O presente trabalho apresenta um estudo sobre polinômios. Por estar inserido no PROFMAT, cuja proposta é proporcionar formação matemática aprofundada para a melhoria do exercício da docência na Educação Básica, esse trabalho é composto por: um apanhado histórico sobre polinômios para destacar como o tema evoluiu ao longo dos anos; um estudo sobre as estruturas algébricas de Anéis e Anéis de Polinômios para dar um aporte teórico e teoremas sobre as raízes reais de um polinômio com o objetivo de explorar esse tema de uma maneira diferenciada no Ensino Médio e na Formação de Professores. Como resultado é apresentado um caderno pedagógico com definições, exemplos e exercícios utilizados no Ensino Médio. Para que os alunos possam operar polinômios, encontrar raízes reais de um polinômio (ou pelo menos garantir a existência dela(s)) temos os resultados: Algoritmo de Briot-Ruffini, Relações de Girard, Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema das Raízes Racionais, Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Bolzano. Para finalizar, temos uma lista de exercícios de vestibulares e similares, todos resolvidos e com indicação para os professores dos conceitos utilizados na resolução. No apêndice do trabalho é apresentado o produto educacional, um caderno de atividades com lacunas a serem preenchidas pelos alunos, que é derivado do caderno pedagógico e pode ser impresso e levado para a sala de aula.

Orientadora: Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Coorientadora: Dra. Viviane Maria Beuter

Joinville, 2020

ANO 2020

POLYANA BENK

ESTUDO DE POLINÔMIOS: A HISTÓRIA, O ANEL E UMA PROPOSTA DE ENSINO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTUDO DE POLINÔMIOS: A HISTÓRIA, O ANEL E UMA PROPOSTA DE ENSINO

POLYANA BENK

JOINVILLE, 2020

CAPES
CONVÊNIO CAPES Nº 850502/2017

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

POLYANA BENK

ESTUDO DE POLINÔMIOS: A HISTÓRIA, O ANEL E UMA PROPOSTA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) no Centro de Ciências Tecnológicas (CCT) como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Coorientadora: Profa. Dra. Viviane Maria Beuter

JOINVILLE – SC
2020

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da Biblioteca Setorial do CCT/UDESC, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Benk, Polyana
Estudo de polinômios : a história, o anel e uma proposta de ensino / Polyana Benk. -- 2020.
174 p.

Orientadora: Elisandra Bar de Figueiredo
Coorientadora: Viviane Maria Beuter
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2020.

1. Polinômios. 2. Caderno Pedagógico. 3. Raízes. I. Figueiredo, Elisandra Bar de . II. Beuter, Viviane Maria. III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Titulo.

Estudo de Polinômios: a História, o Anel e uma Proposta de Ensino

por

Polyana Benk

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRA EM MATEMÁTICA

Área de concentração em "Ensino de Matemática"
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

EBFigueiredo
Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)

Por videoconferência
Profa. Dra. Kelly Roberta Mazzutti Lübeck
UNIOESTE/Foz do Iguaçu

Rogério de Aguiar
Prof. Dr. Rogério de Aguiar
CCT/UDESC

Joinville,SC, 28 de fevereiro de 2020.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar forças e inspiração para escrever este trabalho.

Agradeço a minha família, especialmente meus pais, por tudo que me deram e ainda vão me dar.

As professoras Elisandra e Viviane, com quem aprendi tanto, por serem ótimas professoras e ainda melhores orientadoras.

Quero agradecer a todos os professores que fizeram parte da minha vida, em especial o professor Rogério e a professora Kelly, por fazerem parte da banca desse trabalho.

A minha melhor amiga Cindel, por sempre torcer e acreditar em mim.

A todos os meus colegas de curso, pelo companheirismo durante a jornada.

A Universidade do Estado de Santa Catarina pelo apoio financeiro em forma de bolsa e por me proporcionar momentos incríveis durante os anos em que a frequentei.

"A álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu."

(Jean Le Rond d'Alembert)

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre polinômios. Por estar inserido no PROFMAT, cuja proposta é proporcionar formação matemática aprofundada para a melhoria do exercício da docência na Educação Básica, esse trabalho é composto por: um apanhado histórico sobre polinômios para destacar como o tema evoluiu ao longo dos anos; um estudo sobre as estruturas algébricas de Anéis e Anéis de Polinômios para dar um aporte teórico e teoremas sobre as raízes reais de um polinômio com o objetivo de explorar esse tema de uma maneira diferenciada no Ensino Médio e na Formação de Professores. Como resultado é apresentado um caderno pedagógico com definições, exemplos e exercícios utilizados no Ensino Médio. Para que os alunos possam operar polinômios, encontrar raízes reais de um polinômio (ou pelo menos garantir a existência dela(s)) temos os resultados: Algoritmo de Briot-Ruffini, Relações de Girard, Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema das Raízes Racionais, Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Bolzano. Para finalizar, temos uma lista de exercícios de vestibulares e similares, todos resolvidos e com indicação para os professores dos conceitos utilizados na resolução. No apêndice do trabalho é apresentado o produto educacional, um caderno de atividades com lacunas a serem preenchidas pelos alunos, que é derivado do caderno pedagógico e pode ser impresso e levado para a sala de aula.

