Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Pedro Henrique Alves Barros

A Geometria Sona e suas possibilidades de aplicação no âmbito da educação básica

Rio de Janeiro
2019

Pedro Henrique Alves Barros

A Geometria Sona e suas possibilidades de aplicação no âmbito da educação básica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B277 Barros, Pedro Henrique Alves
A Geometria Sona e suas possibilidades de aplicação no âmbito da educação básica / Pedro Henrique Alves Barros. – 2019.
129f.. : il.

Orientadora: Patrícia Nunes da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Etnomatemática - Teses. 2.Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Silva, Patrícia Nunes da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 51-7

Patricia Bello Meijinhos - CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica.

Pedro Henrique Alves Barros

A Geometria Sona e suas possibilidades de aplicação no âmbito da educação básica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de Agosto de 2019.

Banca Examinadora

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística- UERJ

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira
Instituto de Matemática e Estatística- UERJ

Prof. Dr. André Luiz Cordeiro dos Santos
Departamento Acadêmico de Matemática - CEFET-RJ

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha minha madrinha Erotildes (in memorian), que faleceu durante a minha viagem para a IX Bienal da Matemática.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida.

A minha família por ter conduzido meus passos.

A minha esposa por ser minha companheira do início ao fim.

A professora Patrícia Nunes, por sua dedicação ímpar, disponibilidade e paciência. Seu apoio foi fundamental para minha formação de mestrando, sobretudo nesta etapa final.

Ao professor Pitombeira, por ter me apontado a figura de PaulusGerdes como referência fundamental que norteou este trabalho.

Enquanto a cor da pele for mais importante que o brilho dos olhos, haverá guerra.

Bob Marley

RESUMO

BARROS, Pedro Henrique Alves. *A Geometria Sona e suas possibilidades de aplicação no âmbito da educação básica*.2019. 129f.Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

O presente trabalho busca explorar o conteúdo dos sona sob sua perspectiva educacional no ambiente escolar em nível de educação básica. Praticado pelos Tchokwe, povo que vivia no continente africano, na região de Moçambique e Angola, os sona eram desenhos feitos em areia por membros mais antigos da tribo, para contar histórias essenciais na formação dos mais jovens. Durante a colonização, o imperialismo europeu dizimou povos e impôs sua cultura, restando hoje apenas resquícios do que havia no passado. A colonização fez com que a cultura dos povos subjugados pelos colonizadores fosse colocada em um patamar de resistência, abaixo da cultura dos colonizados, nos países dominados, fato que permanece até os dias atuais. Os sona são apresentados neste trabalho como uma maneira lúdica e alternativa de apresentação de conceitos que são necessários na formação do estudante de educação básica nas escolas brasileiras. Através deles dentro da etnomatemática, podem ser encontrados um rico conteúdo matemático, que permite não só o ensino, mas a valorização cultural de outros povos, no passado vistos como submissos.

Palavras-chave: Etnomatemática. Sona. Matemática. Tchokwe.

ABSTRACT

BARROS,Pedro Henrique Alves. *Sona Geometry and it's possibilities of application in the scope of basic education.* 2019. 129f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019

The present work seeks to explore the content of the sona from their educational perspective in the school environment at the level of basic education. Practiced by the Tchokwe, people who lived on the African continent in the Mozambique and Angola regions, the sona were drawings made in sand by older members of the tribe, to teach essential stories in the formation of the younger members. During the colonization, European imperialism decimated people and imposed their culture, leaving today remnants of what was in the past. The colonization caused the culture of the peoples subjugated by the colonizers to be placed in a level of resistance below the culture of the colonized in the dominated countries, a fact that remains until the present day. The sona are presented in this work as a playful and alternative way of presenting concepts, which are necessary in the formation of the student of basic education in brazilian schools. Through them within ethnomathematics, rich mathematical content can be found, which allows not only teaching, but also the cultural appreciation of other peoples in the past seen as submissive.

Keywords: Ethnomathematics. Sona. Mathematics. Tchokwe.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao longo de minha formação básica, tive poucos contatos com a história do continente africano. Basicamente, a história do continente se resumia ao tráfico de escravos, e guerras incessantes por tomada de territórios, seja por invasores externos, ou mesmo disputas internas.

Como educador, vejo o quão importante é tratar este tema em sala de aula. Não cursei em nível escolar assuntos relacionados a matrizes africanas, senão a escravidão e o processo de descolonização. A África não me fora apresentada como um continente, e sim como um continente de escravos humanos, e, posteriormente, como campo de batalha. A África me fora apresentada sempre como um continente a serviço de potências, como um tabuleiro onde as potências jogavam. Em formação superior, meu contato foi muito pequeno conforme já relatado. Como educador, sinto que esse trabalho me deu uma grande chance de tentar reverter lacunas passadas, e, felizmente, percebo que a educação está caminhando, ainda que a passos lentos, para ser mais inclusiva.

O trabalho começa no Capítulo 1 questionando se havia ou não matemática no continente africano, para tal, foi preciso fazer um paralelo sucinto com a forma eurocentrista como a matemática é ensinada no Brasil. No Capítulo 2, define-se o conceito da etnomatemática, contextualizando o seu surgimento, importância e utilidade no campo da ciência. O Capítulo 3 aprofunda a discussão da necessidade de valorização de outras culturas, além da cultura europeia. Neste capítulo, pode-se fazer um paralelo entre a etnomatemática e o ensino multicultural como forma de valorização da pluralidade. No Capítulo 4 é apresentada a cultura dos sona, praticada pelos tchokwe, população que habitava parte da região de Angola e Moçambique, e o pesquisador Paulus Gerdes. Neste capítulo é feita a análise técnica dos sona. No Capítulo 5 são apresentadas propostas de aplicação dos sona na educação básica, a qual chamarei de Geometria Sona, com exercícios resolvidos e selecionados por nível de dificuldade. No Capítulo 6, uma dessas atividades é escolhida para ser aplicada dentro do escopo de ensino do 6° ano do Ensino Fundamental. Neste capítulo são citadas recomendações e sugestões de atividades. O Apêndice A contém o plano de aula, para uma atividade que pode ser aplicada no 6° ano. A folha da atividade está no Apêndice B.

1 **HAVIA MATEMÁTICA NA ÁFRICA?**

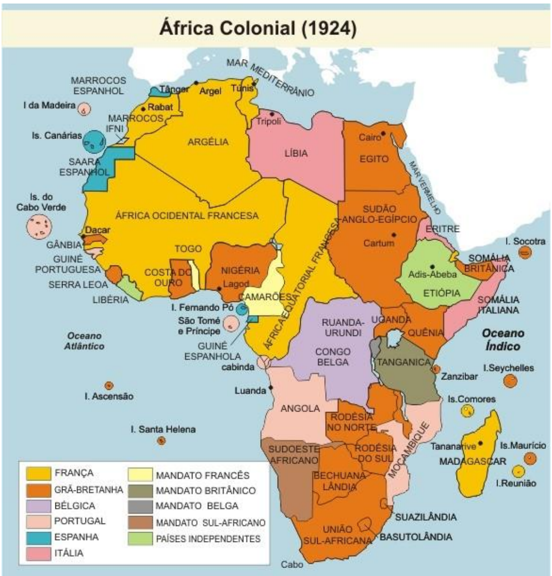
Uma forma única de compreender a matemática permeia grande parte das instituições de ensino do país. A matemática lógico-dedutiva de Tales de Mileto e Euclides é posta em destaque, sendo a base para o que se entende por formação matemática no ensino básico brasileiro. Desde jovem, o estudante é colocando distante de outras possibilidades de pensamento. No entanto, a matemática é plural, e expressa um conjunto de “habilidades e práticas utilizadas por distintos grupos culturais na sua busca de explicar, de conhecer, de entender o mundo que os cerca, a realidade a eles sensível e de manejar essa realidade em seu benefício e no benefício de seu grupo” (D’AMBRÓSIO, 1998, p. 6). Pensar em um mundo onde somente o pensamento grego foi a chama do pensamento matemático ocidental, é desprezar as capacidades dos demais povos ao redor do mundo de refletir a respeito de suas realidades e necessidades.

O enfoque deste trabalho é colocar uma lupa no continente africano, buscando desfazer preconceitos que marginalizaram e, ainda marginalizam, este continente, preservando uma visão errônea de primitivismo e de atraso social, econômico e tecnológico. Diante de um colonialismo implacável, que se iniciou no século XV com Portugal e Espanha, e durante todo o século XVI continuou com nações como Holanda, Inglaterra e França, buscar imersão no modo de pensar dos povos da época, é vasculhar o que foi ignorado, ou proibido, pelo colonizador. A Figura 1 ilustra esse momento que ficou conhecido como “Partilha da África”. A Figura 2, mostra a divisão do continente no início do século XX. É preciso compreender que esse processo de colonização territorial, foi muito mais profundo, pois não apenas provocou invasões de regiões ocupadas por diferentes grupos, como também buscou aniquilá-los culturalmente, marginalizando-os desde o século XVI até os dias atuais. Oliveira (2003) destaca que os africanos e seus descendentes são negados em sua existência, sua história é desqualificada e sua identidade é inferiorizada. É preciso, portanto, rever conceitos, rever a noção errônea de uma África primitiva, evitando que se perpetue apenas a visão do colonizador.

Figura 1 - Partilha da África.

Fonte: portaldoprofessor.mec.gov.br

Figura 2 - Cenário regional da África em 1924.



Fonte: portaldoprofessor.mec.gov.br

Lutar para a inserir no currículo de sala de aula, conteúdos externos ao que já vem sendo feito, é uma luta contra um sistema que privilegia a visão eurocêntrica da produção de conhecimento. A gênese de todo conhecimento não veio apenas da Grécia, é preciso vasculhar mais. Esse esforço de busca urge à medida que caminhamos em direção aos cursos de Licenciatura. A disciplina História da Matemática é talvez o primeiro contato do futuro educador com outras matrizes senão a greco-romana. Forde (2008) destaca que a problemática se estende aos cursos de graduação. A África presente na disciplina citada comumente restringe-se ao Egito, representado como primitivo. Acredito que este trabalho seja um vetor de esforços para justificar, que a África parece ainda não ter escapado aos olhos colonialistas no meio científico. A compreensão da história africana é mais que um trabalho de buscas, é uma reconstrução do pensar, dentre eles o matemático, praticado pelos povos daquele continente, que por muitos séculos foi marginalizado por meio do racismo e eurocentrismo.

1.1 **Tribo x Etnia**

Uma das primeiras necessidades para incorporar o estudo das matrizes africanas é distinguir tribo e etnia. Não existe outro modo de desconstrução de preconceitos, a não ser partindo de como se referir aos grupos nos quais centraliza-se esta abordagem. Segundo o dicionário Aurélio, o verbete tribo define-se como “cada uma das divisões dos povos da Antiguidade. Conjunto de famílias que provêm de um ascendente cujo tronco constitui vários ramos. Conjunto de famílias que constituem uma das divisões dos povos nômades e de alguns povos bárbaros. Divisão de famílias”. O termo tribo é comumente utilizado para descrever os grupos que habitavam o continente Africano. No dicionário Aurélio, o vocábulo etnia é definido por “agrupamento de famílias numa área geográfica cuja unidade assenta numa estrutura familiar, econômica e social comum e numa cultura comum”. Munanga (2007, p.10-11) cita que embora o conceito biológico de raça não se aplique aos seres humanos, isso não é suficiente para romper com as barreiras mentais, que criam raças fictícias no imaginário coletivo. O racismo moderno não utiliza o termo raça, característico do racismo clássico. Ele afirma que o racismo novo se alimenta do termo etnia para designar grupos culturais, tentando adequar-se aos padrões do politicamente correto, por utilizar-se de um léxico mais aceitável. Esclarece-se que aqui neste trabalho que a opção por se referir a grupos como brancos e negros, e dentre grupos com a mesma classificação melanodérmica, caracterizar subgrupos como etnias está relacionada a natureza histórica. Tais conceitos são aqui desprovidos de juízo de valor, sendo exclusivamente escolhidos para abordar o paradigma levantado neste trabalho. O termo etnia, portanto, é mais justo, pois adiciona a palavra cultura, não reduzindo o vínculo que descreve um povo às necessidades de sobrevivência. Segundo Edward Tylor (1832-1917): “A cultura é todo aquele complexo que inclui o conhecimento, as crenças, a arte, a moral, a lei, os costumes e todos os outros hábitos e capacidades adquiridos pelo homem como membro da sociedade”.Para Franz Boas (1911, 1963) o ser humano apreende o mundo sob a ótica de sua cultura.

A palavra matemática deriva da palavra grega “matemathike”. O vocábulo “máthema” remete a compreensão, explicação, ciência, conhecimento. Deste modo, a etimologia da palavra matemática a relaciona com a compreensão do que cerca o indivíduo. Quando confrontamos a definição etimológica, com a do antropólogo Franz Boas, compreendemos que como a matemática é uma forma de explicar o externo, adotada pelo indivíduo, e como cada indivíduo possui uma diferente maneira de relacionar-se, é prudente constatar que cada povo tem a sua “própria matemática”. É então natural perguntar: Por que privilegiar a matemática grega, em detrimento das demais? Por que este olhar é tido como superior, e ponto de partida, para o ensino da disciplina nas escolas, cursos de graduação?

1.2 **O Eurocentrismo no ensino da Matemática e a ideologia do branqueamento**

A colonização africana foi, sem dúvida, um holocausto de dimensões históricas inigualáveis na História. Mesmo que não existam as “raças-humanas” do ponto de vista da biologia, as fronteiras persistem nos materiais didáticos escolares, no currículo e no dia a dia de um estudante através da chamada ideologia do branqueamento (Figura 3).

> A ideologia do branqueamento objetiva eliminar o componente negro da sociedade através da inferiorização da estética dos valores culturais e processo civilizatório negro. Para tanto, o sistema utiliza os estereótipos que são veiculados através dos meios de comunicação e Instituições. Dentre estes, de forma sistemática e eficaz, encontramos a escola, com o seu currículo eurocêntrico e materiais pedagógicos especificamente os livros didáticos, nos quais o negro é quase invisível e, quando visível, o é de forma desumanizada e estereotipada (Silva, 1996, p.7).

Figura 3 - Jantar na casa grande por Jean-Baptiste Debret.

Fonte: mtst.org

Ao mesmo tempo que os meios de comunicação e instituições representam uma imagem idealizada e negativa do negro, apresentam o branco através de uma imagem idealizada de belo, puro, inteligente, representante da humanidade, bem como de papéis e funções qualificadas e valorizadas na sociedade”. Adentrar nesses meandros, é particularmente uma tarefa de reinvenção. É remar contra toda uma formação da base ao topo da pirâmide, que privilegia a visão do colonizador sobre o que é verídico e legítimo. O pesquisador, de acordo com Souza (2005), deve

> debruçar-se criticamente sobre as ideologias que deformam a população africano-brasileira e a identificam como incapaz, ignorante, primitiva, pagã, selvagem, incivilizada... Se o outro é colocado como objeto, como podemos conhecê-lo como sujeito? A deformação existente, não se trata de estudar essa população como objeto de ciência, e sim, a sua cultura e seu complexo sistema civilizatório como fonte de sabedoria(SOUZA, 2005, p. 27).

Por séculos, o continente africano foi visto de maneira preconceituosa, e registros na literatura não são escassos. Segundo Aristóteles, “Aqueles que são muito negros são covardes, como, por exemplo, os egípcios e os etíopes” (DIOP, 1983, p.51). Outro registro na literatura realça que a visão ao longo da história

> [...] a principal característica dos negros é que sua consciência ainda não atingiu a intuição de qualquer objetividade fixa, como Deus, como leis, pelas quais o homem se encontraria com a própria vontade, e onde ele teria uma ideia geral de sua essência [...]. O negro representa, como já foi dito, o homem natural, selvagem e indomável. Devemos nos livrar de toda reverência, de toda moralidade e de tudo o que chamamos sentimento, para realmente compreendê-lo. Neles, nada evoca a ideia do caráter humano [...]. A carência de valor dos homens chega a ser inacreditável. A tirania não é considerada uma injustiça, e comer carne humana é considerado algo comum e permitido [...] Entre os negros, os sentimentos morais são totalmente fracos – ou, para ser mais exato, inexistentes (HEGEL, apud PRAXEDES, 2008, p. 2).

A história das ciências ocidentais caminha associada às histórias de colonização, eurocentrismo e política de branquitude. A matemática lecionada em grande parte das universidades brasileiras é dividida em dois grandes blocos: um bloco pré-helênico considerado primitivo, estático, e um bloco helênico, onde privilegia a forma de pensar do homem branco ocidental. Não tem a ver com uma forma de pensar relacionada com o significado etimológico da palavra matemática, mas uma forma quase que única instituída como verdade absoluta e mais avançada. Segundo Paulo Freire, educar é um ato político. Engana-se o educador que se limita a reproduzir uma matemática onde meras afirmações e deduções são “suficientes”. É preciso se situar no contexto do pensar da época, e, principalmente, questionar esse modo de entender a realidade. Devemos conhecer outras formas de pensar, outras formas de abordar, para que haja célebres pensadores além de Gauss, Tales, Pascal. Ao enaltecermos apenas o pensamento do homem ocidental, e utilizarmos ele como processo de aculturação dos povos não ocidentais, submetemos os demais povos ao chamado colonialismo científico, criando um modelo de pensamento, e, pior, utilizando-o para legitimar sob uma ótica instituída a validade de outros modos de pensar. Os regimes coloniais, “impõem fronteiras rígidas dentro das quais se espera que as culturas floresçam” (HALL, 2006, 34).

Figura 4 - Negação da cultura do colonizado, em detrimento da cultura do colonizador.

Fonte: pt.zenit.org

2 ETNOMATEMÁTICA

2.1 O que é a Etnomatemática?

Na década de 60, começou-se o questionamento do currículo de ensino. Muito do que era utilizado em "países em vias de desenvolvimento" era importado dos países tido como desenvolvidos. Na prática, isso era a persistência da negação da cultura local, em detrimento de um único modo de pensar. Esse pensamento de resistência aos preconceitos racistas e neocolonialistas, atuou sobretudo na matemática. Várias vertentes de contestação surgiram, como a sociomatemática de Claudia Zaslavsky, a matemática oprimida citada por Paulus Gerdes, entre outras. Se reunirmos todas as diferentes vertentes de discussão, conseguimos extrair o denominador comum para todas: a Etnomatemática. Para Ferreira (1986), etnomatemática é a "matemática incorporada na cultura popular" (Ferreira & Imenes, 1986, p. 4). Borba (1987), pesquisador que atuou dentro de comunidades brasileiras, cita que a etnomatemática é

> como um campo de conhecimento intrinsecamente vinculado a um grupo cultural, e a seus interesses, estando pois estreitamente ligado à sua realidade, sendo expressa através de uma linguagem, geralmente diferenciada das usadas pela matemática vista como ciência, linguagem esta que está umbilicalmente ligada à sua cultura, à sua etnia (BORBA, 1987, p. 38).

De acordo com o pesquisador, pode-se inferir a matemática como produto cultural, portanto é única para cada povo, e não unilinear, pois o que determina a direção do pensamento, são as necessidades de cada grupo.

Figura 5–Padrão geométrico de pictograma desenhado em solo arenoso.

Fonte: portaldoprofessor.mec.gov.br

Contudo, a História contém diversos paradoxos, na década de 60, o mundo caminhava para a globalização. Conforme o mundo se tornava interconectado, maiores eram as trocas culturais, e as influências de um povo sobre o outro. Segundo a Revista Educação e Linguagens (2015), a matemática é um constructo social e político, assim como a maneira de ser interpretada e ser ensinada. A abordagem pedagógica, e, portanto, matemática, advoga em favor de determinadas condições políticas e culturais. A matemática também é uma manifestação simbólica de um grupo cultural, sendo um agente na formação do indivíduo, atuando na construção de sua identidade. Na medida em que a globalização avançava, o local e o global entraram em conflito. A interconexão influenciou o local como ilustra Hall(2011):

> quanto mais a vida social se torna mediada pelo mercado global de estilos, lugares e imagens, pelas viagens internacionais, pelas imagens da mídia e pelos sistemas de comunicação globalmente interligados, mais as identidades se tornam desvinculadas – desalojadas – de tempos, lugares, histórias e tradições específicos e parecem "flutuar livremente". (HALL, 2011,p.75).

É curioso notar que a etnomatemática surge neste contexto, como um movimento de resistência à ruptura de raízes culturais que estava acontecendo naquele período da História. Começou-se a se questionar o ensino escolar, Hall (2011) demonstra preocupação com a fragmentação da identidade cultural no mundo pós-moderno, já Woodward (2012) demonstra preocupação com a crise de identidade de um povo. A etnomatemática dá respostas a esses questionamentos, e sugere que:

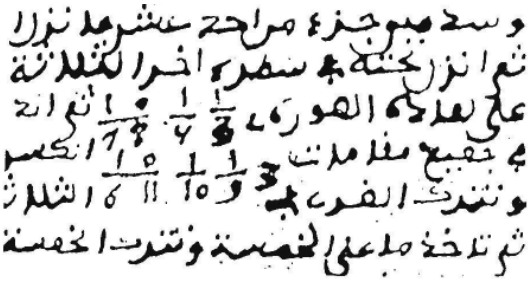
> [...] um indivíduo sem raízes é como uma árvore sem raízes ou uma casa sem alicerces. Cai no primeiro vento! Indivíduos sem raízes sólidas estão fragilizados, não resistem a assédios. O indivíduo necessita um referencial, que se situa não nas raízes de outros, mas, sim, nas suas próprias raízes. Se não tiver raízes, ao cair, se agarra a outro e entra num processo de dependência, campo fértil para a manifestação perversa de poder de um indivíduo sobre outro. (D'AMBRÓSIO, 2011, p. 42)

2.2 **Evidências da utilização da matemática no continente africano no período pré-colonização**

A história da matemática é dividida em dois grandes "blocos": a matemática pré-helênica, pré-lógica ou primitiva, e a matemática helênica, lógica ou dedutiva. Enquanto a grega é reconhecida pelo intelecto e genialidade dos gregos, a pré-lógica é atribuída a generosidade do rio Nilo. Notadamente, um misto de ignorância e preconceito.

Em Gerdes (2012), o autor cita alguns conceitos e ideias provenientes do continente africano, questionando a utilização de alguns conceitos que surgiram no continente e ainda são utilizados hoje. Foi no Maghreb medieval que surgiu a ideia de substituir palavras utilizadas para descrever operações, por símbolos, já no século XII.

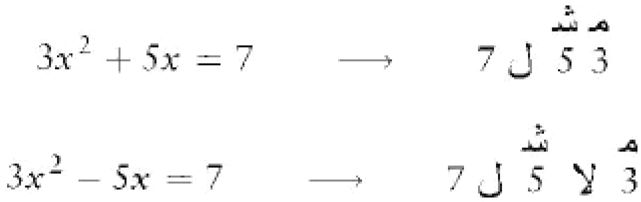
Figura 6 - Manuscrito medieval.



Fonte: Djebbar (2005, p.93).

É possível ver na Figura 6 a notação fracionária. Este é o texto mais antigo que possui uma referência ao uso da notação de frações, usada até hoje nas diversas escolas do Brasil. O matemático que se acredita ter sido o responsável por esta notação chama-se Abdallah Ibn al-Yasamin, pois foi o autor do texto. Também foi no Maghreb que surgiu a notação para equações utilizada hoje por estudantes mundo afora (Figura 7). A notação simbólica para equações substituiu as equações por extenso, tornando-as mais compactas.

Figura 7 - Notação simbólica para equações.



Fonte: Djebbar (1997, p.93).

Diante das evidências apresentadas, é mister refletir sobre o porquê de não se buscar um olhar mais profundo, a respeito do que se é ensinado, valorizando diferentes culturas e suas maneiras de pensar. O ato político de educar, coloca o educador diante de escolhas políticas. A matemática não evoluiu de maneira linear. Não foi Tales o primeiro matemático, e não foi a Grécia o ponto difusor do conhecimento. Onde estavam as demais civilizações, quando Tales, Pitágoras, Euclides, e outros grandes matemáticos emprestavam seus nomes às grandes descobertas matemáticas do passado? A matemática grega é descrita por Sousa (1999) como:

> [...] uma ciência que trabalha com construções mentais por puro movimento intelectual. Assume preocupações estilísticas quando, preocupada com a beleza do raciocínio e a exatidão da forma, desliga-se da raiz empírica. A matemática passa a ter existência independente da realidade sensorial, isto é, é ato de pura abstração, remotamente reflexiva em relação à realidade circundante (SOUZA, 1999, p. 140).

A matemática africana é sensitiva, mística, repleta de padrões rítmicos. A matemática africana também é uma colcha de retalhos, muito rica, em primeiro lugar devido a diversidade inerente a um espaço geográfico de dimensões continentais, e em segundo lugar, devido aos diferentes processos de colonização que influenciaram cada região de maneira distinta. É errôneo imaginar a região como um bloco, pois isso seria recorrer a uma visão preconceituosa, que ignora as diversas nuances regionais e culturais do continente. No livro de Zaslavsky (1973), percebe-se a complexidade da África. Ao leitor são apresentados registros de diferentes culturas de povos africanos relatando que o dia, o mês, o ano, são divididos de acordo com eventos específicos, que atribuem significados aos mesmos. Na cultura ocidental, o homem é escravo do tempo, mas na cultura africana o homem delimita o tempo, mediante suas necessidades. Quando a comunidade é agrícola, o ano se completa quando as estações de seca e chuva se completam, ou seja, quando se fecha um ciclo. O significado matemático de quantidade de dias não é o mais importante, e sim que se completem os eventos, portanto em algumas culturas é possível que um ano tenha mais de 365 dias. Os Yoruba, Igbo e Bin do sul da Nigéria, habitantes de regiões mais urbanizadas do oeste da África, possuem em sua contagem, semanas que não necessariamente possuem sete dias correntes, pois a base para a sua semana é a economia de mercado. A semana que contém sete dias, é em geral assim adotada em regiões que sofreram influência do cristianismo ou do islamismo. Em algumas regiões os meses são reconhecidos como mês quente, mês de caça, mês de colheita... novamente, a quantificação do que é um mês, não é considerada. Kenyatta cita em seu livro "Facing Mount Kenya" que cada era de um grupo, é delimitada por eventos passados significativos para os mesmos como a fome, ou a introdução da sífilis pelos europeus.

