Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

A aprendizagem das frações e seus obstáculos †

por

Thalita Thó Rodrigues Alves

sob orientação do

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

outubro/2018
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A aprendizagem das frações e seus obstáculos

por

Thalita Thó Rodrigues Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino da Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB (Membro Interno)

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza - UFRPE (Membro Externo)

outubro/2018

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela força espiritual para realização desse trabalho.

A minha família pelo apoio, motivação, pelo amor compartilhado nesse processo que é viver.

Aos meus pais, Edson Thó Rodrigues e Sandra de Fátima Paulino Thó Rodrigues, pela minha vida, acolhimento, apoio, conselhos e incentivo que foram imprescindíveis para a conclusão dessa etapa, e estarem sempre comigo.

Ao meu marido, Clayriston Sousa Alves, pela compreensão e incansável apoio ao longo da elaboração deste trabalho.

A minha filha Catarina, um presente de Deus na minha vida, que ainda dentro da barriga teve que acompanhar as aulas do PROFMAT e que tão cedo foi forçada a entender que tinha que esperar a mamãe terminar o estudo para poder brincar.

A todos os professores do PROFMAT pelos ensinamentos. Em especial, a meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos, pelo grande apoio nesta jornada.

Aos amigos e colegas que fiz durante o PROFMAT, posso dizer que sem vocês, não teria conseguido percorrer esta trajetória. Especialmente, a Joelson Lima da Silva, pelo apoio, pelo incentivo e pelas horas de estudo em conjunto, fundamentais para o nosso sucesso.

Dedicatória

A todos que direta ou indiretamente estiveram presentes nesta etapa da minha vida.

Resumo

Tudo leva a crer que as primeiras frações surgiram no Antigo Egito, por volta de 3000 anos a.C., e muito provavelmente foram as necessidades práticas que motivaram seu aparecimento. Desde então, o conceito de fração e suas representações evoluíram ao longo das civilizações até o que conhecemos atualmente como números fracionários, incluindo neste contexto a sua notação moderna. No atual Sistema Educacional Brasileiro, o estudo dos números fracionários inicia-se na primeira etapa do Ensino Fundamental, normalmente no 4° ano, e é quando se expande os números estudados. Neste momento, os alunos são levados a perceber que os naturais são insuficientes para resolver determinados problemas, aparecem assim os ditos "números quebrados". A primeira estratégia de ensino utilizada para introduzir o conceito de fração é o modelo conhecido como parte-todo e geralmente as situações-problema são apresentadas por figuras de um todo dividido (barra, bolo, chocolate, pizza, entre outros) em partes iguais, com algumas dessas pintadas. Em seguida, são abordadas outras ideias para frações, tais como: razão, quociente e número, porém nem sempre contempladas e trabalhadas de maneira a favorecer a construção do "megaconceito" de frações. Depois, são apresentadas as operações com frações, normalmente centradas em memorização de regras e procedimentos. Todavia, a grande maioria dos alunos apresenta dificuldades, mesmo estudando frações por vários anos consecutivos, uma vez que os "novos conhecimentos" acabam por confrontar conhecimentos adquiridos anteriormente e assim surgem os obstáculos didáticos. É por causa destes obstáculos que observamos erros recorrentes e não aleatórios, como por exemplo no ordenamento de frações dizer que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$, espelhando-se na lógica do ordenamento dos números naturais. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo analisar alguns obstáculos no processo de aprendizagem dos números racionais escritos na forma de fração.

Palavras-chave: Estratégias de Ensino. Fração. Número Fracionário. Obstáculos didáticos.

Abstract

All leads to believe that the first fractions arose in ancient Egypt, around 3000 BC, and most likely were the practical needs that motivated its appearance. Since then, the concept of fraction and its representations evolved throughout the civilizations to what we now know as fractional numbers, including in this context its modern notation. In the current Brazilian educational system, the study of fractional numbers begins in the first stage of elementary school, usually in the fourth year, and is when the figures are expanded. At this time, students are led to realize that the natural ones are insufficient to solve certain problems, thus appear the said "broken numbers". The first teaching strategy used to introduce the concept of fraction is the model known as part-all and generally the problem situations are presented by figures of a divided whole (bar, cake, chocolate, pizza, among others) in equal parts, With some of these painted. Then, other ideas are addressed for fractions, such as: ratio, quotient and number, but not always contemplated and worked in such a way as to favor the construction of the "Megaconceito"of fractions. Then, the operations with fractions are presented, usually centered on memorization of rules and procedures. However, the vast majority of students have difficulties, even studying fractions for several consecutive years, as the "new knowledge"ends up confronting previously acquired knowledge and thus the didactic obstacles arise. It is because of these obstacles that we observe recurring and non-random errors, for example in the ordering of fractions to say that $\frac{1}{3}$ is greater than $\frac{1}{2}$, mirroring in the logic of the sorting of natural numbers. In this context, the present work aims to analyze some obstacles in the learning process of the rational numbers written in the form of fraction.

Key words: Teaching strategies. Fraction. Fractional number. Teaching obstacles.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

As primeiras frações apareceram no Antigo Egito, por volta de 3000 a.C., eram em sua grande maioria frações unitárias, e surgiram aparentemente pela necessidade da representação de medidas que não davam para ser representadas com números inteiros nas unidades de medidas que eles dispunham.

Os babilônios foram os primeiros a atribuir uma notação racional a elas, executaram operações com frações mais facilmente que os egípcios e por conta disto chegaram a determinar uma aproximação para a $\sqrt{2}$ que foi a melhor até a Renascença.

Na Grécia Antiga, Diofanto de Alexandria, no século III d.C, estabeleceu uma escrita para as frações gregas, elas eram representadas colocando o "denominador" em cima do "numerador", essa notação era um prenúncio da utilizada na matemática moderna.

Os chineses, por sua vez, trabalharam principalmente com frações decimais, o que facilitou a operacionalização com as mesmas.

Mas, se deve aos hindus, a notação moderna dos números fracionários, que devido a seu sistema de base 10 e posicional, chegaram a simbolizar a fração com representação a/b. E aos árabes que aperfeiçoaram esta notação, inventando a famosa representação da barra horizontal $\frac{a}{b}$, utilizada até hoje.

Os números racionais, sejam fracionários ou decimais, aparecem corriqueiramente no nosso cotidiano. Desta maneira percebemos que os números racionais, e em destaque os números fracionários, são importantes para o entendimento de informações necessárias ao exercício da cidadania.

De acordo com Carvalho (2010), as frações estão associadas a mais de um tipo de aplicação, sendo necessário explorar quatro ideias durante o Ensino Fundamental, em atividades diversificadas, são elas: parte-todo, razão, quociente e número.

Normalmente, é comum, que os professores iniciem o ensino das frações através do modelo parte-todo e posteriormente são introduzidas outras aplicações buscando o aprimoramento do conceito de fração, sem necessariamente ser apresentado aos alunos este tipo de classificação. Contudo, nem sempre estas aplicações são trabalhadas pelos professores como deveriam e grandes lacunas na aprendizagem podem surgir devido às falhas no ensino.

Apesar das frações serem temidas por muitos alunos e até mesmo professores, vale ressaltar que o bom entendimento de seu conceito nas séries iniciais do Ensino Fundamental permitirá que em estágios posteriores da escolaridade sejam melhor compreendidos outros conhecimentos.

Depois da conceituação é habitual que o professor prossiga o conteúdo de frações da seguinte maneira: comparação de frações e ordenamento, equivalência e simplificação, e por último as operações com frações, normalmente centradas em memorização de regras e procedimentos (CARVALHO, 2010).

Observa-se no ambiente escolar que o conhecimento adquirido pelo alunos, nos anos que passam estudando este conteúdo, se reduz na maioria das vezes à memorização de um conjunto de regras e algoritmos. De modo que alguns até podem resolver problemas envolvendo frações, mas não conseguem compreender aquilo que estão fazendo. Todavia, a grande maioria apresenta dificuldades, mesmo estudando frações por vários anos consecutivos.

As dificuldades no ato de ensinar geram barreiras na aprendizagem do aluno, sendo uma possível explicação para isto o fato de que a aprendizagem destes "novos números" pressupõe rupturas de ideias construídas nos naturais. Surgem assim os chamados obstáculos didáticos.

Os obstáculos didáticos são o reflexo dos obstáculos epistemológicos em sala de aula. Bachelard definiu o obstáculo epistemológico como sendo uma dificuldade de transpor conhecimentos anteriores, ou seja, a evolução do conhecimento esbarra em concepções "cristalizadas pelo tempo", que acabam por impor uma resistência na instalações de novas concepções (PAIS, 2015).

O presente trabalho tem como objetivo geral analisar alguns obstáculos no processo de aprendizagem dos números racionais escritos na forma de fração. E, como objetivos específicos:

- Realizar um histórico do surgimento de frações.

- Discorrer sobre as estratégias utilizadas para o ensino da fração e suas relações com as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

- Abordar alguns obstáculos enfrentados pelo aluno na construção do conceito de fração e na operacionalização com frações.

No Primeiro Capítulo, intitulado "Histórico sobre fração", discorremos sobre os sistemas de numeração, e em especial sobre as representações dos números fracionários nas civilizações antigas, e como surgiu a representação que utilizamos atualmente.

O Segundo Capítulo tem como título "Estratégias de ensino dos números fracionários", neste apresentamos aplicações utilizadas no ensino das frações. As estratégias abordadas foram: parte-todo de grandezas contínuas e discretas, razão, quociente e representação numérica.

No Terceiro Capítulo elencamos os principais obstáculos didáticos enfrentados pelos alunos na aprendizagem do conceito e das operações com frações, discorrendo sobre as razões que levam a estes obstáculos e formas de solucioná-los.

E, finalmente, encerramos com as "Considerações Finais", destacando os aspectos considerados relevantes de todo o trabalho.

Capítulo 1

Histórico sobre frações

Quando, como e onde começou a Matemática? Segundo Roque (2012), essa pergunta é difícil de ser respondida, mas normalmente associa-se o surgimento da matemática à história dos números. Comumente, o exemplo dado para o surgimento dos números é o de pastores de ovelhas que para controlar o rebanho teriam associado cada animal a uma pedra, e em seguida, em vez de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas escritas na argila, e essas marcas estariam na origem da representação dos números. Contudo a autora ressalta que essa versão não pode ser comprovada por falta de evidências históricas.

Se a origem dos números naturais é tão antiga quanto a origem da matemática, já não podemos dizer o mesmo dos números racionais na forma de fração. De acordo com Boyer (1974) as frações surgiram mais tardiamente, uma vez que não há relatos de sua utilização por tribos primitivas, sugerindo que os mesmos não tinham nenhuma necessidade em usar frações.

Neste capítulo faremos uma explanação acerca da origem dos números fracionários nas civilizações antigas até o surgimento da representação atual de fração, buscando compreender o contexto de seu surgimento. Para melhor entendimento da representação fracionária iremos abordar sucintamente os sistemas de numeração dessas civilizações.

1.1 Frações no Egito

Os homens da Idade da Pedra não utilizavam frações, mas durante a Idade do Bronze com aparecimento de culturas mais desenvolvidas surgiu a necessidade do conceito de fração e de notações para representá-las. Uma dessas culturas é a egípcia, considerada por alguns historiadores muito boa na arte de contar e medir. Nesse sentido, tudo leva a crer que com os egípcios surgiram as primeiras frações, 3000 anos a.C, e aparentemente foi a necessidade prática que serviu de estímulo para seu aparecimento (BOYER, 1974).

De acordo com Roque (2012), a matemática no antigo Egito estava associada principalmente as necessidades de administração da sociedade. A autora menciona que:

> A quantificação e o registro de bens levaram ao desenvolvimento de sistemas de medida, empregados e aperfeiçoados pelos escribas, ou seja, pelos responsáveis pela administração da sociedade. Estes profissionais eram importantes para assegurar a coleta e a distribuição dos insumos disponíveis, mas também pela formação de novos escribas (ROQUE, 2012, p.38).

Desta maneira, as frações teriam surgido quando o faraó Sesótris repartiu as terras nas margens do Nilo para os seus habitantes de maneira igualitária, uma vez que essas terras eram muito férteis, em troca da partilha deveria ser pago um tributo todos os anos. Para que não saíssem prejudicados pela cheias do Nilo, sempre que as águas ocupavam parte das terras, o proprietário poderia reclamar ao Faraó e este mandava que as delimitações do terreno fossem novamente medidas e o proprietário pagava o tributo proporcional ao que restara (GARBI, 2010).

Os "estiradores de cordas" eram as pessoas designadas pelo faraó para realizar as medições de terras, sendo a unidade de medida empregada o cúbito ou côvado, que equivalia a distância da ponta do dedo médio até cotovelo do faraó (aproximadamente 45 cm). É evidente que, por mais adequada que fosse a unidade de medida utilizada, dificilmente apareceriam apenas números inteiros, e a partir do momento que os encarregados desse monarca perceberam esse fato, foram dados os primeiros passos para o desenvolvimento dos números fracionários. E então, essas terras passaram a ser medidas com cordas marcadas também com partes da unidade considerada.

Os indícios da utilização de frações no Antigo Egito chegaram até os dias de hoje através de alguns documentos de cunho matemático, entre esses o documento de maior importância o Papiro de Rhind. Segundo Eves (2011), o Papiro de Rhind (escrito por volta de 1650 a.C) é um dos primeiros documentos históricos de caráter matemático que se tem notícia, e pode ser definido como um texto matemático, formatado como manual prático, contendo 85 questões resolvidas copiadas em escrita hierática por Ahmes de um trabalho 200 anos anterior a transcrição, contendo operações de adição, multiplicação e divisão, e também frações egípcias.

Os egípcios utilizavam duas formas de escrita, a hieroglífica e a hierática, e para cada estilo de escrita desenvolveram um sistema de numeração, mas independente do tipo de escrita o sistema egípcio não era posicional, e o número que se queria representar era o resultado da soma dos valores de cada símbolo utilizado, independente da ordem que apareciam.

A escrita hieroglífica era comum em textos monumentais que ornavam templos e túmulos, remonta a cerca do ano 3400 a.C.. No sistema de numeração em hieróglifo, o número 1 era representado por uma barra vertical e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras. Em seguida, existiam representações para cada uma das primeiras potências de 10 até 10^6 (1 milhão), ou seja, era decimal. Desta forma, o número dez é uma alça; cem, uma espiral; mil, a flor de lótus; dez mil, um dedo; cem mil, um sapo e um milhão, um deus com as mãos levantadas (Ver Figura 1.1). O sistema de numeração em hieróglifo era um sistema de agrupamento simples (EVES, 2011).

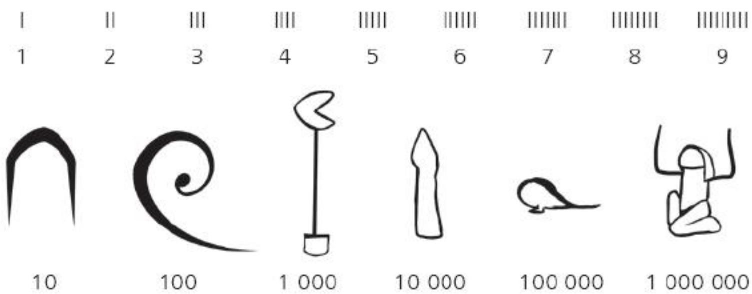


Figura 1.1: Sistema de numeração hieroglífica
Fonte: Roque, 2012.