Palavras-chaves: Polinômios. Caderno Pedagógico. Raízes.

ABSTRACT

This work presents a study on polynomials. Since it's a part of PROFMAT, whose aim is to offer in-depth mathematical training to improve Basic Education teaching, it consists of: a brief historical background on polynomials to demonstrate how the topic evolved over the years; a study on Ring Algebraic Structures and Polynomial Rings for theoretical support, and theorems on a polynomial's real roots, in order to explore the topic in a differentiated way for High School and teacher training. As a result, a teaching notebook with definitions, examples and exercises used in High School is presented. To help students operate polynomials, find real roots of a polynomial (or, at least, ensure it exists), the results are: Briot-Ruffini's Rule, Girard's Generalizations of Vieta's Formulas, Fundamental Theorem of Algebra, Rational Root Theorem, Intermediate Value Theorem and Bolzano's Theorem. Finally, a list of SAT and similar exercises is presented, all solved and with indications to the teachers of the concepts used in the resolution. The educational product, an activities notebook derived from the teaching notebook, with blanks to be filled in by the students, which can be printed out and taken to classroom, is presented in the appendix.

Keywords: Polynomials. Teaching Notebook. Roots.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TFA	Teorema Fundamental da Álgebra
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Pública
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PG	Progressão Geométrica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para escolher o tema dessa dissertação foi levado em consideração minha predileção por trabalhar com matemática teórica e o Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que sugere temas "pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica e impacto na prática didática em sala de aula"(SILVA, 2016, p. 5). Deste modo conversando com minhas orientadora e co-orientadora chegamos ao conteúdo de polinômios, que é estudado no Ensino Médio de maneira introdutória e no Ensino Superior é aprofundado com o estudo dos Anéis de Polinômios.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+), a resolução de equações do primeiro e segundo grau são conteúdos previstos no Ensino Médio, mas também deseja-se que um estudo mais aprofundado seja feito na parte flexível do currículo,

> Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola. (BRASIL, 2002, p. 122).

Já as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, além das equações de primeiro e segundo graus, ainda indicam o estudo das funções polinomiais, como segue,

> As funções polinomiais (para além das funções afim e quadrática), ainda que de forma bastante sucinta, podem estar presentes no estudo de funções. Funções do tipo $f(x) = x^n$ podem ter gráficos esboçados por meio de uma análise qualitativa da posição do ponto (x, x^n) em relação à reta $y = x$, para isso comparando-se x e x^n nos casos $0 < x < 1$ ou $x > 1$ e usando-se simetria em relação ao eixo x ou em relação à origem para completar o gráfico. Funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os 'zeros' da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número c é um dos zeros da função polinomial $y = P(x)$, esta pode ser expressa como o produto do fator $(x - c)$ por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de $P(x)$ por $(x - c)$. (BRASIL, 2006, p. 74).

Observa-se nesse caso o estudo de funções polinomiais e suas raízes e, além disso, da divisão de polinômios por um monômio, para encontrar um polinômio de grau menor. É importante destacar que aqui os polinômios estão sendo tratados através do estudo de funções, que será importante para o nosso trabalho já que vamos trabalhar com resultados de análise real que garantem a existência de zeros para funções.

No Ensino Fundamental a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) já introduz os conceitos de equações polinomiais do 1º e 2º graus com as seguintes habilidades "Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade" (BRASIL, 2018, p. 307) e "Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau" (BRASIL, 2018, p. 317).

A BNCC ainda, coloca que no Ensino Médio os alunos devem agregar novos conhecimentos aos obtidos no Ensino Fundamental.

> A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. (BRASIL, 2018, p. 471).

Conforme indicativo da BNCC, no Ensino Fundamental os alunos já deveriam ter adquirido a compreensão dos conceitos de funções polinomiais do primeiro e segundo graus, então no Ensino Médio, além de consolidar esses conhecimentos, seria interessante agregar novos, que são as funções polinomiais de maior grau, que também é abordado nesse trabalho.

Sobre a parte histórica, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam seu uso como recurso didático mostrando a sua importância para o aluno:

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 1997, p. 34).

E, ainda segundo os PCN,

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns 'porquês' e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 34).

A BNCC (BRASIL, 2018) também coloca a História da Matemática como recurso para contextualizar a matemática,

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. (BRASIL, 2018, p. 298).

Sabendo da presença dos polinômios no Ensino Médio, temos a seguinte questão: a partir dos conhecimentos de história, álgebra e análise como é possível trabalhar o conteúdo de polinômios no Ensino Médio e na Formação de Professores?

