Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

RENATO LUCAS COUTINHO

O USO DO TEOREMA DE PICK NOS ENSINOS FUNDAMENTAIS E MÉDIOS

Orientador: Miriam Abdón

NITERÓI
DEZEMBRO/2019

UNIVERSIDADE
FEDERAL
FLUMINENSE

O USO DO TEOREMA DE PICK NOS ENSINOS FUNDAMENTAIS E MÉDIOS

Por:

RENATO LUCAS COUTINHO

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

NITERÓI – RJ

DEZEMBRO – 2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C871u Coutinho, Renato Lucas
O USO DO TEOREMA DE PICK NOS ENSINOS FUNDAMENTAIS E MÉDIOS / Renato Lucas Coutinho ; Miriam del Milagro Abdón, orientadora. Niterói, 2019.
39 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2019.mp.02969741709

1. Geometria. 2. Ensino e aprendizagem de Matemática. 3. Produção intelectual. I. Abdón, Miriam del Milagro, orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

RENATO LUCAS COUTINHO

O Uso do Teorema de Pick nos Ensinos Fundamentais e Médio

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovada em: 12/12/2019

Banca Examinadora

Profª. Miriam Del Milagro Abdón - Orientador
Doutora - Universidade Federal Fluminense

Profª. Luciane Quoos Conte - Membro
Doutora – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Mário Olivero Marques da Silva-- Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

DEDICATÓRIA

Dedico a minha esposa Nice e aos meus filhos

Caio e Alice que me apoiaram do

início ao fim deste projeto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter concedido a oportunidade de um menino de comunidade chegar até a conclusão deste mestrado.

Aos meus pais, Iracy (in memoriam) e Custódio por investirem seu carinho e tempo na minha formação e acreditarem que a educação é a maneira de oportunizar escolhas na vida.

A minha amada esposa Nice, companheira e maior incentivadora dos meus projetos, que me compreendeu e me motivou nos momentos difíceis deste mestrado, sempre me dando força.

Aos meus filhos Caio e Alice, que entenderam os dias que estive ausente me dedicando as aulas do mestrado e que sempre faziam questão de dizer o quanto tinham orgulho de mim.

Aos meus alunos, que fizeram parte deste projeto e que sempre se mostraram interessados e incentivaram na conclusão do mesmo.

Aos professores da UFF, colegas e amigos que tive durante o curso do PROFMAT que deram sempre o seu melhor em cada aula.

A minha orientadora, Professora Miriam, pela sua paciência, seu carinho e motivação que contribuíram significativamente para a conclusão deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

RESUMO

O ensino de Matemática nas escolas sempre foi um tema de muita discussão entre os educadores e de muitos problemas para os alunos. Sendo o ensino da geometria um dos ramos da Matemática de maior dificuldade por parte do alunado, talvez pela forma muitas vezes abstrata de sua apresentação e dos inúmeros axiomas e teoremas que nos levam a dedução e aplicação de diversas fórmulas para cada tipo de figura geométrica. Diante destas dificuldades, o objetivo deste trabalho é tornar mais atraente para o aluno o cálculo de área de figuras planas, através do uso de um plano cartesiano e do Geogebra. Mostraremos que é possível calcular as áreas de qualquer figura geometria pelo processo de contagem de pontos em uma malha quadriculada de coordenadas representadas por números inteiros usandoo Teorema de Pick. O teorema foi apresentado aos alunos das turmas de 9º ano do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio, além disso foram desenvolvidas atividades para o cálculo das áreas de formas geométricas mais simples até as formas geométricas mais complexas, sem a utilização das unidades de medidas padrões. Apenas com o uso das malhas feitas no Geogebra e o teorema de Pick, os alunos puderam confrontar os resultados obtidos usando o Teorema e os encontrados pelas fórmulas de áreas aprendidas ao longo dos anos letivos. Já os alunos do 3º ano puderam resolver questões de vestibulares usando apenas o teorema de Pick.

Palavra chave: Malha quadriculada, áreas, Teorema de Pick.

ABSTRACT

Teaching math in schools has always been a topic of much discussion among educators and of many problems for students. The teaching of geometry is one of the most difficult branches of mathematics for the students, perhaps due to the often abstract form in its presentation and the axioms and theorems that lead us to the deduction and application of various formulas for each type of geometric figure. Given these difficulties, the objective of this work is to make the design of the area of flat figures more attractive to the student. Using a Cartesian plane and Geogebra, it is possible to calculate the areas of any geometry figure by the process of counting points in a lattice of coordinates represented by integers. According to Pick's Theorem, presented to the students of the 9th grade and 3rd grade classes, activities were developed to calculate the areas from the simplest geometric shapes to the most complex geometric shapes, without using the units of measurement. Only with the use of lattices made in Geogebra and Pick's theorem could students compare the results obtained by Pick's Theorem and those found by the formulas of areas learned over the school years. The third year students were able to solve college entrance exams using only the Pick theorem.

Keywords: Pick’s Theorem, area, lattices.

Sumário

INTRODUÇÃO

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.” (Lobachevsky)

O estudo da Geometria toca diretamente na abstração matemática utilizada no mundo real mencionada na frase de Lobachevsky, porém é notória a dificuldade das correlações entre os preceitos formais dos axiomas e teoremas que envolvem todas as construções geométricas e as aplicações no cotidiano. Um dos maiores problemas no que tange a prática e a teoria no ensino da matemática está nas definições de áreas das figuras planas, onde em alguns casos existe para os alunos um abismo entre os exercícios de aplicações das fórmulas aprendidas em sala de aula e o cálculo de áreas mais complexas encontradas na sua realidade.

Uma das orientações presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (2000) é:

> “Dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender. ”

Outro ponto importante é a formação do aluno que deve ter como alvo principal à aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação.

Para atingirmos este propósito e promovermos uma maior compreensão dos cálculos utilizados nessas formas geométricas mais complexas, precisamos apresentar uma solução mais simples do que a dissecação do polígono em outros e a aplicação de diversas fórmulas referente as novas figuras encontradas. Assim a proposta é apresentar ao aluno, ainda que de forma não contextualizada, um recurso para lhe dar facilidade na compreensão do polígono a ser trabalhado e em paralelo possibilitar o entendimento do uso do plano cartesiano nessa resolução.

Desta forma, com a utilização do Geogebra como mecanismo de interação com o aluno, a proposta de utilizar o Teorema de Pick como tema principal deste estudo, deve-se a constatação da dificuldade dos alunos no entendimento dos cálculos de áreas de figuras planas e as variações de formas mais complexas destas áreas, sendo muitas vezes difícil para o aluno a decomposição destas formas em outras mais simples e até mesmo a utilização das fórmulas de áreas aprendidas nos anos letivos.

O professor, enquanto fomentador e mediador do conhecimento, precisa a todo o momento estar atento e sensível às dificuldades que este ou aquele conteúdo provoca em seu aluno. Durante a nossa experiência cotidiana percebíamos a dificuldade na abstração e ligação das informações básicas sobre determinados polígonos e outras formas não convexas.

O Teorema de Pick não aparece como a solução para aqueles que têm problemas no uso de fórmulas, mas sim como uma ferramenta que permite fazer a superposição de uma malha para que a forma geométrica seja mais facilmente compreendida.

Para demonstração aos alunos da aplicabilidade do teorema, foram realizadas algumas atividades em duas escolas nos segmentos de ensino fundamental e médio.

No segmento de ensino fundamental, foi escolhida uma turma de 9º ano, que apresentavam alunos de fácil entendimento da matemática e outros que não tinham tanta afinidade com a matéria, de uma escola de classe média da zona norte do Rio de Janeiro. Cabe destacar que a escola tem muita preocupação com a aprendizagem da matemática no seu currículo. Dentre as atividades aplicadas, a primeira consistia na determinação das áreas de figuras planas normalmente trabalhadas em sala de aula, usando as fórmulas de áreas por eles aprendidas nos livros didáticos. Também foi pedido nesta atividade, que os alunos encontrassem o resultado das áreas das mesmas figuras com a utilização do teorema de Pick, fazendo com que verificassem que os resultados obtidos seriam os mesmos, e em seguida foram questionados sobre qual dos dois processos utilizados foi o mais fácil para eles. A segunda atividade para o mesmo público foi o cálculo de área de um polígono não convexo ficando livres para resolver o problema da maneira que achassem mais prática, sendo já de domínio dos alunos o teorema de Pick. A terceira atividade se resumiu à apresentação de algumas questões de vestibulares que poderiam ser resolvidas pelo teorema de Pick.

No ensino médio o trabalho foi realizado com duas turmas do 3º ano de uma escola em Macaé com tem objetivo de preparar para o vestibular das faculdades públicas e particulares da região. As turmas eram muito heterogêneas na formação matemática, sendo a turma 3001 formadas por alunos com grandes dificuldades disciplina e a 3002 formada por alunos com maior afinidade na matéria. A mesma atividade foi aplicada para as duas turmas, na qual seria resolver as questões de vestibulares que faziam referência ao cálculo de áreas em uma malha quadriculada.

CONCEITOS PRELIMINARES

PROBLEMA DE PESQUISA

Este trabalho foi inspirado nas dúvidas de muitos alunos e na falta de percepção da Matemática como disciplina fundamental na vida cotidiana e no despertar para o raciocínio lógico. Pretendemos desenvolver este trabalho focando na aplicabilidade da Matemática no cálculo de áreas da geometria plana e seus recursos de utilização. Assim, a pesquisa tem como base o problema: Como calcular áreas de formas geométricas convexas e não convexas através da malha reticulada e pelo Teorema de Pick.

OBJETIVOS

Objetivo Geral:

Propiciar ao alunado uma ferramenta a mais para soluções de áreas de polígonos não convexos.

Objetivos Específicos

Rever a ideia de unidade de área, trabalhar as fórmulas de áreas das figuras planas e fazer o cálculo destas áreas em um plano cartesiano.

CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS

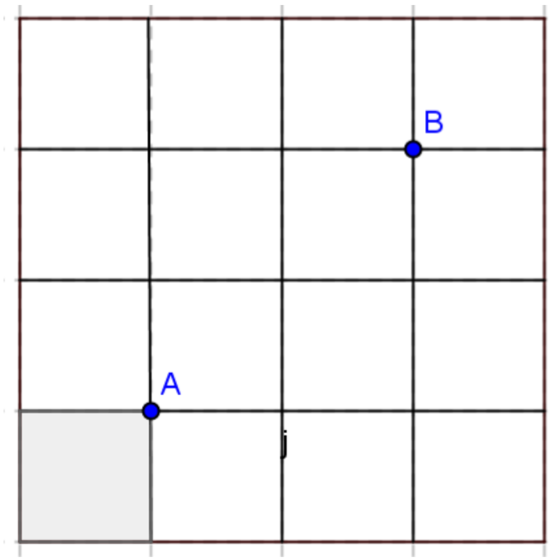
Unidade de área

Assumiremos como unidade de área a medida de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento (u.c), que será chamado quadrado unitário. Em decorrência, a área do quadrado unitário será igual a uma unidade de área (u.a.):

= 1 u.a 

Malha reticulada do plano

Em um plano cartesiano, os pontos representados por coordenadas inteiras são chamados de pontos reticulados. Uma malha reticulada é, portanto, o conjunto de tais pontos.



Os pontos de intersecção entre duas retas na malha são os pontos reticulados, também chamados de nós, e cada região da malha limitada por um quadrado é a unidade de área.

Na malha reticulada apresentada na figura anterior os pontos A e B são os nós e o quadrado hachurado na malha é a unidade de área e os segmentos que formam este quadrado medem uma unidade de comprimento.

Cálculo de áreas de um polígono convexo

A área de um polígono pode ser calculada por aplicação de fórmulas diversas (dependendo do polígono estudado), porém todas estas fórmulas são consequências de deduções feitas a partir das características de cada figura. Por exemplo, nas malhas abaixo podemos obter as fórmulas que definem as áreas do quadrado e do retângulo.

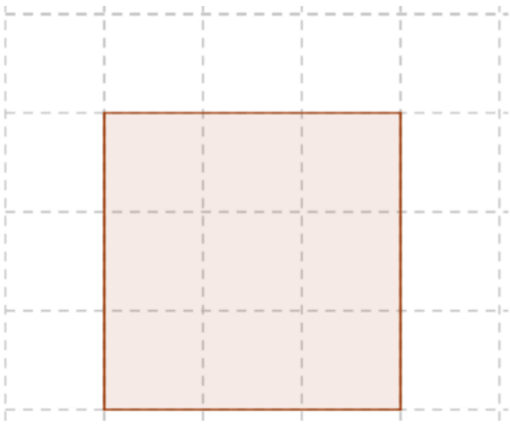


Figura 1

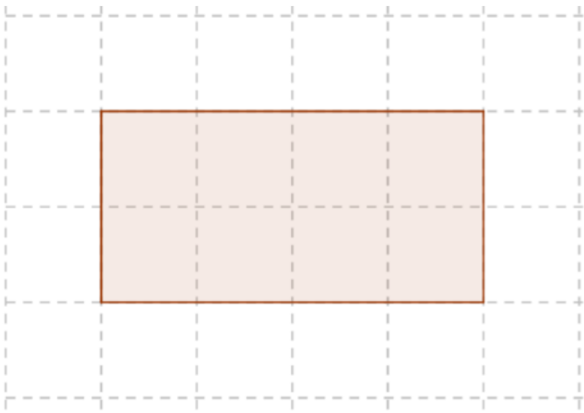


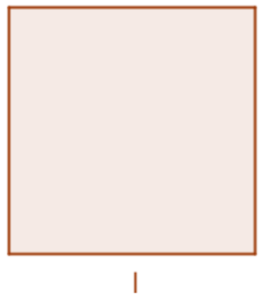
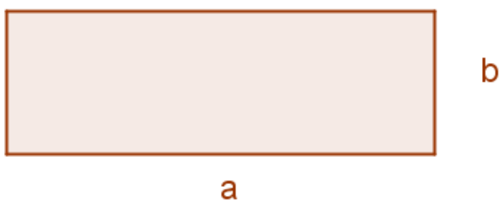
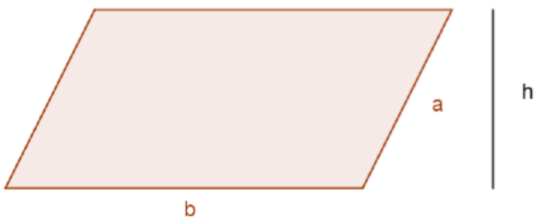
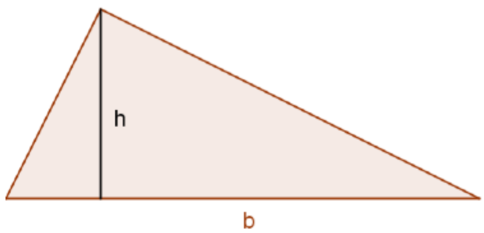
Figura 2

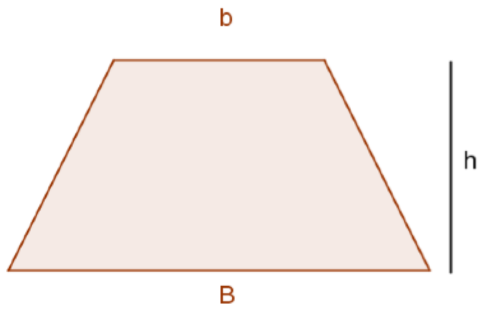
Formando-se um quadrado (***figura 1***) com lados cujas medidas são ***l*** segmentos de medida 1 u.c. teremos ***l . l*** quadrados de medidas iguais a 1 u.a. Assim podemos definir a área ***A*** de um quadrado de lado ***l*** como ***A = l ².***

Formando-se agora um retângulo (***figura 2***) com comprimento igual a ***c*** segmentos e com largura igual a ***b*** segmentos todos de tamanho 1 u.c. teremos ***b . c*** quadrados de medidas iguais a 1 u.a. A área ***A*** do retângulo de lados ***b*** e ***c*** será portando

$$A = b \cdot c.$$

Fórmulas de áreas dos principais polígonos

Polígono	Forma	Área
Quadrado		***A= l²***
Retângulo:		$A = a \cdot b$
Paralelogramo:		$A = b \cdot h$
Triângulo:		$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

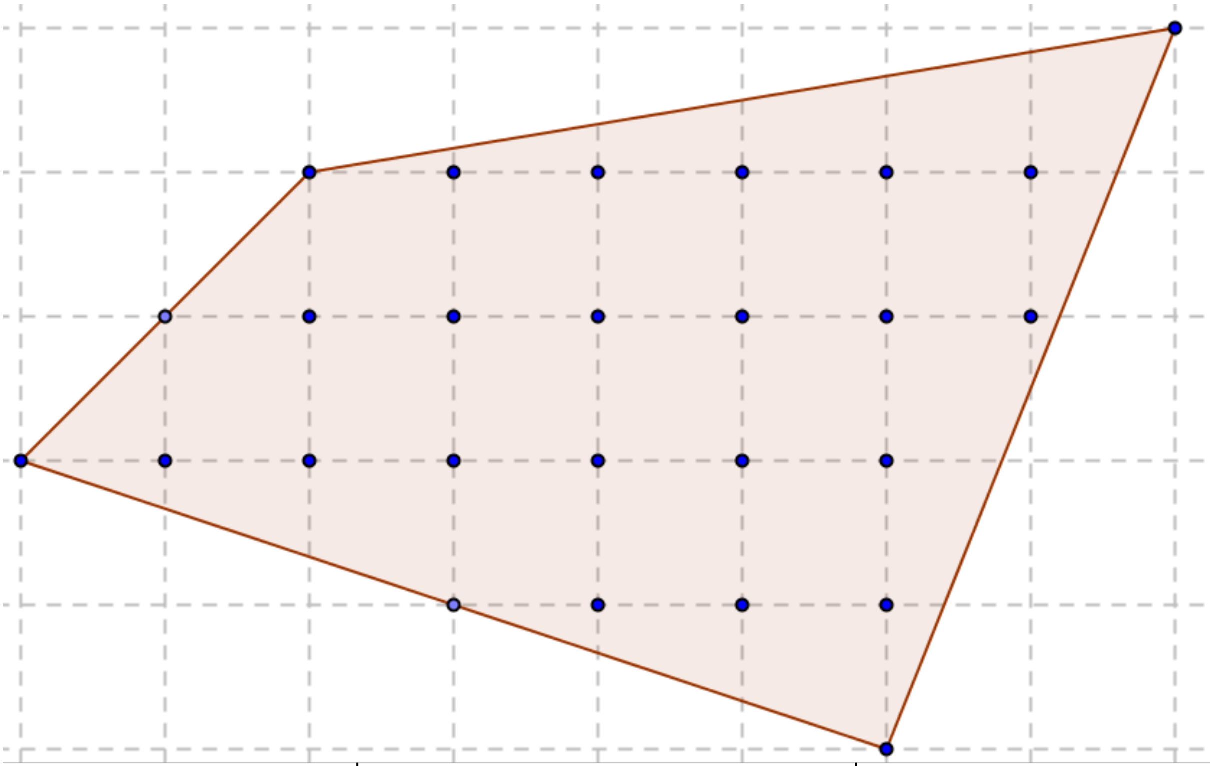
Trapézio:		**A** = $\frac{(B+b)h}{2}$

O TEOREMA DE PICK

Uma breve biografia sobre Georg Alexander Pick

Georg Alexander Pick foi um importante matemático em sua época. Nasceu em Viena em 10 de agosto de 1859, filho de uma família judia. Estudou na Universidade de Viena, onde defendeu seu doutorado em 1880. Em sua banca, estavam Leo Königsberger (1837-1921) e Emil Weyr (1848-1894). Mais tarde, ele foi assistente de Ernest Mach (1838-1916) na Universidade Alemã de Praga, onde se estabeleceu em 1881 e também atuou como professor. Durante um ano sabático, em 1884, ele colaborou com Felix Klein (1849-1925) na Universidade de Leipzig. Em 1911 ele fez parte do comitê que indicou Albert Einstein (1879-1955) para uma cadeira de Física-Matemática na Universidade Alemã de Praga (atual Universidade Carolina).

Pick só retornou para Viena ao se aposentar, em 1927. Mas sua velhice não teve sossego. Mesmo morando em Viena, foi eleito membro da Academia Tcheca de Artes e Ciências, da qual acabou expulso logo após a invasão alemã de Praga. Em março de 1938, após o *Anchluss (anexação político-militar da Áustria pela Alemanha Nazista)*, ele retornou à capital tcheca, mas os nazistas também invadiram a Tchecoslováquia em março de 1939. Aos 82 anos, Pick foi preso e enviado para o campo de concentração de Theresienstadt, situado na antiga República Tcheca, em 13 de julho. Ele morreu lá, duas semanas mais tarde.



