Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Diogo Rangel Miranda

Significados do sinal de igualdade na Matemática

Rio de Janeiro

2019

Diogo Rangel Miranda

Significados do sinal de igualdade na Matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva

Coorientadora: Profª. Dra. Sueli Ferreira da Cunha

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

M672 Miranda, Diogo Rangel.
Significados do sinal de igualdade na Matemática/ Diogo Rangel Miranda. – 2019.
75f. : il.

Orientador: Jaime Velasco Câmara da Silva.
Coorientadora: Sueli Ferreira da Cunha.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Profmat) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Matemática - Teses. 2. Notação matemática - Teses. I. Silva, Jaime Velasco Câmara da. II. Cunha, Sueli Ferreira da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 51

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

________________________ ____________________

Assinatura Data

Diogo Rangel Miranda

Significados do sinal de igualdade na Matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de agosto de 2019.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva (Orientador)

Instituto de Matemática e Estatística- UERJ

____

Prof.ª Dra. Sueli Ferreira da Cunha (Coorientadora)

Instititut de Matemática e Estatística - UERJ

____

Prof.ª Dra. Lilian Nasser

Universidade Federal do Rio Janeiro

____

Prof.ª Dra. Gabriela Felix Brião

Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira - UERJ

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa, Priscila, aos meus pais, Adenilda e Deonício, e aos meus irmãos, Larissa e Rodrigo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro – Código de Financiamento 001.

Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes.

Isaac Newton.

RESUMO

MIRANDA, D. R. *Significados do sinal de igualdade na Matemática*. 2019. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

O objetivo central deste trabalho é fazer uma classificação geral e sistemática dos significados do sinal de igualdade na Matemática, indo além dos contextos da Aritmética e Álgebra escolares, como é de costume em pesquisas relacionadas ao tema. Pretendemos, com isso, identificar significados do sinal "=" ainda não referenciados em estudos anteriores e ampliar nossa compreensão acerca desse sinal na Matemática. Adicionalmente, visamos analisar sua influência na aprendizagem de conteúdos matemáticos, bem como a forma como os alunos o interpretam. Por entendermos ser quase impossível determinar o significado de uma expressão sem considerar o contexto em que ela surge e o nosso próprio conhecimento, para atingir o objetivo central desta pesquisa, analisamos o significado do sinal de igualdade em diversas situações reais de uso. Como fonte de contexto de uso do sinal de igualdade, utilizamos diversos estudos relacionados ao tema, além de livros didáticos de Matemática da Educação Básica e Ensino Superior. Inicialmente, analisamos os significados do sinal de igualdade descritos em trabalhos relacionados ao tema. Em seguida, realizamos uma pesquisa em livros de Matemática com o intuito de identificar os significados desse sinal em várias situações de uso. Como resultado, conseguimos elaborar uma catalogação geral dos significados do sinal de igualdade, que dá conta dos usos desse sinal nos mais variados contextos, tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior. Além disso, identificamos significados novos do sinal "=", não referenciados em nenhum dos trabalhos analisados. Por fim, concluímos que o desconhecimento dos significados do sinal de igualdade influencia na aprendizagem de conceitos aritméticos e algébricos, sendo tal desconhecimento um dos principais obstáculos para a aprendizagem da Álgebra.

Palavras-chave: Significado. Linguagem Matemática. Signo. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

MIRANDA, D. R. *Meanings of the equality sign in Mathematics*. 2019. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

The central goal of this study is to make a general and systematic classification of the meanings of the equality sign in Mathematics, going beyond the contexts of school Arithmetic and Algebra, as is usual in researches related to the theme. We intend, therefore, to identify meanings of "=" not yet referenced in previous studies and to broaden our understanding of this sign in Mathematics. Additionally, we aim to analyze the influence of this sign in the learning of mathematical contents as well as the way students interpret it. Because we understand that it is almost impossible to determine the meaning of an expression without considering the context in which it arises and our own knowledge, to achieve the central goal of this research, we analyze the meaning of the equality sign in various real situations of use. As a source of context for the use of the equality sign, we have used several studies related to the theme, as well as textbooks of Mathematics of Middle and High School and Higher education. Initially, we analyzed the meanings of the equality sign described in related works. Next, we performed a research in Mathematics textbooks in order to identify the meanings of this sign in various situations of use. As a result, we have been able to elaborate a general systematization of the meanings of the sign of equality, which accounts for the uses of this sign in the most varied contexts of both Middle and High School and of Higher Education. In addition, we identify new meanings of "=", not referenced in any of the papers analyzed. Finally, we conclude that unknowing of the meanings of the equality sign influences the learning of arithmetic and algebraic concepts, and such unknowing is one of the main obstacles to the learning of Algebra.

Keywords: Meaning. Mathematical Language. Sign. Mathematics teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No dia a dia, é muito comum dizermos que dois objetos ou pessoas são *iguais* para indicar que esses objetos ou pessoas possuem igualmente certo atributo, que pode ser a aparência, a capacidade intelectual, a honestidade, a quantidade de algo etc. (LIMA et al., 2006). Assim, se alguém disser "O carro de Paulo é *igual* ao carro de Pedro.", esse alguém pode estar, dependendo do contexto, afirmando que os dois carros possuem o mesmo *design*, a mesma cor ou o mesmo tamanho, por exemplo; já se disserem "Rafael é *igual* ao pai.", podem, conforme o discurso, querer expressar que ambos possuem a mesma aparência, capacidade intelectual, tamanho ou qualquer outra característica. Consultando o significado do termo "igual" em um dicionário, percebemos que ele possui diversos sentidos. Segundo o "Dicionário Aulete Digital",

> **Igual** (*i.gual*). *a2g*. **1.** Que tem a mesma aparência, natureza, quantidade etc. (gostos iguais, porções iguais); IDÊNTICO [Antôn.: desigual.] **2.** Que não varia: *uma paisagem sempre igual*. **3.** Que tem os mesmos direitos: *Aqui somos todos iguais*. *S2g*. **4.** Pessoa de mesmo nível ou condição. *Adv*. **5.** Igualmente: *Age igual com todos*. [...] [F.: Do lat. *Aequalis*.] (IGUAL, 2018).

No dicionário "Miniaurélio Século XXI Escolar",

> **I.gual.** *adj2g*. **1.** Que tem a mesma aparência, estrutura ou proporção; idêntico. **2.** Que tem o mesmo nível; plano. **3.** Que tem a mesma grandeza, valor, quantidade, quantia ou número; equivalente. **4.** Da mesma condição, categoria, natureza, etc. [Pl.: *iguais*.] (FERREIRA, 2001, p. 372).

Ao examinar os significados do termo "igual" na linguagem corrente, vemos que entre eles não consta "resulta em" nem "é definido como". Contudo, ao contrário do que possa parecer, esses são dois significados possuídos pelo termo "igual" em frases que comumente encontramos em contextos matemáticos, como é o caso das frases "5 somado a 9 é *igual* a 14." e "O quadrado de um número é *igual* ao produto desse número por ele mesmo.". Em "5 somado a 9 é *igual* a 14.", a expressão "é igual a" significa "resulta em"; por sua vez, em "O quadrado de um número é *igual* ao produto desse número por ele mesmo.", a expressão "é igual a" significa "é definido como" ou "consiste em". Dessa forma, poderíamos reescrever essas duas frases como "5 somado a 9 *resulta em* 14." e "O quadrado de um número *é definido como* o produto desse número por ele mesmo.".

Em Linguagem Matemática, a expressão "é igual a" se escreve "=", chamado *sinal de igualdade*. Como vimos, dois significados de "=" na Matemática são "resulta em" e "é definido como". Mas, o sinal de igualdade possui diversos outros significados, quase todos não pertencentes à linguagem corrente, "[...] tornando-o um símbolo de aspecto complexo, por estar associado a diversos conceitos e envolver diferentes compreensões."

(CAVALCANTI; SANTOS, 2007, p. 2). E justamente a falta de domínio dos significados do sinal de igualdade é um dos fatores que prejudicam a aprendizagem de conceitos aritméticos e algébricos (BANDARRA, 2011; CIVINSKI; BAIER, 2014; FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999; GONZÁLEZ, 2006; OKSUZ, 2007).

Grande parte dos alunos da Educação Básica conhece apenas o significado "resulta em" do sinal de igualdade, chamado por diversos autores de *noção operacional* do sinal de igualdade; assim, esses alunos consideram o sinal de igualdade "[...] como um cálculo ou sequências de cálculos a efectuar [sic] e, na maioria dos casos, estabelecem uma analogia entre este e o procedimento da calculadora." (CARPENTER; FRANKE; LEVI, 2003 apud BANDARRA, 2011, p. 2). Porém, reconhecer que esse sinal também pode significar "tem o mesmo valor que", que diversos pesquisadores chamam de *noção relacional* do sinal de igualdade, é essencial para compreender conceitos algébricos e aritméticos, como o conceito de equação (CIVINSKI; BAIER, 2014; FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999; GONZÁLEZ, 2006; OKSUZ, 2007).

Motivados por tais fatos, decidimos realizar este trabalho, cujo objetivo principal é identificar e definir os diversos significados do sinal de igualdade na Matemática. O intuito é realizar uma catalogação geral dos significados desse sinal, sem se restringir apenas a contextos algébricos e aritméticos da Educação Básica, como é de praxe em estudos relacionados ao tema. Assim, buscamos encontrar significados de "=" ainda não identificados em estudos anteriores, contribuindo para ampliar a compreensão sobre ele. Além disso, este trabalho também objetiva, mediante a análise de estudos relacionados ao tema, determinar o conhecimento que alunos da Educação Básica possuem acerca dos significados do sinal de igualdade, e estudar a influência que esse sinal exerce na aprendizagem de conteúdos matemáticos. Com isso, propositamos criar um material que explore diversos aspectos relacionados a "=", e que sirva para conscientizar professores tanto sobre a complexidade desse sinal quanto da necessidade de se propiciar situações que façam com que os alunos se apropriem dos seus vários significados.

Para determinar os significados matemáticos de "=", recorremos a conceitos da linguística, como signo, significante e significado, definindo os significados de "=" levando em consideração o contexto em que ele surge e o nosso conhecimento matemático e não matemático. Adotamos tal postura, pois, como dizem Badaró (2010) e McCleary e Viotti (2009), é quase impossível determinar o significado de uma expressão sem considerar tais elementos.

Como fonte de contextos de uso do sinal de igualdade, utilizamos diversos livros didáticos da Educação Básica ao Ensino Superior, além de artigos, jornais, trabalhos acadêmicos etc. relacionados ao tema e nossos próprios exemplos. Portanto, a coleta de dados para este estudo foi feita por meio de uma pesquisa bibliográfica, tendo sido direcionada pelas seguintes questões: "Quais os possíveis significados matemáticos do sinal de igualdade?", "Qual a influência do sinal de igualdade na aprendizagem da Matemática?" e "Quais os significados atribuídos ao sinal de igualdade pelos alunos?".

A apresentação do conteúdo deste trabalho ocorre ao longo de três capítulos. No primeiro capítulo, abordamos conceitos linguísticos e aspectos da Linguagem Matemática necessários para a plena compreensão dos resultados desta pesquisa. Também fazemos uma breve descrição histórica sobre o surgimento e a ascensão à universalidade do uso do sinal de igualdade. No segundo capítulo, apresentamos a metodologia adotada neste estudo bem como os significados matemáticos de "=", por nós identificados. Além disso, analisamos a variação dos significados desse sinal em um mesmo contexto, assim como os possíveis significados que ele pode ter em uma mesma igualdade. No terceiro capítulo, estudamos as influências do sinal de igualdade na aprendizagem de conteúdos matemáticos, mostrando sua relevância na aprendizagem de conceitos aritméticos e algébricos. Outrossim, analisamos trabalhos que abordam a forma como alunos compreendem o sinal "=", bem como as possíveis causas de tais interpretações.

1 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Por se tratar de um estudo dos significados matemáticos do sinal de igualdade[1], este trabalho possui características de um estudo linguístico, onde analisamos o uso da Linguagem Matemática em diversos contextos matemáticos. Dessa forma, para que possamos atingir o objetivo proposto, faz-se necessário tomar conhecimento de algumas características da Linguagem Matemática, assim como de conceitos relacionados à linguística. Complementarmente, analisamos o contexto de surgimento de “$=$”, as transformações que sofreu ao longo dos anos, tanto em sua forma quanto em seu conteúdo, e como foi seu trajeto até chegar ao grupo das poucas expressões da Linguagem Matemática que conseguiram adoção universal (CAJORI, 1928).

Sendo assim, na Seção 1.1, definimos o que é “linguagem” e quais são as características dos elementos que a compõe, além de discorrermos as diferenças entre semântica e pragmática, e a visão deste estudo sobre essas duas áreas. Na Seção 1.2, abordamos algumas características da Linguagem Matemática, essenciais para o entendimento deste estudo. Na Seção 1.3, tratamos de alguns conceitos linguísticos que fazem parte da Lógica Matemática, como sentença e sentença aberta. Finalmente, na Seção 1.4, apresentamos os fatos históricos de “$=$” mencionados anteriormente.

1.1 Linguagens, signos, semântica e pragmática

O termo *linguagem* é usado para designar qualquer sistema de signos empregados na expressão e comunicação de ideias e sentimentos (BECHARA, 2009). Como exemplos de linguagem, temos a Linguagem Matemática, as linguagens de sinais, como a Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS), a língua portuguesa etc. Cada uma das unidades que compõe uma linguagem, isto é, cada *signo*, é uma entidade, “[...] concreta ou abstrata, real ou imaginária, que, uma vez conhecida, leva ao conhecimento de algo diferente dele mesmo.” (BECHARA, 2009, p. 16). Por exemplo, na Linguagem Matemática, “$-$” é o signo de

[1] Nesse estudo, utilizaremos a expressão “significados matemáticos do sinal de igualdade” para fazer referência aos significados atribuídos ao sinal de igualdade por estudiosos de alguma área da Matemática ou Educação Matemática.

subtração, como em “$7 - 4 = 3$” (“a diferença entre 7 e 4 vale 3”), mas também pode ser o signo de *simétrico*, como em “$7 + (-4) = 3$” (“a soma de 7 e o simétrico de 4 vale 3”). Na língua portuguesa, por sua vez, “s” é o signo de *pluralizador*, quando usado na palavra “livros”, por exemplo, podendo ser, outrossim, o signo de *2ª pessoa do singular*, como quando surge em “cantas” (BECHARA, 2009).

Podemos identificar duas partes distintas na constituição de um signo: uma perceptível (sons, representações gráficas, imagens, gestos etc.), chamada *significante*, que consiste na porção tangível ou material do signo; outra inteligível, chamada *significado*, que é a ideia ou representação mental daquilo que o signo leva a conhecer (o conteúdo do signo), consistindo em sua porção abstrata (BECHARA, 2009; NASCIMENTO, 2010). No signo de subtração “$-$” da Linguagem Matemática, por exemplo, o seu significante é o traço horizontal “$-$” e o seu significado é o conceito de subtração. Agora, se “$-$” for o signo de simétrico, o significante é o mesmo (“$-$”), porém o seu significado é o conceito de simétrico. Portanto, o signo não é apenas a forma gráfica “$-$”, mas, igualmente, o conceito por ela expresso; ou seja, o signo é uma combinação de significante e significado, e, caso um desses elementos falte, a comunicação ficará prejudicada ou simplesmente não ocorrerá.

Cabe ressaltar que o significado de um signo não é uma imagem pictórica mental. Se assim fosse, certamente signos como “de”, “ser” ou “$+$” careceriam de significado por representarem entes cujas imagens pictóricas não são direta ou facilmente imagináveis. Teóricos propõem que o que dá origem ao significado de um signo é a categorização, isto é, “[...] a habilidade que nós temos de identificar as semelhanças e diferenças que percebemos que existem entre certas entidades, ou entre certas eventualidades[2], ou entre certas relações, de modo a juntá-las em diferentes grupos.” (MCCLEARY; VIOTTI, 2009, p. 11). A categorização permite organizar os diversos elementos de nossa experiência em uma sociedade e em uma cultura em diferentes grupos, chamados *categorias*. E, uma vez criada uma categoria, cria-se também um significado, que consiste nos atributos que nos permitem saber quais são os elementos que pertencem ou não a essa categoria. Por exemplo: por sabermos colocar a relação estabelecida pelo operador relacional “$\subset$” (relação de inclusão) em uma categoria distinta das demais relações, como a relação estabelecida por “$\in$” (relação de pertinência), é que sabemos o significado de “$\subset$”. Sabemos que “$\subset$” expressa que todo elemento de um conjunto é também elemento de outro conjunto, sendo, portanto, uma relação

[2] Aqui, McCleary e Viotti (2009) usam a palavra “eventualidades” para se referirem tanto a “eventos” quanto a “situações”.

entre dois conjuntos, e não entre um elemento e um conjunto, e que essa relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Todos esses atributos fazem parte do significado do signo “$\subset$”.

Outro ponto importante é a diferença entre o significado de um signo e o seu *referente*, que é o elemento extralinguístico, real ou imaginário, ao qual o signo se refere em certo contexto (BECHARA, 2009; REFERENTE, 2019a; REFERENTE, 2019b). Em outras palavras, é aquilo que o signo leva a conhecer. Por exemplo, ambos os signos “$5 + 3$” (“a soma de 5 e 3”) e “$10 - 2$” (“a diferença entre 10 e 2”) fazem referência ao mesmo objeto matemático, que é o número 8; porém, eles não possuem o mesmo significado. Nesse contexto, o significado do signo “$5 + 3$” é *resultado da adição* (*soma*) *de* 5 *e* 3, e o significado do signo “$10 - 2$” é *resultado da subtração* (*diferença*) *de* 10 *e* 2. Da mesma forma, “$f(2)$” e “$g(-4)$”, onde $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que $f(x) = 8x$ e $g(x) = x^2$, designam o mesmo objeto, que é o número 16, mas não possuem o mesmo significado. No primeiro caso, o significado é *a imagem de* 2 *pela função* f e, no segundo, *a imagem de* -4 *pela função* g. Não obstante, podemos ter signos com mesmo significado e mesmo referente, como é o caso de “3^2” (“o quadrado de 3”) e “3×3” (“o produto de 3 por 3”), onde ambos significam *resultado da multiplicação de* 3 *por* 3 e designam o número 9.

Agora que sabemos o que é uma linguagem e qual é a natureza dos elementos que a compõe (os signos), versemos sobre as diferentes formas de se conduzir o estudo de uma linguagem. Segundo Mortari (2001), qualquer linguagem pode ser estudada em três níveis distintos: sintaxe, semântica e pragmática. A sintaxe lida com “[...] o aspecto estrutural dos objetos linguísticos” (MORTARI, 2001, p. 32), situando-se em um nível puramente formal. Ela analisa a maneira como os signos se combinam, sem tratar de significados. Por exemplo, ao dizermos que a frase “O sol nasceu.” é uma oração e que “O sol” é o sujeito dessa oração, estamos dizendo coisas que fazem parte do campo da sintaxe. A semântica e a pragmática lidam com os significados dos signos linguísticos (MORTARI, 2001; MCCLEARY; VIOTTI, 2009). No entanto, há autores que fazem distinção entre essas duas áreas, como Mortari (2001), e outros que não estabelecem uma divisão tão rígida entre elas, como McCleary e Viotti (2009). Para esses últimos, o processo de construção do significado associa-se “[...] a nossa experiência no mundo, e sempre depende, em maior ou menor grau, do contexto da fala.” (MCCLEARY; VIOTTI, 2009, p. 6).

Para os que consideram que a semântica e a pragmática são âmbitos distintos, a semântica estuda o significado dos signos linguísticos fora do contexto de uso e a pragmática faz o estudo dos significados dos signos em situações de uso (MCCLEARY; VIOTTI, 2009). Por exemplo,

> [...] se alguém lhe perguntar se você sabe que horas são, um simples ‘sim’ será insuficiente como resposta – quem fez a pergunta claramente espera que você informe que horas são (nove e meia, por exemplo). Contudo, se olharmos apenas para o significado da sentença, esquecendo sua dimensão pragmática, consideraremos que a pessoa apenas perguntou se você sabe ou não as horas (MORTARI, 2001, p. 33).

Entretanto, como citam McCleary e Viotti (2009), teorias linguísticas modernas têm dado preferência ao entendimento de que o estudo do significado linguístico é, simultaneamente, semântico e pragmático.

