Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Estratégias Discretas em Teoria dos Jogos

por

Carlos Alberto Silva Sobrinho

Goiânia
2013

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Carlos Alberto Silva Sobrinho				
E-mail:	krlosmatemagica@yahoo.com.br				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Educação do Distrito Federal				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País: Brasil	UF:	DF	CNPJ:	05.509.077/0001-05	
Título:	Estratégias Discretas em Teoria dos Jogos				
Palavras-chave:	Teoria dos Jogos, Otimização				
Título em outra língua:	Discrete Strategies in Game Theory				
Palavras-chave em outra língua:	Game Theory, Optimization				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	11/04/2013				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional				
Orientador (a):	Professor Doutor José Yunier Bello Cruz				
E-mail:	yunier.bello@gmail.com				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

_______________________________________ Data: 11 / 04 / 2013

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Carlos Alberto Silva Sobrinho

Estratégias Discretas em Teoria dos Jogos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática e Estatística da UFG, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de concentração: Matemática do ensino básico.

Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz

Goiânia, 11 de abril de 2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

	Silva Sobrinho, Carlos Alberto.
S586e	Estratégias discretas em teoria dos jogos [manuscrito] / Carlos Alberto Silva Sobrinho. - 2013.
	45 f. : figs., tabs.
	Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz.
	Tese (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
	Bibliografia.
	1. Teoria dos jogos – Otimização. I. Título.
	CDU: 519.83:37.016

Carlos Alberto Silva Sobrinho

Estratégias Discretas em Teoria dos Jogos

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 11 de abril de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Wilfredo Sosa Sandoval
Membro-UCB

Prof. Dr. Luis Rodrigo Fernandes Baumann
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Carlos Alberto Silva Sobrinho

Graduou-se em Matemática na FAJESU - Faculdade Jesus Maria José de Brasília. Durante sua graduação, foi monitor no Departamento de Matemática da FAJESU nas disciplinas Geometria I, Geometria II, Cálculo I, Cálculo II. É especialista pela UnB - Universidade de Brasília, em Educação de Jovens e Adultos. É também especialista pela UFF - Universidade Federal Fluminense do Rio de Janeiro, em Ensino de Matemática. Atualmente trabalha com turmas do Ensino Médio no Centro Educacional Leonardo da Vinci do Distrito Federal e também leciona na SEEDF - Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal.

Dedicatória

À Maria das Graças Silva (in memoriam), minha mãe, mestre da minha vida, pelo apoio, compreensão e companhia ao longo da caminhada.

À minha esposa Edina, companheira nas horas difíceis, braço forte na minha fraqueza e tudo no meu nada.

Aos meus filhos Maria Eduarda e Carlos Eduardo, pequenos anjos que Deus colocou em minha vida.

Aos meus amigos de caminhada que não me deixaram desanimar.

A todos aqueles que são minha fortaleza.

Agradecimentos

A Deus, por ter me concedido, por meio de Sua infinita misericórdia, o potencial de concretizar mais uma conquista em minha vida.

À minha esposa Edina, pela compreensão, força, estímulo, carinho e contribuições, sem as quais a realização deste trabalho se tornaria mais árdua.

Ao orientador e professor José Yunier Bello Cruz, pelos seus conhecimentos e auxílio que me fizeram crescer tanto na vida acadêmica como na profissional.

Aos professores do PROFMAT - ANÁPOLIS, que proporcionaram momentos enriquecedores durante a Pós-Graduação.

À CAPES pelo apoio financeiro ao longo dessa jornada.

Aos amigos Hélder, Pedro, Ronan e Wálter pelos momentos de estudos e descontrações indispensáveis.

A todos do PROFMAT e às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

"Nunca deixe que digam que não vale a pena acreditar num sonho que se tem ou que os seus planos nunca vão dar certo ou que você nunca vai ser alguém. Quem acredita sempre alcança."

Renato Russo

Resumo

Neste trabalho teremos a exposição de alguns elementos da Teoria dos Jogos e certos procedimentos de resolução de jogos usando matrizes, probabilidade e principalmente otimização, ou seja, vamos otimizar as jogadas com embasamento matemático. Para tal usaremos um Teorema, duas Proposições e vários exemplos para discorrer sobre a Teoria dos Jogos, aplicando o que estamos trabalhando e mostrar como se pode proceder em vários jogos para que o leitor possa compreender e usar tal teoria.

O objetivo deste trabalho é divulgar as ideias da Teoria dos Jogos, as quais tem aplicação em várias áreas, entre elas economia e arte militar.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos, otimização.

Abstract

In this work we have exposure to some elements of game theory and certain resolution procedures games using matrices, probability and especially optimization, ie, we optimize the moves with mathematical background. For this we will use a Theorem, two Propositions and discuss several examples to game theory, applying what we are working and show how one can proceed in several games so that the reader can understand and use such a theory.

The objective is to disseminate the ideas of game theory, which has applications in several areas, including economy and military art.

Keywords: Game Theory, optimization.

Sumário

1 Introdução

Todos entram em um jogo querendo saber o que devem fazer para ter mais chance de ganhar, uma pergunta natural é: será meramente sorte ou podemos aumentar a chance dependendo da jogada? Considerando jogos com duas pessoas e de perde-ganha ou soma zero, ou seja, jogos em que o que um jogador perde o outro ganha, vamos analisar as melhores jogadas, isto é, aquelas que possibilitam uma maior chance de ganhar, mas levando em consideração que o oponente é racional, que pode perceber padrões adotados. Assim, a melhor estratégia seria a chamada estratégia mista, pois o oponente não vai perceber facilmente o padrão adotado.

Comumente somos colocados em situações de conflito que podem gerar dilemas e se estamos adaptados ou acostumados a lidar com tais situações, racionalmente podemos sair de mais uma. Assim, a Teoria dos Jogos nos traz ferramentas para uma análise mais racional de problemas envolvendo conflitos e tomada de decisão, desde um simples par ou ímpar até uma situação de guerra. Afinal, em qualquer tipo de jogo a ação de cada jogador dependerá da ação do oponente.

Desde a nossa infância temos contato com jogos, principalmente coletivos: jogos de rua como esconde-esconde, em que uma das partes tem que se esconder, ou seja, deve adotar a estratégia de se esconder perto ou longe? Em qual momento deverá sair de onde escondeu? E a outra parte deve procurar também adotar uma estratégia que o favoreça; jogos de salão; jogos de mesa; mais modernamente os jogos eletrônicos; disputas esportivas; etc. A medida que vamos crescendo não perdemos o interesse por jogos: desde aqueles por mera brincadeira ou diversão até aqueles que envolvem apostas. Não somente jogos com apenas um ganhador, mas aqueles que muitos podem vencer, pois este tipo de jogo torna interessante e motivador, principalmente na infância, já que nesta fase estamos interessados na motivação para brincar.

Avançando um pouco mais, para resolver uma série de problemas práticos – no campo da economia, arte militar, etc – tem-se que analisar situações nas quais estão representadas duas ou mais partes envolvidas que têm objetivos opostos, ou seja, qualquer situação de conflito. Assim , a Teoria dos Jogos invade várias áreas, tais como: operações militares, eleições, leilões, balança de poder, lançamento de produtos no mercado, genética, relacionamentos, política, circuitos elétricos, etc.

A necessidade de analisar situações semelhantes de conflito fez com que surgisse um aparato matemático especial. A Teoria dos Jogos, em sua essência, não é mais do que uma teoria matemática para resolver situações de conflito. O objetivo dessa teoria consiste em elaborar recomendações sobre a forma racional das ações de cada um dos envolvidos de uma situação de conflito que chamamos de jogo. Atualmente várias escolas francesas, norteamericanas e espanholas adotam a Teoria dos Jogos indiretamente no ensino básico com crianças por meio de jogos estimulando a cooperação para que elas saibam no futuro resolver situações de conflitos levando em consideração a melhor solução para o grupo.

Para entender um pouco da Teoria dos Jogos este trabalho traz no Capítulo 2 um pouco de história e exemplos de jogos, alguns bem conhecidos e outros nem tanto. Historicamente destacamos os nomes que contribuí-

ram diretamente para a evolução de tal teoria: Nicolas Bernoulli, James Waldegrave, Augustin Cournot, Ernst Zermelo, John von Neumann, Oscar Mongenstern, John Forbes Nash Júnior, John C. Harsanyi, Reinhard Selten, Robert J. Aumann e Thomas C. Schelling. E os jogos exemplificados são: pilha de palitos ou pega varetas; jogo de sinuca; duelo; lançamento de novos produtos no mercado; dilema do prisioneiro; le Her.

No Capítulo 3 tratamos de Teoria dos Jogos, estratégias, descrição dos jogos na forma extensiva, descrição na forma normal, critério maximin, critério minimax, estratégias mistas e garantia de solução usando o Teorema Minimax de von Neumann, solução de jogos com matriz de pagamento $n \times m$ **observando se há o equilíbrio de Nash e destacando soluções ótimas, solução por programação linear, dominância. Todos os tópicos considerando jogos com dois jogadores no qual o que um jogador perde o outro jogador ganha, assim, esse tipo de jogo é conhecido como de soma nula ou perde-ganha com dois jogadores.**

No Capítulo 4 há exemplos de jogos de soma nula ou perde-ganha com dois jogadores com suas respectivas discussões: jogo de par ou ímpar com três dedos; pedra, papel, tesoura; combinar moedas ou matching pennies; bolinhas de gude verdes e vermelhas; redes de supermercados; batalha no mar de Bismarck.

E por fim, o Capítulo 5 traz as considerações finais do trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2 História e Exemplos de Jogos

Neste capítulo situaremos historicamente a Teoria dos Jogos destacando os nomes que contribuíram para o desenvolvimento de tal teoria. Além disso, para melhor compreensão do nosso objeto de estudo há alguns exemplos descritos e comentados.

2.1 História

A Teoria dos Jogos pode ser contada a partir do jogo de cartas "le Her", inicialmente analisado por James Waldegrave no século XVIII, onde ele fornece uma solução usando a chamada estratégia mista. No início do século XIX surge um importante trabalho sobre duopólio de Augustin Cournot; veja [4]. Nesse trabalho, ele apresentou soluções para problemas envolvendo duas empresas que produzem um mesmo bem e querem decidir qual percentual do mercado cada uma deve ficar, já que o que uma produz afeta o lucro da outra, então o melhor é que as empresas produzam quantidades compatíveis entre si.

Figura 1: Augustin Cournot

No século XX, Cournot foi considerado por alguns economistas como precursor da análise de equilíbrio em jogos não-cooperativos, isto é, situações de interação estratégica em que não há a possibilidade dos agentes estabelecerem acordos acerca do seu comportamento durante a interação antes de ela ocorrer, mas verdadeiramente uma aplicação do mesmo método que John Nash desenvolveria mais tarde. Assim, há algumas referências na literatura de um equilíbrio de Counot-Nash aplicadas em problemas de duopólio a partir do método aplicado por John Nash.

Ainda no século XX, Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da Teoria dos Jogos sobre o jogo de Xadrez, o qual afirma que tal jogo é estritamente determinado, que em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia que pode dar a vitória ou levará o jogo ao empate. Essa solução de Zermelo ficou conhecida como indução reversa, a qual sugere analisar o jogo de trás para frente considerando todas as jogadas que podem ser realizadas racionalmente para que

possa ser feita uma análise contrária. Tal indução permite pensar no jogo de trás para frente e tentar antever as jogadas do oponente tendo sempre, pelo menos, uma jogada reservada.

Figura 2: Ernst Zermelo

Outro grande matemático que se interessou na Teoria dos Jogos foi o francês Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956) principalmente por jogos que dependiam de sorte, mas também da habilidade do jogador, levando a aplicações em situações de conflito como a arte da guerra, especulações econômicas e financeiras, entre outras situações de conflito, sempre analisando jogos estratégicos, considerado, assim, o primeiro a trabalhar com a ideia de estratégia ou método de jogo, retratando em números e descrições o que que cada jogador deve fazer; veja [5] e [6]. Tal ideia ganhou força quando John von Neumann, mais tarde, considerou Borel como o pioneiro na formulação de estratégia. Mas a Teoria dos Jogos avançou ainda mais a partir do grande matemático húngaro John von Neumann (1903-1957) que migrou para os Estados Unidos na década de 30. Em 1928 ele demonstrou, em seu primeiro trabalho, que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas; veja [22].

