Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

ROZINALDO FERREIRA BASTOS

UMA ABORDAGEM PRÁTICA NO ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Orientador: Miriam Abdón

NITERÓI
DEZEMBRO/2019

UNIVERSIDADE
FEDERAL
FLUMINENSE

UMA ABORDAGEM PRÁTICA NO ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Por:

ROZINALDO FERREIRA BASTOS

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

NITERÓI – RJ

DEZEMBRO – 2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

F383 Ferreira bastos, Rozinaldo
UMA ABORDAGEM PRÁTICA NO ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO / Rozinaldo Ferreira bastos ; Miriam del Milagro Abdón, orientadora. Niterói, 2019.
42 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2019.mp.76856500700

1. Analise Combinatoria. 2. Ensino e aprendizagem de Matemática. 3. Produção intelectual. I. Abdón, Miriam del Milagro, orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

ROZINALDO FERREIRA BASTOS

Uma Abordagem Prática no Estudo da Análise Combinatória para o Ensino Médio

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovada em: 12/12/2019

Banca Examinadora

Abdón

Profª. Miriam Del Milagro Abdón - Orientador
Doutora - Universidade Federal Fluminense

Luciane Quoos Conte

Profª. Luciane Quoos Conte - Membro
Doutora – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Profª. Nancy de Souza Cardim - Membro
Doutora - Universidade Federal Fluminense

AGRADECIMENTOS

Os meus agradecimentos a todos que de alguma maneira contribuíram para que meu sonho fosse realizado e esse momento chegasse. Obrigado de todo coração.

Primeiramente a Deus por determinar o momento certo em que tudo acontecesse em minha vida.

A minha esposa Zelina e meus filhos Anderson e André por ter compreendido todos os momentos que deixamos de estar juntos para esse sonho ser realizado.

Aos diretores, aos professores e aos alunos do C. E. Sol Nascente que contribuíram para a minha formação.

A Universidade Federal Fluminense, pela oportunidade de estudo e aprofundamento ao conhecimento e formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço a CAPES pelo apoio e pela bolsa que fez toda a diferença na formação.

Ao PROFMAT pela brilhante oportunidade dada a todos os participantes do Mestrado.

A Prof. Miriam Abdón, pela paciência e dedicação na orientação e sugestões de pesquisa para a conclusão do trabalho.

Aos colegas de turma, especialmente aqueles que participaram do nosso grupo de estudo que se tornaram meus amigos, que tornaram a conclusão do curso possível.

RESUMO

Durante anos trabalhando com os alunos do Ensino Médio e observando suas dificuldades ao lidarem com a Análise Combinatória, veio o desejo deste estudo, que tem por objetivo elaborar uma proposta pedagógica para o estudo dos conceitos básicos na Análise Combinatória a ser trabalhada no Ensino Médio, de forma prática, sem a preocupação inicial do uso de fórmulas, que serão construídas, mais tarde pelo aluno. Para aplicar o estudo nesse trabalho foi tomado por base algumas sugestões de questões presentadas no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos iniciais do Ensino Fundamental de Paulo Jorge Magalhães Teixeira e baseado nas quatro etapas formuladas por Polya para a resolução de problemas. As atividades propostas têm por finalidade colocar o aluno como construtor do seu conhecimento.

Palavra-chave: combinatória, resolução de problemas.

ABSTRACT

For years working with high school students and observing their difficulties in dealing with Combinatorial Analysis, came the desire of this study, which aims to develop a pedagogical proposal for the study of the basic concepts in the Combinatorial Analysis to be worked in high school, in a practical way, without the initial concern of the use of formulas, which will be built, more late by the students. To apply the study in this work was based on some suggestions of issues presented in the book Solving Problems of Combinatorial Analysis in the Early Years of Elementary School of Paulo Jorge Magalhães Teixeira and based on the four steps formulated by Polya for solving problems. The proposed activities aim to place the student as a builder of their knowledge.

Keyword: combinatorics, problem solving.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A interpretação de problemas, por si só, é uma dificuldade para os alunos. Quando os problemas analisados são de contagem, parece que as dificuldades se multiplicam.

Pensando nas deficiências e nas dificuldades que venho vivenciando no desenvolvimento do meu dia a dia como professor do Ensino Médio, resolvi que esse seria um bom tema a ser desenvolvido na minha dissertação.

Esse é um dos temas significativos para o currículo do Ensino Básico. Ainda que esteja previsto no Currículo Mínimo das escolas estaduais do Rio de Janeiro para o terceiro ano do Ensino Médio, ele é abordado durante todo o Ensino Básico. Do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, é tratado simplesmente como problemas de contagem, sem entrar no mérito do grupo em que os problemas se encaixam, usando apenas o princípio multiplicativo.

Na Base Nacional Comum Curricular, o estudo de contagem está previsto para ser trabalhado em todos os anos do Ensino Médio.

As atividades propostas neste trabalho têm como base o PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio):

> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. (...)
> Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações(...)
> Com objetivos: Formular hipóteses e prever resultados. Selecionar estratégias de resolução de problemas.

Durante vários anos, trabalhando em uma escola do interior do estado e encontrando várias dificuldades, seja pela deficiência que muitos alunos têm em Matemática, seja pela falta de perspectiva de muitos dos estudantes de prosseguirem com os estudos por morarem distantes das universidades, sempre me deparei com a falta de interesse dos educandos em se aprofundar nos problemas de contagem, e essa dificuldade de alguns acabavam desestimulando aqueles que desejavam prosseguir os estudos.

As dificuldades que eu tinha com minhas turmas eram também sentidas por meus colegas do colégio e como consequência os resultados das avaliações externas não eram tão bons quanto gostaríamos, principalmente no SAERJINHO, SAERJ e PROVA BRASIL[1].

No desenvolvimento desta dissertação o objetivo das atividades foi o de proporcionar ao aluno a oportunidade de descobrir na prática quais problemas poderiam ser agrupados de forma que pudessem ser resolvidos usando o princípio multiplicativo e quais não seriam resolvidos apenas pelo princípio multiplicativo, e que seriam agrupados e resolvidos usando o princípio da combinação.

Meu objetivo com esse trabalho é estudar formas que facilitem a compreensão dos problemas de contagem para meus futuros alunos, e dos meus colegas que queiram aplicar as atividades aqui propostas. Quero que os alunos tenham mais facilidade em compreender tais problemas, e com isso melhorar o desempenho e consequentemente queiram prosseguir os estudos principalmente nos cursos que envolvam a Matemática como uma das matérias principais, já que muitos alunos acreditam que a resposta é um decorar de fórmulas.

Todas as atividades aplicadas foram inspiradas nas atividades sugeridas no Livro: Resolvendo Problemas de Análise Combinatória do professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira, Editora Ciência Moderna.

Descrição da Escola

---

[1] SAERJINHO – É um sistema de avaliação implantado pela SEEDUC (Secretaria de Estado de Educação) com o objetivo de analisar como está o aprendizado em suas escolas. Todo os alunos do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental e das três séries do Ensino Médio participam, no final de cada bimestre, as provas de Língua Portuguesa e Matemática. Mais informações podem ser obtidas no site http://www.avaliacaoexternasaerj.caedufjf.net/o-sistema-estadual/o-saerjinho/apresentacao/

SAERJ – É um sistema de avaliação foi criado pela SEEDUC em 2008 e aplicado ao final do ano letivo que busca promover uma análise do desempenho dos alunos da rede pública do Estado do Rio de Janeiro nas disciplinas de língua portuguesa e matemática. É uma forma que o estado criou para monitorar a qualidade do ensino e, dessa forma, poder melhorar a qualidade da educação. São avaliados alunos do 5º ano do ensino fundamental à 3ª série do Ensino Médio. Mais informações podem ser obtidas no site http://www.avaliacaoexternasaerj.caedufjf.net/o-sistema-estadual/o-saerj/apresentacao-saerj/

PROVA BRASIL - Era um exame para estudantes do 5º e do 9º anos (antigas 4ª e 8ª séries) do Ensino Fundamental, que serve para avaliar o rendimento das escolas públicas do País. Ele testa o conhecimento dos alunos em língua portuguesa e matemática. O nome mudou, mas a prova se mantém. Hoje é a SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Mais informações podem ser obtidas no site http://portal.mec.gov.br/prova-brasil

As atividades apresentadas nessa dissertação foram planejadas e executadas no C. E. Sol Nascente.

O colégio está localizado à Rua Osvaldir Vicente Siqueira, número 250 em Papucaia, no município de Cachoeiras de Macacu, cidade do interior do Estado do Rio de Janeiro, com vocação agrícola e que não possui nenhuma faculdade, o que dificulta a participação dos seus alunos em cursos superiores. Por essa razão muitos alunos não veem uma perspectiva de continuidade de seus estudos.

Papucaia é um distrito de Cachoeiras de Macacu que foi fundado como uma Colônia Agrícola na década de 1960, portanto durante o período de ditadura. Quando foi fundada, a maioria dos seus colonos era de descendentes de japoneses, daí o nome Sol Nascente. Hoje essa característica não é tão marcante.