Nesta pesquisa, seguimos as correntes teóricas que não fazem distinção entre semântica e pragmática. Dessa forma, para determinar os significados de “$=$”, levamos em consideração nosso conhecimento, matemático e não matemático, e as ideias associadas a “$=$” nos mais diversos contextos de uso, contextos esses fornecidos por textos de áreas da Matemática e Educação Matemática. Portanto, não buscamos definir um significado literal para “$=$”, isto é, que não se atenta para questões contextuais, como alguns autores fazem ao estabelecer, sem exceções, que “$=$” é o signo usado entre duas expressões para dizer que elas possuem o mesmo valor (CLAPHAM; NICHOLSON, 2009) ou que “$a = b$” significa que “a” e “b” são nomes da mesma coisa (LIMA et al., 2006).

Procedemos dessa forma neste estudo por dois principais motivos, apresentados a seguir. O primeiro deles é que é “[...] praticamente impossível dar conta da significação sem levar em conta informações extra-linguísticas, relacionadas à nossa experiência, ao nosso conhecimento, e ao contexto em que as expressões linguísticas são usadas.” (MCCLEARY; VIOTTI, 2009, p. 48). Por exemplo, do ponto de vista estritamente semântico, os significados de *constante* e *variável* são, respectivamente, expressão[3] matemática cujo valor[4] permanece invariável ao longo de um processo (como um cálculo ou uma demonstração) (CARDOSO, 2007; VELÁZQUEZ, 1980), e expressão matemática de valor não fixo, capaz de assumir qualquer valor pertencente a determinado conjunto (CARDOSO, 2007; KRANTZ, 2000). No entanto, somente ao observarmos essas expressões em situações de uso é que sabemos a natureza dos objetos aos quais fazem referência, quais propriedades possuem, a quais operações podem estar sujeitas, quais funções desempenham, entre outras características. Em outras palavras, somente ao observarmos uma constante e uma variável em contextos de uso é que podemos entender seus significados plenamente. Podemos perceber isso ao observar a constante real “x” na

[3] Qualquer sequência, gramaticalmente correta, de signos de uma linguagem.

[4] O *valor* de uma expressão matemática é o objeto específico (número, vetor, função etc.) que ela representa.

equação $2x + 1 = -7$. Nesse caso, além do significado estritamente semântico citado acima, ainda fazem parte do seu significado o fato dela representar um valor desconhecido a determinar, de estar sujeita às operações de números reais, de possuir as propriedades dos números reais (como ter quadrado não negativo) etc.

O outro motivo é que, após analisarmos diversos trabalhos da área de Educação Matemática (como BEHR; ERLWANGER; NICHOLS, 1980; FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999; GONZÁLEZ, 2006; MCNEIL; ALIBALI, 2005, OKSUZ, 2007, entre outros), concordamos com Oksuz (2007) em dizer que os significados dos signos ficam restritos ao contexto em que eles são aprendidos. Assim, neste estudo, acreditamos que estabelecer os significados de "$=$" sem se atentar para questões contextuais não é muito útil do ponto de vista do ensino/aprendizagem da Matemática. Uma estratégia de ensino que propicie a aprendizagem dos diversos significados de "$=$" deve levar em consideração as várias situações em que esse sinal pode surgir e, então, permitir que o aluno vivencie cada uma delas. Essa vivência deve ser mediada de forma cuidadosa pelo professor, a fim de garantir que o aluno realmente se aproprie do significado correto de "$=$", em cada contexto.

1.2 **Algumas características da Linguagem Matemática**

A Linguagem Matemática possui um alfabeto e um conjunto de regras (chamado de gramática), que normatizam o modo correto de se expressar através dela. Em comparação com o alfabeto da língua portuguesa, que é composto somente de letras[5], o alfabeto da Linguagem Matemática é mais amplo: possui dígitos, signos cujos significantes são idênticos aos das letras dos alfabetos latino e grego, signos próprios da Linguagem Matemática, entre outros signos. Alguns exemplos de signos do alfabeto matemático são: "0", "1", "$-$", "$+$", "$=$", "Δ", "x", "a", "y", "$\forall$", "∞", "∂" etc. Além disso, a Linguagem Matemática tem dois outros aspectos peculiares: ela não possui oralidade (depende de outra língua natural para ser verbalizada) e os signos de seu alfabeto não representam sons, mas sim conceitos (CUNHA; VELASCO, 2019). Por exemplo, o signo "a", que não representa um som, é, em geral, o signo de constante real desconhecida. Por sua vez, "x" é signo de variável real, podendo

[5] Uma *letra* é uma signo empregado para representar som através da escrita (BECHARA, 2009).

assumir valores diferentes ao longo de um cálculo. Esses são, na maioria das vezes, os significados desses caracteres em expressões como "$ax + 5$".

Na Linguagem Matemática, assim como em outras linguagens, um mesmo significante pode estar associado a significados diferentes, dependendo do contexto em que está inserido. Já vimos exemplos disso anteriormente, ao citarmos o significante "$-$" na seção precedente. Outro exemplo desse fato ocorre com "Δ", que pode ser o signo de *variação* ($\Delta x = x_2 - x_1$), se usado para representar a variação em uma variável x quando esta varia de x_1 para x_2, por exemplo, ou o signo de *discriminante* de uma equação quadrática ($\Delta = b^2 - 4ac$), quando aparece na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, que é a fórmula de resolução de equações quadráticas. Esses exemplos deixam clara a importância do nosso conhecimento matemático e do contexto em que um signo está inserido para determinarmos o seu significado. Como será visto no Capítulo 2, isso é uma constatação essencial para o nosso trabalho, pois os significados associados ao significante "$=$" dependem essencialmente desses dois fatores.

Também temos a ocorrência da situação inversa: significantes diferentes associados a um mesmo significado. É o que ocorre com os significantes "$\times$" e "$\cdot$", por exemplo, aos quais, na Álgebra, associa-se o significado de *multiplicação* de números reais. Outro exemplo desse fato ocorre com as constantes desconhecidas e variáveis. No universo dos números reais, os caracteres a, b e c são, geralmente, os significantes aos quais se associa o significado de constante real desconhecida, e os caracteres x, y e z são os significantes aos quais frequentemente se atribui o significado de variável real (CUNHA; VELASCO, 2019). Assim, as expressões "$ax + 5$", "$ay + 5$", "$az + 5$", "$bx + 5$", "$by + 5$", "$bz + 5$", "$cx + 5$", "$cy + 5$" e "$cz + 5$", quando usadas, por exemplo, para expressar a imagem de um número real qualquer por uma função afim[6], cuja taxa de variação é desconhecida e o valor inicial é 5, possuem o mesmo significado.

Outro ponto que vale ressaltar é que, no âmbito da Matemática, é comum chamarmos os signos que representam operações ou relações matemáticas de *sinais* (CARDOSO, 2007; VELÁZQUEZ, 1980). Exemplos de sinais são: "$+$", "$-$", "$>$", "$\neq$", "$\sqrt{\ }$", "$\cup$" e "$=$". Este último é chamado de "sinal de igualdade" e geralmente é considerado como signo que enuncia que duas expressões matemáticas têm o mesmo valor (ou valores iguais) ou são nomes do mesmo objeto. Neste estudo, também manteremos tal prática e, independentemente do contexto em que "$=$" esteja inserido, usaremos a expressão "sinal de igualdade" quando

[6] É qualquer função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para certos valores reais a e b, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A constante a é a *taxa de variação* e a constante b, o *valor inicial* dessa função (LIMA et al., 2006).

quisermos nos referir a “$=$”, mesmo que ele não tenha precisamente os mesmos significados citados anteriormente.

1.3 Sentença, sentença aberta, igualdade e identidade

Os signos de uma linguagem podem ser combinados, a fim de se formar novas expressões linguísticas, como a expressão “livro de Matemática”, formada a partir dos signos “livro”, “de” e “Matemática”. Dentre as diversas expressões que podemos formar na Linguagem Matemática, as chamadas igualdades são de especial interesse para nós. Uma *igualdade*[7] é um conjunto de duas expressões matemáticas interligadas pelo sinal de igualdade (GONZÁLEZ, 2006; CARDOSO, 2007; CAVALCANTI, 2008). A expressão à esquerda de “$=$” é denominada *primeiro membro* da igualdade e a expressão à direita de “$=$”, *segundo membro* da igualdade. Um exemplo de igualdade é “$(f+g)(x)=x+5$”, na qual o primeiro membro é “$(f+g)(x)$” e o segundo membro é “$x+5$”. Ressaltamos que uma igualdade não necessariamente diz que as expressões em seus membros possuem o mesmo valor ou são nomes de um mesmo objeto. Como veremos no Capítulo 2, dependendo do contexto de uso, uma igualdade também possui outros significados. Os signos presentes em uma igualdade e a forma como estão dispostos ao longo dela são alguns dos elementos contextuais que contribuem para a construção de seu significado. Além disso, a determinação do significado de uma igualdade é um dos principais fatores que possibilitam a identificação do significado associado ao sinal “$=$” em um determinado contexto.

Todas as igualdades que surgem neste estudo são frases[8] declarativas, isto é, frases empregadas com o intuito de constatar fatos ou exprimir juízos, como as frases que se seguem:

a) “17 é um número par.”;
b) “$7^2 > 13$.”;
c) “$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.”;

[7] Não confundir a igualdade aqui mencionada com a relação de igualdade. No primeiro caso, o termo “igualdade” é utilizado para se referir a toda expressão que possui uma estrutura particular (conforme definida nesta seção), no segundo, para designar um tipo de relação.

[8] Uma *frase* é um conjunto de signos, incluindo os de acentuação e pontuação, que se relacionam para comunicar uma ideia (MORAIS FILHO, 2012).

d) “Eu sou do sexo masculino.”;
e) “$a = |a|$.” (“O número real a e seu valor absoluto são o mesmo número.”);
f) “n^2 é um natural que termina em 6.”.

Desses exemplos, podemos constatar que a frase a) é falsa e as frases b) e c) são verdadeiras. Porém, não conseguimos decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das frases d), e) e f) sem sabermos a quais entes o pronome demonstrativo “eu” e as constantes “a” e “n” fazem referência. Por exemplo, se soubermos que o pronome “eu” se refere a alguém do sexo masculino, a frase c) é verdadeira; do contrário, é falsa. O mesmo ocorre com a frase d). Se a é positivo ou nulo, essa frase é verdadeira; mas, se a é negativo, essa frase é falsa. Da mesma forma, na frase f), se n é um número natural que termina em 4 ou 6, essa frase é verdadeira; se, contudo, isso não ocorre, essa frase é falsa.

O fato de, em certo contexto, sermos ou não capazes de dizer se determinada frase declarativa é verdadeira ou falsa nos permite dividir esse tipo de frase em dois grupos: sentenças e sentenças abertas. As frases a), b) e c) são exemplos de sentença. Uma *proposição* (ou *sentença*) é uma frase declarativa que, em certo contexto, obrigatoriamente admite ser julgada como verdadeira ou falsa (nunca como ambas ao mesmo tempo), sem dar margem a exceções nesse julgamento (como parcialmente verdadeira, falsa somente em alguns casos etc.) (ALENCAR FILHO, 1986; MORAIS FILHO, 2012; MORTARI, 2001). As frases d), e) e f), por sua vez, são exemplos de sentença aberta. Uma *sentença aberta* é uma frase declarativa que, em certo contexto, está subordinada a uma ou mais variáveis ou constantes desconhecidas cujos valores particulares precisamos conhecer para que consigamos convertê-la em proposição e, então, podermos julgá-la em verdadeira ou falsa (MORAIS FILHO, 2012).

Algo que devemos notar é que existem sentenças abertas que sempre originam proposições verdadeiras, não importa o valor escolhido para substituir as variáveis ou constantes desconhecidas. Nesse caso, dizemos que essas sentenças abertas exprimem *condições universais* (ou *propriedades universais*) (ALENCAR FILHO, 1986). Por exemplo, a sentença aberta “x^2 é um número real não negativo.” exprime uma propriedade universal no conjunto dos números reais, conhecida como: o quadrado de qualquer número real é sempre não negativo. Quando a sentença aberta que exprime uma condição universal é uma igualdade que diz que as expressões em seus dois membros têm o mesmo valor, essa igualdade é então chamada *identidade* (CARDOSO, 2007; VELÁZQUEZ, 1980; CLAPHAM; NICHOLSON, 2009). É o caso, por exemplo, da igualdade “$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$” quando usada para expressar que o produto da soma dos reais a e b pela diferença entre eles vale o mesmo que a diferença entre seus quadrados. Nesse caso, ela é uma identidade, pois exprime uma propriedade universal nos reais, que podemos enunciar como: o produto da soma pela diferença de dois reais quaisquer (escritos numa mesma ordem em cada um dos fatores) tem sempre o mesmo valor que a diferença entre o quadrado do primeiro real e o quadrado do segundo real.

1.4 **O surgimento do sinal "=" e sua trajetória rumo à adoção universal**

Atualmente, a expressão "=" faz parte do grupo de termos da Linguagem Matemática que está presente em quase toda a Educação Básica. Ela aparece nas mais diversas áreas da Matemática, como na Geometria, na Aritmética, na Álgebra etc. Além disso, "=" está entre as poucas expressões da Linguagem Matemática que conseguiram adoção universal (CAJORI, 1928). Entretanto, apesar de "=" ser um termo bastante difundido nos dias atuais, nem sempre foi assim. Uma curiosidade acerca desses fatos é que todos eles são relativamente recentes, possuindo, aproximadamente, pouco mais do que 300 anos (CAJORI, 1928).

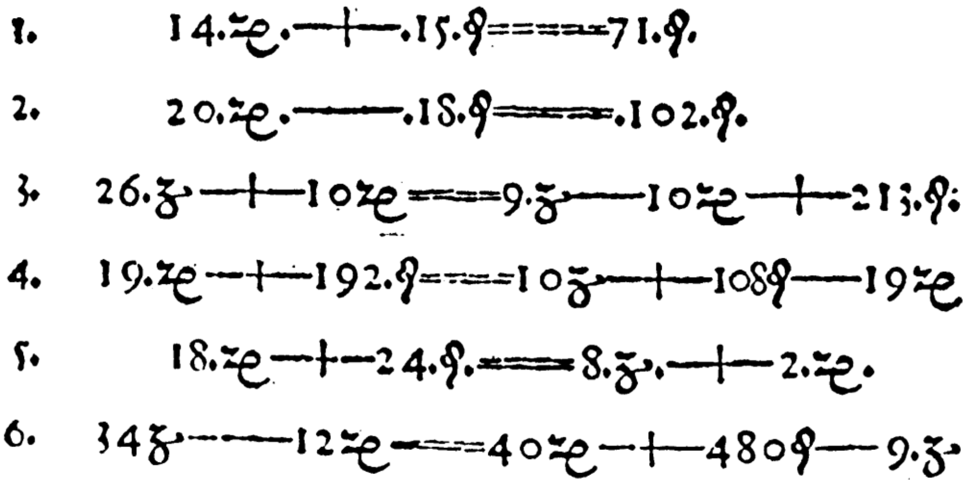
A expressão "=" apareceu pela primeira vez em 1557 no tratado de Álgebra intitulado *The Whetstone of Witte* (CAJORI, 1928), uma publicação londrina de autoria de Robert Recorde[9] (1512 – 1558). A Figura 1 mostra um trecho extraído desse tratado de Álgebra, onde aparecem alguns exemplos de equação. Segundo Heeffer (2008), o sinal de igualdade foi criado para ser signo de um conceito recém estabelecido naquele momento, a saber: equação algébrica. Apesar de acreditar-se que resolver equações tenha sido uma conquista alcançada pelo homem há mais de 3000 anos (baseando-se em supostas provas que estariam presentes em tabletes de argila pertencentes aos babilônios), Heeffer (2008) defende que o conceito de equação surgiu por completo apenas com Buteo, em seu livro *Logistica* (1559). Segundo esse autor, o conceito de equação algébrica foi o resultado de um processo que durou dois séculos, tendo passado por diversos estágios evolutivos, emergindo por completo por volta de 1560.

Como evidências de que "=" foi concebido como signo de equação, Heeffer (2008) menciona alguns fatos, descritos a seguir. Primeiramente, Recorde introduz "=" exatamente no capítulo que trata da resolução de equações algébricas, não o fazendo na longa introdução

[9] Matemático inglês do século XVI nascido em Tenby, no condado de Pembrokeshire, País de Gales.

que discorre sobre as operações básicas da Aritmética e extração de raízes, nem na parte que trata das operações sobre polinômios. Além disso, Recorde diz: "para facilitar a alteração de equações [...] E para evitar a repetição tediosa destas palavras: é igual a, porei, como muitas vezes emprego neste trabalho, um par de paralelas [...] linhas de mesmo comprimento, assim: ==========, porque duas coisas não podem ser mais iguais."[10] (RECORDE, 1557 apud HEEFFER, 2008, p.158, tradução nossa). Portanto, a motivação específica para introdução e uso de "=" por Recorde foi alterar ou manipular equações e evitar a repetição da expressão "é igual a". Dessa forma, o sinal de igualdade foi concebido não apenas para representar que duas expressões matemáticas têm o mesmo valor, mas também representar as operações que podemos realizar sobre uma equação (HEEFFER, 2008). "Essas operações incluem adicionar ou subtrair termos homogêneos em ambos os membros da equação, dividir ou multiplicar uma equação por uma constante ou incógnita (introduzido por Cardano) e adicionar ou subtrair duas equações (introduzido por Buteo)."[11] (HEEFFER, 2008, p. 158, tradução nossa).

Figura 1 – Exemplos de equações extraídas de *The Whetstone of Witte*, escrito por Recorde

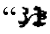


Fonte: CAJORI, 1928, p. 165.

[10] "For easie alteration of equations […] And to avoid the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of parralle […] lines of one lengthe, thus: ==========, bicause noe 2, thynges, can be moare equalle" (RECORDE, 1557 apud HEEFFER, 2008, p.158).

[11] "These operations include adding or subtracting homogeneous terms on both sides of the equation, dividing or multiplying an equation by a constant or unknown (introduced by Cardano) and adding or subtracting two equations (introduced by Buteo)." (HEEFFER, 2008, p. 158).

Após *The Whetstone of Witte*, foram necessários 61 anos até que "=", representando igualdade[12], aparecesse em uma publicação impressa novamente. Nesse ínterim, alguns autores, como Napier[13] (1550 – 1617), utilizaram-no em manuscritos pessoais que não chegaram a ser publicados (CAJORI, 1928). O reaparecimento, em publicações impressas, do sinal "=" representando igualdade deu-se em um apêndice anônimo de 16 páginas, que está contido na tradução para o inglês, feita por Edward Wright (1561 – 1615) em 1618, da *Descriptio* de Napier (CAJORI, 1928; EVES, 2011). No entanto, foi somente a partir de 1631 que o "=" de Recorde ganhou de fato reconhecimento geral na Inglaterra, ao ser adotado como signo de equação em três trabalhos influentes: *Artis analyticae praxis* de Thomas Harriot[14] (1560 – 1621), *Clavis mathematicae* de William Oughtred e *Trigonometria* de Richard Norwood (1590? – 1675) (CAJORI, 1928). Depois de Harriot, Oughtred e Norwood, foi a vez dos ingleses John Wallis[15] (1616 – 1703), Isaac Barrow[16] (1630 – 1677) e Isaac Newton[17] (1642 – 1727) usarem o termo de Recorde como sinal de igualdade em seus trabalhos. Isso contribuiu enormemente para que "=" ganhasse espaço em outros países da Europa, sem significar, porém, que o caminho trilhado por esse termo até o posto de sinal de igualdade tenha sido fácil. Essa obtenção de espaço fora da Grã-Bretanha e, em seguida, o progressivo aumento de autores adeptos em outros países foram marcados por dois principais desafios: a forte concorrência com outros signos e a ameaça provocada por uma miscelânea de novos significados atribuídos ao "=" (CAJORI, 1928).

Inicialmente, é importante ressaltar que Recorde não foi o primeiro nem o último a propor um signo particular para representar igualdade. Em um dos problemas do "Papiro de Ahmes"[18] (escrito, aproximadamente, entre 1700 e 1550 a.C.), utilizou-se o signo "" com o

---

[12] Exclusivamente nesta seção, escreveremos "'=' representando igualdade", "'=' como sinal de igualdade" ou algo análogo para dizer que estamos considerando que "=" possui o significado originalmente dado por Recorde, conforme mencionado nesta página.

[13] Matemático escocês criador dos logaritmos.

[14] Matemático e astrônomo inglês, considerado o fundador da escola de algebristas ingleses (EVES, 2011).

[15] Matemático inglês. Foi o primeiro a explicar de forma aceitável o significado das potências de expoentes zero, negativos e fracionários, além de introduzir o termo "∞", que representa o infinito (EVES, 2011).