Figura 3: John von Neumann

John von Neumann, que trabalhava em muitas áreas da ciência, com a Teoria dos Jogos interessou-se por economia, daí conheceu o economista Oscar Morgenstern (1902-1977) e juntos publicaram um dos clássicos da Teoria dos Jogos, assim uniram Teoria dos Jogos, economia e matemática aplicada; veja [23]. Além de jogos de soma zero, o livro também definiu a representação de jogos em forma extensiva, em que são identificadas as decisões de cada jogador em cada estágio do jogo, quando o jogo se desenvolve em etapas sucessivas; e discutiu cooperação e formação de coalizões entre os jogadores. Assim, a Teoria dos Jogos evoluiu para além da matemática e tomou grandes proporções.

Figura 4: Oscar Morgenstern

Em 1950, o matemático norte-americano John Forbes Nash Júnior publicou quatro artigos importantes para a Teoria dos Jogos não-cooperativos, isto é, jogos que ocorrem quando não existe a possibilidade de negociação contratual entre as partes envolvidas no jogo, e para a teoria de negócios. Nash desenvolveu o famoso equilíbrio de Nash, que consiste na existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos e sugeriu uma abordagem de estudo de jogos cooperativos, ou seja, jogos que ocorrem quando seus participantes podem negociar contratos vinculativos entre si, permitindo que planejem estratégias em conjunto, a partir de sua redução para a forma não-cooperativa; veja [18] e [19]. Em outros dois artigos, ele criou a teoria de negócios e provou a existência de solução para o problema de negócios de Nash; veja [20] e [21]. Isto revolucionou a Teoria dos Jogos, trazendo a ideia de interações estratégicas considerando-se todas as possíveis jogadas do oponente.

Em 1994, John Forbes Nash Jr., da Universidade de Princeton, Nova Jérsei, EUA; John Harsanyi, Universidade de Berkeley, Califórnia, EUA; e Reinhard Selten, Universidade de Bonn, Bonn, Alemanha; receberam o prêmio Nobel por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.

Como teremos a oportunidade de ver neste trabalho, o equilíbrio de Nash é aquele que resulta de cada jogador adotar a estratégia que é a melhor resposta às estratégias adotadas pelos demais jogadores.

John Nash, com o desenvolvimento da ideia de equilíbrio, ampliou o estudo da Teoria dos Jogos para além de jogos de soma nula. Assim, a escolha racional de uma estratégia por parte de um jogador não garante que seja a melhor escolha para todos.

Figura 5: John Forbes Nash Júnior

John C. Harsanyi (1920-2000), economista húngaro, através de três artigos envolvendo Teoria dos Jogos, contribuiu para tal teoria com problemas envolvendo alguns jogadores que dispõem de informação privilegiada em relação aos demais sobre algum elemento importante do jogo, ou seja, situação de informação assimétrica ou informação incompleta; veja [11], [12] e [13]. Com isso mostrou que o conceito de equilíbrio de Nash poderia ser estendido para tal situação.

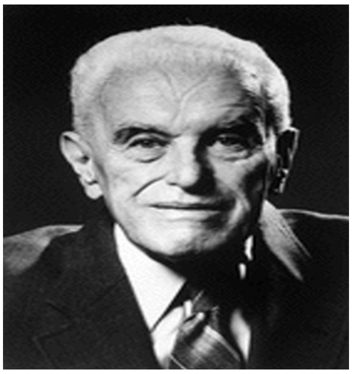

Figura 6: John C. Harsanyi

Ainda no século XX, o matemático e economista alemão Reinhard Selten mostrou, em um de seus artigos, uma melhoria na noção de equilíbrio, o que foi chamado de "equilíbrio perfeito em subjogos", significando que a estratégia deve ser ótima em todos os possíveis desdobramentos das interações estratégicas de cada jogador; veja [26].

Figura 7: Reinhard Selten

Tal equilíbrio foi fundamental em análises estratégicas, principalmente em jogos envolvendo compromissos e ameaças, permitindo determinar quais eram plausíveis ou não. Dando base matemática para uma análise racional de estratégias em todas as etapas dos jogos. Mas foi a partir de Robert J. Aumann que, em Teoria dos Jogos, começou-se a analisar relações e interações duradouras, dando-se importância a noção de cooperação entre organizações ou indivíduos para se obter um melhor resultado para ambos mesmo que não seja em curto prazo, essa situação está exemplificada no dilema do prisioneiro neste capítulo, que trata de uma situação em que as tomadas de decisão de um interfere diretamente na penalidade do outro, mas cada um não sabe da decisão do outro.

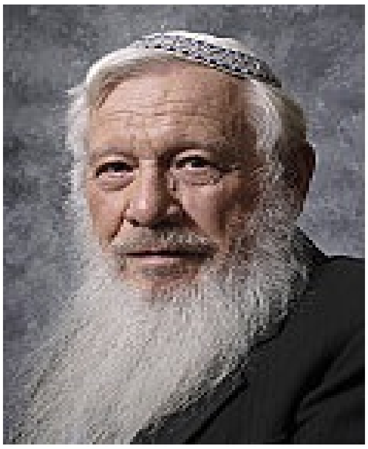

Figura 8: Robert J. Aumann

Em 1960, Thomas C. Schelling, Nobel em economia em 2005, publicou The Strategy of Conflict [17], um de seus mais importantes livros, no momento em que Estados Unidos e a ex-União Soviética estavam em um conflito denominado Guerra Fria. E o que Schelling tratava em seu livro era exatamente as estratégias que podem ser adotadas em uma situação de

conflito, além do mais, momento em que a escalada armamentista e uma ameaça nuclear eram centrais para a sobrevivência de grandes potências mundiais. O livro também ressaltava a importância da cooperação, fortalecendo a Teoria dos Jogos.

Figura 9: Thomas C. Schelling

Qualquer situação que surja em operações militares pertence ao campo de conflitos: cada uma das partes envolvidas toma todas as medidas que tem ao seu alcance para impedir que o oponente tenha êxito, cada uma das decisões devem ser tomadas de tal maneira que seja menos vantajosa para o outro. Outra contribuição de Schelling foi com a ideia de ponto focal, ou seja, aquele que se destaca em um contexto complexo. Por exemplo: Carlos e Edina marcam de se encontrar em uma pequena cidade, mas não combinam o local exato, ao chegar na cidade percebem que estão sem comunicação, que na cidade há várias casas, várias escolas, vários comércios e apenas uma igreja no centro da cidade. Analisando onde Carlos está, Edina deveria ir para qual lugar? De acordo com o ponto focal de Schelling, eles devem ir para a igreja, que é um ponto único na cidade. Assim, vários problemas de negócio, evolução de populações têm sido estudados como jogos.

2.2 Exemplos de Jogos

Vamos apresentar agora alguns exemplos de jogos e analisá-los. Os exemplos mais comuns são os jogos de cartas e de tabuleiro, além desses apresentaremos os jogos de soma nula, isto é, jogos em que a soma dos pagamentos feitos pelos jogadores é zero, e os jogos de soma não nula, ou seja, jogos em que a soma dos pagamentos feitos pelos jogadores é diferente de zero.

Exemplo 1. *Pilhas de palitos ou pega varetas*

Inicialmente os palitos são segurados na vertical em um único feixe e depois "largados" aleatoriamente, após cada jogador retira um palito sem mover os outros, quando um palito do monte é movido, então passa-se a vez para o outro jogador até que não reste mais palitos.

Os palitos estão divididos nas cores amarela, verde, azul, vermelha e preta e cada um tem a sua pontuação:

i) amarela: 5 pontos;

ii) verde: 10 pontos;

iii) azul: 15 pontos;

iv) vermelha: 30 pontos;

v) preta: 100 pontos.

Após retirado o palito de cor preta, ele pode ser usado para retirar os outros. Ganha quem somar mais pontos.

Exemplo 2. *Jogo de sinuca ou snooker*

As partidas de sinuca conterão dois ou mais jogadores, que usarão uma bola branca, "tacadeira", e sete coloridas valendo: vermelha 1; amarela 2; verde 3; marrom 4; azul 5; rosa 6 e preta 7 pontos. A finalidade da partida é encaçapar todas as bolas coloridas em sequência ordenada crescente, respeitando as regras, usando a impulsão da tacadeira movimentada por um toque da sola do taco. Vence o jogo aquele jogador que, após encaçapadas todas as bolas, obtiver a maior pontuação.

Exemplo 3. *Duelo*

Duas pessoas a uma distância considerável estão de posse de um revólver com apenas uma bala. A um sinal passam a caminhar em direção ao outro. Considerando que a cada passo dado aumenta a chance de acertar o oponente e também aumenta o risco, há um dilema em qual momento devem atirar ou não.

Exemplo 4. *Lançamento de novos produtos no mercado*

Considere que em uma cidade as empresas A e B dominam o mercado em relação a uma certa linha de produto e competem por uma parte considerável do mercado, tentando ampliar a comercialização, reduzindo os custos e aumentando o lucro. Assim, se a empresa A lança um produto novo naquela linha com investimento altíssimo, a empresa B poderá:

i) fazer também um investimento altíssimo para lançar um novo produto parecido com o lançado pela empresa A e competir diretamente;

ii) fazer um investimento altíssimo para lançar um produto diferente do lançado pela empresa A e concorrer pela mesma parte do mercado;

iii) não lançar produto novo e dar ênfase em seus produtos no mercado, esperando o que vai acontecer com o produto novo lançado pela empresa concorrente.

Exemplo 5. *Dilema do prisioneiro*

Um exemplo de jogo de soma não nula e jogo não-cooperativo em que supõe-se que cada jogador quer adotar uma estratégia para aumentar sua vantagem em detrimento ao outro jogador é o dilema do prisioneiro, um problema típico da Teoria dos Jogos. Abaixo tem-se a descrição do dilema.

Dois suspeitos são capturados e acusados de um delito. A polícia não tem evidência suficiente para condenar os suspeitos, a menos que um confesse. A polícia coloca os suspeitos em celas separadas e explica as consequências das decisões a serem tomadas. Se o prisioneiro A confessar testemunhando contra o prisioneiro B e B ficar em silêncio, então o prisioneiro A sai livre e o prisioneiro B cumprirá 10 anos de sentença. Se os prisioneiros A e B permanecerem em silêncio a polícia condenará os dois a meio ano de cadeia, ou seja, 6 meses cada um. Se o prisioneiro A testemunhar contra o prisioneiro B e vice-versa, cada um cumprirá 5 anos de cadeia. O prisioneiro A não fica sabendo da decisão do prisioneiro B. Assim, cada decisão é independente.

Mas no dilema acima os prisioneiros devem levar algumas coisas em consideração: confessar ou não? Confiar ou não no outro prisioneiro?

Se fizermos uma análise individual, o melhor pode ser acusar o outro, mas esse outro deverá ficar em silêncio. Do ponto de vista cooperativo a melhor estratégia é a última citada. Porém, um dilema ainda persiste: confiam no outro e continuam negando, mesmo correndo risco de entrarem em uma pior, ou confessam esperando a liberdade, sabendo que se o outro fizer o mesmo ambos estarão em uma pior?

Um experimento baseado no simples dilema, Amos Tversky relatou em seu livro, que cerca de 40% de participantes cooperaram, isto é, ficaram em silêncio; veja [19].

Em abstrato, não importa os valores das penas, mas o cálculo das vantagens de uma decisão cujas consequências estão ligadas às decisões de outros agentes, onde a confiança e traição fazem parte da estratégia em jogo.