Embora os hieróglifos normalmente fossem utilizados para escrever em pedras, algumas vezes eram usados em outros materiais, deste modo para escrever em papiros, madeira e cerâmica os egípcios desenvolveram uma forma de escrita mais rápida (EVES, 2011). A escrita hierática era uma espécie de escrita cursiva, e muito empregada em papiros para registrar os acontecimentos da vida cotidiana, como documentos administrativos e jurídicos, cartas, testamentos e inclusive os textos matemáticos.

O sistema de numeração em hierático era uma "simplificação" do sistema hieróglifo, uma vez que acrescentou-se novos signos para representar os grupos de símbolos iguais. Assim, havia nove símbolos para as unidades, nove para as dezenas, nove para as centenas e assim por diante (Ver Figura 1.2). Contudo, diferentemente do hieróglifo, o sistema de numeração hierático não pertence ao tipo de sistema de agrupamento simples (EVES, 2011).

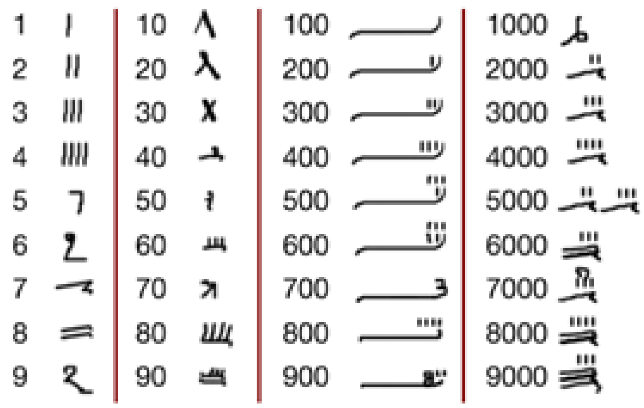


Figura 1.2: Sistema de numeração hierática
Fonte: Adaptado da página "Matemáticas Modernas".

Assim, o sistema hierático permitiu uma economia de símbolos nas representações numéricas, como por exemplo o número 694, que seria representado por 19 símbolos (seis espirais, nove alças e quatro barras verticais) na notação hieroglífica, demandava apenas 3 símbolos na notação hierática. Porém, demandava a memorização de mais símbolos, e que não tinham nada haver com os símbolos do outro sistema.

E quando as frações apareceram foram criados mais símbolos para representá-las. Existiam então dois tipos de representação para as frações, as que apareciam com maior frequência na matemática egípcia recebiam símbolos próprios, como $\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{3}$ (Ver Figura 1.3), e as demais, eram escritas com o sinal oval acima do que chamamos atualmente de denominador, ou seja, para representar uma fração, bastava escrever um número inteiro (em hieróglifo) com o referido sinal acima desse número, esse tipo de fração corresponde as frações que conhecemos como unitárias (IFRAH, 1997).

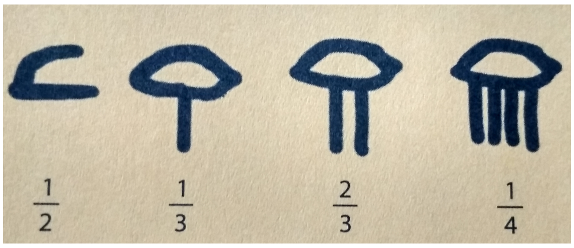


Figura 1.3: Representação das frações egípcias com símbolos próprios
Fonte: Bigode, 2017.

Contudo, o símbolo oval utilizado acima do número não possuía para eles o sentido de numerador, uma vez que na designação egípcia essa representação tinha um sentido ordinal, ou seja, as frações egípcias expressavam uma distribuição em n partes iguais, então $\frac{1}{n}$ seria o resultado dessa distribuição (ROQUE, 2012).

Outra notação para frações foi utilizada no Império Antigo (2700 - 2200 a.C.) para representar frações binárias ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,$\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$) que eram obtidas pela sucessão de divisões por 2. Esses símbolos usavam partes do hieróglifo olho de "Hórus" ou olho de "Wadjet", de modo que cada fragmento do olho representava umas das frações, conforme apresentado na Figura 1.4 (STEWART, 2014).

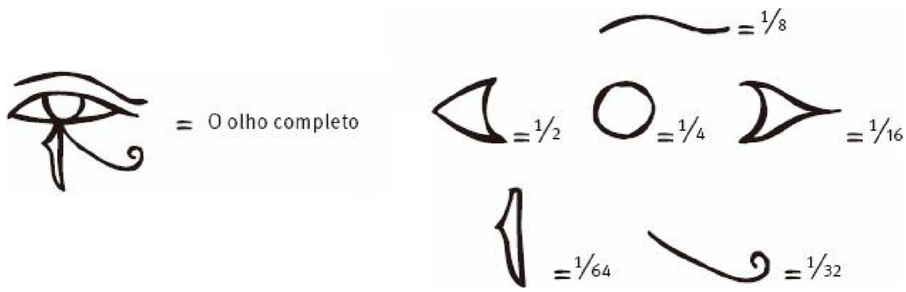


Figura 1.4: Olho de Hórus
Fonte: Stewart, 2014.

Assim, com exceção das frações $\frac{2}{3}$, os egípcios utilizavam apenas frações na forma

$\frac{1}{n}$. Porém ninguém sabe ao certo a razão que levou os egípcios a utilizar somente este tipo de frações, mas de acordo com Santos, Neto e Silva (2008) esta prática perdurou na bacia mediterrânea por dois milênios.

Para Roque (2012), o sentido dessa "limitação" seria a forma que os egípcios executavam as operações de divisão, desta maneira as frações que eles dispunham é consistente com o conjunto de procedimentos que eles empregavam.

No entanto, é incorreto afirmar que os egípcios não possuíam frações, que, na noção moderna, seriam escritas como $\frac{m}{n}$, uma vez que essas frações aparecem nos documentos antigos, porém eram representadas como somas de frações unitárias distintas (MACHADO, 2013).

Por exemplo, a terceira questão do Papiro de Rhind pede para dividir 6 pães por 10 homens. A resposta atual desse problema seria $\frac{6}{10}$ ou $\frac{3}{5}$, mas o escriba dá a resposta $\frac{1}{2}\ \frac{1}{10}$ (isto é, $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$). De acordo com Santos, Neto e Silva (2008), em termos práticos, esta solução é melhor, pois basta repartir cada um de cinco pães ao meio e o que sobra em dez partes iguais e distribuir pelos dez homens. Desta forma, eles representavam a fração $\frac{3}{5}$ como $\frac{1}{2}\ \frac{1}{10}$.

Quando os egípcios necessitavam realizar operações de multiplicação e divisão envolvendo frações essas eram feitas da mesma forma que às operações correspondentes com números inteiros, ou seja, aplicando sequências de duplicações e divisões por 2. Porém, nem sempre essas operações eram fáceis de serem executadas, principalmente quando o "denominador" era ímpar, e para solucionar essas operações os egípcios recorriam a ajuda de tabelas de cálculo, como a tabela de $\frac{2}{n}$ com n ímpar de 5 a 101 encontrada no Papiro de Rhind, assim esse cálculo "difícil" era realizado apenas uma vez, e sempre que fosse necessário eles consultavam as tabelas (ROQUE, 2012).

Se por um lado os cálculos com frações poderiam exigir um grau de dificuldade maior do que no nosso sistema, eles possuíam uma vantagem na comparação de frações. De fato se tivermos frações de denominadores diferentes, primeiro precisamos igualar os denominadores e somente depois fazer a comparação, já no sistema egípcio essa comparação poderia ser realizada de maneira direta, já que as frações egípcias eram representadas por somas de frações unitárias (ROQUE, 2012).

Por exemplo, para dizer quem é maior, $\frac{4}{5}$ ou $\frac{3}{4}$, temos que determinar frações equivalentes e de mesmo denominador, sendo uma possível solução, respectivamente, as frações $\frac{16}{20}$ e $\frac{15}{20}$, e assim concluímos que $\frac{4}{5}$ é a fração maior. Para os egípcios a solução é obvia, uma vez que a fração $\frac{4}{5}$ era representada por $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{20}$ e a fração $\frac{3}{4}$ era representada por $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$. Além de saber que $\frac{4}{5}$ é maior que $\frac{3}{4}$, os egípcios sabiam ainda que $\frac{4}{5}$ é um vinte avos maior que $\frac{3}{4}$.

1.2 Frações na Mesopotâmia

Considerada o berço da civilização, a Mesopotâmia, que quer dizer em grego "entre rios", é a denominação dada a região geográfica entre os rios Tigre e Eufrates no período do ano 3500 a.C. até o começo da era cristã, no que hoje corresponde ao Iraque e regiões adjacentes da Síria, Turquia e Irã (MOL, 2013).

Vários foram os povos que viveram nessa região, dentre eles os sumérios e os acadianos que foram hegemônicos até o segundo milênio da Era Comum. Segundo Mol (2013), o maior legado do período sumério foi o desenvolvimento, no quarto milênio a.E.C, da escrita cuneiforme, a forma de comunicação escrita mais antiga da humanidade, assim denominada por ser composta de símbolos em forma de cunha.

Depois dos sumérios, a região foi dominada por um império cujo centro era a cidade da Babilônia, no período de 2000 a.C a 600 a.C., os Semitas, que são conhecidos como "antigos babilônicos" (ROQUE, 2012; MOL, 2013).

Neste ponto, iremos focar apenas a "matemática babilônica", por se tratar provavelmente do período que ocorreu a padronização do sistema de numeração na região e o aparecimento das frações.

Os registros matemáticos, revelam que como no Egito, a matemática babilônica era quase que exclusivamente desenvolvida por questões práticas. Como menciona Mol (2013):

> Os babilônicos desenvolveram um extenso conhecimento de cálculos e medidas, que se aplicava, sobretudo, a problemas de natureza econômica e comercial: câmbio de moedas, troca de mercadorias, taxas de juros simples e compostos, cálculos de impostos e problemas de divisão de colheitas (MOL, 2013, p.17).

Assim, podemos perceber que tanto os babilônicos quanto os egípcios efetuaram cálculos sobre coisas que podiam ser medidas (grandezas), sendo as atividades cotidianas a motivação do desenvolvimento e aprimoramento da matemática.

Para entender como surgiu as frações e a sua representação na matemática babilônica faz-se necessário primeiramente conhecer como era o sistema de numeração utilizado por eles.

O sistema de numeração babilônico combinava um sistema sexagesimal e decimal, ou seja, as bases 60 e 10, com um princípio de posição, desta forma os dígitos colocados mais à esquerda representavam valores maiores. O símbolo representava uma unidade (na base 60), enquanto o símbolo era utilizado para o número dez. As combinações desses dois símbolos eram usadas para gerar os números de 1 até 59, conforme mostrado na Figura 1.5.

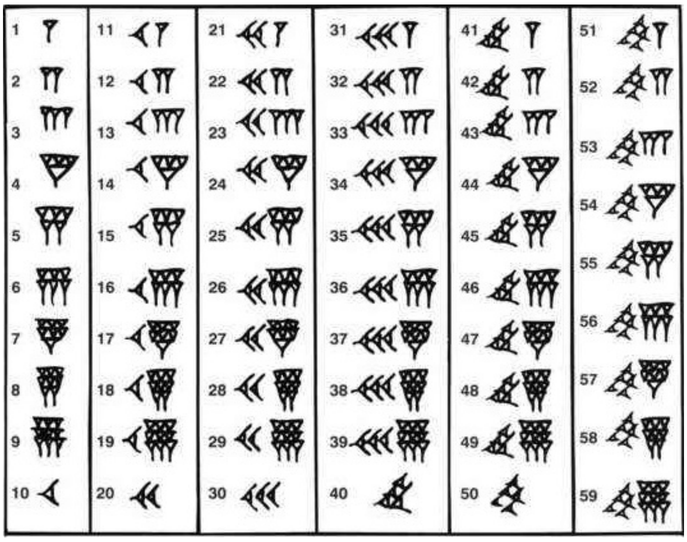
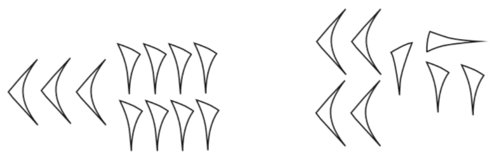


Figura 1.5: Sistema de numeração Babilônico
Fonte: Stewart, 2014.

Segundo Eves (2011), além desses dois símbolos, muitas vezes para encurtar representações de alguns números, eles usavam um símbolo subtrativo . Desta maneira, o número 38 poderia ser representado como resultado da adição $(30 + 8)$, Figura 1.6(a), ou ainda, como podemos ver na Figura 1.6(b), da subtração $(40 - 2)$.

Para além de 59, a escrita se tornava posicional, ou seja, passava-se para a coluna imediatamente à esquerda e o procedimento era repetido. Dessa forma, qualquer número podia ser representado usando apenas os dois símbolos básicos. Um exemplo da representação de números maiores que 59 no Sistema de Numeração Babilônico foi apresentado por Eves (2011), como pode ser visto na Figura 1.7.



(a) (b)

Figura 1.6: Representações do número 38
Fonte: Eves, 2011.

$$524\,551 = 2(60^3) + 25(60^2) + 42(60) + 31$$

Figura 1.7: Representação do número 524551
Fonte: Eves, 2011.

Os babilônios estenderam o princípio posicional de seu sistema de numeração sexagesimal para as frações e foram os primeiros a atribuir uma notação racional a elas. De modo que as representações de frações no sistema babilônico eram realizadas com os mesmos símbolos usados nos números inteiros (BOYER, 1974).

No entanto, existiam alguns inconvenientes nessa representação, uma vez que usavam dois símbolos apenas e não existia símbolo para o zero (até 300 a.C), o mesmo símbolo podia representar 60 ou 3600 ($= 60^2$), ou então as frações $\frac{1}{60}$ ou $\frac{1}{3600}$.

De um modo geral, o valor dos símbolos numéricos era compreendido de acordo com contexto. Somente no século III a.C., a matemática mesopotâmica minimizou esse problema e passou a empregar o símbolo  para preencher os espaços vazios, criando assim o "zero" mais antigo da história. Eves (2011), mostra como exemplo a representação do número 10804, conforme pode ser observado na Figura 1.8.

Mas, de acordo com Eves (2011), esse símbolo era utilizado apenas para representar potências de 60 ausentes dentro de um número e não eram empregadas quando essa ausente ocorria no seu final. Por exemplo, a representação do número 11040 era realizada conforme apresentado na Figura 1.9(a), e não como visto na Figura 1.9(b). Assim, o referido autor afirma que o símbolo  só poderia ser considerado

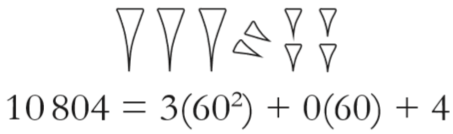


Figura 1.8: Representação do número 10804
Fonte: Eves, 2011.

um zero verdadeiro se também fosse empregado para representar vazios no final dos números.