[16] Matemático, físico, astrônomo e teólogo inglês. É considerado um dos precursores do Cálculo, tendo desenvolvido um método para determinar tangentes, além de ter sido o primeiro a perceber que diferenciação e integração são operações inversas (EVES, 2011; MOL, 2013).

[17] Físico e matemático inglês que, ao lado de Leibniz, é considerado criador do Cálculo Diferencial e Integral.

[18] "Um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo" (EVES, 2011, p. 69).

significado de “resulta em”[19]; Diofanto de Alexandria[20], por sua vez, teria usado em seus escritos o signo “i^{σ}” para representar igualdade; com a mesma finalidade, Regiomontanus[21] (1436 – 1476), em algumas de suas cartas, e Pacioli, em *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita* (1494), utilizaram “$-$” (CAJORI, 1928). O surpreendente é que alguns dos mais notáveis matemáticos dos séculos XVI e XVII não utilizaram um signo específico para representar igualdade[22]. Isso se torna mais admirável quando observamos que o *Summa* de Pacioli, além de ter servido como um livro introdutório para matemáticos na Itália durante a primeira metade do século XVI (CAJORI, 1928), fez a Álgebra experimentar um crescimento intenso nesse país após sua publicação. Mais ainda, fez com que a Álgebra progredisse também em países como Alemanha, Inglaterra e França (EVES, 2011).

De acordo com Cajori (1928), outros exemplos de signos utilizados para representar igualdade foram: “[” (utilizado pelo monge francês Jean Buteo (1492 – 1564?) em *Logistica* (1559)), “♓” (introduzido pelo inglês Thoma Digges (1546 – 1595) em *Stratioticos* (1590)) e “‖” (que apareceu na tradução da *Arithmetica* de Diofanto feita por Xylander (1532 – 1576), publicada em 1571). Além desses, temos também “⊓” (usado por François Dulaurens em sua publicação intitulada *Specimina mathematica* (1667)), “Ʒ” (que apareceu em *Collectaneorum Mathematicorum decades XI* (1614) de autoria de Johann Andrea (1586 – 1654)) e “|” (utilizado por Samuel Reyher (1635 – 1714) em *Euclides* (1698)), dentre outros. O autor ainda ressalta que, em nenhum momento, esses signos ameaçaram provocar a rejeição do termo criado por Recorde ao posto de sinal de igualdade, com exceção de um: “$\propto$”, introduzido por René Descartes[23] (1596 – 1650) no terceiro apêndice de seu *Discours*[24] (1637), intitulado *La Géométrie*.

---

[19] “*It gives*”, em inglês.

[20] Considerado o último matemático relevante da Escola de Alexandria. Seu período de vida é desconhecido, mas estima-se que tenha vivido no século III a.C. (MOL, 2013).

[21] Nome pelo qual é mais conhecido o matemático e astrônomo alemão Johann Muller (EVES, 2011).

[22] Até o século XVII, aproximadamente, a igualdade geralmente era expressa por palavras, como *aequales*, *aequantur*, *esgale*, *faciunt*, *ghelijck* ou *gleich*, ou por abreviações dessas palavras, como *aeq*. Autores que expressaram igualdade dessa forma foram Stifel (1486 – 1567), Cardano (1501 – 1576), Kepler (1571 – 1630), Galilei (1564 – 1642), Torricelli (1608 – 1647), Cavalieri (1598 – 1647), Pascal (1623 – 1662), Napier (1550 – 1617) e Fermat (1601 – 1665) (CAJORI, 1928, p. 297).

[23] Matemático e filósofo francês (EVES, 2011, p. 383). Sabe-se que Descartes teve acesso à publicação *Artis analyticae praxis* de Harriot, onde o termo “$=$” foi utilizado como sinal de igualdade (CAJORI, 1928, p. 302). O próprio Descartes, em uma carta de 1640 endereçada a Mersenne, escreveu “$1C - 6N = 40$” (o que hoje escrevemos como “$x^3 - 6x = 40$”). No entanto, ele não dá nenhuma pista do porquê introduziu um novo signo para igualdade.

O sinal de igualdade de Descartes foi largamente utilizado na França e na Holanda durante a segunda metade do século XVII e início do século XVIII, porém não ganhou o mesmo apoio substancial em outros países (CAJORI, 1928). Na Inglaterra, há registros do sinal de igualdade de Descartes ("$\propto$") em apenas duas publicações[25]. Apesar de ter se estabelecido como sinal de igualdade em apenas dois países, Cajori (1928) diz que a maioria dos escritores europeus do século XVII ou utilizava "$\propto$" ou não utilizava signo específico algum para representar igualdade, fazendo uso apenas de palavras ou abreviações delas para tal. Conforme esse autor, dentre os fatores que contribuíram para a adoção de "$\propto$" como sinal de igualdade, destacamos o fato de *La Géométrie* vir a ser reconhecido como trabalho de gênio, por apresentar a Geometria Analítica ao mundo, e o fato de esse apêndice inaugurar um grande avanço para a Álgebra simbólica, ao introduzir a atual notação para potência (a^n, sendo n e a inteiros positivos).

Segundo o autor citado anteriormente, "no continente Europeu [Europa Continental], o sinal '$=$' não fez progressos substanciais até 1650 ou 1660, ou cerca de cem anos após seu surgimento na Álgebra de Recorde."[26] (CAJORI, 1928, p. 304, tradução nossa). Ainda de acordo com ele, pelo que se tem registro, as primeiras publicações não britânicas que utilizaram "$=$" como sinal de igualdade surgiram na Holanda e na Suíça. Foram elas: *Algebra ofte Nieuwe Stel-Regel* (1639) e *J. Stampioenii Wisk-Konstich ende Reden-maetich Bewijs* (1640), ambas de autoria do holandês Johan Stampioen (1610 - 1653), e *Teutsche Algebra* (1659), do suíço Johann Heinrich Rahn[27] (1622 – 1676). O matemático alemão Leibniz[28] (1646 – 1716) também utilizou o termo de Recorde para representar igualdade em seu *De arte combinatoria* (1666). Em Paris, a primeira publicação a utilizar "$=$" como sinal de igualdade que se tem conhecimento foi *Nouveaux Elemens de Geometrie* (1667) de Antoine Arnauld

---

[24] *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences,* tratado filosófico que versa sobre a ciência universal. Contém três anexos: *La dioptrique*, *Les météores* e *La géométrie*, sendo *La géométrie* o único trabalho sobre Matemática de Descartes (EVES, 2011).

[25] A primeira dessas publicações foi o livro *Miscellanies* (1659) de Samuel Foster, onde o sinal de igualdade de Descartes apareceu apenas nas passagens em latim. Nesse livro, grande parte das passagens em latim também foi traduzida para o inglês e nessas traduções utilizou-se o sinal de igualdade de Recorde. A outra publicação foi a tradução para o latim da Álgebra de Johann Alexander, publicada em 1693 (CAJORI, 1928).

[26] O texto em língua estrangeira é: "On the European Continent the sign = made no substantial headway until 1650 or 1660, or about a hundred years after the appearance of Recorde's algebra."

[27] Matemático suíço a quem se credita o primeiro uso do sinal de divisão ($\div$) (EVES, 2011).

[28] Gottfried Wilhelm Leibniz foi um filósofo, cientista e matemático alemão. É considerado, ao lado de Newton, criador do Cálculo Diferencial e Integral.

(1612 – 1694). Outros autores que utilizaram "$=$" como sinal de igualdade foram Jean Prestet (1648 – 1691), Jacques Ozanam (1640 – 1718), Bernard Nieuwentijt (1654 – 1718), Erhard Weigel (1625 – 1699), Thomas Fantet de Lagny (1660 – 1734), Louis Carré (1663 – 1711), L'Hôpital[29] (1661 – 1704) e Charles-René Reynaud (1656 – 1728).

Apesar de originalmente o termo "$=$" ter sido utilizado para expressar igualdade, no decorrer do tempo, alguns autores fizeram uso dele para expressar outros tipos de relações (CAJORI, 1928). Em seu livro *In artem analyticen isagoge* (1591), François Viète (1540 – 1603) utilizou o termo "$=$" para representar diferença algébrica. Já Descartes usou esse termo para representar a expressão "mais ou menos", o que hoje escrevemos como "$\pm$". Nessa miscelânea de significados atribuídos ao termo "$=$", ainda vemos Juan Caramuel (1606 – 1682), em seu livro *Mathesis Biceps vetus et nova* (1670), usar esse termo para separar a parte inteira da parte fracionária em expressões decimais ($102{,}807$ era escrito por ele como $102 = 807$). Por sua vez, Samuel Reyher (1635 – 1714), em *Euclides* (1698), e François Dulaurens, em *Specimina mathematica* (1667), usarem-no para expressar a relação de paralelismo entre retas (CAJORI, 1928). A atribuição de diversos significados ao longo do tempo trouxe para "$=$" a ameaça de ser rejeitado como sinal de igualdade. Cajori (1928) acredita que o uso de "$=$" para representar a diferença algébrica, por Viète e outros autores, tenha influenciado a decisão de Descartes de adotar outro sinal para igualdade, introduzindo o principal concorrente do sinal de igualdade de Recorde.

O começo do século XVIII é o momento que marca o início da vitória do signo "$=$" sobre o signo "ꝏ", na disputa pelo "posto" de sinal de igualdade. O único trabalho notável dessa época a adotar "ꝏ" como sinal de igualdade foi *Ars Conjectandi* (1713), de James Bernoulli (1654 – 1705). Nesse período, a grande descoberta matemática era o Cálculo Diferencial e Integral. "Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos pesquisadores em Matemática da época [...]" (EVES, 2011, p. 462). Newton e Leibniz, de forma independente, contribuíram com a criação de um "[...] *Cálculo* manipulável e proveitoso [...]" (EVES, 2011, p. 435), "[...] um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais [...]" (EVES, 2011, p. 435). Segundo Cajori (1928), o fato de Newton e Leibniz terem adotado o signo "$=$" como sinal de igualdade em seus trabalhos foi o que motivou sua adoção geral como tal, principalmente devido a Leibniz, cuja

[29] Guillaume François Antoine de L'Hôpital, também conhecido como marquês de L'Hôpital, foi um matemático francês autor do primeiro livro didático sobre Cálculo Diferencial e Integral. (www.larsoncalculus.com/calc10/content/biographies/lhopital-guillaume/. Acesso em: 14 jul. 2018.)

notação para o Cálculo mostrou-se mais “[...] conveniente e flexível do que a de Newton.” (EVES, 2011, p. 443) e acabou substituindo-a. Cajori (1928, p. 305) diz ainda que

> Se Leibniz tivesse favorecido “∝” de Descartes, então a Alemanha e o resto da Europa provavelmente teriam se juntado à França e aos Países Baixos na adoção dele, e o símbolo de Recorde provavelmente teria sido superado pelo de Descartes na Inglaterra, no momento em que, nesse país, a notação de Leibniz para o Cálculo substituiu a de Newton[30] (tradução nossa).

[30] O texto em língua estrangeira é: “Had Leibniz favored Descartes’ ∝, then Germany and the rest of Europe would probably have joined France and the Netherlands in the use of it, and Recorde’s symbol would probably have been superseded in England by that of Descartes at the time when the calculus notation of Leibniz displaced that of Newton in England.”

2 SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS DO SINAL "="

Neste capítulo, apresentamos todos os significados matemáticos do sinal de igualdade que conseguimos identificar neste estudo, além de descrever o método utilizado para encontrar tais significados. Com isso, apresentamos uma forma de analisar o significado de "=" que pode ser aplicada de maneira geral, indo além do contexto da Álgebra e da Aritmética escolar, como é de praxe nos trabalhos relacionados ao tema. Adicionalmente, analisamos, em função do contexto, os possíveis significados de "=" em uma mesma igualdade, estendendo tal análise à variação do significado de "=" ao longo de um mesmo discurso com múltiplas igualdades.

Para tanto, na Seção 2.1, descrevemos a metodologia empregada e os significados de "=" inicialmente identificados nesta pesquisa. Tais significados iniciais foram obtidos de outros trabalhos relacionados ao tema, sendo, portanto, frutos das pesquisas de outros autores. Na Seção 2.2, apresentamos, acompanhados de definição e de exemplificação, todos os significados do sinal de igualdade que conseguimos identificar mediante análise própria do uso desse sinal em diversos contextos, sendo, portanto, frutos deste estudo. Na Seção 2.3, fazemos uma análise da variação do significado do sinal de igualdade, tanto em função do contexto quanto em função da estrutura da igualdade, além de estudar os fatores que determinam tal variação.

2.1 Metodologia e resultados preliminares

Iniciamos nosso estudo analisando trabalhos que, em algum momento, discorrem os significados do sinal de igualdade. Parte desses trabalhos (como GONZÁLEZ, 2006), assim como o nosso, também fez uma análise dos significados de "=" em diversos contextos de uso, mas não levou em consideração somente contextos estritamente matemáticos. Dessa forma, encontramos nesses estudos significados de "=" que não são matematicamente aceitáveis, o que nos fez descartá-los por estarem fora do foco de nossa pesquisa. Um exemplo desses significados é o que González (2006) denominou "Separador". Segundo ela, "=" adquire esse significado quando é utilizado por alunos, em contextos algébricos, para separar "[...] os passos realizados na resolução de uma atividade"[31] (GONZÁLEZ, 2006, p. 149, tradução nossa). Por exemplo, isso ocorre quando os alunos escrevem "$(x-1)^2 = 3x = x^2 - 2x + 1 = 3x = x^2 - 5x + 1 = 0$" ao pedir que se escreva na forma reduzida a equação do 2º grau $(x-1)^2 = 3x$.

Listamos a seguir os significados matemáticos de "$=$" que encontramos após nossa análise inicial, acompanhados de uma breve descrição. Os nomes e as descrições dos significados foram extraídos do trabalho de González (2006), por se tratar do trabalho mais abrangente a respeito dos significados do sinal de igualdade que analisamos. Os significados inicialmente encontrados foram:

a) *Operacional*

O sinal de igualdade indica o resultado obtido após a realização de uma operação ou sequência de operações. Nesse caso, a operação, ou sequência de operações, fica localizada à esquerda de "$=$" com o respectivo resultado situado à direita dele. Outros autores que também reconhecem esse significado do sinal de igualdade são: Badaró (2010), Booth (1995), Behr, Erlwanger e Nichols (1980) e Cosme (2007). Exemplos de uso de "$=$" com tal significado são "$10 + 7 = 17$" ("7 adicionado a 10 resulta em 17") e "$(x-7) - 7{,}1x = -6{,}1x - 7$" ("ao subtrair $7{,}1x$ de $x - 7$, obtemos $-6{,}1x - 7$").

b) *Expressão de uma equivalência condicional*

O sinal de igualdade indica que as expressões algébricas[32] que constituem ambos os membros da igualdade[33] possuem o mesmo valor somente para algum ou alguns dos possíveis valores da(s) variável(is), podendo ser que isso não ocorra para nenhum desses valores. Autores que, além de González (2006), igualmente reconhecem esse significado de "$=$" são: Clapham e Nicholson (2009), Krantz (2000), Taylor (1910) e Velázquez (1980). Um exemplo de uso do sinal de igualdade com esse significado ocorre em "$2x = 17$".

[31] O texto em língua estrangeira é: " [...] los pasos realizados en la resolución de una actividad."

[32] Expressões formadas a partir de elementos de um corpo (conjunto dos números reais, racionais e complexos são alguns exemplos) e de uma ou mais variáveis usando as operações algébricas de adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação (KRANTZ, 2000).

[33] Conjunto de duas expressões matemáticas interligadas pelo sinal de igualdade (p. 18).

c) *Expressão de uma equivalência*[34]

O sinal de igualdade é usado para relacionar duas expressões aritméticas ou algébricas que representam um mesmo objeto matemático. Pode ser usado, por exemplo, para indicar decomposições de expressões aritméticas (ex.: $2 \times 3 = 3 + 3$), indicar a equivalência sucessiva de etapas em um cálculo (ex.: $4 \times (2 + 7) = 4 \times 9$), representar propriedades algébricas (ex.: $m + n = n + m$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$) ou expressar decomposições de expressões algébricas (ex.: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$). Exemplos de outros trabalhos que mencionam tal significado de "$=$" são: Cosme (2007), Cavalcanti (2008), Falkner, Levi e Carpenter (1999), Freudenthal (2002) e Taylor (1910).

d) *Definição de um objeto matemático*

Quando o sinal de igualdade é utilizado para definir ou atribuir um nome a uma função ou a outro objeto matemático. Também encontramos referência a esse significado de "$=$" em Freudenthal (2002). Dois exemplos, fornecidos por González (2006, p. 152), em que "$=$" possui esse significado são "$f(x) = 2x + 3$" e "$a^0 = 1$, onde $a \in \mathbb{N}$". Outro exemplo de uso do sinal de igualdade com esse significado, fornecido por Freudenthal (2002), ocorre em "$a + b = c$", quando utilizado para introduzir um nova expressão, "c", para designar a soma de a e b.

e) *Expressão de uma relação funcional ou dependência*

Significado atribuído ao sinal "$=$" quando usado para expressar certa relação de dependência entre variáveis ou constantes desconhecidas. Encontramos referência a esse significado em Cavalcanti (2008), Freudenthal (2002) e Usiskin (1988). Esse é o significado do sinal de igualdade na fórmula $C = 2\pi r$, que fornece o comprimento C de uma circunferência em função do seu raio r.

f) *Atribuição de um valor numérico*

O sinal de igualdade é usado para atribuir um valor numérico a uma expressão ou indicar o valor da incógnita após resolver uma equação. Esse é o significado de "$=$" em "$x = -3$" quando aparece no seguinte contexto: "Determine o valor de $2x + 7$ quando $x = -3$.". Além de González

[34] Qualquer relação que goze das propriedades simétrica, reflexiva e transitiva (GONZÁLEZ, 2006).

(2006), não encontramos referência a esse significado nos trabalhos analisados.

Cumpre ressaltar que os significados matemáticos de “$=$” inicialmente encontrados referem-se ao uso desse sinal somente em contextos algébricos e aritméticos que surgem no estudo dessas disciplinas ao longo da Educação Básica. Neste estudo, entretanto, fizemos uma catalogação mais geral dos significados matemáticos do sinal de igualdade. Levamos em conta contextos de uso de “$=$” nos mais diversos conteúdos matemáticos abordados desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, adentrando nos mais diversos campos de estudo da Matemática. Além disso, entendemos que alguns dos significados de “$=$” citados anteriormente não foram expressos de forma precisa ou englobam mais de uma acepção, como é o caso do significado *definição de um objeto matemático*.

Definir não é somente dar nomes a objetos matemáticos. *Definir* é nomear objetos em consequência de determinadas propriedades interessantes que somente esses objetos possuem (MORAIS FILHO, 2012). Dessa forma, quando o sinal de igualdade é utilizado para definir, dá-se origem a novos conceitos, considerados importantes por algum motivo. Por exemplo, na igualdade “$A \cup B = \{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$”, o sinal “$=$” é utilizado para definir a união de dois conjuntos A e B, representada aqui pela expressão “$A \cup$ B”; portanto, essa igualdade não tem como intuito principal dizer que “$A \cup B$” é o nome do conjunto $\{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$, mas sim explicar o que vem a ser o novo conceito que será representado por “$A \cup B$”, utilizando o conjunto $\{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$ para isso. Contudo, às vezes, nomeamos objetos matemáticos sem nos importar com as propriedades que esses objetos possuem. Fazemos isso apenas com o intuito de codificar, facilitando repetidas citações futuras desses objetos, sem que isso dê origem a novos conceitos. Isso acontece em situações como: “Considerando que $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$, determine $\mathbb{N} - A$”. Em vista disso, o significado *definidor de um objeto matemático* de “$=$” não consiste em um só significado, mas engloba dois significados distintos.

Tomando como ponto de partida os significados de “$=$” citados anteriormente, demos prosseguimento à nossa pesquisa analisando livros didáticos de Matemática, da Educação Básica e do Ensino Superior. Tais livros têm a função de fonte de contextos de uso do sinal de igualdade na Matemática, pois, como vimos no Capítulo 1 (p. 15), é quase impossível dar conta da significação plena de uma expressão linguística sem considerar, entre outros aspectos, o seu contexto de uso. Essa segunda etapa da pesquisa tem dois objetivos: comprovar a existência dos significados do sinal de igualdade previamente identificados e verificar se há significados de “=” na Matemática que não encontramos na pesquisa inicial. Para determinar os significados de “=” nessa nova etapa, primeiro fizemos um reconhecimento dos diferentes contextos de uso das igualdades, o que nos permitiu estabelecer os distintos significados que uma igualdade pode ter. Com isso, classificamos as igualdades em função de seus significados e, a partir dessa classificação, determinamos os diferentes significados do sinal de igualdade.