Casos como este são recorrentes na economia, na biologia e em qualquer campo que necessite de estratégia. O estudo das táticas mais vantajosas num cenário onde esse dilema se repita é um dos temas da Teoria dos Jogos.

Exemplo 6. *le Her*

Abaixo temos uma descrição da versão simplificada do jogo *le Her*; veja [1]. A versão original do jogo foi estudada por Bernoulli e Montmort, mas foi Waldegrave que forneceu uma solução usando o conceito de estratégias mistas.

Descrição do jogo: 13 cartas de um mesmo naipe são embaralhadas. São elas com seus respectivos valores: Ás, um; dois; três; quatro; cinco; seis; sete; oito; nove; dez; Valete, onze; Dama, doze; Rei, treze. No início do jogo, o jogador I recebe uma carta X, que apenas ele vê, o jogador II recebe uma carta Y, que apenas ele vê e uma carta Z é colocada sobre a mesa, que ninguém vê. O jogador I joga primeiro: ele deve decidir se mantém a sua carta X ou a troca com a carta Y do jogador II, no segundo caso, o jogador II não pode se recusar a fazer a troca. Depois é a vez do jogador II: ele deve decidir se mantém a sua carta ou a troca com a carta Z. Ganha quem tiver a carta de maior valor. Se o jogo é realizado várias vezes, quem tem o maior número de vitórias a longo prazo?

Por exemplo, se o jogador I sair com 2 o que pode acontecer:

i) Decidir ficar com a carta. O jogador II pode:

a) ficar com sua carta. Se a sua carta for Ás, então ele perde. Se sua carta for diferente de Ás, então ele ganha;

b) trocar sua carta com a carta da mesa. Se a carta que ele está agora for Ás, então ele perde. Se a carta que ele está agora for diferente de Ás, então ele ganha.

ii) Decidir trocar a carta com o jogador II. Como o jogador II conhece agora as duas cartas, então ele trocará com a carta da mesa se a carta que ele está agora tiver um valor menor que a carta que o jogador I está, não garantindo a sua vitória.

No *le Her* observe que a decisão do primeiro jogador depende da carta que ele saiu e principalmente da estratégia adotada, já que não é interessante para ele ficar com uma carta de valor pequeno.

3 Teoria dos Jogos

Um jogo é uma situação entre N entes ou grupos, chamados jogadores. A Teoria dos Jogos é a ciência da estratégia que baseada na lógica e na matemática mostra as atitudes que os jogadores devem tomar para assegurar os melhores resultados nos variados tipos de jogos, principalmente em situação de conflito. Ela tem como objetivo a análise de problemas em que existe uma interação dos jogadores, na qual as decisões de um indivíduo afetam e são afetadas pelas decisões dos demais jogadores, ou seja, é um estudo das decisões em situação interativa.

Nos jogos há regras de conhecimento prévio com conhecido pagamento. As regras definem atividades elementares, ou lances, do jogo. Jogadores diferentes podem realizar lances diferentes, mas cada um conhece os lances realizados pelos outros e a partir daí definem suas estratégias, quando cada jogador escolhe sua estratégia temos uma situação ou perfil, em termos matemáticos cada jogador tem uma função utilidade que atribui um número real, o ganho do jogador, a cada situação do jogo. Neste trabalho consideraremos jogos de soma nula e dois jogadores ou jogos de perde-ganha.

3.1 Estratégias

Uma estratégia simples é aquela adotada por um jogador com uma sequência pré-determinada de lances e contra-lances no decorrer de um jogo completo.

Na matriz do jogo ou matriz dos ganhos, cada jogador tem um conjunto finito de estratégias simples, embora este número possa ser elevado. O jogador I, conhece as jogadas do II, mas não pode assegurar que jogada irá selecionar ao início do jogo. Assim, uma caracterização completa do jogo é dada pela matriz de pagamento que mostra os ganhos g_{ij} do jogador I sobre II, quando I utiliza uma i-ésima estratégia simples, A_i, e II uma j-ésima estratégia simples, B_j; veja a Tabela 1. A matriz de pagamento do jogador II é a matriz oposta da anterior.

	Jogador II			
Jogador I	B_1	B_2	...	B_n
A_1	g_{11}	g_{12}	...	g_{1n}
A_2	g_{21}	g_{22}	...	g_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	g_{m1}	g_{m2}	...	g_{mn}

Tabela 1: Matriz genérica de pagamentos dos jogadores I e II.

O objetivo da Teoria dos Jogos é determinar a melhor estratégia para um jogador supondo que o oponente é racional e fará um lance inteligente. Porém, se um jogador sempre escolhe a mesma estratégia ou a escolhe com uma ordem fixa, seu oponente reconhecerá e anulará o lance, se possível. Entretanto, geralmente, uma estratégia mais eficiente é a estratégia mista, definida por uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de estratégias simples. No jogo, da Tabela 1, uma estratégia mista para o jogador

I é especificada pelo vetor $X = (x_1, x_2, ..., x_m)^T$, onde $x_i, 1 \leq i \leq m$, é a proporção de vezes, isto é, frequência relativa ou probabilidade em que A_i é escolhida. Analogamente, uma estratégia mista para o jogador II é designada por $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$, onde $y_j, 1 \leq j \leq m$, é a probabilidade de que B_j é escolhida. Sendo as probabilidades, x_i e y_j não negativas, satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

ou seja, a soma das probabilidades tanto do jogador I como do jogador II é 1.

3.2 Descrição na forma extensiva

A descrição na forma extensiva permite analisar todas as possibilidades de lances de um ogo usando a ideia de uma árvore com nós. Onde cada nó representa uma possível situação do jogo. Assim, temos uma árvore de possibilidades. Abaixo temos dois exemplos de jogos descritos na forma extensiva.

O primeiro exemplo é o jogo de pôquer com dois jogadores e duas cartas apenas, um Ás e um dois, que consiste em o jogador II retirar uma carta e falar qual carta tirou, havendo a possibilidade de falar a carta errada; veja o Exemplo 7.

Exemplo 7. *Jogo de pôquer com dois jogadores e duas cartas apenas, um Ás e um dois*

O jogador I fornece uma carta ao jogador II, este vê a carta que tem em mãos. Considerando que o jogo seja apostado, tem-se abaixo a forma extensiva; veja a Figura 10.

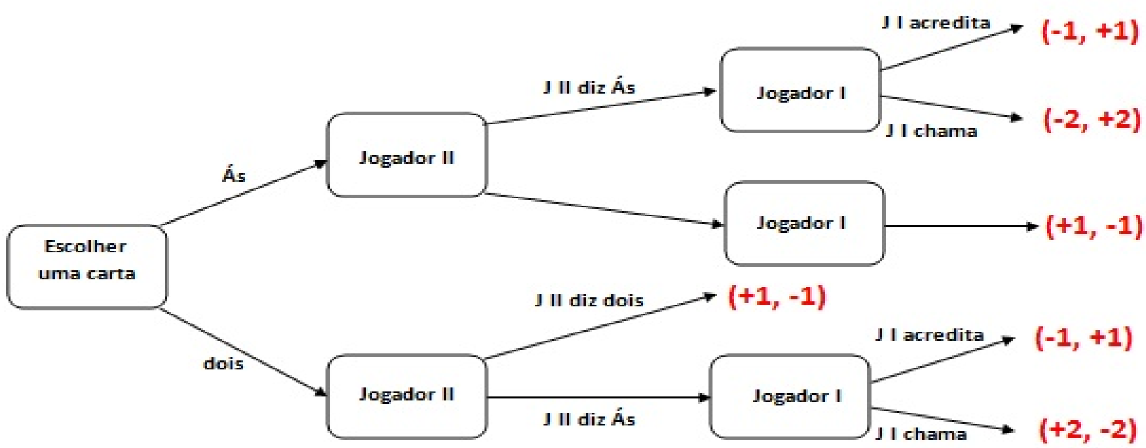

Figura 10: Forma extensiva para o jogo de pôquer com dois jogadores e duas cartas

Na Figura 10 temos a forma extensiva para o jogo de pôquer com dois jogadores e duas cartas. Assim, uma possibilidade é o jogador II tirar um Ás e dizer "Ás"; se o jogador I acreditar, então paga apenas uma unidade monetária; se o jogador I não acreditar, então paga duas unidades monetárias.

Exemplo 8. *Jogo dos palitos com dois jogadores, duas pilhas e dois palitos por pilha*

Os jogadores se alternam retirando palitos das pilhas. A cada vez, cada jogador deve retirar ao menos um palito de uma pilha, mas ele pode retirar mais, desde que o faça de uma mesma pilha. O perdedor é o jogador que retirar o último palito. As possibilidades estão descritas abaixo; veja Figura 11.

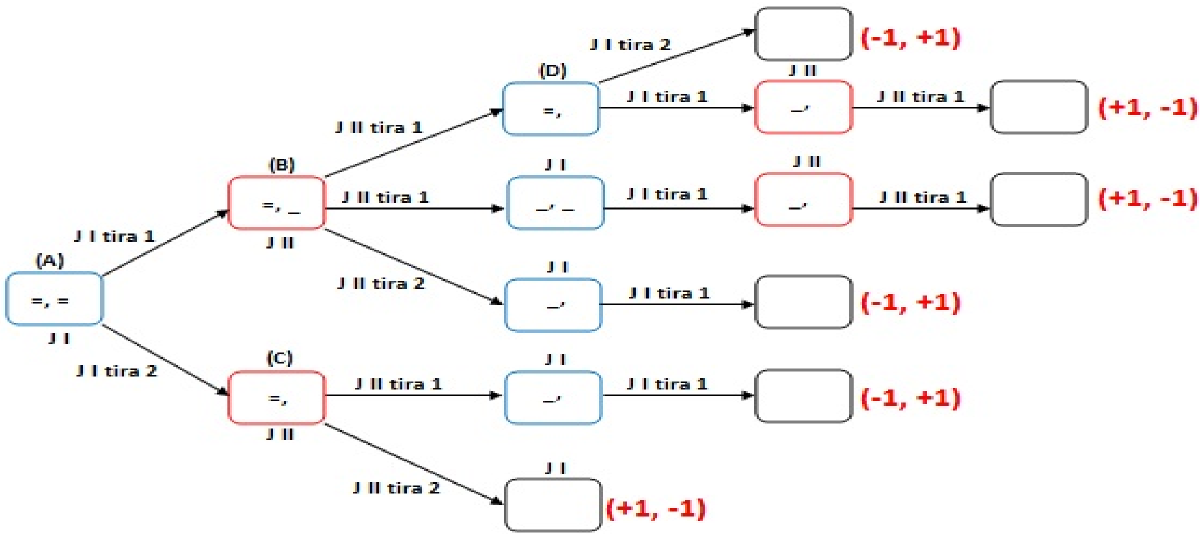

Figura 11: Forma extensiva para o jogo dos palitos com dois jogadores

A forma extensiva permite uma análise completa do jogo, assim pode-se ver a melhor estratégia para cada ogador. Porém, para jogos com muitas interações a forma extensiva se torna inviável.

3.3 Descrição na forma normal

Para fazer a nálise de um jogo na forma normal faz-se inicialmente o levantamento de todas as estratégias possíveis de cada jogador. Consideraremos as estratégias do jogador I como $I_1, I_2, ..., I_m$ e para o jogador II as estratégias $II_1, II_2, ..., II_n$.

A descrição na forma extensiva pode ser usada para se fazer o levantamento das estratégias citadas anteriormente. De posse das estratégias podemos fazer o levantamento dos possíveis pagamentos, considerando os pares de estratégias I_iII_j, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Assim, o par de pagamentos, como o jogo é de soma nula, temos:

$$(g_{ij}, -g_{ij}),$$

onde o primeiro pagamento é referente ao jogador I e o segundo pagamento ao jogador II.

Na matriz considerada pode-se estimar também a probabilidade de cada resultado. Nos exemplos abaixo, temos a forma normal de dois ogos já citados.