(a) Correto ($3\times60^2+4\times 60^1$)

(b) Incorreta ($3\times60^2+4\times 60^1+0\times60^0$)

Figura 1.9: Representações do número 11040
Fonte: Eves, 2011.

Embora existissem algumas inconsistências no sistema de numeração da babilônia, eles encaravam as frações com mais "facilidade" do que os egípcios. O que permitiu que eles determinassem o valor de $\sqrt{2}$ diferindo apenas cerca de 0,000008 do valor verdadeiro, o que sugere uma vantagem na precisão de aproximações, a melhor até a Renascença (MOL, 2013).

A tabuleta de Yale University, apresentada na Figura 1.10(a), mostra que foi através da razão entre a medida do lado do quadrado e a medida de sua diagonal que o valor da $\sqrt{2}$ foi determinado. Gravado sobre a diagonal, observa-se o resultado dessa razão como sendo $1+24\times60^{-1}+51\times60^{-2}+10\times60^{-3} = 1,4142129$, conforme mostra a Figura 1.10(b).

Como mencionado anteriormente, no sistema de numeração babilônica, a mesma representação dos números inteiros era utilizada para os números fracionários, desta forma o valor apresentado para $\sqrt{2}$ poderia representar por exemplo o número 305.470 ($1\times60^3+24\times60^2+51\times60+10$), sendo o contexto do problema o responsável por sanar a dubiedade.

(a) (b)

Figura 1.10: Resultado da $\sqrt{2}$ determinado pelos babilônicos
Fonte: Mol, 2013.

1.3 Frações na Grécia Antiga

De acordo com Mol (2013), na Grécia Antiga durante o primeiro milênio a.C. foram utilizados alguns sistemas de numeração. Um dos que merece destaque é o sistema iônico ou jônico ou ainda alfabético (Ver Figura 1.11), que já era utilizado em Alexandria no século III a.C., e substituiu o sistema ático ou acrofônico, usado em Atenas no período de seu apogeu, pois este sistema sofria variações de uma cidade para outra.

Unidades			Dezenas			Centenas		
α	alfa	1	ι	iota	10	ρ	rô	100
β	beta	2	κ	capa	20	σ	sigma	200
γ	gama	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mi	40	υ	ípsilon	400
ϵ	épsilon	5	ν	ni	50	φ	fi	500
ϛ	stigma	6	ξ	csi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	o	ômicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
θ	teta	9	ϟ	qoppa	90	ϡ	sampi	900

Figura 1.11: Sistema de numeração iônico
Fonte: Mol, 2013.

O sistema iônico era decimal e composto de 27 símbolos, sendo 24 letras do alfabeto grego mais 3 letras obsoletas (stigma, qoppa e sampi) de origem fenícia, conforme mostra a Figura 1.11 (EVES, 2011).

Desta maneira, como podemos perceber, para saber se a representação era um número ou uma palavra, os gregos teriam que recorrer ao contexto. Buscando sanar esse "problema", as vezes, os números poderiam aparecer com uma barra horizontal em cima de sua representação, evitando assim dúvidas (MOL, 2013).

Para representar os múltiplos de 1.000, os gregos utilizavam um acento agudo antecedendo os nove primeiros símbolos do sistema iônico (ver Figura 1.12). Já os múltiplos de 10.000 eram escritos usando o símbolo M precedido ou sobreposto pelas unidades. E todos os outros números inteiros eram escritos fazendo a composição dos símbolos existentes (MOL, 2013).

$$'\alpha = 1000, \ '\beta = 2000, \ '\gamma = 3000, \ \text{etc.}$$

Figura 1.12: Múltiplos de 1000
Fonte: Mol, 2013.

As frações no sistema iônico eram unitárias, assim como as utilizadas pelos egípcios, e para indicar que o número era fracionário eles utilizavam um acento depois do denominador, conforme pode ser observado na Figura 1.13.

$$\gamma\,' = \frac{1}{3} \qquad\qquad \mu\gamma\,' = \frac{1}{43} \ \text{ ou } \ 40\frac{1}{3}$$

Figura 1.13: Frações na Grécia Antiga
Fonte: Mol, 2013.

A fração $\mu\gamma\,'$ apresentada na Figura 1.13 retrata a confusão que poderia ser gerada devido a essa notação, sendo mais uma vez o contexto o responsável em determinar qual era o valor representado.

Somente no século III d.C, Diofanto de Alexandria, estabeleceu uma escrita para as frações gregas (Ver Figura 1.14), mais eficiente que a anterior. Na sua notação, as frações eram representadas colocando o "denominador" em cima do "numerador", assim, Diofanto estendeu o uso de frações para além das unitárias.

Como observado na Figura 1.14 essa notação era um prenúncio da utilizada na matemática moderna.

$$\frac{\lambda\beta}{\iota\gamma} = \frac{13}{32} \qquad \frac{\psi\lambda\beta}{\sigma\iota\gamma} = \frac{213}{732} \qquad \frac{{}^{\prime}\psi\lambda\beta}{{}^{\prime}\sigma\iota\gamma} = \frac{2013}{7032}$$

Figura 1.14: Frações Diofanto
Fonte: Mol, 2013.

1.4 Frações na China

Os símbolos numéricos dos chineses, ainda hoje usados na China e no Japão, surgiram e começaram a evoluir por volta do século XIV a.C. e correspondem aos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1.000 e 10.000. Por muitos séculos tal sistema de base 10 foi não posicional até que se percebeu que o emprego dos símbolos para 100, 1.000 e 10.000 poderia ser abolido desde que na grafia dos números fossem designadas posições específicas para centenas, milhares e dezenas de milhares (GARBI, 2010).

Aproximadamente no século I a.C, os chineses criaram um sistema de numeração decimal posicional, como o que utilizamos atualmente. Essa civilização percebeu que os cálculos realizados com a utilização de um sistema decimal tornava as operações mais simples e práticas. Os numerais eram representados por barras de bambu, marfim ou ferro, as quais eram carregadas pelos administradores do Império em sacolinhas para fazer os seus cálculos (TOLEDO, 2009).

Ainda de acordo com a autora, o sistema de numeração chinês, "trabalhava com 18 símbolos, dos quais nove representavam as unidades simples e os outros, os nove primeiros múltiplos de dez", conforme mostra a Figura 1.15.

Assim, os matemáticos chineses passaram a utilizar o sistema de posição de valor decimal, muito semelhante ao sistema de numeração ensinado nas escolas e que utilizamos atualmente, isto é, os símbolos eram dispostos da direita para a esquerda. Segundo Eves (2011) este sistema desempenhou um papel importantíssimo na matemática chinesa antiga, tendo sido um dos mais avançados do mundo de então.

O mais importante registro da matemática chinesa antiga é o texto denominado de Kúi-cháng Suanshu, ou Nove Capítulos sobre a arte da Matemática, possivelmente escrita antes de 400 a.C. O referido texto sintetiza a matemática chinesa da época (EVES, 2011). Mais na frente, este registro foi reescrito pelo matemático chinês Liu Hui (250 a.C.), considerado o Euclides Chinês, tendo como conteúdo do primeiro

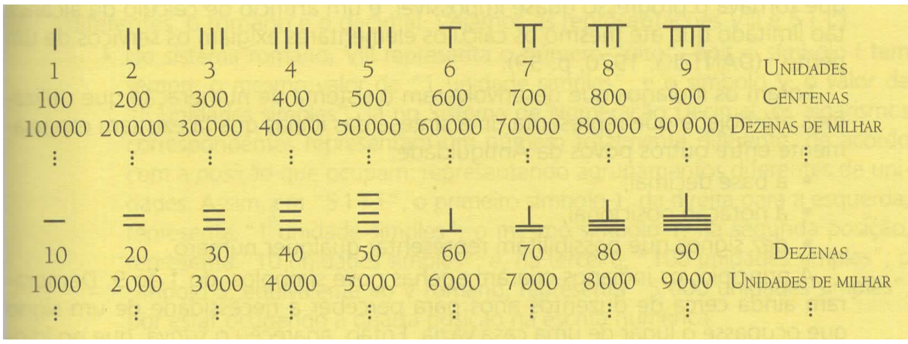


Figura 1.15: Sistema de numeração chinês
Fonte: Toledo, 2009.

capítulo operações com frações.

Este material apresenta o processo de simplificar frações, que eles faziam utilizando o Máximo Divisor Comum (MDC) e subtrações sucessivas dos restos. Encontramos também adições, subtrações, multiplicações e divisões de frações. Para somar ou subtrair eles colocavam todas as frações com o mesmo denominador fazendo o Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Para multiplicar ou dividir calculavam o MDC. e procediam da mesma maneira que fazemos nos dias atuais.

Assim, os chineses trabalhavam com frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Eles se referiam ao numerador como "filho" e ao denominador como "mãe" e usavam essa denominação com sexos opostos (ênfase sobre Yin e Yang) para facilitar as regras de manipulação com frações. E tiveram uma tendência de trabalhar com frações decimais, o que facilitou a operacionalização com as mesmas principalmente quando se tratava de pesos e medidas (EVES, 2011).

1.5 Frações no sistema de numeração indo-arábico

Segundo Eves (2011), "o sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos hindus, que os inventaram, e devido aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental". Desta maneira, o nosso sistema de numeração permanece o mesmo nos últimos vinte séculos, mas os símbolos utilizados para representar os números são o resultado do aprimoramento do sistema hindu primitivo, como podemos ver na Figura 1.16.

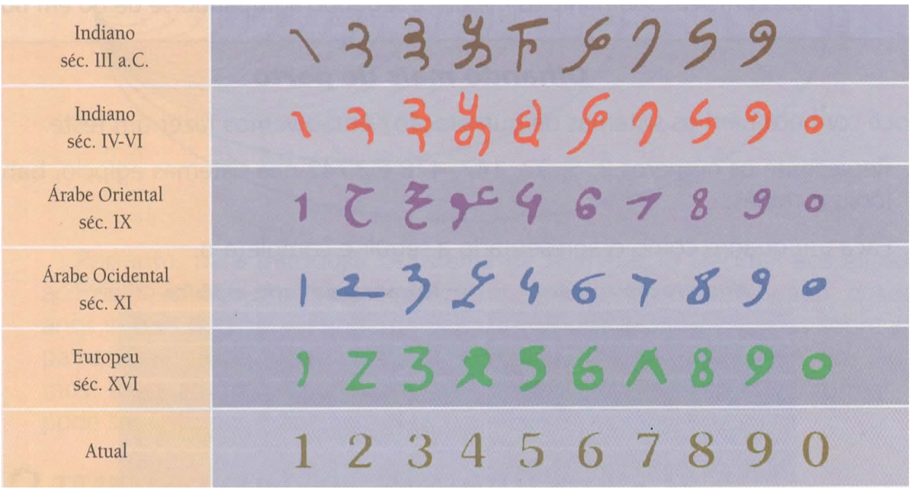


Figura 1.16: Evolução dos algarismos do sistema indo-arábico
Fonte: Toledo, 2009.

Os exemplos mais antigos dos símbolos utilizados no nosso sistema de numeração atual foram encontrados em uma coluna de pedra erigida na Índia por volta de 250 a.C, no entanto o zero e a ideia de valor posicional devem ter sido introduzidos no sistema hindu pouco antes do ano 800 d.C, uma vez que o matemático persa Al-Khowârizmî apresentou, em um de seus livros, de maneira completa o sistema hindu no ano de 825 d.C. (EVES, 2011).

Desta maneira, a notação moderna dos números fracionários se deve aos hindus, devido à seu sistema de base 10 e posicional, chegaram a simbolizar a fração com representação a/b, e aos árabes que aperfeiçoaram a notação dos hindus, inventando a famosa representação da barra horizontal $\frac{a}{b}$ (IFRAH, 1997).

1.6 Síntese dos sistemas de numeração

Para melhor compreensão das diferenças entre os sistemas de numeração, apresentados neste capítulo, foi elaborado um quadro-resumo, destacando a base utilizada por cada um deles, se o sistema é ou não posicional e a representação para os números fracionários, conforme mostra a figura 1.17.

Sistema de Numeração	Base	Posicionamento	Representação das frações
Egípcio	Decimal	Não posicional	Símbolos diferentes dos utilizados para os números inteiros.
Babilônico	Sexagesimal e decimal	Posicional	Símbolos iguais aos utilizados para os números inteiros, diferenciados apenas pelo contexto.
Iônico (Grego)	Decimal	Não posicional	Símbolos iguais aos utilizados para os números inteiros, incialmente precedidos de um acento agudo e depois do século III d.C o "denominador" era escrito acima do "numerador".
Chinês	Decimal	Até inicio do século I a.C era não posicional. Posteriormente passou a ser posicional	Símbolos iguais aos utilizados para os números inteiros. Referiam ao numerador como "filho" e ao denominador como "mãe" e tinha uma tendência a representar frações decimais.
Indo-arábico	Decimal	Posicional	Símbolos iguais aos utilizados para os números inteiros, numerador e denominador separados por uma barra horizontal.

Figura 1.17: Quadro síntese dos sistemas de numeração
Fonte: Elaborado pela Autora.

Capítulo 2

Estratégias de ensino dos números fracionários

Os números racionais, sejam fracionários ou decimais, aparecem corriqueiramente no nosso cotidiano. Por exemplo quando medimos ou registramos medidas é comum recorremos aos números racionais (1/2 quilo de farinha em uma receita de pão, 1/3 de xícara de manteiga em uma receita de bolo, 1,65 metros de tecido para fazer uma roupa e assim por diante). Desta maneira percebemos que os números racionais, e em destaque os números fracionários, são importantes para o entendimento de informações necessárias ao exercício da cidadania.

Além disso, apesar das frações serem temidas por muitos alunos e até mesmo professores, o bom entendimento de seu conceito nas séries iniciais do Ensino Fundamental permitirá que em estágios posteriores da escolaridade seja melhor compreendido a construção dos números decimais, bem como minimizará as dificuldades em operacionalizar cálculos algébricos que envolvam frações.

De acordo com Carvalho (2010), as frações estão associadas a mais de um tipo de aplicação, sendo necessário explorar quatro tipos durante o Ensino Fundamental (parte-todo, razão, quociente e representação numérica), em atividades diversificadas. Normalmente os professores iniciam o ensino das frações através do modelo parte-todo, e segundo o autor esse deve ser o pontapé inicial, e posteriormente são introduzidas outras aplicações buscando o aprimoramento do conceito de fração, sem necessariamente ser apresentado aos alunos este tipo de classificação.

Neste capítulo estudaremos cada estratégia (aplicação) de ensino separadamente, buscando um melhor entendimento das metodologias comumente utilizadas no Ensino Fundamental.

2.1 Fração como parte de um todo

No modelo parte-todo a fração representa certa quantia de partes de uma unidade que foi dividida em partes iguais. Segundo Van de Walle (2010), este modelo deve ajudar a alcançar a primeira meta a ser cumprida no desenvolvimento do conceito de fração, a ideia de partes fracionárias do todo.

Por exemplo, a fração $\frac{2}{3}$ pode representar uma figura ou coleção de objetos, essas representariam a unidade, que foi dividida em 3 partes iguais e foram "tomadas" 2 destas partes (Ver Figura 2.1).