Fórmula do teorema de Pick

Trata-se de um recurso interessante para o cálculo de área de polígonos com vértices sobre os nós uma malha reticulada.

Para isso indicaremos por B e I, respectivamente, o número de nós da malha reticulada situados sobre a fronteira (borda) e no interior do polígono. Então, a área A, desse polígono, é dada pela seguinte expressão

Na figura acima encontramos B = 6 e I = 20 e usando o teorema de Pick para o cálculo de área temos:

$$A = 20 + \frac{6}{2} - 1$$

A = 22 u. a.

Demonstração do teorema de Pick.

A demonstração do teorema de Pick, que detalhamos a seguir, foi retirada do livro *Meu Professor de Matemática e outras histórias* do professor Elon Lages Lima.

Antes de começarmos a demonstração, precisamos introduzir alguns conceitos.

Definição: Uma rede no plano é um conjunto de infinitos pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou vertical é igual a 1. Colocando-se esta rede num plano cartesiano com origem em um destes pontos da mesma, um eixo na direção horizontal (abscissas) e outro na direção vertical (ordenadas), pode-se escrever cada ponto desta rede como o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas *(m,n)* são números inteiros (positivos, negativos e o zero).

Triângulos e paralelogramos fundamentais:

Definição: Um Triângulo Fundamental é um triângulo cujos vértices estão no reticulado e nenhum ponto do reticulado está em seu interior ou em seu perímetro, exceto os vértices.

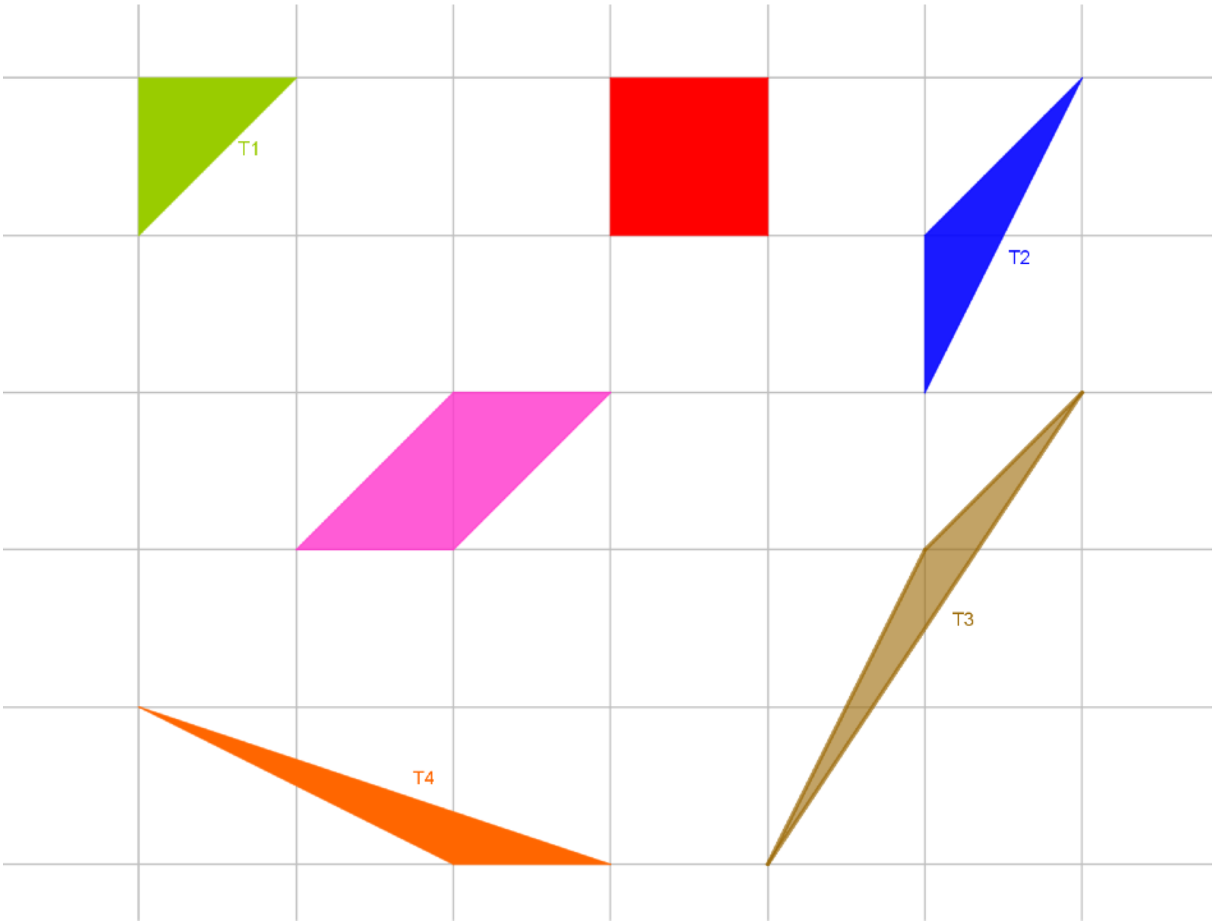
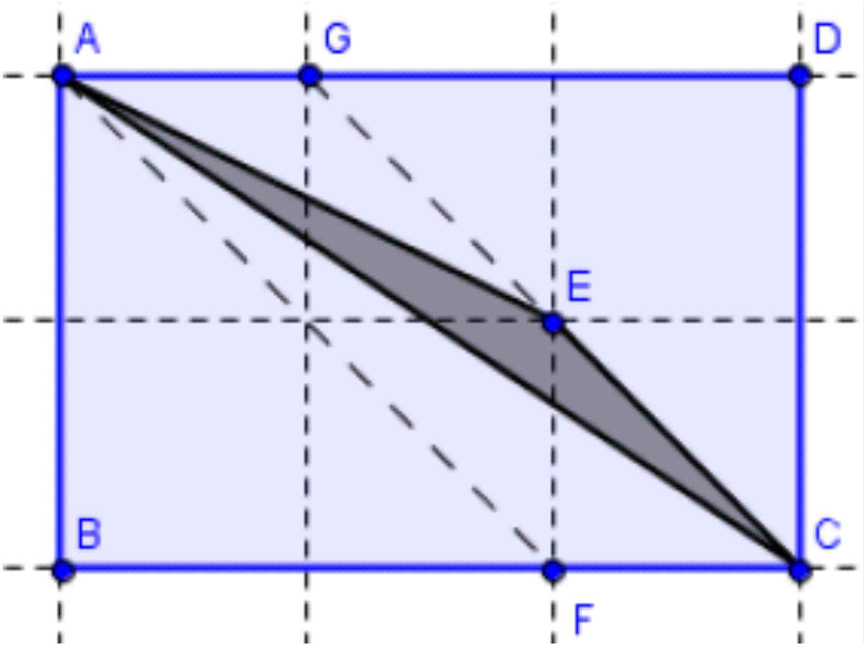


Figura 1

Pela definição todos os triângulos da figura acima são fundamentais. Observe que os triângulos T1, T2 e T4 têm área igual a $\frac{1}{2}$, pois podemos ver que uma das bases tem medida 1 e a altura relativa a esta base também é 1. Já o triângulo T3 tem uma área não tão direta de calcular, porém afirmamos que sua área também é igual a $\frac{1}{2}$.

De fato, na figura abaixo temos que a área do triângulo AGC é a soma das áreas dos triângulos AGE e AEC.



O triângulo AGE tem base e altura medindo 1 e o triângulo AGC tem base medindo 1 e altura medindo 2, deste modo:

$$\acute{A}rea(AGC) = \acute{A}rea(AGE) + \acute{A}rea(AEC)$$

$$\frac{1x2}{2} = \frac{1\ x\ 1}{2} + \acute{A}rea(AEC)$$

$$1 - \frac{1}{2} = \acute{A}rea(AEC)$$

$$\acute{A}rea(AEC) = \frac{1}{2}$$

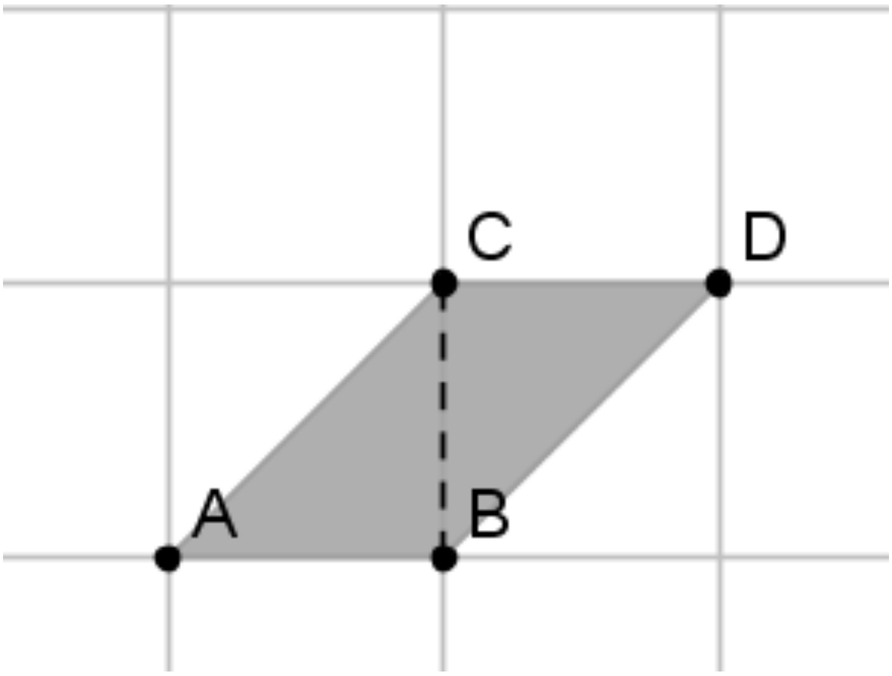
Mostramos, assim o seguinte teorema.

Teorema: A área de todo triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$.

Analogamente, podemos definir um paralelogramo fundamental

Definição: Um paralelogramo diz-se fundamental quando os quatro vértices são os únicos dos seus pontos que pertencem à rede. Os dois paralelogramos da figura 1 são fundamentais.

Evidentemente, qualquer das diagonais de um paralelogramo fundamental o decompõe em dois triângulos fundamentais com uma base em comum.



Na figura acima os triângulos ABC e BCD são triângulos fundamentais, pois os segmentos $\bar{AB}$, $\bar{CD}$ e $\bar{BC}$, de medidas unitárias, são as bases e a altura dos triângulos cujos vértices pertencem à malha. Assim a área de um paralelogramo fundamental é igual 1, pois se trata da soma das áreas de dois triângulos fundamentais.