Durante vários dos últimos anos, os índices que medem o nível de desenvolvimento da Educação não foram favoráveis ao C. E. Sol Nascente. Como o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) e o IDERJ (Índice de Desenvolvimento da Educação do Rio de Janeiro). De acordo com o site do Inep http://portal.inep.gov.br/ideb, vemos que

> O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) foi criado pelo INEP em 2007 e representa a iniciativa pioneira de reunir em um só indicador dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: fluxo escolar e médias de desempenho nas avaliações. Ele agrega ao enfoque pedagógico dos resultados das avaliações em larga escala do Inep a possibilidade de resultados sintéticos, facilmente assimiláveis, e que permitem traçar metas de qualidade educacional para os sistemas.
> O indicador é calculado a partir dos dados sobre aprovação escolar, obtidos no Censo Escolar, e médias de desempenho nas avaliações do Inep, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) – para as unidades da federação e para o país, e a Prova Brasil – para os municípios.

IDEB - Resultados e Metas

	Ideb Observado					
Escola	2005	2007	2009	2011	2013	2015
CE SOL NASCENTE	4.0	3.3	3.5	3.1	4.1	5.4

Metas Projetadas							
2007	**2009**	**2011**	**2013**	**2015**	**2017**	**2019**	**2021**
4.0	4.1	4.4	4.8	5.2	5.4	5.7	5.9

IDERJ

Segundo o IDERJ é o índice de qualidade escolar que visa fornecer um diagnóstico da escola, em uma escala de 0,0 (zero) a 10,0 (dez), calculado a partir da multiplicação do Indicador de Fluxo Escolar (IF) pelo Indicador de Desempenho (ID). O mesmo avalia a qualidade do aprendizado do ciclo escolar, bem como o tempo necessário para assimilar o conteúdo proposto.

IDERJ = IF X ID

O Indicador de Fluxo Escolar (IF) é uma medida resumida da promoção dos alunos em cada nível de ensino que considera a taxa de aprovação nas séries iniciais e finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio para cada unidade, variando entre 0,0 (zero) e 1,0 (um).

O Indicador de Desempenho (ID) é o índice que varia entre 0,0 (zero) e 10,0 (dez), medido a partir do agrupamento das notas obtidas pelos alunos do último ano de cada ciclo escolar no exame do Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro - SAERJ, em quatro níveis de proficiência: baixo, intermediário, adequado e avançado.

Perfil dos Alunos

Os alunos do Ensino Médio do C. E. Sol Nascente estudam no primeiro turno e no terceiro turno. Os maiores problemas de aprendizagem são encontrados nos alunos que estudam no terceiro turno.

As atividades aqui apresentadas foram executadas pelos alunos da turma 3006 que estudaram no terceiro turno. A turma era composta por 26 alunos e as atividades foram aplicadas durante o horário normal de aula com todos os alunos e de acordo com o Currículo Mínimo do terceiro ano das escolas estaduais.

O trabalho foi desenvolvido durante quatro dias de acordo com o planejamento no quadro de horário normal da escola.

ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Um pouco de história

A resolução de problemas já aparece em registros da antiguidade, mas o enfoque era diferente do que hoje entendemos como uma Metodologia de Ensino.

Podemos afirmar que até meados do século XX, o ensino de Matemática se baseava na repetição aliada à memorização dos fatos básicos. Isso foi mudando com o tempo e anos mais tarde, era um consenso que os alunos deveriam aprender com compreensão, deviam entender o que faziam e não simplesmente repetir mecanicamente argumentos e processos.

Em 1944, George Polya, Professor da Universidade de Stanford, publica o livro *A arte de resolver problemas* e se converteria na maior referência na área. No livro, ele descreve as quatro fases necessárias para a resolução de um problema. São elas:

1) Compreender o problema.

2) Estabelecer um plano.

3) Executar o plano.

4) Examinar a solução obtida.

Cada um destes pontos está exemplificado e discutido no livro (POLYA, 1945).

Polya entendia que era fundamental ensinar os professores para que estes se tornassem bons resolvedores de problemas a fim de que pudessem ajudar seus alunos, e para isto, ministrou vários cursos no tema.

> Comece com algo que é familiar, ou útil, ou desafiador. Que possua alguma conexão com o mundo ao nosso redor, a partir da perspectiva de alguma aplicação, a partir de uma ideia intuitiva.
>
> Não tenha medo de usar uma linguagem coloquial quando é mais sugestiva do que a terminologia convencional e precisa. Na verdade, não apresente termos técnicos antes que o estudante possa ver a necessidade para eles.

> Não entre muito cedo em detalhes pesados de uma prova. Dê primeiro uma ideia geral ou apenas o germe intuitivo da prova.
>
> De modo mais geral, perceber que a forma natural de aprender é aprender por etapas: Primeiro, nós queremos ver um esboço do assunto, para perceber alguma fonte de concreto ou algum possível uso. Então, gradualmente, tão cedo quanto nós pudermos ver mais uso e conexões e interesse, ganhamos maior vontade de trabalhar com os dados
>
> (POLYA 1967, apud OUNICH et al 2014).

Podemos afirmar que os trabalhos de Polya incentivaram a pesquisa sobre Resolução de Problemas. No Brasil, o professor Luis Alberto S. Brasil já defendia em 1964 o ensino de Matemática a partir de problemas que possibilitassem introduzir novos conceitos e conteúdos.

Paralelamente, o ensino também foi influenciado pelo movimento conhecido como Matemática Moderna, uma abordagem apoiada nas estruturas lógicas e algébricas que enfatizava a teoria de conjuntos. Como observam ALLEVATO et al (2009)

> Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. Nessa reforma o ensino era trabalhado com um excesso de formalização, distanciando-se das questões práticas.

Esse excesso de formalização, vai na contramão dos conselhos de Polya. Estas reformas não tiveram o sucesso esperado.

> [...] o nível de desempenho dos estudantes em Matemática não havia atingido o mínimo desejado, pois eles não aprendiam as abstrações e suas habilidades básicas tinham se perdido na mal sucedida pressa em ensinar, às crianças muito jovens, coisas como a nova teoria numérica”, (SCHOENFELD, apud. ONUCHIC et al 2014).

Além disso, como observado em ONUCHIC 2014, os professores estavam despreparados para trabalhar com esta nova abordagem e as famílias tinham enormes dificuldades em ajudar nas tarefas escolares.

Era tempo de voltar à Resolução de Problemas.

> [...]os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização da Educação Matemática em termos de resolução de problemas reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas, que a configuravam enfatizando a memorização de um conjunto de fatos, o domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental". (ALLEVATO et al 2009).

O National Council of Theachers of Mathematics (NCTM) tem feito desde os anos 80, diversas recomendações para o progresso da Matemática Escolar. No documento Uma Agenda para a Ação (NCTM 1980) a "resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar" aparece como a primeira recomendação. Muitos recursos visando o trabalho em sala de aula foram desenvolvidos na década de oitenta. O problema que surgiu foi que existiam diferentes concepções sobre o que significa fazer da resolução de problemas o foco da matemática escolar.

Podemos destacar três linhas:

1) Ensinando sobre resolução de problemas (trabalhar com a proposta de Polya);

2) Ensinando para resolver problemas (o foco aqui é como a Matemática é ensinada);

3) Ensinando via resolução de problemas (está profundamente ligado ao que entendemos como fazer Matemática).

Esta nova abordagem de ensino-aprendizagem de Matemática culminou com a publicação dos Standards 2000 (NCTM, 2000):

> Resolver problemas não é apenas um objetivo de aprender matemática, mas também um dos principais meios de fazê-lo. É uma parte integrante da matemática, não uma peça isolada do programa de matemática. Os alunos exigem frequentes oportunidades para formular, lidar e resolver problemas complexos que envolvem uma quantidade significativa de esforço. Eles devem ser incentivados a refletir sobre seus pensamentos durante o processo de solução de problemas, para que possam aplicar e adaptar as estratégias que desenvolvem a outros problemas e em outros contextos. Ao resolver problemas matemáticos, os alunos adquirem modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade e confiança em situações desconhecidas que servem também fora da sala de aula de matemática.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 2015 está explicito o desejo de que o aluno seja competente em resolução de problemas, especialmente daqueles que permitam desenvolver formas de pensar em Matemática. Segundo o PCN, a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática. Observa que a competência de resolver problemas não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. O documento afirma ainda que na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução.

Sobre a pesquisa em Resolução de Problemas, gostaríamos de destacar o trabalho desenvolvido pelo GTERP, Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, da UNESP, Rio Claro, SP. Desde 1992, o grupo tem desenvolvido pesquisas, orientado alunos de Mestrado e Doutorado, organizado congressos e mantém um diálogo constante com os professores da Educação Básica.

A Metodologia

Segundo ALLEVATO et al (2009), não há formas rígidas para colocar em prática essa metodologia, mas destacam as seguintes etapas usadas pelo GTERP para organizar as atividades:

1) Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula.