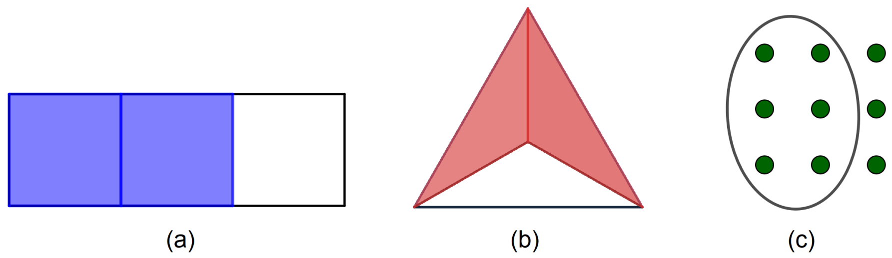


Figura 2.1: Representação da fração 2/3 no modelo parte-todo
Fonte: Elaborado pela autora.

Deste maneira, o modelo parte-todo pode ser utilizado quando o "todo" é uma figura (grandeza contínua), como mostra as representações das Figuras 2.1(a) e 2.1(b), ou quando o "todo" é uma coleção de objetos (grandeza discreta), como pode ser visto na representação na Figura 2.1(c).

Na Figura 2.1(a), a concepção do aluno sobre a representação deve ser que dois terços do retângulo foram pintados de azul, porque ele foi dividido em três partes de mesma área e duas foram consideradas. Analogamente, o mesmo deve ocorrer na Figura 2.1(b). Já na Figura 2.1(c), o aluno deve perceber que a quantidade de bolinhas verdes que foram circuladas também é dois terços, pois as bolinhas foram divididas em três partes com a mesma quantidade e duas destas foram consideradas.

Em ambas as situações faz-se o uso do processo de dupla contagem para chegar a representação da fração em questão, isto é, contamos a quantidade de partes que a unidade foi repartida (denominador) e o número de partes que foram consideradas (numerador), conforme observa-se na Figura 2.2.

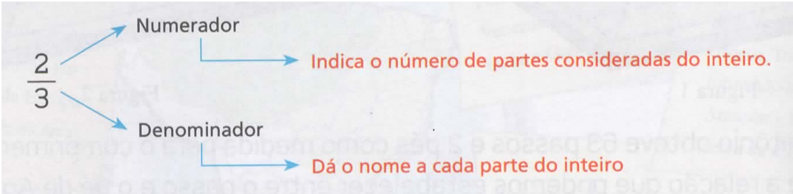


Figura 2.2: Termos de uma fração
Fonte: Bianchini, 2011.

Neste modelo o numerador da fração tem um valor menor ou igual ao denominador. Sobre essa afirmação Adjiage e Pluvinage (2000) apud Silva (2005) afirmam que o modelo parte-todo somente poderá fazer sentido se isto acontecer, pois "$\frac{4}{3}$ de uma torta" soa estranho, como obter quatro partes de uma torta que foi dividida em apenas três partes?, e juntar mais uma torta para representar essa fração não muda muita coisa, uma vez que sempre falaremos "$\frac{4}{3}$ de uma torta", no singular.

Então, as frações representadas no modelo parte-todo são as chamadas de próprias e as que representam a unidade, e para a fração imprópria é mais adequado trabalhar com outras estratégias de ensino.

2.1.1 Fração como parte-todo de grandezas contínuas

Uma das primeiras atividades apresentadas ao aluno no modelo parte-todo, utilizando as grandezas contínuas, são as tarefas de representação de fração com base na observação de figuras geométricas repartidas e com partes hachuradas, conforme pode ser observado na Figura 2.3.

As tarefas deste tipo são comuns nos primeiros contatos com a noção de fração, realizadas nos anos finais da primeira fase do Ensino Fundamental e continuam a aparecer nos livros didáticos do 6° ano (VAN DE WALLE, 2010).

Santos e Rezende (1996) salientam que o professor deve ficar atento para notar o momento certo na passagem da representação com figuras geométricas (concreto) e a representação fracionária (abstrato), e que esse processo deve ser retomado sempre que ele perceber dificuldades por parte dos alunos.

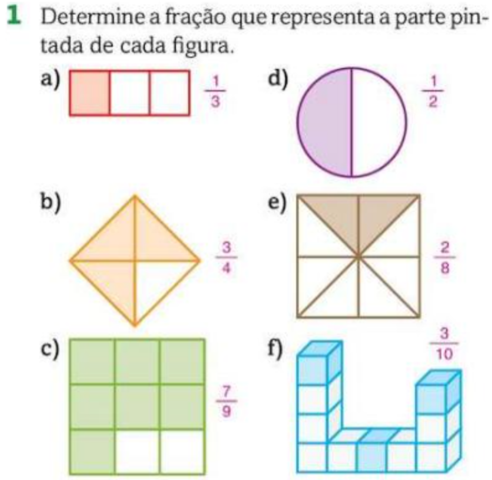


Figura 2.3: Determinação da fração que representa a parte pintada da figura
Fonte: Bianchini, 2011.

De acordo com Van de Walle (2010), outra atividade apresentada ao aluno, normalmente em conjunto com a anterior, consiste em realizar exatamente o inverso - com base na fração apresentada o aluno deve pintar a figura previamente dividida, conforme mostra a Figura 2.4.

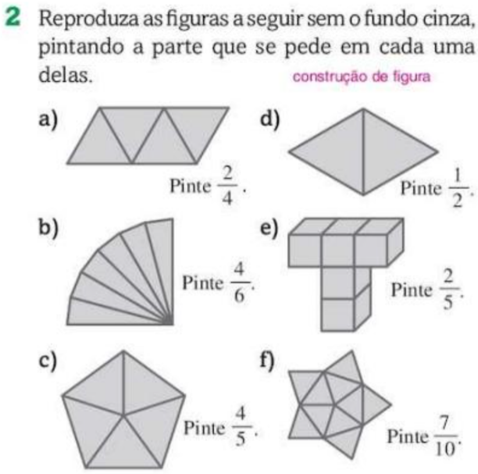


Figura 2.4: Pintando parte figura de acordo com a fração dada
Fonte: Bianchini, 2011.

As atividades apresentadas nas Figuras 2.3 e 2.4 não desafiam os alunos a verificarem se a partilha das formas geométricas foi realizada corretamente, desta maneira nas duas tarefas o aluno utiliza apenas o processo de contagem, e muitas vezes não existe um entendimento por parte dele sobre a noção de partes fracionárias.

De fato, faz-se necessário a aplicação de atividades de "partilhas corretas", sendo esse o momento de apresentar contra-exemplos, buscando o melhor entendimento de partes fracionárias. O professor deve enfatizar que as partes da partilha de figuras geométricas devem possuir a mesma área e que isto não implica necessariamente em ter a mesma forma (VAN DE WALLE, 2010; SANTOS e REZENDE, 1996).

Santos e Rezende (1996) apresentam a seguinte situação de partilha: "Utilizando um círculo de papel, divida-o em quatro partes iguais. Cada parte obtida que fração é do círculo? E duas dessas partes, que fração é do círculo?". Os autores sugerem que a mesma atividade seja realizada utilizando figuras retangulares e não-regulares.

De acordo com Van de Walle (2010), os alunos devem distinguir quais das formas geométricas apresentadas na Figura 2.5 estão repartidas em quartos. E além disso, devem explicar qual o motivo quando elas não representam quartos. De forma análoga, deve ocorrer com qualquer outra representação fracionária, assim o aluno associa a ideia de fração a relação entre a parte e o todo, o que não tem nada a ver com o tamanho do todo e ou das partes.

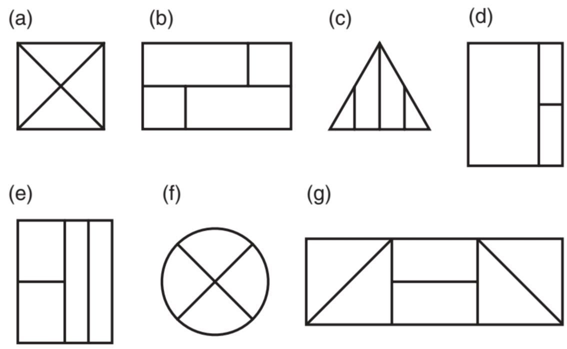


Figura 2.5: Exemplo de partilhas corretas e incorretas
Fonte: Van de Walle, 2010.

Nesta aplicação também são explorados situações-problema do tipo: Joana estava com fome e resolveu comprar uma pizza. A pizza foi dividida em 8 fatias iguais e Joana comeu 5 fatias. Que fração representa o que ela comeu? A Figura 2.6 apresenta a ilustração do problema em questão, que pode ser fornecida algumas vezes nas atividades propostas para os alunos, ou não, e neste caso o aluno deve elaborar o desenho e com base nele obter o resultado da questão.

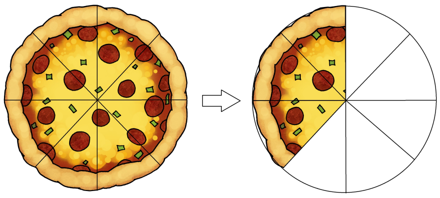


Figura 2.6: Fração em situações-problema
Fonte: Elaborada pela autora.

E explorando mais o exemplo anterior, podemos também perguntar ao aluno, que fração da pizza restou? A concepção é a mesma utilizada anteriormente, sendo o procedimento de resposta para ambas situações o procedimento de dupla contagem.

Para compreender a aplicação do modelo parte-todo em uma grandeza contínua, sejam figuras geométricas ou ainda objetos como bolo, pizza e barras de chocolate é fundamental a utilização de material concreto em sala de aula. E a partir dessa experiência, o professor deverá introduzir a representação simbólica e a nomenclatura das frações (CARVALHO, 2010).

Cramer e Henry (2002) apud Van de Walle (2010) afirmam que a utilização de material concreto em tarefas de fração é importante para a melhor compreensão do aluno. Neste sentido, Van de Walle (2010) ressalta que este tipo de recurso não é muito comum nas séries finais do Ensino Fundamental, devido a muitas vezes os professores não acharem necessário ou até mesmo não saberem utilizá-los.

Os recursos podem ser divididos em três grupos: modelos de região ou área, modelos de comprimento ou de medida e modelos de conjuntos, sendo os dois primeiros utilizados principalmente na aplicação parte-todo de grandezas contínuas (VAN DE WALLE, 2010).

O modelo de área mais utilizado é o de torta circular (circular "pie" pieces), este modelo tem como vantagem abordar também as frações que faltam para unidade, como na situação de Joana e as fatias de pizza. Os outros modelos (regiões retangulares, geoplano, desenhos em malha, blocos e dobraduras) que aparecem na Figura 2.7 são mais dinâmicos e podem ser utilizados para unidade ou como conjuntos de tamanhos diferentes (VAN DE WALLE, 2010).

De acordo com Van de Walle (2010), "nos modelos de medida, os comprimentos são comparados em vez das áreas". Os mais utilizados são as barras de Cuisenaire e as tiras de papel, mostradas nas Figuras 2.8(a) e 2.8(b), respectivamente. O autor afirma que as tiras são uma versão feita pelos professores das barras de Cuisenaire.

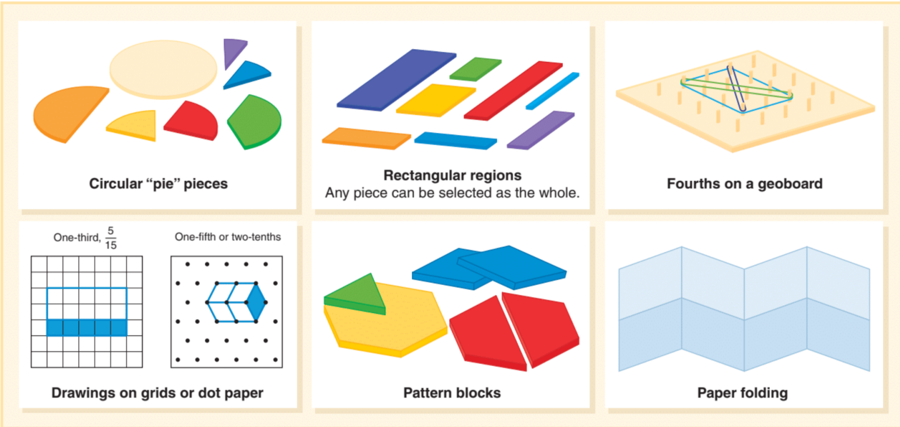
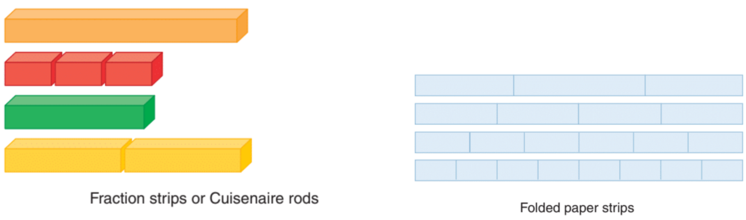


Figura 2.7: Modelos de área
Fonte: Van de Walle, 2010.



(a) (b)

Figura 2.8: Modelos de comprimento
Fonte: Van de Walle, 2010.

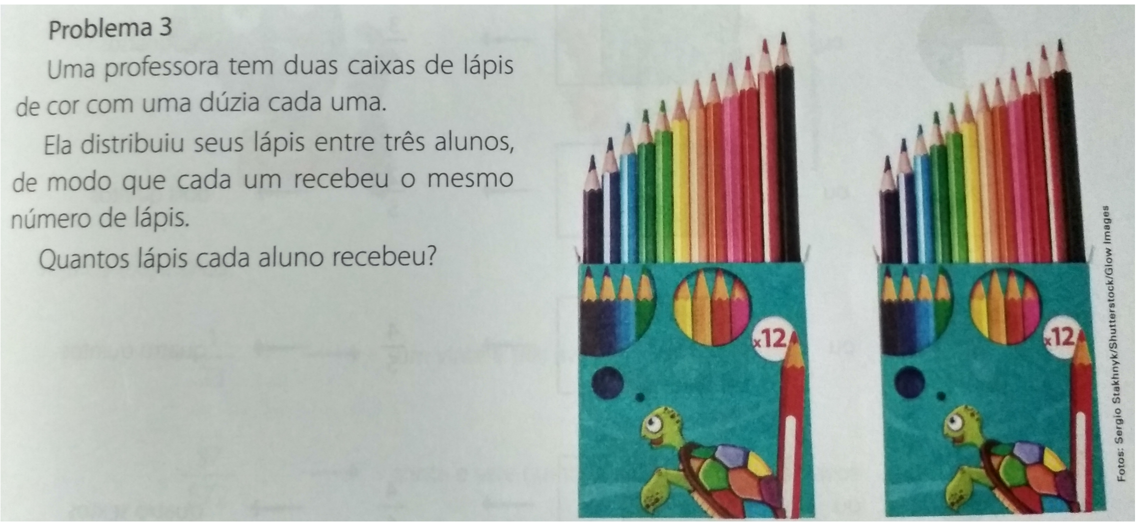
Segundo Carvalho (2010), as tiras de papel ou de barbante são um recurso simples que pode ser utilizado para experiências com o modelo parte-todo de grandezas contínuas. Independente do material escolhido, as tiras devem ser dobrados pelos alunos em partes iguais e depois demarcadas, possibilitando que um mesmo "todo" seja repartido em uma quantidade diferente de partes iguais, sendo esse um aprendizado valioso. O autor ressalta que utilizando as tiras de papel o professor pode trabalhar com denominadores que sejam múltiplos de 2 e/ou 3 (2,3,4,6,8,12...), pois repartir as tiras, por exemplo, em 5 ou 7 partes não é uma tarefa fácil.