Exemplo 9. *Jogo de pôquer com dois jogadores e duas cartas apenas: Ás e dois*

Abaixo temos a forma normal para o jogo de pôquer com dois jogadores e duas cartas apenas, um Às e um dois.

I_1: acreditar quando o jogador II disser que tem Ás;

I_2: não acreditar quando o jogador II disser que tem Ás.

II_1: dizer dois quando tiver um dois e Ás quando tiver um Ás;

II_2: dizer Ás quando tiver um dois ou um Ás.

A matriz de pagamento aparece na Tabela 2.

	II_1	II_2
I_1	0	-1
I_2	$-\frac{1}{2}$	0

Tabela 2: Matriz de pagamento para o jogo de pôquer.

Na Tabela 2, o jogador I paga 0 ao acreditar quando o jogador II disser que tem um Ás, sendo que o jogador II diz dois quando tiver um dois e Ás quando tiver um Ás; o jogador I paga -1 ao acreditar quando o jogador II disser que tem um Ás, sendo que o jogador II diz Ás quando tiver um dois ou um Ás; o jogador I paga $-\frac{1}{2}$ ao não acreditar quando o jogador II disser que tem um Ás, sendo que o jogador II diz dois quando tiver um dois e Ás quando tiver um Ás; o jogador I paga 0 ao não acreditar quando o jogador II disser que tem um Ás, sendo que o jogador II diz Ás quando tiver um dois ou um Ás.

Abaixo temos a forma normal para o jogo de palitos com dois jogadores, duas pilhas e dois palitos por pilha; veja o Exemplo 10.

Exemplo 10. *Jogo de palitos com dois jogadores, duas pilhas e dois palitos por pilha*

I_1: tirar 1 palito no caso $(=, =)$ e 1 palito no caso $(=,)$;

I_2: tirar 1 palito no caso $(=, =)$ e 2 palitos no caso $(=,)$;

I_3: tirar 2 palitos no caso $(=, =)$.

II_1: se tiver o caso $(=,)$ tirar 2 palitos, e se tiver o caso $(=, -)$ tirar 1 palito da menor pilha;

II_2: se tiver o caso $(=,)$ tirar 2 palitos, e se tiver o caso $(=, -)$ tirar 1 palito da maior pilha;

II_3: se tiver o caso $(=,)$ tirar 2 palitos, e se tiver o caso $(=, -)$ tirar 2 palitos da maior pilha;

II_4: se tiver o caso $(=,)$ tirar 1 palito, e se tiver o caso $(=,-)$ tirar 1 palito da menor pilha;

II_5: se tiver o caso $(=,)$ tirar 1 palito, e se tiver o caso $(=,-)$ tirar 1 palito da maior pilha;

II_6: se tiver o caso $(=,)$ tirar 1 palito, e se tiver o caso $(=,-)$ tirar 2 palito da maior pilha.

Usando a matriz de pagamentos combinando os elementos I_iII_j, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, temos o pagamento estimado para cada ogador; veja a Tabela 3.

	II_1	II_2	II_3	II_4	II_5	II_6
I_1	**1**	**1**	**-1**	**1**	**1**	**-1**
I_2	**-1**	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**-1**
I_3	**1**	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**-1**

Tabela 3: Matriz de pagamento para o jogo de palitos.

3.4 Análise do jogo a partir da descrição na forma normal

A partir da matriz de pagamento sugerido podemos analisar qual estratégia cada jogador pode adotar. Assim, como os jogadores fazem jogadas racionais, se o jogador I quiser aumentar o ganho, consequentemente quer minimizar o pagamento. Com isso o jogador I estará buscando uma estratégia que dará o máximo desse menor pagamento ou o chamado critério maximin:

$$g_{min} = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} g_{ij},$$

ou seja, primeiro determina-se o menor dos pagamentos considerando-se cada coluna j da matriz de pagamento, depois determina-se o maior desses valores.

Com base no que o jogador I está fazendo, tentando maximizar o menor pagamento, o jogador II tendo a matriz de pagamento do jogador I irá minimizar o máximo pagamento do jogador I, é o chamado critério minimax:

$$g_{max} = \min_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq i \leq n} g_{ij},$$

ou seja, primeiro determina-se o maior dos pagamentos considerando-se cada linha i da matriz de pagamento, depois determina-se o menor desses valores.

Usando a Tabela 2, temos:

$$g_{min} = \max_{1 \leq i \leq 2} \min_{1 \leq j \leq 2} g_{ij} = \max\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{2};$$

$$g_{max} = \min_{1 \leq j \leq 2} \max_{1 \leq i \leq 2} g_{ij} = \min\{0, 0\} = 0.$$

Observando os resultados acima $g_{min} = -\frac{1}{2} < 0 = g_{max}$. Assim, o jogador I pode estar certo de receber um pagamento mínimo de $-\frac{1}{2}$, mas o jogador II tem apenas a garantia de que ele vai conseguir evitar que o jogador I

receba um pagamento maior do que 0. Não está certo qual será o resultado do jogo, pois o jogador I irá adotar a estratégia I_2, mas o jogador II poderá adotar tanto II_1 como II_2.

Usando a Tabela 3, temos:

$$g_{min} = \max_{1 \leq i \leq 3} \min_{1 \leq j \leq 6} g_{ij} = \max\{-1, -1, -1\} = -1;$$

$$g_{max} = \min_{1 \leq j \leq 6} \max_{1 \leq i \leq 3} g_{ij} = \min\{1, 1, 1, 1, 1, -1\} = -1.$$

Observando os resultados acima, $g_{min} = -1 = g_{max}$. Assim, o jogador II deve optar pela estratégia II_6 e o jogador I pode optar por qualquer uma das três estratégias, sendo o pagamento -1 para o jogador I. Esse resultado já havia sido sinalizado pela análise da forma extensiva.

3.5 Solução de Jogos com Estratégias Mistas

Entre os jogos finitos que tem importância prática é relativamente raro encontrar jogos com ponto de sela. É mais comum quando os valores mínimo e máximo do jogo são diferentes, ou seja, $g_{min} \neq g_{max}$.

Analisando as matrizes de tais jogos chegamos a conclusão de que se cada jogador trabalhar com a possibilidade de escolher apenas uma estratégia, esta escolha, considerando que temos um adversário que age racionalmente, deve ser feita usando o critério minimax. Sabendo as estratégias com o critério maxmin, com qualquer escolha do adversário, nos asseguramos com antecipação um ganho igual ao valor inferior do jogo g_{min}. Porém, se um jogador adotar uma estratégia frequentemente, o outro jogador irá perceber e adotar uma estratégia que possa anular, então é importante que as estratégias sejam intercaladas ou escolhidas de forma aleatória para que o outro jogador não perceba um padrão. Isso pode ser feito com o auxílio de probabilidade e quando isso acontece temos a chamada estratégia mista.

Todos os critérios básicos para soluções de jogos em estratégias puras podem ser estendidas para estratégias mistas, propostas por von Neumann. Dado que o jogador I tem m estratégias e que o jogador II tem n estratégias puras, então uma estratégia mista é dada pelos dois vetores:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_m);$$

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n);$$

onde $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$ e $y_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$.

Assim, conhecendo-se a matriz de pagamentos envolvendo as estratégias puras e os vetores x e y, o pagamento esperado é:

$$g(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i g_{ij};$$

ou seja, o somatório do produto de cada elemento da matriz de pagamento e as estratégias mistas.

No caso do jogo de pôquer, tomando estratégias mistas com $x = (x \quad 1-x)$ e $y = (y \quad 1-y)$, sendo a matriz de pagamento dada abaixo; veja a Tabela 4.

	y	$1-y$
x	**0**	**-1**
$1-x$	$-\frac{1}{2}$	**0**

Tabela 4: Matriz de pagamento para o jogo de pôquer com estratégia mista.

Com o uso da tabela acima o pagamento esperado é:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= g_{11}.x_1.y_1 + g_{12}.x_1.y_2 + g_{21}.x_2.y_1 + g_{22}.x_2.y_2 \\ &= 0.x.y - 1.x.(1-y) - \frac{1}{2}.(1-x).y + 0.(1-x)(1-y) \\ &= -x - \frac{y}{2} + \frac{3xy}{2}. \end{aligned}$$

Com a ideia trabalhada acima com os vetores x e y, podemos redefinir g_{min} **e** g_{max} **em estratégias mistas, os quais passam a ser expressos na forma:**

$$g_{min}^{M} = \max_{x\in X} \min_{y\in Y};$$

$$g_{max}^{M} = \min_{y\in Y} \max_{x\in X}.$$

onde X **é o conjunto de estratégias admissíveis de** x **e** Y **o conjunto de estratégias admissíveis de** y.

A solução do jogo agora envolve encontrar x **e** y**, sendo que todo jogo de soma nula e dois jogadores tem solução.**

Vejamos agora um exemplo simples das estratégias mistas em ação, baseado no "Caças e bombardeiros"; veja [3].

Exemplo 11. *Caças e bombardeios*

Na Segunda Guerra Mundial os pilotos de caça, normalmente, atacavam os bombardeiros mergulhando por cima e com o sol pelas costas, artimanha conhecida como a estratégia do "huno ao sol". Mas, quando todos os caças passaram a utilizar essa estratégia, os pilotos dos bombardeiros responderam simplesmente pondo óculos escuros, que lhes permitiram olhar frontalmente para o sol e procurar os caças. Então os caças recorreram a uma segunda estratégia que chamaremos de "kamikase", que consistia num ataque direto de baixo para cima. Essa alternativa revelava-se muito eficaz quando o caça não era detectado, mas no caso contrário, era invariavelmente fatal para o piloto do caça, visto que os aviões são muito mais lentos para subir do que mergulhar. Temos agora um jogo de soma zero para duas pessoas, entre os pilotos de caças e as tripulações dos bombardeiros. Os caças podem empregar tanto a estratégia do "huno ao sol" como a do "kamikase", enquanto as tripulações dos bombardeiros podem olhar para cima ou para baixo através da torre do artilheiro. Se concordarmos em medir o ganho do piloto do caça pelas hipóteses de sobrevivência numa missão solitária, então podemos descrever a situação teórica do jogo pelas probabilidades de sobrevivência; veja a Tabela 5.

	Tripulação do bombardeio	
Piloto do caça	olhar para cima	olhar para baixo
huno ao sol	0,95	1
kamikase	1	0

Tabela 5: Probabilidades de sobrevivência do piloto do caça.

Inicialmente, percebe-se não haver uma solução minimax, por se tratar de um jogo sem ponto de sela, ou seja, um jogo em que as probabilidades são iguais. Não há portanto, estratégias puras para os "jogadores" envolvidos que não podem ser exploradas pelo adversário, ou seja, de um deles tirar proveito se vier conhecer a escolha feita pelo outro. Ao invés de escolher uma única estratégia, ambas as partes têm de diversificar as suas atuações, fazendo ora uma coisa, ora outra. O Teorema Minimax, que será demonstrado mais adiante, ofereceu como solução para essas circunstâncias a aplicação das estratégias disponíveis segundo uma taxa de frequência determinada. Para o piloto do caça, os ganhos mostram que a estratégia "huno ao sol" é quase sempre bem sucedida, enquanto a estratégia "kamikase" é de alto risco, visto que implicará morte certa se a tripulação do bombardeiro olhar para baixo. Deste modo, a intuição sugere que a mistura ótima para o piloto do caça é utilizar mais vezes a estratégia "huno ao sol" e só ocasionalmente a arriscada atuação "kamikase". Para calcularmos a quantidade de vezes que deverá ser feita cada uma destas opções, utilizaremos o método simples para jogos 2×2, ou seja, para jogos de duas pessoas com duas estratégias puras para cada uma.

Este método consiste em encontrar o valor absoluto da diferença entre as notações correspondentes das duas estratégias do "jogador de linha" ou do "jogador de coluna", fazendo depois a razão da segunda diferença em relação à primeira. No caso da Tabela 5, para descobrir sua mistura mini-max, o piloto do caça deve subtrair 0,95 de 1 na estratégia "huno ao sol", obtendo 0,05, e 0 de 1 na estratégia "kamikase", cuja razão em relação à primeira produz 1: 0,05 ou 20: 1. Assim, a melhor mistura para este jogador é usar a técnica do "huno ao sol" 20 vezes em cada 21 sortidas e a "kamikase" 1 em cada 21.