2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

4) Resolução do problema - De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.

5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o

problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Assim, ensinar Matemática através da Resolução de Problemas vai ao encontro das recomendações do PCN, fazendo com que o aluno construa o conhecimento na prática, compreendendo os conceitos, evitando a repetição mecânica de exercícios que muitas vezes são resolvidos pela simples memorização.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é um conjunto de diferentes procedimentos que podemos tomar para formar grupos a partir de um conjunto finito de elementos que obedecem determinadas regras. Esta não é a visão que os alunos têm da Combinatória, como MORGADO et al 2006 deixam explícito no livro ao se perguntarem o que é combinatória: “A maior parte dos alunos do segundo grau responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações”.

Talvez essa visão se deva em parte a como ela é ensinada nas escolas, sempre dando-se ênfase nas fórmulas e na repetição mecânica através dos exercícios

De acordo com SOUZA (2016, p. 4)

> Geralmente, numa aula tradicional, a Análise Combinatória é trabalhada com aplicação de fórmulas, sem significado para os alunos. Assim, adotar outra metodologia, que permite a participação do aluno na construção dos conceitos de arranjo, permutação e combinação, pode contribuir para a aquisição de uma compreensão mais significativa, que procura dar sentido à matemática construída.

Assim, o papel do professor pode ser visto como fundamental para que isso se efetive, exigindo desse profissional um planejamento das aulas.

Sobre esse mesmo assunto, ONUCHIC (2016, p. 18) relata que

> Teorias pedagógicas se desenvolvem ancoradas em teorias psicológicas e as razões se justificam pela complexidade que é inerente à aprendizagem, especialmente em se tratando de sua ocorrência, ou não, em um contexto diverso, o da sala de aula. Assim, considerar teorias psicológicas e pedagógicas, vigentes na virada do século XIX para o século XX pode nos levar a melhor compreender a forma como novas teorias foram se configurando e as razões por terem, ou não, se estabelecido nos currículos escolares.

Na maioria das vezes tomamos um conjunto de n elementos e devemos formar grupos com p elementos, sendo $p \leq n$, seguindo uma regra de formação pré-determinada.

São vários os modos de formar esses grupos e determinados procedimentos devem ser levados em conta para separá-los. Alguns grupos podem ser chamados de Arranjos, outros de Permutações ou Combinações.

Uma de minhas principais preocupações, certamente a maior delas, foi não partir diretamente para as fórmulas. O aluno deveria calcular de forma prática, para então usar a fórmula que fosse mais adequada. Daí foi dada toda a atenção ao princípio multiplicativo.

Citando mais uma vez MORGADO et al 2006

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita no problema.
>
> Por outro lado, se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a emprega-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Princípio Fundamental da Contagem

Todas as atividades desenvolvidas neste trabalho estão relacionadas com contar o número de conjuntos que podem ser formados a partir de um determinado conjunto, seguindo certas regras de formação. A procura de técnicas de contagem é algo natural, já que o primeiro contato que uma criança tem com a Matemática é por meio da contagem. Primeiro a criança aprende a contar e depois se ventura nas operações aritméticas, que em geral são sempre motivadas no início da vida escolar, por problemas de contagem.

No livro **A Matemática do Ensino Médio vol 2**, de LIMA et al, temos como princípio básico:

O princípio fundamental da contagem diz que se há *x* modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é *xy*.

Exemplo 1: Um time de futebol possui três cores diferentes de camisa e duas cores diferentes de short. Quantos uniformes diferentes podem ser formados com essas peças do vestuário?

Ao escolher uma camisa tem-se 3 opções e ao escolher um short tem-se 2 opções, portanto podem ser formados 3 x 2 uniformes diferentes.

3 x 2 = 6

Exemplo 2: Dispondo de 4 cores distintas, quantas bandeiras distintas com três listras horizontais podem ser pintadas?

Ao escolher a cor para a primeira listra dispõe-se de 4 cores, ao escolher a cor para a segunda listra dispõe de 4 cores, já que pelo problema a cor escolhida para a primeira listra não influencia na cor da segunda listra, e assim, para a terceira listra. Logo, teremos:

4 x 4 x 4 = 64

64 bandeiras distintas.

Exemplo 3: Dispondo de 4 cores distintas, quantas bandeiras distintas com três listras horizontais de cores diferentes podem ser pintadas?

Ao escolher a cor para a primeira listra dispõe-se de 4 cores, ao escolher a cor para a segunda listra dispõe de 3 cores, já que pelo problema não pode ser escolhida a cor usada na primeira listra e para a terceira listra dispõe de 2 cores, já que não podem ser escolhidas as cores usadas na primeira nem na segunda listra. Logo, teremos:

4 x 3 x 2 = 24

24 bandeiras diferentes.

Exemplo 4: Dispondo de 4 cores distintas quantas bandeiras diferentes com três listras horizontais podem ser pintadas sem que tenha duas listras adjacentes com a mesma cor?

Ao escolher a cor para a primeira listra dispõe-se de 4 cores, ao escolher a cor para a segunda listra dispõe de 3 cores, já que pelo enunciado do problema não pode ser escolhida a cor usada na primeira listra e para a terceira listra dispõe de 3 cores, já que não pode ser escolhida a cor usada na segunda listra mas pode ser usada a cor usada na primeira listra. Logo, teremos:

4 x 3 x 3 = 36

36 bandeiras diferentes.

Na Educação Básica são trabalhados os conceitos de Arranjos, Permutações e Combinações. Por que priorizar estes conceitos? Novamente MORGADO et al 2006 vêm a nosso auxílio:

> Em primeiro lugar, entre os vários tipos de “números para contagem” da Análise Combinatória, eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória.

Arranjo Simples

No arranjo podemos formar grupos de *p* elementos tomados de um conjunto de *n* elementos com $p < n$, que se diferem pela ordem ou pela espécie de seus elementos.

Nos problemas de Arranjo podem ser usados o princípio fundamental da contagem ou usar a formula do Arranjo:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 5: Dispondo de 4 cores distintas, quantas bandeiras distintas com três listras horizontais de cores diferentes podem ser pintadas?

Pelo princípio multiplicativo:

4 x 3 x 2 = 24

Pela fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4\,x\,3\,x\,2\,x\,1!}{1!} = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 = 24$$

24 bandeiras diferentes

Exemplo 2: Numa corrida existem 8 participantes. De quantas formas pode ser formado o pódio com primeiro, segundo e terceiro lugares?

Pelo princípio multiplicativo temos 8 para o primeiro lugar, 7 para o segundo e 6 para o terceiro, já que um mesmo competidor não pode ocupar dois lugares ao mesmo tempo.

8 x 7 x 6 = 336

Pela fórmula:

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8\,x\,7\,x\,6\,x\,5!}{5!} = 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 = 336$$

Permutação simples

No livro Matemática, de YOUSSEF, SOARES E FERNANDEZ 2009, é dada a seguinte definição para a permutação simples:

Dados *n* elementos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, podemos formar com todos eles, sem repetição, agrupamentos de *n* elementos que diferem entre si apenas pela ordem dos elementos em cada agrupamento.

Cada um destes agrupamentos será chamado de uma permutação dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Uma pergunta natural é: Quantas permutações distintas podem ser obtidas a partir desses elementos?

O primeiro elemento do grupo pode ser escolhido de *n* modos, isto é, pode ser qualquer um dos *n* objetos; o segundo elemento pode ser qualquer um dos *n – 1* elementos que não foram usados no primeiro lugar e assim por diante. Temos então: *n* possibilidades para o primeiro, *n – 1* possibilidades para o segundo, *n – 2* possibilidades para o terceiro, assim sucessivamente, até uma única possibilidade para o último elemento. Pelo princípio multiplicativo, o número total de agrupamentos (ou ordenações) dos *n* elementos será igual a:

$$n.(n-1).(n-2). \ldots .3.2.1 = n!$$

A permutação simples é uma parte do arranjo onde todos os elementos são usados. Pode ser resolvido pelo princípio multiplicativo ou pela fórmula da permuta.

$$P_n = n!$$

Exemplo 7: Dispondo de 4 cores distintas, quantas bandeiras distintas com quatro listras horizontais de cores diferentes podem ser pintadas?

Pelo princípio multiplicativo:

4 x 3 x 2 x 1 = 24

Pela fórmula:

$$P_4 = 4! = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 24$$

Permutação com elementos repetidos

Dados *n* elementos não necessariamente todos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, podemos formar com todos eles, sem repetição, agrupamentos de *n* elementos que diferem entre si apenas pela ordem dos elementos em cada agrupamento. Cada um destes agrupamentos será chamado de uma permutação dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Uma pergunta natural é: Quantas permutações distintas podem ser obtidas a partir desses elementos?

De modo geral, se em uma permutação há n_1 elementos iguais a *A*, n_2 elementos iguais a *B*, n_3 elementos iguais a *C*, etc., então temos:

$$\boxed{P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!}}$$

Já que a permutação de n elementos diferentes é dado pela fórmula: $P_n = n!$. Quando temos alguns elementos repetidos, a permutação delas não gera novos anagramas, para corrigir o excesso, devemos dividir o total de anagramas, pela quantidade de anagramas formados pelas letras repetidas.