Desta forma, o modelo parte-todo de grandezas contínuas pode ser melhor explorado através da utilização de material concreto, podendo este recurso ser um simples pedaço de papel.

2.1.2 Fração como parte-todo de grandezas discretas

Na estratégia de ensino da fração com o modelo parte-todo de uma coleção de objetos, fica mais claro o sentido operatório, uma vez que o "todo" é quantidade total de objetos e a fração representa parte deste total, como mostrado na Figura 2.1(c).

As primeiros questões que são apresentadas aos alunos são as que tratam de partilhas de objetos em porções iguais, como o problema do livro didático de 6° ano apresentado na Figura 2.9. O intuito destas questões é fazer com que os alunos trabalham novamente o conceito de partes fracionários, agora com uma coleção de objetos.


Problema 3

Uma professora tem duas caixas de lápis de cor com uma dúzia cada uma.

Ela distribuiu seus lápis entre três alunos, de modo que cada um recebeu o mesmo número de lápis.

Quantos lápis cada aluno recebeu?

Figura 2.9: Questão de partilha em grandezas discretas
Fonte: Bigode, 2017.

Segundo Santos e Rezende (1996), neste momento, também deve-se chamar atenção ao fato de que juntando as partes voltamos a ter o conjunto inteiro, ou seja, temos novamente o todo. Estas noções auxiliarão na resolução de questões futuras.

Depois de explorado questões como a da Figura 2.9, é comum aparecer questões do tipo: "Uma caixa tem 30 laranjas. Quantas laranjas há em $\frac{3}{5}$ da caixa?", "Aline recebeu $\frac{1}{3}$ da mesada. Qual a mesada de Aline se ela recebeu 5 reais?", ou ainda, "Em uma classe, $\frac{3}{4}$ dos alunos correspondem a 24 crianças. Quantas crianças, ao todo, tem a classe?" (SANTOS e REZENDE, 1996; TOLEDO, 2009)

A primeira questão exige que o aluno determine inicialmente a quantidade de laranjas que cada porção contêm e depois calcule quantas laranjas correspondem 3 porções do todo. Já a segunda e a terceira questões exigem que, com base no conhecimento da quantidade de dinheiro ou crianças de uma fração do todo, seja determinado o todo.

A terceira questão difere das outras por apresentar um conjunto de elementos (crianças) que não são idênticos individualmente, mas compõe o todo que é a classe e deste modo os grupos devem conter a mesma quantidade de alunos.

Assim, precisa-se de um certo cuidado nesse modelo, pois o professor deve mostrar que a coleção pode conter objetos distintos e quando afirmamos que dividimos o "todo" em partes iguais, nós referimos a quantidade de objetos em cada parte e não forma deles (CARVALHO, 2010).

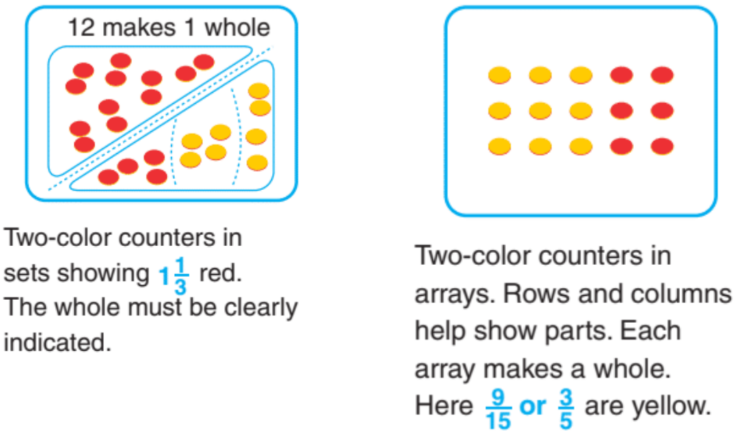
De acordo com Toledo (2009), além da possibilidade de trabalhar com grupos de itens diferentes, o aluno ainda pode sentir dificuldade ao trabalhar com grandezas discretas, pois ele se depara com o número fracionário que indica o tamanho da porção obtida e com um número natural que quantifica os elementos esta porção.

O professor também deve escolher bem a quantidade de objetos do conjunto, para que inicialmente não seja necessário repartir nenhum elemento do conjunto. Carvalho (2010) ressalta que não faz sentido dividir uma bola de gude ao meio ou uma pessoa em três partes, e pensando nisso sugere que sejam trabalhados com conjuntos de 12 elementos, pois seria um bom número, uma vez que o número 12 tem como divisores os números 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Toledo (2009) afirma que para realizar o trabalho com grandezas discretas deve se fazer uso de materiais concretos, que podem ser os mais variados possíveis, tais como: copinhos plásticos coloridos, palitos de picolé, fichas e grãos.

Segundo Santos e Rezende (1996) é interessante iniciar utilizando cartões com os quais o aluno já tenha trabalhado anteriormente e somente depois fazer a representação com outros tipos de conjuntos.

Van de Walle (2010) afirma que "os contadores de duas cores em lados opostos são usados com frequência", e vários arranjos diferentes podem ser feitos para modelar partes fracionárias de um conjunto completo, conforme mostra a Figura 2.10.



(a) (b)

Figura 2.10: Modelos de conjuntos
Fonte: Van de Walle, 2010.

2.2 Fração como razão

A ideia de fração como razão é aplicada quando podemos obter um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, a representação $\frac{m}{n}$ descreve a relação das quantidades m e n, e lemos "m está para n".

De acordo com os PCNs, uma das ideias veiculadas pelas frações "é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão". Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo "2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes" (BRASIL, 1998, p. 68).

Neste modelo, podem ser comparadas grandezas de mesma natureza, por exemplo, na seguinte situação: "6 de cada 10 estudantes de uma escola pública são do sexo masculino". Mas, podemos ainda comparar grandezas diferentes, um exemplo ilustrativo envolve a grandeza velocidade, que é uma razão que relaciona as grandezas distância e tempo. Quando dizemos que a velocidade média de um carro foi de 70 quilômetros por hora (70 km/h), claramente estamos indicando que existe uma razão entre a distância percorrida pelo carro e o tempo gasto neste percurso (CARVALHO, 2010).

Do mesmo modo da aplicação parte-todo, podemos trabalhar a fração como razão em grandezas contínuas ou discretas. A fração como razão de grandezas contínuas pode envolver a comparação entre medidas de mesma natureza ou não, já nas grandezas discretas, a comparação acontece entre subgrupos de uma coleção de objetos. De acordo com Carvalho (2010), independente do tipo de grandeza trabalhada, esta aplicação é comum em situações reais, porém é pouco explorada nos livros didáticos e nas salas de aula, apesar de ser uma excelente forma de conhecer as noções de equivalência e simplificação de frações.

Na situação já apresentada como exemplo "6 de cada 10 estudantes de uma escola pública são do sexo masculino", isso não significa que a escola em questão tem apenas 16 alunos, mas que existe uma razão que se mantém, ou seja, se a escola tiver 300 alunos, 180 são do sexo masculino, ou seja, a fração $\frac{180}{300}$ é equivalente a $\frac{6}{10}$, pois possui a mesma razão.

Com relação à razão como grandeza contínua, temos como exemplo, a razão das áreas (em hectares) de duas propriedades rurais é de 2 para 5, o trabalho com escalas em mapas (a escala é de 1 cm para 100 m) ou no exemplo clássico da velocidade como uma razão entre as grandezas distância e tempo (BRASIL, 1998, p. 68).

Vale salientar que as razões nos permitem fazer estimativas e previsões. Por exemplo, na situação da velocidade, podemos perguntar ao aluno "Se eu viajar a 70 km/h da cidade A para a cidade B, cuja distância é de 320 km, em quanto tempo chegarei ao meu destino?"

Já com relação à razão como grandeza discreta podemos mencionar o seguinte exemplo: "a possibilidade de sortear uma bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores (2 em 10)" (BRASIL, 1998, p. 68).

Nesse contexto, percebemos que é possível fazer a comparação entre duas grandezas no estudo do cálculo da probabilidade de um evento, o qual é obtido por meio da razão entre o número de casos prováveis e o número de casos possíveis desse evento ocorrer. É importante destacar que a probabilidade de um evento varia de 0 a 1 e que a maioria dos valores utilizados são representados por frações.

Deste modo, as frações como razões aparecem em diversos contextos diferentes, nas representações de escalas em mapas geográficos ou na elaboração de projetos de arquitetura ou engenharia, onde a razão entre o comprimento no desenho e o comprimento real é denominada de escala, configurando, dessa maneira, uma conexão com um conteúdo muito importante, que é a semelhança entre figuras geométricas; na definição de diversas taxas da Física (velocidade e densidade) e da Geografia (densidade demográfica), entre outras; nas noções de porcentagens da Matemática e de juros da Matemática financeira, as quais são muito úteis para o cidadão, principalmente na tomada de decisões e conscientização a respeito do consumo, à vista ou a prazo, de bens e serviços (CARVALHO, 2010).

Além da divisão em grandezas contínuas e discretas, Nunes et al (2005), classifica esta aplicação em: quantidades extensivas e quantidades intensivas. As quantidades extensivas ocorrem quando a medida de uma quantidade está baseada na comparação de duas quantidades de mesma natureza e na relação parte-todo, por exemplo, três colheres de açúcar (descritas por um único valor) de um pacote de açúcar. Já as quantidades intensivas se referem as medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes, por exemplo, quantidade de açúcar em relação à quantidade de suco.

Neste contexto, de acordo com Nunes et al (2005, p. 152), as quantidades intensivas ainda podem ser de dois tipos:

> Podemos distinguir dois tipos de quantidades intensivas. Em algumas delas, as duas unidades diferentes estão combinadas, formando um todo. Nesse caso, podemos descrever a concentração do suco de duas maneiras: 2 copos de suco concentrado para cada copo de água, ou $\frac{2}{3}$ de suco concentrado e $\frac{1}{3}$ de água (NUNES et al., 2005).

Então, percebemos que quantidades intensivas podem ser representadas por razões ou frações. Sobre esta afirmação, e em relação a exemplo citado, os autores mencionam:

> A primeira representação é expressa em termos de uma razão; a segunda é expressa em termos de uma fração. Observe-se que a razão é de 2 para 1; a fração expressa a mesma relação, porém usando $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$ (NUNES et al., 2005).

Vale ressaltar que existem quantidades intensivas que apesar de serem expressas por razões, não podem ser representadas por frações. Vejamos o seguinte exemplo: 4 reais por um quilo de maçãs, pode ser expresso por uma razão, mas não pode ser transformada em uma fração no sentido de representar o valor da quantidade. Isso é possível somente quando as duas unidades diferentes podem ser reunidas em um todo (NUNES et al, 2005).

2.3 Fração como resultado de uma divisão

De acordo com Silva (2005), este novo significado para fração aparece como uma estratégia de resolução de determinados problemas de distribuição, de modo que conhecendo a quantidade de grupos a serem formados, o quociente representa o tamanho de cada um destes grupos.

A fração como resultado de uma divisão de números naturais quase sempre é apresentada nos anos finais do Ensino Fundamental, pois exige abstração dos alunos e um certo distanciamento dos modelos apresentados nos itens anteriores (CARVALHO, 2010).

Contudo, de acordo com Toledo (2009) depois das atividades introdutórias, fazendo o uso de material concreto, o aluno encontra-se preparado para representar as partes fracionárias associando o símbolo $\frac{m}{n}$ ao resultado da divisão de m por n ($n \neq 0$), sendo m maior ou menor que n.

Por exemplo, o autor Bianchini em seu livro didático do 6° ano apresenta a seguinte situação-problema: "Uma professora deu 5 folhas de papel sulfite a um grupo de 3 alunos, para que construam pequenos blocos de anotações. Qual foi a quantidade de papel que cada aluno recebeu, sabendo que o papel foi distribuído igualmente entre eles?" (BIANCHINI, 2011, p.148).

Para resolver este problema, o autor sugere que inicialmente seja distribuído uma folha de papel inteira para cada aluno e depois as folhas que restaram sejam repartidas em terços e novamente distribuídas, para melhor entendimento do aluno, o livro apresenta algumas ilustrações.

A resposta do problema é dada na forma de número misto, $1\frac{2}{3}$ (um inteiro e dois terços), e em seguida ele indica que esta resposta corresponde ao resultado da divisão $5 \div 3$, que por sua vez pode ser indicada ainda como $\frac{5}{3}$, conforme mostra a Figura 2.11. Contudo, o autor não apresenta como resposta do problema a representação decimal, já que esta é tratada em um capítulo posterior.

Depois da apresentação desta situação-problema, o autor afirma que "Uma fração pode representar o quociente de seu numerador pelo seu denominador". E então apresenta outro problema, cuja a divisão do numerador pelo denominador corresponde a um número natural. Pois, diferentemente do que ocorre na aplicação parte-todo, neste modelo, o numerador m pode ser menor, igual ou maior que denominador n e também podem representar objetos diferentes, como por exemplo, crianças e doces.

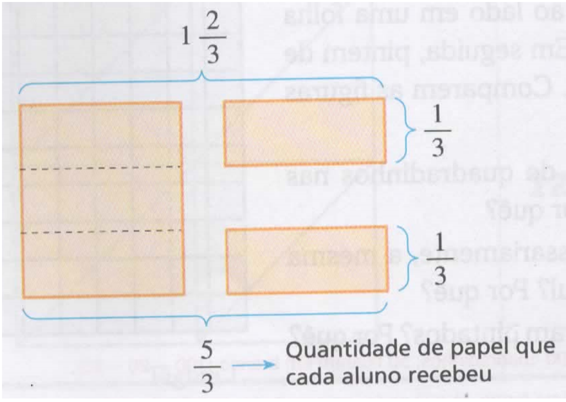


Figura 2.11: Fração como resultado de um quociente
Fonte: Bianchini, 2011.

Estas situações de divisão extrapolam as ideias aprendidas no modelo parte-todo, justamente por serem apresentadas duas variáveis distintas (SILVA, 2005). Apesar de Bianchini explorar esta aplicação, este é um aspecto pouco trabalhado nas escolas, e a maioria dos alunos não conseguem compreender que as frações podem de fato ser vistas como resultados de divisões.

2.4 Fração como número

A representação das frações na reta numérica pode contribui para difícil passagem dos conceitos estudados nas aplicações anteriores e o senso numérico. De fato, a marcação na reta é uma estratégia muito utilizada para buscar o entendimento da fração como número (CARVALHO, 2010).

Van de Walle (2010) afirma que o foco em partes fracionárias é fundamental, mas o senso fracionário exige mais sensibilidade intuitiva, de modo que os alunos devem saber quão grande é uma fração, bem como serem capazes de dada duas frações determinar qual é a maior delas.