Na segunda fase da pesquisa, encontramos todos os significados matemáticos de “=” elencados na primeira etapa, mas também identificamos novos significados matemáticos de “=”. Nos livros didáticos analisados, focamos primordialmente em trechos nos quais transparecem, de forma suficientemente clara, o significado do sinal de igualdade. Por “suficientemente clara”, queremos dizer que há algum comentário explicando a intenção de uso do sinal de igualdade, tornando mais precisa a identificação do significado desse sinal no contexto em que aparece. Fizemos isso com o principal intuito de deixar o trabalho menos parcial possível. Alguns desses trechos são apresentados na próxima seção.

2.2 Descrição dos significados matemáticos do sinal de igualdade

Apresentamos, agora, os significados do sinal de igualdade que conseguimos identificar na segunda etapa desta pesquisa. Para facilitar a descrição e compreensão desses significados, eles são apresentados em função do tipo de igualdade que contém o sinal “=”. Dessa forma, primeiro fazemos um estudo do significado da igualdade em que “=” está inserido para, então, de acordo com esse estudo, definirmos o significado de “=” nesse tipo de igualdade. Por essa razão, quando quisermos fazer referência ao significado que “=” possui em certa igualdade do tipo A, dizemos “‘=’ como signo de igualdade A”. Posto isso, para evitar a repetição fatigante da expressão “‘=’ como signo de” nos títulos das subseções seguintes, mencionamos apenas o tipo de igualdade correspondente ao significado de “=” que pretendemos descrever. Além disso, para cada significado descrito, fornecemos exemplos do uso de “=” com tal significado, sendo esses exemplos próprios ou de outros autores de alguma área da Matemática ou da Educação Matemática.

2.2.1 Igualdade comparativa

Uma *igualdade comparativa* expressa uma comparação entre dois objetos ou valores, representados geralmente de formas diferentes, dizendo que, na verdade, eles são os mesmos. Pode ser utilizada, por exemplo, para dizer que duas grandezas[35] têm o mesmo valor ou intensidade (como "$1\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{cm}$", quando usada para dizer que $1\ \mathrm{m}$ equivale a $100\ \mathrm{cm}$); representar que duas expressões numéricas têm o mesmo valor (como "$2 - 3 = 1 \times (-1)$", quando escrita com o intuito de expressar que o valor de $2 - 3$ é o mesmo que o valor de $1 \times (-1)$); indicar identidades (como "$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$", onde $a, b \in \mathbb{R}$, quando usada para expressar que o produto da soma dos reais a e b pela diferença entre eles vale o mesmo que a diferença entre seus quadrados). Assim, em uma igualdade comparativa, "$=$" é um signo cujo significado é *ambos os membros da igualdade são expressões que representam o mesmo objeto ou possuem o mesmo valor*.

Esse significado de "$=$" é uma das acepções[36] do significado "expressão de uma equivalência", identificado na etapa inicial desta pesquisa (p. 29). O motivo desse significado citado na etapa inicial abarcar mais de uma acepção deve-se ao fato de, ao relacionarmos duas expressões de mesmo valor ou que representam um mesmo objeto matemático, não necessariamente pretendemos expressar comparação. Por exemplo, como será explicado na Subseção 2.2.4, ao indicarmos uma decomposição, temos uma intenção diferente de somente afirmar que duas expressões representam objetos ou valores idênticos.

Nos textos atuais que abordam conteúdos de Matemática, o sinal "$=$" geralmente é caracterizado como sendo signo de igualdade comparativa. "Quando se escreve $a = b$, isto significa que a e b são símbolos usados para designar o mesmo objeto" (LIMA et al., 2006, p. 20), ou seja, a e b devem ser entendidos como nomes do mesmo ente (FREUDENTHAL, 2002). Alguns autores de livros didáticos da Educação Básica também compartilham do mesmo entendimento. Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2012, p. 118), restringindo-se a números, escrevem que, "de um modo geral, podemos representar uma igualdade por $a = b$, onde a e b são nomes diferentes para um mesmo número."

---

[35] "É tudo que é suscetível de aumento ou diminuição. É o que se pode comparar ou medir" (CARDOSO, 2007).

[36] A outra acepção, como será visto na Subseção 2.2.4, é "exprimir uma igualdade decomponente". Porém, nesta segunda etapa da pesquisa, essas acepções assumem um caráter mais geral, pois não se restringem a contextos aritméticos e algébricos da Educação Básica.

Além dos citados anteriormente, alguns exemplos de uso de “$=$” como signo de igualdade comparativa são:

a) “*Dois pares ordenados* $p = (x, y)$ *e* $q = (u, v)$ *serão chamados iguais quando* $x = u$ *e* $y = v$, *isto é, quando tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada.*” (LIMA et al., 2006, p. 89). Nas expressões “$x = u$” e “$y = v$”, o sinal “$=$” é signo de igualdade comparativa, pois expressa que ambos os membros representam o mesmo número. Aqui, se escrevermos “$p = q$”, para dizer que p e q são, na verdade, o mesmo par ordenado, “$=$” também é signo de igualdade comparativa.

b) “*Deduz-se diretamente da definição de união de dois conjuntos que* $A \cup B$ *e* $B \cup A$ *são o mesmo conjunto, isto é,*

$A \cup B = B \cup A$.” (LIPSCHUTZ, 1964, p. 24).

O sinal “$=$” é signo de igualdade comparativa em “$A \cup B = B \cup A$”, pois exprime que as expressões “$A \cup B$” e “$B \cup A$” designam o mesmo conjunto.

c) “*Lembrando...*

$\frac{3}{4}$ *e* $\frac{6}{8}$ *são frações equivalentes, pois representam a mesma quantidade.*

Existem infinitas frações equivalentes a $\frac{3}{4}$.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \cdots$” (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2015, p. 132).

Nas igualdades “$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$”, “$\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$”, “$\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$” e “$\frac{12}{16} = \frac{15}{20}$”, tem-se que “$=$” é signo de igualdade comparativa, visto que comunica que ambos os membros de cada igualdade, que são expressões que designam números, representam a mesma quantidade.

d) “*Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$ *tem-se*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de $m + n$ *fatores iguais a* a.” (LIMA et al., 2006, p. 192).

Aqui, “$=$” é signo de igualdade comparativa em “$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$”, pois expressa que “$a^n \cdot a^m$” e “a^{n+m}” são signos que representam o mesmo número.

2.2.2 Igualdade instrutiva

Uma *igualdade instrutiva* indica as ações que devem ser realizadas em uma situação particular para que, com isso, possamos determinar o valor de uma expressão específica, que constitui o primeiro membro da igualdade. Nesse tipo de igualdade, o intuito não é comparar os valores das expressões situadas à direita e à esquerda de "=", mas sim deixar claras as ações, cuja aplicabilidade restringe-se apenas à situação em questão (podendo ser que valha em outras situações análogas), e os objetos particulares sobre os quais elas devem ser aplicadas a fim de se obter o valor de uma expressão. Um exemplo desse tipo de igualdade ocorre quando se escreve "$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2\times 4}{3\times 5} = \frac{8}{15}$" ao determinar o valor de $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$. A igualdade "$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2\times 4}{3\times 5}$" é instrutiva, pois objetiva evidenciar as ações que devem ser realizadas sobre os numeradores e os denominadores das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ a fim de se encontrar o produto de uma pela outra. Outro exemplo de igualdade instrutiva ocorre em "$D_x(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$", ao se determinar a derivada da função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em tal exemplo, "$D_x(x^3) = 3x^{3-1}$" é uma igualdade instrutiva, pois foi construída com o intuito de explicitar as ações que devem ser realizadas sobre o monômio x^3 a fim de se obter $D_x(x^3)$.

Convém observar que uma igualdade instrutiva é uma igualdade intermediária, no sentido de que, após as ações indicadas, devemos fornecer o objeto obtido em consequência da realização dessas ações, que é o valor da expressão que constitui o primeiro membro da igualdade. No primeiro exemplo aqui citado, utilizamos a igualdade "$\frac{2\times 4}{3\times 5} = \frac{8}{15}$"[37] para fornecer o objeto obtido em consequência da realização das ações indicadas pela expressão "$\frac{2\times 4}{3\times 5}$", a saber, $\frac{8}{15}$. Por sua vez, no segundo exemplo, utilizamos a igualdade "$3x^{3-1} = 3x^2$"[38] para mostrar o objeto obtido em consequência da realização das ações indicadas pela expressão "$3x^{3-1}$", a saber, $3x^2$.

Em uma igualdade instrutiva, o significado de "=" é *o segundo membro da igualdade explicita as ações, em princípio, aplicáveis somente ao contexto em questão, que devem ser realizadas sobre objetos particulares representados no primeiro membro a fim de que*

---

[37] A igualdade "$\frac{2\times 4}{3\times 5} = \frac{8}{15}$" é comparativa, pois expressa que as frações $\frac{2\times 4}{3\times 5}$ e $\frac{8}{15}$ possuem o mesmo valor, sendo a primeira fração aquela cujo numerador é o produto de 2 por 4 e o denominador, o produto de 3 por 5.

[38] A igualdade "$3x^{3-1} = 3x^2$" é comparativa, pois expressa que os monômios $3x^{3-1}$ e $3x^2$ são os mesmos.

possamos obter o valor desse último. Esse é o primeiro significado totalmente novo do sinal de igualdade (isto é, em relação ao qual não encontramos nenhuma referência na primeira etapa da pesquisa) que conseguimos identificar na segunda etapa deste estudo. Exemplos adicionais do uso de "$=$" com tal significado são:

a) "*Qual é o quociente de* 6 *dividido por* $\frac{2}{3}$*?*

   Solução*: Dividir* 6 *por* $\frac{2}{3}$ *é dividir* 6 *pela terça parte de* 2*. Isto se consegue multiplicando* 6 *por* 3 *e dividindo depois o produto por* 2*; o resultado, que é* 9*, será o quociente.*

   $6 \div \frac{2}{3} = \frac{6\times 3}{2} = 9$" (TRAJANO, 1952, p. 95, grifo do autor).

   Em "$6 \div \frac{2}{3} = \frac{6\times 3}{2}$", o sinal "$=$" é signo de igualdade instrutiva, porque explicita a sequência de operações que devemos realizar com os números 2, 3 e 6 para que possamos encontrar o valor de $6 \div \frac{2}{3}$.

b) "*Para obter o produto de monômios, multiplicamos os coeficientes e, depois, multiplicamos as variáveis da parte literal.*

   $2a \cdot 4ab = 2 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot b = 8a^2b$" (CHAVANTE, 2015, p. 116)

   Aqui, "$2a \cdot 4ab = 2 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot b$" foi estabelecida com o intuito de explicitar as operações que devemos realizar com os coeficientes e partes literais dos monômios $2a$ e $4ab$ a fim de obter o produto de um pelo outro. Portanto, nessa igualdade, o sinal "$=$" é signo de igualdade instrutiva.

c) *Seja* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função tal que* $f(x) = x - 2$*. Determine* $f(4)$.

   Solução: *Temos que* $f(4) = 4 - 2 = 2$.

   A igualdade "$f(4) = 4 - 2$" objetiva explicitar as operações que devemos realizar sobre o número 4 para obtermos sua imagem pela função f, representada por "$f(4)$". Assim, em "$f(4) = 4 - 2$", o sinal "$=$" é signo de igualdade instrutiva.

2.2.3 Igualdade representacional

Uma *igualdade representacional* indica outro signo que possui o mesmo significado de algum signo previamente conhecido. Aqui, a intenção não é estabelecer uma comparação entre os objetos que as expressões representam, mas mostrar que signos de significantes diferentes possuem o mesmo significado; ou seja, a atenção está voltada para o âmbito do significado e não do referente. Um exemplo desse tipo de igualdade é "$\log 100 = \log_{10} 100$", quando surge no seguinte contexto: "Quando a base do logaritmo de um número for 10, podemos omiti-la. Portanto, $\log 100 = \log_{10} 100$". Nesse contexto, essa igualdade objetiva dizer que "$\log 100$" é um signo que possui o mesmo significado do signo previamente conhecido "$\log_{10} 100$", sendo, portanto, outro signo para o conceito "logaritmo decimal do número 100". Aqui, o referente dos signos "$\log 100$" e "$\log_{10} 100$", a saber, o número 2 (o valor do logaritmo decimal de 100), está em segundo plano. Nesse contexto, "$=$" é o signo cujo significado é *o segundo* (*primeiro*) *membro da igualdade é outro signo que possui o mesmo significado do signo previamente conhecido que constitui o primeiro* (*segundo*) *membro da igualdade; portanto, esse outro signo é uma forma diferente de representar o conceito expresso pelo signo previamente conhecido*. Esse é outro significado de "$=$" em relação ao qual não encontramos referência alguma na primeira etapa deste estudo. Seguem outros exemplos em que o sinal "$=$" surge com tal significado:

a) "[...] *algumas notações alternativas para a derivada são como segue:*

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} \text{ [...]}$$

O símbolo dy/dx, introduzido por Leibniz, não deve ser encarado como um quociente (por ora); trata-se simplesmente de um sinônimo para $f'(x)$." (STEWART, 2006, p. 169).

Nas igualdades "$f'(x) = y'$" e "$y' = \frac{dy}{dx}$", o sinal "$=$" é signo de igualdade representacional. Isso porque, no primeiro caso, esse sinal exprime que o signo "y'" possui o mesmo significado do signo previamente conhecido "$f'(x)$", sendo, portanto, outro signo para o conceito "derivada de uma função". Por sua vez, no segundo caso, o sinal de igualdade diz que "$\frac{dy}{dx}$" é outro signo que possui o mesmo significado do, agora, signo previamente conhecido "y'"; dessa forma, o signo "$\frac{dy}{dx}$" é outra forma de representar o mesmo conceito indicado pelo signo "y'", a saber, "derivada de uma função".

b) "*Observe-se que <u>b</u> $[b > 0]$ é divisor de <u>a</u> se e somente se o resto $r = 0$. Neste caso, temos $a = bq$ e o quociente q na divisão exata de a por b*

indica-se também por $\frac{a}{b}$ *ou* a/b *(*$q = \frac{a}{b} = a/b$*), que se lê 'a sobre b'.*" (ALENCAR FILHO, 1985, p. 76, grifo do autor).

O sinal "$=$" é signo de igualdade representacional em "$q = \frac{a}{b}$" e "$\frac{a}{b} = a/b$", pois, em ambos os casos, expressa que o signo à direita do sinal "$=$" possui o mesmo significado do signo previamente conhecido situado à esquerda desse sinal; assim, o segundo membro de qualquer uma dessas igualdades é outra forma de expressar o conceito "quociente na divisão exata de dois números".

c) "*Neste momento, é natural nos perguntarmos sobre quantas retas podem ser traçadas por dois pontos dados. Assumiremos que podemos traçar exatamente uma tal reta. Em resumo, por dois pontos distintos* A *e* B *do plano, podemos traçar uma única reta* [...]. *Nesse caso, sendo* r *a reta determinada por tais pontos, denotamos, alternativamente,* $r = \overleftrightarrow{AB}$." (MUNIZ NETO, 2013, p. 3).

Aqui, o sinal "$=$" é signo de igualdade representacional, visto que, em tal contexto, objetiva indicar que o signo "$\overleftrightarrow{AB}$" possui o mesmo significado do signo previamente conhecido "r", sendo, portanto, outro signo para "reta determinada por dois pontos".

2.2.4 Igualdade decomponente

Uma *igualdade decomponente* expressa que determinado objeto matemático pode ser reescrito como uma sequência de operações sobre outros objetos matemáticos. Apesar de também informar outras maneiras de se representar determinado objeto matemático por escrito, esse tipo de igualdade não estabelece que os significados dos signos à esquerda e à direita do sinal de igualdade são idênticos. O foco desse tipo de igualdade está no plano do referente, isto é, das operações e dos objetos utilizados para se obter algum outro objeto. Entretanto, diferentemente de uma igualdade comparativa (Subseção 2.2.1, p. 32), uma igualdade decomponente não objetiva comparar os objetos representados nos membros das igualdades. Ela visa explicitar as operações e os objetos sobre os quais essas operações devem ser realizadas para que, com isso, obtenhamos determinado objeto matemático a partir delas.

Por exemplo, a igualdade "$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$", indicando a fatoração do binômio $x^2 - 4$, é decomponente. Ela expressa que $x^2 - 4$ pode ser decomposto na multiplicação do polinômio $x - 2$ pelo polinômio $x + 2$; portanto, o foco está na operação e nos polinômios sobre os quais essa operação é aplicada a fim de se obter o binômio $x^2 - 4$. Outro exemplo é a igualdade "$527 = 500 + 27$", quando surge no seguinte contexto: "O número 527 pode ser escrito de várias maneiras por meio de uma soma de dois números naturais. Por exemplo, $527 = 500 + 27$". Ela expressa que o número 527 pode ser escrito como a soma de 500 e 27. Novamente, nessa igualdade, o foco está na operação e nos números utilizados com o intuito de se obter o número 527. Aqui, "$=$" é um signo cujo significado é *o objeto matemático, representado pelo primeiro membro da igualdade, pode ser reescrito como uma sequência de operações sobre certos objetos matemáticos, indicados no segundo membro da igualdade*. Esse significado é a outra acepção mais geral do significado "expressão de uma equivalência" (p. 32). Outros exemplos de situações em que o sinal de igualdade possui esse significado são:

a) "[...] $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$. [...]
   O vetor $\vec{v}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ quando é soma de múltiplos escalares destes vetores." (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013, p. 31).
   A igualdade presente nesse exemplo tem intenção de mostrar, em hipótese, que o vetor $\vec{v}$ pode ser expresso por meio de uma soma de múltiplos escalares dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$; portanto, o foco está nas operações, nos escalares e nos vetores utilizados para se obter $\vec{v}$. Assim, nesse caso, "$=$" é signo de igualdade decomponente.

b) "*Note que o conjunto dos números inteiros é particionado em três subconjuntos:*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

   onde $-\mathbb{N}$ é o conjunto dos simétricos dos elementos de $\mathbb{N}$." (HEFEZ, 2016, p. 4).
   Nesse contexto, a igualdade "$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$" indica que o conjunto $\mathbb{Z}$ pode ser escrito como a união dos conjuntos $-\mathbb{N}$, $\{0\}$ e $\mathbb{N}$. Assim, novamente o foco está nos conjuntos e nas operações que permitem obter $\mathbb{Z}$. Portanto, nesse exemplo, "$=$" é signo de igualdade decomponente.

c) “*Se* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são dois inteiros não conjuntamente nulos* ($a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$), *então existe e é único o* $mdc\,(a,b)$*; além disso, existem inteiros* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$ *tais que*

$$mdc\,(a,b) = ax + by$$

isto é, o $mdc\,(a,b)$ *é uma combinação linear de* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$.” (ALENCAR FILHO, 1985, p. 85, grifo do autor).

Na expressão “$mdc\,(a,b) = ax + by$”, o sinal “$=$” expressa que o $mdc\,(a,b)$ pode ser reescrito como uma soma de múltiplos de a e b, estando, portanto, o foco dirigido para as operações (multiplicação e adição) e para os números (a, b, x e y) presentes na igualdade. Dessa forma, aqui, “$=$” é signo de igualdade decomponente.

2.2.5 Igualdade definidora

Uma *igualdade definidora* tem como objetivo indicar o significado de certo signo, designado pelo primeiro membro da igualdade, que será representante de um novo conceito. Esse tipo de igualdade caracteriza-se por associar, em certo contexto, um significado *fixo* a um significante, de modo que, na teoria da qual o significante faz parte, ele sempre vai estar associado ao significado a ele agregado por uma igualdade definidora. Por exemplo, na teoria dos conjuntos, ao significante “$A \cap B$”, associa-se o conceito (significado) de interseção de dois conjuntos A e B através da igualdade definidora “$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$”. Dessa forma, na Teoria dos Conjuntos, “$A \cap B$” sempre vai ser signo de “interseção de dois conjuntos A e B”. Aqui, o sinal de igualdade significa *o signo que constitui o primeiro membro da igualdade representa um novo conceito e possui sempre o mesmo significado da expressão que representa o segundo membro da igualdade*. Esse significado de “$=$” é resultado do desmembramento do significado “definição de um objeto matemático” (dado na etapa inicial deste estudo), conforme explicado na Seção 2.1 (p. 29). Outros exemplos em que “$=$” é usado como signo de igualdade definidora são:

a) “*A* ***derivada de uma função*** $\boldsymbol{f}$ ***em um número*** $\boldsymbol{a}$, *denotada por* $f'(a)$, *é*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existe." (STEWART, 2006, p. 158, grifo do autor).