Reciprocamente, partindo de um triângulo fundamental ABC, podemos obter um paralelogramo ABCD traçando pelo ponto C uma paralela ao lado AB e pelo B uma paralela ao lado C, as quais se encontram no ponto D.

Decomposição de um polígono

Podemos decompor um polígono convexo de *n* lados numa reunião de *n - 2* triângulos justapostos, sem acrescentar novos vértices: basta selecionar um vértice do polígono e a partir dele traçar as *n – 3* diagonais que o ligam aos vértices não adjacentes. A decomposição de polígono em triângulos se estende para os polígonos não convexos.

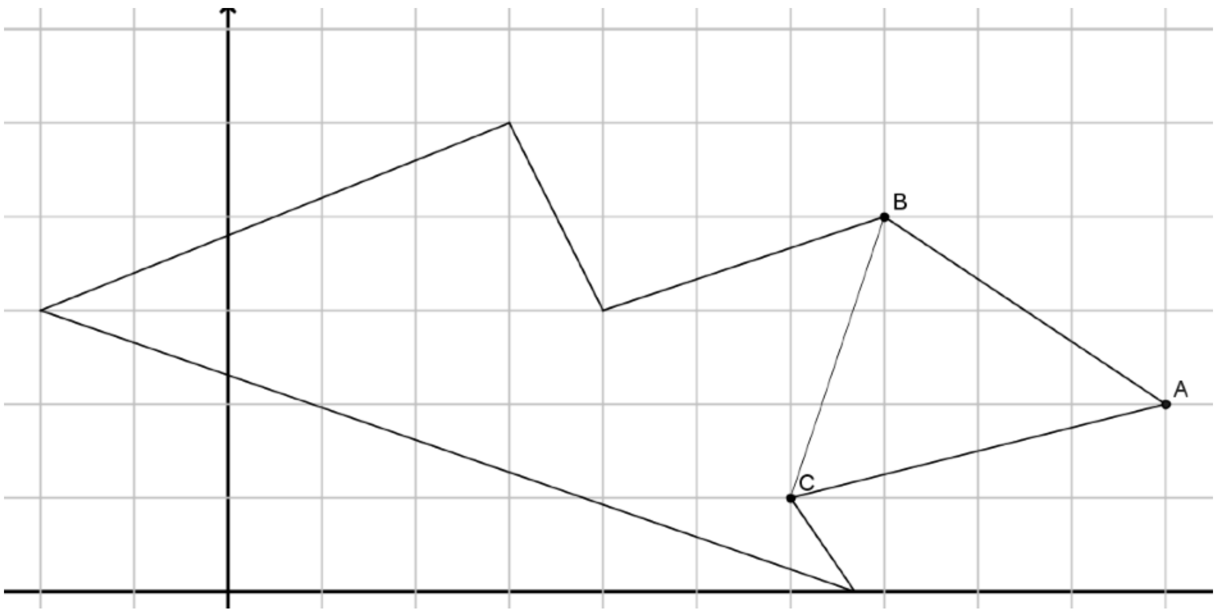
Vale então:

Teorema: Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de

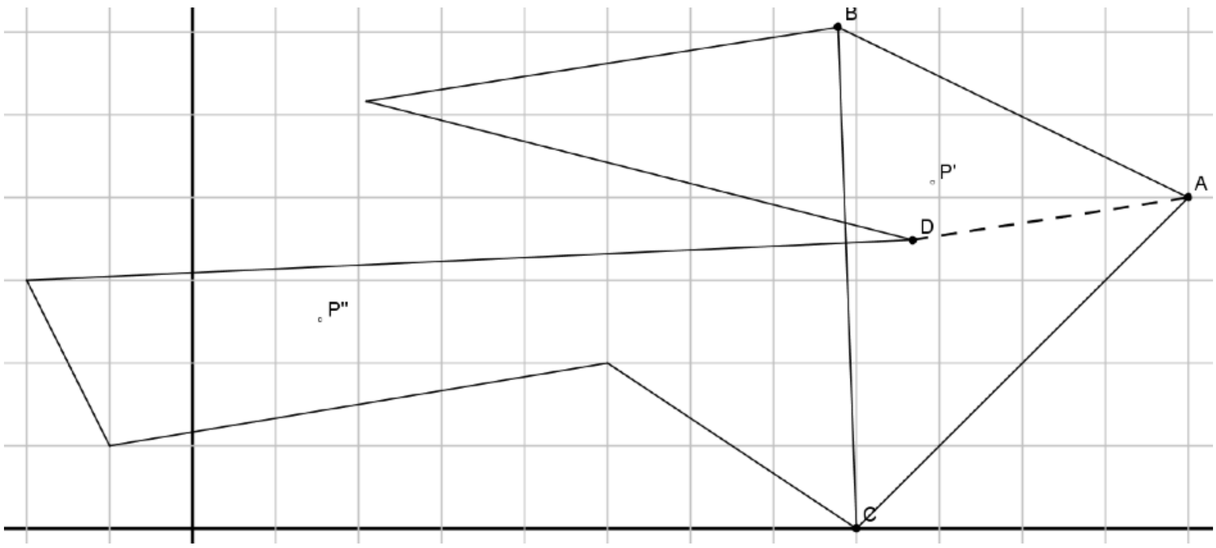
n – 2 triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.

Demonstração: Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja n o menor número natural tal que existe um polígono P, com n lados, o qual não pode ser decomposto conforme estipula o enunciado acima. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja A o ponto de maior abcissa no polígono P. Como nenhum lado de P é vertical, A deve ser um vértice. Sejam B e C os vértices adjacentes a A. Há 2 possibilidades.

1º POSSIBILIDADE



2ª POSSIBILIDADE

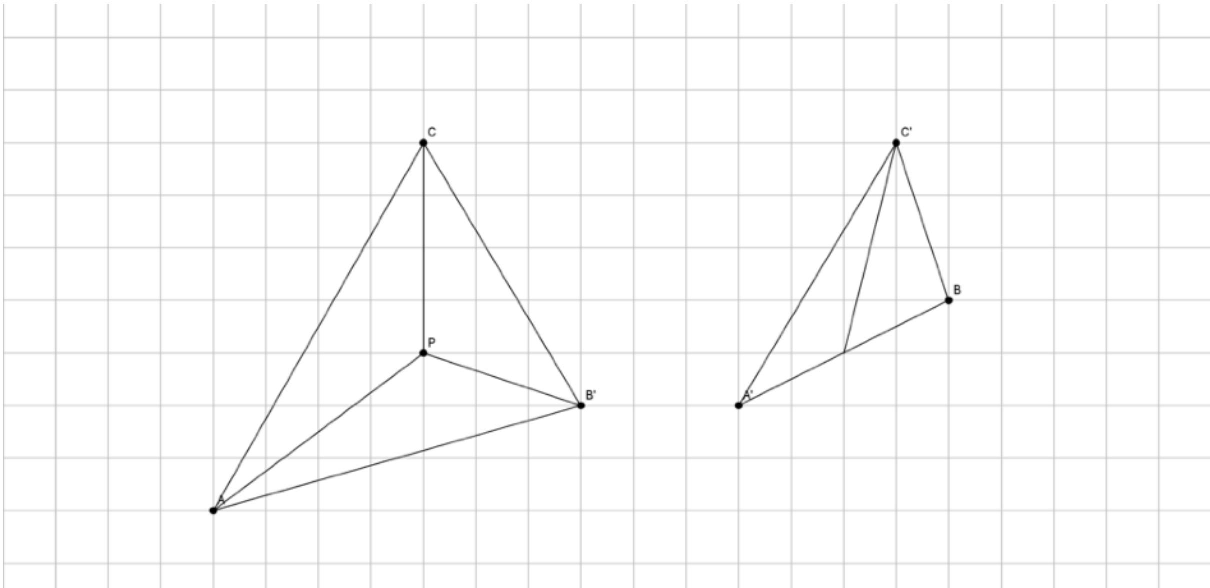


Primeira: o triângulo ABC não contém outros vértices de P, além de A, B e C. Neste caso, o polígono P', obtido de P quando se substituem os lados $\bar{AB}$ e $\bar{AC}$ por $\bar{BC}$, tem n – 1 lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, P' pode ser decomposto em n – 3 triângulos na forma do enunciado. Juntando o triângulo ABC a essa decomposição, vemos que o teorema é verdadeiro para P, o que é uma contradição.

Segunda: o triângulo ABC contém além de A, B e C, algum outro vértice do polígono P. Dentre esses, seja D o mais distante do lado $\bar{BC}$. Então o segmento de reta $\bar{AD}$ decompõe P em dois polígonos P' e P'', o primeiro com n' e o segundo com n'' lados, sendo n' + n'' = n + 2. Como n' $\geq$ 3 e n'' $\geq$ 3, vemos que n' e n'' são ambos menores que n. O teorema então vale para P' e P'', que podem ser decompostos, respectivamente em n' – 2 e n'' – 2 triângulos, na forma do enunciado. Justapondo essas decomposições ao longo de $\bar{AD}$, obtemos uma decomposição de P em (n' – 2) + (n'' – 2) = n – 2 triângulos, o que é uma contradição. Isto completa a demonstração do teorema.

Teorema: Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.

Demonstração: Em vista do teorema anterior, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo ABC que contém *n* pontos da rede (no interior e no bordo). Se existir realmente algum ponto P da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esses pontos aos vértices A, B e C e deste modo decompomos o triângulo ABC em três triângulos, cada um contendo um número de pontos da rede menor do que n. Se houver pontos da rede sobre os lados do triângulo ABC, escolhemos um deles, digamos sobre $\bar{AB}$, e o ligamos ao vértice C. Assim decompomos ABC em 2 triângulos, cada um contendo um número de pontos da rede menor do que n. Prosseguindo desta forma, com um número finito de etapas chegaremos a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais.