Exemplo 8: Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Como são duas letras T e três letras A temos:

$$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2!3!} = \frac{6.5\,.\,4.3!}{2.1\,.\,3!} = 60$$

São 60 anagramas.

Exemplo 9: Bruno mora a 3 quarteirões ao norte e 5 quarteirões a leste da escola. Quantos caminhos possíveis, percorrendo sempre a menor distância, Bruno pode fazer para ir de sua casa à escola?

Cada caminho pode ser representado como uma palavra de comprimento 8 formada por 3 letras N e 5 letras L. Assim por exemplo se ele caminhar 1 quarteirão na direção Norte, 3 quarteirões na direção Leste, depois mais um na direção Norte, 2 na direção Leste, um para o Norte e um para o Leste, representaríamos o caminho percorrido por NLLLNLLN

$$P_8^{3,5} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8.7\,.\,6.5!}{3.2\,.\,1.5!} = 56$$

São 56 possíveis caminhos para Bruno ir da escola até em casa.

Combinação simples

Combinações são os vários modos de formar grupos de *p* elementos a partir de um conjunto de *n* elementos, onde esses grupos se diferem apenas pela natureza de seus elementos. Na Combinação a ordem que os elementos se encontram não é importante.

Nesse caso representa-se Combinação de algumas formas:

$$C_n^p = C_{n,p} = \binom{p}{n} = \frac{n!}{p!\left(n-p\right)!}$$

Exemplo 10: Para o dia das mães, os alunos da turma 3006 vão preparar presentes para presenteá-las. Cada presente deve conter dois produtos diferentes, dentre aqueles comprados, que são: sabonete, xampu, desodorante, creme facial, creme para as mãos e creme para os pés. Quantos presentes diferentes podem ser formados?

Como a ordem dos produtos escolhidos não tornam os presentes diferentes, usamos a combinação.

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!\left(6-2\right)!} = \frac{6!}{2!(4)!} = \frac{6\,x\,5\,x\,4!}{2x1x4!} = 15$$

Combinação Completa ou Combinação com repetição

Quando temos *n* elementos distintos e queremos formar grupos de *k* elementos não necessariamente distintos, onde a ordem dos elementos dos grupos formados não é importante, portanto, não é feita a permutação dos *k* elementos dos grupos formados.

$$Cr_{n+k-1,n} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

Exemplo 11: Uma fábrica dispõe de 3 cores diferentes para pintar 6 carros idênticos, cada um com uma única cor. De quantos modos isso pode ser feito?

Neste caso temos $n = 6$ e $k=3$

$$Cr_{6+3-1,6} = \frac{(6+3-1)!}{6!(3-1)!} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8.7\,.\,6!}{6!\,.\,2.1} = \frac{8.7}{2} = 28$$

ATIVIDADES

A seguir, apresentamos as quatro atividades realizadas em sala de aula e uma atividade que foi planejada, mas que não deu tempo de ser aplicada.

Atividade 1

Atividade com as Bandeiras com listras horizontais, foi extraída e adaptada do livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, Autor Paulo Jorge Magalhães Teixeira.

No primeiro dia que tive contato com a turma com a qual iríamos estudar análise combinatória, apresentei uma sequência de nove bandeiras com duas listras horizontais e pedi que pintassem todas as bandeiras possíveis usando duas cores. Inicialmente houve uma pequena confusão porque alguns alunos achavam que podiam pintar as bandeiras com tons diferentes para representar bandeiras diferentes. Depois de esclarecido que não importava o tom, o que contava era a cor usada, eles pintaram e chegaram a conclusão que só era possível pintar quatro bandeiras de duas listras horizontais usando apenas duas cores.

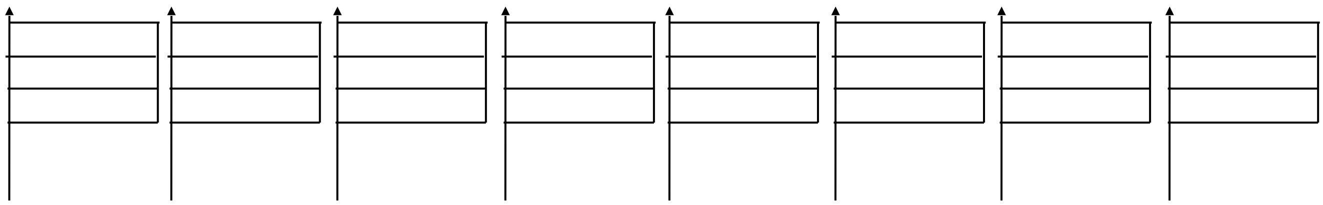
Depois pedi que usassem o mesmo procedimento agora usando três cores para pintar todas as bandeiras possíveis. Dessa vez a tarefa foi mais tranquila e pintaram nove bandeiras.

Alguns dos alunos começaram uma discussão sobre a quantidade de bandeiras que poderiam pintar de acordo com a quantidade de cores e com duas listras horizontais. Deixei a discussão acontecer, mas não me aprofundei porque não era no momento o objetivo da atividade.

No outro dia de aula apresentei para eles o questionário a seguir:

Tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades – Duas cores

Situação problema: Abaixo foram desenhadas 8 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma.



a) Você dispõe de duas cores. Considere as bandeiras acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada em cada bandeira considerada.

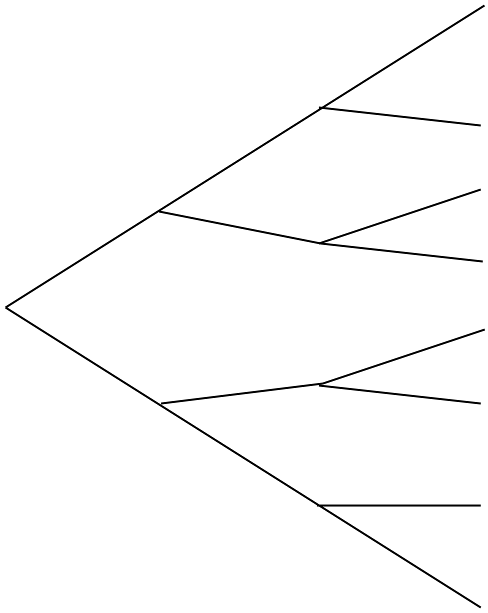
b) Todas as bandeiras que foram desenhadas acima foram pintadas por você e foram suficientes?

....
....
..Se sua resposta foi não, ainda faltam bandeiras que precisam ser desenhadas e pintadas de maneiras diferentes que aquelas apresentadas pelas 8 bandeiras que você já pintou?
....
....
..Se sua resposta foi não e sobraram bandeiras que não foram pintadas por você, quantas delas sobraram?
....
....
..c) Explique como você procedeu para colorir as diferentes bandeiras que você coloriu.
....
....
..
....
....
..
d) Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras que têm três listras horizontais você obteve, quando dispõe de duas cores para a pintura e nenhuma listra pode ficar sem ser pintada?
....
....
..e) Usando as suas bandeirinhas escreva todas as ternas de cores:

(............................. , ... , ...)...............................

....
....
....
...

f) Complete a árvore com as possibilidades, escrevendo as cores.



Obs: Indicação era que preenchesse cada ramo da árvore, escrevendo a cor usada em cada listra da bandeira.