Nesse exemplo, a igualdade explica o significado do signo "$f'(a)$", que representa o novo conceito "derivada de uma função em um ponto", utilizando a expressão "$lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$" para isso. Dessa forma, no Cálculo Diferencial e Integral, "$f'(a)$" sempre vai estar associado a esse conceito. Portanto, nesse caso, "$=$" é signo de igualdade definidora.

b) "*A adição de dois racionais a/b e c/d é definida por:*
$a/b + c/d = (ad + bc)/bd$." (FEITOSA; NASCIMENTO; ALFONSO, 2011, p. 142).

O sinal "$=$" é signo de igualdade definidora em "$a/b + c/d = (ad + bc)/bd$". Isso porque, por meio de tal igualdade, tem-se o intuito de estabelecer o significado do signo "$a/b + c/d$", representante do novo conceito "soma de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$", e, consequentemente, definir o significado do signo "$+$", que representa o novo conceito "adição de números racionais". Cumpre notar que, apesar de os significantes serem os mesmos, o signo "$+$", à direita de "$=$", e o signo "$+$", à esquerda de "$=$", têm significados diferentes. Nesse contexto, o que está à direita de "$=$" significa "adição de números inteiros", que é um conceito que se supõe já definido; por sua vez, o que está à esquerda de "$=$" tem o seu significado estabelecido pela igualdade definidora em questão. Dessa forma, "$a/b + c/d$" sempre será signo do número racional $(ad + bc)/bd$, e "+", quando surgir em "$a/b + c/d$", sempre será signo de "adição de números racionais".

c) "*Uma matriz **A** consiste em um arranjo retangular de números ou elementos arrumados em m linhas e n colunas – ou seja,*

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$." (BOYCE; DIPRIMA, 2010, p. 284).

A igualdade presente nesse exemplo indica o significado do signo "***A***", que é

$$\text{"}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\text{"},$$

isto é, um "arranjo retangular de elementos dispostos em linhas e colunas". Assim, no estudo das matrizes, "$\boldsymbol{A}$" é sempre signo do novo conceito "matriz". Nesse caso, então, "$=$" é signo de igualdade definidora.

2.2.6 Igualdade nomeante

Uma *igualdade nomeante* tem a função de nomear, ou seja, associar uma expressão a determinado objeto, para que se possa, então, passar a utilizar essa expressão para se referir a tal objeto. Diferentemente do que acontece com uma igualdade definidora, a igualdade nomeante não gera um novo conceito, servindo essencialmente para codificar, principalmente quando se deseja facilitar o processo de citar repetidas vezes um mesmo objeto.

Cumpre notar que uma igualdade nomeante associa um significado contextual a uma expressão, de modo que, em determinado momento essa expressão possui certo significado, a ela atribuído por uma igualdade nomeante, mas pode possuir um novo significado em outro momento. Por exemplo, na teoria dos números naturais, podemos utilizar a expressão "n" para designar um número natural par $2k$, escrevendo $n = 2k$; nesse caso, "n" seria signo de "número natural par $2k$". Entretanto, podemos, em outro momento, usar a mesma expressão "n" para designar o sucessor de um inteiro m, escrevendo $n = m + 1$; nesse caso, "n" seria signo de "sucessor de m". Nesses casos, as igualdades "$n = 2k$" e "$n = m + 1$" são nomeantes.

Em uma igualdade nomeante, "$=$" é o signo cujo significado é *o primeiro membro da igualdade designará, no contexto em questão, o objeto representado pelo segundo membro da igualdade*. Esse significado é outra consequência do desmembramento do significado "definição de um objeto matemático". Além dos citados anteriormente, exemplos de utilização do sinal de igualdade com tal significado são:

a) "*Se* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{9}{3^x} - 27 < 0\}$, *então* $A \cap B$ *é:* [...]" (IEZZI et al., 2004a, p. 194).

   Nas igualdades anteriores, objetiva-se apenas designar os conjuntos "$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\}$" e "$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{9}{3^x} - 27 < 0\}$ por "A" e "B", respectivamente, para facilitar futuras referências a tais conjuntos. Além disso, os signos "A" e "B" não são representantes de um novo conceito e não se está associando significados fixos a nenhum deles. Portanto, em cada uma das igualdades, “=” é o signo de igualdade nomeante.

b) “[...] *Mas certamente, se considerarmos*

$$D = \{a \in \bar{X};\ \textit{existe}\ \lim_{x \to a} f(x)\}^{39}$$

então f *se estende a uma aplicação contínua* $F: D \to N$, *definida por* $F(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.” (LIMA, 2011, p. 179).

Nesse exemplo, novamente está sendo usado um signo, “D”, para designar um objeto, a saber, $\{a \in \bar{X};$ existe $\lim_{x \to a} f(x)\}$, para facilitar sua futura citação, que ocorre em “$F: D \to N$”; ademais, “D” é signo de “$\{a \in \bar{X};$ existe $\lim_{x \to a} f(x)\}$” apenas nesse contexto, além de não representar um novo conceito. Sendo assim, “=” é o signo de igualdade nomeante em $D = \{a \in \bar{X};$ existe $\lim_{x \to a} f(x)\}$.

c) “[...] *Mostraremos que, entre os números racionais, não existe* $\sup X$ *nem* $\inf Y$ [onde $X, Y \subset \mathbb{Q}$]. *Suponhamos, primeiro, que existisse* $a = \sup X$. *Seria forçosamente* $a > 0$. [...]” (LIMA, 1976, p. 63).

Aqui, “$a = \sup X$” expressa que “a”, que não representa um novo conceito, designa o $\sup X$ apenas nesse contexto, objetivando facilitar futuras referências a esse número. Portanto, “=” também é signo de igualdade nomeante nesse caso.

2.2.7 Igualdade determinante

Uma *igualdade determinante* é utilizada para indicar o valor de uma expressão matemática que não contém operadores, seja atribuindo um valor a ela, seja especificando o valor que ela representa, após a realização de um cálculo ou outro tipo de ação (como usar uma propriedade conhecida desse valor). Não confundir esse tipo de igualdade com a igualdade nomeante, pois, no contexto da primeira, possuímos previamente uma expressão e depois especificamos o objeto que ela representa, ou atribuímos um objeto a ela; mas, na segunda, temos previamente um objeto e depois o designamos por uma expressão para

[39] Os signos “;” e “|” possuem o mesmo significado, a saber, *tal que*.

facilitar futuras citações. Exemplos desse tipo de igualdade ocorrem na seguinte situação: "Sabendo que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = 2x$, determine $f(x)$ quando $x = 1$. Com efeito, $f(1) = 2 \times 1 = 2$; portanto, $f(1) = 2$.". Em tal situação, as igualdades "$x = 1$" e "$f(1) = 2$" são determinantes. A primeira por expressar uma atribuição de valor à variável x (citada previamente na igualdade "$f(x) = 2x$"), dizendo para considerar seu valor como sendo 1, e a segunda por especificar o valor da imagem do número 1 pela função f, a saber, 2. Nesse contexto, "=" significa *o primeiro membro da igualdade possui ou assume o valor indicado pelo segundo membro da igualdade*. Esse significado de "=" é uma extensão do significado "atribuição de um valor numérico", apresentado na etapa inicial deste estudo (p. 29). Isso porque esse significado, inicialmente identificado, refere-se apenas a atribuições numéricas. Exemplos adicionais de uso de "=" como signo de igualdade determinante são:

a) "*Se* $A = (-2, 3)$, $B = (0, 1)$ *e* $C = (4, 2)$, *calcule o cosseno do ângulo* $\theta = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. [...] [Realizando-se os cálculos necessários, chega-se a] $\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{74}}$."[40] (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013, p. 39).

   Na igualdade "$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{74}}$", o sinal "=" é signo de igualdade determinante, pois especifica o valor de $\cos\theta$, que é $\frac{7}{\sqrt{74}}$.

b) "*Seja* $\lim x_n = a$. *Dado qualquer número real* $b \neq a$, *mostraremos que não se tem* $\lim x_n = b$. *Para isso, tomemos* $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$. [...]" (LIMA, 1976, p. 85).

   A igualdade "$\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$" tem o intuito de indicar uma atribuição de valor à constante desconhecida ε, dizendo para considerá-la valendo $\frac{|b-a|}{2}$; portanto, nesse contexto, "=" é signo de igualdade determinante.

c) "[Determine a raiz da função $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$] *Temos:*

   $f(x) = 0 \implies ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}$" (IEZZI et al., 2004a, p. 74).

   Aqui, a igualdade "$x = -\frac{b}{a}$" especifica o valor da incógnita x (que representa a raiz da função f), após a resolução de uma equação, dizendo

[40] Nesse exemplo, as igualdades "$A = (-2, 3)$", "$B = (0, 1)$", "$C = (4, 2)$" e "$\theta = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$" são todas nomeantes, pois, além de não gerar novos conceitos, nem associar significados fixos aos signos "A", "B", "C" e "θ", são usadas para designar objetos, a saber, $(-2, 3)$, $(0, 1)$, $(4, 2)$ e $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, para facilitar futuras referências a eles.

que ela vale $-\frac{b}{a}$. Sendo assim, "$=$" é signo de igualdade determinante em "$x = -\frac{b}{a}$".

2.2.8 Igualdade operacional

Analogamente ao que foi dito na primeira etapa desta pesquisa (p. 28), uma *igualdade operacional* visa indicar o resultado obtido após a realização de uma operação ou sequência de operações. Nesse tipo de igualdade, as operações realizadas estão presentes no primeiro membro da igualdade, e o resultado obtido é representado pelo segundo membro. A expressão "$\{1, 2\} \cup \{-1, 0, 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$", quando usada para exprimir que a união de $\{1, 2\}$ e $\{-1, 0, 3\}$ é igual a $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, é um exemplo de igualdade operacional, pois indica o resultado da união de dois conjuntos. Aqui, "$=$" tem o significado de *o objeto representado pelo segundo membro é o resultado da sequência de operações presentes no primeiro membro da igualdade*. Esse é, em grande parte das vezes, o único significado atribuído por alunos do Ensino Fundamental ao sinal de igualdade (BEHR; ERLWANGER; NICHOLS, 1980; CAMICI et al., 2002; CIVINSKI; BAIER, 2014; FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999), que, na literatura, geralmente é classificado como visão operacional ou significado operacional do sinal de igualdade. Outros exemplos de uso do sinal de igualdade com tal significado são:

a) "*Digite um número de três algarismos – digamos,* 471. *Repita-o, obtendo* 471.471. *Agora divida esse número por* 7, *divida o resultado por* 11 *e divida o resultado por* 13. *Nesse caso, temos:*
$471.471/7 = 67.353$
$67.353/11 = 6.123$
$6.123/13 = 471$ [...]" (STEWART, 2009, p. 28).
Nas igualdades "$471.471/7 = 67.353$", "$67.353/11 = 6.123$" e "$6.123/13 = 471$", o sinal "$=$" é signo de igualdade operacional, porque indica o resultado da divisão de dois números.

b) *Determine o valor de* $\begin{pmatrix} 2 & -0{,}3 \\ 3 & 3{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1{,}7 \\ -11 & 10{,}8 \end{pmatrix}$.
Solução *Temos que* $\begin{pmatrix} 2 & -0{,}3 \\ 3 & 3{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1{,}7 \\ -11 & 10{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$.

Nesse exemplo, “=” é signo de igualdade operacional, pois expressa o resultado da adição de duas matrizes.

c) *“[...] Para isso, devemos dividir o polinômio* $6x^2 + 9x$ *pelo monômio* $3x$*, ou seja, achar o polinômio que multiplicado por* $3x$ *dá* $6x^2 + 9x$*.*
Esse polinômio é $2x + 3$, *pois:* $(3x) \cdot (2x + 3) = 6x^2 + 9x$.” (BIANCHINI, 2002, p. 54).
A igualdade “$(3x) \cdot (2x + 3) = 6x^2 + 9x$” visa expressar o resultado da multiplicação de $3x$ por $2x + 3$, que é $6x^2 + 9x$. Assim, nesse caso, “=” é signo de igualdade operacional.

2.2.9 Igualdade condicional

Uma *igualdade condicional* estabelece uma condição que deve ser satisfeita por certos valores ou supostos[41] valores desconhecidos, representados através de constantes desconhecidas ou variáveis, a fim de que possamos determiná-los, caso existam, ou chegar à conclusão de que eles não existem. Essa condição consiste em exigir que tais valores, ou supostos valores, desconhecidos façam com que ambos os membros da igualdade tenham o mesmo valor.

No caso de possuir variáveis, a igualdade condicional é uma sentença aberta que nos permite determinar os elementos pertencentes a certo conjunto. A equação de uma reta r, dada por $y = 2x$, é um exemplo disso. Nesse caso, os valores desconhecidos são coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que representam os pontos de r. Tais coordenadas, a princípio desconhecidas, podem ser determinadas pela equação $y = 2x$. Para determinar os pontos (x, y) dessa reta, basta tomar aqueles que transformam a sentença aberta “$y = 2x$” em uma sentença verdadeira.

Agora, caso uma igualdade condicional possua constantes desconhecidas, ela é uma sentença e tais constantes representam valores desconhecidos a determinar. Nessa hipótese, as constantes desconhecidas são chamadas *incógnitas* (VELÁZQUEZ, 1980). Um exemplo desse tipo de igualdade condicional é a equação $3x = x + 4$, quando surge no seguinte contexto: “Pensei em um número real cujo triplo vale o mesmo que sua soma com 4. Em que

---

[41] O termo “suposto” é aqui utilizado pela possibilidade de não se saber previamente se o valor desconhecido realmente existe.

número pensei? Com efeito, sendo x tal número, temos que $3x = x + 4$. Resolvendo-se essa equação, obtemos que $x = 2$."[42]. Nesse exemplo, "x" é uma constante desconhecida cujo valor queremos determinar, e as informações que possuímos sobre esse valor desconhecido tornam a igualdade "$3x = x + 4$" uma sentença verdadeira. Para encontrar o valor da incógnita x, resolvemos essa equação.

Em uma igualdade condicional, "=" é um signo cujo significado é *os valores ou os supostos valores desconhecidos que desejamos determinar devem, ao substituírem as variáveis ou constantes desconhecidas, fazer com que ambos os membros da igualdade tenham o mesmo valor*. Exceto pelo fato de não se restringir a contextos algébricos da Educação Básica, esse significado é análogo ao significado "expressão de uma equivalência condicional", visto na etapa inicial desta pesquisa (p. 28). Outros exemplos de utilização de "=" como signo de igualdade condicional são:

a) "*A equação* $x^2 + y^2 = 25$ *é de uma circunferência de centro na origem e raio* 5, *e o ponto* $A(3, -4)$ *pertence a ela, pois* $3^2 + (-4)^2 = 25$*; já o ponto* $D(-1, -2)$ *não pertence à circunferência, pois* $(-1)^2 + (-2)^2 \neq 25$*, ou seja, as coordenadas do ponto não verificam a equação da circunferência.*" (IEZZI et al., 2004b, p. 137).

   A igualdade "$x^2 + y^2 = 25$" estabelece as condições que as coordenadas desconhecidas (x, y) dos pontos da circunferência devem satisfazer para que possamos determiná-las e, então, determinarmos a circunferência. Nesse caso, "=" é signo de igualdade condicional.

b) "*Considere os vetores* $\vec{u} = (1, 2)$ *e* $\vec{v} = (2, 1)$. *Encontre os valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *para os quais* $\langle \lambda\vec{u} + \vec{v},\ \vec{u} + \lambda\vec{v} \rangle = 0$."[43] (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013, p. 39).

   Aqui, "$\langle \lambda\vec{u} + \vec{v},\ \vec{u} + \lambda\vec{v} \rangle = 0$" estabelece uma condição para que consigamos determinar os valores da incógnita λ. Portanto, nessa igualdade, "=" é signo de igualdade condicional.

c) "*A função* $y = xe^x$ *é uma solução para a equação linear*

$$y'' - 2y' + y = 0$$

   no intervalo $(-\infty, \infty)$." (ZILL; CULLEN, 2001, p. 5).

---

[42] Nesse contexto, a igualdade "$x = 2$" é determinante.

[43] Nesse exemplo, as igualdades "$\vec{u} = (1, 2)$" e "$\vec{v} = (2, 1)$" são nomeantes.

> O sinal “=” é signo de igualdade condicional em “$y'' - 2y' + y = 0$”, pois essa igualdade estabelece uma condição para que determinemos as funções $y = f(x)$ desconhecidas que a satisfazem.

2.2.10 Igualdade relacional

Uma *igualdade relacional* indica uma relação de dependência *causal* entre variáveis, entre variáveis e constantes desconhecidas ou entre constantes desconhecidas, no sentido de que o valor de uma delas é o obtido por meio dos valores das outras. Tal relação pode ser dinâmica ou estática. No caso de ser estática, essa relação se dá entre constantes desconhecidas e tem o intuito de expressar uma regra geral, que indica como podemos obter (desde que saibamos os valores de algumas das constantes) certo resultado representado pela constante desconhecida que constitui o primeiro membro da igualdade. Um exemplo disso é a igualdade “$A = \pi r^2$”, quando surge no seguinte contexto: “Fixado um círculo, de raio r, sua área (A) é igual ao produto de π pelo quadrado de seu raio, isto é, $A = \pi r^2$.”. Tal igualdade exprime uma relação de dependência causal entre as constantes desconhecidas A e r, onde o valor de A é o obtido por meio do valor de r. Além disso, essa relação foi estabelecida com o objetivo de comunicar uma regra geral, que, desde que conheçamos o valor de r, podemos usar quando desejarmos alcançar o resultado representado pela constante A (a saber, o valor da área de um círculo). Essa regra geral é a seguinte: a área de um círculo é igual ao produto de π pelo quadrado de seu raio.

Agora, no caso de ser dinâmica, essa relação de dependência expressa as alterações que serão provocadas na variável dependente à medida que provocarmos mudanças na(s) variável(is) independente(s) (MEIRA, 1997 apud CAVALCANTI, 2008). Um exemplo desse caso é a igualdade “$f(x) = 2x$”, quando usada no seguinte contexto: “Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.”. Em tal contexto, essa igualdade estabelece uma relação de dependência causal entre as variáveis $f(x)$ e x, na qual o valor de $f(x)$ é o obtido por meio do valor de x. Além disso, essa relação objetiva mostrar o valor que a variável dependente $f(x)$ possuirá para cada valor assumido pela variável independente x, dizendo que $f(x)$ é sempre o dobro de x.

Em uma igualdade relacional que expressa uma relação causal dinâmica, os valores da variável dependente também podem ser os obtidos como consequência dos valores de constantes desconhecidas e variáveis independentes. Um exemplo disso é a igualdade "$f(x) = ax + b$", quando surge em "Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$." (LIMA et al., 2006, p. 98, grifo do autor). Essa igualdade estabelece uma relação de dependência causal entre as variáveis $f(x)$ e x e as constantes desconhecidas a e b, na qual o valor da variável dependente $f(x)$ é o obtido por meio dos valores da variável independente x e das constantes desconhecidas a e b. Além do mais, considerando-se fixado um valor para as constantes desconhecidas a e b, essa relação expressa o valor que a variável dependente $f(x)$ possuirá para cada valor assumido pela variável independente x, dizendo que $f(x)$ é sempre a soma do produto de a por x com b.

Aqui, o sinal de igualdade é o signo cujo significado é *o segundo membro da igualdade contém as instruções gerais que podemos seguir, desde que conheçamos os valores de algumas das constantes desconhecidas, quando desejarmos obter o resultado representado pela constante desconhecida que constitui o primeiro membro da igualdade; ou o valor da variável que constitui o primeiro membro da igualdade é sempre dado de acordo com os valores das variáveis presentes no segundo membro da igualdade, ao se considerar, caso existam, os valores das constantes desconhecidas já fixados.* O significado "expressão de uma relação funcional ou dependência" do sinal "$=$", identificado na primeira etapa (p. 29), é análogo ao significado aqui descrito. Contudo, esse último não se restringe ao contexto algébrico da Educação Básica.

Além dos anteriormente citados, exemplos em que "$=$" surge com o significado aqui descrito são:

a) "*No capítulo 2, foi visto que, representando o capital pela letra C, a taxa no intervalo unitário pela letra i, o tempo em que este capital será emprestado pela letra t, os juros J podem ser calculados com o uso da fórmula* $J = C \cdot i \cdot t$.

   A fórmula é uma espécie de receita para calcular os juros. Ela poderia ser escrita com palavras.