3 AS PROPOSTAS PEDAGÓGICAS PARA UM ENSINO MULTICULTURAL

3.1 **Breve análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais**

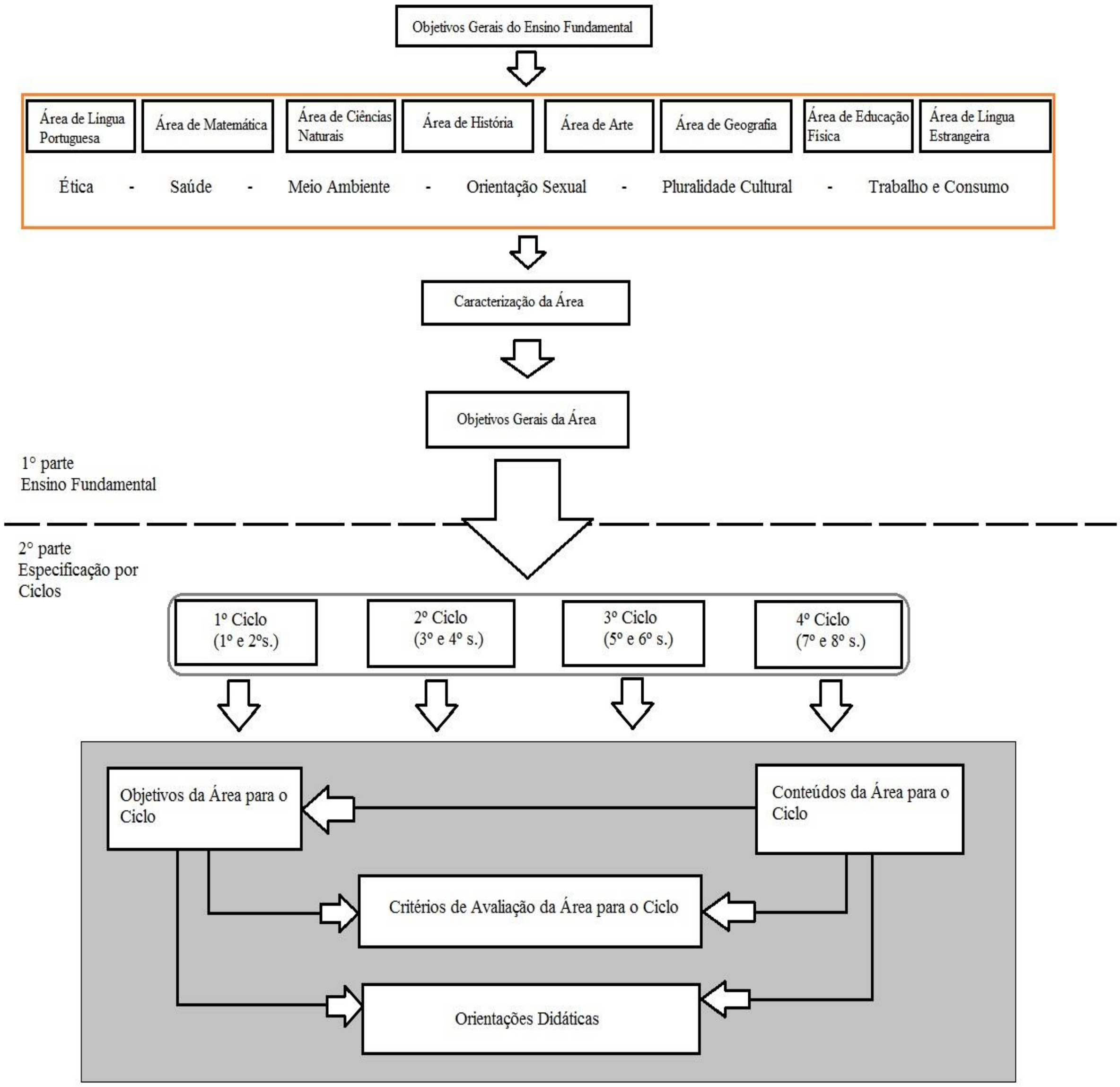
Os Parâmetros Curriculares Nacionais são as referências para o processo educativo no Brasil. Os PCN foram elaborados pensando no alunado e no educador, permitindo que se criem condições para que, nas escolas, permita-se ao jovem ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e necessários para o exercício de sua cidadania. O documento consta no sítio eletrônico do MEC, sendo de acesso público. Conforme este trabalho propõe debater os paradigmas da matemática na educação básica, levantando como questionamento pontual a questão da matemática africana, e as suas possibilidades de adaptação ao ensino básico em sala de aula, sob a ótica da etnomatemática, é de fundamental importância que seja feita uma análise criteriosa dos PCN no Ensino Fundamental. A atividade proposta, a análise dos sona e suas possibilidades, foram pensadas para uma turma que esteja no sexto ano, deste modo, restringe-se a análise no que os PCN fornecem de recomendações para a atuação do professor no sexto ano do ensino fundamental. Cabe ainda ponderar a importância dos parâmetros como norte para a formação inicial e continuada de educadores, materiais didáticos, tornando implícito o tipo de formação que se pretende para o professor. São colocados também em destaque os seguintes objetivos gerais a serem alcançados pelo aluno na educação básica, os quais:

- compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
- posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
- conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
- conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos enações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;

- perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
- desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
- conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
- utilizar as diferentes linguagens. verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal. como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Assim como existem os objetivos gerais, existem os temas transversais, pensados como temas que estão além da divisão de áreas do conhecimento, temas que devem estar presentes em todo o processo educativo. São eles: ética, saúde, meio ambiente, orientação sexual, pluralidade cultural, trabalho e consumo. Diante da normatização dos PCN’s, o 5º ano e o 6º ano ocupam o chamado 3º ciclo.

Figura 8 - Esquematização dos objetivos educacionais.



Fonte: Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p.9).

O documento foi finalizado no ano de 1998, exatos 21 anos já se passaram, e, ainda assim, o documento continua sendo bastante atual, com recomendações para mudanças e quebras de paradigmas de ensino, que ainda hoje são cenário comum em muitas escolas nacionais. Dentre os vários objetivos dos PCN destaco aquele que se refere ao questionamento da realidade, formulando problemas e realizando tentativas de solucioná-los, mediante lógica, intuição, criatividade, análise crítica, fazendo seleção de procedimentos e validando a adequação dos pertinentes a cada caso. Esse tópico a meu ver é o que mais se encaixa na disciplina matemática, mas não somente na mesma. Os PCN indicam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade Matemática, destacando também a História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação. O pensamento intuitivo e criativo, deve ser estimulado, e a pergunta inicial que se deve fazer é: criamos problemas para ensinar o aluno o conteúdo de um determinado assunto, ou criamos problemas para despertar o interesse do aluno, e, posteriormente, poder investigar maneiras de solucionar? A princípio parece um questionamento simplório, mas a resposta é de suma importância e seja, talvez, o grande diferencial. Despertar o interesse, desperta junto ao aluno uma crítica a determinada situação, atribui significado no responder uma pergunta, estimula o raciocínio lógico, a intuição, a criatividade, ou seja, está de acordo com tudo que se espera de um procedimento educacional proposto no documento.

3.1.1 **Análise sucinta das reformas curriculares para o ensino da Matemática e seu atual modelo de ensino**

Nas décadas de 60/70 o ensino da Matemática foi marcado por um processo que buscava a ruptura com o ensino mecanizado, de repetição excessiva e de formalização precoce, que vigorava no Brasil. A Matemática passou a ser vista como um vetor de modernização econômica do país, em destaque em relação às demais áreas do conhecimento, por ser uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. Contudo, o cenário se agravou, e mesmo com amplas discussões, o que se propunha fazer ainda estava fora do alcance dos alunos, pois persistia um distanciamento do prático, e um excesso de preocupação com as formalizações.

Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics – NCTM – realizado no Estados Unidos, propôs que a resolução de problemas fosse o foco no ensino de Matemática, destacando também os aspectos sociais, antropológicos e cognitivos na Matemática. A partir daí, começou um novo processo de discussão de reforma no ensino em todo o mundo. Muitas propostas foram elaboradas, e ainda que muito diversas, em geral alguns pontos apareciam com frequência, e cabem ser destacados:

- direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;

- importância de trabalhar com amplo espectro de assuntos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
- necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação.

Ainda que há 21 anos, os PCN sinalizassem para a necessidade de uma formação profissional qualificada, melhoria das políticas educacionais, entre outras demandas, é possível constatar que tais necessidades ainda persistem. Em geral, o educador é dependente do material didático, e fica restrito ao método de ensino do material adotado. Nem o educador, nem o aluno, sentem-se à vontade para propor o novo, refletir, e ter curiosidade. Em geral, os problemas são aplicações de conceitos, o que, por si só, os torna morosos, desinteressantes e menos desafiadores, pois não é raro que a resolução da situação-problema seja uma mera aplicação imediata do que foi dito no momento anterior à realização da atividade. Essa maneira de ensinar, rompe com a criatividade e cria a necessidade de memorização, repetição, e não estimula o questionamento. Outro agravante é a maneira em que os conteúdos são dispostos. No sexto ano, em geral, os conteúdos são dispostos em blocos de conhecimento, contrariando as diretrizes curriculares, dificultando a inter-relação entre os assuntos. Os PCN’s são categóricos na necessidade de ampliação de conceitos, diversificação de abordagens, representação e interconexão, como forma de consolidação de um conhecimento pelo aluno. Aqui chama-se a atenção para a inserção da História da Matemática como forma de enriquecimento do conceito a ser ensinado, e isso vai muito além de biografias de ícones da matemática, fatos ou curiosidades. A História da Matemática pode ser útil como catalisador do fomento a curiosidade do estudante, pois ela é colocada como criação humana, e, em geral, criada para a superação de uma necessidade, um desafio, o que remete a uma conquista, superação de dificuldade dentro de um contexto natural, social e cultural. É a partir da observação da realidade, sobretudo das particularidades, que são conjecturadas e formuladas as teorias. Esse caráter indutivo é fundamental para que o processo de ensino desta área do conhecimento ocorra. O exercício da indução e da dedução em Matemática vem, portanto, por meio da resolução de problemas, da formulação e teste de hipóteses, em todos os níveis de ensino.

3.1.2 **Transversalidade no ensino da Matemática**

A proposta de trabalhar com questões de urgência social em uma perspectiva de transversalidade é um compromisso a ser partilhado pelos professores de todas as áreas de ensino. Esse tipo de aprendizado envolve não apenas conceito, envolve também o desenvolvimento de atitudes que vão interferir na formação do indivíduo para o exercício da cidadania. Deste modo, a transversalidade de alguns temas é de suma importância no âmbito escolar. No âmbito da ética, a matemática pode auxiliar na eliminação do individualismo por meio do diálogo, valorização de interação, trocas de experiências, mostrando para os alunos que as pessoas dependem umas das outras. No âmbito da orientação sexual, a matemática pode ilustrar dados que comprovem a discrepância entre homens e mulheres em determinados postos de trabalho, índices de feminicídio, homofobia, gravidez prematura, entre outras mazelas sociais a serem combatidas. Dentro de uma perspectiva ambiental, é preciso valorizar a vida, não apenas a humana, e a matemática pode ajudar através de índices e dados de pesquisas, comprovando a necessidade de revisão de algumas políticas ambientais, avanço do desmatamento, preservação faunística e florística de espaços geográficos distintos. A questão de saúde pública, é um tema transversal em que a Matemática pode atuar com índices como Índice de Desenvolvimento Humano, taxa de mortalidade infantil, espaços superpovoados... É de fundamental importância também, que os alunos tenham acesso a discussões que englobam trabalho e consumo, para entender que o que se adquire é fruto de um tempo de trabalho, e é muito frutífero refletir acerca de em que condições este trabalho é realizado. A pluralidade cultural é um tema que deve estar presente em todas as áreas do conhecimento, pois é preciso reconhecer que todas as culturas contribuem de algum modo para o desenvolvimento da sociedade. Nesse sentido, a História da Matemática e a Etnomatemática são muito importantes para dar uma dimensão ao aluno, de como é a dinâmica de produção do conhecimento, e a sua natureza histórica e social. Valorizar com um aluno de sexto ano, temas oriundos de outras culturas, que não somente a grega, permite ao aluno um ganho pedagógico, já que mostra que a história do mundo, das ciências, não é linear, e sim difusa, e repleta de contribuições distintas, mas de várias culturas. O aluno entende que a Matemática não é oriunda de apenas um grupo privilegiado, que está ao alcance de todos, e é possível, sim, utilizar esta ferramenta não como segregação entre povos ou estudantes, mas como meio de superação de dificuldades. Com um viés antropológico, o aluno também passa a entender e respeitar o passado, os avanços antigos, pois foram eles que permitiram que a humanidade chegasse até o ponto em que está.

3.2 **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais**

Em outubro de 2004, o Ministério da Educação elaborou um documento histórico. A busca por corrigir históricas injustiças, e, acima de tudo, promover a inclusão social, visando eliminar discriminações, levou a criação de um roteiro de medidas e ações a serem tomadas para que se valorizasse de maneira mais ampla, e democrática, a rica diversidade étnico-racial e cultural brasileira. Esse conjunto de diretrizes foi, sem dúvida, um grande passo para que o sistema educacional brasileiro combatesse de forma mais contundente o racismo, fornecendo instrumentos de ação pedagógica que permitissem a afirmação social de um grupo que precisava de mais reconhecimento.

Os negros possuem o direito de se reconhecer na cultura nacional, pois fizeram parte da construção deste país em que vivemos. Os negros possuem o direito de se manifestar com autonomia, expressando seus pontos de vista, tem o direito, assim como todos, de cursar todos os níveis de ensino, galgando todos os níveis de ocupação, como todo e qualquer cidadão. O Art. 205 da Constituição Federal assinala o dever do Estado de garantir, indistintamente, por meio da educação, iguais direitos para o pleno desenvolvimento de todos e de cada um, enquanto pessoa, cidadão ou profissional. Antes da elaboração destas diretrizes, em 2003, foi promulgada a Lei 10.639/2003 que estabelecia a obrigatoriedade do ensino de história e cultura afro-brasileiras, demanda crescente por representatividade, afirmação e reconhecimento.

Persiste no imaginário brasileiro uma valorização das raízes culturais europeias, não se dando o mesmo reconhecimento a outras culturas, tais como a indígena, a asiática e a africana. Como bem salientou Fanon (1979), os descendentes dos mercadores de escravos, dos senhores de ontem, não tem, hoje, de assumir culpa pelas desumanidades provocadas por seus antepassados. No entanto, tem eles a responsabilidade moral e política de combater o racismo, as discriminações e, juntamente com os que vem sendo mantidos à margem, os negros, construir relações raciais e sociais sadias, em que todos cresçam e se realizem enquanto seres humanos e cidadãos. Não fossem por estas razões, eles a teriam de assumir, pelo fato de usufruírem do muito que o trabalho escravo possibilitou ao país.

A escola, enquanto instituição social, deverá se posicionar politicamente, contra toda e qualquer forma de discriminação. Todo educador deve atuar em prol da superação da discriminação, ainda que possua seu pertencimento étnico-racial, credo ou posicionamento político. Cabe ressaltar que o Art. 5º da Constituição Brasileira, classifica o racismo como crime inafiançável, aplicando-se a todas os cidadãos, e instituições. A escola pode e deve buscar mecanismos que permitam ao estudante negro perceber a importância, influência e participação histórica na formação da sociedade brasileira. A escola tem a responsabilidade de acabar com o modo distorcido e reduzido de se ensinar a contribuição dos negros na construção da nação brasileira, e deve ser implacável no combate ao racismo.

O documento cita ainda algumas bases filosóficas e pedagógicas que deverão conduzir as ações nos estabelecimentos de ensino, as quais serão explicitadas a seguir.

1) CONSCIÊNCIA POLÍTICA E HISTÓRICA DA DIVERSIDADE

Este princípio deve conduzir a:

- igualdade básica de pessoa humana como sujeito de direitos;

- compreensão de que a sociedade é formada por pessoas que pertencem a grupos étnico-raciais distintos, que possuem cultura e história próprias, igualmente valiosas e que em conjunto constroem, na nação brasileira, sua história;

- conhecimento e valorização da história dos povos africanos e da cultura afro-brasileira na construção histórica e cultural brasileira;

- superação da indiferença, injustiça e desqualificação com que os negros, os povos indígenas e as classes populares às quais os negros, no geral, pertencem, são comumente tratados;

-desconstrução, por meio de questionamentos e análises críticas, objetivando eliminar conceitos, ideias, comportamentos veiculados pela ideologia do branqueamento, pelo mito da democracia racial, que tanto mal fazem a negros e brancos;

-busca, da parte de pessoas, em particular de professores não familiarizados com a análise das relações étnico-raciais e sociais com o estudo de história e cultura afro-brasileira e africana, de informações e subsídios que lhes permitam formular concepções não baseadas em preconceitos e construir ações respeitosas;

- diálogo, via fundamental para entendimento entre diferentes, com a finalidade de negociações, tendo em vista objetivos comuns, visando a uma sociedade justa.

2º Princípio: FORTALECIMENTO DE IDENTIDADES E DE DIREITOS

O princípio deve orientar para:

- desencadear o processo de afirmação de identidades, de historicidade negada ou distorcida;

- romper com imagens negativas forjadas por diferentes meios de comunicação, contra os negros e os povos indígenas;

- esclarecer a respeito de equívocos quanto a uma identidade humana universal;

- combatera privação e violação de direitos;

- ampliar o acesso a informações sobre a diversidade da nação brasileira e sobre a recriação das identidades, provocada por relações étnico-raciais;

- excelência das condições de formação e de instrução que precisam ser oferecidas, nos diferentes níveis e modalidades de ensino, em todos os estabelecimentos, inclusive os localizados nas chamadas periferias urbanas e nas zonas rurais.

3º Princípio: AÇÕES EDUCATIVAS DE COMBATE AO RACISMO E A DISCRIMINAÇÕES

Cabe destacar aqui algumas ações, mais pertinentes ao ensino da Matemática, tais quais:

- a crítica pelos coordenadores pedagógicos, orientadores educacionais, professores, das representações dos negros e de outras minorias nos textos, materiais didáticos, bem como providências para corrigi-las;

Neste tópico seria interessante o professor de Matemática mostrar como a matemática estava inserida nas matrizes africanas. Citar o Egito como grande expoente, ou mesmo jogos como os sona, contando a origem, importância cultural, e elaborar atividades que permitam a realização do currículo escolar, em uma perspectiva mais inovadora de ensino

. valorização da oralidade, da corporeidade e da arte, por exemplo, como a dança, marcas da cultura de raiz africana, ao lado da escrita e da leitura;

O educador poderia citar os padrões de simetrias encontrados em máscaras no Congo, citando a tradição cultural no qual está inserida essa manifestação.

- Introdução, nos cursos de formação de professores e de outros profissionais da educação: de análises das relações sociais e raciais no Brasil; de conceitos e de suas bases teóricas, tais como racismo, discriminações, intolerância, preconceito, estereótipo, raça, etnia, cultura, classe social, diversidade, diferença, multiculturalismo; de práticas pedagógicas, de materiais e de textos didáticos, na perspectiva da reeducação das relações étnico-raciais e do ensino e aprendizagem da História e Cultura dos Afro-brasileiros e dos Africanos.

É fundamental que o educador esteja em constante processo de atualização, capacitação, sempre visando sua renovação pedagógica. É preciso que o professor possua insumos para atuar de maneira eficaz no ambiente escolar. Outra pergunta fundamental a ser respondida é como estão sendo preparados os futuros professores dentro das universidades nos cursos de graduação, e se essa preparação os torna capacitados a atuar de maneira inclusiva. Este tópico será explicitado a seguir.

4 A GEOMETRIA SONA

4.1 Paulus Gerdes e seus estudos a respeito da cultura angolana e moçambicana

Paulus Gerdes foi um dos grandes expoentes no campo da Etnomatemática. Gerdes foi um matemático holandês, que após a independência de Moçambique, optou por residir no país. Gerdes era marxista, o regime comunista implementado no país após sua emancipação, favoreceu que o matemático encontrasse um ambiente político que fosse de acordo com aquilo que acreditava. A linha de pesquisa de Gerdes residia no material empírico, entrecruzando a matemática com a antropologia cultural. O holandês ocupou cargos de destaque como educador. Foi diretor da Faculdade de Educação (1983 – 1987) e da Faculdade de Matemática na Universidade de Mondlane (1987 – 1989), foi também Reitor da Universidade Pedagógica (1989 – 1996). Foi presidente da Comissão Instaladora da Universidade de Lúrio, terceira instituição pública de ensino superior de Moçambique. Gerdes ocupou também cargos de projeção internacional, como presidente da Comissão Internacional para a História da Matemática na África (1986), e presidente da Associação Internacional para a Ciência e Diversidade Cultural (2000 – 2004). Em 2004, substitui Ubiratan D'Ambrósio como presidente do Grupo Internacional de Estudo da Etnomatemática, e recebeu vários prêmios. Gerdes tem uma extensa bibliografia. Daremos destaque a algumas neste texto.

Paulus Gerdes cita que é preciso descongelar a matemática dos povos antigos, e o fez em sua obra, procurando exemplificar diversas manifestações matemáticas em seus respectivos locais de surgimento. É possível observar em sua obra que a matemática praticada pelos povos que estudou possui uma intrínseca relação cultural, econômica e social com o cotidiano das comunidades analisadas. Gerdes (2008) descreve:

> Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos(GERDES, 2008).

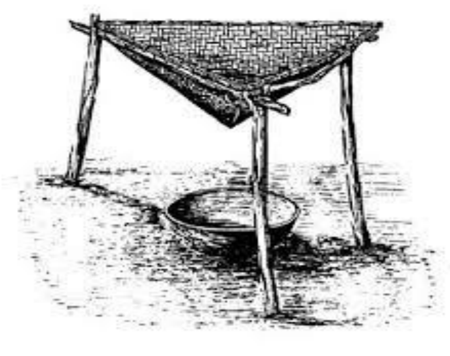
O pesquisador dedicou uma das vertentes de seus estudos, a confecção de trançados, e aos sona. É interessante notar que o trabalho de Gerdes de busca por compreensão da abordagem matemática de povos angolanos e moçambicanos, coincide no contexto da época de busca por independência, a luta pela descolonização de países africanos. Isso coincide muito com a afirmação feita por Gerdes (2008): "Além desse carácter antropológico, a etnomatemática tem um indiscutível foco político. A etnomatemática é embebida de ética, focalizada na recuperação da dignidade cultural do ser humano." (p. 9). D'Ambrósio (2001) cita que

> A etnomatemática se encaixa nessa reflexão sobre a descolonização e na procura de reais possibilidades de acesso para o subordinado, para o marginalizado e para o excluído. A estratégia mais promissora para a educação, nas sociedades que estão em transição da subordinação para a autonomia, é restaurar a dignidade de seus indivíduos, reconhecendo e respeitando suas raízes. Reconhecer e respeitar as raízes de um indivíduo não significa ignorar e rejeitar as raízes do outro, mas, num processo de síntese, reforçar suas próprias raízes. (D' AMBROSIO, p. 42).

Gerdes julgava que deveria haver um enfoque ao reconhecimento do pensamento geométrico presente na cultura dos povos africanos, e dedicou sua pesquisa aos habitantes de Moçambique. Em sua obra "Etnomatemática: Cultura, Matemática e Educação", o autor destaca os padrões geométricos moçambicanos. As casas possuem telhados cônicos, com bases circulares ou retangulares, as armadilhas de pescas são constituídas por buracos hexagonais.

No estudo de trançados, Paulus Gerdes destaca que os trançados de cestaria, armadilhas, cabanas eram otimizados, ou ainda, apenas realizados, com um ângulo específico. Não era algo folclórico, do acaso, e sim algo pensado, planejado mediante um pensamento geométrico presente, que era utilizado para resolver problemas ou necessidades daqueles povos. De fato, a repetição do processo, pode não necessariamente ter a mesma riqueza matemática daquele que iniciou no passado tais técnicas de cestaria, mas isso não significa que não havia quem pensasse geometricamente em Moçambique. O artesão que iniciou alguma dessas técnicas de cestaria, desenvolveu matemática e passou adiante. O processo de colonização, ao impor algo novo e negar o que já havia, impossibilitou que esse processo de desenvolver matemática atreladas as necessidades da região, fosse profundamente afetado, ou mesmo congelado.

Figura 9 - Cestaria Moçambicana.



Fonte: Etnomatemática – Cultura, Matemática e Educação (1993, p.20).

É preciso lutar contra esse congelamento cultural, pois o congelamento não permitiu saber até onde essas vertentes alternativas a vertente helênica levariam. O que poderia ter sido descoberto, caso não houvesse a negação cultural daqueles povos? Gerdes cita tal importância:

> Descongelando esta matemática congelada, redescobrindo matemática escondida na cultura moçambicana, mostramos na verdade que o povo moçambicano, como qualquer outro povo, fez matemática. Depois de tantos anos de repressão colonial da cultura, encorajamos, descongelando a matemática congelada, uma compreensão de que o povo moçambicano - e outros povos outrora colonizados - era capaz de desenvolver no passado a matemática e, portanto, reganhando confiança cultural(GERDES, 1982, 1985a).

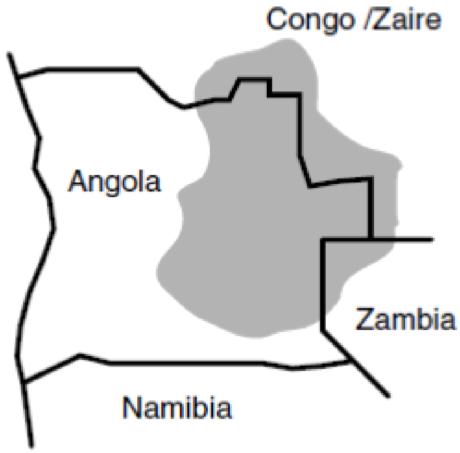
4.2 **A tradição cultural dos sona presente nos tchokwe**

Paulus Gerdes também estudou os chamados sona (no singular, (lu)sona), que são desenhos feitos em areia que fazem parte da tradição dos Tchokwe (ou Quioco). A cultura Tchokwe engloba todo o Leste de Angola, o Noroeste da Zâmbia e zonas circunvizinhas do Congo (antigo Zaire) (Figuras 10 e 11) (Kubik, 1975, p. 87).

Figura 10 - Região do continente onde era encontrada a prática dos sona.

Fonte: GERDES, 1993.

Figura 11 - Região específica do continente onde era encontrada a prática dos sona.



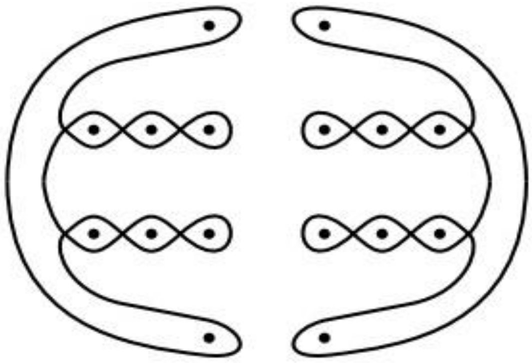
Fonte: GERDES, 1993.

Gerdes (1991) cita que os Tchokwe viviam da caça e agricultura, possuíam uma arte decorativa, eram artesãos pois realizavam a prática de cestaria e trançados, faziam pinturas em paredes, sabiam utilizar cerâmica e faziam os sona. No que tange ao artesanato, a literatura mostra que eram conhecedores de técnicas de alto nível, o que em parte justifica sua produtividade elevada no ramo da agricultura, a fabricação de armas melhoradas para o poderio militar, e o sucesso na caça. Os sona eram desenhados por homens conhecedores das técnicas de construção, tais mestres eram conhecidos como *akwa kuta sona,* descritos por Fontinha (1983)como "parte de uma elite, que procurava deixar o saber que havia recebido de seus antepassados aos seus descendentes diretos" (p.44). A tradição consiste em se reunir em torno de uma fogueira, ao centro da aldeia, e, através destes desenhos (Figura 12), eram passados ensinamentos, provérbios, fábulas, jogos, sendo desta forma, um importante momento de transmissão de ensinamentos e conhecimento de uma geração para outra.Gerdes (2008) cita:

> o sistema educacional Tchokwe incluía esse elemento filosófico-artístico como uma das formas para se ter acesso à sabedoria milenar da sua tradição. Os contos, os mitos, os ditos, os provérbios encarnam a experiência vivida dos nossos povos e constituem um suporte importante tanto na fase de formação do jovem que se prepara para assumir funções sociais no seio da sua comunidade como para o próprio adulto que a eles recorre como referência para resolver este ou aquele problema. … [Este] sistema de comunicação [foi] interrompido no decurso da sua evolução (GERDES, 2008, p. 14).

A tradição representava um mesclado de ensinamentos, recreação, arte e filosofia.