Atividade 1 Exemplo de Resposta

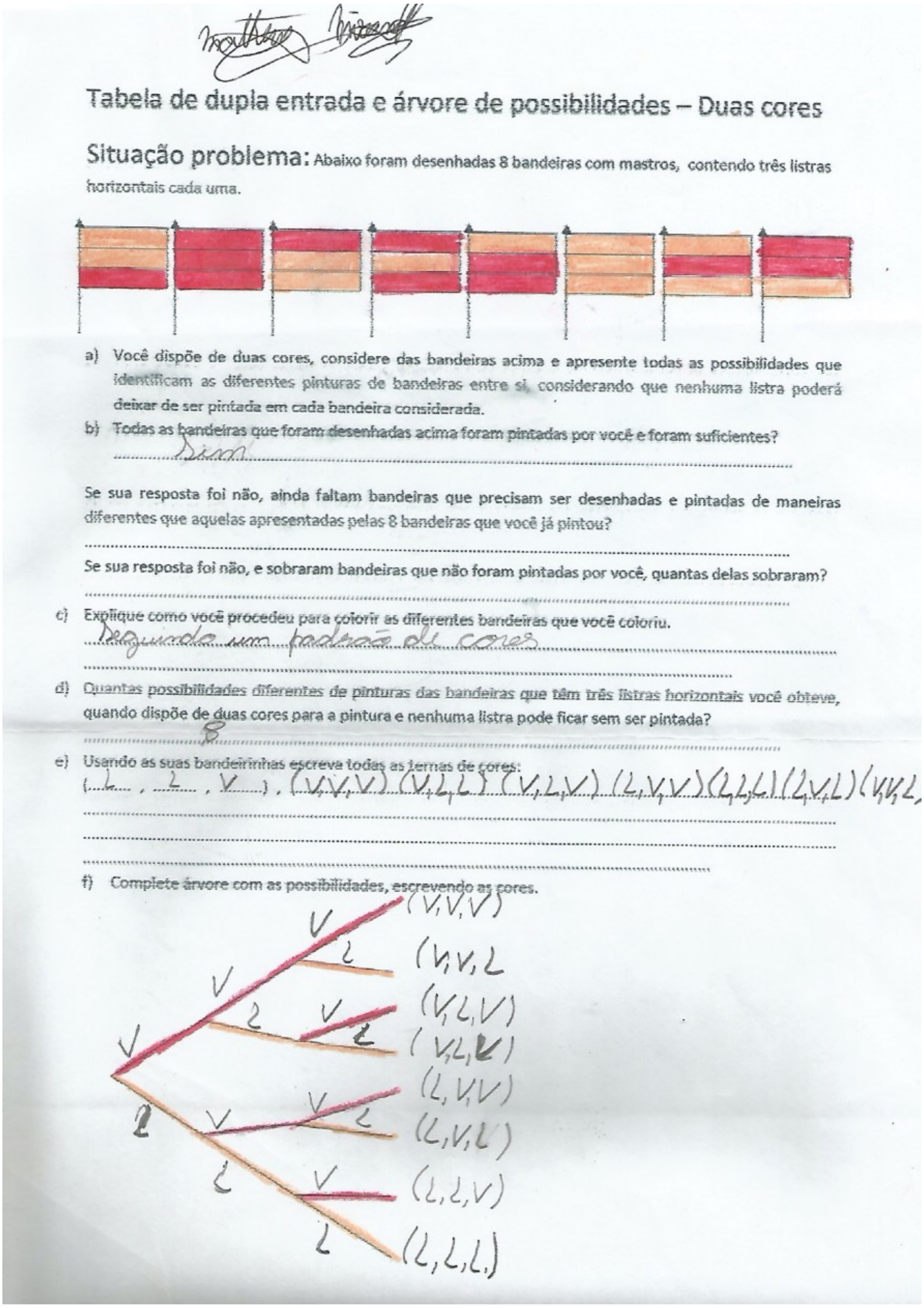


Tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades – Duas cores

Situação problema: Abaixo foram desenhadas 8 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma.

a) Você dispõe de duas cores, considere das bandeiras acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada em cada bandeira considerada.

b) Todas as bandeiras que foram desenhadas acima foram pintadas por você e foram suficientes?
Sim

Se sua resposta foi não, ainda faltam bandeiras que precisam ser desenhadas e pintadas de maneiras diferentes que aquelas apresentadas pelas 8 bandeiras que você já pintou?

Se sua resposta foi não, e sobraram bandeiras que não foram pintadas por você, quantas delas sobraram?

c) Explique como você procedeu para colorir as diferentes bandeiras que você coloriu.
Seguindo um padrão de cores

d) Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras que têm três listras horizontais você obteve, quando dispõe de duas cores para a pintura e nenhuma listra pode ficar sem ser pintada?
8

e) Usando as suas bandeirinhas escreva todas as ternas de cores:
(L , L , V) , (V,V,V) (V,L,L) (V,L,V) (L,V,V)(L,L,L)(L,V,L)(V,V,L

f) Complete árvore com as possibilidades, escrevendo as cores.

Obs: Como no trabalho foi usada uma caixa de lápis de normal, nem todos os alunos usaram as mesmas cores, no caso o aluno usou L (laranja) e V (vermelho).

Comentário sobre a atividade realizada

Apresentei o questionário onde eles deveriam pintar as bandeiras diferentes com três listras horizontais usando duas cores e depois responderiam as questões dadas.

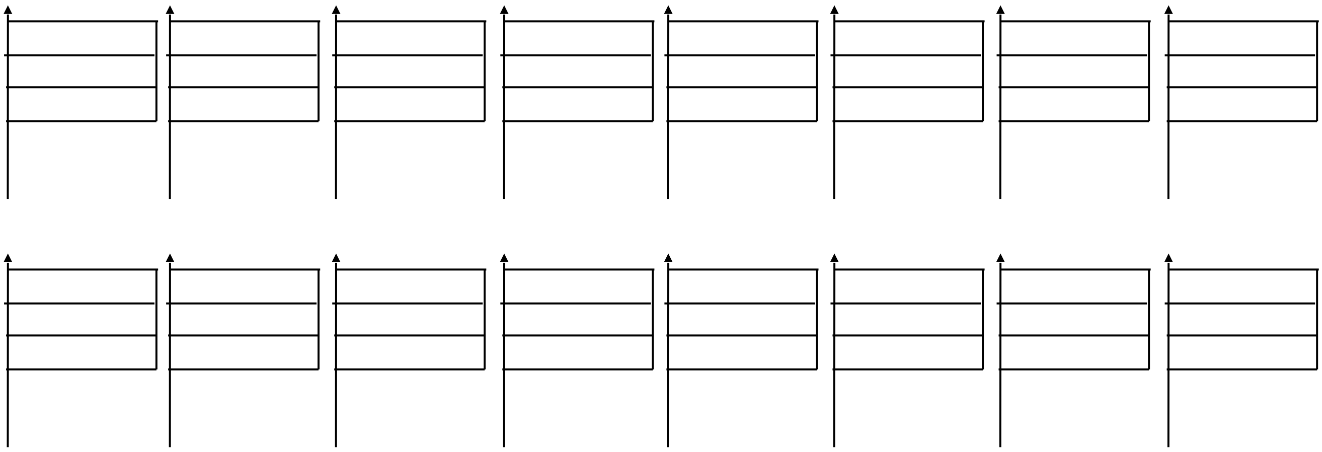
Foi observado claramente que só dariam para pintar oito bandeiras diferentes com as duas cores dadas, então as respostas as questões foram dadas de forma tranquila. Quanto à questão que perguntava qual o critério usado para pintar as bandeiras a maioria disse que foi pintando aleatoriamente, enquanto outros disseram que pintaram toda a bandeira de uma cor apenas para então inserir a outra cor.

A árvore das possibilidades depois de algumas tentativas foi preenchida de forma satisfatória e então, observou-se que por ela daria para pintar as bandeiras de uma forma mais fácil.

Atividade 2

Tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades – Três cores

Situação problema: Abaixo foram desenhadas 16 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma.



a) Você dispõe de três cores, considere das bandeiras acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada em cada bandeira considerada.

b) Todas as bandeiras que foram desenhadas acima foram pintadas por você e foram suficientes?

....
....
..

Se sua resposta foi não, ainda faltam bandeiras que precisam ser desenhadas e pintadas de maneiras diferentes que aquelas apresentadas pelas 16 bandeiras que você já pintou? ....

Se sim, quantas bandeiras faltaram? ....
....

Se sua resposta à primeira pergunta foi não, e sobraram bandeiras sem serem pintadas, quantas das bandeiras não foram pintadas por você?

....
.

c) Explique como você procedeu para colorir as diferentes bandeiras que você coloriu.

....
....
.. ..
....
.....

d) Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras que têm três listras horizontais você obteve, quando dispõe de três cores para a pintura e nenhuma listra pode ficar sem ser pintada?

....
....
..

e) Quantas bandeiras têm a 1ª listra pintada de verde? ....
Quantas bandeiras têm a 2ª listra pintada de verde? ....
Quantas bandeiras têm duas listras pintadas de
vermelho? .... Quantas bandeiras têm duas listras pintadas com a mesma cor? ....

f) Usando as suas bandeirinhas escreva todas as ternas de cores:

(............ , ... , ...)...
....
....
....
....
...

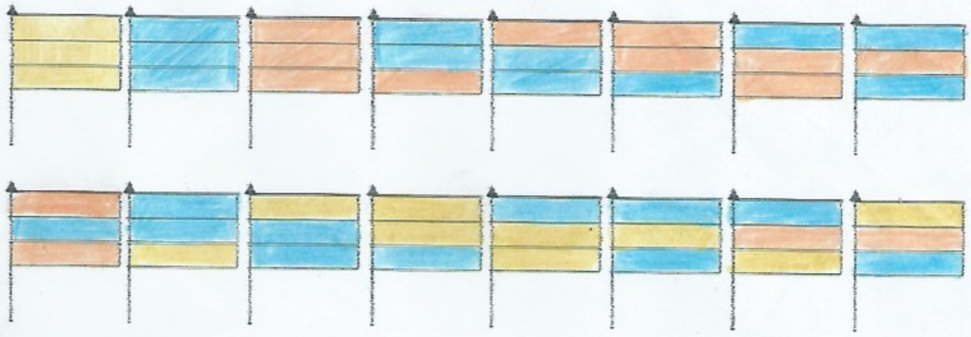
g) Construa a árvore com as possibilidades, escrevendo as cores.