Vamos agora provar o Teorema de Pick:

$$\boxed{A = I + \frac{B}{2} - 1}$$

Demonstração do Teorema de Pick

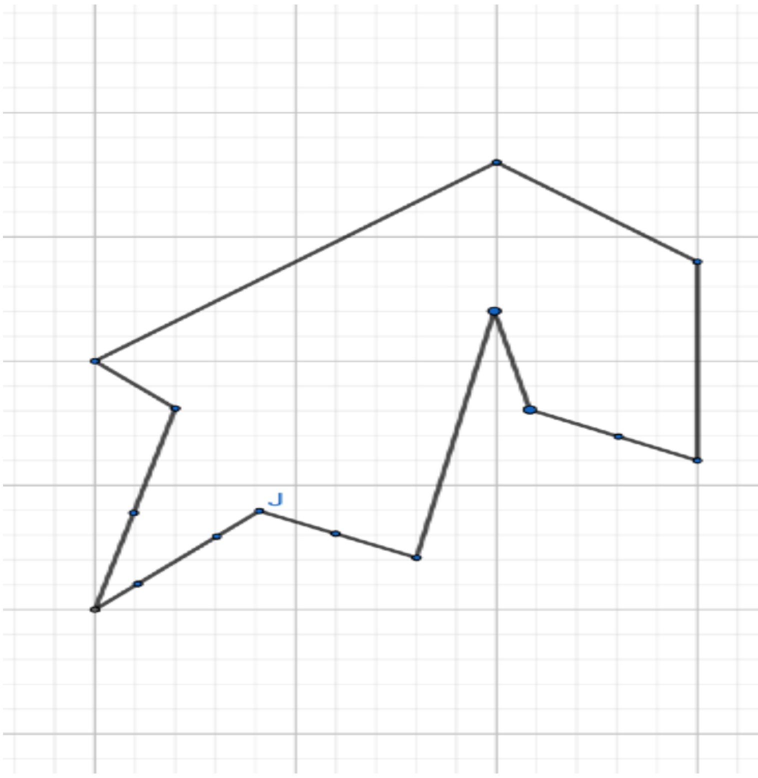
Seja P um polígono cujos vértices pertencem a uma rede. Indiquemos com B e I, respectivamente, o número de pontos da rede situados sobre o bordo e no interior de P.

Para provar que $\frac{B}{2}+I-1$ é a área do polígono P, basta mostrar que o número T de triângulos fundamentais da decomposição de P (dada pelo Teorema anterior) é igual a $B+2I-2$, pois a área de P é igual a $\frac{T}{2}$, em virtude do Teorema que fala da área do triângulo fundamental.

Vamos então calcular a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais que compõem o polígono P.

Podemos chegar a essa soma por dois caminhos.

O primeiro é evidente: se há T triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a T. 180º.



O segundo consiste em calcular separadamente a soma S_b dos ângulos internos que tem vértices no bordo e a soma S_i dos ângulos cujos vértices estão no interior de P. Sejam B' o número de vértices de P e B" o número de pontos da rede que estão sobre o bordo de P, mas não são vértices de P. Então B = B' + B".

Comparando as duas contagens, vem: $T. 180^{\circ} = (B + 2I – 2). 180^{\circ}$, ou seja, $T = B + 2I - 2$, como queríamos demonstrar.

ATIVIDADES

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Atividades aplicadas aos alunos do 9º ano do ensino fundamental

A atividade foi realizada com os alunos do 9º ano do ensino fundamental da Escola ECO[1]. Os alunos foram selecionados por estarem trabalhando este conteúdo exatamente na época da atividade.

Em contato com a direção da escola, foi passado a ideia do trabalho, que seria agregar aos alunos uma nova ferramenta para uso na sua vida escolar, que seria o teorema de Pick para o cálculo de áreas. Imediatamente a direção concordou que o trabalho fosse realizado em sala de aula.

Após uma breve exposição sobre o Teorema de Pick, bem como sua história, foi feita uma revisão com os alunos sobre o cálculo de áreas através das fórmulas apresentadas nos livros e uma explicação, a pedido deles, sobre o que era unidade de área.

Exercício 1

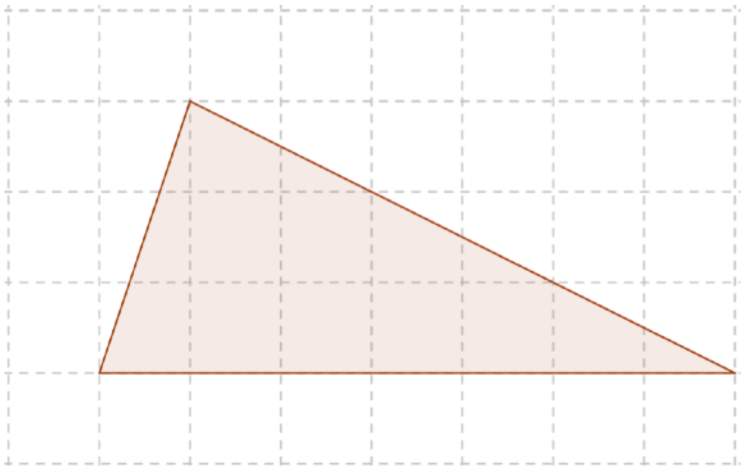
Como primeiro exercício, foi apresentada aos alunos uma lista com os exercícios abaixo, onde as áreas a serem calculadas são facilmente relacionadas às fórmulas de áreas apresentadas no início da aula, porém também se faz menção ao teorema de Pick, quando é pedido que se calculasse as áreas usando a malha e o quadrado de área unitária como unidade principal.

---

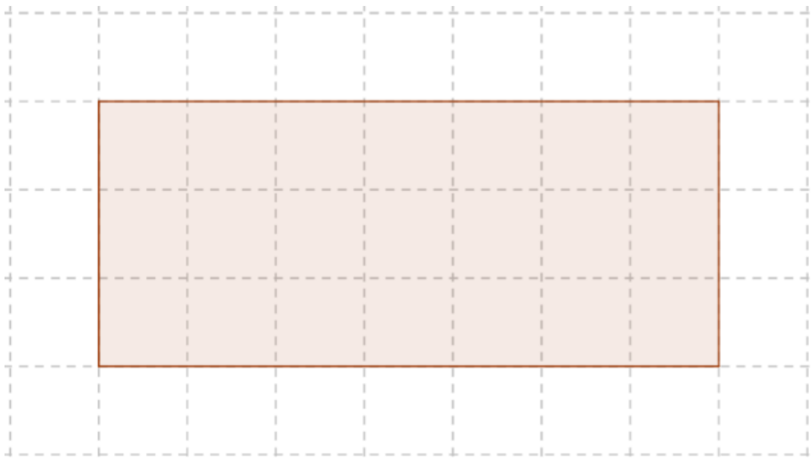
[1] Escola Eco – CNPJ 32.093.965/0001-62 - escola privada localizada na Av. Engenheiro Richard, nº 116 - Grajaú – Rio de Janeiro - público alvo: alunos moradores do Grajaú, Tijuca e Vila Isabel.

Para as figuras abaixo, calcular suas áreas usando as fórmulas relacionadas acima para cada polígono e depois o teorema de Pick, adote cada quadrado da malha como unidade de área. Verificar a relação entre os resultados nos dois modos.

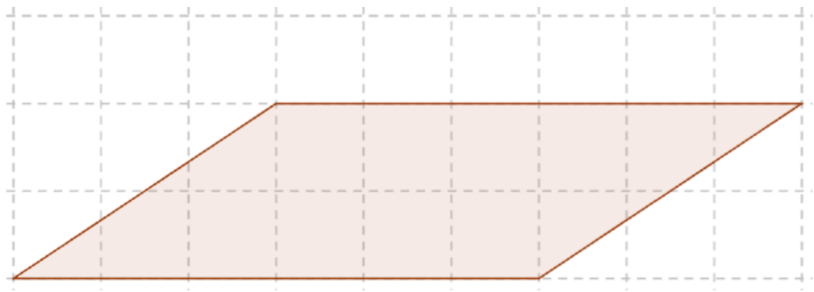
a)



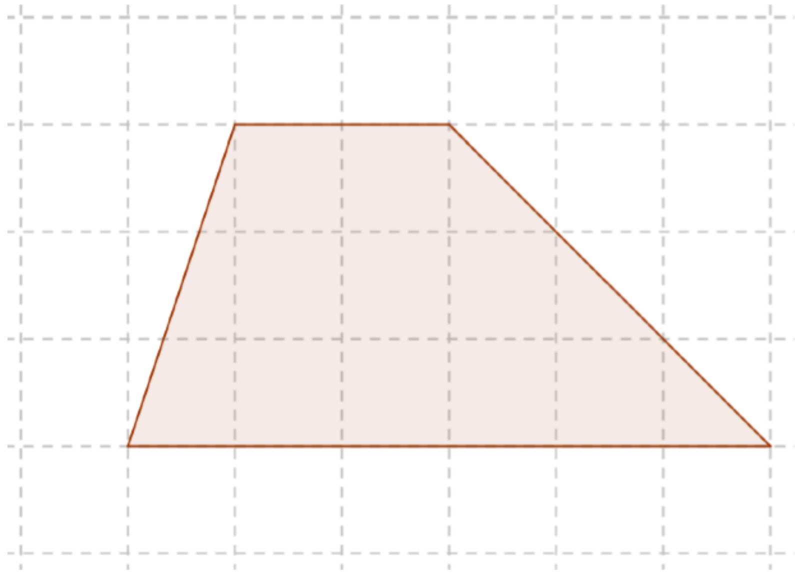
b)



c)



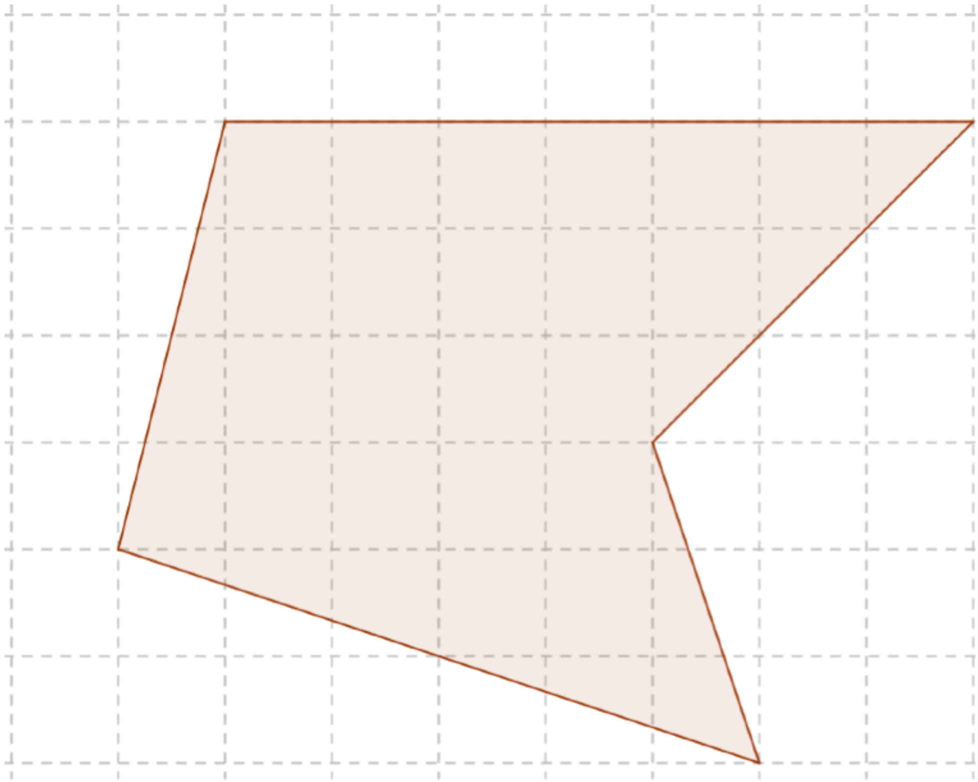
d)



Exercício 2

Como segundo exercício os alunos deveriam encontrar a área de um polígono não convexo usando os métodos discutidos em sala, sem a determinação de qual método deveria ser usado.