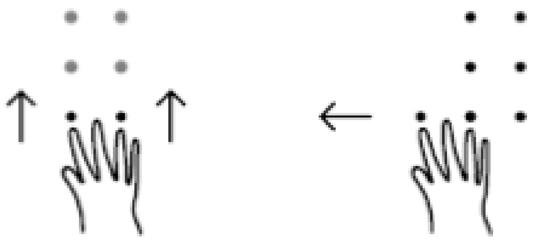
Figura 12 -Sona.



Fonte: GERDES, 1993.

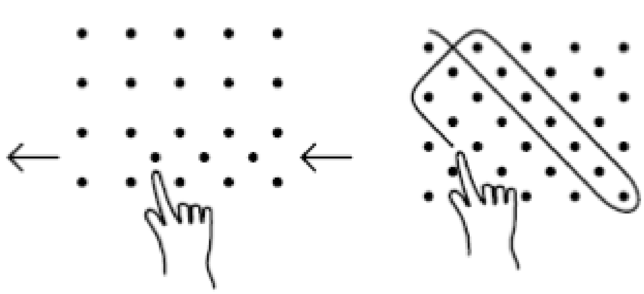
Os pontos (Figura 13) são feitos com a ponta dos dedos, são dispostos mediante uma rede ortogonal e são equidistantes, chamados de *tobe*. Esse conjunto de pontos (figura 14) serve de suporte para o lusona. Normalmente, o desenho (Figura 15 e 16) é constituído de uma ou mais linhas (mufunda, pl. mifunda), que envolvem os pontos da rede.

Figura 13 - Determinação de pontos.



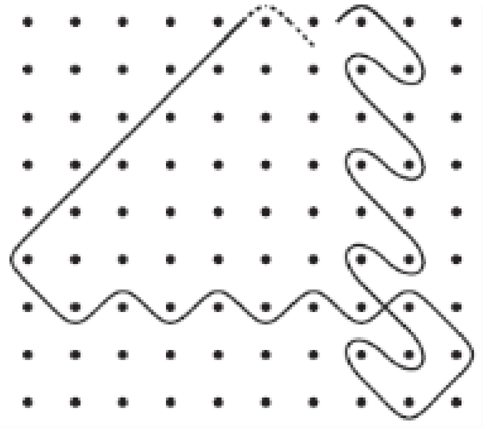
Fonte: GERDES, 1993.

Figura 14 - Traçado do lusona sendo executado.



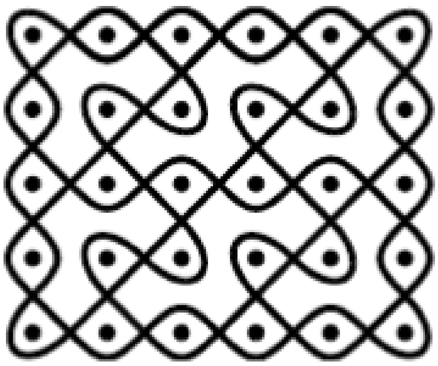
Fonte: GERDES, 1993.

Figura 15 – Desenho sendo construído.



Fonte: GERDES, 1993.

Figura 16 - Desenho finalizado.



Fonte: GERDES, 1993.

A colonização devastou a cultura tchokwe, colocando em declínio a prática da tradição. Por volta da década de 70, alguns estudiosos realizaram pesquisas (Tabela 1), a respeito da cultura local dos tchokwe, dentre eles destacam-se Fontinha, Pearson entre outros, isso permitiu um reacender da chama deste conhecimento, quase apagada em virtude do processo colonizatório. Fontinha (1983) relata uma das dificuldades da sua busca: “dificilmente se resolviam a executá-los, dizendo que outrora foram hábeis nesta arte, mas que já não têm cabeça nem vista para os fazerem” (p. 43). Fontinha relatou em sua obra o maior número de sona que se tem na literatura, sendo até hoje uma grande referência no assunto.

Tabela 1 - Dados de coleta de sona.

Coleccionador	Período de colecção	Data(s) de publicação	Número de *sona* relatados
Emil Pearson	Principalmente os anos 1920	1977	69
Hermann Baumann	1930	1935	4
Mário Fontinha	1945 – 1955	1983	287
E. Hamelberger	Ca. 1947-1950	1951, 1952	28
José Redinha	Antes de 1953	1953	8
Eduardo dos Santos	Ca. 1955–1960	1961	94 [2]
Th. Centner	Antes de 1963	1963	13
Gerhard Kubik	1973, 1977–1979	1975, 1987	25

Fonte: GERDES, 1993.

Segundo Gerdes (2008), podemos notar que 61% dos sona coletados por Fontinha apresentaram um padrão monolinear (Tabela 2). A confecção do lusona permite que as linhas se interceptem, mas não é permitido que elas se toquem. Permite-se depreender então que se dava importância ao traçado contínuo, sem interrupções, na prática realizada. Os sona monolineares são constituídos de números de linhas e colunas primos entre si. Isso é interessante, como destaca Gerdes: “Isto conduziu-me à formulação de um modelo didático, geométrico, para a determinação do maior divisor comum de dois números naturais (Gerdes, 1988a) e de um modelo físico para a determinação de números primos (Gerdes, 1989c)”. Gerdes ilustra “Vivendo a matemática: Desenhos da África” (Gerdes, 1990) e “Lusona: recreações geométricas de África” (1991).

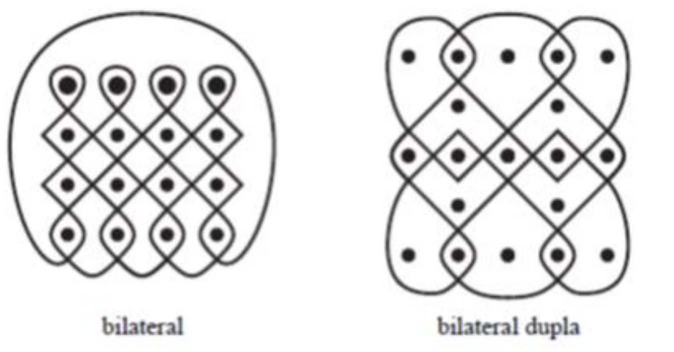
Tabela 2 - Padrões monolineares encontrados por Fontinha.

	Desenhador	Número de padrões publicados	Número de padrões monolineares	Percentagem dos padrões monolineares
1	Carimine	22	11	50%
2	Chizainga	18	13	72%
3	Samesa	13	12	92%
4	Cabindja	21	9	43%
5	Muazange Kasakwa	15	7	47%
6	Sacapacata	19	16	84%
7	Mwata Ritenda	18	8	44%
8	Saitumbo	15	10	67%
	Total	141	86	61%

Fonte: GERDES, 1993.

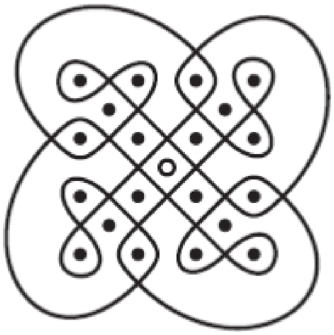
A simetria também possuía presença marcante nos pictogramas. Cerca de 80% dos sona relatados por Fontinha possuíam algum tipo de simetria. Gerdes publicou vários livros com o conteúdo sona, em Gerdes (1991) é comum também encontrar sona com simetrias bilaterais, bilaterais duplas (figura 17) ou rotacionais (Figura 18).

Figura 17 - Tipos de simetria bilateral.



Fonte: GERDES, 1993.

Figura 18 - Simetria rotacional.



Fonte: GERDES, 1993.

A grande pergunta a ser respondida era como surgiu esta prática na cultura dos tchokwe, Kubik (1987c) pondera a respeito, dando uma hipótese de que a tradição surgiu com os indivíduos em solidão após longas viagens, através de áreas desabitadas. Sendo assim, a tradição pode ter sua origem como forma de recreação em momentos de descanso para os caçadores tchokwe. Outra grande questão, é a relação da matemática com a prática realizada, pois como inferir que os desenhos eram executados com um pensamento matemático intrínseco na sua confecção? Para responder essas perguntas, é preciso primeiramente uma desconstrução. Aplicar o pensamento grego, como forma de validação do que pode ser considerado matemática ou não, é reproduzir preconceitos, e cair na circularidade de usar uma forma preconceituosa de avaliar, para julgar o que é preconceituoso e não o é. Essa discussão já ocorreu, e, ainda hoje, permeia o campo da etnomatemática. Howson, Nebres e Wilson levantaram o questionamento já na década de 80, quando a etnomatemática estava a ganhar notoriedade no meio científico:

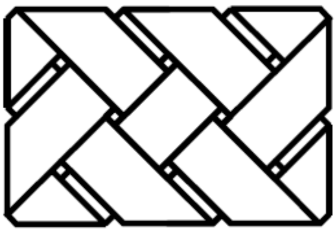
> Tem havido crescentes declarações, particularmente com respeito a países em vias de desenvolvimento, sobre 'etnomatemática', i.e., atividades matemáticas identificadas na vida cotidiana de sociedades. Por exemplo, uma variedade de tipos de simetria é usada para decoração em todas as culturas, numerosas construções são feitas ilustrando leis matemáticas. Em que medida são estas atividades realmente 'matemáticas'? O que é isso que faz as atividades 'matemáticas' em vez de, digamos, 'capazes de elaboração ou legitimação matemática'? (HOWSON*et al.,* 1985, p. 15).

Dos Santos (1961) cita que os *akwa kuta sona* em geral reduzem seu padrão completo à memorização de dois números e um algoritmo geométrico. Segundo Fontinha (1983), "existem normas para começar e acabar um desenho; o padrão ser obedecido de modo rigoroso..." (p. 39). A maneira que o povo tchokwe apresenta sua matemática é diferente da maneiro que o grego apresenta. Os desenhos fazem sentido para o primeiro, o mais importante ali não é a estrutura geométrica, ela não existe por si só. O pictograma é dependente da história para ter um sentido para quem o constrói. O olhar grego é um olhar mais cientificista, puramente racional, muitas vezes desprovido de conexão com a realidade. É possível que, por vias diferentes de pensar, possamos encontrar um elo, e é nessa conexão que quer se dar destaque, pois é ela quem responde o questionamento feito por Howson.

4.3 **Análise técnica dos sona**

Gerdes (2008) propõe uma classificação para os sona baseada em sua dimensão e método de construção. A classe na qual é possível rotular um quantitativo expressivo dentre os sona conhecidos, é a classe conhecida como Padrão-de-esteira-entrecruzada (Figura 19). Essa nomenclatura vem da alusão à angulação de 45º na disposição das linhas em relação às bordas, o que se assemelha a tiras de esteiras.

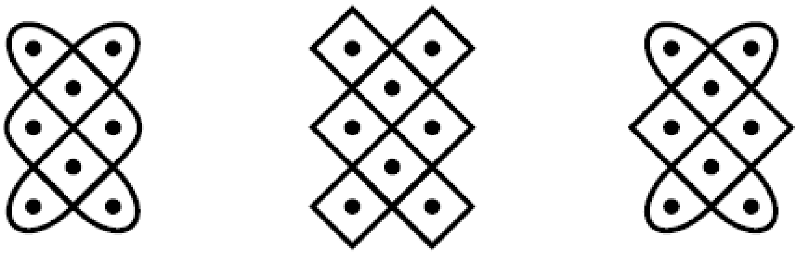
Figura 19 - Padrão-de-esteira-entrecruzada.



Fonte: GERDES, 1993.

Os sona padrão-de-esteira-entrecruzada podem ser curvilíneos, retilíneos ou mistos conforme mostra a figura 20.

Figura 20 - Padrão-de-esteira-entrecruzada.



Fonte: GERDES, 1993.

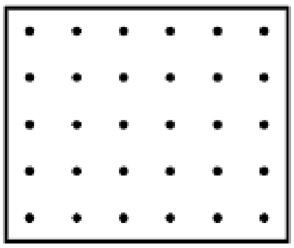
Gerdes destaca, que, mesmo diante da diversidade dos pictogramas, existe um fator que os une, um método central que está contido na construção de todos eles, sendo neste elo de união dentro do qual se concentrará a análise técnica dos sona. A análise será referente a um sona monolinear por ser esse o tipo mais frequente nos achados de Fontinha.

Para a análise, recorre-se a Gerdes (2007) como norteador. O livro mostra um lusona, investiga o que ocorre no mesmo, e percebe regularidades. Mediante essas evidências, estabelecem-se teoremas que regem a construção do lusona, no caso, monolinear.

4.3.1**Algoritmo Geométrico**

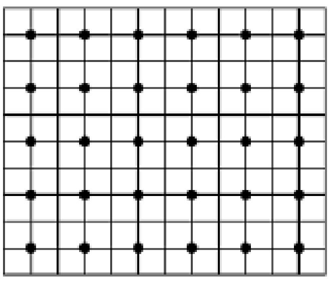
Inicia-se com as respectivas definições referentes a notação utilizada. A letra m representará o número de colunas, a letra n representará o número de linhas. A malha retangular $RG\ [m, n]$será o retângulo formado pela disposição de pontos em $m$colunase $n$linhas, cujos vértices são $(0{,}0), (2m, 0), (2m, 2n), (0, 2n)$ e que contenha os pontos $(2s - 1, 2t - 1)$, onde$s = 1, \dots, m$, e$t = 1, \dots, n$. A título de ilustração segue a disposição $RG[6{,}5]$ (Figuras 21 e 22).

Figura 21 - $RG[6{,}5]$.



Fonte: GERDES, 2007.

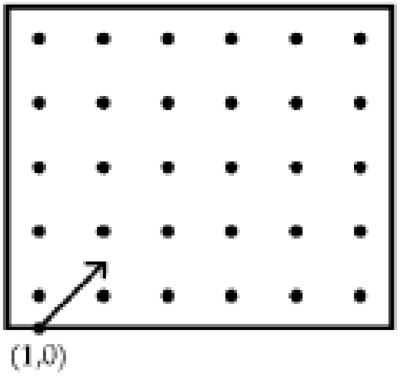
Figura 22 - Malha.



Fonte: GERDES, 2007.

O traçado se inicia a partir de um ponto específico doravante chamado A (Figura 23). Esse traçado no modelo analisado, será curvo, e sua trajetória será semelhante a um raio luminoso emitido de $A = (1{,}0)$, na direção 45º com um dos lados do retângulo.

Figura 23 - Identificação do ponto A.



Fonte: GERDES, 2007.

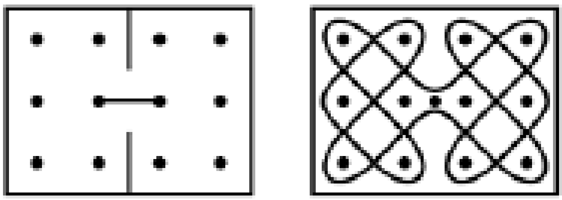
O raio luminoso é refletido ao encontrar com os lados do retângulo, ou ao encontrar espelhos posicionados internamente à malha de pontos. A disposição desses espelhos dupla-face internos, é um fator que diferencia os sona entre si. A disposição de espelhos pode ser feita de variadas maneiras entre 2 pontos da malha (figura 24):

Figura 24 - Disposição dos espelhos.

Fonte: GERDES, 2007.

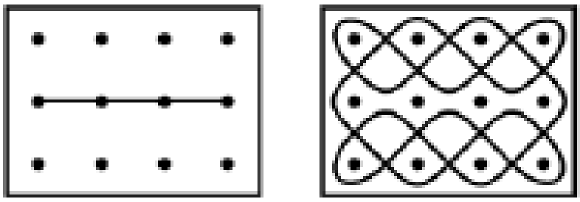
De acordo com a disposição dos espelhos, pode-se perceber que a configuração final dos sona podem ser diferentes (Figura 25 e Figura 26).

Figura 25 - Disposição dos espelhos, onde
um espelho está na horizontal.



Fonte: GERDES, 2007

Figura 26 - Disposição dos espelhos, onde
todos estão na horizontal.

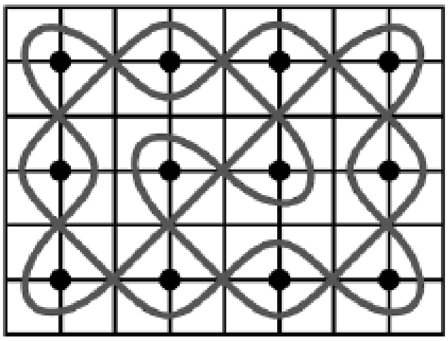


Fonte: GERDES, 2007.

4.3.2 **Dedução do Modelo Matemático**

Antes de apresentar seu modelo matemático para os sona, Gerdes (2007) compartilha através de uma malha $RG[4,3]$, seu processo de descoberta. Dada a disposição$RG[4,3]$, a análise correspondente a esta malha será feita a título de exemplo do que está por trás deste pictograma (Figura 27).

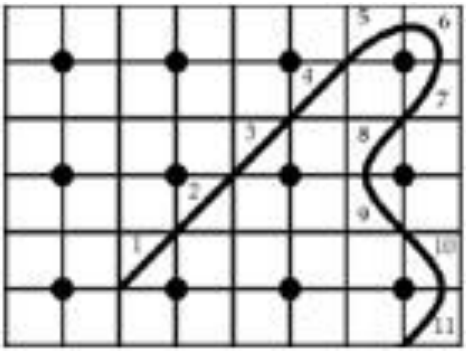
Figura 27 – Pictograma com malha.



Fonte: GERDES, 2007.

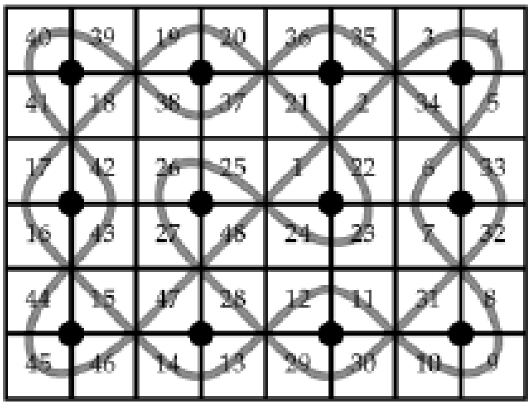
O lusona foi ilustrado para auxiliar na investigação, pois assim já se tem o padrão de traçado. Escolhe-se o ponto de partida, doravante cada quadrado atravessado pelo traçado, deverá receber um número ordinal, para indicar sua ordem de intersecção (Figura 28). O quadrado 1 será aquele de cujo qual a linha começa a ser traçada (figura 29), o 2 será a segunda unidade quadrada pela qual a linha curva transpassará, e assim por diante, até que a curva se feche.

Figura 28 – Início da contagem dos quadrados.



Fonte: GERDES, 2007.

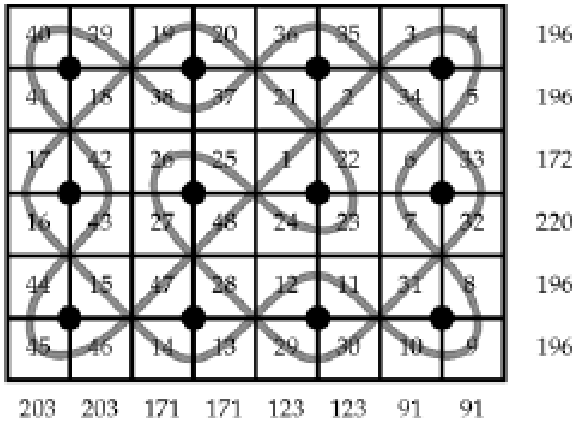
Figura 29 – Contagem dos quadrados finalizada.



Fonte: GERDES, 2007.

Ele observa que o quadrado encontrado não é mágico (Figura 30). Somando os números de cada quadrado em cada linha, percebe-se que a soma varia dependendo da linha da coluna escolhida.

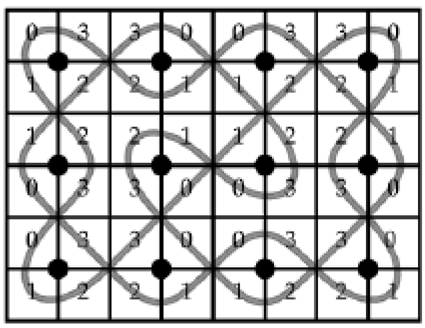
Figura 30 –Somatório de linhas e colunas.



Fonte: GERDES, 2007.

A estratégia utilizada foi a de buscar uma equivalência modular entre os valores de linhas e os valores de colunas, forçando que esse quadrado se torne mágico, mesmo que com números que possuam valores distintos (Figura 31). Se 220 e 196 são equivalentes módulo k, então também são equivalentes a$220 - 196 = 24\ (mod\ k)$. 172 e 24 são equivalentes módulo $k$igual a 2 e 4. Supõe-se que o valor de k seja 4. Aplicando o módulo k no somatório coluna a coluna, percebe-se que um padrão interessante se forma.

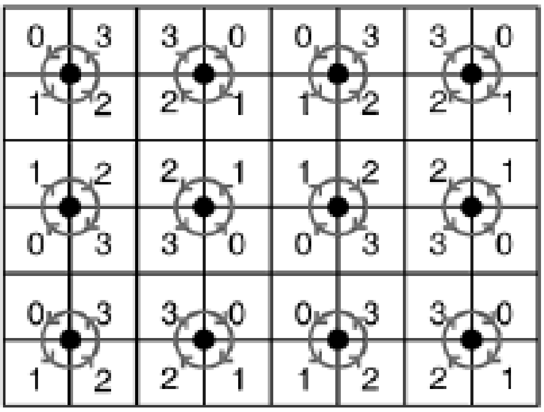
Figura 31 – Contagem módulo 4.



Fonte: GERDES, 2007.

O teste para módulo 4, mostra que a linha curva possui uma trajetória que percorre sucessivamente a sequência de quadrados com numeração 0, 1, 2, 3, 0, 1..., até retornar ao seu ponto de partida. Ao retirar as linhas do lusona, pode-se perceber que os pequenos quadrados possuem disposição numérica em sentido horário, e anti-horário (Figura 32). É também possível perceber que, os números entre 4 pontos vizinhos da malha são iguais.

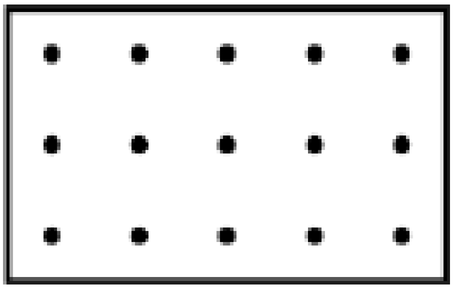
Figura 32 – Disposição numérica.



Fonte: GERDES, 2007.

Esse padrão se observa em muitos sona conhecidos. Como forma de ampliar a análise, investiga-se a malha RG [5,3] (figura 33).

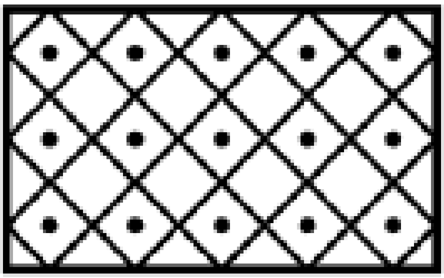
Figura 33- $RG[5{,}3]$.



Fonte: GERDES, 2007.

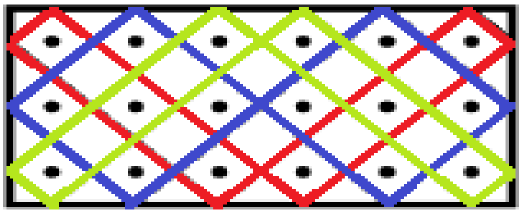
Para a interseção entre as linhas que compõem o retângulo, e as linhas com inclinação de 45º temos uma equação do tipo $y = \pm x + (2u + 1)$, onde u representa um número inteiro arbitrário. Doravante, $D[m, n]$ será chamado o design da diagonal da malha, e esse design será o conjunto das linhas poligonais refletidas nos lados do retângulo, que são traçadas de acordo com a trajetória do raio de luz emitido dos pontos $(2s - 1{,}0)$ na direção $(2s, 1)$. De acordo com isso, os raios luminosos sempre possuem inclinação de 45º em sua trajetória. Chamados de diagonal de design p-linear, se este conjunto é composto por p poligonais fechadas espelhadas distintas (figura 34 e figura 35).

Figura 34: $D[5,3]$ é 1-linear (monolinear).



Fonte: GERDES, 2007.

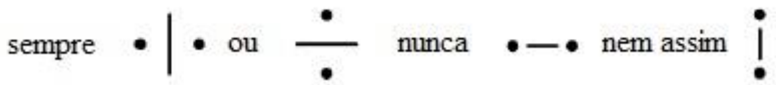
Figura 35: $D[6,3]$ é 3-linear.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Os espelhos dupla-face, são constituídos de uma unidade de comprimento, e estão entre dois pontos vizinhos da malha, dispostos de maneira horizontal ou vertical. O design dos espelhos será chamado regular, se só houver espelhos dispostos de maneira vertical entre 2 pontos horizontais, e se só houver espelhos dispostos de maneira horizontal entre 2 pontos verticais (Figura 36).

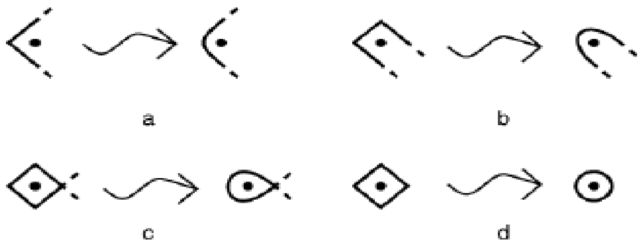
Figura 36: Disposição dos espelhos.



Fonte: GERDES, 2007.

É possível transformar uma linha poligonal espelhada, em uma linha com curvas suaves, resultando nas trajetórias curvas dos muitos sona já apresentados (Figura 37).

Figura 37: Trajetórias poligonais convertidas em trajetórias suaves.



Fonte: GERDES, 2007.

Dito isso, Gerdes após investigar os padrões, estabelece critérios que formalizam a confecção do lusona:

1) Definição do sistema de numeração Q:

Em uma malha retangular $RG[m,n]$, os quadrados cujos vértices têm as coordenadas $(p,q),(p+1,q),(p+1,q+1)$ e $(p,q+1), p=0,1,\dots,2m-1,\ q=0,1,\dots,2n-1$ são unitários e cada um deles tem apenas um ponto da malha como um de seus quatro vértices. Chama-se numeração Q, o sistema de numeração módulo 4 que é atribuído aos quadrados unitários que compõem a malha do pictograma. A numeração Q permite saber o que acontece no entorno do ponto da malha de coordenadas$(2s-1,2t-1)$, mediante a paridade entre s e t (Figura 38).

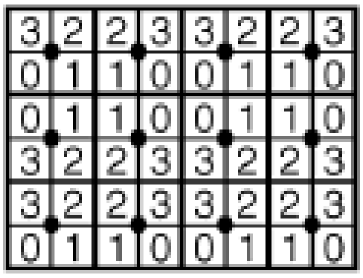
Figura 38: Paridade ponto a ponto.

		s	
		ímpar	par
t	ímpar	3 2 ● 0 1	2 3 ● 1 0
	par	0 1 ● 3 2	1 0 ● 2 3

Fonte: GERDES, 2007.

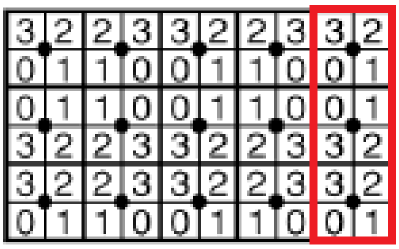
De posse destas definições, pode-se analisar mais profundamente o que ocorre com o sistema de numeração Q nas malhas $RG[4,3]$ (Figura 39) e$RG[5,3]$ (Figura 40). É possível perceber que a paridade estabelecida pelo sistema instituído, permite saber exatamente qual o padrão a ser encontrado no entorno de cada ponto, quando se adiciona uma coluna a mais na malha retangular, conforme se observa abaixo:

Figura 39: $RG[4,3]$.