Fazendo o mesmo para a tripulação do bombardeiro, a sua mistura ótima será de olhar para cima 20 em cada 21 das vezes e para baixo 1 vez em cada 21. É claro que cada jogador deve ocultar do outro a estratégia específica que usará em determinada jogada, mas poderá revelar os seus conjuntos de probabilidade sem prejudicar de forma alguma os seus interesses.

O resultado esperado por cada jogador, depois de muitas jogadas realizadas, pode ser obtido a partir das proporções encontradas. Caso o piloto do caça utilize a mistura minimax descrita acima teria um nível de segurança esperado representado pela relação a seguir:

$$\begin{aligned} p &= h.c.g_{11} + h.b.g_{12} + k.c.g_{21} + k.b.g_{22} \\ &= \frac{20}{21}.\frac{20}{21}.0,95 + \frac{20}{21}.\frac{1}{21}.1 + \frac{1}{21}.\frac{20}{21}.1 + \frac{1}{21}.\frac{1}{21}.0 \\ &= 0,9524; \end{aligned} \tag{1}$$

em que h é a estratégia "huno ao sol", c é a estratégia "olhar para cima", k é a estratégia "kamikase" e b é a estratégia "olhar para baixo".

Observa-se que este resultado é ligeiramente superior ao nível de segurança certo de 0,95 do piloto do caça que siga sempre a estratégia do "huno ao sol", isso de acordo com a Tabela 5.

Mas para obter este nível de sobrevivência mais elevado, o piloto do caça tem que aceitar correr o risco de morte certa caso escolha a estratégia "kamikase" e a tripulação do bombardeiro "olhar para baixo". Cabe salientar que a primeira parcela da igualdade (1) é determinada pela multiplicação da probabilidade do piloto do caça escolher a opção "huno ao sol" com a proporção da tripulação do bombardeiro optar por "olhar para cima" e com o valor correspondente na matriz dos ganhos. As outras parcelas podem ser obtidas da mesma maneira, mas com seus respectivos valores.

Fazendo as contas de seu ganho, a tripulação do bombardeiro chega a conclusão semelhante, mas simétrica, isso porque, mais uma vez, trata-se de um jogo de soma zero. Por causa da simetria do jogo, as misturas de estratégias garantem aos dois competidores os mesmos resultados conjuntos, assim como será demonstrado no Teorema Minimax de von Neumann .

Quando se trata de ganhar ou perder, a mistura minimax pode vir a ser o único caminho a ser seguido. Mas o sucesso que esta oferece em jogos de soma zero, ao reduzir ao mínimo as perdas de cada parte, nem sempre é garantia de boa escolha em jogos de soma variante. Em jogos cuja soma dos resultados é diferente de zero, a estratégia mista minimax não é a única solução existente, nem mesmo a melhor, em alguns casos a comunicação prévia e a cooperação entre os participantes podem gerar resultados mais significativos, isto foi o que Nash concluiu após estudar com mais afinco jogos deste tipo.

3.6 Dominância

Uma estratégia simples P é dominada por uma estratégia simples Q se, para cada estratégia simples do adversário, o componente de pagamento associado a P não é melhor que o componente de pagamento associado a Q. Como uma estratégia simples dominada nunca pode fazer parte de uma estratégia ótima, a linha ou coluna correspondente da matriz do jogo pode ser eliminada a priori.

Suponha agora que todos os jogadores tenham uma estratégia estritamente dominante. É de se esperar que neste caso todos os jogadores usem exatamente as suas estratégias dominantes. Quando isto acontece nós dizemos que o jogo é resolvível por estratégias estritamente dominantes.

Abaixo trazemos novamente o exemplo do dilema do prisioneiro, agora com o enfoque de dominância.

Exemplo 12. *Dilema do prisioneiro*

O dilema dos prisioneiros pode ser representado da seguinte maneira; veja a Tabela 6.

	Prisioneiro 2	
Prisioneiro 1	C	N
C	-5, -5	-1, -10
N	-10, -1	-2, -2

Tabela 6: Possibilidades do dilema do prisioneiro.

Na Tabela 6, se ambos confessarem, eles ficarão na cadeia 5 anos; se o prisioneiro 1 confessar e o prisioneiro 2 não confessar, então o prisioneiro 1 ficará 1 ano na cadeia e o prisioneiro 2 ficará 10 anos na cadeia; se o prisioneiro 1 não confessar e o prisioneiro 2 confessar, então o prisioneiro 1 ficará 10 anos na cadeia e o prisioneiro 2 ficará 1 ano; se ambos não confessarem, eles ficarão 2 anos na cadeia.

No jogo acima, independentemente do que o jogador ou prisioneiro 2 esteja jogando, a melhor estratégia para o jogador 1 é confessar. A mesma coisa acontece para o jogador 2. Portanto, o jogo acima é resolvível por estratégias estritamente dominantes e sua solução é $(C; C)$. Ou seja, o conceito de solução por estratégias estritamente dominantes nos diz que dado o jogo acima os dois prisioneiros confessariam. De fato, dada a matriz de ganhos acima, é difícil imaginar que os jogadores agiriam de forma diferente.

No exemplo acima, embora o jogo tenha uma solução bem natural, nós podemos observar que o ganho final dos agentes não parece ser muito bom, dadas as opções que eles tinham. Em particular, caso ambos não confessassem os dois obteriam um ganho estritamente maior. Ou seja, em termos de ganhos, a solução do jogo não é eficiente. Esta é uma característica marcante de situações estratégicas. Nós vamos ver que em geral, independentemente do conceito de solução usado, as soluções de jogos não têm que ser eficientes.

Jogos resolvíveis por estratégias estritamente dominantes são a melhor situação que podemos encontrar em Teoria dos Jogos. A solução de tais jogos é simples, intuitiva e geralmente corresponde ao que esperaríamos que ocorresse na vida real. O único problema com tal conceito de solução é que poucos jogos podem ser resolvidos desta maneira.

3.7 Solução por programação linear

As estratégias ótimas garantidas pelo Teorema minimax, assim como o valor do jogo, podem ser calculadas por programação linear. A estratégia ótima do jogador II resulta da solução do seguinte programa linear:

$$
\begin{array}{rc}
\textbf{maximizar}: & z = -y_{n+1} \\
\textbf{sujeito a}: & g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \dots + g_{1n}y_n - y_{n+1} \leq 0 \\
: & g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \dots + g_{2n}y_n - y_{n+1} \leq 0 \\
 & \vdots \\
: & g_{m1}y_1 + g_{m2}y_2 + \dots + g_{mn}y_n - y_{n+1} \leq 0 \\
: & y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1
\end{array}
\tag{2}
$$

com: $y_1, y_2, ..., y_n$ não-negativos.

Aqui $G^* = y^*_{n+1}$ e $Y^* = (y^*_1, y^*_2, ..., y^*_n)^T$. Aumentando inicialmente cada g_{ij} pelo mesmo valor, isto inaltera a natureza do jogo, podemos forçar . Então o ganho esperado para o jogador I é também não-negativo. Como esta quantidade é representada por y_{n+1} no programa (2), segue que todas as variáveis podem ficar restritas a valores não-negativos sob certas circunstâncias. Analogamente, y_{n+1} pode ser substituído pela diferença entre duas

novas variáveis não-negativas. A estratégia ótima para o jogador I é provavelmente um vetor cujos componentes são a solução do equivalente do programa (2).

Sempre que um jogador tiver somente estratégias simples, a estratégia ótima para o jogador pode ser determinada graficamente. Se ambos os jogadores tiverem exatamente duas estratégias simples, então, as estratégias ótimas são

$$x_1^* = \frac{g_{22} - g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \qquad x_2^* = \frac{g_{11} - g_{12}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} = 1 - x_1^* \tag{3}$$

$$y_1^* = \frac{g_{22} - g_{12}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \qquad y_2^* = \frac{g_{11} - g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} = 1 - y_1^* \tag{4}$$

com

$$G^* = \frac{g_{11}.g_{22} - g_{12}.g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}}. \tag{5}$$

Teorema 1 (Minimax de von Neumann). *Em um jogo de soma nula e dois jogadores, com o jogador I tendo n estratégias puras e o jogador II tendo m estratégias puras, sendo n e m finitos, então, ao admitir estratégias mistas, sempre existe a solução ótima do jogo, ou seja, sempre vale $g_{min}^M = g_{max}^M = v$.*

Demonstração. Suponhamos que o jogo de soma nula seja dado pela seguinte matriz de pagamento

	II_1	II_2
I_1	a	b
I_2	c	d

em que I_1, I_2 são as estratégias do jogador I; II_1, II_2 são as estratégias do jogador II, que pode ser representada pela matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Então,

$$g_I = \left(\frac{d-c}{a+d-b-c}, \frac{a-b}{a+d-b-c} \right);$$

$$g_{II} = \left(\frac{d-b}{a+d-b-c}, \frac{a-c}{a+d-b-c} \right);$$

$$v = \left(\frac{a.d - b.c}{a+d-b-c} \right).$$

são respectivamente, uma estratégia ótima para o jogador I, jogador II e o valor do jogo. Sejam $g_I = (x \quad 1-x)$ e $g_{II} = (y \quad 1-y)$. Então, $g_I.A \geq (v \quad v)$ e $g_{II}.A \leq (v \quad v)$ é equivalente a

i) $(x \quad 1-x) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq (v \quad v);$

$(ax + c - cx \quad bx + d - dx) \geq (v \quad v);$

ii) $(y \quad 1-y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leq (v \quad v);$

$(ay + c - cy \quad by + d - dy) \leq (v \quad v).$

Resolvendo as inequações acima como equações nas incógnitas x, y e v e considerando, $g(x,y) = (b-d)x + (c-d)y + (a+d-b-c)xy + d$, obtemos o resultado desejado:

$$g^M_{min} = g^M_{max} = v.$$

□

O Teorema Minimax de von Neumann assegurava que para todos os jogos de duas pessoas e soma zero existia uma estratégia mista ótima para cada jogador e se eles as utilizassem teriam o mesmo resultado médio esperado, que seria o melhor ganho que cada jogador poderia esperar se o adversário jogasse racionalmente.

Em [6] e [9] há a demonstração de que resolver um jogo de soma nula e dois jogadores é equivalente a resolver um problema de programação linear, sendo esta a técnica mais eficaz e mais empregada atualmente.

3.8 Solução de jogos com matriz de pagamento $n \times m$

3.8.1 Equilíbrio de Nash

Considere o jogo na Tabela 7.

	Jogador 2	
Jogador 1	**E**	**D**
C	**5, 1**	**4,0**
M	**6, 0**	**3,1**
B	**6, 4**	**3,4**

Tabela 7: Possibilidades dos jogadores 1 e 2.

No jogo representado na Tabela 7, em termos de melhores respostas, nós temos $B^1(E) = \{M; B\}$, $B^1(D) = \{C\}$, $B^2(C) = \{E\}$, $B^2(M) = \{D\}$ e $B^2(B) = \{E; D\}$, em que $B^k(I)$ representa a melhor resposta do ogador k quando ele adota a estratégia I. Observe que B é uma melhor resposta para o jogador I quando o jogador II joga E e E é uma melhor resposta para o jogador II quando o jogador I joga B. De certa forma, existe um certo equilíbrio no perfil de estratégias $(B; E)$. Mesmo se o jogador II já tivesse observado que o jogador I jogou B, não haveria razão para o jogador II mudar de estratégia. De forma similar, mesmo que o jogador I já tivesse observado que o jogador II jogou E, não haveria motivo para o jogador I desejar mudar de estratégia. Quando um perfil de estratégias satisfaz tal tipo de condição nós dizemos que tal perfil é um equilíbrio de Nash do jogo.