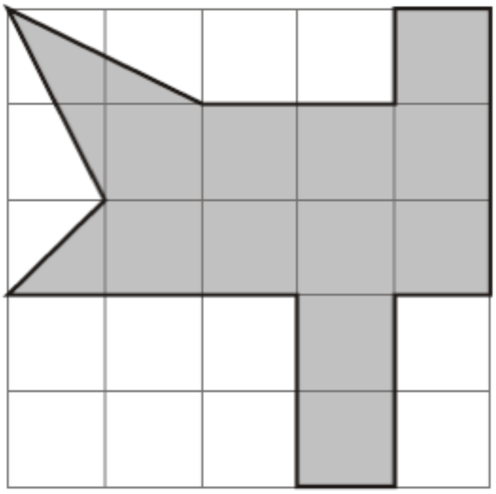
Calcule a área da figura abaixo, escolhendo como métodos de resolução as fórmulas para polígonos ou o teorema de Pick, faça um breve comentário sobre o motivo que o levou a escolher um dos métodos.



Exercício 3

O terceiro exercício foi mostrar aos alunos exercícios de vestibulares das principais universidades públicas do Brasil, que já apresentaram em seus exames de acesso questões onde o teorema de Pick seria o método mais fácil para resolução. Para que os mesmos resolvessem estas questões não foi induzida para os alunos a maneira que deveria resolver, deixando-os sobre seu critério a resolução.

1. (UNIFOR CE/2009) A figura abaixo apresenta uma malha quadriculada na qual está destacada uma superfície sombreada.



Se o lado de cada quadradinho da malha mede 1 cm, a área da superfície da região sombreada, em centímetros quadrados, é.

(A) 9

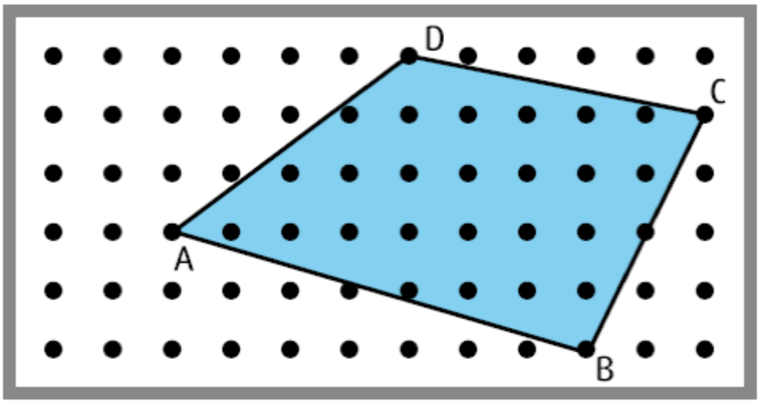
(B) 12,5

(C) 15,5

(D) 16,75

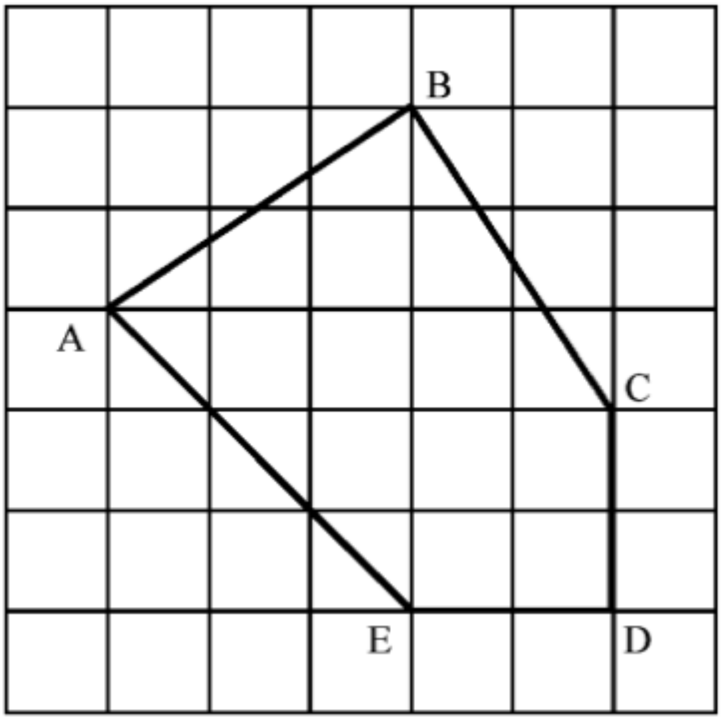
(E) 18,25

2. (UERJ/2008) Um tabuleiro retangular com pregos dispostos em linhas e colunas igualmente espaçadas foi usado em uma aula sobre área de polígonos. A figura abaixo representa o tabuleiro com um elástico fixado em quatro pregos indicados pelos pontos A, B, C e D.



Considere u a unidade de área equivalente ao menor quadrado que pode ser construído com vértices em quatro pregos do tabuleiro. Calcule, em **u**, a área do quadrilátero ABCD formado pelo elástico.

3. (UEG GO/ 2004) No quadriculado abaixo, o lado de cada quadradinho mede 1 cm.

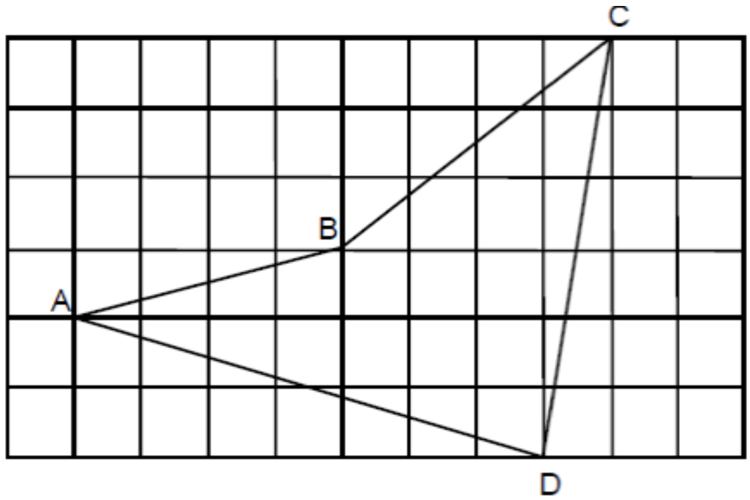


A medida da área do polígono ABCDE é

a) 13,5 cm²   b) 14 cm²   c) 15 cm²   d) 15,5 cm²   e) 14,5 cm²

4. (UFC CE/2004) Na figura abaixo, cada quadradinho da malha tem lado 1.

A área do quadrilátero ABCD é:



A) 18

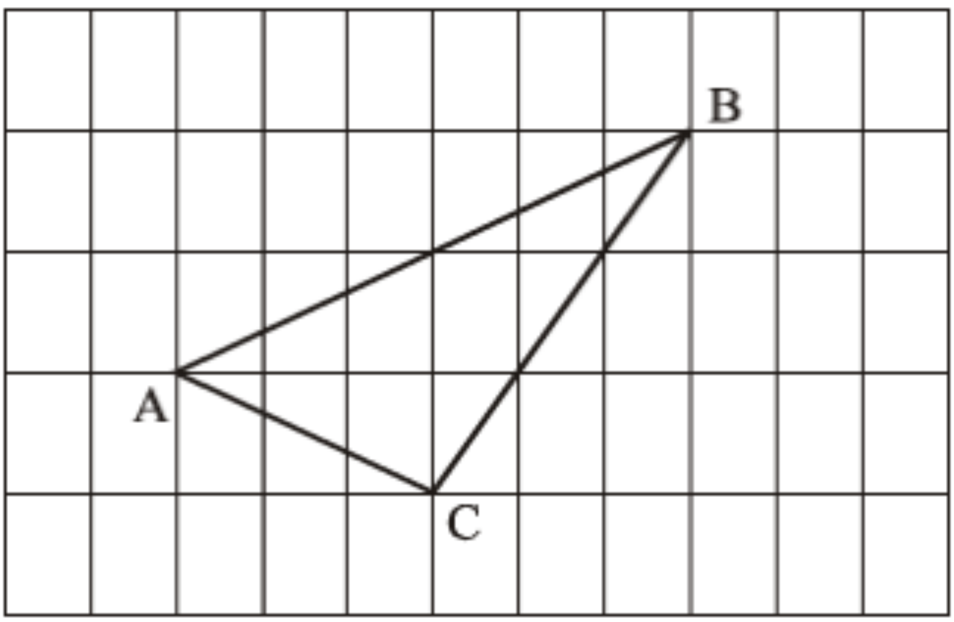
B) 19

C) 20

D) 21

E) 22

5. (UNIFICADO RJ/1999) Na figura abaixo vemos uma “malha” composta de 55 retângulos iguais. Em três dos nós da malha são marcados os pontos A, B, C, vértices de um triângulo.



Considerando-se a área S de cada retângulo, a área do triângulo ABC pode ser expressa por:

a) 24 S

b) 18 S

c) 12 S

d) 6 S

e) 4 S

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Análise dos resultados das atividades aplicadas aos alunos do 9º ano do ensino fundamental

Na escola alvo desta atividade foram aplicados os exercícios há 38 alunos, cujos resultados estão tabulados e analisados da seguinte forma:

Exercício 1:

Trinta e um acertos.