Fonte: GERDES, 2007.

Figura 40: $RG[5,3]$.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Consideremos agora um padrão-de-espelho liso e monolinear, cujo percurso começa a partir do quadrado unitário A_0, de vértices (0,0), (1,0), (1,1), (0,1). Denotaremos por A_g, o g-ésimo quadrado unitário alcançado pela curva.

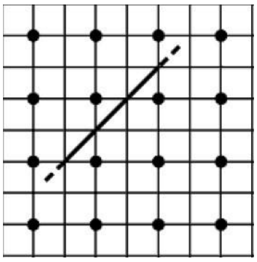
<u>Teorema 1</u>: Seja uma malha $RG[m,n]$. Para linhas curvas com designs regulares, monolineares, vale a igualdade:

$$Q(A_{g+2}) = Q(A_g) + 2 \ (\mathrm{mod}\ 4),$$

para $g = 0, 1, 2, \dots, 4mn - 1$.

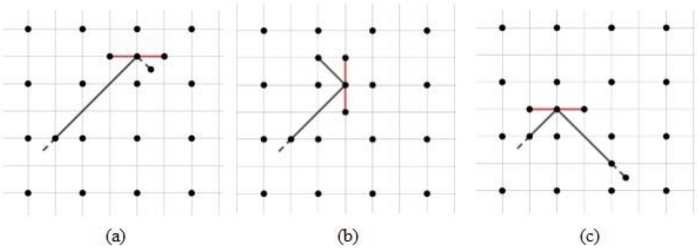
Demonstração: Consideremos inicialmente 3 quadrados unitários, pelos quais a curva passa consecutivamente em sua trajetória. Partindo do mesmo ponto, existem 8 possibilidades de caminhos, para que essa curva passe por estes quadrados. Cada possibilidade está associada com o número de espelhos que esta curva encontrará na sua trajetória, que podem ser 0, 1, 2, ou 3. Cada caso está ilustrado abaixo, nas Figuras 41, 42, 43 e 44:

Figura 41: Trajetória sem espelhos.



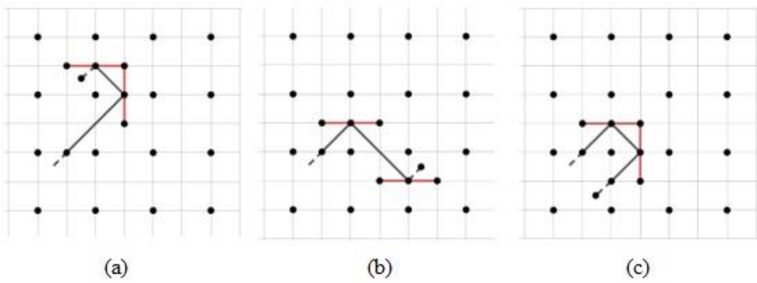
Fonte: GERDES, 2007.

Figura 42: Possibilidades de trajetória com um espelho.



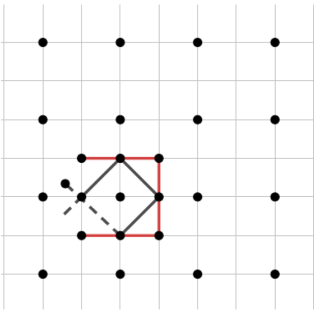
Fonte: O autor, 2019.

Figura 43: Possibilidades de trajetória com dois espelhos.



Fonte: O autor, 2019.

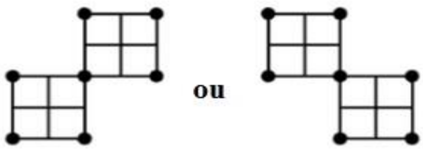
Figura 44: Trajetória com três espelhos.



Fonte: O autor, 2019.

Observe que em cada uma das oito situações possíveis o primeiro quadrado unitário (A_g), e o terceiro (A_{g+2}) pertencem a quadrados da malha diagonalmente opostos (figura 45). Elas podem ser caracterizadas por 2 estruturas de posições relativas de quadrados de lado dois cujos vértices são pontos da malha.

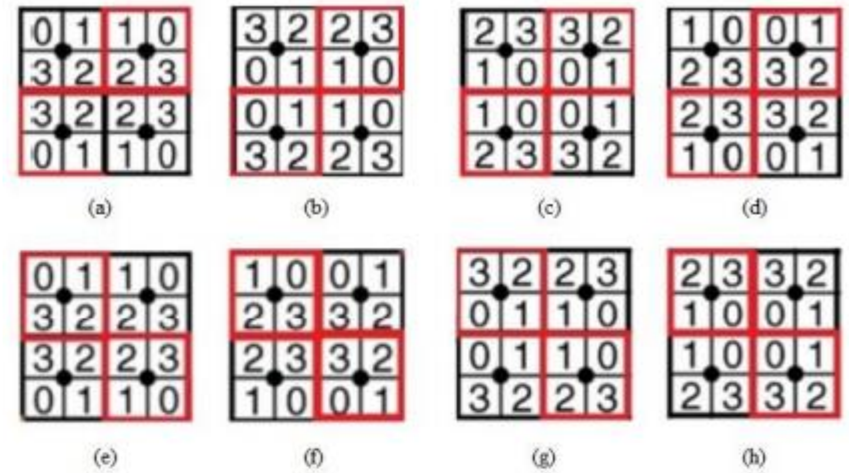
Figura 45: Posições relativas entre quadrados.



Fonte: GERDES, 2007.

Pode-se "enxergar" o Teorema 1 analisando a imagem? Associando a numeração Q a todas as possíveis posições das configurações em diagonal, obtemos (figura 46):

Figura 46: Disposição dos quadrados.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Assim, de acordo com a definição do sistema de numeração Q, é instantâneo que:

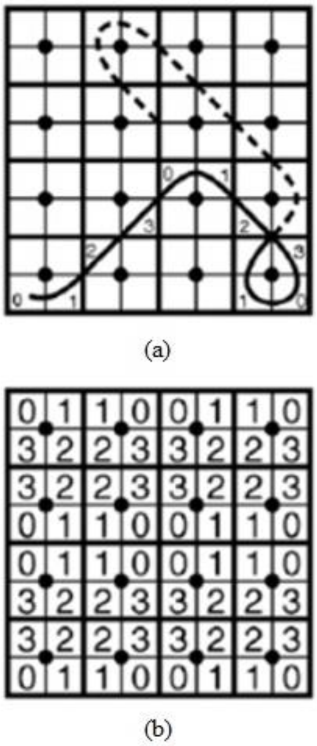
$Q(A_{g+2}) = Q(A_g) + 2 \ (mod\ 4)$, para $g = 0, 1, 2, \dots, 4mn - 1$.

Esse teorema é muito interessante, pois ele restringe os possíveis caminhos para a trajetória dos sona a serem executados.

2) Definição do sistema de numeração P:

Lembramos que denotaremos por A_g o g-ésimo quadrado unitário alcançado pela curva e por A_0, o quadrado unitário de vértices $(0,0), (1,0), (1,1)$ e $(0,1)$. Como o lusona é monolinear, ele passa através de todos os quadrados da malha. Introduz-se o sistema de numeração P, sendo este$P(A_g) = g \ (mod\ 4)$. É possível demonstrar que $Q(A_g) = P(A_g)$em um sona monolinear.

Figura 47: Exemplo de numeração P.



Fonte: GERDES, 2007.

<u>Teorema 2</u>: Para designs de linhas curvas espelhadas, regulares e monolineares, vale a igualdade:

$Q(A_g) = P(A_g)$, para $g = 0, 1, 2, \ldots, 4mn - 1$.

Demonstração: Usaremos indução. Temos

[i]$P(A_0) = Q(A_0) = 0$

Hipótese de Indução: $Q(A_g) = P(A_g)$ para $g = k$.

Pela definição de numeração P, temos

$P(A_{g+2}) = g + 2$ (mod 4) $= P(A_g) + 2$ (mod 4).

Logo, pela hipótese de indução: $P(A_{g+2}) = Q(A_g) + 2$ (mod 4).

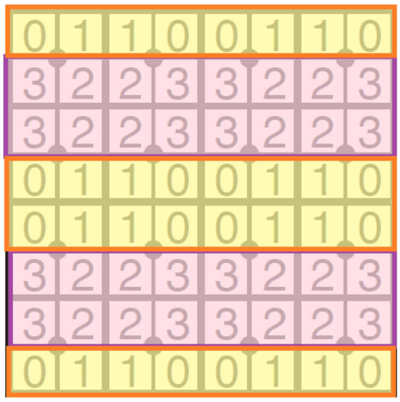
Pelo Teorema 1: $Q(A_{g+2}) = Q(A_g) + 2$ (mod 4).

Portanto: $P(A_{g+2}) = Q(A_{g+2})$, para todo $g = 0, 1, 2, \ldots, 4mn - 1$.

Com esses teoremas pode-se inferir que o sistema de numeração Q, mediante suas orientações em sentidos horário e anti-horário, é capaz de determinar quais números podem ser vizinhos entre si. É possível observar deste modo, que a malha pode ser fracionada em faixas verticais e horizontais, conforme as Figuras 48 e 49.

Analisando separadamente, pode-se inferir a Figura 48, que o número 2 só pode possuir horizontalmente como vizinhos, os números 2 e 3. O número 3, analogamente, só pode possuir horizontalmente como vizinhos os números 3 e 2. A relação se dá da mesma maneira entre os números 1 com 1 e 0, e entre o número 0 com 0 e 1.

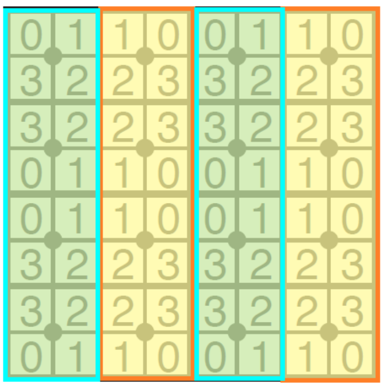
Figura 48: Análise por faixas horizontais.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Na Figura 49, podemos perceber que o número 2 só pode possuir verticalmente como vizinhos, os números 1 e 2. O número 3, analogamente, só pode possuir verticalmente como vizinhos os números 3 e 0. A relação se dá da mesma maneira entre os números 1 com 1 e 2, e entre o número 0 com 0 e 3.

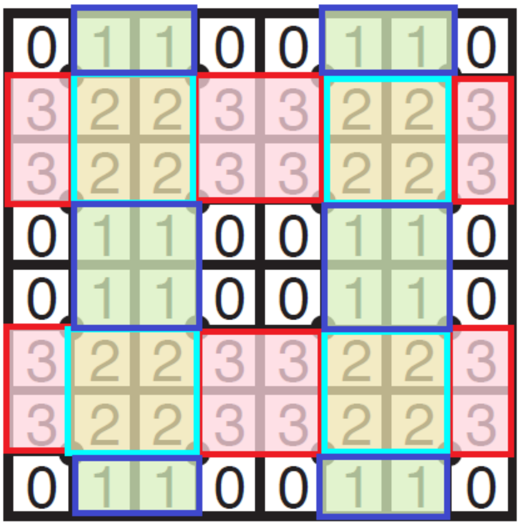
Figura 49: Análise por faixas verticais.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Ainda dentro do sistema de numeração Q, através das Figuras 48 e 49, pode-se observar o que ocorre na fronteira dos pontos da malha, obedecendo-se o padrão da Figura 50. Essa informação nos diz que blocos de números iguais se formam ao redor dos pontos da malha.

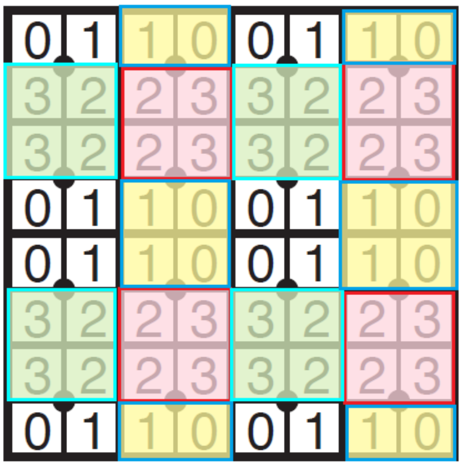
Figura 50: Análise por pontos da malha.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Cabe ainda uma interpretação adicional. Através das mesmas Figuras 48 e 49, pode-se observar a seguinte estrutura de composição na Figura 51:

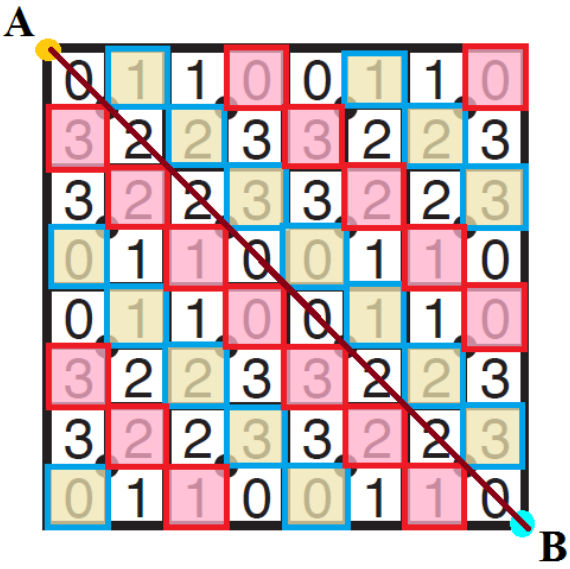
Figura 51: Análise complementar dos pontos.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

O sistema de numeração P é responsável por dizer, em analogia com o fenômeno físico já dito, o sentido da trajetória do raio luminoso. Na Figura 52, pode-se observar na malha que os quadrados em azul, possuem sentido de crescimento de A para B, em contrapartida, os quadrados em rosa possuem sentido de crescimento de B para A, ou seja, sentidos opostos.

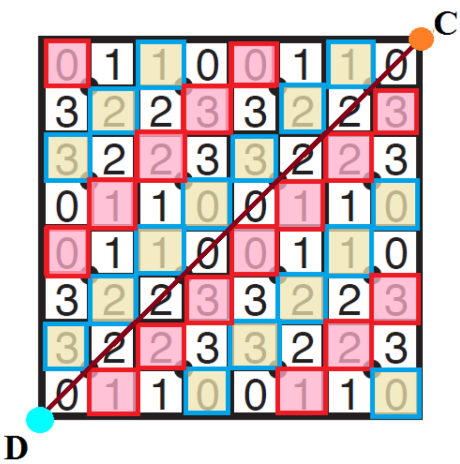
Figura 52: Diagonalização direção A-B.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Na figura 53, pode-se observar na malha que os quadrados em azul, possuem sentido de crescimento de C para D, em contrapartida, os quadrados em rosa possuem sentido de crescimento de D para C, ou seja, novamente, sentidos opostos.

Figura 53: Diagonalização direção C-D.

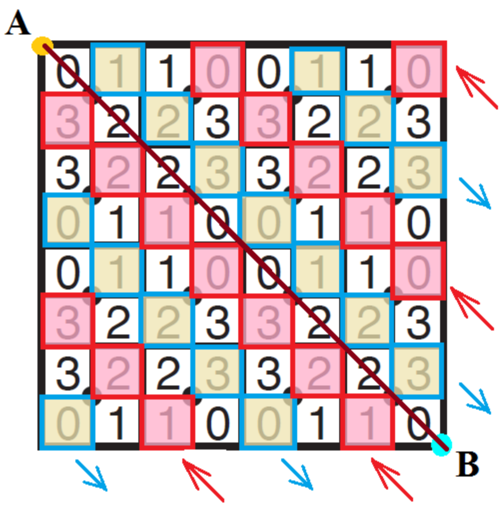


Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Mediante tais constatações feitas a partir dos teoremas 1 e 2, surgem dois corolários interessantes, de maneira que auxiliam na compreensão, e justificam, alguns procedimentos executados na construção do lusona.

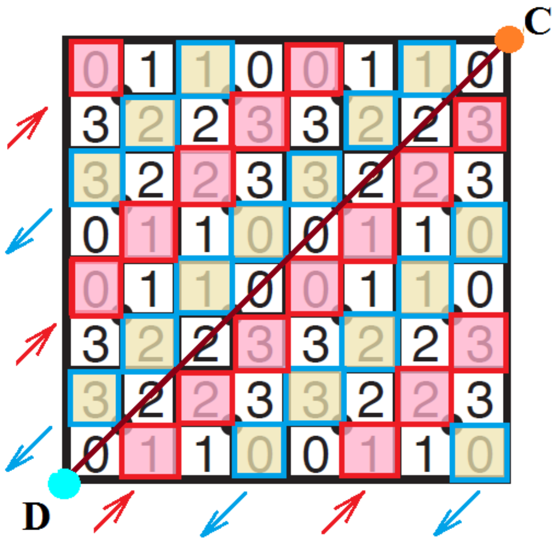
Corolário 1: Pelas análises feitas nas Figuras 52 e 53, obtidas através dos Teoremas 1 e 2, pode-se inferir que dois segmentos vizinhos paralelos de um lusona monolinear, regular e espelhado, com a mesma direção, sempre apresentam sentidos opostos (Figuras 54 e 55).

Figura 54: Faixas de sentidos opostos em A-B.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Figura 55: Faixas de sentidos opostos em C-D.

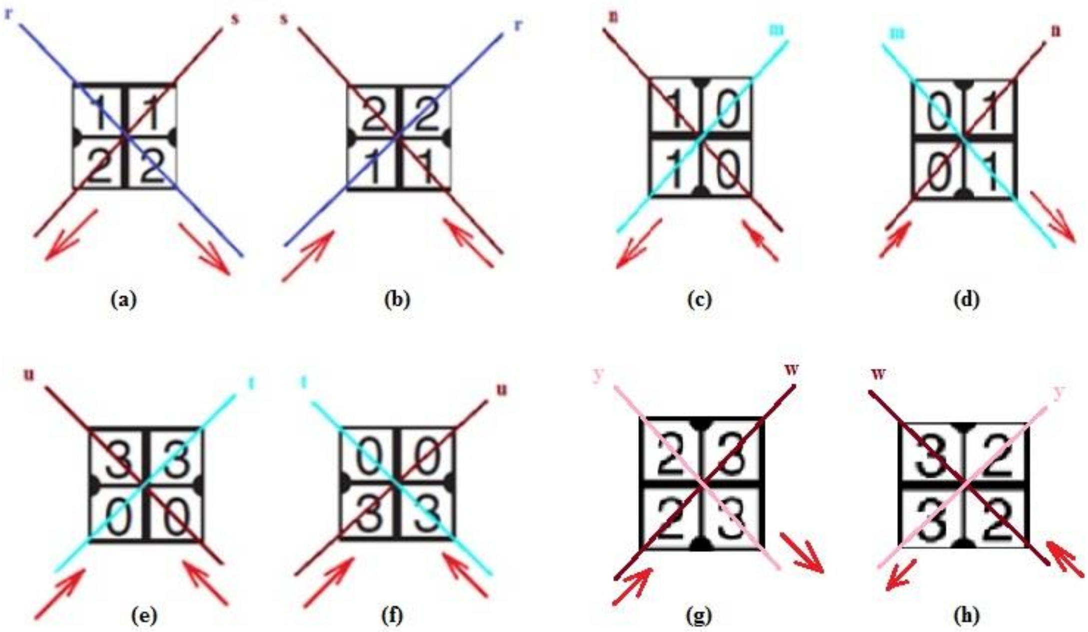


Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Corolário 2: Pela composição ilustrada na Figura 56, pode-se inferir quedois segmentos de um lusonamonolinear, regular e espelhado, que se cruzam, sempre apresentam mesmo sentido.

Demonstração: Observemos que nas figuras abaixo, obtidas mediante as implicações dos teoremas 1 e 2:

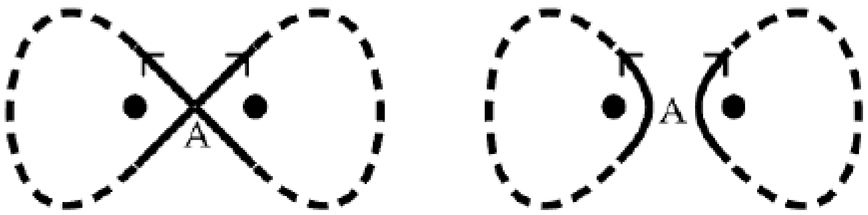
Figura 56: Implicações dos Teoremas 1 e 2.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

<u>Teorema 3</u>(Eliminação vertical do cruzamento entre duas linhas entre dois pontos horizontais)**:** Considere um perfil monolinear, regular e de linhas espelhadas. Se houver um cruzamento entre dois pontos horizontais da malha, esse cruzamento pode ser eliminado verticalmente, e o perfil deixa de ser monolinear, para 2-linear (Figura 57).

Figura 57: Eliminação vertical.



Fonte: GERDES, 2007.

Demonstração:

Considere um perfil monolinear, regular, de linhas espelhadas. O Teorema 3 é uma consequência direta do Corolário 2 (Figura 58). Pelo corolário 2 sabemos que dois segmentos cruzados no ponto A tem a mesma direção.

Figura 58: Demonstração do teorema 3.

Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Note que a curva passa duas vezes pelo ponto A: quando a curva alcança o g_1-ésimo quadrado unitário e quando alcança o g_2-ésimo quadrado unitário. Sejam respectivamente D e E pontos da curva que pertençam ao $(g_1 + 1)$-ésimo e ao $(g_2 + 1)$-ésimo quadrados unitários. Seja Cum ponto da curva que pertença ao $(g_2 - 1)$-ésimoquadrado unitário. Como de A chegamos em D

e em E e a numeração P do quadrado unitário coincide com a Q, é possível com o algoritmo geométrico seguir de$C$ para Dpassando por A. Um argumento análogo se aplica ao outro trecho da curva. Deste modo, é possível tornar um trecho do lusona que é monolinear, em bi-linear.

O Teorema 3 permite compreender como a inserção de um espelho vertical em um lusona regular, no interior da malha, interfere no percurso executado na construção do pictograma.

Figura 59: Inserção do espelho no interior da malha.

Fonte: GERDES, 2007.

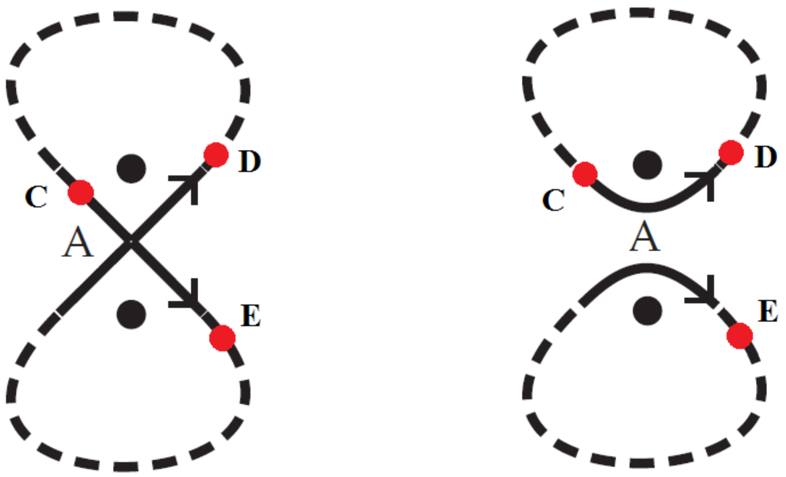
Corolário 3: Considere um perfil monolinear, regular, de linhas espelhadas. Se o cruzamento entre dois pontos verticais é eliminado horizontalmente, um perfil 2-linear é obtido.

Figura 60: Eliminação horizontal.

Fonte: GERDES, 2007.

Corolário 4: Este corolário é a extensão do Teorema 3 para o caso em que se insere um espelho horizontal e sua demonstração é análoga a do teorema (figura 61).

Figura 61: Demonstração do corolário 4.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2007.

Através do Corolário 4, pode-se compreender o que acontece com a inserção de um espelho horizontal no percurso executado para a construção do pictograma (figura 62).

Figura 62: Implicação do corolário 4.

Fonte: GERDES, 2007.

4.4Determinação geométrica do máximo divisor comum de dois números naturais

No artigo*Mirror-curves andknotmosaics*, Jablana*etal.*(2012) apresentam o Teorema 1[1] sem demonstração e o atribuem a Gerdes (GeometryfromAfrica, 1999). No entanto, não encontramos nesta referência uma demonstração formal deste resultado. Gerdes (1999, 2012)

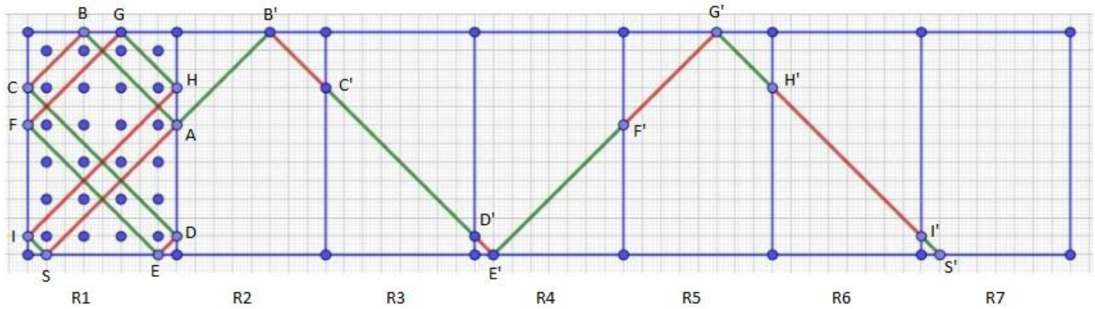
[1]Adaptamos o enunciado do Teorema 1 para a notação e nomenclatura utilizada por Gerdes.

indica etapas de experimentação que podem ser usadas por alunos para intuir a validade do resultado. Apresentaremos uma demonstração deste resultado.

Lembramos que as curvas fechadas a que nos referimos são as geradas em uma rede $RG[m,n]$ através do algoritmo geométrico identificado por Gerdes e apresentado na Subseção 4.3.1,nas quais os pontos iniciais e finais coincidem. Denotaremos por $f(m,n)$ a quantidade de curvas fechadas necessárias para "abraçar" todos os pontos de uma rede de referência de dimensão$m \times n$. A introdução da função $f(m,n)$ suscita uma pergunta natural: sempre existe pelo menos uma curva fechada em uma malha $RG[m,n]$ (sem espelhos internos) gerada pelo algoritmo geométrico que parte de um ponto de coordenadas $(2\alpha - 1{,}0), \alpha \in \{0{,}1, \dots, m\}$? Ao longo da prova do Teorema 1, responderemos afirmativamente a esta questão.

Para deduzir uma expressão para $f(m,n)$, analisaremos o comportamento de uma curva fechada em uma malha $RG[m,n]$ a partir de um ponto de coordenadas $(2\alpha - 1, 0), \alpha \in \{0{,}1, \dots, m\}$. Vamos ilustrar nossa análise em uma malha $RG[6, 4]$. Para a demonstração do procedimento, será utilizada como auxílio a figura 63.

Figura 63: Conversão da poligonal fechada em aberta.