Atividade 2 Exemplo de Resposta

Bruno Rian 3004

Tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades – Três cores

Situação problema: Abaixo foram desenhadas 16 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma.



a) Você dispõe de três cores, considere das bandeiras acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada em cada bandeira considerada.

b) Todas as bandeiras que foram desenhadas acima foram pintadas por você e foram suficientes?

não

Se sua resposta foi não, ainda faltam bandeiras que precisam ser desenhadas e pintadas de maneiras diferentes que aquelas apresentadas pelas 16 bandeiras que você já pintou?............

Se sim, quantas bandeiras faltaram? 11

Se sua resposta à primeira pergunta foi não, e sobraram bandeiras sem serem pintadas, quantas das bandeiras não foram pintadas por você?

11

c) Explique como você procedeu para colorir as diferentes bandeiras que você coloriu.

Aleatóriamente

d) Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras que têm três listras horizontais você obteve, quando dispõe de três cores para a pintura e nenhuma listra pode ficar sem ser pintada?

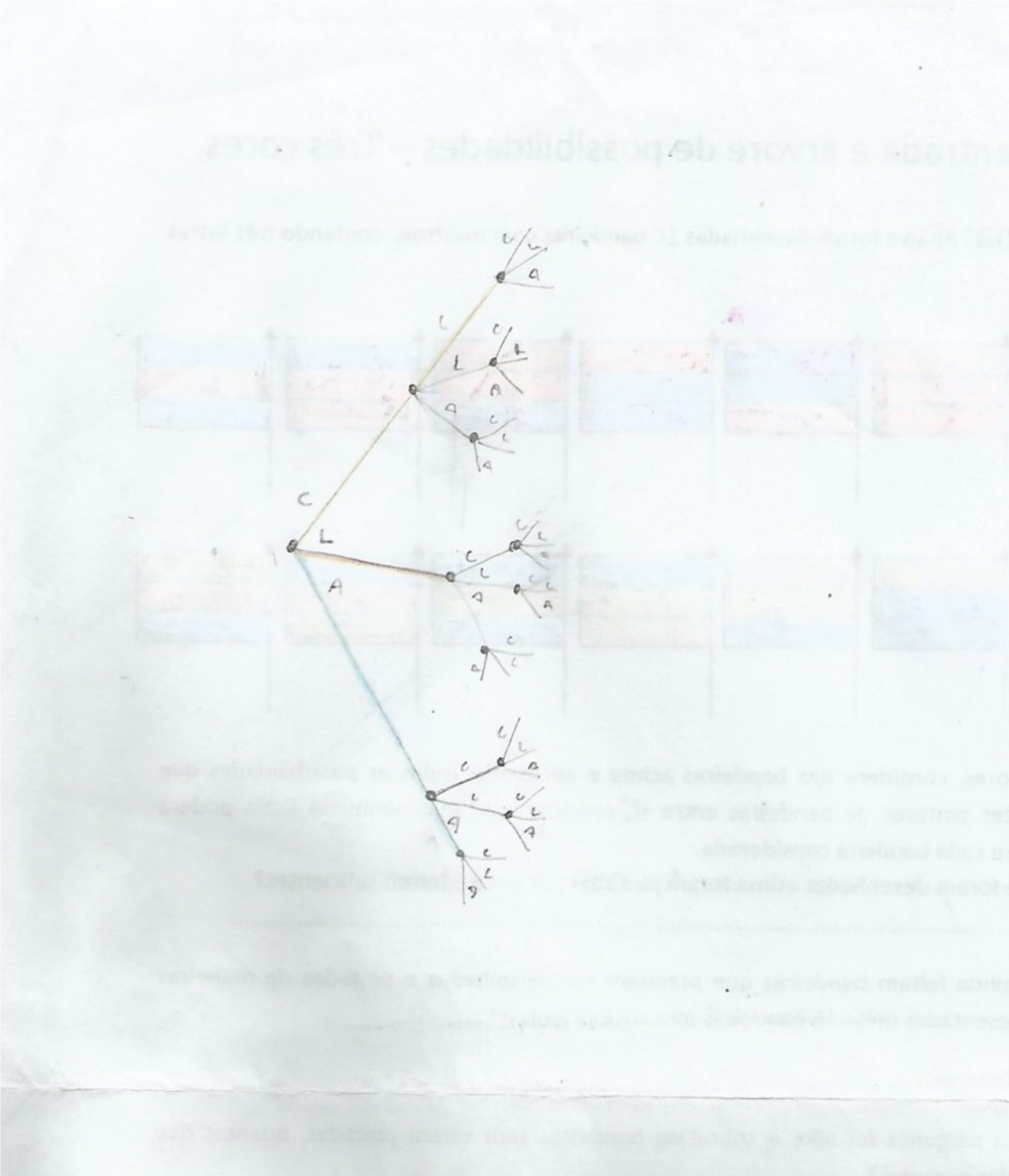
3 3 3 = 27

e) Quantas bandeiras têm a 1ª listra pintada de ~~verde~~ AZUL? 6 Quantas bandeiras têm a 2ª listra pintada de ~~verde~~ Contorno? 7 Quantas bandeiras têm duas listras pintadas de ~~vermelho~~ Laranja? 2
Quantas bandeiras têm duas listras pintadas com a mesma cor? 8

f) Usando as suas bandeirinhas escreva todas as ternas de cores:

(C, C, C), (A, A, A) (L, L, L), (A, A, L) (L, A, A), (L, L, A)
(A, L, L) (A, L, A) (L, A, L) (A, A, C), (C, A, A), (C, C, A)
(A, C, C), (A, C, A) (A, L, C) (C, L, A)

g) Construa a árvore com as possibilidades, escrevendo as cores.



Obs: Como no trabalho foi usada uma caixa de lápis de normal, nem todos os alunos usaram as mesmas cores, no caso o aluno usou L (laranja), A (azul) e C (coral).

Comentário sobre a atividade realizada

Ao apresentar o questionário com as três cores com 16 bandeiras desenhadas, inicialmente, tiveram alguma dificuldade para determinar quantas bandeiras dariam para pintar, principalmente porque boa parte foi pintando aleatoriamente as bandeiras. Alguns alunos que na atividade anterior observaram o critério para determinar o número de bandeiras diferentes que poderiam ser pintadas conseguiram responder as questões propostas, e ao falarem atiçou a curiosidade de outros que começaram a perguntar como fazer. Porém alguns achavam que faltavam uma, duas, etc. bandeiras apenas.

Ao escreverem as ternas com as cores continuaram com dificuldade porque escreveram de acordo com as bandeiras pintadas e não conseguiram determinar todas que estavam faltando.

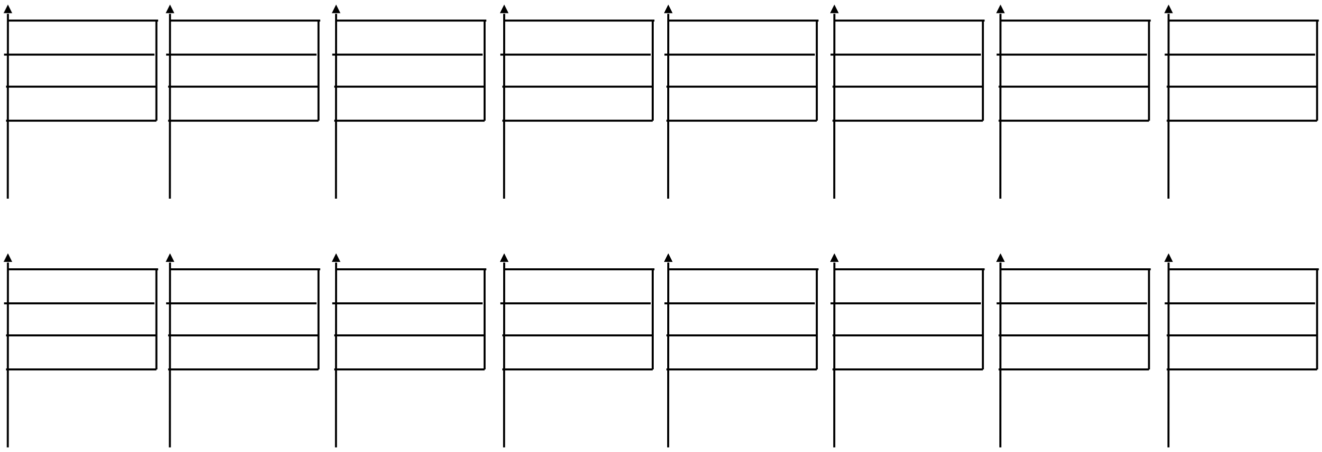
Para construir a árvore das possibilidades fizeram algumas tentativas já que eu falei para eles desenharem e representarem as cores. Não fiz como na anterior, com duas cores, que já dei a árvore desenhada. Construíram a árvore das possibilidades e só então viram claramente que dessa forma daria para identificar quantas bandeiras se consegue pintar com três listras horizontais e três cores.

De fato, ao prosseguir a aula em outro dia viram que tem várias formas de representar as possibilidades e como calcular todas as possibilidades com qualquer número de listras e número de cores.