Sete erros. Sendo um erro por uso da fórmula de área, mas acerto no uso do teorema de Pick e seis usaram somente o Teorema de Pick e erraram na contagem dos pontos interiores ou de fronteira.

Exercício 2:

Trinta e um acertos. Todos optaram pela resolução com o teorema de Pick, sendo que 9 alunos não justificaram o seu uso e 22 alunos justificaram ser mais fácil seu uso por se tratar de um polígono não convexo e que a decomposição em várias áreas seria mais complicada.

Sete erros. Todos usaram o teorema de Pick e justificaram sendo mais simples por ser um polígono não convexo, mas erram na contagem dos pontos interiores ou de fronteira.

OBS: Muitos alunos confundiam o conceito de polígono convexo com polígono regular.

Exercício 3:

1. 38 acertos 0 erros.
2. 31 acertos 7 erros.
3. 32 acertos 6 erros.
4. 38 acertos 0 erros.
5. 38 acertos 0 erros

Todos os exercícios foram resolvidos pelos alunos com o uso do teorema de Pick, sendo os itens 2 e 3 com erros na contagem dos pontos interiores e de fronteira.

Atividades aplicadas aos alunos do 3º ano do ensino médio

A atividade foi elaborada para os alunos do ensino médio, em questão, os alunos do terceiro ano do colégio Bruno Ostmann[2], que tem como foco principal o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Ao conversar com a coordenação de Matemática, sobre a proposta de mostrar para os alunos uma nova ideia para o cálculo de áreas, fomos autorizados a fazer

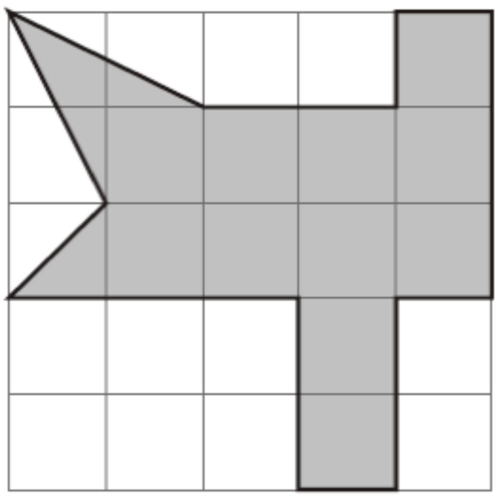
[2] Colégio Bruno Ostmann – CNPJ - 06.014.093/0001-90 - escola privada localizada na Av. Agenor Caldas, nº 67 - Imbetiba - Macaé – RJ - público alvo: alunos moradores de Macaé com foco nos vestibulares do estado do RJ.

uma breve explanação sobre áreas de figuras planas e conversar sobre o conteúdo já aprendido por eles no ano e também em anos anteriores.

Como eram duas turmas (3001 e 3002), o mesmo exercício foi aplicado nas duas turmas, porém com o conhecimento do teorema de Pick em apenas uma das turmas.

O objetivo era verificar o número de acertos nos exercícios aplicados bem como o tempo que cada turma levou para resolução de todos os exercícios. Para estimular as duas turmas, que tinham foco nas provas de acesso as universidades, usamos algumas questões do exercício 3 da atividade 1.

1. (UNIFOR CE/2009) A figura abaixo apresenta uma malha quadriculada na qual está destacada uma superfície sombreada.



Se o lado de cada quadradinho da malha mede 1 cm, a área da superfície da região sombreada, em centímetros quadrados, é.

(A) 9

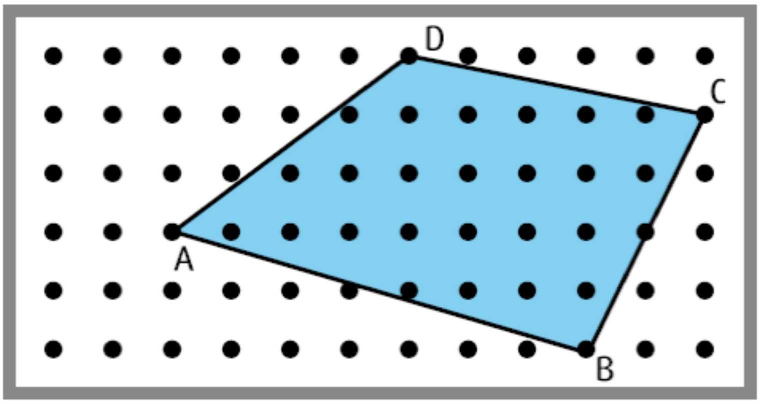
(B) 12,5

(C) 15,5

(D) 16,75

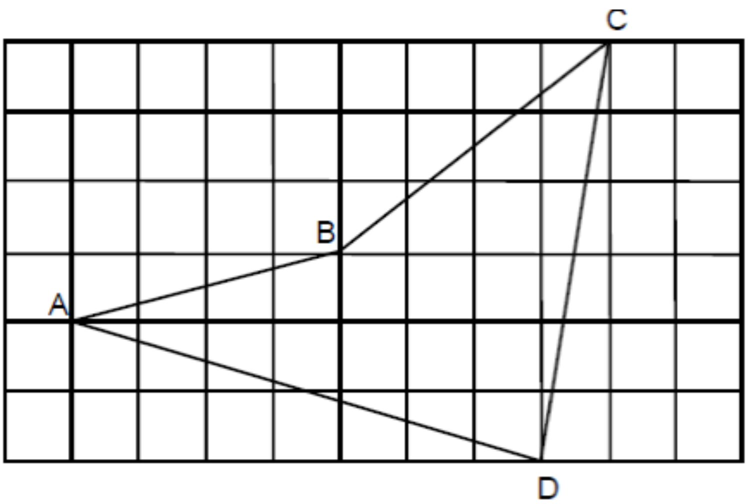
(E) 18,25

2. (UERJ/2008) Um tabuleiro retangular com pregos dispostos em linhas e colunas igualmente espaçadas foi usado em uma aula sobre área de polígonos. A figura abaixo representa o tabuleiro com um elástico fixado em quatro pregos indicados pelos pontos A, B, C e D.



Considere u a unidade de área equivalente ao menor quadrado que pode ser construído com vértices em quatro pregos do tabuleiro. Calcule, em **u**, a área do quadrilátero ABCD formado pelo elástico.

3. (UFC CE/2004) Na figura abaixo, cada quadradinho da malha tem lado 1.



A área do quadrilátero ABCD é:

A) 18

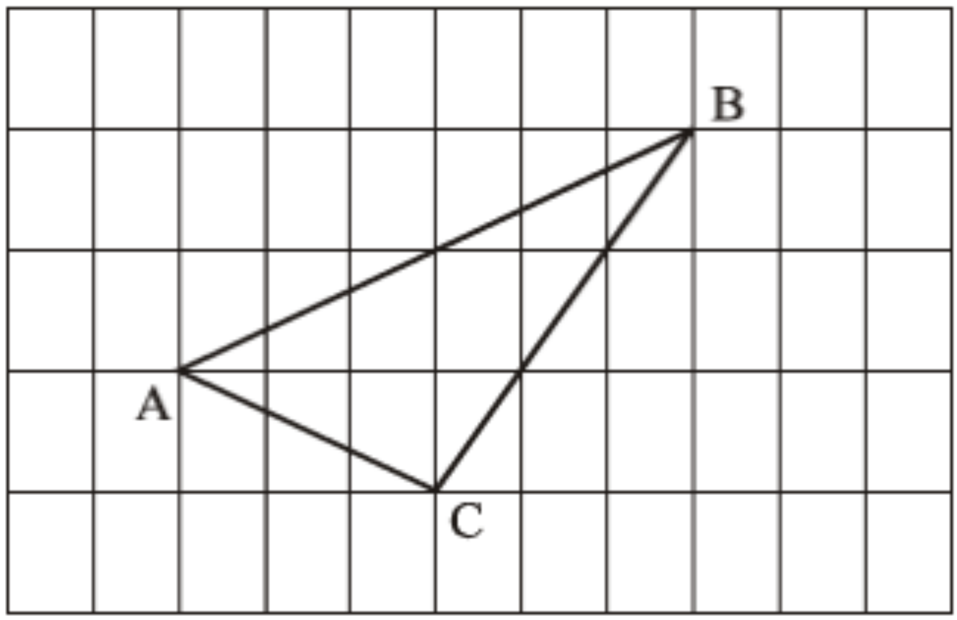
B) 19

C) 20

D) 21

E) 22

4. (UNIFICADO RJ/1999) Na figura abaixo vemos uma “malha” composta de 55 retângulos iguais. Em três dos nós da malha são marcados os pontos A, B, C, vértices de um triângulo.



Considerando-se a área S de cada retângulo, a área do triângulo ABC pode ser expressa por:

a) 24 S

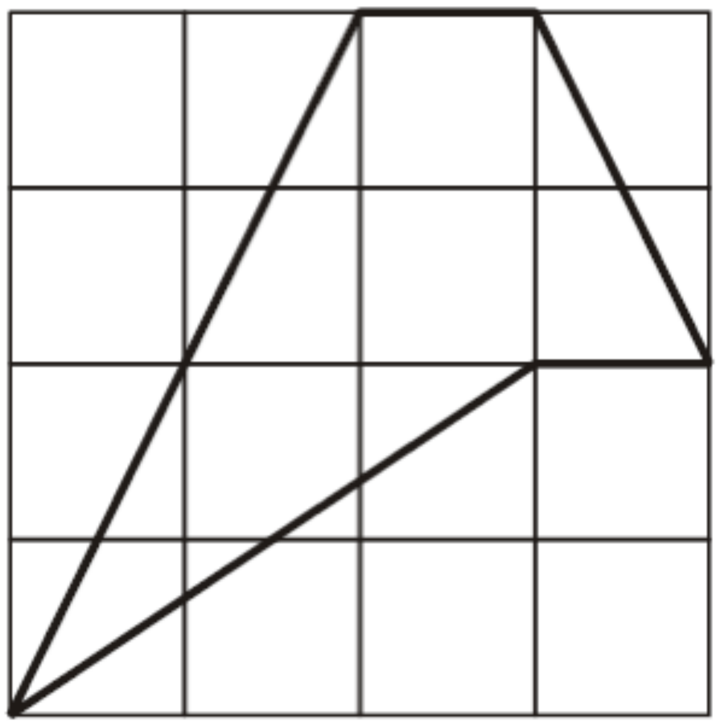
b) 18 S

c) 12 S

d) 6 S

e) 4 S

5. (Pucmg 2010) De uma placa quadrada de 16cm2, foi recortada uma peça conforme indicado na figura.