Formalmente, considere um jogo com N jogadores. Um perfil de estratégias $(a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo se para todo jogador i, $a_i^* \in B^i(a_1^*, a_2^*, ..., a_{i-1}^*, ..., a_N^*)$. Ou seja, em um equilíbrio de Nash todos os jogadores estão fazendo o melhor que eles poderiam fazer dadas as estratégias que estão sendo jogadas pelos outros jogadores.

Exemplo 13. *Dilema do prisioneiro*

Considere o dilema dos prisioneiros original; veja a Tabela 8.

	Prisioneiro 2	
Prisioneiro 1	**C**	**N**
C	**-5, -5**	**-1, -10**
N	**-10, -1**	**-2, -2**

Tabela 8: Possibilidades do dilema do prisioneiro.

Observe que $B^1(C) = \{C\}$ **e** $B^2(C) = \{C\}$. **Ou seja, para qualquer um dos jogadores, se o outro estiver jogando C, então a melhor coisa que ele tem a fazer é jogar** C, **também. Portanto, o perfil** $(C; C)$ **é um equilíbrio de Nash do jogo Dilema dos Prisioneiros. Vimos no exemplo acima que o perfil de estratégias** $(C; C)$ **é um equilíbrio de Nash para o jogo dilema dos prisioneiros. Lembre-se que tal perfil também era a solução por dominância do jogo. De fato, tal propriedade é geral, como a proposição abaixo mostra:**

Proposição 1. *Suponha que um perfil* $(a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*)$ *seja a solução por dominância de um determinado jogo. Então, tal perfil é também um equilíbrio de Nash do jogo.*

Demonstração. Fixe um jogador qualquer i. Como, por hipótese, a_i^* é uma estratégia estritamente dominante para i, sabemos que para qualquer estratégia $a_i \in A_i$, com $a_i \neq a_i^*$ nós temos que ter

$$U^i(a_1^*, a_2^*, ..., a_i^*, ..., a_N^*) > U^i(a_1^*, a_2^*, ..., a_i, ..., a_N^*).$$

Mas isto implica que $B^i(a_1^*, a_2^*, ..., a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, ..., a_N^*) = \{a_i^*\}$. Como isto é válido para todos os jogadores i, nós vemos que $(a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*)$ satisfaz a condição que define um equilíbrio de Nash. □

Vamos analisar o exemplo a seguir que é uma aplicação da proposição anterior.

Exemplo 14.

Considere o seguinte jogo em que o jogador I tem as estratégias E, F, G, H **e o jogador 2 as estratégias** A, B, C, D; **veja a Tabela 9.**

	Jogador 2			
Jogador 1	**A**	**B**	**C**	**D**
E	**0, 7**	**2, 5**	**4, 0**	**2, 1**
F	**5, 2**	**3, 3**	**5, 2**	**0, 1**
G	**7, 0**	**2,5**	**0, 7**	**0, 1**
H	**0, 0**	**0, 0**	**0, 0**	**9, -1**

Tabela 9: Matriz de pagamento.

Se você tiver paciência, você pode checar na Tabela 9 que nenhum jogador tem uma estratégia dominante no jogo acima. Por outro lado, vemos que a estratégia D é estritamente dominada pela estratégia B. Portanto, se aplicarmos o raciocínio de eliminação de estratégias estritamente dominadas nós podemos simplificar o jogo acima para; veja a Tabela 10.

	Jogador 2		
Jogador 1	A	B	C
E	0, 7	2, 5	4, 0
F	5, 2	3, 3	5, 2
G	7, 0	2, 5	0, 7
H	0, 0	0, 0	0, 0

Tabela 10: Matriz de pagamento sem a coluna D.

Mas agora, no jogo simplificado na Tabela 10, vemos que a estratégia H é estritamente dominada pela estratégia F. Novamente, aplicando o conceito de eliminação de estratégias estritamente dominadas nós obtemos o seguinte jogo, ainda mais simples; veja a Tabela 11.

	Jogador 2		
Jogador 1	A	B	C
E	0, 7	2, 5	4, 0
F	5, 2	3, 3	5, 2
G	7, 0	2, 5	0, 7

Tabela 11: Matriz de pagamento sem a coluna D e a linha H.

Continuando com o mesmo procedimento, agora observe na Tabela 11 que a estratégia E é estritamente dominada pela estratégia F. O jogo reduz-se para o que está representado na Tabela 12.

	Jogador 2		
Jogador 1	A	B	C
F	5, 2	3, 3	5, 2
G	7, 0	2, 5	0, 7

Tabela 12: Matriz de pagamento sem a coluna D e as linhas E e H.

Na Tabela 12 a estratégia que é estritamente dominada é do jogador 2. Observe que A é estritamente dominada por B, o que nos dá o jogo descrito pela Tabela 13.

	Jogador 2	
Jogador 1	B	C
F	3, 3	5, 2
G	2, 5	0, 7

Tabela 13: Matriz de pagamento sem as colunas A e D e as linhas E e H.

Na Tabela 13 G é estritamente dominada por F e o jogo simplifica-se para a Tabela 14.

	Jogador 2	
Jogador 1	**B**	**C**
F	**3, 3**	**5, 2**

Tabela 14: Matriz de pagamento sem as colunas A e D e as linhas E, G e H.

Finalmente, na Tabela 14 C é estritamente dominada por B, o que nos dá a previsão única de que no jogo acima os jogadores acabarão jogando F e B.

Na Tabela 14 conclui-se que $B^1(B) = \{F\}$ e $B^2(F) = \{B\}$, portanto, $(F; B)$ é também um equilíbrio de Nash do jogo.

Novamente, tal fenômeno é geral como a proposição abaixo mostra.

Proposição 2. *Suponha que ao aplicarmos o procedimento de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas a um determinado jogo somente o perfil*

$$(a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*)$$

sobreviva. Então, $(a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo em questão.

Demonstração. De acordo com a proposição 1, que já foi demonstrada, se um perfil $(a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*)$ é a solução por dominância de um determinado jogo. Então, tal perfil é também um equilíbrio de Nash do jogo.Como $(a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*)$ foi a única estratégia que sobreviveu, então ela é solução e sendo solução é um equilíbrio de Nash. □

Assim, usando as duas proposições, para determinar se um jogo tem equilíbrio de Nash basta olhar para a forma mais simplificada do jogo após fazer todas as interações por dominância.

4 Exemplos Resolvidos de Jogos de Soma Nula

Neste capítulo vamos discutir alguns exemplos de jogos de soma nula utilizando as definições, proposições e teorema do capítulo anterior; veja [28], [29], [30], [31] e [32].

Exemplo 15. *Jogo de par ou ímpar com três dedos*

Considere um jogo no qual dois jogadores, simultaneamente, mostram 1, 2 ou 3 dedos cada. Se a soma dos dedos é par, o jogador I ganha, em reais, do jogador II a soma dada, se a soma é ímpar, o jogador II ganha, em reais, do jogador I a soma dada.

Neste jogo simples de perde-ganha ou soma zero a estratégia são os lances individuais. Assim, os jogadores I e II têm as mesmas estratégias $1, 2, 3$. A matriz de pagamento é mostrada; veja a Tabela 15.

	Jogador II		
Jogador I	1	2	3
1	2, -2	-3, 3	4, -4
2	-3, 3	4, -4	-5, 5
3	4, -4	-5, 5	6, -6

Tabela 15: Jogo do par ou ímpar com três dedos.

A Tabela 15 acima pode ser representada pela matriz g_I abaixo e a matriz de ganhos do jogador II é dada por $g_{II} = -g_I$.

$$P_I = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

e

$$g_{II} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Observe que na Tabela 15, g_{11} indica que os jogadores I e II colocaram 1, como a soma é par, o jogador I ganhou 2 reais, $1 + 1 = 2$; g_{32} indica que o jogador I colocou 3 e o jogador II colocou 2, como a soma é ímpar, então o jogador I perdeu 5 reais, $3 + 2 = 5$, e é indicado por -5.

A matriz g_I ainda poderia ser representada por:

$$g_I = (g_{ij})_{3\times 3} = \begin{cases} i+j, & \text{se } i \ e \ j \text{ têm a mesma paridade} \\ -(i+j), & \text{se } i \ e \ j \text{ não têm a mesma paridade}. \end{cases}$$

No jogo acima, se o jogador I sempre mostra 3 dedos, o jogador II pode anular esta estratégia simples mostrando 2 dedos. Se o jogador I adota a sequência de estratégias simples $3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, ...$, o jogador II pode anular esta estratégia com a sequência $2, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, ...$

Se o jogador I adota a estratégia mista $X = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, então ele pretende mostrar 1 dedo $\frac{1}{6}$ das vezes, 2 dedos $\frac{1}{3}$ das vezes e 3 dedos $\frac{1}{2}$ das vezes. Para implantar a estratégia o jogador I pode usar o auxílio de um dado, ou seja, se ao lançar o dado sair o número 1, probabilidade $\frac{1}{6}$, ele mostraria um dedo, se sair 2 ou 3, probabilidade $\frac{1}{3}$, ele mostraria dois dedos e se sair 4, 5, ou 6, probabilidade $\frac{1}{2}$, ele mostraria três dedos. Observe que a maior probabilidade é aquela que você pode unir ganho alto com risco baixo de perder. No jogo citado acima não há equilíbrio de Nash.

Exemplo 16. *Pedra, papel, tesoura*

São três elementos: pedra, papel e tesoura. A pedra, representada pelo punho fechado; papel, mão aberta; e tesoura, os dedos indicador e médio formam um V. Regras básicas: dado um sinal, cada um dos jogadores apresenta um elemento. Pedra perde para papel, o papel embrulha a pedra; papel perde para tesoura, esta corta o primeiro; e, finalmente, a tesoura perde para a pedra, que quebra aquela.

Figura 12: Pedra, papel e tesoura

Para o jogo acima considere:

i) Ganha = 1;

ii) Perde = -1;

iii) Empate = 0.

Assim, a tabela de ganhos para o jogo é representada abaixo; veja a Tabela 16.

	Jogador II		
Jogador I	Pedra	Papel	Tesoura
Pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
Papel	1, -1	0, 0	-1, 1
Tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

Tabela 16: Matriz de pagamento do jogo pedra, papel, tesoura.

No jogo pedra, papel, tesoura há as seguintes possibilidades:

i) $(pedra, pedra) = (0, 0)$. Dá empate;

ii) $(pedra, papel) = (-1, 1)$. O jogador II ganha;

iii) $(pedra, tesoura) = (1, -1)$. O jogador I ganha;

iv) $(papel, pedra) = (1, -1)$. O jogador I ganha;

v) $(papel, papel) = (0, 0)$. Dá empate;

vi) $(papel, tesoura) = (-1, 1)$. O jogador II ganha;

vii) $(tesoura, pedra) = (-1, 1)$. O jogador II ganha;

viii) $(tesoura, papel) = (1, -1)$. O jogador I ganha;

ix) $(tesoura, tesoura) = (0, 0)$. Dá empate.

No jogo acima há equilíbrio de Nash: (pedra, pedra); (papel, papel) e (tesoura, tesoura).

Exemplo 17. *Jogo de combinar moedas ou matching pennies*

Nesse jogo, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador dá sua moeda para o primeiro. Se uma das moedas apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, é a vez do primeiro jogador dar sua moeda pra o segundo. Esse jogo se encontra representado por sua matriz de ganhos dada abaixo; veja a Tabela 17.

	Jogador II	
Jogador I	Cara	Coroa
Cara	1, -1	-1, 1
Coroa	-1, 1	1, -1

Tabela 17: Matriz de ganhos dos jogadores no jogo de combinar moedas.

No jogo acima há as seguintes possibilidades:

i) $(cara, cara) = (1, -1)$. O jogador I ganha;

ii) $(cara, coroa) = (-1, 1)$. O jogador II ganha;

iii) $(coroa, cara) = (-1, 1)$. O jogador II ganha;

iv) $(coroa, coroa) = (1, -1)$. O jogador I ganha.