Atividade 3

Atividade com bandeiras com três listras horizontais e três cores

Situação problema: Abaixo foram desenhadas 16 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma.



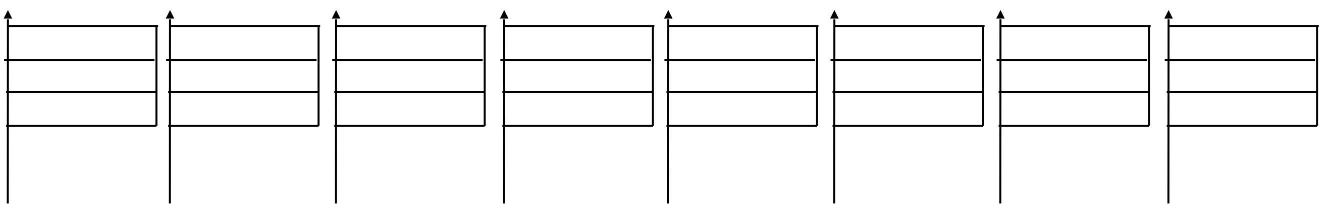
a) Você dispõe de três cores, considere das bandeiras acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada e não conter listras consecutivas com a mesma cor.

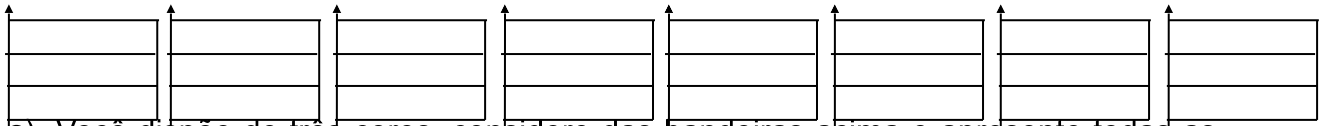
b) Quantas bandeiras foram pintadas? ....

c) Explique como você procedeu para colorir as diferentes bandeiras que você coloriu.

....
....
....

Situação problema: Abaixo foram desenhadas 16 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma.





a) Você dispõe de três cores, considere das bandeiras acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada e não conter listras com a mesma cor.

b) Quantas bandeiras foram pintadas? ....
....
....

....
....

c) Explique como você procedeu para colorir as diferentes bandeiras que você coloriu.

....
....

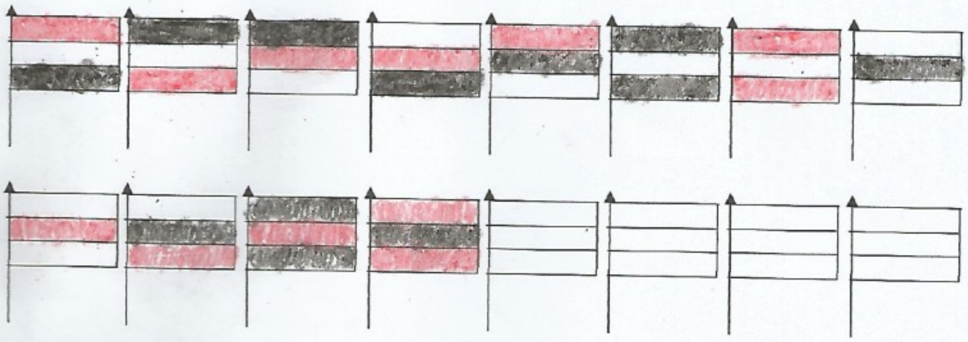
....
....

Atividade 3 Exemplo de Resposta

Lucilene
3006

Tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades – Três cores

Situação problema: Abaixo foram desenhadas 16 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma.



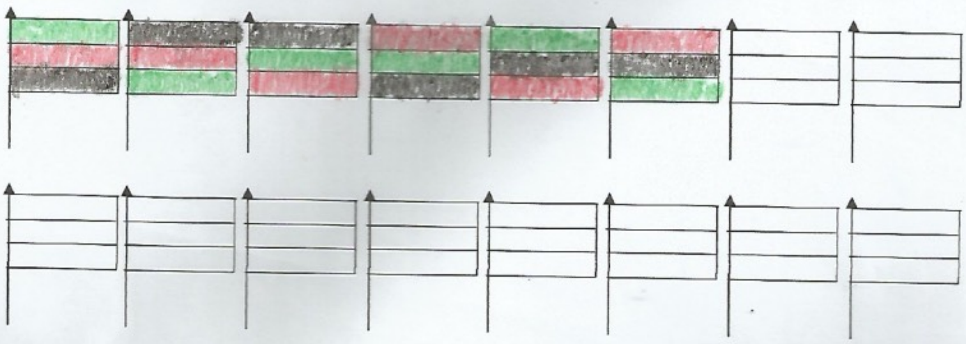
a) Você dispõe de três cores, considere das bandeiras acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada e não conter listras consecutivas com a mesma cor.

b) Quantas bandeiras foram pintadas? 12

c) Explique como você procedeu para colorir as diferentes bandeiras que você coloriu.

disppondo de 3 cores tendo no início a possibilidade de usar as três depois duas é por final tendo duas sem que se repitam uma Perto da outra

Situação problema: Abaixo foram desenhadas 16 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma.



a) Você dispõe de três cores, considere das bandeiras acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada e não conter listras com a mesma cor.

b) Quantas bandeiras foram pintadas? 6

c) Explique como você procedeu para colorir as diferentes bandeiras que você coloriu.

Fui pintando

Comentário sobre a atividade realizada

Uma nova atividade com as bandeiras foi aplicada na turma. Dessa vez eles deveriam pintar todas as bandeiras com três listras horizontais dispondo de três cores diferentes de modo que nenhuma bandeira tivesse duas listras consecutivas da mesma cor e outra atividade na qual as bandeiras deveriam ter todas as listras com cores distintas.

Em ambas as atividades as tarefas foram resolvidas de forma satisfatória e com rapidez. Quando perguntado como foi realizada a tarefa tive respostas variadas.

Alguns responderam que fizeram usando duas cores e depois de todas as possibilidades com duas cores introduziram a terceira. Outros fizeram todas as bandeiras com cores distintas para só depois repetir cores na mesma bandeira. E outros foram pintando aleatoriamente, perguntei porque fizeram isso, então descobri que foram alunos que faltaram em atividades anteriores.

Na atividade que todas as bandeiras tinham cores distintas, a maioria copiou da atividade anterior.

Atividade 4

Situação Problema – Dia das mães

Para o dia das mães, os alunos da turma 3006 vão preparar presentes para presentear suas mães. Cada presente deve conter dois produtos, dentre aqueles comprados, que são: sabonete, xampu, desodorante, creme facial, creme para as mãos e creme para os pés.

d) a) Quantos tipos diferentes de presentes podem ser preparados pelos alunos? ....

....

b) Explique como você determinou a resposta do item
(a): ....

c) quantos presentes não contém xampu ou
desodorante? ....

d) Como você procedeu para responder ao item
(c)? ....

e) Utilize uma representação gráfica para mostrar as soluções que você obteve no item (a).

f) Na representação que você utilizou no item (e), marque com * todos os presentes que contém xampu.

g) Na representação que você utilizou no item (e), marque com ** todos os presentes que não contém sabonete ou creme para as mãos.

h) Se a mãe de José tem alergias a cremes, em quantos dos presentes ela poderá ser contemplada com a escolha de seu
filho? ....
....
....

Atividade 4 Exemplo de Resposta

Áurea da C. Teles
Turma: 3006

Situação Problema – Dia das mães

Para o dia das mães, os alunos da turma 3006 vão preparar presentes para presentear suas mães. Cada presente deve conter dois produtos, dentre aqueles comprados, que são: sabonete, xampu, desodorante, creme facial, creme para as mãos e creme para os pés.

a) Quantos tipos diferentes de presentes podem ser preparados pelos alunos?....35........

b) Explique como você determinou a resposta do item (a): ....
Eu escrevi todos as possibilidades com cada item no presente.

c) quantos presentes não contém xampu ou desodorante? ......6......................