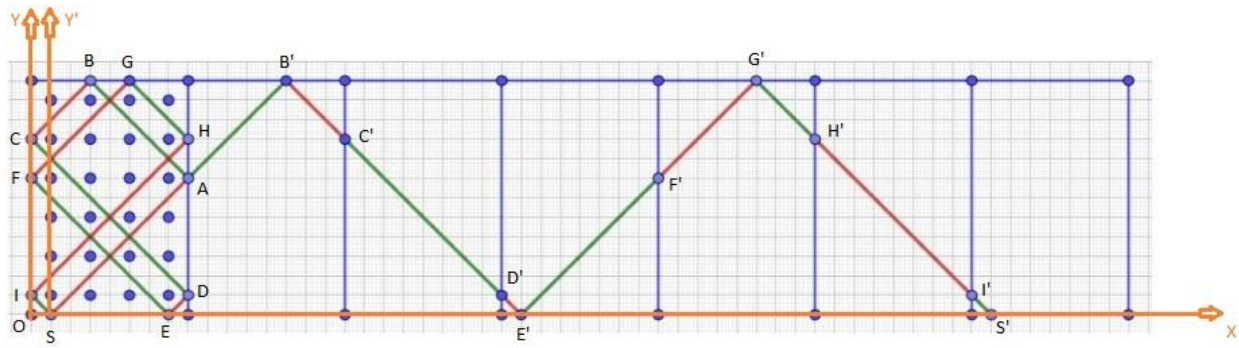


Fonte: O autor, 2019.

Consideremos que o traçado do lusona inicia-se no ponto S, o traçado se dá da seguinte maneira $S - A - B - C - D - E - F - G - H - I - S$, dentro da malha $RG[4{,}6]$. Essa sequência de pontos forma uma curva fechada, pois retorna ao ponto S. Nosso argumento é baseado em espelhamentos e translações, que buscam desdobrar o trajeto da curva fechada para associá-la a uma poligonal que vai de S até S'. Inicia-se o traçado em S, passando pelo ponto A, caminha-se em direção ao ponto B. O segmento AB é traçado, mas como a intenção é desdobrar a curva fechada, transformando-a em poligonal, constrói-se a malha $R2$, simétrica a $R1$, com eixo de simetria na reta que passa por A e H. Deste modo, AH é mediatriz de BB', e o segmento AB', pertencente a $R2$, é simétrico ao segmento AB contido em $R1$. Continuando o trajeto, traça-se o segmento BC na malha $R1$, como a malha $R2$ é simétrica, o segmento $B'C'$ desta malha, é simétrico ao segmento BC de $R1$. Na malha $R1$ traça-se CD, se traçarmos $C'D'$ dentro de $R2$, simétrico a CD, a poligonal não ficaria desdobrada, deste modo cria-se a malha $R3$, que conterá parte da malha $R1$ transladada. Deste modo, o segmento $C'D'$ de $R3$, é o segmento CD de $R1$, transladado a$R3$. Em $R1$ traça-se DE, para que o desdobramento da poligonal contida em $R1$ continue, cria-se a malha $R4$, que éobtida por simetria e translação da malha $R1$. Em $R4$, o segmento $D'E'$ é o segmento simétrico a DE contido em $R1$ e transladado até $R4$. Analogamente, o segmento $E'F'$ é simétrico ao segmento EF, contido em $R1$ e transladado até $R4$. Com o objetivo de continuar o processo de desdobramento da poligonal, cria-se a malha $R5$, uma nova translação de $R1$, onde estará contida o segmento $F'G'$, ou seja, o segmento FG de $R1$ transladado até$R4$. Analogamente, o segmento $G'H'$ de $R4$, é uma translação de GH, contido em $R1$. Em $R1$, traça-se HI. Cria-se a malha $R5$, simétrica transladada de $R1$. O segmento $H'I'$ contido em $R5$, é simétrico ao segmento HI contido em $R1$. Finaliza-se o processo, com a criação da malha $R7$, translação de $R1$. Nesta malha estará contido o segmento $I'S'$, translação do segmento IS, contido em $R1$. Assim, finaliza-se o processo de desdobramento da curva fechada contida em $R1$ e obtenção de uma poligonal. Esse procedimento é o alicerce para a demonstração do teorema anteriormente citado.

Considere agora a origem no ponto de inicial da curva fechada. Para que isso ocorra, é necessária uma translação de eixos na análise, conforme ilustra-se na figura 64:

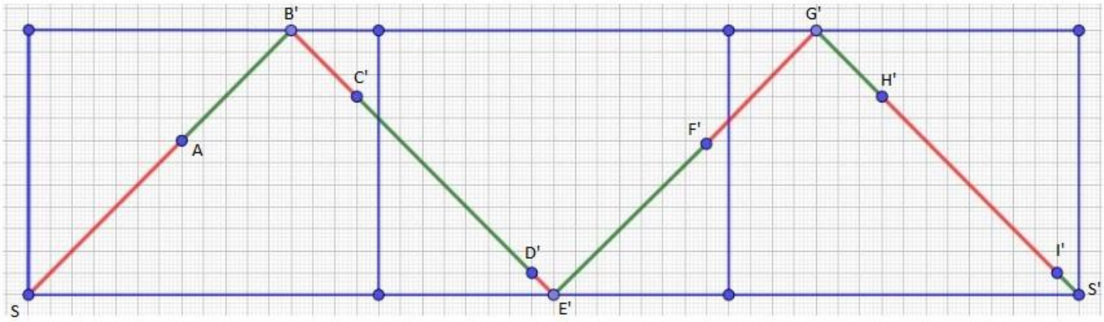
Figura 64: Translação de eixos.



Fonte: O autor, 2019.

Deste modo, os centros de todas as malhas são deslocados da distância OS. Assim, a linha poligonal aberta SS', fica representada na figura 65:

Figura 65: Poligonal aberta.



Fonte: O autor, 2019.

Observemos o que ocorre nesta malha, pois este modelo será muito útil na demonstração do teorema para um caso geral da malha $RG[m,n]$. Concentra-se a análise, neste primeiro momento, ao caso ilustrado de $RG[4,6]$. Quando o traçado iniciado em S, termina em S', dizemos que a curva iniciada em $R1$ se fechou. Tomaremos como unidade de comprimento da poligonal o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1. Analisando a direção vertical, que possui 6 pontos, vemos que o trecho da poligonal que vai de S ao ponto B', possuímos 2×6 unidades de comprimento da malha, para descer, a mesma quantidade, ou seja, de S até S' percorre-se $4 \times 2 \times 6$ unidades de comprimento na direção vertical. A cada ponto acrescentado, acrescenta-se uma distância de 2 unidades de comprimento na subida, e, a mesma quantidade, na descida da poligonal. Analisando a distância de S até S' na direção horizontal, percebemos que não nos interessa o ponto E', tendo em vista que E', apesar de ser o primeiro momento que a poligonal toca no eixo horizontal, não é o ponto em que se termina o traçado da curva fechada. O ponto S' é, portanto, o segundo momento em que a curva fechada, ao ser desdobrada em poligonal, toca o eixo horizontal. Isso é importante, pois enfatiza que as curvas fechadas, se concluem, quando ao serem desdobradas em poligonais, tocam o eixo horizontal em uma quantidade par de réplicas da malha. Note que com a translação de eixos, o ponto S', encontra-se na malha R6. Isso significa que o ponto S' está a uma distância par de pontos do ponto S. Neste caso em específico, existem 6×4 de S até S', ambos inclusive. Isso equivale a uma distância de $2 \times 6 \times 4$ unidades de comprimento na direção horizontal.

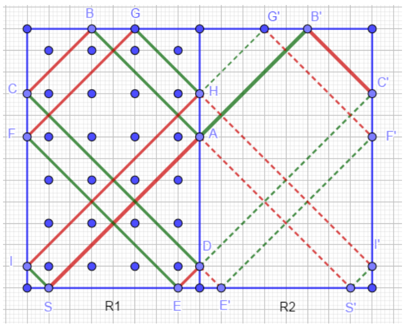
Antes de demonstrar o teorema, veremos que o procedimento de "desdobrar" a curva fechada também pode ser descrito de modo que consideremos apenas reflexões. Novamente, vamos ilustrar este procedimento a partir da curva fechada$S - A - B - C - D - E - F - G - H - I - S$, dentro da malha $R[4,6]$.

- Vamos extrair desta sequência os pontos da curva fechada que pertencem aos segmentos laterais verticais $A - C - D - F - H - I$. Note que como $n = 4 \leq 6 = m$ e o ponto de origem da curva tem abscissa ímpar, sabemos que cada um destes pontos não coincide com nenhum vértice do retângulo externo à malha. Além disso, o primeiro ponto pertence à lateral vertical direita desse retângulo.

- Cada um destes pontos gerará uma reflexão e uma nova malha. Cada reflexão será feita na última malha gerada. Para facilitar a visualização, a partir de $R2$, os trechos refletidos ainda não completamente "desdobrados" serão indicados em tracejado e os já "desdobrados" em linha sólida. Como temos 6 pontos pertencentes aos segmentos laterais verticais,$A - C - D - F - H - I$, faremos 6 reflexões para desdobrar completamente a curva. A cada reflexão, os pontos refletidos serão acrescidos de $'$.

- **Primeira reflexão.** Nesta primeira etapa, vamos gerar o retângulo $R2$(figura 66) e refletir o trecho da curva fechada compreendido entre o ponto A e o ponto final S em relação à lateral direita de $R1$.

Figura 66: Primeira reflexão.

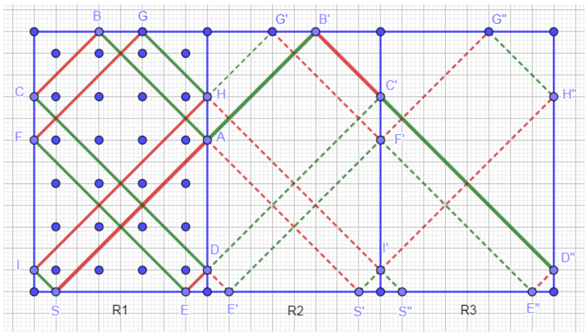


Fonte: O autor, 2019.

Observe que "desdobramos" o trecho até C'. Além disso, como no algoritmo geométrico o ângulo de reflexão dentro da malha é de $45°$, após a reflexão em relação à lateral direita, S, A e B' são colineares.

- **Segunda reflexão.** Vamos gerar o retângulo $R3$(figura 67) e refletir o trecho da curva contido em $R2$ e compreendido entre o ponto C' e o ponto final S' em relação à lateral direita de $R2$.

Figura 67: Segunda reflexão.

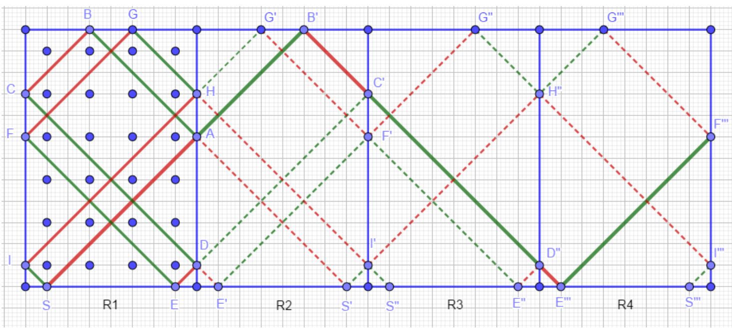


Fonte: O autor, 2019.

Observe que "desdobramos" o trecho até D''. Além disso, como no algoritmo geométrico o ângulo de reflexão dentro da malha é de 45°, após a reflexão em relação à lateral direita, B', C' e D'' são colineares.

- **Terceira reflexão.** Vamos gerar o retângulo $R4$(figura 68) e refletir o trecho da curva contido em $R3$ e compreendido entre o ponto D'' e o ponto final S'' em relação à lateral direita de $R3$.

Figura 68: Terceira reflexão.

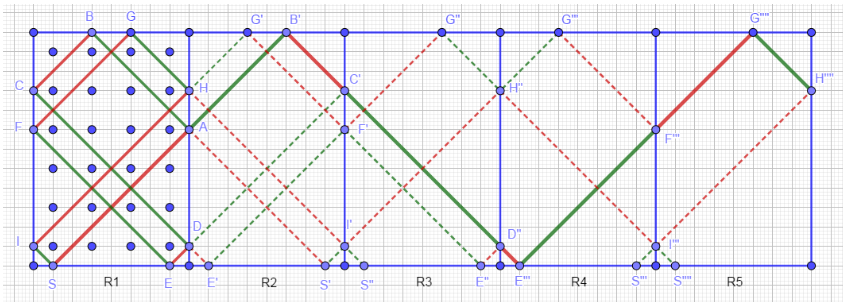


Fonte: O autor, 2019.

Observe que "desdobramos" o trecho até F'''.

- **Quarta reflexão.** Vamos gerar o retângulo $R5$(figura 69) e refletir o trecho da curva contido em $R4$ e compreendido entre o ponto F''' e o ponto final S''' em relação à lateral direita de $R4$.

Figura 69: Quarta reflexão.

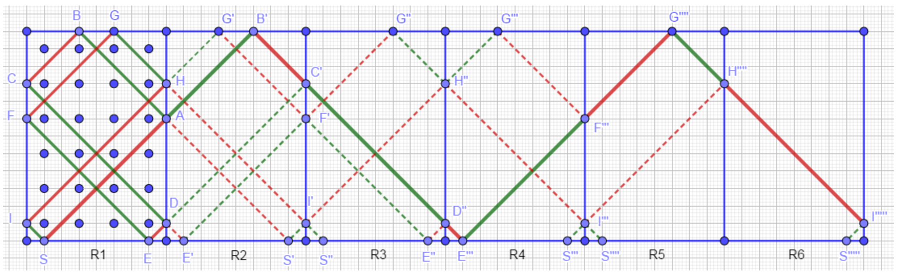


Fonte: O autor, 2019.

Observe que "desdobramos" o trecho até H''''. Além disso, como no algoritmo geométrico o ângulo de reflexão dentro da malha é de 45°, após a reflexão em relação à lateral direita, E''', F''' e G$''''$ são colineares.

- **Quinta reflexão.** Vamos gerar o retângulo $R6$ (figura 70) e refletir o trecho da curva contido em $R5$ e compreendido entre o ponto H'''' e o ponto final S'''' em relação à lateral direita de $R5$.

Figura 70: Quinta reflexão.

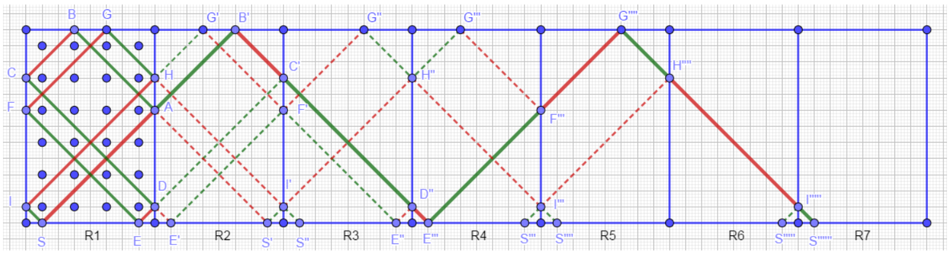


Fonte: O autor, 2019.

Observe que "desdobramos" o trecho até I'''''. Além disso, como no algoritmo geométrico o ângulo de reflexão dentro da malha é de 45°, após a reflexão em relação à lateral direita, G'''', H'''' e I'''' são colineares.

- **Sexta reflexão.** Vamos gerar o retângulo $R7$(figura 71) e refletir o trecho da curva contido em $R6$ e compreendido entre o ponto I''''' e o ponto final S''''' em relação à lateral direita de $R6$.

Figura 71: Sexta reflexão.



Fonte: O autor, 2019.

Observe que "desdobramos" completamente a curva fechada inicial.

Teorema 1 (Gerdes, 1999): *O número de curvas fechadas distintas produzidas pelo algoritmo geométrico em uma malha $RG[m,n]$sem espelhos internos é dada por:$f(m,n) \ = \ mdc(m,n)$.*

Demonstração: Observe inicialmente que se são necessárias $f(m,n)$ curvas fechadas para "abraçar" todos os pontos de uma grade $RG[m,n]$, após a rotação por uma ângulo de 90°, as $f(m,n)$ curvas fechadas "abraçam" todos os pontos de uma grade $RG[n,m]$. Isto é, $f(m,n) = f(n,m)$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $m \leq n$.

Consideremos uma curva gerada com o algoritmo geométrico do lusona cujo ponto inicial S tem coordenadas$(2\alpha - 1,0), \alpha \in \{0,1,\dots,m\}$. Durante sua construção, esta curva toca alternadamente as laterais do retângulo externo R_1 da malha $RG[m,n]$. Denotaremos a sequência destes pontos por $S - P_1 - P_2 - P_3 - \cdots - P_f$.Queremos identificar sob que condições $P_f = S$. Inicialmente, assumiremos que $P_f = S$. Vamos extrair desta sequência os pontos da curva que pertencem aos segmentos laterais verticais $L_1 - \ L_2 - \cdots - L_k$. Note que como $n \leq m$ e o ponto de origem da curva tem abscissa ímpar, sabemos que cada um destes pontos não coincide com nenhum vértice do retângulo externo à malha. Além disso, o primeiro ponto pertence à lateral vertical direita desse retângulo e coincide com P_1. Com a notação A^i, representamos a i −ésima reflexão do ponto A.

- **Primeira reflexão.** Nesta primeira etapa, denotamos por R_1 o retângulo externo de $RG[m,n]$ e construímos o retângulo R_2 de vértices $(2m,0),(4m,0),(4m,2n)$ e $(2m,2n)$. Em seguida, refletimos o trecho da curva fechada compreendido entre o ponto L_1 e o ponto final P_f em relação à lateral direita de $R1$. Observe que "desdobramos" o trecho da curva até $L_2^{(1)}$.

- ***i*–ésima reflexão.** Construímos o retângulo R_{i+1} de vértices $(2mi,0),(2m(i+1),0),(2m(i+1),2n)$ e $(2mi,2n)$. Em seguida, refletimos o trecho da curva compreendido entre o ponto L_i e o ponto final P_f em relação à lateral direita de R_i. Observe que "desdobramos" o trecho da curva até $L_{i+1}^{(i)}$, se $i < k$. Quando $i = k$, o processo termina, pois temos k pontos pertencentes aos segmentos laterais verticais.

Vamos estudar o comportamento da poligonal obtida a partir de uma curva inicial $S - P_1 - P_2 - P_3 - \cdots - P_f$ fechada. Considere agora a origem no ponto de inicial $(2\alpha - 1{,}0)$da curva. Denotaremos por O a origem do novo sistema de coordenadas e por F o ponto final da poligonal neste sistema. A condição $P_f = S$na curva inicial é equivalente a $F = S^{(k)} - S$. Isto é, F pertence ao eixo horizontal. Logo, a ordenada de F é nula. Para outra condição associada a esta igualdade, é preciso observar que: (a) como a curva inicial é construída pelo algoritmo geométrico em uma malha sem espelhos interno, como o ângulo de reflexão é de 45°, todos os vértices da poligonal possuem ordenada nula ou igual a $2n$. Além disso, a distância entre dois vértices consecutivos no eixo horizontal também é igual a $4n$, pois é igual ao dobro da distância de subida. Assim, a abscissa de Fdeverá ser um múltiplo do dobro da distância de subida, sendo esta, por sua vez, igual ao dobro da quantidade de pontos da malha na direção vertical. Isto é, $F = (4 \cdot n \cdot \beta,\ 0)$ para algum $\beta \in \mathbb{N}$; (b) como a poligonal foi obtida a partir de reflexões em relação a laterais direitas dos retângulos R_i, k reflexões de S menos S geram um ponto do eixo horizontal cuja abscissa é $(2 \cdot m \cdot k, 0)$.

Quando o ponto de partida da curva fechada, coincide com o ponto de chegada, essa representação na poligonal aberta, deverá ser uma solução da equação diofantina $4 \cdot n \cdot \beta = 2 \cdot m \cdot k$. Note que em cada lado desta igualdade está expressa a quantidade L_{mn} de diagonais de quadrado unitários que compõem a curva fechada inicial. Um argumento análogo, com reflexões em relação a lateral superior e cópias adjacentes do retângulo externo à malha, nos levaria a outra equação diofantina$2 \cdot n \cdot \beta_1 = 4 \cdot m \cdot k_1$. Além disso, temos novamente L_{mn}expressa em cada lado desta equação. Consequentemente, $2 \cdot m \cdot k = L_{mn} = 4 \cdot m \cdot k_1$. E deduzimos que k é par. Isto é, $k = 2\gamma$. Portanto, temos $n \cdot \beta = m \cdot \gamma$. Mais precisamente, queremos determinar a menor solução positiva desta equação, pois o que queremos é o primeiro momento em que a curva se fecha, já que ao se fechar, o traçado do sona é interrompido. Pela teoria dos números, como $(0,0)$ é uma solução particular, sabemos que as soluções positivas são dadas por:

$$\beta = \frac{m}{\mathrm{mdc}(m,n)} t \text{ e } \qquad \gamma = \frac{n}{\mathrm{mdc}(m,n)} t, \qquad t \in \mathbb{N}.$$

Isto nos diz que a menor solução inteira positiva é dada por:

$$\beta_{min} = \frac{m}{\mathrm{mdc}(m,n)} \qquad \text{e} \qquad \gamma_{min} = \frac{n}{\mathrm{mdc}(m,n)}.$$

Consequentemente:

- A quantidade L_{mn} de diagonais de quadrado unitários que compõem a curva fechada inicial é dada por $L_{mn} = 4 \cdot \beta_{min} \cdot n$.

- Esta quantidade independe do ponto inicial. Depende apenas da dimensão da malha. Isto nos diz que qualquer caminho fechado será formado sempre pelo mesmo número de diagonais.

- Se começarmos em um ponto inicial $(2k - 1,0)$ que não pertence a uma curva fechada, a curva fechada gerada a partir dele não tem diagonais em comum com a curva inicial.

- Para todos os pontos serem abraçados, são necessárias $4 \cdot m \cdot n$ (pois cada quadrado de lado dois cujo centro é um ponto da malha tem 4 diagonais). Observe que este número é divisível por L_{mn} e que o resultado desta divisão coincide com $f(m,n)$.

Assim,

$$f(m,n) = \frac{4 \cdot m \cdot n}{L_{mn}} = \frac{4 \cdot m \cdot n}{4 \cdot \beta_{min} \cdot n} = \mathrm{mdc}(m,n).$$

5 APLICABILIDADE DOS SONA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

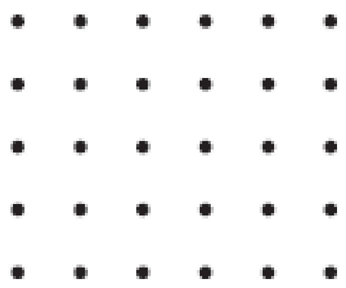
Os sona são uma excelente proposta para expandir a visão do educando a respeito da matemática. Os desenhos na areia, a cultura por trás daqueles desenhos, oriundos de comunidades étnicas distintas e minoritárias, são oportunos em um momento onde o currículo escolar vem passando por mudanças e discussões importantes, como a da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Com os sona, os estudantes podem ter acesso a uma matemática multi-cultural, distinta da matemática que lhes é apresentada frequentemente como criação exclusivamente do homem branco.

Os sona podem ser usados para demonstrar geometricamente diversas relações aritméticas, relações de simetria e sequências. Gerdes (2014) apresenta várias sugestões de atividades, das quais foram selecionadas algumas, que podem ser mais adequadas aos níveis de educação básica que englobam do 6º ano ao 9º ano[2].

5.1 Progressões Aritméticas

Ainda que o assunto progressões aritméticas seja fora do escopo do ensino fundamental, os sona podem ser utilizados para ilustrar conceitos relacionados ao tema, de forma lúdica, menos formal, e por meio de extrapolação. Façamos a análise do desenho do trajeto descrito por uma galinha selvagem quando perseguida (Figuras 72, 73 e 74).

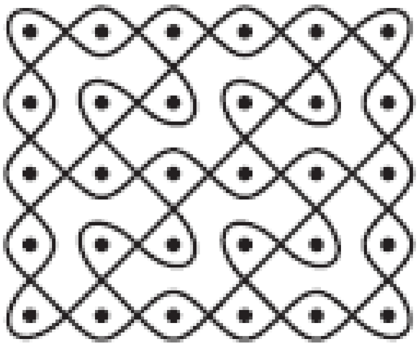
Figura 72: RG [6,5] utilizada.



Fonte: GERDES, 2013.

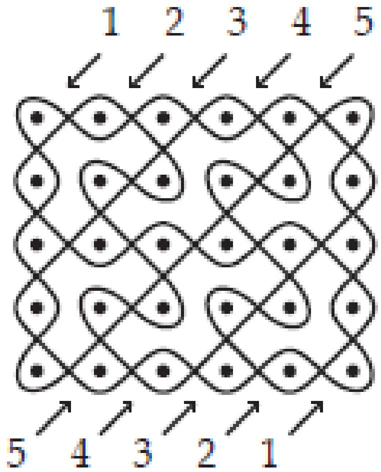
[2]Área de atuação profissional como educador do autor deste trabalho.

Figura 73: Trajetória descrita.



Fonte : GERDES, 2013.

Figura 74: Relação de soma da progressão



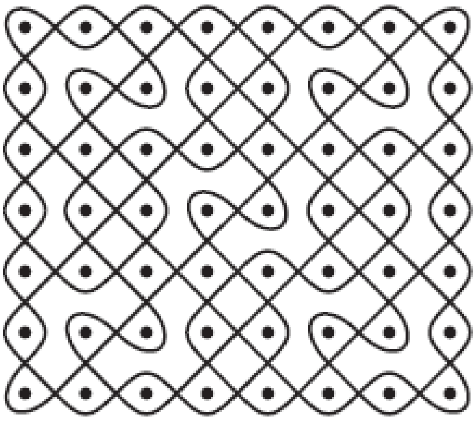
Fonte : GERDES, 2013.

O professor pode contar com os alunos manualmente, e mostrar que o total de pontos da malha, corresponde ao produto$5x6$, ou seja, o total de linhas e colunas. Seria muito interessante, mostrar que é possível chegar a esse mesmo resultado, por uma via menos óbvia para um aluno de ensino fundamental. O método de contagem poderia ser realizado diagonalmente, e deste modo, haveria um ponto de partida para o estudo de progressões:

$$5\ x\ 6\ =\ (1+2+3+4+5)+\ (5+4+3+2+1)=\ 2(1+2+3+4+5)$$

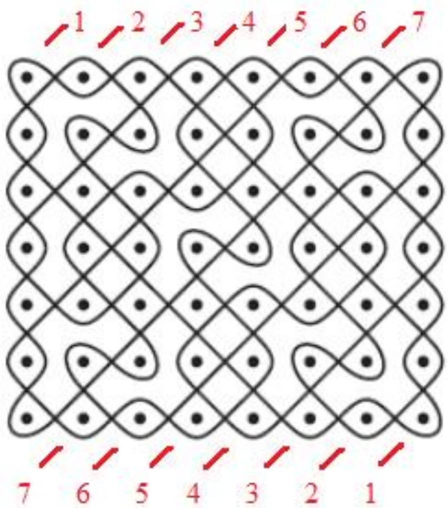
Esse processo poderia ser repetido diversas vezes, com sona semelhantes ao primeiro (figuras 75, 76, 77 e 78).

Figura 75: Desenho feito emRG [8,7].



Fonte : GERDES, 2013.