Para trabalhar as representações de frações na reta numérica devemos considerar o intervalo entre dois números naturais como o "todo", que será dividido em partes iguais (CARVALHO, 2010).

Na Figura 2.12 podemos observar a representação de frações na reta numérica, nota-se que a unidade foi repartida em 4 partes, de modo que $1 = \frac{4}{4}$, e cada uma destas partes correspondem a uma representação marcada na reta, assim são representadas as frações: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ (que é representado com a fração equivalente $\frac{1}{2}$), $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{7}{4}$.

Figura 2.12: Reta numérica
Fonte: Van de Walle, 2010.

A localização das frações na reta é realizada de acordo com a contagem de partes fracionários demarcadas sobre a mesma, o que no primeiro momento lembra o procedimento realizado na aplicação parte-todo, pelo menos para as frações próprias. Já as frações impróprias podem ser representadas ainda como números mistos ou números decimais, e nestas representações fica mais fácil localizar na reta numérica entre quais números elas se encontram, como no caso das frações que estão entre 1 e 2 na Figura 2.12.

Além do que se as frações estiverem representadas na reta é fácil fazer a comparação entre os valores e dizer qual é o maior, uma vez que a reta numérica é crescente, ou seja, estando as frações demarcadas na reta a que tiver mais a direita será a maior delas.

Santos e Rezende (1996) afirmam que a relação de ordem, que usualmente é ensinada através de uma série de regras, surge naturalmente na reta numérica, sem a necessidade da memorização de casos particulares, como por exemplo que fração é maior $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$, observando a Figura 2.12, logo respondemos $\frac{3}{4}$. E o mesmo ocorre com a noção de equivalência entre frações.

2.5 Operações com frações

De maneira geral, após a conceituação, é habitual que o professor prossiga o conteúdo de frações da seguinte: comparação de frações e ordenamento, equivalência e simplificação, e por último as operações com frações (CARVALHO, 2010).

Logicamente os dois primeiros itens podem ser trabalhados em conjunto com a conceituação de frações, e já foi falado algo sobre eles nas aplicações apresentadas nas seções anteriores. Sendo assim, esta seção apresentada de maneira sucinta como normalmente é ensinado as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números fracionários.

2.5.1 Adição e Subtração

Usualmente, as operações de adição e subtração de frações são divididas em dois grupos, as operações com denominadores iguais e as operações com denominadores diferentes. Ambos os casos, normalmente, são ensinados ao aluno através de regras.

No primeiro caso, é extremamente simples somar ou subtrair frações, sendo comum que os professores apresentem a seguinte regra: Para somar ou subtrair duas frações de mesmo denominador, conserva-se o denominador e efetua-se a soma ou subtração dos numeradores.

Já na segunda situação, quando as frações apresentam denominadores diferentes, antes de efetuar a adição ou a subtração, é preciso primeiro transformar as referidas frações em frações com o mesmo denominador, em outras palavras, faz-se necessário encontrar frações equivalentes que tenham o mesmo denominador.

Uma das técnicas que pode ser utilizada, quando queremos realizar uma adição ou subtração de frações heterogêneas (frações com denominadores diferentes), consiste no seguinte procedimento: multiplicar o numerador e o denominador de cada fração por um mesmo número diferente de zero.

Qualquer fração pode ter seu numerador e denominador multiplicado ou dividido pelo mesmo número, sem alterar o seu valor, por exemplo, para realizar a operação: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$, primeiro devemos multiplicar o numerador e o denominador de cada uma das frações pelos números 6, 4 e 3, respectivamente, para obtermos as frações equivalentes $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$. Como agora temos apenas frações homogêneas (frações com o mesmo denominador), podemos, então, calcular $\frac{6}{12} + \frac{8}{12} - \frac{9}{12}$ para obtermos $\frac{5}{12}$.

Outra técnica mais direta para encontrarmos frações equivalentes às originais pode ser descrita da seguinte maneira: multiplicar o denominador de uma fração pelo denominador da outra fração e considerar o produto encontrado como o novo denominador, que obviamente será o denominador do resultado da operação; multiplicar de forma cruzada o numerador de uma fração pelo denominador da outra e em seguida, somar ou subtrair esses produtos obtendo, assim, o numerador do resultado da referida operação, ou seja,

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} \pm \frac{c.b}{d.b} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}.$$

Vale salientar que, sempre que possível, deveremos simplificar a fração obtida para deixarmos na forma mais simples que é denominada de fração irredutível.

Como exemplo, vamos resolver a adição $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$. Multiplicando 4 por 3 obteremos 12 (o novo denominador). Agora, deveremos multiplicar 1 por 3 e 2 por 4 e, em seguida, somar esses produtos, isto é, $1 \times 3 = 3$ e $2 \times 4 = 8$, logo o numerador do resultado da operação será $3 + 8 = 11$ e o resultado final será $\frac{11}{12}$ (fração irredutível), ou seja,

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1.3}{4.3} + \frac{2.4}{3.4} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

A técnica mais usada para somar ou subtrair frações heterogêneas utiliza o MMC (mínimo múltiplo comum), ou seja, utiliza o menor número que é múltiplo de dois números dados.

Esta técnica é ensinada através do seguinte enunciado "Para somar ou subtrair duas frações com denominadores diferentes, primeiro precisa-se determinar o MMC, depois encontrar as frações equivalentes que possuam como denominador o valor do MMC e finalmente deve ser executado o mesmo procedimento da primeira situação".

É comum que os professores ensinem apenas esta última técnica, não possibilitando que os alunos tenham outros maneiras de resolução para estas operações, e mais ainda, não entendam os motivos que levaram a construção desse procedimento.

De acordo com Van de Walle (2010) o procedimento utilizando o MMC é muitas vezes justificada pelo professor com a seguinte afirmação "você não pode adicionar maçãs e laranjas", e apesar da boa intenção do professor em justificar porque precisa encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador, ela é falsa. O autor complementa afirmando que a justificativa correta é que "O algoritmo é projetado para trabalhar apenas com denominadores comuns".

Vale ressaltar que, também podemos somar ou subtrair frações com inteiros, transformando os números inteiros em frações, bastando para isso convertermos os inteiros em frações com o numerador igual ao próprio inteiro e denominador igual a 1, e proceder um dos procedimentos mencionados anteriormente.

2.5.2 Multiplicação

Na multiplicação de frações temos duas situações: multiplicação de fração por número inteiro e multiplicação de fração por fração.

Na primeira situação, podemos multiplicar um número inteiro por uma fração ou o contrário. No primeiro caso, por exemplo, $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ significa que estamos considerando 2 "pedaços" de uma fração do "tipo" quinto.

Já no segundo caso, $\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$ podemos pensar na relação parte-todo, ou seja, queremos saber quanto é dois quintos de dois inteiros. Então, procedemos da seguinte maneira, dividimos dois em cinco partes e "tomamos" duas, conforme podemos observar na operação a seguir:

$$\frac{2}{5} \times 2 = 0,4 \times 2 = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Vale ressaltar que, no segundo caso, aparecem também números racionais na forma decimal, o que pode ser um complicador para o estudante. Mas, é sempre possível usar a propriedade comutativa e proceder como no primeiro caso, apesar dos significados das operações serem diferentes.

É importante destacar também que o segundo caso corresponde a problemas, que envolvem calcular uma fração de uma grandeza discreta, isto é, a problemas onde temos um certo número de coisas e queremos saber quantas dessas coisas correspondem a uma certa fração. Exemplificando, se uma turma de 6° ano do ensino fundamental tem 30 alunos, quantos alunos correspondem a $1/3$?

Na multiplicação de duas ou mais frações, também podemos pensar em dois casos: multiplicar fração por fração unitária (fração que tem o numerador 1) e multiplicar fração por fração, onde nenhuma delas é unitária.

Na primeira situação, por exemplo, $\frac{4}{8} \times \frac{1}{4}$, basta pegar os "quatro pedaços do tipo quarto" e dividir por "oito", obtendo assim, como resultado $\frac{1}{8}$, ou seja,

$$\frac{4}{8} \times \frac{1}{4} = (4 \times \frac{1}{4}) \div 8 = 1 \div 8 = \frac{1}{8}.$$

Na situação apresentada, o numerador da primeira fração é divisível pelo denominador da segunda, portanto, foi possível realizar a divisão sem deixar resto.

Agora, se o numerador da primeira fração não for divisível pelo denominador da segunda fração, então a saída para resolver a situação é recorrer a alguma fração equivalente. Por exemplo,

$$\frac{7}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{28}{20} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

Na prática, multiplicamos o numerador de uma fração pelo numerador da outra e, em seguida, multiplicamos o denominador de uma fração pelo denominador da outra. Esse método também é aplicado para multiplicação de frações de quaisquer tipos. Por exemplo,

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{8} = \frac{3 \times 4}{4 \times 8} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

Usualmente, quando se trabalha com a operação de multiplicação de frações o professor não aborda estas situações e muito menos os diferentes significados desta operação. Assim, de maneira geral, ensina-se o seguinte algoritmo: "Para multiplicar frações devemos multiplicar numeradores entre si e denominadores entre si", isto é,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}.$$

Vale ressaltar que o algoritmo serve para resolver todos os casos abordados neste item, bem como nas situações que envolvem mais de duas frações. E essa deve ser a razão da grande maioria dos professores passarem direto para o algoritmo, não dando possibilidade ao aluno de explorar questões que os levem ao desenvolvimento do algoritmo por si mesmos (VAN DE WALLE, 2010).

2.5.3 Divisão

A ideia aplicada na resolução de uma divisão de frações apresenta a mesma lógica usada na multiplicação de frações, isto é, o numerador da primeira fração deve ser dividido pelo numerador da segunda e o denominador pelo denominador.

Por exemplo, para dividir $\frac{4}{9}$ por $\frac{2}{3}$, basta dividir 4 por 2 e 9 por 3, obtendo como resultado $\frac{2}{3}$, ou seja,

$$\frac{4}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{4 \div 2}{9 \div 3} = \frac{2}{3}.$$

Surge um obstáculo quando o numerador e/ou o denominador da primeira fração não for divisível pelo numerador e/ou o denominador da outra.

Como dividir, por exemplo, $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$? Neste caso, percebemos que surgirá um problema, que é fração dentro de fração, e isso deve ser evitado.

Assim, poderemos pensar em duas maneiras diferentes para resolver o problema da divisão de frações: uma é utilizando a fração recíproca da fração divisor e a outra aborda a ideia de frações equivalentes.

A primeira técnica consiste em multiplicar a fração dividendo (primeira fração) pela fração recíproca da fração divisor (segunda fração), que na prática, é obtida quando trocamos o numerador pelo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores entre si e os denominadores também.

Por exemplo, para dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, procedemos da seguinte maneira: repetimos $\frac{3}{4}$; multiplicamos por $\frac{3}{2}$ (fração recíproca de $\frac{2}{3}$); em seguida, multiplicamos 3 por 3 (numeradores entre si) e 4 por 2 (denominadores entre si) para obtermos $\frac{9}{8}$, que é o resultado da divisão, conforme mostra a operação efetuada abaixo.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{9}{8}.$$

A segunda técnica de divisão de frações envolve frações equivalentes. Vejamos um exemplo para uma melhor compreensão dessa operação. Suponhamos que queremos dividir $\frac{3}{5}$ por $\frac{2}{7}$. Para resolver a situação, deveremos multiplicar o numerador ($\frac{3}{5}$) e o denominador ($\frac{2}{7}$) da fração formada por um mesmo número. Convenientemente escolhemos $\frac{7}{2}$ como sendo esse número. Dessa maneira, obteremos frações equivalentes às frações originais como mostra a operação efetuada a seguir.

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}}{\frac{2}{7} \times \frac{7}{2}} = \frac{\frac{21}{10}}{\frac{14}{14}} = \frac{\frac{21}{10}}{1} = \frac{21}{10}.$$

Analisando todos os passos da operação, percebemos que quando multiplicamos o denominador da fração original pela fração escolhida de forma conveniente (a fração recíproca $\frac{7}{2}$), obtivemos como resultado $\frac{14}{14}$, que é uma fração que representa o número 1. Então, como dividir por 1 não altera o número que está sendo dividido, o resultado é o "numerador" $\frac{21}{10}$.

Comumente o ensino desta operação é abordado na sala de aula apenas através da regra: para efetuar a divisão de duas frações devemos repetir a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda.

De acordo com Van de Walle (2010) esta regra provavelmente é uma das mais misteriosas da matemática elementar. A lógica deste processo recaí sobre uma propriedade de divisão, que já é válida para os naturais, porém é pouco explorada na escola.

Logo, a operação de divisão entre frações é ensinado apenas como uma regra que se tem de decorar e aplicar. De acordo com Santos e Rezende (1996), um dos problemas desta maneira de ensino, é que quando ensinamos divisão de unidades inteiras tratamos normalmente com problemas de "repartir em partes iguais" e não em "quantos cabem", e este último é o que dá sentido a divisão de frações, assim o aluno não entende como pode dividir uma fração por outra.

Exemplos para a noção de "quantos cabem" na divisão entre frações podem ser explorados em problemas do tipo "Quantas terças partes de um todo cabem em $\frac{10}{6}$ deste mesmo todo?". Para encontrar a solução do problema, basta dividir $\frac{10}{6}$ por $\frac{1}{3}$, podemos inclusive resolver esta divisão da mesma maneira do exemplo anterior, tem-se:

$$\frac{10}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{\frac{10}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{10}{6} \times \frac{3}{1}}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{1}} = \frac{\frac{30}{6}}{\frac{3}{3}} = \frac{\frac{30}{6}}{1} = \frac{30}{6} = 5$$

Encontramos, desta maneira, que cabem cinco terças partes em dez sextos de um mesmo inteiro, ou seja, o resultado da divisão $\frac{10}{6}$ por $\frac{1}{3}$ é igual a 5.

Assim, sem conhecer o conceito desta operação, o algoritmo da divisão de frações é algo que para o aluno parece novo, e muitas vezes não é compreendido nem mesmo pelos professores, como apresenta Liping Ma no terceiro capítulo de seu Livro "Saber e Ensinar Matemática elementar", quando discute sobre os erros cometidos por professores americanos em problemas envolvendo esta operação.

Capítulo 3

Obstáculos no ensino das frações

Observa-se no ambiente escolar que os nossos alunos, assim como os povos das civilizações antigas, não associam as frações a números. E o conhecimento adquirido nos anos que passam estudando este conteúdo, se reduz na maioria das vezes à memorização de um conjunto de regras e algoritmos (SANTOS e REZENDE, 1996).

Carvalho (2010) afirma que grande parte do que é ensinado aos alunos não passa de representações desnecessárias e refletem um ensino centrado apenas na reprodução de procedimentos. De modo que alguns alunos até podem resolver problemas envolvendo frações, mas não conseguem compreender aquilo que estão fazendo. Todavia, a grande maioria apresenta dificuldades, mesmo estudando frações por vários anos consecutivos.