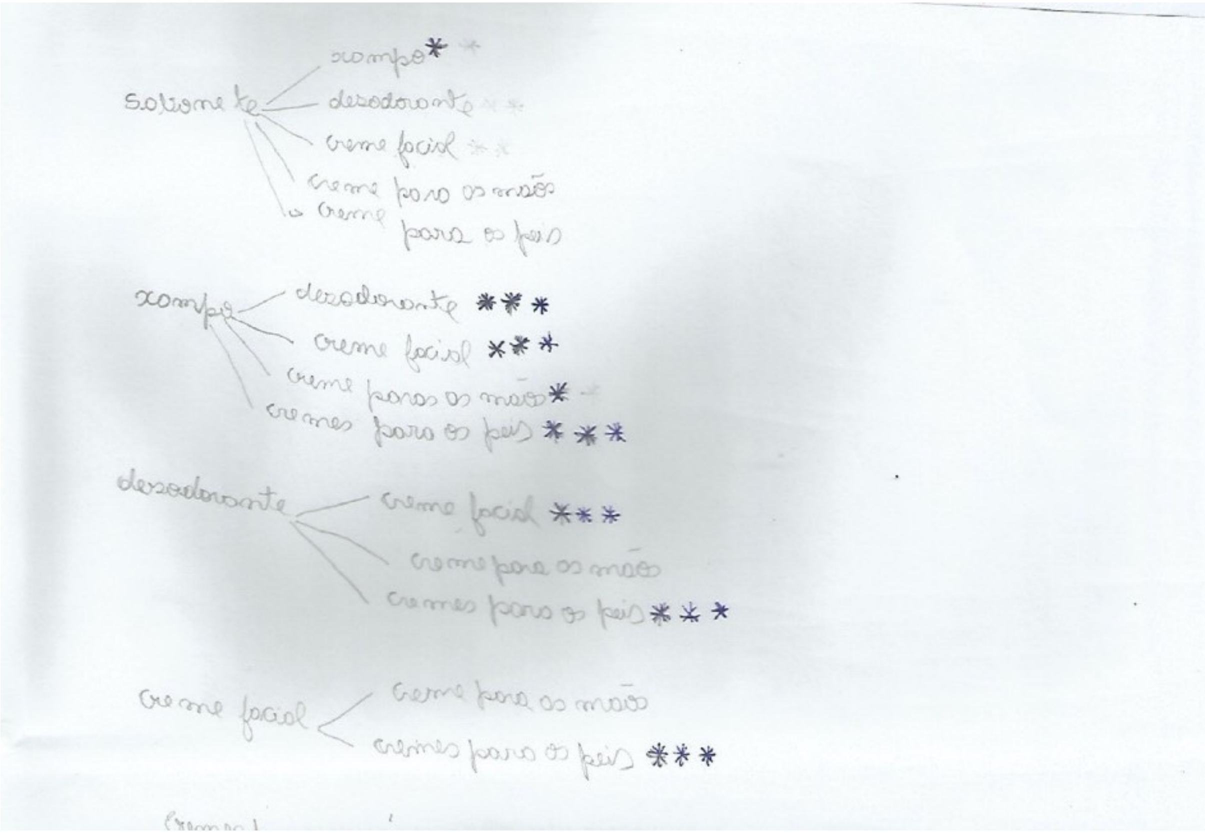
d) Como você procedeu para responder ao item (c)? Somente contei os presentes que não possuia xampu e desodorante.

e) Utilize uma representação gráfica para mostrar as soluções que você obteve no item (a).

f) Na representação que você utilizou no item (e), marque com * todos os presentes que contém xampu.

g) Na representação que você utilizou no item (e), marque com ** todos os presentes que não contém sabonete ou creme para as mãos. 6 produtos

h) Se a mãe de José tem alergias a cremes, em quantos dos presentes ela poderá ser contemplada com a escolha de seu filho? ...3............



Comentário sobre a atividade realizada

Devido aos feriados e o encerramento do bimestre só depois de duas semanas pude aplicar a atividade em que eles deveriam entre seis produtos escolher dois para formar um presente para o dia das mães e responder as questões.

A maioria antes de começar a fazer identificou que a atividade era diferente das atividades com as bandeiras. Algumas meninas só verificaram a diferença quando começaram a responder as questões. Elas começaram a fazer pela representação gráfica para então responder as questões de quantidade.

Algumas meninas encontraram nessa atividade algumas dificuldades que eu não esperava, todas relativas a interpretação. Quando mandava marcar aqueles que continham determinado produto ela não entendia que não fazia diferença entre se era o primeiro ou o segundo produto. Quando comentei com os colegas da escola eles disseram que essas meninas (duas irmãs) tinham problemas de aprendizagem.

Atividade 5

Esta Atividade que não foi apresentada, mas que na próxima vez deverá ser apresentada:

Em uma sorveteria há seis sabores de sorvete disposição dos clientes, de quantas formas é possível montar um sorvete com duas bolas, independente os sabores e serem iguais ou não?

a) Quantos tipos diferentes de sorvete podem ser montados? ....
....
....................b) Explique como você determinou a resposta do item (a)

....
....
..

....
....
..

c) Quantos sorvetes não contém sabores repetidos? ....
....
...................d) Como você procedeu para responder ao item (c)? ....
....
....
....
....

e) Como poderia ser uma representação gráfica para mostrar as soluções que você obteve no item a?

Considere o mesmo problema, agora com o sorvete com três bolas:

a) Quantos tipos diferentes de sorvete pode ser montado? ....
...................b) Explique como você determinou a resposta do item (a): ....
....
....

c) Quantos sorvetes não contém sabores repetidos? ....
....
......................d) Como você procedeu para responder ao item (c)? ....
....
....

e) Como poderia ser uma representação gráfica para mostrar as soluções que você obteve no item a?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A cada dia a interatividade está mais presente em nossa vida e na vida dos nossos alunos, dessa forma o processo de ensino e aprendizagem não pode ser desvinculado dessa ideia tão comum. O aprendizado concreto só vai ser possível se tiver uma boa estratégia de investigação, discussão e de trabalho em grupo onde um aluno pode e deve ajudar o outro, e dessa forma se ajudar.

No conteúdo ora abordado se faz muito, talvez mais necessário essa interação, devido à grande possibilidade de interpretação e a possibilidade do erro, já que a linha que separa a interpretação correta da errada é muito tenra.

Nessa proposta eu atuei como mediador para que os alunos pudessem desenvolver os trabalhos práticos que foram propostos e desenvolvessem a capacidade de construção do conhecimento e mostrar o melhor caminho para resolver os problemas apresentados.

Esse trabalho foi idealizado e desenvolvido para que os alunos pudessem comparar os trabalhos práticos com os outros problemas que não seriam possíveis de serem desenvolvidos de forma prática e dessa forma identificar o grupo ao qual cada problema venha a pertencer.

Inicialmente quando sugeri que listassem todas as possibilidades que pudessem, alguns alunos acharam que seria muito trabalhoso, mas depois que as atividades eram feitas, começaram a observar que entendendo o princípio de cada atividade esse mesmo princípio poderia ser expandido para aqueles problemas nos quais seria impossível listar todas as possibilidades, então começaram a achar interessante.

Observa-se que ao desenvolver tal atividade, pode-se gerar alguns comportamentos que não condiz com o objetivo, principalmente no início, já que os alunos não estão acostumados com esse tipo de atividade, e acham que é uma brincadeira. No entanto, é de grande importância que sejam desenvolvidas.

Muito embora seja consenso entre os professores de Matemática que as atividades práticas tenham grande importância na aprendizagem, não é uma prática comum em nossas escolas. Seja pela instabilidade no comportamento da turma, seja pelo tempo gasto ou ainda pelo grande trabalho por depender de estudo, pesquisa e aprimoramento constante.

Durante o trabalho e depois com o transcorrer dos conteúdos, deu para observar a relação obtida entre a resolução teórica e a prática.

Da próxima vez que desenvolver esse trabalho e ao dar prosseguimento aos estudos e a resolução de problemas tradicionais, ao final dos estudos, vou retornar e aplicar os mesmos problemas práticos e acrescentando novos desafios, para verificar o comportamento e o desenvolvimento, com o objetivo de consolidar o aprendizado.

BIBLIOGRAFIA

ALLEVATO, N. S. G e ONUCHIC, L. R. *Ensinando Matemática na Sala de Aula Através da Resolução de Problemas*. Boletim GEPEM, v. 55, p. 133-154, 2009.

BRASIL, L. A. S. Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio. São Paulo: Fundo de Cultura, 1964. 98 p.

JULIANELLI, J. R. et al, Currículo Minimo. Disponível em http://www.conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/matematica. Acesso em 12/09/2016.

JUNIOR, Alcir Bento, Combinação com Repetição. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=LuEnlhWsWbA Acesso em 21/11/2016

LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Editora SBM, 1998.

LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, Volume 4, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2007.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios, Coleção do Professor de Matemática, 9ª edição. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

MURRIE, Z. F. (coordenadora) Parâmetros Curriculares Nacionais,. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf Acesso em 08/07/2016.

NCTM. *An Agenda for Action*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

OUNICH, L. R; ALLEVATO, N. S. G; NOGUTTI, F. C. H e JUSTULIN, A. M (orgs). Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Paco Editorial, 2014.

POLYA, G. How to Solve It. Princeton: Princeton University Press, 1944.

RIBEIRO, R. J. Base Nacional Comum Curricular. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/
Acesso em 18/09/2016.

SILVA, J. Combinações Completas. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=RZyAEQx_wS4
Acesso em 21/11/2016.

SOUZA, A. L. C. P. de. Análise Combinatória: uma abordagem no Ensino Médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem - Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Rio Claro: Faculdade CBTA, 2016.

TEIXEIRA, P. J. M. Resolvendo Problemas de Análise Combinatórias nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNANDEZ, V. Matemática, Volume Único. Rio de Janeiro: Editora Scipione, 2009.