Figura 76: Somatório RG [8,7]

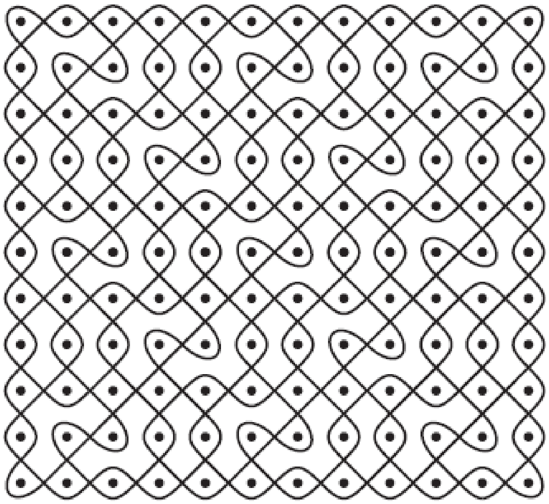


Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Método de contagem de pontos a ser adotado:

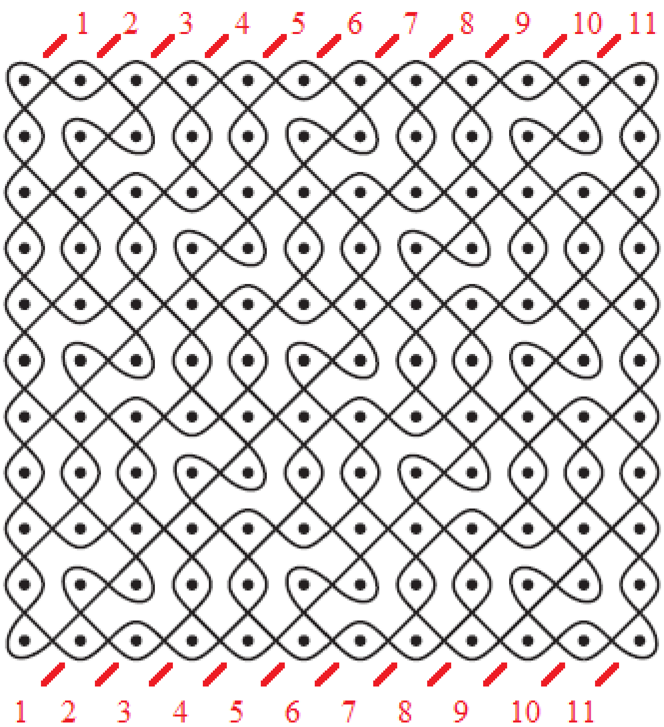
$$7 \times 8 = (1+2+3+4+5+6+7) + (7+6+5+4+3+2+1)$$
$$= 2(1+2+3+4+5+6+7)$$

Figura 77:Desenho feito em RG [12,11].



Fonte : GERDES, 2013.

Figura 78: SomatórioRG[12,11].



Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

$$11 \times 12 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11) + (11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1) =$$

$$11 \times 12 = 2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)$$

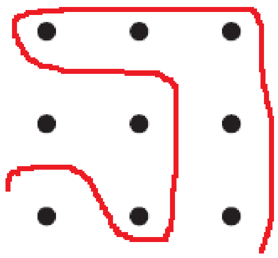
Assim, o estudante será capaz de extrapolar que é de se esperar que:

$$n(n+1) = 2(1+2+3+\cdots+n)$$

Aqui, porém é preciso tomar cautela. Todas as malhas apresentaram uma relação em que os números de linhas e colunas são consecutivos. É mediante essa relação entre linhas e colunas, que é possível somar diagonalmente, e demonstrar de forma lúdica, a nível de educação básica, a relação de soma pretendida.

Uma outra relação interessante pode ser obtida através das malhas, observemos como exemplo 3 malhas características (figuras 79, 80 e 81):

Figura 79:$RG[3,3]$.

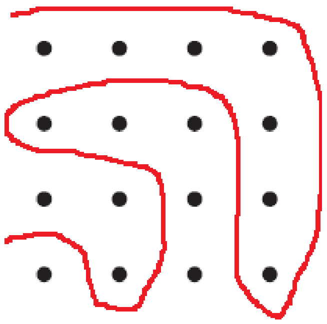


Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Na$RG[3,3]$, seguindo a linha vermelha, é possível notar que o total de pontos que a constitui obedece a relação:

$$3^2 = 1+3+5$$

Figura 80:$RG[4,4]$.

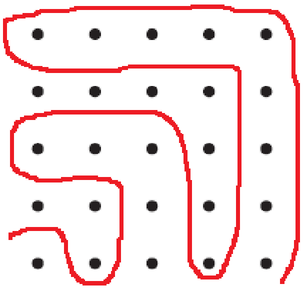


Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Na$RG[4,4]$, seguindo a linha vermelha, é possível notar analogamente que:

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

Figura 81:$RG[5,5]$.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Na$RG[5,5]$, por analogia, vem que:

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Deste modo, o estudante, por extrapolação, percebe que:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

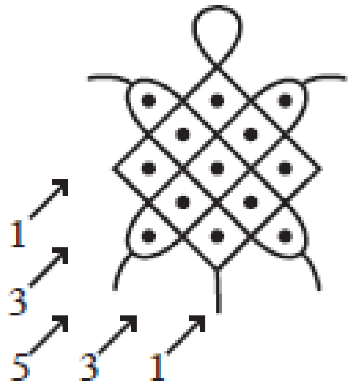
Ou seja, a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n².

Muitas vezes a confecção dos desenhos é feita em uma rede de pontos, nos quais é possível identificar malhas sobrepostas (figura 82), de tal modo que os centros da segunda malha são os centros dos quadrados unitários da primeira malha. Vejamos o que ocorre com a representação de um estábulo de bois (figura 83):

Figura 82: Malhas sobrepostas: (a) 3² pontos e (b) 3² + 2² pontos.

Fonte: GERDES, 2013.

Figura 83: Contagem de pontos.



Fonte: GERDES, 2013.

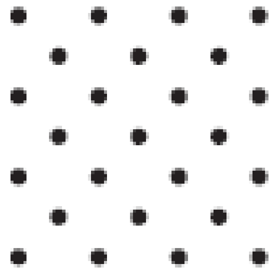
Aqui é interessante notar que pela soma diagonal temos:

$$3^2 + 2^2 = 1 + 3 + 5 + 3 + 1$$

Essa igualdade pode ser rearrumada como:

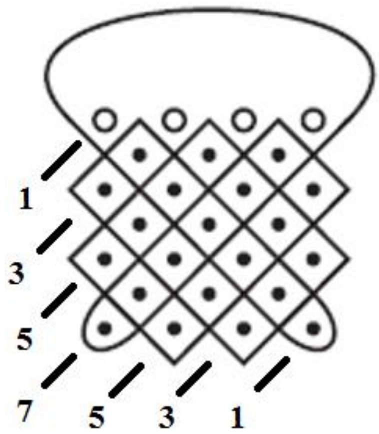
$$3^2 + 2^2 = 2(1 + 3) + 5$$

Figura 84: Malha com $4^2 + 3^2$ pontos.



Fonte: GERDES, 2013.

Figura 85: Soma da malha sobreposta.



Fonte:Adaptado de GERDES, 2013.

Nesta situação (figuras 84 e 85), analogamente:

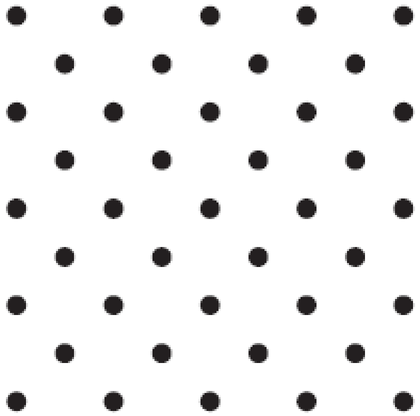
$$4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1$$

Essa igualdade pode ser rearrumada como:

$$4^2 + 3^2 = 2(1 + 3 + 5) + 7$$

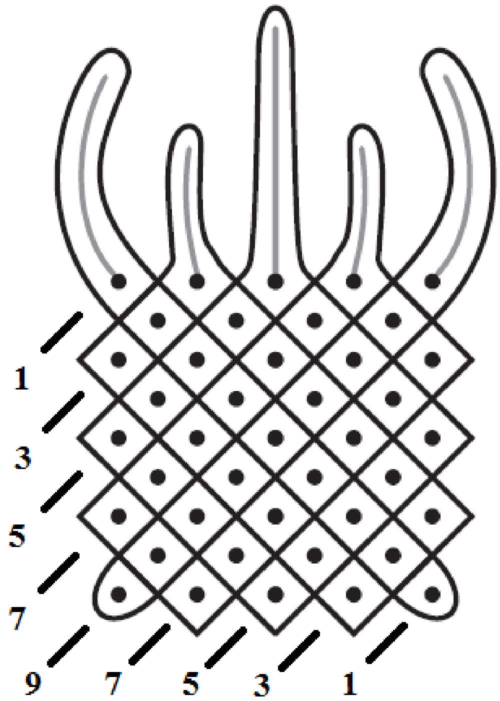
Analogamente, observemos as figuras 86 e 87:

Figura 86: Malha com $5^2 + 4^2$ pontos.



Fonte: GERDES, 2013.

Figura 87: Cabeça de Elefante com contagem de pontos



Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Nesta situação:

$$5^2 + 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$$

Essa igualdade pode ser rearrumada como:

$$5^2 + 4^2 = 2(1 + 3 + 5 + 7) + 9$$

É possível então extrapolar que, a soma dos quadrados de dois números inteiros positivos consecutivos, obedece a relação:

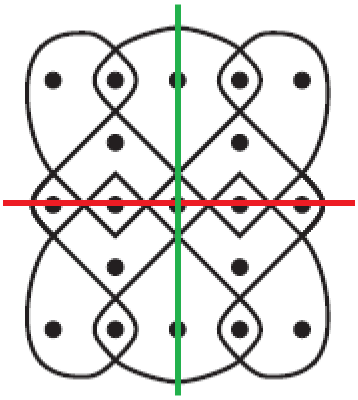
$$(n + 1)^2 + n^2 = 2(1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1) + (2n + 1)$$

Essa relação é pertinente ao assunto Potências que abrange o 6º ano ao 9º ano, pode ser útil como alternativa para os alunos realizarem o cálculo de expressões numéricas. Pode ser muito útil para alunos do 9º ano como abrangência do assunto potências, e como introdução ao assunto Progressões que será tratado no Ensino Médio.

5.2 Simetrias

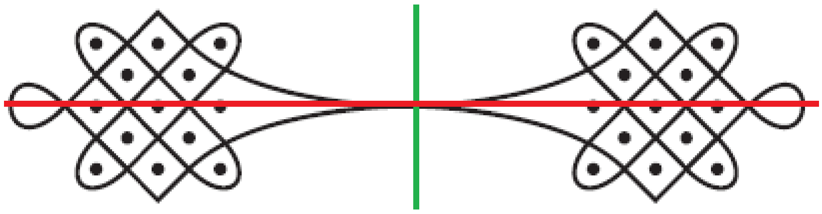
Os padrões de construção, as semelhanças e as simetrias auxiliam no aprendizado da geometria. O conceito de simetria pode ser visto nos sona abaixo (figuras 88 e 89). É interessante para os estudantes reconhecerem nesses padrões os eixos de simetria, exigindo dos mesmos uma observação aguçada e criteriosa para identificá-los.

Figura 88: Simetria com 2 eixos.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Figura 89: Pictograma com 2 eixos de simetria.



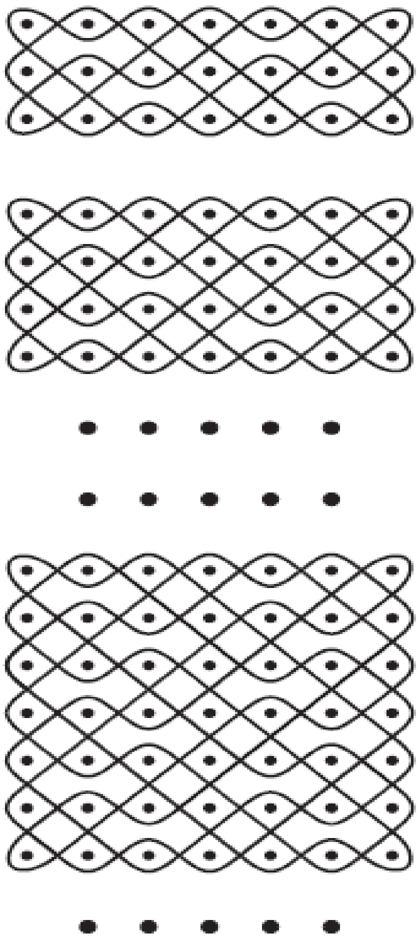
Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Em ambas as imagens, podem ser observados dois eixos de simetria: o eixo verde e o eixo vermelho. É fundamental que um estudante consiga perceber se há simetria, e, caso haja, seus padrões e os respectivos eixos de simetria.

5.3 Recreações no estilo “encontre o padrão que falta”

A maneira de explorar sequências é interessante, pois em geral o estudante de nível básico se acostuma a explorar sequências numéricas. Explorar séries de forma geométrica é inovador e mais robusto. Normalmente, o assunto é abordado de forma numérica, abstrata, o uso dos sona permite uma abordagem lúdica e geométrica. A título de ilustração, o professor poderia simular como atividade, fornecer ao alunado os sona abaixo (figura 90). Seria interessante que os alunos percebessem que há um padrão nas figuras a ser seguido.

Figura 90: Exemplo de recreação.



Fonte: GERDES, 2013.

Diferente da maneira algébrica, como são desenhos, várias são as informações que o observador deve coletar para definir características para os termos pertencentes a série apresentada. O aluno precisa ter a percepção da configuração do desenho, se obedece ao mesmo algoritmo, variação da quantidade de pontos nas linhas e colunas da malha, conforme será analisado abaixo:

Na 1º imagem, temos uma $RG[7,3]$.

Na 2º imagem, temos uma $RG[7,4]$.

...

...

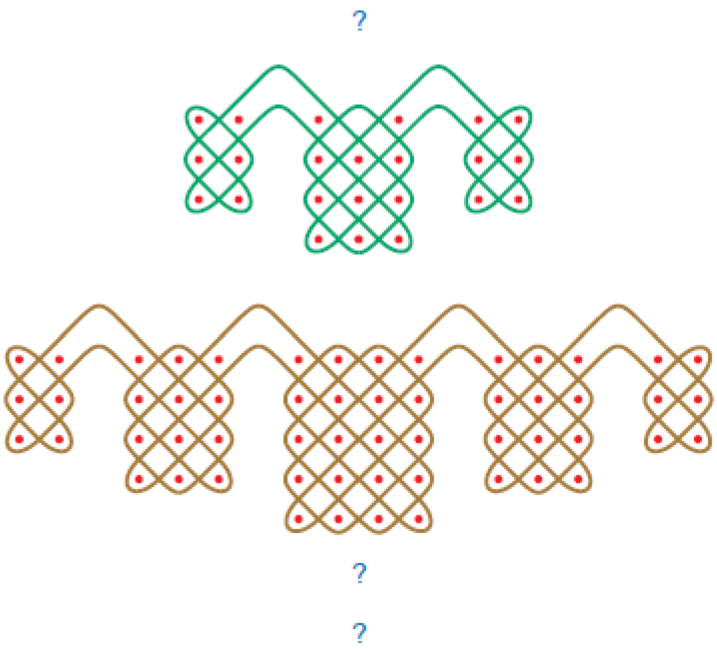
Na 5º imagem, temos uma $RG[7,7]$.

...

Dessa maneira, pode-se perceber que o número de colunas da malha se mantém constante, o número de linhas do desenho equivale numericamente a posição ocupada pelo mesmo acrescida de duas unidades. O professor poderia mesclar perguntas referentes a configuração da malha de um termo em uma posição qualquer, mesclar desenhos com configuração similar de pontos, mas algoritmos distintos, sempre buscando do aluno uma percepção aguçada.

Essa atividade pode adquirir graus de elevada complexidade, sendo necessárias percepções cada vez mais aprofundadas, tais como na imagem abaixo (figura 91):

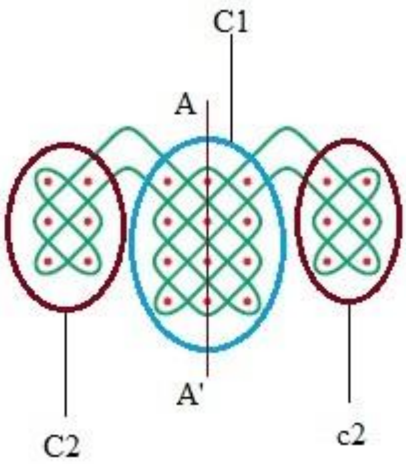
Figura 91: Exemplo de atividade recreativa.



Fonte: GERDES, 2012.

Nestes padrões o tipo de análise precisa ser mais abrangente, sendo necessária uma quantidade maior de elementos que constituem as sequências nas diferentes posições.

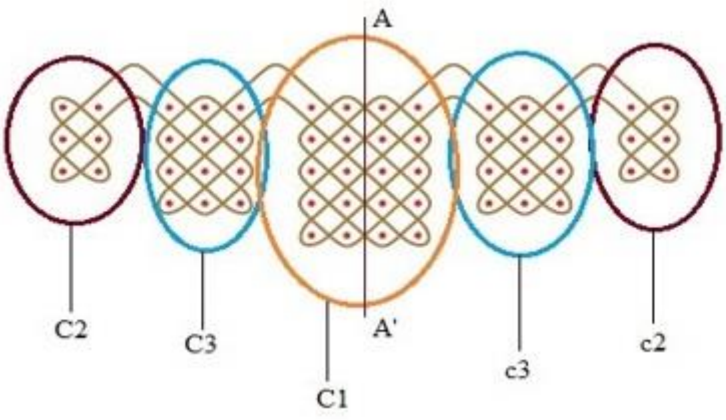
Figura 92: 1° etapa da análise.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

O aluno deve perceber que a 2º imagem (figuras 93 e 94) possui um eixo de simetria, aqui denominado AA'. O círculo azul engloba uma $RG[4,3]$de 12 pontos. Os círculos C2 e c2 englobam $RG[3,2]$ de 6 pontos cada um.

Figura 93: 2° etapa da análise.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

O aluno deve perceber que a figura 95 possui um eixo de simetria, aqui denominado AA'. O círculo azul engloba $RG[5,4]$ de 20 pontos. Os círculos C3 e c3 possuem $RG[4,3]$ de 12 pontos cada um. Os círculos C2 e c2 englobam $RG[3,2]$ de 6 pontos cada um.

Um aluno de com percepção mais aguçada poderia traçar um padrão com apenas estas duas informações. Contudo, para alunos de educação básica, a nível 9º ano, seria interessante fornecer mais imagens, para facilitar a análise. Abaixo segue a 1º imagem do padrão (figura 94 e figura 95):

Figura 94: Padrão C1.

Fonte: GERDES, 2012.

Figura 95: Padrão C1 e eixos.

Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

A 1º imagem possui o eixo de simetria AA', com o círculo C1 possuindo $RG[3,2]$ com 6 pontos. Caso algum aluno consiga determinar um padrão de formação, com apenas as 2º e 3º imagens, seria um feito considerável, demonstrando que possui um nível apurado de análise de padrões. Anexar a 1º imagem seria um facilitador.

O aluno deve perceber que:

- 1º imagem possui: C1.

- 2º imagem possui: C1, c2, C2.
- 3º imagem possui: C1, c2, C2, c3, C3.

Assim, é de se esperar que o eixo AA’ de simetria atravesse o círculo C1 nas imagens 4 e 5. Além disso, pode-se intuir que:

- 4º imagem possua: C1, c2, C2, c3, C3, c4, C4.
- 5º imagem possua: C1, c2, C2, c3, C3, c4, C4, c5, C5.

Também é possível analisar a quantidade de pontos em C1:

- 1º imagem: C1 = 2×3 pontos.
- 2º imagem: C1 = 3×4 pontos.
- 3º imagem: C1 = 4×5 pontos.

Portanto, espera-se que:

- 4º imagem: C1 = 5×6 pontos.
- 5º imagem: C1 = 6×7 pontos.

Além disso, é possível saber a quantidade de pontos da malha que constitui c4, C4 e c5, C5, mediante análise de c2, C2 e c3, C3:

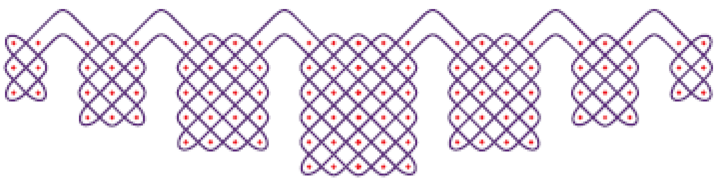
- C2 e c2 possuem cada um 3×2 pontos.
- C3 e c3 possuem cada um 4×3 pontos.

Portanto, é de se esperar que:

- C4 e c4 possuam 5×4 pontos.
- C5 e c5 possuam 6×5 pontos.

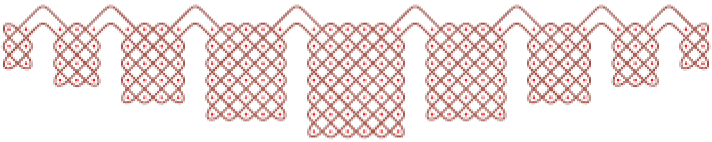
Mediante tais rigorosas análises, os padrões a serem encontrados, serão:

Figura 96: 4° termo.



Fonte: GERDES, 2012.

Figura 97: 5° termo.



Fonte: GERDES, 2012.

6 PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA SER REALIZADA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

6.1 A pedagogia da Matemática no 6º ano

O sexto ano é um ano complicado para muitos estudantes, é o momento em que o aluno deixa o Ensino Fundamental I, e passa a ter um professor distinto de cada disciplina, e precisar encarar as diferentes dinâmicas inerentes. É nesse momento em que a Matemática começa a entrar em abstrações, sendo por vezes, menos lúdica. Em termos de conteúdo, pouco se distingue do ano escolar anterior, o que contribui para um aumento do desinteresse. Ao longo do sexto ano, os estudantes são apresentados a diversos tipos de números, como frações, números naturais, decimais, de um modo mais formal que no ano anterior. O conhecimento geométrico começa a se fazer mais presente com noções de áreas, perímetro e formas geométricas, as quais o auxiliam a adquirir um pensamento geométrico, como forma de representar a realidade. Neste momento, o professor começa a utilizar instrumentos para a construção de figuras geométricas, facilitando a visualização e aplicação de propriedades de figuras. É de grande importância, que o espaço e a forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, obras, e outras áreas do conhecimento. O estudante também passa a se deparar com questões onde é necessário um procedimento de análise de gráficos, tratamento da informação.

Como professor atuante na Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, destaco o conteúdo de Espaço e Forma contido nas Orientações Curriculares fornecidas pela Secretaria Municipal de Educação, em especial a fração de conteúdo que será explorada na atividade a ser proposta neste trabalho, a ser apresentado aos alunos do 6º ano, com competências e habilidades, que podem ser adquiridas pelo mesmo diante de cada conteúdo.

Tabela 3: Orientações Curriculares para o Ensino da Matemática – 6° ano.

ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA – 6.° ANO								
	OBJETIVOS	CONTEÚDOS	HABILIDADES	BIMESTRE 1.°	2.°	3.°	4.°	SUGESTÕES
ESPAÇO E FORMA		Ângulos	Identificar os ângulos reto, agudo, obtuso.			x		• O uso de dobraduras auxilia na construção das ideias de ângulos, como a utilização de compassos para o traçado de giros completos e de transferidor para medida de ângulos.
			Medir e construir ângulos com o transferidor.			x		
	Compreender o conceito de forma de uma figura geométrica. Ampliar o raciocínio espacial, a partir do reconhecimento e da análise das propriedades geométricas e da construção de figuras geométricas.	Simetria	Compreender o conceito de eixo de simetria.		x			• Observar elementos da natureza que são simétricos, como por exemplo: certos tipos de folhas e flores, a borboleta, cujo corpo serve como eixo de simetria. • Construir figuras simétricas utilizando espelhos.
			Verificar se uma figura é simétrica em relação ao eixo de simetria.		x			
			Determinar os eixos de simetria de uma figura.		x			
			Construir a simetria de figuras geométricas por meio de reflexão.		x			
		Polígonos	Compreender o conceito de polígono.				x	• Explorar o Tangran, analisando e comparando as figuras que o compõem. Diferenciar os diferentes polígonos, contornando as figuras numa folha de papel. • Compor figuras com as peças do Tangran. • Utilizar o geoplano e/ou papel quadriculado para observar e determinar o perímetro de polígonos diversos e suas áreas. • Pesquisar elementos da natureza ou construídos, em que se encontram figuras semelhantes aos polígonos estudados.
			Classificar polígonos quanto ao número de lados, vértices e ângulos.				x	
			Reconhecer um polígono regular.				x	
			Calcular o perímetro de alguns polígonos.				x	
			Observar as formas poligonais presentes na natureza.				x	

Fonte: http://prefeitura.rio/web/rioeduca/recursos-pedagogicos

O conteúdo simetria é muito presente em matrizes africanas, o que torna interessante a abordagem desse assunto, fazendo um paralelo cultural com aquela região. É interessante também na medida em que valoriza a cultura de outro continente, de outro povo, com valores e pensamentos distintos. Trabalhar a diversidade cultural com os alunos, ajuda a evitar fenômenos como preconceitos raciais, e desmistificando conceitos de atraso cultural.

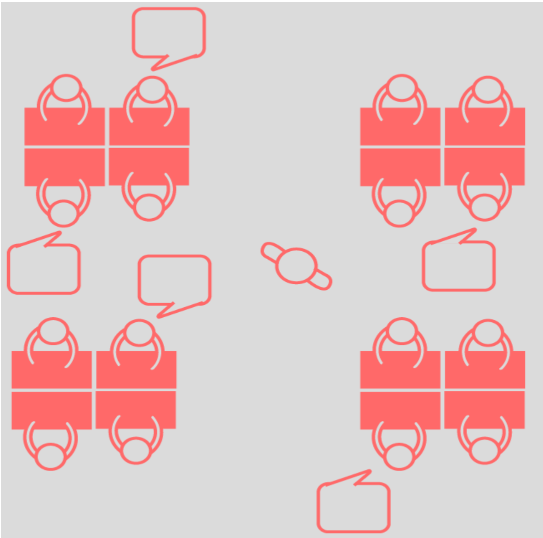
6.2 Planejamento da aula anterior à atividade

Foi planejada uma aula seguida de uma atividade para o 6º ano do Ensino Fundamental. É uma escolha interessante, pois é uma oportunidade de resgatar o lúdico muito presente, sobretudo nas séries iniciais da formação (1º ano ao 5º ano). A estruturação de uma aula que antecede a realização da atividade, é de fundamental importância, pois além de explorar a visão multicultural da matemática, valoriza outras culturas, sobretudo a africana, em geral marginalizada nos livros de educação básica. O 6º ano também é importante, no sentido de que ali se começa a estudar de modo mais específico o mundo, as diferentes fases da História, sobretudo os reinos africanos, sua queda e o tráfico de escravos. Valorizar a cultura do negro africano, é uma forma de valorizar povos marginalizados no imaginário popular, e combater o racismo, que, infelizmente, está presente ainda nos dias de hoje em toda a sociedade, inclusive no ambiente escolar. Foi pensando nessas situações cotidianas que se propôs uma atividade que envolvesse os sona. O plano de aula desta atividade encontra-se no Apêndice A.

6.3 **Detalhamento da atividade**

A atividade envolve trabalho em equipe, portanto, os estudantes devem estar agrupados (figura 98). Mesas circulares seriam excelentes para o desenvolvimento da atividade, mas caso não haja este recurso disponível, seria interessante que dispusessem suas cadeiras de modo a formarem grupos. Independente da alternativa escolhida, é importante que a disposição dos alunos, durante a realização da atividade, seja um vetor facilitador para a produção coletiva.

Figura 98: Logística para a atividade.