No jogo acima não há equilíbrio de Nash, pois em qualquer estratégia um perde a moeda e o outro ganha não havendo uma estratégia ótima.

Exemplo 18. *Bolas de gude*

Um recipiente contém quantidades iguais de bolas de gude vermelhas e verdes. O jogador I seleciona aleatoriamente uma bola de gude e verifica sua cor sem mostrá-la ao jogador II. Se a bola de gude é vermelha, o jogador I diz, "Eu tenho uma bola de gude vermelha", e requisita 1 real do jogador II. Se a bola de gude é verde, ele diz "A bola de gude é verde" e paga 1 real ao jogador II ou blefa dizendo "A bola de gude é vermelha" e requisita 1 real do jogador II. Sempre que o jogador I requisitar 1 real, o jogador II pode pagar ou contestar a afirmação do jogador I de que a bola de gude é vermelha. Uma vez contestado, o jogador I deve mostrar a bola de gude ao jogador II. Se for mesmo vermelha, o jogador II paga 2 reais ao jogador I, se não for vermelha, o jogador I paga ao jogador II 2 reais.

O jogador I tem somente duas estratégias simples: I_1: **dizer a cor real da bola de gude;** I_2: **dizer que a bola de gude é vermelha mesmo não sendo.**

O jogador II também tem duas estratégias simples: II_1: **acreditar no jogador I;** II_2: **acreditar se a afirmação for verde e contestar se ela for vermelha.**

Como cada jogador ganha o que o outro perde, este é um jogo de soma zero de dois jogadores.

A Tabela 18 traz as possibilidades citadas.

		II_1	II_2
I_1	**Vermelha**	**1**	**2**
I_1	**Verde**	**-1**	**-1**
I_2	**Vermelha**	**1**	**2**
I_2	**Verde**	**1**	**-2**

Tabela 18: Possibilidades de ganho do jogador I no jogo de bola de gude.

O vetor X **é dado por** $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Neste jogo, os componentes de pagamento associados com as estratégias simples são variáveis aleatórias; nós os substituímos pelos seus valores esperados. Assim:

i) **o ganho esperado do jogador I se ele diz a verdadeira cor da bola escolhida e o jogador II acredita pode ser representado por** g_{11}. **Como metade das bolas são vermelhas e a outra metade verde,**

$$g_{11} = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.(-1) = 0;$$

ii) **o ganho esperado do jogador I se ele diz a verdadeira cor da bola escolhida e o jogador II contesta pode ser representado por** g_{12}. **Como uma bola tem probabilidade** $\frac{1}{2}$ **de ser de cada cor, metade das vezes não haverá contestação e metade das vezes o jogador II contestará e perderá. Portanto,**

$$g_{12} = \frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.2 = \frac{1}{2};$$

iii) o ganho esperado do jogador I se ele diz que a bola é vermelha mesmo não sendo e o jogador II acredita pode ser representado por g_{21}. Assim,

$$g_{21} = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.1 = 1;$$

iv) o ganho esperado do jogador I se ele diz que a bola é vermelha mesmo não sendo e o jogador II contesta pode ser representado por g_{22}. Assim,

$$g_{22} = \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2}.(-2) = 0.$$

Estes resultados estão representados abaixo pela matriz de pagamento para o jogo; veja a Tabela 19.

	Jogador II	
Jogador I	II_1	II_2
I_1	**0**	$\frac{1}{2}$
I_2	**1**	**0**

Tabela 19: Ganhos do jogador I no jogo de bolas de gude.

Agora vamos encontrar as estratégias ótimas para os jogadores I e II. Como este jogo envolve exatamente duas estratégias simples para cada jogador, as estratégias ótimas ou mistas são dadas pelas equações (3) e (4) do Capítulo 3:

$$x_1^* = \frac{g_{22} - g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} = \frac{0 - 1}{0 + 0 - \frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3}; \qquad x_2^* = 1 - x_1^* = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$y_1^* = \frac{g_{22} - g_{12}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{0 + 0 - \frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{3}; \qquad y_2^* = 1 - y_1^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Da mesma forma o jogador II deve acreditar no jogador I um terço das vezes, enquanto contestará o jogador I os outros dois terços se o jogador I disser que tem uma bola vermelha. O jogador I deve dizer a verdadeira cor da bola dois terços das vezes, enquanto blefará o outro terço se a bola for verde. O resultado será, pela equação (5), um ganho esperado de

$$G^* = \frac{g_{11}.g_{22} - g_{12}.g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} = \frac{0.0 - \frac{1}{2}.1}{0 + 0 - \frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{3}.$$

para o jogador I cada vez que o jogo é realizado. O pagamento esperado para o jogador II é o negativo deste valor.

Exemplo 19. *Redes de supermercado*

Cada uma de duas redes de supermercados propõe construir uma loja em uma região rural que é composta por três cidades. As distâncias entre as cidades são mostradas na Figura 13. Aproximadamente 45% da população próxima à cidade A, 35% próxima à cidade B e 20% próxima à cidade C. Por ser a rede I maior e ter desenvolvido uma melhor reputação que a rede II, ela controlará a maioria dos negócios, sempre que suas situações forem comparadas. Cada rede está ciente do interesse da outra na região, e ambas fizeram pesquisas de mercado que dão projeções idênticas. Se ambas as redes se localizarem na mesma cidade ou equidistantes de uma cidade, a rede I controlará 65% dos negócios nesta cidade. Se a rede I ficar mais próxima de uma cidade que a rede II, a rede I controlará 90% dos negócios dessa cidade. Se a rede I ficar mais distante de uma cidade que a rede II, ela controlará 40% ainda dos negócios desta cidade. O restante dos negócios sob qualquer circunstância irá para a rede II. Além disso, ambas as redes sabem que é uma política da rede I não localizar em cidades muito pequenas e a cidade C pertence a esta categoria.

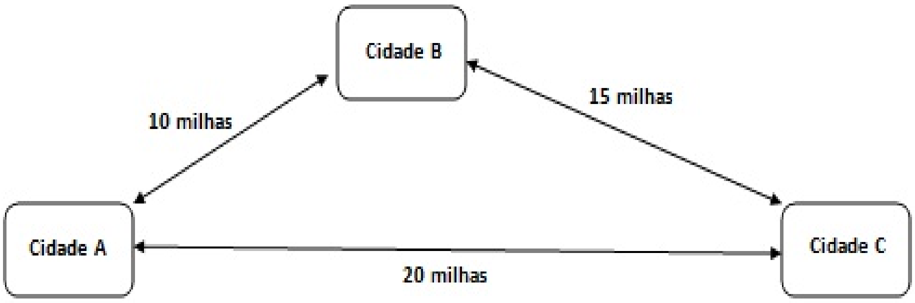

Figura 13: Cidades de instalação dos supermercados.

Existem dois jogadores no jogo, rede I e rede II. O jogador I tem duas estratégias simples: I_1 localizar-se na cidade A e I_2 localizar-se na cidade B. O jogador II tem três estratégias simples: II_1 localizar-se na cidade A, II_2 localizar-se na cidade B e II_3 localizar-se na cidade C.

Consideramos como pagamento da rede I os percentuais de negócios na região que pertencerão à rede I, de acordo com as pesquisas de mercado. Como cada ponto percentual de acréscimo ou decréscimo representa um decréscimo ou acréscimo respectivamente, para a rede II, este é um jogo de soma zero de duas pessoas.

Se ambas as redes se localizarem na mesma cidade, então o jogador I receberá 65% dos negócios de toda a região. Assim, $g_{11} = g_{22} = 65$. Se a rede I se localizar na cidade A, enquanto a rede II na cidade B, então o jogador I estará mais próximo de A que o jogador II, porém o jogador II estará mais próximo de B e C que o jogador I. Consequentemente, o jogador I conseguirá

$$g_{12} = 0,90.0,45 + 0,40.0,35 + 0,40.0,20 = 0,625$$

ou $62,5\%$ dos negócios da região. Portanto $g_{12} = 62,5$. Se a rede I se localizar na cidade B e a rede II na cidade C, então o jogador I estará mais próximo de a e B, enquanto o jogador II estará mais próximo de C. Consequentemente,

o jogador I terá

$$g_{23} = 0,90.0,45 + 0,90.0,35 + 0,40.0,20 = 0,80$$

ou 80% dos negócios da região. Portanto, $g_{23} = 80$. Da mesma forma, $g_{13} = 80$ e $g_{21} = 67,5$.

Estes resultados estão localizados na Tabela 20, que é a matriz de pagamento para este jogo.

	Jogador II		
Jogador I	II_1	II_2	II_3
I_1	**65**	**62,5**	**80**
I_2	**67,5**	**65**	**80**

Tabela 20: Matriz de pagamento para as redes de supermercado.

Pelo critério de dominância o jogador I pode descartar I_1 localizar-se na cidade A, já que os pagamentos desta estratégia são sempre menores ou iguais aos pagamentos de I_2. O jogador II pode descartar II_1 e II_3. Com a primeira linha e a primeira e a terceira colunas eliminadas, a matriz de pagamento consiste em uma única entrada. Daí I_2 e II_2 são estratégias ótimas. Ambas as redes de supermercados podem se localizar na cidade B. A rede I controlará 65% dos negócios da região, com os 35% restantes ficando para a rede II.

O exemplo abaixo é a batalha do mar de Bismarck; veja [8].

Exemplo 20. *Batalha do mar de Bismarck*

Em 23 de dezembro de 1942, o alto comando Japonês decidiu transferir cerca de 100.000 soldados de postos na China ocupada e no Japão para Lae na Nova Guiné, a fim de reforçar suas forças naquela localidade. Este reforço em homens poderia reverter a derrota sofrida na Batalha de Guadalcanal, evacuada pelos nipônicos na semana seguinte. As tropas eram necessárias nas cercanias de Lae, onde uma ofensiva aliada era esperada e iminente. Contudo, a realocação de um volume grande de tropas por mar era uma tarefa árdua para a Marinha Imperial Japonesa, já tão desfalcada tanto de navios de transporte como navios de escolta, mas o Alto Comando Nipônico considerou uma "necessidade militar". Pelo final de fevereiro de 1943, a 20ª e a 41ª Divisões de Infantaria foram transportadas com sucesso até Wewak na Nova Guiné, sendo que a próxima unidade a ser transportada era a 51ª D.I. desde a base japonesa de Rabaul para Lae. Tal missão seria das mais difíceis, pois os Aliados tinham total supremacia aérea na área, especialmente no Estreito de Vitiaz, por onde os navios obrigatoriamente teriam que passar.

Mesmo assim os japoneses reuniram para a missão um comboio composto de 8 navios de transporte de tropas e uma escolta de 8 destróieres, partiu de Simpsom Harbour em Rabaul na ilha Nova Bretanha em Papua-Nova Guiné. Aproximadamente 100 caças baseados em terra faziam a cobertura aérea. O oficial comandante da 51ª D.I. – Tenente-General Hidemitsu Nakano – estava á bordo do destróier Yukikaze, juntamente com o comandante

da operação, Contra-Almirante Kimura Masatomi. A frota transportava em torno de 6.900 soldados, para reforçar suas linhas de defesa em Lae, navegando à velocidade máxima, o transporte de tropa mais lento navegava a sete nós em máxima velocidade.

As Forças Aéreas Aliadas na região do Sudoeste do Pacífico sob o comando do Major–General George Kenney e baseadas na parte sul da Nova Guiné ocupada pelas forças aliadas, estavam preparadas para tal eventualidade. Em particular, as tripulações aéreas de aparelhos B-25 Mitchell da Força Aérea do Exército dos EUA, USAAF, e dos Beaufighters da Real Força Aérea Australiana, RAAF, já estavam treinando ataques aéreos contra alvos em superfície, tendo desenvolvido uma nova técnica, chamada de "skip bombing", que consistia em aviões de bombardeio de médio porte soltarem as bombas em altitudes ultra baixas, 60 a 90 metros, e apenas pouco mais de 100 metros de distância dos alvos, reduzindo em quase zero à probabilidade de erro. Em muitos casos as bombas até quicavam na superfície do mar antes de atingirem o alvo.