   Por exemplo: "os juros produzidos por um capital emprestado a certa taxa mensal por certo número de meses são dados pelo produto do capital pela *taxa mensal pelo número de meses*." (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012, p. 65).

Em "$J = C \cdot i \cdot t$", estabelece-se uma relação de dependência causal entre as constantes desconhecidas J, C, i e t, na qual o valor de J é o obtido por meio dos valores de C, i e t. Além disso, tal relação visa comunicar uma regra geral, que, desde que saibamos os valores de C, i e t, podemos usar para calcular os juros, que consiste no resultado representado pela constante desconhecida J. Sendo assim, nesse caso, o sinal "=" é signo de igualdade relacional.

b) "[...] *Se* [uma matriz quadrada] $\boldsymbol{A}$ *é tal que* $\det A \neq 0$, *então* $\boldsymbol{A}$ *é inversível e* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$." (DANTE, 1999, p. 219, grifo do autor).

O sinal "=" é signo de igualdade relacional em "$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$", pois ela expressa uma relação de dependência causal entre as constantes desconhecidas A^{-1}, $\det A$ e $\overline{A}$, onde o valor de A^{-1} é o obtido a partir dos valores das constantes desconhecidas $\det A$ e $\overline{A}$ (respectivamente, *determinante* e *adjunta* de A). Adicionalmente, tal igualdade objetiva estabelecer uma regra geral que podemos usar para determinar a inversa de uma matriz quadrada invertível, que é o resultado representado pela variável dependente A^{-1}.

c) "*Consideremos duas funções diferenciáveis* f *e* g, *onde*

$$y = f(u) \text{ e } u = g(x).$$

Se $g(x)$ *está no domínio de* f, *podemos escrever*

$$y = f(u) = f(g(x)),$$

isto é, y *é função de* x."[44] (SWOKOWSKI, 1983, p. 115).

A igualdade "$y = f(u)$" é relacional, pois estabelece uma relação de dependência causal entre as variáveis y e u, em que o valor de y é o obtido mediante o valor de u. Além disso, essa relação foi concebida para mostrar que cada valor da variável y é dado de acordo com valor da variável u, conforme a lei de composição da função f. Analogamente, conclui-se que a igualdade "$u = g(x)$", assim como "$y = f(g(x))$" (apesar de não aparecer

[44] Nesse exemplo, o autor considera que o contradomínio de g é o mesmo que o domínio de f e que g é sobrejetiva.

no texto), também é relacional. Sendo assim, "$=$" é signo de igualdade relacional nessas igualdades.

2.2.11 Igualdade predicativa

Uma *igualdade predicativa* expressa alguma propriedade de determinado objeto (ou objetos), considerado aqui como sujeito e que pode estar localizado em qualquer um ou em ambos os membros da igualdade. Um exemplo de igualdade predicativa é "$m = 4k$", quando usada para dizer que m (sujeito) é múltiplo de 4. Note que, aqui, a igualdade deixa de ser vista como algo composto de partes independentes e tornar-se uma unidade linguística, formando uma única entidade coesa e com sentido próprio. O significado de "$=$" nesse tipo de igualdade é *o(s) objeto(s) representado(s) no primeiro, no segundo ou em ambos os membros da igualdade possui(em) a propriedade comunicada pelos signos representados em ambos os membros da igualdade ao se considerar a igualdade como um todo.* Esse é outro significado que conseguimos identificar somente na segunda etapa desta pesquisa. Exemplos de uso do sinal de igualdade com esse significado são:

a) "*Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum*
$r \cap s = \{P\}$." (IEZZI et al., 1985, p. 53).
Aqui, a igualdade "$r \cap s = \{P\}$" foi usada para expressar que duas retas r e s têm um único ponto em comum. Portanto, nessa igualdade, "$=$" é signo de igualdade predicativa.

b) "*Seja $F \subset \mathbb{R}$ não-vazio tal que $F = F'$. (Isto é, F é um conjunto fechado não-vazio sem pontos isolados.) Então F é não-enumerável.*"[45] (LIMA, 1976, p. 141).
O sinal "$=$" é signo de igualdade predicativa em "$F = F'$", pois essa igualdade foi usada para expressar que F é um conjunto fechado sem pontos isolados.

[45] Seja $F \subset \mathbb{R}$. O conjunto *derivado* de F, denotado por F', é o conjunto formado por todos os números $a \in \mathbb{R}$ tais que qualquer intervalo aberto $(a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$, de centro a, contém algum ponto $x \in F$ diferente de a. Um ponto $x \in F$ que não pertence a F'chama-se um *ponto isolado* de F (LIMA, 1976).

c) "*Às vezes, para indicar que* [o conjunto] X *não é limitado, escreve-se* $\operatorname{diam}(X) = \infty$." [46] (LIMA, 2011, p. 13).

Como "$\operatorname{diam}(X) = \infty$" expressa que o conjunto X é ilimitado, o sinal "$=$" é signo de igualdade predicativa.

2.3 Análise da variação do significado do sinal "$=$"

Analisando os significados matemáticos de "$=$" apresentados na seção precedente, percebemos que os signos que compõem uma igualdade e a maneira como eles estão dispostos ao longo dela têm influência na formação do significado de "$=$". Por exemplo, na igualdade "$A = \{-1, 2, 0\}$", o sinal "$=$" pode, em certo contexto, ser signo de igualdade nomeante. No entanto, não pode ser signo de igualdade operacional, pois não há signos que representam operações no primeiro membro dessa igualdade. Contudo, a simples observação da estrutura da igualdade não é suficiente para que consigamos saber o significado de "$=$" em determinada situação; é preciso também observar outros elementos contextuais. Na igualdade "$A = \{-1, 2, 0\}$", nada impede que "$=$" seja signo de igualdade determinante em algum contexto, em vez de nomeante, como sugerimos anteriormente. Um exemplo de tal contexto é "Se $A \subset \mathbb{R}$ é o conjunto-solução da equação $(x + 1)(x - 2)x = 0$, então $A = \{-1, 2, 0\}$.". Assim, para sabermos qual é o significado de "$=$" em certo contexto de uso, precisamos também levar em conta os elementos contextuais exteriores à igualdade.

Com o intuito de termos uma melhor noção da influência que os elementos contextuais externos à igualdade exercem na determinação do significado de "$=$", vamos analisar quais são os significados que podemos associar a "$=$" nas igualdades "$x = 11$" (Quadro 1) e "$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$" (Quadro 2).

Conforme vemos no Quadro 1, "$=$" não possui um único significado em "$x = 11$", variando em função do contexto e dos elementos contextuais exteriores à própria igualdade "$x = 11$". Mas isso não significa que, nesse caso, os elementos contextuais pertencentes a essa igualdade não exerceram influência na determinação do significado de "$=$". Devido a

---

[46] Dizemos que um subconjunto X de um espaço métrico M é *limitado* quando existe uma constante real $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in X$, onde $d(x, y)$ é a distância de x a y. O menor desses números c será chamado o *diâmetro* de X, que denotamos por $\operatorname{diam}(X)$ (LIMA, 2011).

eles é que sabemos que, quando surge nessa igualdade, não há contexto em que "$=$" possa ser signo de igualdade instrutiva, representacional, decomponente, definidora, operacional ou predicativa. O sinal "$=$" não pode ser signo de igualdade instrutiva, visto que o segundo membro de "$x = 11$" não indica ações que devam ser realizadas com signos do primeiro membro. Também não pode ser signo de igualdade representacional, porque, como os signos "x" e "11" não possuem o mesmo significado, não podemos considerar que tal igualdade indica que o signo "11" possui o mesmo significado do signo "x", nem que o signo "x" possui o mesmo significado do signo "11". Por sua vez, "$=$" não pode ser signo de igualdade definidora, pois não podemos considerar que o significado do signo "x" está sendo explicado pelo signo "11". Agora, "$=$" não pode ser signo de igualdade operacional nem decomponente, porque não há signos indicando operação em nenhum dos membros de "$x = 11$". Por fim, "$=$" não pode ser signo de igualdade predicativa, pois, ao considerarmos a igualdade "$x = 11$" como um todo, ela não expressa propriedade alguma de x nem de 11.

Quadro 1 – Possíveis significados de "$=$" na igualdade "$x = 11$"

Em "$x = 11$", "$=$" pode ser signo de:			
Igualdades	**Sim**	**Não**	**Se sim, em qual contexto?**
Comparativa	x		Considere o número $x = \sqrt{(-11)^2}$. Note que x e 11 são o mesmo número, isto é, $x = 11$.
Instrutiva		x	-------
Representacional		x	-------
Decomponente		x	-------
Definidora		x	-------
Nomeante	x		Considere o número $x = 11$. Temos que, $(x+2)^2 - 1 = 168$.
Determinante	x		Se x é um número tal que $x - 7 = 2x - 18$, então $x = 11$.
Operacional		x	-------
Condicional	x		Seja $x = 11$ a equação cartesiana da reta vertical r.
Relacional	x		Uma camisa, que custa hoje 11 reais, custava os mesmos 11 reais há cinco anos e custará 11 reais daqui a sete anos. Sem inflação, ela custará 11 reais sempre. O preço permanece constante. O preço x da camisa pode ser indicado assim: $x = 11$
Predicativa		x	-------

Fonte: O autor, 2019.

Quadro 2 – Possíveis significados de "=" na igualdade "$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$"

Em "$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$", "=" pode ser signo de:			
Igualdades	**Sim**	**Não**	**Se sim, em qual contexto?**
Comparativa	x		Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores tais que um representante de $\vec{v}$ e outro de $\vec{w} + \vec{u}$ são paralelos e possuem o mesmo comprimento e sentido. Nesse caso, temos que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$, isto é, $\vec{v}$ e $\vec{w} + \vec{u}$ são o mesmo vetor.
Instrutiva		x	-------
Representacional		x	-------
Decomponente	x		Sejam $\vec{v} = (1, 1)$, $\vec{w} = (1, 0)$ e $\vec{u} = (0, 1)$. Observe que, como $\{\vec{w}, \vec{u}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, todo vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito de forma única como uma soma de múltiplos escalares desses vetores, inclusive $\vec{v}$. Veja que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$, isto é, $\vec{v}$ pode ser escrito como a soma de $\vec{w}$ e $\vec{u}$.
Definidora		x	-------
Nomeante	x		Sejam $\vec{w} = (-2, 3)$ e $\vec{u} = (3, -3)$, e chamemos $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$. Determine as coordenadas de $2\vec{v}$.
Determinante	x		Sabendo que os vetores $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são conhecidos e que $\vec{v} - \vec{r} - \vec{w} = \vec{u} - \vec{r}$, onde $\vec{v}, \vec{r}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, conseguimos determinar o vetor $\vec{v}$. Temos que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$.
Operacional		x	-------
Condicional	x		Sabendo que $\vec{v} = (-2, 3)$, $\vec{u} = (3, -3)$ e $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$, determine o vetor $\vec{w}$.
Relacional	x		Sejam $\vec{v}, \vec{r}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tais que $\vec{v} - \vec{r} - \vec{w} = \vec{u} - \vec{r}$. Podemos estabelecer uma relação de dependência entre os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{u}$, que é $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$, isto é, $\vec{v}$ é sempre a soma de $\vec{w}$ e $\vec{u}$.
Predicativa		x	-------

Fonte: O autor, 2019.

Assim como em "$x = 11$", o sinal de igualdade também não possui significado único em "$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$", como podemos observar analisando o Quadro 2. Novamente, elementos contextuais interiores e exteriores à própria igualdade foram os fatores determinantes dessa multiplicidade de significados. Devido aos signos que constituem "$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$" e a forma como estão dispostos nela, que são os elementos contextuais interiores à igualdade, sabemos que, quando presente nessa expressão, não há contexto em que "=" seja signo de igualdade instrutiva, representacional, definidora, operacional ou predicativa. O sinal "=" não pode representar uma igualdade instrutiva, devido ao fato de "$\vec{w} + \vec{u}$" não indicar ações que devam ser realizadas sobre o vetor $\vec{v}$ para determinarmos seu valor. Por sua vez, ele não pode ser signo de igualdade representacional, visto que não podemos considerar "$\vec{v}$" e "$\vec{w} + \vec{u}$" como signos de mesmo significado. Além disso, não tem como ser signo de igualdade definidora, visto que não podemos considerar que o significado do signo "$\vec{v}$" está sendo explicado pela expressão “$\vec{w}+\vec{u}$”. Também não é possível ser signo de igualdade operacional, pois, em “$\vec{v}=\vec{w}+\vec{u}$”, não há signos indicando operações no primeiro membro. Finalmente, “$=$” não pode ser signo de igualdade predicativa, porque, ao considerarmos tal igualdade como um todo, ela não exprime propriedade alguma de nenhum dos três vetores.

A combinação dos elementos contextuais internos e externos à igualdade também é o que faz com que, em um mesmo contexto, possamos ter igualdades em que “$=$” possua significados distintos. Apesar de o significante ser o mesmo, devemos ter consciência de que, em cada uma dessas igualdades, “$=$” é um signo que transmite um conceito distinto. Diante de um contexto como esse, a importância e a utilidade do conhecimento e compreensão dos significados associados a esse sinal ganham ainda mais relevância para o entendimento do que se quer transmitir. Observando os exemplos de contexto de uso de “$=$” fornecidos pelos Quadros 1 e 2, encontramos situações assim, nas quais “$=$” assume significados diferentes em algumas das igualdades, como “Sabendo que $\vec{v}=(-2,3)$, $\vec{u}=(3,-3)$ e $\vec{v}=\vec{w}+\vec{u}$, determine o vetor $\vec{w}$.”, apresentada no Quadro 2. Nessa situação, “$=$” é signo de igualdade nomeante em “$\vec{v}=(-2,3)$” e “$\vec{u}=(3,-3)$”, e signo de igualdade condicional em “$\vec{v}=\vec{w}+\vec{u}$”.

Contudo, podemos ter situações com um número ainda maior de igualdades, como a seguinte: “Sejam $X=\{1,2,3,4,5\}$ e $Y=\{2,4,6,8,10\}$. Definindo $f\colon X\longrightarrow Y$ pela regra $f(n)=2n$, temos $f(1)=2\times 1=2$ e $f(2)=2\times 2=4$, isto é, $f(1)=2$ e $f(2)=4$” (Adaptado de LIMA et al., 2006, p. 48). Podemos perceber, nas diversas igualdades, como “$=$” é um signo usado para expressar conceitos distintos. Alguém que interpreta o sinal de igualdade apenas como um indicador de resultado, certamente não compreenderá o que se quer transmitir nesse trecho. Interpretemos, então, o significado de “$=$” em cada igualdade do trecho anterior. Nas igualdades “$X=\{1,2,3,4,5\}$” e “$Y=\{2,4,6,8,10\}$”, o sinal “$=$” é o signo de igualdade nomeante. Isso porque os signos “X” e “Y” não são representantes de um novo conceito, sendo usados tão somente como nomes dos conjuntos $\{1,2,3,4,5\}$ e $\{2,4,6,8,10\}$, respectivamente, para facilitar a futura citação deles. Na igualdade “$f(n)=2n$”, o sinal “$=$” é o signo de igualdade relacional, pois ela indica a imagem de cada elemento do domínio de f (f transforma cada elemento em seu dobro). Por sua vez, nas igualdades “$f(1)=2\times 1$” e “$f(2)=2\times 2$”, o sinal “$=$” é o signo de igualdade instrutiva, porque cada uma delas indica as ações que devemos realizar sobre um ponto particular do domínio de f a fim de obter a sua imagem. Agora, nas igualdades “$2\times 1=2$” e “$2\times 2=4$”, o sinal “$=$” é o signo de igualdade operacional, pois, em cada uma delas, objetiva-se indicar o resultado da multiplicação de dois números. Por fim, nas igualdades "$f(1) = 2$" e "$f(2) = 4$", o sinal de igualdade é signo de igualdade determinante, visto que cada uma delas especifica a imagem de um ponto particular do domínio da função f.

Outra utilidade de se compreender que o significado do sinal de igualdade pode mudar ao longo de um discurso é ajudar no entendimento de que os significados de outros signos também podem variar em um mesmo contexto. Assim como se faz com o significante "=", também é comum usarmos outros significantes para, em uma mesma situação, associá-los a significados distintos, como é o caso dos signos que podem representar tanto variáveis quanto constantes. O signo "x" é um exemplo de tais signos. Na função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) = 2x + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se quisermos determinar o ponto do domínio cuja imagem é 9, é de praxe iniciarmos construindo a seguinte equação: $9 = 2x + 5$. Entretanto, os signos que em ambas as igualdades apresentam significante "x" possuem, na verdade, significados diferentes em cada uma delas. Em "$f(x) = 2x + 5$", o sinal "=" é signo de igualdade relacional, indicando a imagem de cada ponto do domínio de f; portanto, nesse caso, "x" é signo de "variável". Por outro lado, em "$9 = 2x + 5$", o sinal "=" é signo de igualdade condicional, pois visa estabelecer uma condição para que consigamos determinar o valor do domínio, representado por "x", que tem o número 9 como imagem. Logo, nessa situação, "x" é signo de "incógnita", uma constante desconhecida cujo valor desejamos determinar.

3 A INFLUÊNCIA DO SINAL DE IGUALDADE NA APRENDIZAGEM DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Após conhecermos os diferentes significados que o sinal de igualdade pode ter na Linguagem Matemática, percebemos o quão complexo é esse signo. Não é à toa que, de acordo com a literatura relacionada ao tema, a compreensão de seus diversos significados seja considerada “um aspecto fundamental para a aprendizagem dos conceitos aritméticos e algébricos” (BANDARRA, 2011, p. 4). Para conhecermos melhor as razões que levam a esse entendimento, vamos explorar, neste capítulo, algumas pesquisas que versam sobre a forma como alunos interpretam esse sinal, bem como os efeitos provocados pelo conhecimento limitado dos seus significados matemáticos na aprendizagem da Matemática.

A apresentação do conteúdo deste capítulo está dividida em três seções. Na Seção 3.1, analisamos as principais diferenças entre a Aritmética e a Álgebra escolar, além das dificuldades que uma compreensão limitada do sinal de igualdade pode gerar ao se iniciar o estudo da Álgebra. Na Seção 3.2, tomamos conhecimento de alguns resultados de pesquisas que objetivaram avaliar a forma como alunos interpretam o sinal de igualdade. Por fim, na Seção 3.3, apresentamos as conclusões que podemos tirar da análise dos estudos apresentados nas seções precedentes deste capítulo.

3.1 Aritmética, Álgebra e o sinal de igualdade

Grande parte dos alunos do Ensino Fundamental inicia o estudo da Álgebra considerando apenas que “=” é signo de igualdade operacional (CAMICI, 2002; CAVALCANTI; SANTOS, 2007; KIERAN, 1981). De acordo com estudos (WARREN, 2001, WARREN, 2004 apud GONZÁLEZ, 2006), a razão para tal fato está no modo como a Aritmética é abordada nos primeiros anos da Educação Básica, a qual se centra essencialmente na forma correta de se realizar procedimentos e na obtenção da reposta certa.

> O ensino tradicional da aritmética contribui para o desenvolvimento de uma compreensão operacional do sinal de igualdade, como um estímulo para a realização de uma ação, que se mantém estável ao longo dos anos e geralmente não é

> contestada até o aprendizado da álgebra[47] (GONZÁLEZ, 2006, p. 249, tradução nossa).

Assim, na Aritmética ensinada nas escolas, devido ao seu caráter predominantemente computacional, em expressões como “$4 + 8 = 12$”, os signos “$+$” e “$=$” são compreendidos geralmente como indicadores de ações a serem realizadas, onde “[...] $+$ significa efetivamente realizar a operação, e $=$ significa escrever a resposta.” (BOOTH, 1995, p. 27).

Entretanto, essa compreensão limitada que os alunos possuem acerca do sinal de igualdade, e dos demais sinais que indicam operações, faz com que eles apresentem dificuldades no entendimento de diversos conceitos algébricos. Ao iniciar o estudo da Álgebra, há a necessidade de se passar de uma perspectiva procedimental para uma estrutural, onde as expressões algébricas “[...] são concebidas como objetos matemáticos sobre os quais se realizam operações estruturais, tais como a combinação de termos lineares, fatoração ou operar de forma idêntica em ambos os membros de uma equação.”[48] (GONZÁLEZ, 2006, p. 39, tradução nossa). Isso provoca uma mudança na forma como os signos devem ser interpretados. Os sinais que indicam operações passam a representar não somente uma ação, mas também o seu resultado, bem como uma relação entre dois objetos matemáticos; e o sinal de igualdade precisa ser interpretado de forma mais ampla (BOOTH, 1995; GONZÁLEZ, 2006).