Fonte: http://prefeitura.rio/web/rioeduca/recursos-pedagogicos.

A atividade envolve a percepção de padrões e simetrias, os estudantes precisam de uma percepção aguçada, e, em geral, como as séries de sona para serem resolvidas precisam de várias informações, cada aluno pode ter uma função de coleta. Os grupos devem conter pelo menos 4 alunos. 2 alunos coletam informações do desenho, 1 aluno as registra, e o aluno restante confere os registros, garantindo a execução da atividade, provendo recursos faltantes a realização da atividade, tais como folhas de rascunho, canetinhas. O aluno que registra as informações não deve se ausentar, e será aquele que apresentará o trabalho desenvolvido pelo grupo. Todos os alunos, embora com atividades distintas, devem se concentrar em colaborar com a resolução dos problemas propostos, entendendo o processo de resolução. Caso o desenho seja complexo, podem ser alocados mais alunos por grupo, com o intuito da tarefa de coleta de informações ser distribuída. O professor atua como supervisor, deslocando-se pela sala em observação às atividades que estarão sendo desenvolvidas, interferindo no processo de produção coletiva de cada grupo, apenas quando solicitado. Ao fim da atividade, os grupos apresentam ao professor e para a turma as tarefas que realizaram. A folha proposta como atividade encontra-se no Apêndice B.

CONCLUSÃO

A utilização dos sona no ensino para a educação básica mostra-se como uma alternativa interessante, pois permite introduzir e explorar assuntos de maneira diferente da convencional. Aos estudar os sona, foi possível perceber que sua confecção exige regras, precisão e o cumprimento de algoritmos específicos. Através dos trabalhos de Paulus Gerdes, foi possível analisar tecnicamente o que aquele rito cultural escondia. A Geometria Sona, por assim dizer, é uma forma de valorizar as culturas de matrizes africanas, e explorá-la em sala de aula, é uma forma de valorização também da cultura de povos africanos, trazendo representatividade para o ambiente escolar. A meu ver, a abordagem dos sona é mais interessante para os estudantes, pois explora geometricamente, conceitos como sequências, que muitas vezes são explorados apenas algebricamente, tornando-os mais ricos para o aluno. Acredito que uma boa sugestão de trabalho futuro, seja investigar outros modos de aplicar os sona em sala de aula. Seria interessante e desafiador descobrir relação de quantos sona distintos podem ser feitos, para uma dada quantidade de espelhos inseridos na malha. Tentei realizar essa descoberta neste trabalho, e mesmo para malhas pequenas, como a $RG[4,4]$, foi trabalhoso descobrir quantos sona distintos podem ser confeccionados com 1, 2 e 3 espelhos. A relação de quantos sona monolineares distintos podem ser feitos, em uma malha qualquer, com um dado número de espelhos, certamente seria uma grande contribuição futura.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo.*Um estudo em etnomatemática: sua incorporação na elaboração de uma proposta pedagógica para o Núcleo-Escola da Favela de Vila Nogueira e São Quirino*; UNESP, Rio Claro, 1987.

BOYER, Carl B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.

______. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CF. BASTIN, 1961, 1982; FALGAYRETTES, 1988; FONTINHA & VIDEIRA, 1963; HAUENSTEIN, 1988; LIMA, 1956; REDINHA, 1953; FONTINHA, 1983.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*. São Paulo: Ática, 1998.

______.*Etnomatemática: Elo entre as Tradições e a Modernidade*, Autêntica, Belo Horizonte, MG, 2001.

DIOP, Cheikh. Anta. *A origem dos egípcios*. In: MOKHTAR, G. (coord.). *História Geral da África: a África antiga*. São Paulo: Ática/Unesco, 1983. v. 2, p. 39-70.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani.*Etnociência: uma metodologia de ensino, Aprender a ensinar*, Boletim de Educação Matemática, São Paulo, 1986.

FONTINHA, Mário. *Desenhos na areia dos Quiocos do Nordeste de Angola*, Instituto de Investigação Científica Tropical, Lisboa, 1983.

FRANTZ, Fanon. *Os condenados da terra*. 2.ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1979.

GARBI, Gilberto Geraldo. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: EditoraLivraria da Física, 2007.

GERDES, Paulus.*Mathematics for the benefit of the people*; CARIMATH, Paramaribo, 1982.

GERDES, Paulus.*Conditions and strategies for emancipatory mathematics education in underdeveloped countries, For the Learning of Mathematics,* Montreal, 1985.

______. *A widespread decorative motif and the Pythagorean Theorem, For the Learning of Mathematics*, Montreal, 1988.

______. *EthnomathematischeStudien*; ISP, Maputo, 1989.

______.*Desenhos da África*, Editora Scipione, São Paulo, 1990. 64 p.

______.*Lusona: recreações geométricas de África*, Instituto Superior Pedagógico, Maputo, 1991. 117 p.

______. *Lunda geometry: Designs, Knots Polyominoes, Patterns, Symmetries,* Lulu Enterprises, Morrisville NC 27560 USA,2007.196 pp.

______.*Etnomatemática – Cultura, Matemática, Educação: Colectânea de Textos 1979-1991*,Projeto de Investigação Etnomatemática, Instituto Superior Pedagógico / Universidade Pedagógica, Maputo, Moçambique, 1991.

FORDE, Gustavo Henrique Araújo.*A presença africana no ensino de matemática: análise dialogadas entre história, etnocentrismo e educação*, UFES, Espírito Santo, 2008.

HALL, Stuart. *Da diáspora: identidades e mediações culturais*. Belo Horizonte: EditoraUFMG, 2006.

HOWSON, A.; NEBRES, B.; Wilson, B.*School mathematics in the 1990s*, ICMI, Southampton, 1985.

KUBIK,Gerhard. *African space/time concepts and the lusona ideographs in Luchazi culture with a discussion of possible crossparallels in music, African Music*.Grahamstown, 1987.

MUNANGA, Kabenguele. *Uma abordagem conceitual das noções de raça, racismo, identidade e etnia*. Disponível em: <http://www.acaoeducativa.org.br/downloads/09abordagem.pdf.>. Acesso em: 15 jan. 2019.

OLIVEIRA, Eduardo David de. *Cosmovisão africana no Brasil: elementos para uma filosofia afrodescendente*. Fortaleza: LCR, 2003

PRAXEDES, Walter L. A. *Eurocentrismo e racismo nos clássicos da filosofia e das ciências sociais. Revista Eletrônica Espaço Acadêmico*, v. 7, p. 1-6, 2008.

Parâmetros Curriculares Nacionais <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>, Acesso em: 08/08/19.

SANTOS, Eduardo dos.*Contribuição para o estudo das pictografias e ideogramas dos Quiocos, Estudos sobre a etnologia do ultramar português,* Lisboa, 1961. Vol. 2, 17-131.

SILVA, Ana Célia da. *A ideologia do branqueamento no Brasil*. Revista Gbàlà, Aracaju-SE, n. 2, p. 7-12, 1996.

SOUSA, Neusa Santos. *Tornar-se negro: as vicissitudes da identidade do negro brasileiro em ascensão social*. Rio de Janeiro: Edições Graal, 1983.

SOUZA, Edileuza Penha de. *TAMBORIZAR: história e afirmação da auto-estima das crianças e adolescentes negros e negras através dos tambores de congo*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Contemporaneidade, Universidade Federal da Bahia – UNEB, Bahia, 2005

SOUZA, Antonio Carlos Carrera. *O reencantamento da razão: ou pelos caminhos da teoria histórico-cultural*. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em Educação Matemática: concepção e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 137-149.

STRUIK, Dirk. J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa, PT: Gradiva, 1997.

APÊNDICE A - Plano de aula de atividade

Segue abaixo o plano de aula, sugerido como roteiro para a realização da atividade proposta pelo autor. Esse plano de aula é um norteador, mas não necessariamente a atividade proposta do APÊNDICE B deve seguir tal esquematização, ficando a critério do professor regente o uso ou não do mesmo.

Tabela 4: Plano de aula proposto.

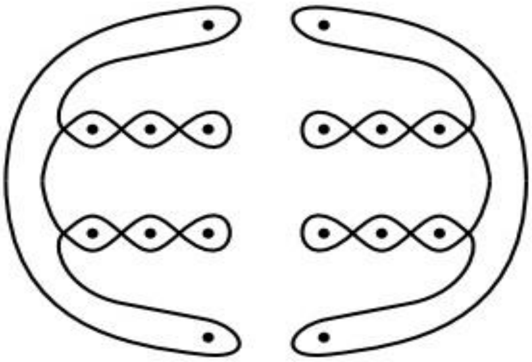
Conteúdo	Habilidades e Competências	Desenvolvimento	Materiais	Avaliação	Tempo
Simetrias Raciocínio lógico básico.	Compreender o conceito de eixo de simetria. Verificar se uma figura é simétrica em relação ao eixo de simetria. Determinar os eixos de simetria de uma figura. Reconhecer padrões de formação em sequências. Identificar os elementos variantes de uma sequência. Determinar, mediante pelo menos três informações de uma sequência, um termo qualquer, para uma dada posição pedida.	Durante metade do 1º tempo, os primeiros 30 minutos, o professor cita a África, e a importância de vasculhar e redescobrir o continente. O professor mostra um mapa geográfico, comparando o continente com o tamanho da América do Sul. O professor pode citar a escravidão, como um fato histórico, mas não resumir a visão do continente a este assunto. O professor localiza no mapa a região ocupada pelos tchokwe, e explica a sua cultura de realizar desenhos em areia. Neste momento a abordagem cultural é feita. Mostra-se alguns desenhos, bem como as suas histórias de origem. O professor divide a turma em grupos, fornecendo as orientações a respeito da atividade a ser realizada. A atividade deve contar com uma duração de 60 minutos. O professor discute nos 45 minutos finais com os grupos de alunos a respeito das estratégias desenvolvidas por cada grupo, para o cumprimento da atividade proposta.	Slides com os desenhos a serem mostrados, com curiosidades a respeito da cultura tchokwe, ou, na folha com ilustrações. Folha de atividades. Canetinhas coloridas, lápis de cor, folhas de rascunho. Régua.	Atividade em grupo com folha escrita.	2h 15 min

Fonte: O autor, 2019.

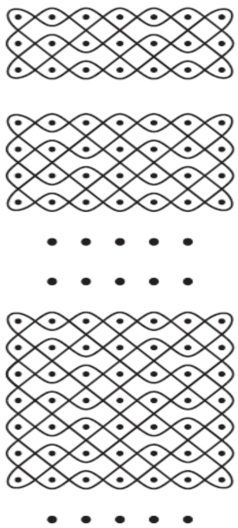
APÊNDICE B – Atividade proposta

Segue abaixo as perguntas propostas para a atividade:

1) Havia Matemática na África?
2) O que eram os sona?
3) Trace o(s) eixo(s) de simetria do lusona abaixo, se houver(em):



4) Encontre a quantidade de linhas e colunas do oitavo termo da sequência.

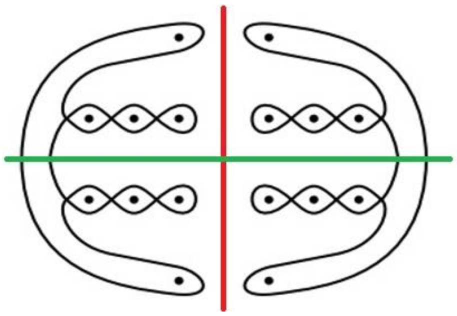


Gabarito:

1) Sim, havia, e a prática dos sona é um de seus múltiplos exemplos.

2) Eram desenhos feitos na areia, pelo povo tchokwe habitante da fronteira entre Angola e Congo. Tais desenhos eram fontes de ensinamento e formação, e eram executados pelos membros mais antigos do grupo.

3)



4) 8 linhas e 7 colunas.

APÊNDICE C - Produto contendo sugestões de atividades com sona

INTRODUÇÃO

As atividades apresentadas a seguir, foram elaboradas com base nas possibilidades de aplicabilidade dos sona em assuntos referentes ao conteúdo de Matemática. Ainda que as atividades sejam voltadas para o nível de educação básica, acredita-se que o produto aqui apresentado, seja um vetor para inovação no ensino da disciplina. Apresentar de um modo diferente do convencional, enriquece o conteúdo, e abre novas possibilidades de discussão dentro do ambiente escolar. Tais atividades são exemplos de como podem ser frutíferas abordagens alternativas a tradicional. Mediante novas abordagens, surgem novos questionamentos, diante dos quais abrem-se portas para rediscutir a forma de ensinar Matemática, ressignificando conteúdos para os estudantes.

1) **SEQUÊNCIAS**

As atividades abaixo foram pensadas para alunos do 9° ano, como forma introdutória para o estudo de progressões a ser estudado no Ensino Médio. Cada desenho tchokwe está construídos sobre pontos de uma rede de referência. Esta situação pode ser utilizada durante a aula para descobrir diversas relações aritméticas. As atividades abaixo buscam aprimorar as técnicas de contagem dos alunos. Tais atividades seriam interessantes de serem realizadas em sala pelos alunos, com o auxílio do professor. Os alunos para desenvolver estas atividades devem estar preferencialmente em grupos. O que se busca é aguçar a percepção dos educandos a respeito de padrões, para que sejam capazes de prever resultados futuros. A formalização do conteúdo Sequências virá apenas no Ensino Médio, conforme já foi dito. Ao fim de cada atividade, seria interessante que o professor resolvesse cada questão com os alunos em sala de aula, demonstrando a habilidade, e o procedimento matemático adequado, que esperava desenvolver em seus educandos.

Atividade 1: *Mostrar através da contagem de pontos constituintes da malha de um sona, que o quadrado de um número natural n qualquer, pode ser encontrado mediante a soma dos n primeiros números ímpares.*

Habilidades e Competências relacionadas com a atividade proposta:

- M2 - Ampliar formas de raciocínio e processos mentais por meio de indução, dedução, analogia e estimativa, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.

- H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

- 2 tempos de aula é um tempo recomendável para a realização.
- O público alvo deve ser preferencialmente do 9° ano.
- Atividade em grupo, com, no máximo, 4 alunos por grupo.
- Cada grupo de alunos deverá receber em torno de 6 folhas em branco para rascunhos.

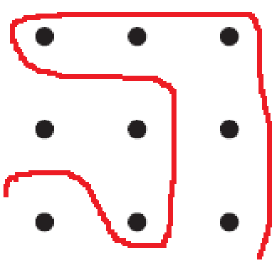
Roteiro da atividade:

- O professor explica a origem cultural dos sona, localizando geograficamente onde a atividade era praticada no continente africano.
- O professor mostra alguns desenhos, e ilustra em cada um deles a malha sob a qual cada um é confeccionado.
- Uma vez nomeadas as malhas, o professor realiza a contagem de pontos das$RG[3,3]$ e $RG[4,4]$. Em seguida, pede aos estudantes para repetirem o processo em$RG[5,5]$.
- Por fim o professor pergunta se os alunos perceberam algum padrão de constituição para as respostas, e pergunta aleatoriamente malhas diversas, mas sempre malhas quadradas, com mesmo número de linhas e colunas.
- Ao fim, o professor demonstra a solução da atividade proposta, obtendo uma expressão matemática para a contagem de pontos em $RG[n, n]$.

Solução para a atividade:

O professor pergunta aos grupos o total de pontos da $RG[3,3]$.

$RG[3,3]$.



Fonte: GERDES, 2013.

Os alunos podem encontrar facilmente o total de pontos, que é 9, correspondente a 3^2, porém recomenda-se que o professor faça o raciocínio menos trivial. Recomenda-se que o professor realize a contagem na $RG[3,3]$, seguindo a linha vermelha $3^2 = 1 + 3 + 5$Posteriormente, o professor poderia sinalizar que os alunos realizassem o mesmo cálculo, mas desta vez para a $RG[4,4]$.

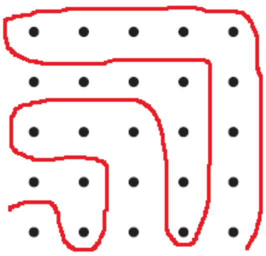
$RG[4,4]$.

Fonte: GERDES, 2013.

Na $RG[4,4]$, espera-se que os alunos consigam de imediato calcular o total de pontos, que é 16, correspondente a 4^2. Novamente o professor deve demonstrar a maneira não trivial de chegar ao mesmo resultado, que é seguindo a linha vermelha, analogamente ao caso anterior:

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$RG[5,5]$.



Fonte: GERDES, 2013.

Na $RG[5,5]$, o procedimento se repete: os alunos calculam, o professor ao fim realiza o procedimento não trivial da linha vermelha. Por analogia, vem que:

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Deste modo, espera-se que o estudante deve ser questionado pelo professor a respeito de um padrão de formação, e, por extrapolação, o estudante percebe que em uma malha com n linhas e n colunas, o total de pontos é n^2. O professor então pode solicitar que os alunos reexaminem as três malhas anteriores.

Nas $RG[3,3], RG[4,4]$ e $RG[5,5]$, ao realizar a contagem de pontos pelo método da linha vermelha, percebemos que cada total de pontos é decomposto em uma soma de números ímpares consecutivos. A questão a ser elucidada pelo professor é qual o último termo que irá compor essa soma de números ímpares. Em 3^2, o último termo é 5, em 4^2 é 7, e em 5^2 é 9. Notemos a relação na tabela:

Relações obtidas entre os termos da atividade 1 de Sequências.

Malha	Total de pontos	Última parcela
$RG[3,3]$	$1+3+5$(3 primeiros números ímpares)	$5 = 2 \times 3 - 1$
$RG[4,4]$	$1+3+5+7$(4 primeiros números ímpares)	$7 = 2 \times 4 - 1$
$RG[5,5]$	$1+3+5+7+9$(5 primeiros números ímpares)	$9 = 2 \times 5 - 1$

Fonte: O autor, 2019.

Assim, o professor deve elucidar aos alunos, caso estes não percebam, que o último termo da soma de números ímpares, é o antecessor do dobro do número de linhas da malha. Assim, o último termo da soma de números ímpares, que dá o total de pontos n^2da$RG[n,n]$, é (2n-1). Portanto é válida a relação abaixo:

$$n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

Ou seja, a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2, como queríamos mostrar.
O resultado é útil para um caso particular do somatório de termos de uma Progressão aritmética de razão 2, cujo primeiro termo é 1.

Atividade 2:*Mostrar através da malha de um sona, que a soma dos n primeiros números naturais é igual a metade do produto de n pelo seu consecutivo.*

Habilidades e Competências relacionadas com a atividade proposta:

- M2 - Ampliar formas de raciocínio e processos mentais por meio de indução, dedução, analogia e estimativa, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.
- H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

- 2 tempos de aula é o tempo recomendável para a realização.
- O público alvo deve ser preferencialmente do 9° ano.
- Atividade em grupo, com, no máximo, 4 alunos por grupo.
- Ter realizado anteriormente a atividade 1.
- Cada grupo de alunos deverá receber em torno de 6 folhas em branco para rascunhos.

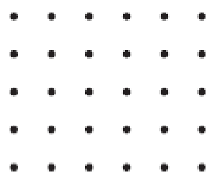
Roteiro da atividade:

- O professor relembra a atividade 1, mostrando alguns tipos de sona, mas desta vez com malhas que não são necessariamente quadradas. Em cada situação, o professor ilustra a malha sob a qual cada pictograma é confeccionado.
- Uma vez nomeadas as malhas, o professor realiza a contagem de pontos das $RG[6,5]$ e $RG[8,7]$. Em seguida, pede aos estudantes para repetirem o processo na $RG[12,11]$. É importante que o professor utilize para esta atividade, malhas onde o número de colunas seja o consecutivo do número de linhas.
- Por fim o professor pergunta se os alunos perceberam algum padrão de constituição para as respostas, e pergunta aleatoriamente malhas diversas, mas sempre malhas quadradas, com mesmo número de linhas e colunas.
- Ao fim, o professor demonstra a solução da atividade proposta, obtendo uma expressão matemática para a contagem de pontos em uma malha $(N+1) \times N$.

Solução para a atividade 2:

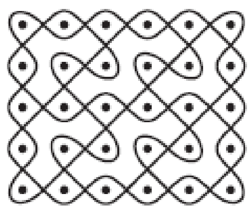
O professor pergunta aos grupos o total de pontos contidos na malha 5x6.

$RG[6,5]$.



Fonte :GERDES, 2013.

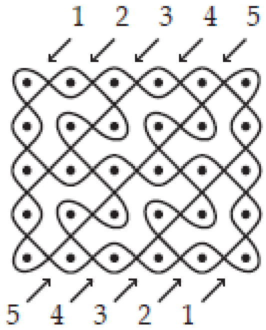
Trajetória.



Fonte: GERDES, 2013.

Em seguida, mostra que é possível chegar a esse mesmo resultado, através de um método de contagem realizado diagonalmente.

Relação de soma da progressão.



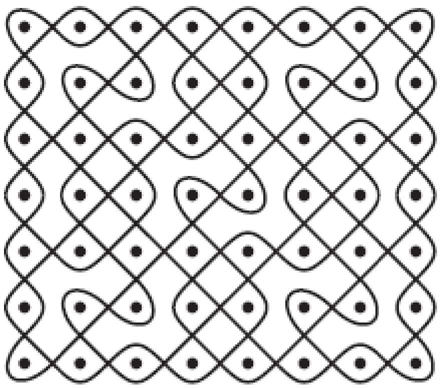
Fonte: GERDES, 2013.

Relação de soma da progressão:

$$5 \times 6 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

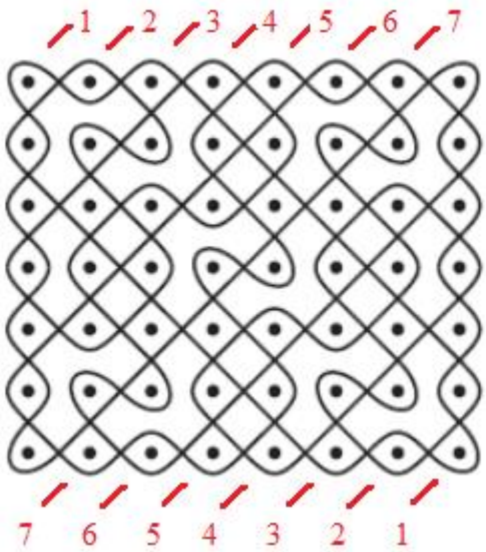
O professor questiona os estudantes a respeito do total de pontos contidos em $RG[8,7]$. Posteriormente, aplica o método de contagem utilizado na $RG[6,5]$.

Desenho feito em$RG[8,7]$.



Fonte: GERDES, 2013.

Somatório$RG[8,7]$.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Método de contagem de pontos a ser adotado:

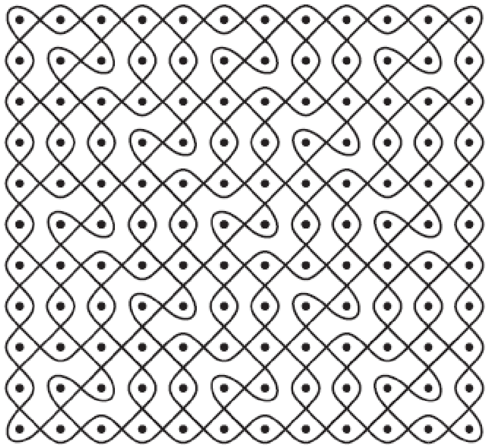
$$7 \times 8 = (1+2+3+4+5+6+7) + (7+6+5+4+3+2+1)$$

Logo:

$$7 \times 8 = 2(1+2+3+4+5+6+7)$$

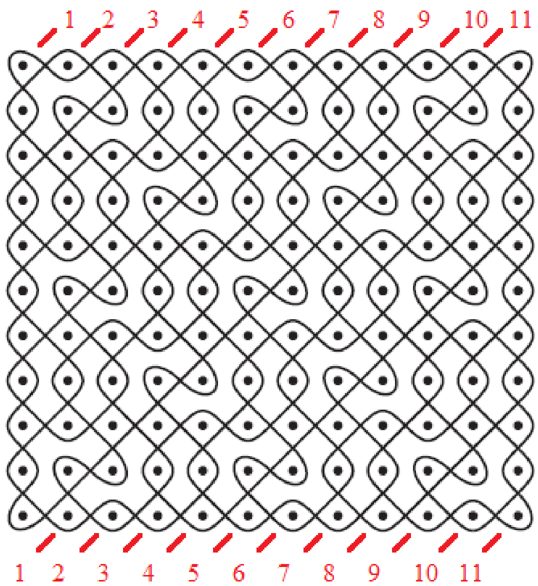
O professor solicita aos grupos que realizem o cálculo do total de pontos em $RG[12,11]$, seguindo os passos anteriormente realizados.

$RG[12,11]$.



Fonte: GERDES, 2013.

Somatório$RG[12,11]$.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

$$11 \times 12 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11) + (11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$$

Logo:

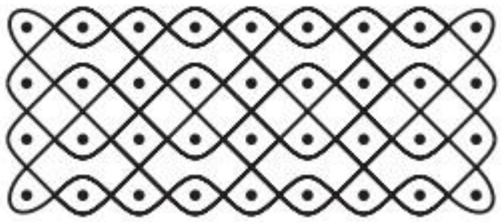
$$11 \times 12 = 2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)$$

Posteriormente, o professor pergunta aos alunos o total de pontos em outras malhas, tentando identificar se perceberam algum padrão. Ao fim da atividade, o professor demonstra o procedimento matemático para a obtenção da expressão que fornece a quantidade de pontos para um caso geral.

$$n(n+1) = 2(1+2+3+\cdots+n)$$

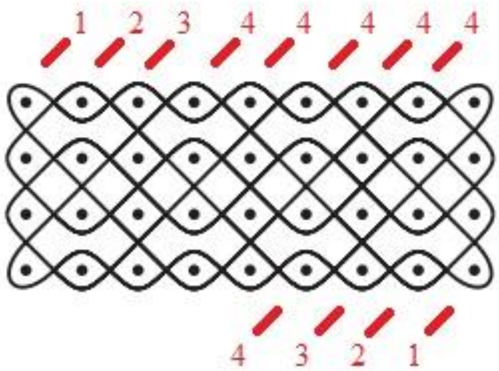
Aqui, porém é preciso tomar cautela. Todas as malhas apresentaram uma relação em que os números de linhas e colunas são consecutivos. É mediante a restrição desta relação entre linhas e colunas, que é possível somar diagonalmente, e demonstrar de forma lúdica, a nível de educação básica, a relação de soma pretendida. Abaixo segue um exemplo de uma malha com números de linhas e colunas não consecutivos. Este desenho é importante para mostrar que a importância de se obedecer a restrição imposta, para a realização da atividade.

$RG[9,4]$.



Fonte: GERDES, 2013.

Procedimento de contagem.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2013.

Procedimento de contagem:

$$4 \times 9 = (1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + (4 + 3 + 2 + 1)$$

Logo:

$$4 \times 9 = 2(1 + 2 + 3 + 4) + (4 + 4 + 4 + 4)$$

Pode-se observar que, conforme já dito, que a relação obtida quando os números de linhas e colunas são consecutivos, não vale neste caso.