A medida da área da peça recortada, em centímetros quadrados, é:

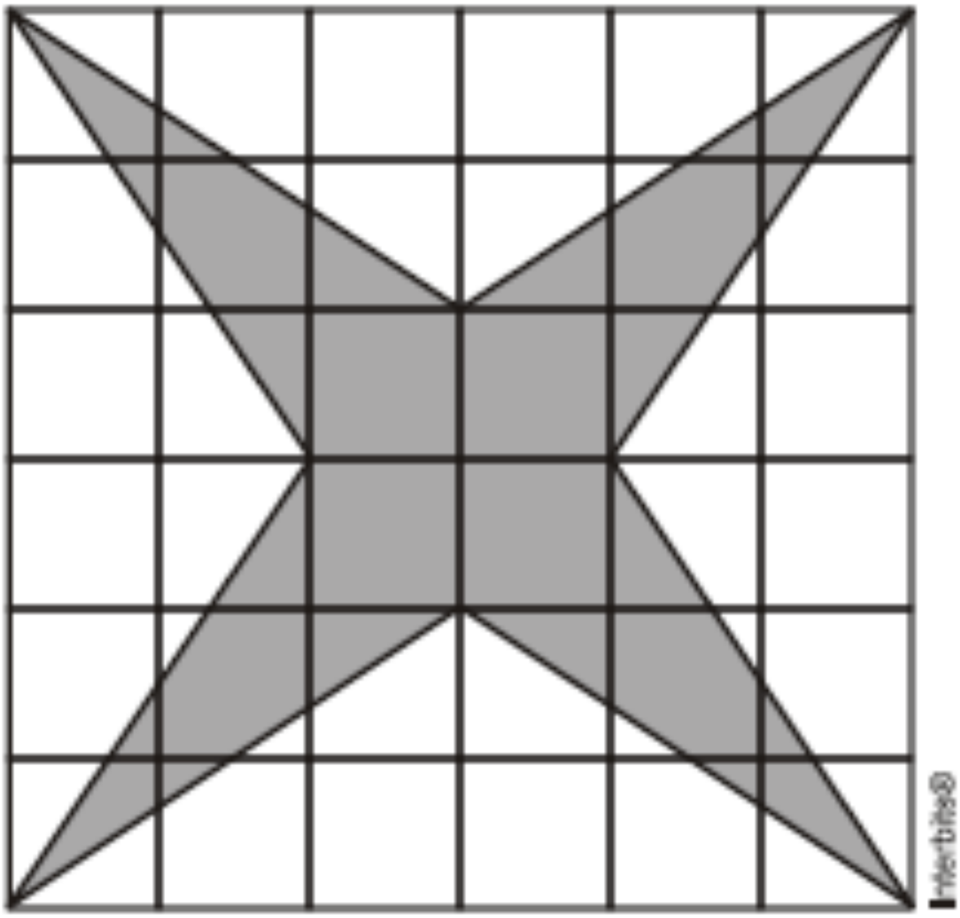
a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

6. (Ufrgs 2008) Na figura abaixo, a malha quadriculada é formada por quadrados de área 1. Os vértices do polígono sombreado coincidem com vértices de quadrados dessa malha.



A área do polígono sombreado é

a) 10.

b) 12.

c) 13.

d) 15.

e) 16.

Análise das atividades aplicadas aos alunos do 3º ano do ensino médio

Na escola alvo desta atividade foram aplicados os exercícios há 54 alunos, sendo 27 alunos na turma 3001 e 27 alunos na turma 3002. Como parâmetro para análise da nossa pesquisa definimos que a turma 3001 teria o conhecimento prévio do Teorema de Pick e a turma 3002 teria conhecimento do teorema somente após o término da atividade aplicada.

Os resultados estão tabulados abaixo:

Turma 3001:		Turma 3002	
1. 27 acertos	0 erro.	1. 26 acertos	0 erro.
2. 24 acertos	3 erros.	2. 1 acerto	26 erros.
3. 24 acertos	3 erros.	3. 20 acertos	7 erros.
4. 27 acertos	0 erros.	4. 21 acertos	6 erros.
5. 26 acertos	1 erro.	5. 15 acertos	12 erros.
6. 26 acertos	1 erro.	6. 17 acertos	10 erros.

Todos os alunos da turma 3001 usaram na resolução dos exercícios o teorema de Pick, terminando a atividade em tempo bem inferior ao tempo utilizado na turma 3002.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos o trabalho com o objetivo de esclarecer aos alunos unidade de área e a comparação desta unidade com as figuras planas convencionais (quadrados, triângulos, retângulos, etc.), bem como esclarecer as dúvidas dos alunos sobre o uso das fórmulas de área de cada forma geométrica.

Após este primeiro momento, onde fizemos uma breve explanação sobre as fórmulas de áreas, apresentamos dentro de um plano cartesiano, uma malha quadriculada e a representação da unidade de área nesta malha. Com a ajuda do Geogebra foi possível relacionarmos as áreas de cada figura plana convexa com a unidade de área apresentada na malha. O que pareceu muito produtivo para os alunos, pois muitos tinham dificuldades de abstrair as diversas decomposições de figuras planas em outros polígonos mais simples.

Em seguida propomos o cálculo de áreas através de uma única fórmula, o Teorema de Pick, e o seu uso em polígonos não convexos e consequentemente a comparação de alguns resultados encontrados com os resultados encontrados pelo uso das fórmulas de áreas por eles já conhecidas.

As atividades aplicadas para a turma de 9º ano tiveram menos resistência por parte dos alunos e, por conseguinte, uma melhor aceitação do Teorema de Pick, mais facilidade no seu uso para os cálculos das áreas de figuras não complexas.

Para os alunos do ensino médio a atividade foi aplicada em duas do terceiro ano do ensino médio, da seguinte forma: na primeira foram apresentada questões de vestibulares de algumas universidades do Brasil e pedido que os alunos as resolvessem na melhor forma possível, já na segunda turma as mesmas questões foram apresentadas para que resolvessem, porém com o uso do teorema de Pick, devidamente apresentado a turma. O tempo de respostas das questões entre as turmas foi analisado, sendo a turma onde foi usado o teorema de Pick, a primeira turma a terminar a atividade e com um número de acertos maior que a turma onde este teorema não foi usado.

Durante a preparação do trabalho, observamos que o uso do teorema de Pick não se aplica só aos alunos dos ensinos fundamental II e médio, também podemos introduzir este teorema no ensino fundamental, nas turmas de 4º e 5ºanos, pois trata-se de uma questão de contagem de pontos e o uso de um único algoritmo para o cálculo de áreas.

Desde a conclusão dos trabalhos realizados com os alunos destas duas escolas foi possível imaginar outros trabalhos sobre esse assunto, fazendo o cálculo de áreas de figuras improváveis com a ajuda do Geogebra, através das importações de imagens para a malha reticulada do plano cartesiano .

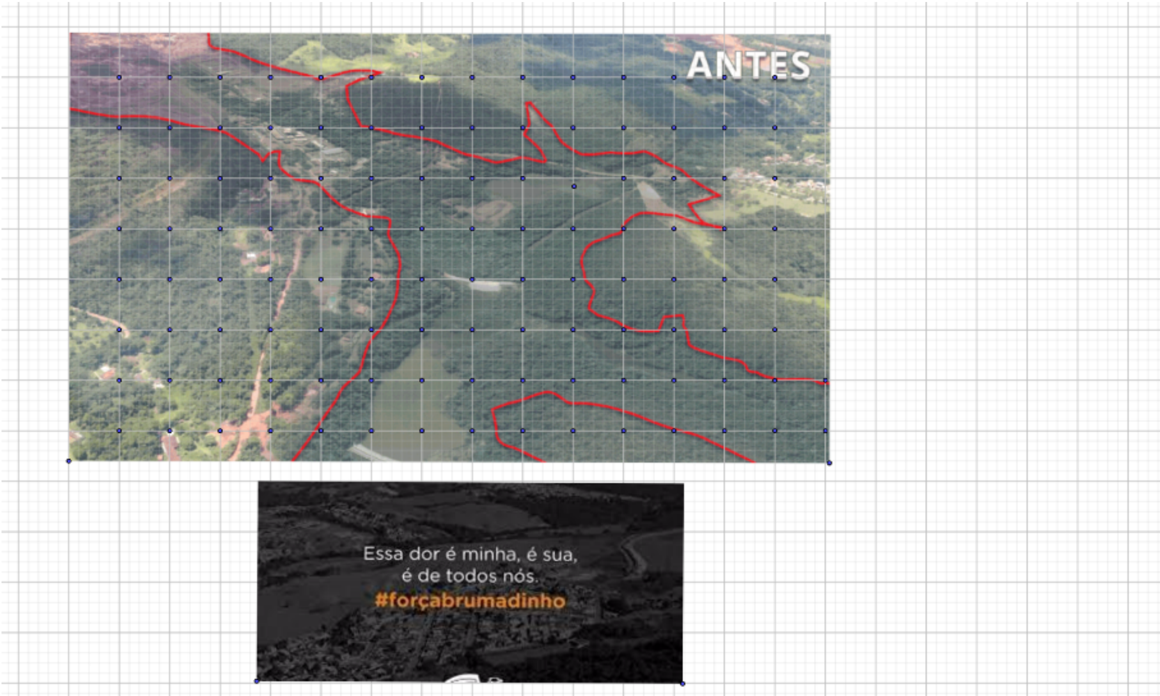
Abaixo deixo sugestões de trabalhos para outros professores a fim de tornar o tema áreas de figuras planas mais interdisciplinar.

Sugestão de atividade 1.

Cálculo de áreas de plantas de condomínios, podendo ter o uso de escalas

Sugestão de atividade 2.

O uso de situações do cotidiano, abaixo uma foto da área devastada na tragédia de Brumadinho – MG e uma estimativa da área atingida pelos rejeitos



No desenrolar do trabalho percebi o quanto é possível apresentar uma proposta diferenciada de ensino para os alunos, fazendo com que os mesmos percebam outras tecnologias atreladas ao ensino da matemática. Foi muito gratificante poder mostrar que a geometria não precisa ficar no plano das abstrações e pode ser aplicada no cotidiano do aluno em qualquer segmento escolar e sempre que possível usarei tais atividades e outras a serem elaboradas nas aulas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Secretaria de educação fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, 2000. ______. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília: Ministério da educação, 2000.

[2] Meu Professor de Matemática e Outras Histórias: SBM, 1991. Elon Lages Lima

[3] www.sprweb.com.br – Super professor – questões