Um dado importante da situação era o fato de que o comboio japonês dispunha de duas rotas alternativas: a rota pelo sul, que apresentava tempo bom e boa visibilidade, e a rota pelo norte, que apresentava tempo ruim e baixa visibilidade. As forças aliadas, por outro lado, somente possuíam aviões de reconhecimento para pesquisar uma rota por vez, sendo que a busca em qualquer uma das rotas consumia um dia inteiro.

Dessa forma, se as forças aliadas enviassem seus aviões de reconhecimento para a rota certa, poderiam começar o ataque em seguida. Porém, se mandassem os aviões para a rota errada, perderiam um dia de bombardeios. Os aliados também sabiam que se os japoneses escolhessem o sul e fossem localizados de imediato, o bom tempo garantiria três dias de bombardeio. Todavia, se os japoneses tivessem escolhido a rota norte, mesmo que os aliados os localizassem logo no primeiro dia de buscas, o mau tempo permitiria apenas dois dias de bombardeio.

A melhor situação para a aviação aliada aconteceria se os aliados enviassem os aviões de reconhecimento para a rota sul e os japoneses tivessem escolhido essa rota. Nesse caso, seria possível atacar o comboio durante três dias. A pior situação para os aliados seria se os japoneses tivessem ido pelo norte e os aviões de reconhecimento fossem enviados no primeiro dia para a rota sul: os aliados perderiam um dia por iniciar a busca na rota errada e mais outro dia pelo mau tempo da rota norte, dispondo apenas de um dia para bombardear o comboio.

Caso os japoneses tivessem escolhido a rota norte e os aliados também mandassem seus aviões iniciarem a busca por essa rota, os aliados perderiam apenas um dia de bombardeio devido ao mau tempo, tendo dois dias a sua disposição para atacar o comboio. Por ultimo, se os japoneses escolhessem o sul e os aliados começassem sua busca pelo norte, perderiam um dia em função do engano e teriam dois dias de bombardeio efetivo à disposição.

Assim, a batalha do mar de Bismarck pode ser representada pela Tabela 21.

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	Rota Sul (t_1)	Rota Norte (t_2)
Busca Rota Sul no Primeiro Dia (s_1)	3, -3	1, -1
Busca Rota Norte no Primeiro Dia (s_2)	2, -2	2, -2

Tabela 21: A Batalha do Mar de Bismarck.

Na Tabela 21 apresentamos a forma estratégica do jogo da batalha do mar de Bismarck da maneira usual, com as recompensas do jogador que se encontra nas linhas, as forças aliadas em primeiro lugar e as recompensas do jogador que se encontra nas colunas, o comboio japonês, em segundo lugar.

Dessa forma, o melhor que os aliados tinham a fazer naquela situação era mandar os aviões fazerem a busca no primeiro dia pela rota norte.

Para os japoneses a rota norte era a melhor das escolhas caso os aliados escolhessem o sul e era uma opção tão boa quanto a rota sul se os aliados escolhessem o norte. O alto comando japonês desejava obviamente minimizar as perdas.

A guerra foi vencida pelos Aliados, que massacraram os japoneses.

Os Aliados "adivinharam" por onde os japoneses viriam simplesmente considerando:

i) que os japoneses agiriam racionalmente, não se exporiam a perdas desnecessárias;

ii) os dados da situação, o número de dias de bombardeio que o tempo em cada rota permitiria.

Vamos determinar a função recompensa das forças aliadas e do comboio japonês por intermédio de

$$\min_{1\leq t\leq 2} \max_{1\leq s\leq 2} U(s,t):$$

i) vejamos inicialmente as maiores recompensas em cada coluna, considerando todas as linhas:

$$\max_{1\leq s\leq 2} U(s,t_1) = (s_1,t_1) = 3;$$

$$\max_{1\leq s\leq 2} U(s,t_2) = (s_2,t_2) = 2.$$

ou seja, a maior recompensa para os aliados e a pior para os japoneses, no caso em que comboio escolhe a rota sul, é representada por três dias de bombardeio: $(s_1,t_1) = 3$. Já o maior valor de recompensa para os aliados e, portanto, o pior para os japoneses, caso o comboio decida pela rota norte, são dois dias de bombardeio: (s_2,t_2).

ii) o passo seguinte é encontrar a menor entre essas duas recompensas, ou seja, após encontrarmos as maiores recompensas de cada coluna, consideradas todas as linhas, devemos procurar o menor valor de todas as colunas. Com os valores acima, é fácil concluir que:

$$\min_{1\leq t\leq 2} \max_{1\leq s\leq 2} U(s,t) = (s_2,t_2) = 2.$$

A expressão nos indica que a recompensa de 2, que corresponde à combinação de estratégias em que os aliados iniciam a busca pelo norte no primeiro dia e o comboio japonês escolhe a rota norte, é o valor minimax do jogo da batalha do mar de Bismarck: é o valor que representa o menor dano que o comboio japonês pode garantir, dadas suas opções e as opções dos aliados. Vamos agora examinar as menores recompensas em cada linha, considerando todas as colunas. Temos então que:

$$\min_{1\leq t\leq 2} U(s_1,t) = (s_1,t_2) = 1;$$

$$\min_{1\leq t\leq 2} U(s_2,t) = (s_2,t_2) = 2.$$

Temos agora de encontrar a maior dentre essas recompensas, ou seja, após encontrarmos as menores recompensas de cada linha, consideradas todas as colunas, devemos procurar o maior valor de todas as linhas. Ou seja, devemos encontrar:

$$\max_{1\leq s\leq 2}\min_{1\leq t\leq 2} U(s,t).$$

É fácil ver que:

$$\max_{1\leq s\leq 2}\min_{1\leq t\leq 2} U(s,t) = (s_2,t_1) = (s_2,t_2) = 2.$$

A expressão anterior indica que a recompensa de 2, que corresponde tanto à combinação de estratégias em que aos aliados iniciam a busca pelo norte e o comboio japonês escolhe o sul, como à combinação de estratégias em que os aliados e o comboio escolhem o norte, é o valor maximin do jogo da batalha do mar de Bismarck: é o valor que representa o maior dano que os aliados podem garantir, dadas as suas opções e as opções da marinha japonesa.

Quando as escolhas baseadas nesses critérios de segurança coincidem, ou seja, quando a combinação de estratégias para as quais o máximo entre os mínimos que o jogador nas linhas pode obter for a mesma para a qual o jogador nas colunas obtém o mínimo entre os máximos. Temos o equilíbrio do jogo.

5 Considerações Finais

Após análise de vários jogos de soma nula ou perde-ganha com dois jogadores percebe-se que, em sua maioria, há como otimizar e fazer cada lance racionalmente. Tudo baseado em uma teoria, Teoria dos Jogos, que foi, em alguns tópicos, estudada neste trabalho. Teoria esta que vem sendo estudada por grandes nomes citados e auxilia não somente em matemática, mas em tudo que envolve tomada de decisão. Assim, este trabalho pode ser usado tanto por alguém que queira começar a conhecer tópicos da Teoria dos Jogos, bem como aqueles que desejam dar um pontapé inicial para posteriormente aprofundar. Então é um trabalho tanto para alunos como para colegas professores da educação básica.

A partir deste trabalho podemos estender para outros tópicos da Teoria dos Jogos, tais como: jogos de soma não nula e dois jogadores; jogos com vários jogadores; soluções Pareto ótimas; jogos cooperativos e não-cooperativos; barganha ou negociação; jogos de mercado; teoria de oligopólios; leilões; metajogos e metaequilíbrio; jogos evolutivos; jogos sequenciais; análise de conflitos; circuitos elétricos; aplicações em economia, biologis e outras áreas, etc.

Referências

[1] Axelrod, R. The Evolution of Cooperation. Basic Books, Michigan (1984).

[2] Benjamin, A. T., Goldman, A. J. Analysis of N-Card le Her. *Jounal of Optimization Theory and Applications*, 114, (2002), 695-704.

[3] Casti, J. L.Cinco Regras de Ouro. Editora Saraiva, Brasil (1999).

[4] Cournot, A. A. Exposition de la Théorie dos Chances et des Probalités. Hachette, Paris (1843).

[5] Dantzig, G. B. A proof of the equivalence of de programming problem and the game problem. *In T. C. Koopmans ed., Activity Analysis of Production and Allocation, John Wiley*(1951), 330 - 338.

[6] Dantzig, G. B. Maximization of a linear function subject to linear inequalities. *In T. C. Koopmans ed., Activity Analysis of Production and Allocation, John Wiley & Sons*, New York (1951).

[7] Davis, M. D. Game Theory: A Nontechnical Introduction. Dover Publications (1997).

[8] Fiani, R. Teoria dos Jogos com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais. Elsevier, Rio de Janeiro (2009).

[9] Gale, D., Kuhn, H. W., Tucker, A. W. Linear programming and the theory of games. *In T. C. Koopmans (ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, John Wiley & Sons*, New York (1951), 317 - 329.

[10] Green, L., Myerson, J., Ostaszewski, P. Amount of reward has opposite effects on the discouting of delayed and probabilistis out cones. *Journal of Experimental Psychology: Leaming Memory, and cognition, 25*, (1999), 418-427.

[11] Harsanyi, J. C. Games Whit Incomplete Information Played by "Bayesian". *Players, Parts I, Management Science,*14, (1967), 159-182.

[12] Harsanyi, J. C. Games Whit Incomplete Information Played by "Bayesian". *Players, Parts II, Management Science,* 14, (1967), 320-334.

[13] Harsanyi, J. C. Games Whit Incomplete Information Played by "Bayesian". *Players, Parts III, Management Science,* 14, (1967), 486-502.

[14] Jones, A. J. Game theory: Mathematical Models of Conflict. Ellis Horwood (1980).

[15] Luce, R. D. & Raiffa, H. Games and Decisions. Wiley (1957).

[16] Morrow, J. D. Game Theory for Political Scientist. Princeton, NJ, Princeton University Press (1944).

[17] Nasar, S. Uma Mente Brilhante. Record (2003).

[18] Nash, J. F. Equilibrium Points in n-Person Games. Princeton University Press (1949).

[19] Nash, J. F. Non-cooperative Games. *Annals of Mathematics*, 54 (1951), 286-295.

[20] Nash, J. F. The Bargaining Problem. *Econometria,*18, Issue, Princeton University Press (1950), 155-162.

[21] Nash, J. F. Two-Penson Cooperative Games. *U.S, Air Force project Rand* (1950).

[22] Neumann, J. v. Zur Theorie del Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen 100*, Hungria (1928), 295-320.

[23] Neumann, J. v., Mongestern, O. Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton University Press (1944).

[24] Rapoport, A. Lutas, Jogos e Debates. Brasília: Editora Universidade de Brasília (1980), 325.

[25] Schelling, T. C. The Strategy of Conflict. Harvard University Press (1980).

[26] Selten, R. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit. *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft 121*, Alemanha (1965), 301-324 e 667-689.

[27] Shubik, M. Game Theory in the Social Sciences. MIT Press (1982).

[28] Silva, A R. Apresenta textos detalhados sobre a Teoria dos Jogos. Disponível em: <http://geocities.yahoo.com.br/discursus/tjcf/11tjcfc.html>. Acesso em 20 fev. 2013.

[29] Thomas, L. C. Games, Theory and Applications. Dover Publications (2003).

[30] Tversty, A. Preference, Belist, and Similanty:*Selected Writing.* [S.I]: MIT Press (2004).

[31] Vorob'ev, N. N. Game Theory, Lectures of Economists and Systems Scientists. Springer - Verlag (1977).

[32] Winkels, H. M. An algorithm to determine all equilibrium points of a bimatrix game, in Moeschlin, O. & Pallescke, D. (eds.) Game Theory and Related Topics, North-Holland (1979).