Neste capítulo abordamos alguns obstáculos no ensino das frações. Para tal discussão, usamos como base os Parâmetros Nacionais Curriculares - PCN, os artigos de Lopes (2008), Bertoni (2008) e Vianna (2008) todos publicados no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), a dissertação de Silva (1997) e o livro "Matemática no ensino fundamental" de Van de Walle (2010).

Antes de abordar os obstáculos que surgem no ambiente escolar, precisamos compreender o que são obstáculos e quais os tipos, pensando nisto apresentamos como primeiro tópico deste capítulo estas definições, e somente depois discorremos sobre quais obstáculos permeiam o estudo de frações nas escolas.

3.1 Obstáculos epistemológicos, didáticos e ontogênicos

O que é um obstáculo? Segundo Brousseau (1983 apud SILVA, 1997) a noção de obstáculo é uma nova forma de perceber os erros cometidos pelos alunos. Neste contexto, o autor afirma que:

> Um obstáculo se manifesta pelos erros, mas estes não são devidos ao acaso, não são transitórios, nem irregulares, eles são reprodutíveis e persistentes. Além disso, esses erros, em um mesmo sujeito, estão ligados entre si por uma causa comum: uma maneira de conhecer, uma concepção característica, um conhecimento antigo e que tem êxito em todo um domínio de ações (BROUSSEAU, 1983 apud SILVA, 1997, p.26).

De maneira geral obstáculo, é observar os erros cometidos pelos alunos e perceber que em alguns casos existe uma lógica no erro, ou seja, algumas similaridades podem ser encontradas e que talvez estas sejam advindas de uma concepção anterior.

Brousseau (1983 apud SILVA, 1997) classifica os obstáculos nas seguintes categorias: epistemológicos, didáticos e ontogênicos.

O primeiro a falar sobre obstáculos epistemológicos foi o filósofo francês Gastão Bachelard, em 1938, na sua principal produção, intitulada "A formação do Espírito Científico". Bachelard definiu o obstáculo epistemológico como sendo uma dificuldade de transpor conhecimentos anteriores, ou seja, a evolução do conhecimento esbarra em concepções "cristalizadas pelo tempo", que acabam por impor uma resistência na instalações de novas concepções (PAIS, 2015).

Assim, segundo Silva (1997) os obstáculos epistemológicos são intrínsecos ao próprio saber, isto é, derivados da evolução dos conhecimentos. Desta forma, estes obstáculos podem ser percebidos através dos registros da matemática ao longo da história.

Já os obstáculos didáticos são aqueles que estão relacionados ao projeto do sistema educacional, sendo resultantes das estratégias utilizadas pelo professor no ato de ensino dos conteúdos.

De acordo com Gomes (2002), o obstáculo epistemológico reflete, na sala de aula, na forma de obstáculo didático, ou seja, em dificuldades no ato de ensinar, que geram barreiras na aprendizagem do aluno.

Segundo Silva (1997, p. 27) um obstáculo didático tem as seguintes características:

- É um conhecimento, uma concepção, mesmo que seja falsa ou incompleta, não é uma dificuldade ou ausência de conhecimento.
- Tem um domínio de validade e eficácia que produz respostas adaptadas a certos problemas ou classes de problemas, mas que conduz a respostas erradas em outros tipos de problemas.
- É resistente a toda modificação ou transformação e se torna predominante em certas situações, mesmo após ter sido substituído aparentemente por um novo conhecimento.
- A rejeição a esse conhecimento conduzirá a um novo conhecimento.

Pais (2015, p. 37) afirma que "os obstáculos didáticos são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar". Assim, devemos conhecer como se reorganiza o novo conhecimento e como este se harmonia com os conhecimentos adquiridos anteriormente. E se esta transição não for bem conduzida, os obstáculos didáticos se manifestam.

Portanto, o obstáculo didático não é reflexo da falta de conhecimento ou de dificuldade dos alunos, mas sim a persistência de conhecimentos anteriores. Neste contexto, podemos observar erros recorrentes e não aleatórios, como por exemplo no ordenamento de frações dizer que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$, claramente podemos notar que os alunos levaram em consideração o ordenamento dos naturais onde o número 3 é maior que 2.

Os obstáculos ontogênicos surgem de limitações neurofisiológicas do indivíduo (aluno) e estes podem ocorrer em um momento do desenvolvimento mental, aparecendo devido ao não amadurecimento conceitual (SILVA, 1997).

Assim, entendemos que os obstáculos na aprendizagem dos alunos, em sua grande maioria, são aqueles que surgem na sala de aula, isto é, são os obstáculos didáticos, e é sobre estes que iremos nos ater a seguir.

3.2 Principais obstáculos didáticos encontrados no ensino de frações

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, os alunos do terceiro ciclo, que corresponde ao 6° ano e 7° ano, devem adquirir os seguintes conhecimentos relativos aos números fracionários (BRASIL, 1998, p. 71):

- "Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador"
- "Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações".

Embora a maior parte destes conhecimentos citados anteriormente serem comuns aos desenvolvidos no segundo ciclo (4° e 5° anos), o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo (6° e 7° anos) sem compreender os diferentes significados associados ao número racional e tampouco os procedimentos de cálculo com estes números (BRASIL, 1998).

Ainda de acordo com os PCNs, uma possível explicação para as dificuldades encontradas no ensino de frações deve-se ao fato de que a aprendizagem destes "novos números" pressupõe rupturas de ideias construídas nos naturais. Assim, ao trabalhar com os racionais, em especial os números fracionários, os estudantes enfrentam diversos obstáculos didáticos (BRASIL, 1998).

Nos itens que se seguem apresentaremos cinco obstáculos didáticos que aparecem corriqueiramente no ensino das frações: conceito, notação, equivalência, adição e/ou subtração e divisão.

3.2.1 Primeiro obstáculo - conceito

De acordo com Lopes (2008), o primeiro obstáculo que o aluno deve encarar é que de fato a palavra fração está associada a muitas ideias, o que o autor denomina de "megaconceito". Assim, a passagem de uma ideia para o outra pode deixar o aluno confuso, e mais, estas ideias na maioria dos casos estão interligadas, de modo que fica difícil isolar cada uma delas.

Muitas vezes, quando questionados sobre o que é fração, é comum que os alunos respondam "é pedaço, é aquele negócio de dividir figuras, é cortar tiras" (BERTONI, 2008, p. 211). Estas respostas, evidenciam que os alunos não compreendem as ideias associadas a fração, e se limitam normalmente ao pouco que entenderam da aplicação parte-todo.

Como vimos no capítulo 2, as frações assumem significados diferentes nas aplicações: parte-todo, quociente e razão. E de acordo com Lopes (2008) nem sempre estas ideias são contempladas no tratamento de frações nos livros didáticos, o que é indicador de lacunas sérias na aprendizagem deste "megaconceito".

Os diferentes significados podem se confrontar, como por exemplo ao começar o ensino utilizando o modelo parte-todo, o aluno observa partes de uma unidade, ou seja, trabalha apenas com as frações chamadas de próprias e em seguida é apresentado as impróprias, como se esta passagem fosse algo natural, quando não é (LOPES, 2008). Se a fração própria faz sentido na aplicação parte-todo, a imprópria por sua vez faz mais sentido como representação de um quociente.

Bertoni (2008) afirma que a aplicação parte-todo, seja utilizando material concreto (fichas, tiras ou canudos) ou figuras geométricas divididas ou ainda fatias de pizzas, não apresentam situações que de fato demandam uma construção destes novos números, pois da maneira que é trabalhada, é abstrata, pouco significativa e artificialista (por não retratar situações reais).

A autora ressalta que a apresentação de figuras geométricas divididas com partes hachuradas e associação a uma fração não faz nenhum sentido para o aluno. Não ficando claro o motivo de trabalhar com aquelas figuras.

Segundo os PCNs, a consolidação destes diferentes significados pressupõe um trabalho sistemático, ao longo da segunda fase do ensino fundamental (6° ao 9° anos), pautado na análise e comparação de variadas situações-problema (BRASIL, 1998).

3.2.2 Segundo obstáculo - notação

O segundo obstáculo é a notação utilizada para representar as fracões, não é tão simples compreender que dois números inteiros separados por um traço representem um único número racional na forma de fração, principalmente por ser introduzido através da aplicação parte-todo e o procedimento usado ser a dupla contagem (LOPES, 2008).

Vianna (2008) afirma que uma das confusões presentes na notação dá-se a forma com que lemos as frações, ao buscar representar uma "unidade comum", temos na verdade a leitura de um numeral (numerador) e de uma parte fracionário (denominador), de modo que algo simples seja incompreendido pelos alunos. O autor ressalta ainda, que a persistência nesta confusão pode levar adultos a operar perfeitamente com números inteiros e decimais, mas não conseguir resolver operações com as frações por não compreendem a notação.

De acordo com Van de Walle (2010), a notação de fração é uma convenção bastante complexa para os alunos e geralmente enganosa para eles. Por isso, vale a pena o professor investir algum tempo para a compreensão do que cada número representa neste símbolo.

Como foi visto no capítulo 1, levou séculos para que o homem conseguisse uma notação para as frações que não tivesse ambiguidades. E como ressalta Silva (1997) não foi uma conquista fácil, sendo fundamental para o entendimento da notação a utilização de situações que possam dar significado a esta representação.

Segundo Bertoni (2008) é comum que seja apresentado nos livros de 6º ano a notação $\frac{p}{q}$ para indicar um número racional na forma fracionária e em muitas vezes a notação está associada a divisão $(p \div q)$, porém sem relação com o significado dado pela aplicação parte-todo. Além disso, os livros afirmam que o traço indica divisão, como no caso da fração $\frac{3}{4}$, que seria a divisão de 3 por 4, mas não costuma mostrar a fração $\frac{3}{4}$ como resultado da divisão, não apresentando resultados como os mostrados na Figura 3.1.

$$3 \div 4 = \tfrac{3}{4} \qquad \text{Ou} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 4 \qquad\qquad \\ \cline{2-2} & \tfrac{3}{4} \end{array}$$

Figura 3.1: Fração como resultado de uma divisão
Fonte: Bertoni, 2008.

Para as divisões como a apresentada anteriormente é comum que sejam dados resultados decimais e não fracionários. Logo, o conceito de fração muda, o que antes era operador ganha agora status de número e o traço passa a representar divisão, confundindo ainda mais a cabeça do aluno em relação a notação fracionária.

A dificuldade com a notação das frações acaba fazendo com que os alunos fujam de utilizá-las, por ter dificuldade no manuseio das mesmas, e principalmente depois de terem estudado os números decimais. Assim, os alunos substituem a notação fracionária pela decimal, afim de vencer os obstáculos vivenciados nas operações (BERTONI, 2008). Como por exemplo, para calcular $\frac{5}{2} - \frac{1}{4}$ muitos resolveriam substituindo $\frac{5}{2}$ por $2,5$ e $\frac{1}{4}$ por $0,25$, em vez de utilizar a forma fracionária para resolver esta operação.

Os PCNs ressaltam que "Ao abordar os racionais pelo seu reconhecimento no contexto diário, deve-se observar que eles aparecem muito mais na forma decimal do que na forma fracionária" (BRASIL, 1998, p. 103).

Lopes (2008) afirma que as representações analógicas estão dando espaço as digitais, o que leva o uso da fração a ser tornar cada vez mais raro, e a notação decimal ganhar maior representatividade na comunicação dos "números quebrados".

Contudo, não quer dizer que devemos deixar de utilizar as frações, nem tão pouco abolir de vez sua notação. Os PCNs abordam sobre esta questão e justificam a utilização da representação fracionária:

> Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos freqüente nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). Também nas situações que envolvem cálculos com dízimas periódicas, a representação na forma fracionária favorece a obtenção dos resultados com maior precisão, uma vez que a forma decimal é preciso fazer aproximações. (BRASIL, 1998, p. 103).

Além disso, os PCNs ressaltam que "A familiaridade do aluno com as diferentes representações dos números racionais (representação fracionária, decimal, percentual) pode levá-lo a perceber qual delas é mais utilizada ou adequada para expressar um resultado" (BRASIL, 1998, p.103). Ou seja, depois de estudado o conjunto dos números racionais, o aluno deve saber escolher a representação ideal para cada situação que apareça para ele resolver.

3.2.3 Terceiro obstáculo - equivalência

O terceiro obstáculo, está associado aos dois primeiros, é o fato de "cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias" (BRASIL, 1998, p.101).

Como duas frações podem parecer diferentes e representar a mesma quantidade? certamente esta é uma pergunta que os alunos devem fazer, por exemplo, quando o professor apresenta que $\frac{4}{6}$ é equivalente a $\frac{2}{3}$.

É comum que a equivalência de frações seja abordada utilizando grades retangulares (Ver Figura 3.2), de forma que muitas vezes os alunos são orientados a observar essas equivalências através de um procedimento similar a aplicação parte-todo, isto é, fazendo a contagem das partes, o que é insuficiente para trabalhar tais equivalências (LOPES, 2008).

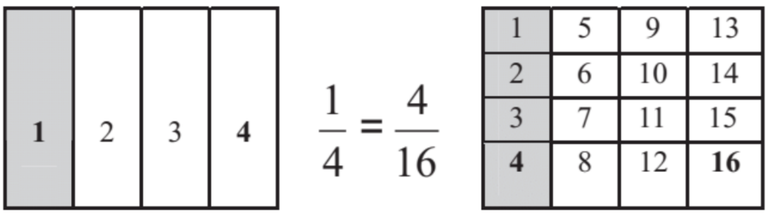


Figura 3.2: Representação de frações equivalentes usando grades retangulares
Fonte: Lopes, 2008.

Outra maneira utilizada pelos professores para justificar as infinitas representação para o mesmo número fracionário, é o fato de se dividirmos ou multiplicarmos o numerador e denominador de uma dada fração por um número inteiro diferente de zero a proporção entre as partes fracionárias não se altera e por este motivo as frações são iguais, ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a \div d}{b \div d}, \text{ com } b \neq 0, \ a \text{ e } b \text{ divisíveis por } d, \ c \text{ e } d \text{ não nulos.}$$

Contudo, muitas das vezes os alunos não são apresentados ao conceito de equivalência, mas sim ao algoritmo utilizado e acabam por reproduzir o cálculo sem compreender o significado do que estão fazendo.

Para que a equivalência não seja um obstáculo, os alunos devem ser apresentados ao conceito e ao algoritmo, pois um complementa o outro. E somente desta forma irão conseguir compreender que de fato $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{4}{6}$, que por sua vez é igual a qualquer fração que represente a mesma quantia.

Van de Walle (2010) afirma que todos os alunos devem ser capazes de, quando necessário, poder determinar uma fração equivalente de uma dada fração. Para Lopes (2008) a compreensão do conceito de equivalência é um dos mais importantes obstáculos a serem superados pelos alunos, devendo ser abordado através de múltiplos recursos.

Os PCNs ressaltam que "(...) a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números" (BRASIL, 1998, p. 103). De modo que o terceiro obstáculo esta relacionado com o seguinte, uma vez que é fundamental a utilização de equivalências nas operações de adição e/ou subtração com denominadores diferentes, como será apresentado a seguir.

3.2.4 Quarto obstáculo - adição e subtração

Derivado do segundo e terceiro obstáculos, surge o quarto obstáculo que é a "adição e/ou subtração de frações". Seja com denominadores iguais ou distintos, é comum ver os alunos apresentarem como resultado destas operações a adição e/ou subtração de numerador com numerador e denominador com denominador.