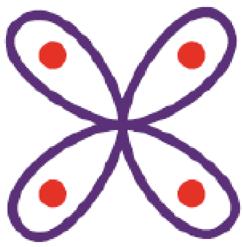
1) SIMETRIAS

É muito importante explorar nos estudantes as noções de simetrias. Em geral, a percepção de simetria é mais utilizada em desenhos, o que remete ao estudo da Geometria. A simetria está como recomendação dos PCN's para estudantes do 6º ano em diante. Como educador, creio que o assunto deva ser explorado em nível crescente de complexidade, à medida que o educando avança nos níveis de escolaridade, e vá consequentemente adquirindo maior maturidade na matemática. O assunto simetria é recorrente em questões do ENEM, comprovando que é importante que o aspirante a universitário, de qualquer área do conhecimento, saiba reconhecer padrões de simetria na natureza. Muitos sona possuem eixo(s) de simetria, portanto é muito útil explorá-los com este fim de aprendizagem no ambiente escolar. É fundamental que um estudante consiga perceber se há simetria, e, caso haja, seus padrões e os respectivos eixos de simetria. O que se busca, é fazer com o estudante de 6° ano contatos iniciais com imagens na matemática, e a imersão dos mesmos nas respectivas imagens, não apenas contemplando-as. Aqui o estudante deverá fazer registros, traçar possíveis eixos de simetria, e verificar se neles é possível haver algum tipo de espelhamento. Essas necessidades de manipulação, de realizar registros, e inspeção de pictograma, serão muito úteis para o estudante ao longo de toda a sua vida, mas principalmente no 6º ano, pois lhe auxiliará a desenvolver habilidades de análise de figuras com padrões geométricos, que lhe serão muito úteis quando iniciar seus estudos em geometria. A solução para cada atividade, bem como os respectivos eixos de simetria, encontra-se abaixo:

Atividade 1: *Identificar em cada pictograma os eixos de simetria, se houverem*:

Lusona a).

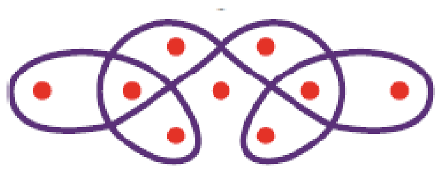
a)



Fonte: GERDES, 2012.

Lusona b).

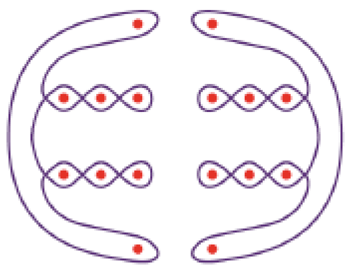
b)



Fonte: GERDES, 2012.

Lusona c).

c)



Fonte: GERDES, 2012.

Habilidades e Competências relacionadas com a atividade:

- H20 - Identificar simetria axial e de rotação na leitura das representações dos objetos no dia a dia e das figuras geométricas.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

- Estar cursando o 6º ano, ou tê-lo cursado.
- 1 tempo de aula.

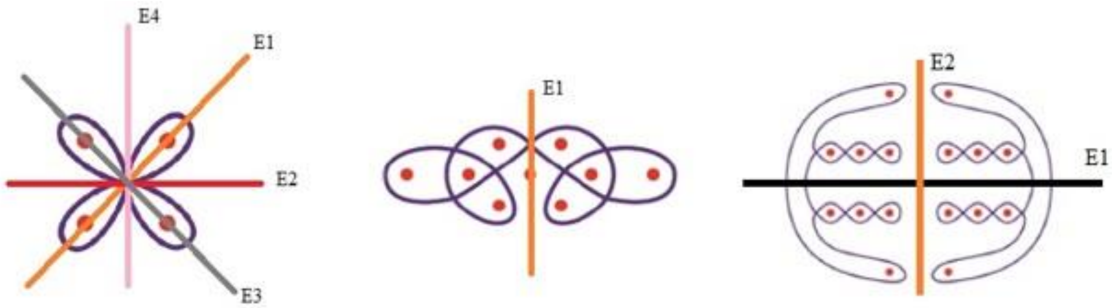
Roteiro da atividade:

- Definir o que é simetria e ilustrar situações em que ela acontece na natureza.
- Abordar o que são os sona..
- Mostrar exemplos de sona que possuam simetria.
- Dividir a turma em pares.
- Orientar os estudantes a acharem os eixos de simetria.
- Solucionar ao fim da atividade os exercícios propostos.

Solução da atividade:

A solução da atividade consta na figura abaixo.

Solução da atividade 1 de simetrias.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

2) **RECREAÇÕES NO ESTILO "ENCONTRE O PADRÃO QUE FALTA"**

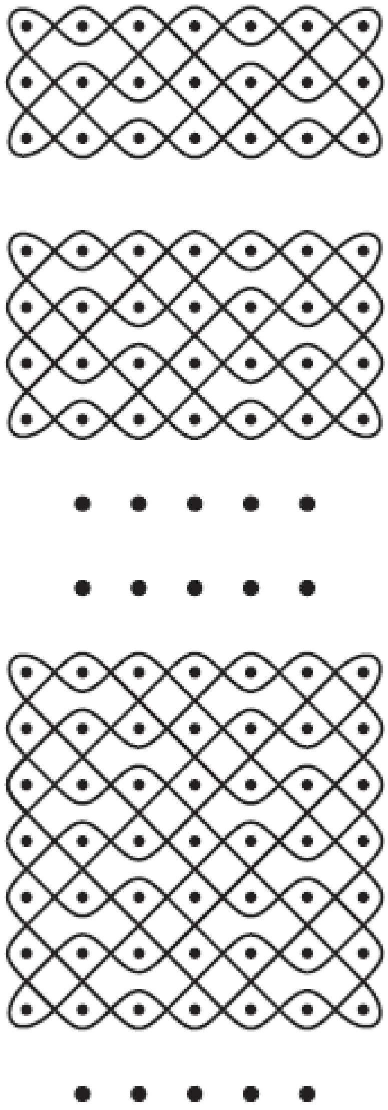
A maneira de explorar sequências é interessante, pois em geral o estudante de nível básico se acostuma a explorar sequências numéricas. Explorar séries de forma geométrica é inovador e mais robusto. Normalmente, o assunto é abordado de forma numérica, abstrata, o uso dos sona permite uma abordagem lúdica e geométrica. A atividade 1 sugerida abaixo é recomendada para alunos do 9° ano em diante, pois envolve análises conforme as questões de simetria, além de sequências, progressões, ou seja, envolvem um escopo matemático abrangente em nível de educação básica, ainda que de forma lúdica, essencial para a formação escolar do educando.

Recomenda-se que o estudante de Ensino Médio tenha essa abordagem junto ao assunto Sequências, pois tornará mais enriquecedora esse tipo de abordagem.

Foram escolhidas quatro atividades, em nível crescente de dificuldade e complexidade. Em todas elas, busca-se aprimorar a capacidade de análise do educando mediante pictogramas diversos.

Atividade 1: *Observe a sequência. Sabendo que ela é regida por um padrão de formação, atrelado a posição ocupada, identifique a regra de formação, e encontre o número de linhas e colunas dos termos que ocupam a 3°,4° e 5° posições.*

Sequência de sona atividade 1.



Fonte: GERDES, 2013.

Habilidades e Competências relacionadas com a atividade:

- M2 - Ampliar formas de raciocínio e processos mentais por meio de indução, dedução, analogia e estimativa, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.
- H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

- Público alvo: grupo de estudantes que cursem o 9º ano, ou anos correntes do Ensino Médio.
- Ter conhecimento prévio do que é uma sequência.
- 1 tempo de aula.

Roteiro da atividade:

- A turma deverá ser dividida em grupos de 3.
- O professor orienta os grupos a fazerem os registros de cada imagem apresentada na atividade 1, tais como total de pontos, total de linhas, total de colunas. Deste modo, pede-se aos alunos para verificarem se existem padrões.
- O professor questiona os estudantes a respeito do total de pontos nas linhas e nas colunas de uma imagem que ocupe uma posição qualquer.
- A atividade é solucionada em conjunto com a turma, as soluções encontradas por cada grupo são expostas para os demais.

Solução para a atividade:

Diferente da maneira algébrica, como são desenhos, várias são as informações que o observador deve coletar para definir características para os termos pertencentes a série apresentada. O aluno precisa ter a percepção da configuração do desenho, se obedece ao mesmo algoritmo, variação da quantidade de pontos nas linhas e colunas da malha, conforme será analisado abaixo:

Na 1º imagem, temos $RG[7,3]$.

Na 2º imagem, temos $RG[7,4]$.

...

...

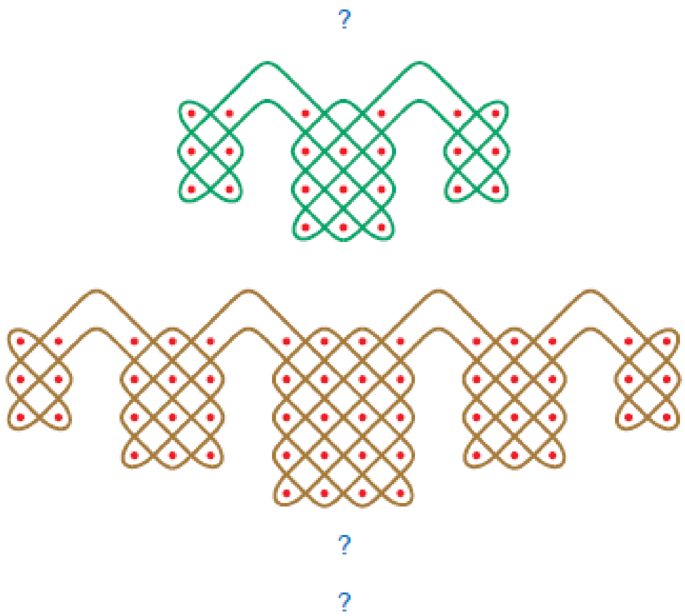
Na 5º imagem, temos $RG[7,7]$.

...

Dessa maneira, pode-se perceber que o número de colunas da malha se mantém constante, o número de linhas do desenho equivale numericamente a posição ocupada pelo mesmo acrescida de duas unidades.

Atividade 2: *Observe a sequência. Sabendo que ela é regida por um padrão de formação, atrelado a posição ocupada, identifique a regra de formação, e encontre o número de linhas e colunas dos termos que ocupam a 1°,4° e 5° posições.*

Sequência de sona atividade 2.



Fonte: GERDES, 2012.

Habilidades e Competências relacionadas com a atividade:

- M2 - Ampliar formas de raciocínio e processos mentais por meio de indução, dedução, analogia e estimativa, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.
- H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

- Público alvo: grupo de estudantes que cursem o 2º ano ou 3° ano do Ensino Médio.

- Ter conhecimento prévio do que é uma Sequência.
- 2 tempos de aula.

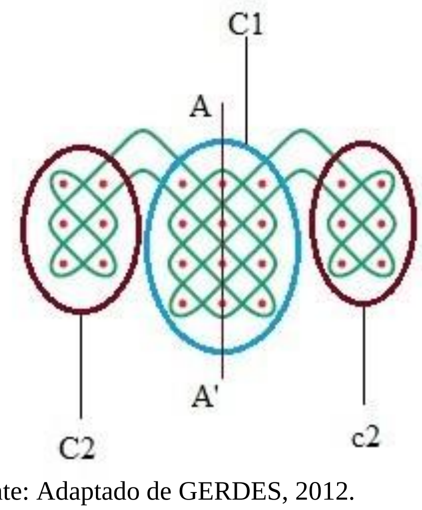
Roteiro da atividade:

- A turma deverá ser dividida em grupos de 3.
- O professor orienta os grupos a fazerem os registros de cada imagem apresentada na atividade 2. Essa é a primeira dificuldade, pois, diferente da atividade anterior, os grupos precisarão decidir quais registros devem ser feitos, e, dentre eles, quais os relevantes para a solução da atividade.
- A atividade é solucionada em conjunto com a turma, as soluções encontradas por cada grupo são expostas para os demais.

Solução para a atividade:

Nestes padrões o tipo de análise precisa ser mais abrangente, sendo necessária uma quantidade maior de elementos que constituem as sequências nas diferentes posições. Inicia-se a análise como consta na figura abaixo:

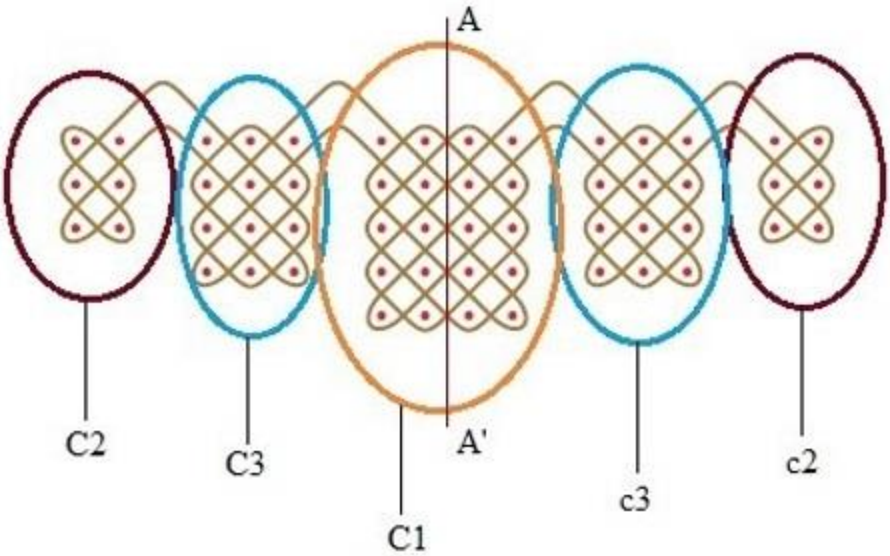
1° etapa da análise.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

O aluno deve perceber que a 2º imagem possui um eixo de simetria, aqui denominado AA'. O círculo azul engloba$RG[4,3]$ de 12 pontos. Os círculos C2 e c2 englobam malhas de$RG[3,2]$de 6 pontos cada um. A figura abaixo ilustra a análise da 3° imagem.

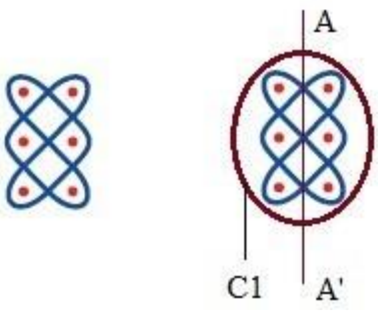
2° etapa da análise.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

O aluno deve perceber que a 3º imagem possui um eixo de simetria, aqui denominado AA'. O círculo azul engloba uma malha de$RG[5,4]$ de20 pontos. Os círculos C3 e c3 possuem$RG[4,3]$ de 12 pontos cada um. Os círculos C2 e c2 englobam $RG[3,2]$ de 6 pontos cada um.
Um aluno de com percepção mais aguçada poderia traçar um padrão com apenas estas duas informações. Abaixo, segue a 1º imagem do padrão:

2° etapa da análise.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

A 1º imagem possui o eixo de simetria AA', com o círculo C1 possuindo $RG[3,2]$ de 6 pontos. Caso algum aluno consiga determinar um padrão de formação, com apenas as 2º e 3º imagens, seria um feito considerável, demonstrando que possui um nível apurado de análise de padrões. Anexar a 1º imagem seria um facilitador.
O aluno deve perceber que:

- 1º imagem possui: C1.
- 2º imagem possui: C1, c2, C2.
- 3º imagem possui: C1, c2, C2, c3, C3.

Assim, é de se esperar que o eixo AA’ de simetria atravesse o círculo C1 nas imagens 4 e 5. Além disso, pode-se intuir que:

- 4º imagem possua: C1, c2, C2, c3, C3, c4, C4.
- 5º imagem possua: C1, c2, C2, c3, C3, c4, C4, c5, C5.

Também é possível analisar a quantidade de pontos em C1:

- 1º imagem: C1 = 2×3 pontos.
- 2º imagem: C1 = 3×4 pontos.
- 3º imagem: C1 = 4×5 pontos.

Portanto, espera-se que:

- 4º imagem: C1 = 5×6 pontos.
- 5º imagem: C1 = 6×7 pontos.

Além disso, é possível saber a quantidade de pontos da malha que constitui c4, C4 e c5, C5, mediante análise de c2, C2 e c3, C3:

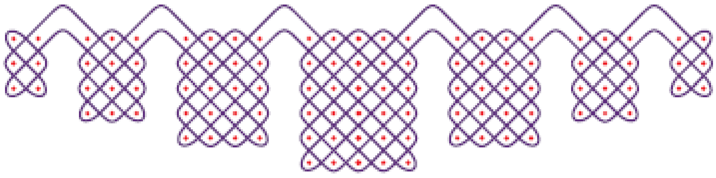
- C2 e c2 possuem cada um 3×2 pontos.
- C3 e c3 possuem cada um 4×3 pontos.

Portanto, é de se esperar que:

- C4 e c4 possuam 5×4 pontos.
- C5 e c5 possuam 6×5 pontos.

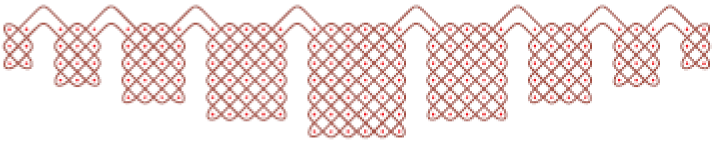
Mediante tais rigorosas análises, os padrões a serem encontrados, serão:

4° termo.



Fonte: GERDES, 2012.

5° termo

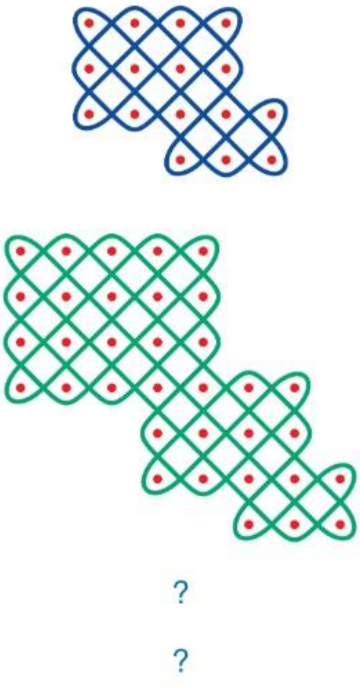


Fonte: GERDES, 2012.

Tendo em vista que o traçado do sona é extremamente complexo, acredito que essa atividade poderia ser de múltipla escolha. O estudante deve limitar-se a analisar, não precisando realizar o traçado e construção dos padrões, pois é uma atividade referente a sequências. Desenhar os sona, portanto, foge do escopo desta atividade. Dentro destas atividades, ainda é possível elevar o grau de dificuldade, mediante a redução das informações dadas ao estudante. Desta forma, torna-se mais difícil a percepção do padrão a ser obedecido pelos termos da série. Com a elevação da dificuldade da percepção da lei de formação de cada termo, para uma dada posição, pode-se exigir um olhar ainda mais analítico por parte do educando.

Atividade 3: *Descreva a formação de cada termo da série abaixo, mediante a posição na respectiva sequência.*

Sequência da atividade 3.



Fonte: GERDES, 2012.

Habilidades e Competências relacionadas com a atividade:

- M2 - Ampliar formas de raciocínio e processos mentais por meio de indução, dedução, analogia e estimativa, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.
- H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

- Público alvo: grupo de estudantes que cursem o 3° ano do Ensino Médio.
- Ter conhecimento prévio do que é uma Sequência.
- 2 tempos de aula.

Roteiro da atividade:

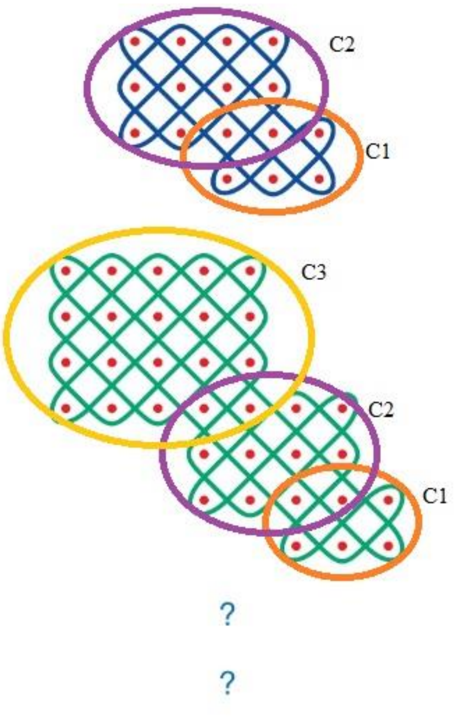
- A turma deverá ser dividida em grupos de 3.

- O professor orienta os grupos a fazerem os registros de cada imagem apresentada na atividade 3. Essa é a primeira dificuldade, pois, diferente da atividade anterior, os grupos precisarão decidir quais registros devem ser feitos, e, dentre eles, quais os relevantes para a solução da atividade. Neste caso em especial, são fornecidas apenas 2 informações, o que eleva o nível de dificuldade da atividade.
- A atividade é solucionada em conjunto com a turma, as soluções encontradas por cada grupo são expostas para os demais.

Solução para a atividade:

A análise se inicia no pictograma em azul, doravante chamado 1º termo, o termo em verde é o sucessor, doravante 2° termo. O objetivo é que o estudante descreva como se forma o n-ésimo termo. A análisepode ser iniciada com a percepção de que as figuras apresentadas são junções de malhas. Podemos decompor o primeiro termo da sequência em 2 malhas, C1 e C2. Podemos decompor o segundo termo da sequência em 3 malhas, C1, C2 e C3. O primeiro passo para que o estudante solucione a atividade proposta, é que tenha essa percepção inicial.

Análise dos termos apresentados.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

No 1° termo, temos que:

- Malha C1 – 2×3
- Malha C2 – 3×4

No 2° termo, temos que:

- Malha C1 – 2×3
- Malha C2 – 3×4
- Malha C3 – 4×5

Deste modo, podemos analisar que, mantendo o padrão de formação da série, o 3° termo seria composto por 4 malhas, e o 4º termo por 5 malhas. Deste modo, o n-ésimo termo seria composto por (n+1) malhas.

Caso desejemos saber o total de pontos, necessários para confeccionar o termo que ocupa a n-ésima posição, esse total seria mais complexo, e um exercício de elevado grau de dificuldade para um estudante. Ainda assim, esse desafio poderia ser interessante em tarefas de grupo. Observemos o total de pontos do 1° termo, e o total de pontos do 2° termo:

- 1° termo: $2 \times 3 \ + \ 3 \times 4 - \ 2 \times 1$
- 2° termo: $2 \times 3 \ + \ 3 \times 4 \ + \ 4 \times 5 - \ 2 \times 2$

Mediante esta formação, poderíamos inferir que o total de pontos do 3° e 4° termos seriam:

- 3° termo: $2 \times 3 \ + \ 3 \times 4 \ + \ 4 \times 5 \ + \ 5 \times 6 - \ 2 \times 3$
- 4° termo: $2 \times 3 \ + \ 3 \times 4 \ + \ 4 \times 5 \ + \ 5 \times 6 \ + \ 6 \times 7 - \ 2 \times 4$

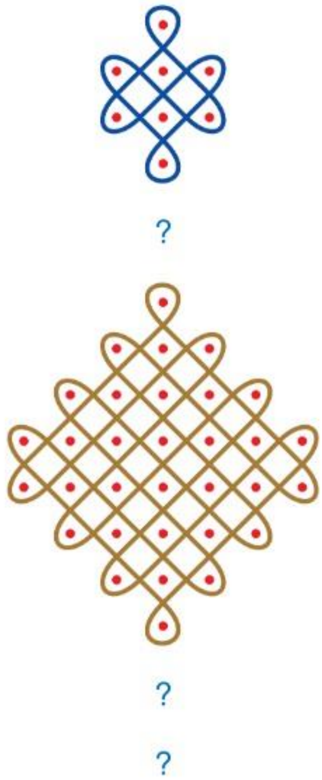
Deste modo, o total de pontos para compor a imagem que ocupa a n-ésima posição será de:

$$\boldsymbol{n - \acute{e}simo\ termo = \ 2 \times 3 \ + \ 3 \times 4 \ + \ 4 \times 5 \ + \ \ldots + \ (2n-2).(2n-1) - \ 2.n}$$

Acredito que o estudante de educação básica, ou o grupo de estudantes, que conseguirem encontrar essa expressão matemática, obtida a partir das imagens componentes desta série, demonstrem grau de análise satisfatório para o assunto sequências. Por fim, uma última atividade, com menos informações, e um desenho mais complexo:

Atividade 4: *Descreva a formação de cada termo faltante da série da figura abaixo, mediante a posição na respectiva sequência.*

Sequência da atividade 4.



Fonte: GERDES, 2012.

Habilidades e Competências relacionadas com a atividade:

- M2 - Ampliar formas de raciocínio e processos mentais por meio de indução, dedução, analogia e estimativa, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.
- H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

- Público alvo: grupo de estudantes que cursem o 3° ano do Ensino Médio.
- Ter conhecimento prévio do que é uma Sequência.

- 2 tempos de aula.

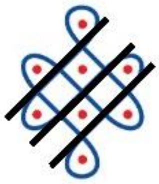
Roteiro da atividade:

- A turma deverá ser dividida em grupos de 3.
- O professor orienta os grupos a fazerem os registros de cada imagem apresentada na atividade 4. Cabe aos alunos decidirem que registros devem ser feitos, e, dentre eles, quais aqueles relevantes para a determinação do padrão de formação de cada termo presente na sequência.
- A atividade é solucionada em conjunto com a turma, as soluções encontradas por cada grupo são expostas para os demais.

Solução para a atividade:

A análise destes pictogramas será mais produtiva se for feita por grupos de estudantes, tendo em vista que dos 4 enunciados apresentados, este seja o mais complexo. Para que se observe uma lei de formação, com apenas 2 informações, e de termos não consecutivos, uma das maneiras possíveis é que se rotacione as imagens em 45°. Aqui será apresentada a solução sem a rotação. A figura em azul, será denominada 1° termo, e a restante, 3° termo.Analisemos o que ocorre com o 1° termo:

Análise do 1° termo.

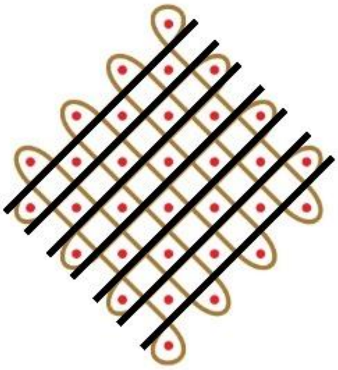


Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

Observamos que neste termo possuímos 4 regiões, divididas por 3 linhas pretas. Cada região possui 2 pontos.

Analisando o que ocorre com o 3° termo:

Análise do 3° termo.



Fonte: Adaptado de GERDES, 2012.

Observamos que neste termo possuímos 8 regiões, divididas em 7 linhas pretas. Cada região possui 4 pontos. Sabendo que os termos obedecem a mesma lei de formação, conforme consta na tabela. Assim, o estudante deverá perceber que:

Análise dos termos da 3° atividade.

Termo	Total de regiões	Total de pontos em cada região	Total de pontos
1°	$2(1+1) = 4$	$1+1 = 2$	$2(1+1)^2 = 8$
?	?	?	?
3°	$2(3+1) = 8$	$3+1 = 4$	$2(3+1)^2 = 32$

Fonte: O autor, 2019.

Assim, para um termo na posição n, temos que:

1. Total de regiões: $2n + 2$
2. Total de pontos por região: $n + 1$
3. Total de pontos: $2(n+1)^2$

Portanto, podemos encontrar os termos faltantes, mediante as relações anteriores, como consta na tabela a seguir:

Relação dos termos faltantes da 3° atividade.

Termo	Total de regiões	Total de pontos em cada região	Total de pontos
2°	$2(2+1) = 6$	$2+1 = 3$	$2(2+1)^2 = 18$
4°	$2(4+1) = 10$	$4+1 = 5$	$2(4+1)^2 = 50$
5°	$2(5+1) = 12$	$5+1 = 6$	$2(5+1)^2 = 72$

Fonte: O autor, 2019.