> Por exemplo “$n + 3$” pode ser uma expressão de uma “instrução” (ou procedimento), que afirma que se deve somar 3 à variável n, e também uma “resposta”, que dá o resultado de se ter efetuado uma adição. No primeiro caso pode-se interpretar a expressão como “some 3 a n”; no segundo como “o número que excede n em 3 unidades” (BOOTH, 1995, p. 27).

Por sua vez, além de um sinal para “escreva a resposta”, o sinal “$=$” também precisa ser compreendido, por exemplo, como um signo para “tem o mesmo valor que”. O desconhecimento dessa última interpretação é inclusive apontado como um dos principais causadores das dificuldades enfrentadas pelos alunos na passagem da Aritmética para a Álgebra (FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999; CIVINSKI; BAIER, 2014; OKSUZ, 2007; GONZÁLEZ, 2006).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), um requisito para o desenvolvimento do pensamento algébrico é o engajamento em atividades que relacionem mutuamente os diversos aspectos da Álgebra (Figura 2), o que envolve o estudo de equações,

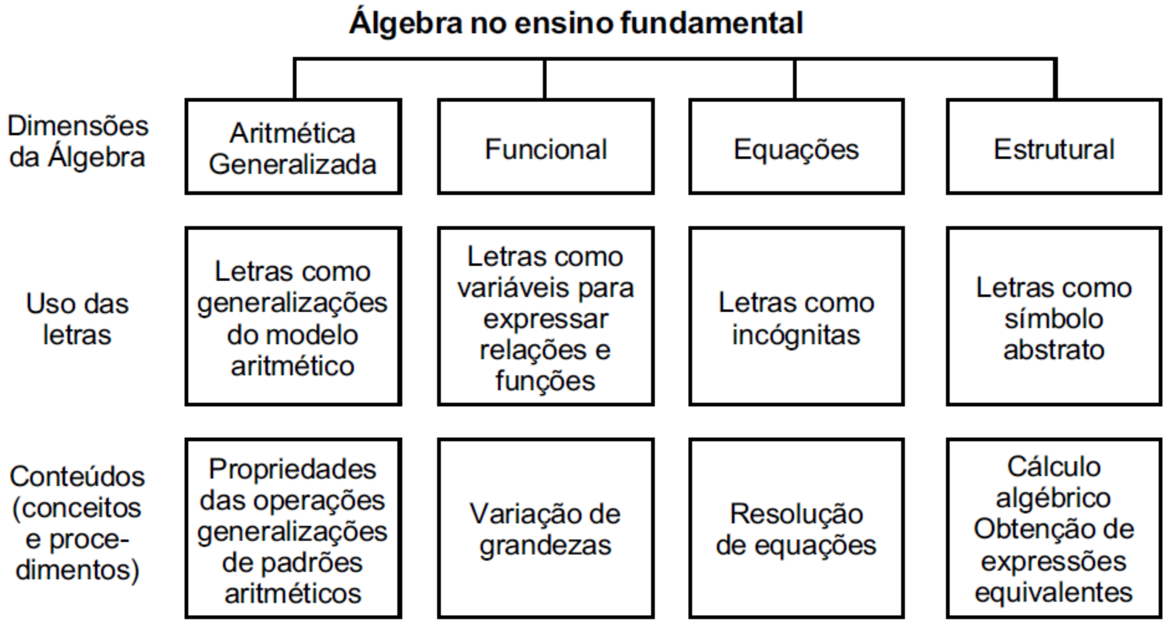
---

[47] O texto em língua estrangeira é: “La enseñanza tradicional de la aritmética contribuye al desarrollo de una comprensión operacional del signo igual, como estímulo para realizar una acción, la cual se mantiene estable a lo largo de los años y no suele ser desafiada hasta el aprendizaje del álgebra.”

[48] O texto em língua estrangeira é: “[...] son concebidas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales, tales como combinación de términos lineales, factorización, u operar de igualdad modo en ambos miembros de una ecuación.”

considerado um dos principais conceitos da Álgebra escolar (CAVALCANTI, 2008). No estudo de equações, quando a Álgebra é concebida como um estudo de procedimentos para se resolver problemas (USISKIN, 1988), o significado operacional do sinal de igualdade, frequentemente empregado na Aritmética, nem sempre funciona adequadamente. Apesar de ocorrer, não é comum que o membro esquerdo represente uma instrução a ser realizada e o membro direito, a resposta (CAVALCANTI, 2008). Os alunos devem entender que, em certos contextos, o sinal de igualdade expressa uma relação entre expressões, dizendo que elas devem possuir o mesmo valor (OKSUZ, 2007). Se os alunos entendem apenas o sinal de igualdade como um signo para “escreva a resposta” (BOOTH, 1995, p. 27), eles “[...] acharão difícil entender a razão pela qual quando se subtrai uma quantidade *c* [maior do que zero] de um lado da equação, o outro lado será reduzido do mesmo valor, *c*, também.”[49] (OKSUZ, 2007, p. 4, tradução nossa). Dessa forma, alunos que possuem uma concepção redutora do sinal de igualdade, não compreendem os processos empregados na resolução de equações, valendo-se da memorização de uma série de regras para tal. Além disso, como essas regras não foram assimiladas, eles provavelmente se lembrarão delas erroneamente e não serão capazes de aplicá-las de forma flexível (FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999).

Figura 2 – As diferentes formas de se interpretar a Álgebra escolar no Ensino Fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais



Fonte: BRASIL, 1998, p. 116.

[49] O texto em língua estrangeira é: “[...] they will find it difficult to understand the reason that when one subtracts an amount *c* from one side of equation, the other side will be reduced by the same value, *c*, as well.”

No estudo de funções, outro principal conceito da Álgebra escolar (CAVALCANTI, 2008), que surge quando a Álgebra é interpretada como o estudo de relações entre quantidades (USISKIN, 1988), considerar “=” apenas como signo de igualdade operacional ou condicional não é o mais adequado. O signo “=” em uma função “[...] não está indicando algo que seja para resolver ou calcular.” (PONTE, 2006 apud CAVALCANTI, 2008, p. 77). Uma das formas de caracterizar o conceito de função, considerada a mais adequada do ponto de vista didático (FREUDENTHAL, 2002), é como um ato ou uma regra que atribui ou associa a cada elemento de um conjunto A um elemento de um conjunto B (FREUDENTHAL, 2002; LIMA et al., 2006). Essa definição possui um caráter dinâmico, podendo ser entendida como uma relação de dependência *causal* entre variáveis, onde uma varia livremente (variável independente) e outra varia sobre restrição (variável dependente) (FREUDENTHAL, 2002). O termo “causal” foi usado “[...] no sentido de que as transformações aplicadas na variável independente provocam mudanças na variável dependente.” (MEIRA, 1997 apud CAVALCANTI, 2008, p. 76). Portanto, “entendemos que o atributo mais adequado do símbolo ‘=’ no contexto das funções é indicar uma relação dinâmica que implica na dependência causal entre as variáveis dependente e independente” (CAVALCANTI, 2008, p. 78), isto é, “=” deve ser entendido como signo de igualdade relacional.

De acordo com o que foi exposto, podemos ver que o ensino tradicional da Aritmética, que foca na resolução de procedimentos para se obter respostas numéricas particulares, não favorece a compreensão da Álgebra. A apropriada compreensão de conceitos algébricos, como os conceitos de equação e de função, requer que se conheçam outros significados do sinal de igualdade, não apenas o significado operacional. Diferentes trabalhos têm indicado que as dificuldades vivenciadas pelos estudantes ao passar da Aritmética para o estudo da Álgebra são justamente devidas à ausência de uma base aritmética adequada e à desconexão entre seus conhecimentos aritméticos e algébricos (GONZÁLEZ, 2006; OKSUZ, 2007). Um exemplo dessa desconexão, como vimos, é justamente a compreensão do sinal “=” que os estudantes trazem consigo da Aritmética e a que lhes é exigida na Álgebra.

Conscientes de que a separação entre a Aritmética e a Álgebra acentua e prolonga as dificuldades dos alunos ao iniciarem o estudo de conceitos algébricos, diversos pesquisadores têm proposto sugestões para facilitar a transição entre essas duas áreas. Uma dessas sugestões diz respeito aos significados dos signos de operações e de igualdade que os alunos adquirem ao longo de suas primeiras experiências aritméticas. Como dito antes, segundo Booth (1995), é necessário deixar bem claro para os alunos que “$4 + 8$” não apenas indica um procedimento a ser realizado, mas que pode também representar o resultado desse processo. Isso pode ser feito, por exemplo, lendo-se essa expressão não apenas como "some 4 com 8" ou "some 8 a 4", mas como "a soma de 4 e 8" ou "o número que é 8 unidades maior do que 4". Além disso, deve-se fazer com que os alunos percebam que o sinal de igualdade também pode representar uma relação que exprime que duas expressões matemáticas possuem o mesmo valor (FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999). Uma das razões apresentadas por esses autores para a importância de tal conhecimento está no fato de que os alunos precisam ser capazes de perceber a relação expressa por uma sentença numérica.

> Por exemplo, a sentença numérica $7 + 8 = 7 + 7 + 1$ expressa uma relação matemática que é central para a aritmética. Quando uma criança diz: "Eu não lembro quanto vale 7 mais 8, mas sei que 7 mais 7 são 14 e mais 1 fariam 15", ele ou ela está explicando uma relação muito importante expressa por aquela sentença numérica[50] (FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999, p. 234, tradução nossa).

Para desenvolver essa compreensão do sinal de igualdade, recomenda-se a realização de atividades em que os alunos devam julgar se expressões, como "$5 + 3 = 7 \times 5$" ou "$2 = 6 - 4$", são verdadeiras ou falsas, ou completar sentenças abertas numéricas, como "$5 + \boxed{} = 10 - 2$", de modo a torná-las verdadeiras. Além disso, deve-se possibilitar que os alunos trabalhem com igualdades de formatos variados, com múltiplas operações em ambos os membros, e não somente com igualdades da forma $a + b = c$ (BANDARRA, 2011).

3.2 Compreensão do sinal de igualdade por alunos

Nesta seção, apresentamos os resultados de algumas pesquisas que investigaram a forma como alunos interpretam o sinal de igualdade. Em tais pesquisas, destacam-se duas formas de compreensão do sinal de igualdade: operacional e relacional. A noção *operacional* (ou *procedimental*), associada principalmente a contextos aritméticos, surge quando o sinal de igualdade é visto como um estímulo para que algo seja realizado. Os alunos manifestam essa compreensão do sinal de igualdade quando consideram que ele indica ações como *transforma* (por exemplo, "$6 + 5$" em "11"), *escreva a resposta*, *dá* ou *faz* (BOOTH, 1995; CAVALCANTI; SANTOS, 2007). Por sua vez, a noção *relacional* (ou de *equivalência*) surge

[50] O texto em língua estrangeira é: "For example, the number sentence $7 + 8 = 7 + 7 + 1$ expresses a mathematical relationship that is central to arithmetic. When a child says, 'I don't remember what 7 plus 8 is, but I do know that 7 plus 7 is 14 and then 1 more would make 15,' he or she is explaining a very important relationship that is expressed by that number sentence."

quando se considera que o sinal de igualdade representa uma relação estática entre ambos os membros da igualdade: o membro esquerdo tem o mesmo valor que o membro direito (CAVALCANTI; SANTOS, 2007). Considera-se que um aluno manifesta essa compreensão quando cita algo como "[...] o sinal de igual indica o mesmo valor, a mesma coisa, é [sic] o que tem de um lado é igual ao que tem do outro lado da igualdade [...]" (CAVALCANTI; SANTOS, 2007, p. 4).

Em sua pesquisa, Behr, Erlwanger e Nichols (1980) entrevistaram crianças de seis a doze anos de idade, com o objetivo de saber como elas interpretam sentenças numéricas abertas da forma "$a + b = \square$" (como "$2 + 3 = \square$") e "$\square = a + b$" (como $\square = 2 + 3$"), e sentenças da forma "$a = b$" (por exemplo, "$4 = 7$" ou "$3 = 3$") e "$a + b = c + d$" (por exemplo, "$2 + 3 = 4 + 1$"). A motivação original para esse estudo veio do desejo de determinar se as crianças interpretam o sinal de igualdade como um operador (sentido operacional) ou como uma relação (sentido relacional). Segundo os autores, os alunos percebem sentenças abertas da forma "$a + b = \square$", tal como "$3 + 4 = \square$", como um estímulo para que a resposta seja colocada dentro do retângulo. Em sentenças abertas da forma "$\square = a + b$", tal como "$\square = 2 + 5$", os alunos mostraram-se reticentes em aceitá-las, transformando-as em sentenças abertas da forma "$a + b = \square$" ou "$\square + a = b$". Um dos alunos explica que "$\square = 2 + 5$" está ao contrário, reescrevendo essa sentença para a forma "$2 + 5 = \square$", que ele considera correta, e, em seguida, pergunta ao entrevistador: "[...] 'Você lê de trás para frente?'"[51] (BEHR; ERLWANGER; NICHOLS, 1980, p. 14, tradução nossa).

Quando os autores apresentaram aos alunos sentenças da forma "$a = b$", eles também não as aceitaram, reescrevendo-as como "$a + b = \square$" ou "$a - b = \square$". Uma aluna modificou a igualdade "$3 = 5$" para "$3 + 2 = 5$", enquanto que a igualdade "$3 = 3$" foi modificada por ela para "$0 + 3 = 3$". Outros alunos tiveram respostas similares a essas quando questionados sobre as mesmas sentenças. Por sua vez, em sentenças da forma "$a + b = c + d$", as reações externadas pelos alunos mostram que eles esperam que, após o sinal de igualdade, esteja a resposta. Por exemplo, quando o entrevistador apresentou a sentença "$2 + 3 = 3 + 2$" a uma criança de seis anos, ela a modificou para "$2 + 3 = 5$" e "$3 + 2 = 5$". Quando lhe apresentaram a sentença "$1 + 5 = 5 + 1$", ela, inicialmente,

---

[51] O texto em língua estrangeira é: "[...] 'Do you read backwards?'"

modifica para "$1+5=1+5$" e, em seguida, para "$1+5=1+5=$"[52], dizendo que "[...] uma resposta deve ser escrita à direita do segundo sinal de igualdade."[53] (BEHR; ERLWANGER; NICHOLS, 1980, p. 15, tradução nossa).

Nesse estudo, as compreensões externadas pelos alunos acerca de igualdades da forma "$\square = a + b$", "$a = b$" e "$a + b = c + d$" demonstram, assim como também concluem os autores, que eles interpretam o sinal "=" de forma operacional, percebendo-o como um "[...] sinal de fazer algo."[54] (BEHR; ERLWANGER; NICHOLS, 1980, p. 15, tradução nossa). Certamente, tal compreensão demonstrada pelos alunos é consequência de um ensino da Aritmética focado na realização de procedimentos para se obter a resposta certa, o que dificulta o desenvolvimento da compreensão de outros significados de "=". Assim, por exemplo, o desconhecimento de que o sinal "=" é signo de igualdade comparativa em sentenças da forma "$a = b$", onde a e b são números naturais, levou os alunos a rejeitá-las, considerando-as como escritas de maneira incorreta. Portanto, nesse cenário, consideramos adequadas as respostas fornecidas pelos alunos, visto que eles estão habituados a trabalhar frequentemente com sentenças da forma $a + b = c$.

Em outro estudo, Falkner, Levi e Carpenter (1999), juntamente com um grupo de quinze professores, participavam de um projeto com a finalidade de determinar qual instrução algébrica seria adequada para crianças pequenas. A fim de avaliar como os alunos compreendem o sinal de igualdade, alguns desses professores pediram que estudantes do 1º ao 6º ano do Ensino Fundamental resolvessem a seguinte questão:

$$8 + 4 = \square + 5.$$

Para a surpresa dos pesquisadores, todos os 145 alunos do 6º ano responderam que 12 ou 17 deveria ser escrito dentro da caixa. Nos outros anos, o resultado também não foi muito diferente, tendo a maioria dos alunos apresentado as mesmas respostas. Isso demonstra que tais alunos desconhecem que o sinal "=" também pode ser signo de igualdade condicional, visto que a igualdade "$8 + 4 = \square + 5$" estabelece uma condição para que possamos determinar um valor desconhecido, representado por $\square$. Os autores, assim como Behr, Erlwanger e Nichols (1980), reconhecem que alunos da educação primária geralmente pensam que o sinal de igualdade indica que as operações precedentes a ele devam ser

[52] Aqui, de fato, não há expressão à direita do último sinal de igualdade.

[53] O texto em língua estrangeira é: "[...] an answer should be written to the right of the second equal sign."

[54] O texto em língua estrangeira é: "[...] 'do something signal'."

realizadas e que o número após esse sinal é a resposta do cálculo. Portanto, essas crianças comumente não reconhecem o sinal de igualdade como um signo da relação “[...] ‘é o mesmo que’ ”[55] (FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999, p. 233, tradução nossa). Como causa disso, os autores apontam a falta de variedade de sentenças nas quais o sinal “$=$” surge nessa etapa do ensino. Com o sinal de igualdade quase sempre surgindo em sentenças como “[...] $4+6=10$ ou $67-10-3=54$, as crianças estão corretas em pensar o sinal de igualdade como um sinal para calcular”[56] (FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999, p. 233, tradução nossa).

Camici et al. (2002) solicitaram que mais de trezentos alunos completassem a igualdade “$11-6=\boxed{}-11$”, escrevendo um número dentro do quadrado, de modo a torná-la uma sentença verdadeira. Diferentemente das outras pesquisas citadas anteriormente, que envolveram apenas alunos do Ensino Fundamental, também participaram dessa pesquisa alunos do Ensino Médio italiano. Apesar de a questão proposta ser bastante conhecida na literatura sobre o sinal de igualdade, o objetivo foi verificar se as respostas dos alunos indicavam interpretações especiais do sinal de igualdade, além da operacional e relacional. Assim como nos demais estudos, a maioria dos alunos do Ensino Fundamental apresentou uma compreensão procedimental do sinal de igualdade, indicando como resposta o número proveniente da realização da operação indicada à esquerda do sinal de igualdade. Por sua vez, no Ensino Médio, a maioria dos alunos demonstrou possuir uma compreensão relacional do sinal de igualdade, respondendo corretamente a questão.

Além das respostas que indicam uma compreensão procedimental e relacional do sinal de igualdade (5 e 16, respectivamente), destacam-se também outras respostas, a saber, 6 e -6; ambas incluídas no que os autores denominaram *resposta simétrica*. Segundo os autores, alunos que interpretaram o sinal de igualdade de forma simétrica aparentam não ter uma justificativa aritmética para tal, isto é, que leva em consideração a relação entre números e operações. Alunos com respostas desse tipo depreenderam do enunciado da questão que se devia organizar os signos simetricamente, como em “$11-6=6-11$” ou “$11-6=-6-11$”. O número de respostas simétricas no Ensino Fundamental foi pequeno, mas, no Ensino Médio, ocorre de forma significativa, correspondendo ao segundo tipo de resposta mais frequente. De acordo com os autores, é “[...] como se ter adquirido habilidades matemáticas

[55] O texto em língua estrangeira é: “[...] ‘is the same as’.”

[56] O texto em língua estrangeira é: “[...] $4+6=10$ or $67-10-3=54$, the children are correct to think of the equals sign as a signal to compute.”

levasse mais a encontrar *formas* do que *substâncias* em coisas matemáticas...”[57] (CAMICI et al., 2002, p. 8, tradução nossa, grifo do autor).

Como causa da predominância da compreensão procedimental do sinal “=” no Ensino Fundamental, os autores apontam um erro estratégico de ensino, no qual se reforça a interpretação procedimental do sinal de igualdade em detrimento da relacional. “Podemos dizer que é essencialmente devido à interpretação fornecida pelo professor, recebida pela criança, e então não retocada criticamente pelo próprio professor mais adiante.”[58] (CAMICI et al., 2002, p. 10, tradução nossa). Portanto, o problema não está na capacidade de compreensão dos alunos, mas sim na forma como o conteúdo é abordado em sala de aula. Dos alunos do Ensino Fundamental que interpretaram “=” de forma relacional, quase todos eram alunos de professores que declararam sempre tratar desses diferentes significados de “=” em suas aulas. Ainda segundo os autores, o grande número de respostas relacionais no Ensino Médio é certamente devido ao fato de os alunos terem estudado equações no Ensino Fundamental e reforçado esse conhecimento no Ensino Médio.