Mas é evidente que o erro ocorre com mais frequência nas adições e/ou subtrações cujos denominadores são diferentes, como apresentada na seguinte expressão:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$$

E este obstáculo algumas vezes persiste e ultrapassa o ensino fundamental e médio, aparecendo também no nível superior, como narra Baldino (2006 apud Bertoni, 2008):

> tenho um aluno que está fazendo cálculo I pela terceira vez; já aprendeu razoavelmente as regras de derivação. Para ele, um terço menos um nono dá um sexto. Quando os colegas se espantaram, ele corrigiu para menos um sexto.

Muitas vezes isto ocorre devido os alunos tratarem os elementos da fração como números distintos, trabalhando da mesma forma que fazem com os números naturais.

Assim, quando se deparam com a adição $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ é comum que respondam $\frac{2}{7}$ ou como no exemplo do aluno de Baldino $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=-\frac{1}{6}$, vendo os numeradores e denominadores como números distintos.

Neste sentido, Vianna (2008, p. 177) ressalta que "eles persistirão fazendo adição de "3" com "4", vendo-os como números, ao invés de tentar obter uma equivalência entre "terços" e "quartos" que permita juntar coisas que não estão sendo medidas com a mesma unidade de medida".

Ou ainda, como menciona Lopes (2008) por repetir o algoritmo da multiplicação de frações, o que ocorre em quase todas as culturas, sendo este aspecto conhecido como "sobregeneralização".

Como dito anteriormente, também é comum que os alunos para fugir das operações com frações, troquem a representação fracionária pela decimal, resolvendo por exemplo $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}$ da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=0,50+1,25=1,75.$$

Em vez de trabalhar com as frações equivalentes e resolver esta adição substituindo a representação $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{4}$, conforme apresentado a seguir:

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{2}{4}+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}.$$

Vale ressaltar, que esta "troca" nem sempre é tão simples assim, uma vez que pode aparecer frações cuja a representação decimal não é finita, como no exemplo da operação $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, e para este caso a representação fracionária é mais adequada.

Além disso, em alguns casos esta passagem da representação fracionária para decimal não é realizada corretamente, como no caso narrado por Pires (2004, p.107 apud Bertoni, 2008) em que uma aluna, para "calcular o total de líquido formado por meio litro, mais um quarto de litro, mais outro quarto, opta por trabalhar com decimais, escrevendo, erroneamente, 1 quarto como 1,25".

Outro ponto que precisa ser abordado é o fato de que as operações de adição e subtração de frações de denominadores distintos é apresentada aos alunos através do algoritmo que utiliza o MMC para achar frações equivalentes (como mostrado no item 2.5.1), neste ponto surgem duas dificuldades a serem superadas. A primeira é determinar o MMC e a segunda é como fazer uso desse MMC para "trocar" as frações por suas equivalentes.

Vejamos a operação apresentada a seguir:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}.$$

Para resolver esta adição, os alunos são instruídos que devem determinar o MMC entre 4 e 6, obtendo como resultado 12 e assim encontrar as frações equivalentes que possuem como denominador o 12, e em seguida o resultado, como mostramos a seguir:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3\times 3}{12}+\frac{5\times 2}{12}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}.$$

Se os alunos conseguirem percorrer todos esses passos corretamente obterão o resultado apresentado. Todavia como foi dito anteriormente existem dois pontos delicados, se o primeiro (determinar o MMC) for vencido, o segundo normalmente gera uma dificuldade maior e é comum vermos os alunos substituírem o denominador pelo resultado do MMC e não alterarem o numerador, procedendo da seguinte forma:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}+\frac{5}{12}=\frac{8}{12}\text{ (resultado incorreto).}$$

Os alunos podem se questionar: Por que determinar o MMC? O que tem haver os múltiplos com as operações com frações? E estão certos em fazer tais perguntas, se podemos determinar o resultado usando outras frações equivalentes, como afirmam os PCNs "pode-se transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes" (BRASIL, 1998, p. 104).

Então, outra forma de resolver o problema é determinando uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ multiplicando o numerador e o denominador por 6 e, de maneira análoga, uma fração equivalente a $\frac{5}{6}$ multiplicando o numerador e o denominador por 4, da seguinte maneira:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3\times 6}{4\times 6}+\frac{5\times 4}{6\times 4}=\frac{18}{24}+\frac{20}{24}=\frac{38}{24}.$$

Mas, qual a necessidade de apresentar um novo procedimento? se este somente aumenta o percurso para superar o quarto obstáculo, a justificativa é a de que, fazendo uso do MMC, trabalhamos com o menor denominador comum e por isto temos menos trabalho em simplificar o resultado obtido, ou seja, em encontrar a fração irredutível. Porém, esta justificativa esbarra nas frações equivalentes, pois sabemos que pode-se representar uma fração através de infinitas representações e todas são igualmente válidas.

3.2.5 Quinto obstáculo - divisão

O quinto obstáculo é a operação de divisão entre números fracionários. Este deve ser o mais persistente e complicado de ser superado pelos alunos, uma vez que "as possibilidades de uma abordagem intuitiva para a divisão de frações são escassas, as aplicações realistas são mais escassas ainda" (LOPES, 2008, p. 17).

A divisão é, sem dúvidas, a operação mais temida pelos alunos, mesmo nas situações onde se trabalha apenas com naturais. Em muitos casos é comum ver os alunos desenhando "tracinhos" ou "bolinhas" para representar a quantidade que está sendo dividida e em seguida fazendo os agrupamentos com a quantidade do divisor, buscando assim uma estratégia para encontrar a solução da divisão que não seja o algoritmo usual.

E agora, como encontrar o resultado da divisão se os números são fracionários? usando o algoritmo "inverter e multiplicar", pelo menos esta é a maneira ensinada na escola. Contudo, segundo Van Walle (2010) pode ser o procedimento pior compreendido em todo o currículo do ensino fundamental.

Quando ensinamos as operações com números naturais, usualmente introduzimos o conceito de operações inversas, assim temos, por exemplo, que a multiplicação é a operação inversa da divisão, sendo comum as situações em que usamos tais operações para verificar se o resultado encontrado é o correto.

Porém, o algoritmo de divisão entre frações apresenta que para dividir frações devemos usar a multiplicação. E sendo esta a forma de resolver a operação, como verificar se o resultado está correto usando a multiplicação também? A confusão na cabeça do aluno só aumenta.

Quando se trata de divisão entre frações, alguns alunos olham para esta operação e não sabem por onde começar, outros tentam encarar o problema usando a representação decimal, outros acabam tentando resolver a operação com um caminho parecido da adição e subtração, buscando erroneamente usar o MMC, e alguns podem ser bem sucedidos usando o raciocínio da multiplicação, porém por não trabalharem bem com frações equivalentes, não conseguirão resolver todas as divisões por este caminho.

Talvez o que cause este obstáculo é o fato dos professores não conseguirem explicar, por não acharem importante ou na maioria dos casos por não saberem, o que torna este algoritmo válido. Assim, normalmente, os professores se limitam a apresentar o algoritmo (do jeito que aprenderam) resolvendo as operações, e muitas das vezes sem nenhum contexto que ajude no entendimento do aluno.

3.3 Superação dos obstáculos

O primeiro passo que o professor deve seguir em busca da superação dos obstáculos didáticos de seus alunos é sem dúvida conhecê-los. Somente depois disso ele poderá compreender melhor algumas questões pertinentes da aprendizagem dos mesmos (BRASIL, 1998).

Outro passo a ser dado pelo professor de matemática é a revisão da forma de ensino dos conteúdos, em particular os relativos as frações, que como vimos nas estratégias de ensino apresentadas no capítulo 2, na grande maioria das vezes é pautado em regras e macetes, pouco uso de material concreto e de questões que retratam o cotidiano.

Os PCNs abordam aspectos de ensino da matemática e expõem que frequentemente o conteúdo é repassado para o aluno de forma oral, através de definições, exemplos e demonstrações, seguidos de exercícios de fixação. Deste modo, a evidência de ocorreu aprendizado por parte do aluno é visualizada apenas através da reprodução correta de questões (BRASIL, 1998).

Neste sentido, os PCNs criticam a forma que é avaliado o aprendizado de matemática, fazendo o seguinte comentário:

> Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos (BRASIL, 1998, p. 37).

De acordo com Bertoni (2008), infelizmente, esta é uma prática persistente e as deficiências no aprendizado do conceito e das operações com frações, por muitas vezes, não encontram chances de serem superadas no ensino fundamental e médio.

Pensando em formas de superar os obstáculos elencados neste trabalho, propomos algumas intervenções didáticas pautadas na literatura disponível e nas experiências vivenciadas em sala de aula.

Para vencer os dois primeiros obstáculos (conceito e notação) os professores podem fazer uso do contexto histórico de surgimento das frações. Vale recordar que, conforme visto no capítulo 1, as notações para representar as frações foram muitas e se moldaram aos sistemas de numeração utilizados pelas civilizações antigas ao longo da história.

E como abordam os PCNs "os problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem a esses números, oferecem bons contextos para seu ensino" (BRASIL, 1998, p.101) e Lopes (2008, p. 16) "as frações têm um papel de destaque na história da matemática, não há razão para que esta abordagem fique ausente dos currículos".

Assim, uma excelente forma para começar o estudo das frações seria através das frações egípcias, pois de acordo com Bertoni (2008) as crianças trabalham bem com frações unitárias, sendo interessante iniciar o trabalho usando apenas elas e somente depois ampliar o estudo.

Além do contexto histórico, entendemos que as situações divisão entre dois números naturais sejam um caminho melhor para introduzir o conceito de fração, sendo mais intuitivo e contextualizado do que a abordagem do modelo parte-todo.

Então, inicialmente, as frações apareceriam para os alunos como resultados de divisões, como no exemplo apresentado na seção 3.2.2 (Figura 3.1) e depois seriam trabalhados outros conceitos da fração.

Já para os outros obstáculos (equivalência, adição e/ou subtração e divisão) a superação consiste na priorização de caminhos intuitivos, antes da formulação de regras e algoritmos, permitindo ao aluno a construção do conhecimento e o entendimento de conceitos.

Neste sentido, as formas diferentes dos algoritmos usuais de resolução das operações, que foram apresentadas no capítulo 2, devem ser mais trabalhadas com os alunos, para que estes obstáculos sejam minimizados e até superados.

Considerações Finais

O presente trabalho teve como principal objetivo analisar alguns obstáculos no processo de aprendizagem das frações. Para tal, no seu desenvolvimento, discorremos sobre surgimento e evolução das frações ao longo da história da matemática, abordamos algumas estratégias de ensino do conceito e das operações dos números fracionários, e por fim, destacamos os principais obstáculos enfrentados pelos alunos na aprendizagem das frações.

Vimos que o obstáculo se manisfesta nos erros recorrentes e não aleatórios apresentados pelos alunos, e que derivam de concepções anteriores, sendo classificados por Brousseau em três categorias: epistemológicos, didáticos e ontogênicos.

Depois de definir cada tipo de obstáculo, optamos por analisar apenas os obstáculos didáticos, destacando neste estudo: conceito, notação, equivalência, adição e/ou subtração e divisão, por avaliar que são estes os que aparecem dentro da sala de aula e interferem na aprendizagem dos alunos.

Muitos autores, como Vianna (2008) questionam a necessidade do ensino de frações na educação básica. Porém, acreditamos, que o ensino das frações é necessário, contudo deva ser realizado de maneira que o aluno possa refletir sobre o que faz, quer seja na representação, na busca de frações equivalentes ou efetuando operações com frações. Além disso, que os mesmos sejam capazes de construir o aprendizado seguindo caminhos mais intuitivos e com menos regras e macetes.

Sem dúvidas, este trabalho não findou as discussões sobre o tema, nem tampouco é capaz de sozinho resolver os obstáculos didáticos discutidos nele, mas, com certeza, contribuiu para a minha evolução como professora. Como mestranda do PROFMAT-PB tive a oportunidade de desenvolver e ampliar meus conhecimentos na área específica do estudo das frações, o que me fez perceber o quão é importante conhecer, com mais profundidade, os conteúdos científicos necessários para uma prática docente com base em um leque maior de competências e, consequentemente, com uma adequada transposição didática, poder oferecer aos estudantes um conhecimento mais significativo.

Referências Bibliográficas

[1] BERTONI, Nilza Eigenheer. A construção do conhecimento sobre número fracionário. BOLEMA - Boletim de Educação Matemática publicação da UNESP, Ano 21, N° 31, 2008, pp. 209-237.

[2] BIANCHINI, Edwaldo. Matemática. 6º ano. 7ª ed. São Paulo: Moderna, 2011.

[3] BIGODE, Antonio José Lopes. Matemática do cotidiano. 6º ano. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 2017.

[4] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. Tradução de Elza Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

[6] CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. Matemática Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. 248 p.: il (Coleção Explorando o Ensino; v.17).

[7] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5º ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

[8] GARBI, Gilberto Geraldo. A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5ª Edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[9] GOMES, Maristela Gonçalves. Obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos e o conhecimento matemático nos cursos de formação de professores das séries iniciais do ensino fundamental. Contrapontos - ano 2 - n. 6 - p. 423-437 - Itajaí, set./dez. 2002.

[10] IFRAH, Georges. História universal dos algarismos, Volume I: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[11] LOPES, Antonio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. BOLEMA - Boletim de Educação Matemática publicação da UNESP, Ano 21, N° 31, 2008, pp. 1-22.

[12] MACHADO, Jeane Fernanda Torres. A Compreensão do conceito e operações básicas envolvendo frações com a utilização da Escala Cuisinaire. Monografia apresentada à Coordenação de Matemática da Faculdade de Pará de Minas, 2013.

[13] MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 138 p.

[14] NUNES, Terezinha. CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. MAGINA, Sandra. BRYANT, Peter. Educação Matemática 1: Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

[15] PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática: uma análise da influëncia francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

[16] ROQUE, Tatiana. História da Matemática. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Editora Zahar, 2012.

[17] SANTOS, Carlos Pereira dos; NETO, João Pedro; SILVA, Jorge Nuno. Egipto - Senet. Revisão Edimpresa, 2008.

[18] SANTOS, Vânia Maria Pereira dos; REZENDE, Jovana Ferreira de. Números: linguagem universal. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

[19] SILVA, Maria José Ferreira da. Sobre a introdução do conceito de número fracionário. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, 1997.

[20] SILVA, Maria José Ferreira da. Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, 2005.

[21] STEWART, Ian. Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Tradução: George Schlesinger. Editora Zahar. Edição digital, fevereiro de 2014.

[22] TOLEDO, Marília Barros de Almeida. Teoria e prática de matemática: como dois e dois. 1 ed. São Paulo: FTD, 2009.

[23] VAN DE WALLE, John A. Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally. 7th ed. Allyn & Bacon, 2010.

[24] VIANNA, Carlos Roberto. A hora da fração: pequena sociologia dos vampiros na Educação Matemática. BOLEMA - Boletim de Educação Matemática publicação da UNESP, Ano 21, N° 31, 2008, pp. 161-181.