine a área delimitada pelas funções $g(x) = 2x$ e $f(x) = x^2 + x - 6$ no intervalo $I = [a, b]$ em que a e b são as abscissas dos pontos em que se tem $g(x) = f(x)$.

Apêndice E – Questionário Subjetivo

PROFMAT

UNIVASF – Universidade do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário Subjetivo

SBM

Questão 01 – Você já conhecia o GeoGebra?

Questão 02 – Para você o uso do GeoGebra auxilia na apresentação dos conteúdos?

Questão 03 – A utilização do software citado forneceu alguma informação nova em relação ao Cálculo Diferencial e Integral?

Questão 04 – Você acha que a análise de gráficos é melhor compreendida a partir do uso do GeoGebra?

Questão 05 – A interpretação geométrica do conceito de limite de uma função foi de alguma forma compreendida somente com a exposição tradicional, ou seja, sem o uso do software?

Questão 06 – A interpretação geométrica do conceito da derivada de uma função em um ponto foi de alguma forma compreendida somente com a exposição tradicional, ou seja, sem o uso do software?

Questão 07 – A interpretação geométrica do conceito da integral definida de uma função foi de alguma forma compreendida somente com a exposição tradicional, ou seja, sem o uso do software?

Questão 08 – De alguma forma o uso do software apresentou uma facilidade na compreensão da interpretação geométrica do conceito de limite?

Questão 09 – De alguma forma o uso do software apresentou uma facilidade na compreensão da interpretação geométrica do conceito de derivada de uma função num ponto?

Questão 10 – De alguma forma o uso do software apresentou uma facilidade na compreensão da interpretação geométrica do conceito de integral definida?

Questão 11 – Você aprovaria o uso do software GeoGebra como recurso didático na apresentação dos conceitos, propriedades e teoremas do Cálculo Diferencial e Integral?

Questão 12 – O uso do software GeoGebra auxiliou na compreensão dos teoremas que foram expostos durante as aulas?