Em outro estudo, do qual participaram graduandos em Psicologia e pós-graduandos em Física, McNeil e Alibali (2005) analisaram como a compreensão do sinal de igualdade altera-se em função da experiência em Matemática e da variação contextual. Além de graduandos e pós-graduandos, também participaram desse estudo alunos do 3º ao 5º ano e do 7º ano do Ensino Fundamental. Cada participante foi aleatoriamente designado a interpretar o sinal de igualdade em apenas um dos seguintes contextos: (a) apenas o sinal de igualdade, sem a presença de signos à esquerda e à direita dele (“=”); (b) em um problema de adição, “$4 + 8 + 5 + 4 = \_\_$” ou (c) em um problema de equivalência, “$4 + 8 + 5 = 4 + \_\_$”. Alunos de graduação e pós-graduação interpretaram o sinal de igualdade de maneira relacional nos três contextos. Os alunos do 3º ao 5º ano, por sua vez, interpretaram o sinal de igualdade de forma operacional, compreendendo-o como signo de *a resposta* ou *o total*, em todos os contextos. E os alunos de 7º ano interpretaram o sinal de igualdade de forma operacional nos contextos (a) e (b) e de maneira relacional no contexto (c).

Segundo as autoras, o estudo fornece evidências de que o contexto influencia na interpretação do sinal de igualdade pelos alunos. Como esperado, os alunos do 3º ao 5º ano

---

[57] O texto em língua estrangeira é: “[...] come se l’aver acquisito competenze matematiche spinga di più a trovare *forme* anziché *sostanze* nelle matematiche cose...”

[58] O texto em língua estrangeira é: “Possiamo affermare che sia dovuta essenzialmente all’interpretazione che viene fornita dall’insegnante, recepita dal bambino, e poi non ritoccata criticamente più avanti dall’insegnante stesso.”

possuem uma visão operacional do sinal de igualdade. Nessa etapa do ensino, os contextos em que “=” surge geralmente não exigem que os alunos interpretem tal signo como um signo relacional, mas que tenham uma estratégia para realizar operações numéricas a fim de se obter a resposta final. “Portanto, quando apresentados a um problema de matemática, jovens estudantes podem preocupar-se com as operações envolvidas na obtenção da resposta correta, e podem vir a associar o sinal de igualdade a essas operações.”[59] (MCNEIL; ALIBALI, 2005, p. 303, tradução nossa). Por outro lado, estudantes do 7º ano apresentaram as interpretações relacional e operacional, pois, para eles, a interpretação relacional está começando a emergir, encontrando evidências que contradizem sua interpretação operacional (como frações equivalentes). Assim, esses “[...] alunos não abandonam as interpretações bem estabelecidas apenas porque não funcionam em alguns contextos. Em vez disso, eles podem ver esses contextos como exceções e mudar seus pensamentos apenas nesses contextos.”[60] (MCNEIL; ALIBALI, 2005, p. 301, tradução nossa). Agora, o fato de os graduandos e pós-graduandos possuírem uma visão relacional do sinal de igualdade nos três contextos sugere que, com experiência suficiente, a compreensão relacional do sinal de igualdade pode se sobrepor à operacional.

3.3 **Conclusões obtidas a partir da análise das pesquisas**

A análise dos estudos das seções anteriores deste capítulo nos permite obter algumas conclusões. Primeiramente, professores frequentemente têm negligenciado a complexidade e a importância do sinal de igualdade na Matemática. Os estudos apontam que alunos, ao iniciarem o estudo da Álgebra, geralmente interpretam o sinal “=” de forma operacional devido a um erro estratégico de ensino, e não à incapacidade dos alunos em compreender os seus demais significados. Isso ocorre pelo fato de esse sinal, em tal etapa de ensino, geralmente surgir em igualdades que apresentam uma sequência de operações no primeiro membro e um único número no segundo membro, o resultado.

---

[59] O texto em língua estrangeira é: “Thus, when presented with a mathematics problem, young students may concern themselves with the operations involved in getting the correct solution, and they may come to associate the equal sign with those operations.”

[60] O texto em língua estrangeira é: “[...] students do not abandon well-established interpretations just because they do not work in a few contexts. Instead, they may view those contexts as exceptions and change their thinking only in those contexts.”

Por sua vez, embora o aluno tenha compreendido o significado operacional do sinal de igualdade, não podemos concluir que ele já seja capaz de interpretá-lo como signo de igualdade comparativa nem como signo de qualquer outro conceito. O professor deve entender que, em sentenças como "$5 + 3 = 2 \times 4$" (a soma de 5 e 3 vale o mesmo que o produto de 2 por 4) e "$5 + 3 = 8$" (a adição de 5 e 3 resulta em 8), apesar de o significante ser o mesmo ("$=$"), ele não está associado ao mesmo significado, consistindo, pois, em signos diferentes. Mesmo que o contexto influencie nas interpretações do sinal "$=$" pelos alunos (MCNEIL; ALIBALI, 2005), para que, em novos contextos, eles mudem de uma concepção sedimentada desse signo para uma nova concepção, eles devem ter conhecimento da possibilidade dessa nova interpretação poder ser atribuída a "$=$". Então, a cada significado do sinal de igualdade, além de se atentar para o desenvolvimento cognitivo, o professor deve dispensar cuidado, tempo e variedade de situações suficientes para que o aluno consiga interpretar esse sinal como um signo com esse novo significado.

Além do mais, estratégias de ensino que propiciem o desenvolvimento da compreensão dos vários significados do sinal "$=$" devem ter início desde o estudo da Aritmética. Isso porque a abordagem tradicional dessa disciplina, centrada no cálculo para se obter a resposta certa, possibilita apenas que os alunos compreendam o sinal "$=$" como signo de igualdade operacional. Entretanto, ao se chegar à Álgebra, exige-se do aluno que ele tenha conhecimento de seus outros significados, como que ele é signo de igualdade comparativa. Dessa forma, isso acaba gerando uma desconexão entre a compreensão desse sinal na Aritmética e na Álgebra que não se resolve facilmente. Tanto que essa diferença de significados proporcionada pelo ensino tradicional da Aritmética tem sido apontada como um dos grandes obstáculos enfrentados pelos alunos ao iniciarem o estudo da Álgebra.

Por fim, como foi dito, sugestões para possibilitar, já no estudo da Aritmética, o desenvolvimento da compreensão de outros significados matemáticos do sinal "$=$", diferentes do operacional, consistem em realizar atividades nas quais os alunos devam avaliar o valor lógico[61] de sentenças numéricas ou completar sentenças abertas numéricas de modo a torná-las verdadeiras. Em tais atividades, deve se dar especial atenção à clarificação do contexto em que o sinal de igualdade surge, de modo a eliminar possíveis ambiguidades em relação à interpretação do seu significado. Assim, não recomendamos pedir simplesmente que um aluno classifique, por exemplo, a sentença "$5 = 2 + 3$" em verdadeira ou falsa, sem dar maiores detalhes contextuais que permitam identificar o significado que o sinal "$=$" possui nessa

[61] O *valor lógico* de uma proposição (ou sentença) é *verdade*, se a proposição é verdadeira, ou *falsidade*, se a proposição é falsa (ALENCAR FILHO, 1986).

sentença. Isso porque, em tal sentença (embora sempre verdadeira), ele pode possuir significados distintos, dependendo do contexto. A fim de clarificar o contexto, podemos, em paralelo, indicar a interpretação da igualdade “$5 = 2 + 3$”, escrevendo, por exemplo, “$5 = 2 + 3$ (5 é o resultado da adição de 2 e 3).”, ou, em vez de escrever, fazer a leitura dessa interpretação para o aluno. Nesse caso, estaríamos possibilitando o desenvolvimento da compreensão do sinal “$=$” como signo de igualdade decomponente. Outra possibilidade é escrever “$5 = 2 + 3$ (5 e a soma de 2 e 3 são o mesmo número).” ou simplesmente ler essa interpretação. Nesse caso, possibilitaríamos o desenvolvimento da compreensão do sinal “$=$” como signo de igualdade comparativa, além de favorecer a compreensão de que “$2 + 3$” não indica apenas o processo de se adicionar 3 a 2, mas também o resultado desse processo, um número, que é a soma de 2 e 3.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O sinal de igualdade possui atualmente pouco mais do que 460 anos de existência. Concebido como signo de equação algébrica, ao longo do tempo adquiriu diversos significados, alguns dos quais não mais aceitos (como indicar a relação de paralelismo entre retas), tornando-se um signo complexo e onipresente na Matemática. Mostramos neste trabalho a complexidade desse signo, ao constatar que ele possui ao menos onze significados matemáticos distintos, sendo alguns deles mais afastados um do outro, como o de igualdade operacional e predicativa, outros mais próximos, como o de igualdade definidora e nomeante. Cabe ressaltar que os significados adquiridos por "=" ao longo do tempo estão estritamente relacionados ao avanço da Matemática, que se tornou possível graças ao desenvolvimento cognitivo da sociedade. O uso de "=" como signo de igualdade relacional, por exemplo, tornou-se possível apenas após o advento da Geometria Analítica, com a publicação do *Discours* (1637) de Descartes, pois foi onde apareceu "[...] pela primeira vez uma equação em x e y como forma de expressar uma dependência entre duas quantidades variáveis, a partir de então é possível calcular os valores de uma variável que correspondem a determinados valores de outra." (AZCÁRATE; DEULOFEU, 1996, p. 47 apud GONÇALVES, 2015, p. 84). O próprio surgimento do sinal de igualdade é fruto do avanço da Matemática, tendo sido criado especialmente para representar o recém surgido conceito de equação algébrica.

Dado que ler expressões da Linguagem Matemática requer interpretação e compreensão dos signos e das relações implícitas no que se está dizendo de matemática (DANYLUK, 2002 apud COSME, 2007), torna-se necessário conhecer os diversos significados do sinal "=". Tanto que o desconhecimento de que esse sinal pode ser usado para estabelecer uma comparação, dizendo que duas expressões possuem o mesmo valor, tem sido apontada por diversos estudos como um dos principais obstáculos enfrentados pelos alunos ao iniciarem o estudo da Álgebra. As diversas pesquisas aqui analisadas nos mostram que as estratégias de ensino adotadas pelos professores têm negligenciado a importância da compreensão dos diversos significados desse sinal para a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Contudo, uma estratégia de ensino que permita a aprendizagem adequada de conceitos matemáticos deve levar isso em consideração.

Outro ponto que observamos ao desenvolver este estudo é que grande parte das pesquisas sobre a compreensão do sinal de igualdade tem como público alvo alunos dos anos iniciais de ensino. Dessa forma, tais pesquisas avaliam a compreensão dos alunos somente em situações onde "$=$" é signo de igualdade operacional, comparativa ou condicional. E nessas situações, sempre há a presença de uma única igualdade. Julgamos ser necessário o desenvolvimento de estudos que avaliem a compreensão de "$=$" por alunos em contextos em que esse sinal possua outros significados, além dos citados anteriormente. Também é importante avaliar a compreensão desse sinal em situações que apresentam mais de um tipo de igualdade, como "$1176 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 7^2$" ("$1176$ pode ser escrito como o produto $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$, sendo que esse último pode ser representado por $2^3 \times 3 \times 7^2$"). Nesse exemplo, "$1176 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$" é uma igualdade decomponente e "$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 7^2$", representacional. Isso, a nosso ver, é necessário para que possamos ter uma melhor ideia do conhecimento demonstrado pelos alunos acerca da variação de significado de "$=$". Ao abordar diversas situações de apenas uma igualdade, a própria mudança de situação pode representar, para os alunos, um sinalizador de possível mudança de significado de "$=$". Dessa forma, abordar mais de um tipo de igualdade por situação seria uma forma mais precisa de identificar se os alunos fazem uma análise realmente consciente daquilo que leem e se essa análise está correta.

Finalmente, todas as pesquisas que analisamos durante este estudo objetivaram avaliar a forma como alunos interpretam o sinal de igualdade. Não conseguimos encontrar pesquisas cujo foco seja analisar os significados matemáticos do sinal de igualdade, assim como nós fizemos neste estudo. Entendemos que estudos com esse objetivo são importantes por poderem servir tanto como ferramentas auxiliares na elaboração de estratégias de ensino sobre a compreensão de "$=$" na Matemática quanto balizadores entre significados matemáticos e não matemáticos desse sinal. Além disso, eles podem servir como registros históricos, não somente dos significados atribuídos a "$=$" em certa época, mas também do raciocínio matemático vigente nessa época. E julgamos importante que estudos desse tipo sejam realizados com outros signos, além do sinal de igualdade. Cientes do fato de que a Matemática está sujeita a novos avanços e de que novos significados podem ser atribuídos ao sinal de igualdade ao longo do tempo, recomendamos que tais estudos sejam realizados com certa constância.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à lógica matemática*. 16. ed. São Paulo: Nobel, 1986.

______. *Teoria elementar dos números*. 2. ed. São Paulo: Nobel, 1985.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando matemática 8*. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015. (Coleção praticando matemática; v. 8)

BADARÓ, J. N. *Significados do símbolo de igualdade numa jornada por três mundos da matemática*. 2010. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

BANDARRA, L. O sinal de igual: um estudo vertical. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Póvoa de Varzim. *Grupos de discussão*. Porto: CMUP, 2011. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/17.Bandarra.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2018.

BECHARA, E. *Moderna gramática portuguesa*. 37. ed. rev. e atual. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2009.

BEHR, M.; ERLWANGER, S.; NICHOLS, E. How children view equals sign. *Mathematics Teaching*, [S.l.], n. 92, p. 13-15, Sept. 1980.

BIANCHINI, E. *Matemática*. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2002. 4 v. V. 3: 7ª série.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Editora Atual, 1995. cap. 3, p. 23-37.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de janeiro: LTC, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.148 p.

CAJORI, F. *A history of mathematical notations*. London: The open court publishing company, 1928. 2 v. V. 1: Notations in elementary mathematics.

CAMICI, C. et al. Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e dele scienze integrate*, [S.l.], v. 25, n. 3, p. 255-270, mag. 2002.

CARDOSO, L. F. *Dicionário de matemática*: edição de bolso. Rio de Janeiro: Lexikon Editora Digital, 2007.

CAVALCANTI, J. D. B. *Concepções de alunos do 3º ano do ensino médio sobre o significado do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos*. 2008. 221 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2008.

CAVALCANTI, J. D. B.; SANTOS, M. C. Noção Operacional e Equivalência: um estudo sobre a compreensão do sinal de igualdade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. *Comunicação científica*. Belo Horizonte: SBEM, 2007. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC03083994478aT.doc>. Acesso em: 07 out. 2017.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. *Matemática:* teoria e contexto, 8º ano. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

CHAVANTE, E. R. *Matemática, 8º ano*. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2015. (Coleção Convergências)

CIVINSKI, D.D.; BAIER, T. O sinal de igualdade: dificuldades encontradas por estudantes do ensino fundamental. In: IV SINECT – IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2014, Ponta Grossa. *Anais*... Ponta Grossa: UTFPR, 2014. Disponível em: <http://www.sinect.com.br/anais2014/anais2014/artigos/ensino-de-matematica/01408061147.pdf>. Acesso em: 6 jul. 2017.

CLAPHAM, C.; NICHOLSON, J. *The concise Oxford dictionary of mathematics*. 4. ed. New York: Oxford University Press, 2009.

COSME, V. V. *Igualdade matemática*: um estudo de sua história e significados. 2007. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

CUNHA, S.; VELASCO, J. *Introdução à gramática da linguagem matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2019.

DANTE, L. R. *Matemática*: contexto e aplicação. São Paulo: Ática, 1999. v. 2.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria analítica*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT; 11)

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 2011.

FALKNER, K. P.; LEVI, L.; CARPENTER, T. P. Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, [S.l.], v. 6, n. 4, p. 232-236, Dec. 1999.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; ALFONSO, A. B. *Teoria dos conjuntos*: sobre a fundamentação matemática e a construção de conjuntos numéricos. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2011.

FERREIRA, A. B. H. *Miniauérilio século XXI escolar*: o minidicionário da língua portuguesa. 4. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FREUDENTHAL, H. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. E-book.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR., J. R. *A conquista da matemática,* 7º ano. Nova ed. São Paulo: FTD, 2012.

GONÇALVES, A. C. *Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos*. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

GONZÁLEZ, M. M. *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. 2006. 734 f. Tese (Programa de doctorado "Didáctica de la Matemática") – Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada.

HEEFFER, A.The emergence of symbolic algebra as a shift in predominant models. *Foundations of Science*, [S.l.], v. 13, n. 2, p. 149-161, June 2008.

HEFEZ, A. *Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção PROFMAT; 08)

IEZZI, G. et al. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 6. ed. São Paulo: Atual, 1985. v. 9.

IEZZI, G. et al. *Matemática*: ciência e aplicações. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004a. v. 1.

______. *Matemática*: ciência e aplicações. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004b. v. 3.

IGUAL. Dicionário online Aulete Digital, 11 dez. 2018. Disponível em: < http://www.aulete.com.br/Igual>. Acesso em: 11 dez. 2018.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, [S.l.], v. 12, n. 3, p. 317-326, Aug. 1981.

KRANTZ, S. G. (Ed.). *Dictionary of algebra, arithmetic, and trigonometry*. Boca Raton: CRC Press, 2000. (A volume in the comprehensive dictionary of mathematics)

LIMA, E. L. *Curso de análise*. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976. v. 1.

______. *Espaços métricos*. 4. ed. Rio de Janiero: IMPA, 2011.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 3 v. V. 1 : volume 1. (Coleção do professor de matemática, 13).

LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos conjuntos*. Tradução de Fernando Vilain Heusi da Silva. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S.A. - Rio, 1964. (Coleção Schaum)

MCCLEARY, L.; VIOTTI, E. *Semântica e pragmática.* Florianópolis: [s.n.], 2009.

MCNEIL, N. M.; ALIBALI, M. W. Knowledge change as a function of mathematics experience: all contexts are not created equal. *Journal of cognition and development*, [S.l.], v. 6, n. 2, p. 285-306, May 2005.

MOL, R. S. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MORAIS FILHO, D. C. *Um convite à matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção Professor de Matemática; 23)

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo: Editora UNESP: Imprensa Oficial do Estado, 2001.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT; 09)

NASCIMENTO, V. R. *Semiótica – Ciências Sociais e Humanas:* o blog da disciplina de semiótica dos alunos do 2º ano de Ciências Sociais e Humanas da Universidade de Cabo Verde. Praia, Cabo Verde. 13 maio 2010. Disponível em: <http://semiotica-unicv.blogspot.com/2010/05/signo-significante-significacao.html>. Acesso em: 30 abr. 2019.

OKSUZ, C. Children's understanding of equality and the equal symbol. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, [S.l.], v. 8, n. 1, p. 1-20, Aug. 2007.

REFERENTE. Dicionário online do Google, 18 jun. 2019a. Disponível em: <https://www.google.com/search?rlz=1C1NHXL_pt-BRBR815BR815&ei=05cwXa6hE-HF5OUPl_ye0Ac&q=referente&oq=referente&gs_l=psy-ab.3..0i70i249j0l9.2291.3541..3718...0.0..0.125.997.0j9......0....1..gws-wiz.......0i71j0i131j0i131i67j0i67.MkHso0-rUnw&ved=0ahUKEwju1rDF677jAhXhIrkGHRe-B3oQ4dUDCAo&uact=5>. Acesso em: 18 jun. 2019.

REFERENTE. Dicionário online Michaelis, 18 jun. 2019b. Disponível em: < http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=referente>. Acesso em: 18 jun. 2019.

STEWART, I. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2009

STEWART, J. *Cálculo volume I*. Tradução de Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

SWOKOWSKI, E. W. *Cáculo com geometria analítica*. Tradução de Alfredo Alves de Faria. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983. v. 1.

TAYLOR, J. M. Equations. *The Mathematics Teacher*. [S.l.], v. 2, n. 4, p. 135-146, June 1910. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/27949630?seq=1#metadata_info_tab_contents>. Acesso em: 10 nov. 2018.

TRAJANO, A. *Aritmética progressiva*: curso completo teórico e prático de aritmética superior. 82. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1952.

USISKIN, Z. Conceptions of school algebra and uses of variables. In: SHULTE, A. P. (Ed.); COXFORD, A. F. (Ed.) . *Ideas of algebra, k-12*: 1988 yearbook. Reston: NCTM, 1988. p. 8 – 19. Disponível em: < http://www.msri.org/attachments/workshops/454/Usiskin-Conceptions%20of%20School%20Algebra.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2019.

VELÁZQUEZ, M. D. *Diccionario básico de matemáticas*. Madrid: Ediciones Anaya, S. A., 1980.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais*. Tradução de Antonio Zumpano. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 1.