Para responder essa pergunta propomos como objetivo geral desse trabalho: elaborar um caderno pedagógico para trabalhar com polinômios, por meio do contexto histórico, algébrico e analítico, no Ensino Médio e na Formação de Professores. Para alcançar esse objetivo estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- Realizar um resgate histórico sobre polinômios.
- Analisar livros didáticos do Ensino Médio.
- Estabelecer a fundamentação algébrica de um anel.
- Construir o anel dos polinômios.
- Apresentar o algoritmo da divisão no anel dos polinômios.
- Analisar a relação entre as raízes e a decomposição de um polinômio.
- Estudar teoremas de análise para encontrar raízes reais.
- Propor uma sequência de atividades para o ensino de polinômios e funções polinomiais no Ensino Médio e na Formação de Professores.

Esse trabalho esta dividido da seguinte forma: no Capítulo 2 estabelecemos a metodologia utilizada nesse trabalho, no Capítulo 3 será feita a revisão da literatura utilizando como base de dados as dissertações apresentadas no PROFMAT. A escolha dessa base se deu por estar inserida nesse programa e querer saber que pontos já foram abordados por outros acadêmicos. No Capítulo 4 será apresentada um pouco da história dos polinômios. No Capítulo 5 apresentaremos a fundamentação teórica para o trabalho, começando com a teoria de anéis, seguindo para os anéis de polinômios e alguns resultados sobre raízes reais de um polinômio, o Capítulo 6 será dedicado ao caderno pedagógico e a lista de exercícios e por fim serão apresentadas as conclusões desse trabalho.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia desse trabalho é qualitativa, que segundo Oliveira (1997, p. 116),

> Com relação ao emprego do *método* ou *abordagem qualitativa* esta difere do *quantitativo* pelo fato de não empregar dados estatísticos como centro do processo de análise de um problema. A diferença está no fato de que o *método qualitativo* não tem pretensão de numerar ou medir unidades ou categorias homogêneas.

Para Goldenberg (2007, p. 14) na pesquisa qualitativa "a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc."

Para Minayo, Deslandes e Gomes (2009, p. 21)

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se ocupa, nas Ciências Sociais, com um nível de realidade que não pode ou não deveria ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes.

Como faremos um trabalho teórico, precisamos fazer uma pesquisa bibliográfica, que segundo Gil (1987, p. 50) "a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos." Nessa pesquisa serão usados, em sua maioria, livros de história da matemática, de álgebra e de análise. Os principais são: Garbi (2009); Berlingoff e Gouvêa (2008); Janesch e Taneja (2008); Janesch (2008); Hefez e Villela (2012); Iezzi (2005); Lima (1999).

Ainda segundo Gil (1987, p. 50), "a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente." Sendo assim, a pesquisa bibliográfica se faz muito importante nos estudos históricos, como no caso desse trabalho em seu resgate histórico e nas definições e demonstrações que se encontram nos livros.

Começamos esse trabalho fazendo uma revisão de literatura a fim de investigar como o tema de Polinômios tem sido tratado nos trabalhos desenvolvidos por acadêmicos do PROFMAT. Na sequência faremos uma pesquisa bibliográfica sobre a história dos polinômios, começando com os de primeiro grau até o quinto grau, sobre a teoria de anéis, anéis de polinômios e suas propriedades, e o estudo de como os livros didáticos para o Ensino Médio abordam os polinômios para auxiliar na organização do caderno pedagógico e da sequência didática. Para finalizar vamos produzir um caderno pedagógico com exercícios utilizando álgebra, análise e história, para serem aplicados no ensino de polinômios do Ensino Médio ou Superior para a formação de professores.

Ao final da dissertação apresentaremos o caderno pedagógico com o objetivo de auxiliar o professor no ensino de polinômios no Ensino Médio ou na Formação de Professores. Para cumprir tal objetivo faremos o caderno de tal forma que um professor com acesso ao trabalho possa imprimi-lo e/ou utilizá-lo da maneira que achar mais conveniente.

Para organizar um roteiro para o caderno pedagógico, fizemos uma pesquisa nos livros didáticos de Dante (2010), Paiva (2013), Souza (2010) e Iezzi (2005) para verificar como eles apresentavam o conteúdo de polinômios e quais resultados abordavam. Percebemos que os quatro livros traziam os conteúdos de maneira similar, com certas mudanças na ordem de apresentação de conceitos e resultados. Todos os livros apresentavam o método de Decartes, para determinar o quociente e resto da divisão de polinômios, que apesar de não ser muito utilizado para este fim, é necessário para a demonstração do dispositivo de Briot-Ruffini, por isso consideramos importante trazê-lo também no nosso caderno. Por outro lado, os livros não apresentavam o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Bolzano, que era um dos nossos objetivos para ser utilizado como ferramenta pelos alunos para localizarem intervalos que contém raízes reais de polinômios.

Com base nos livros de Garbi (2009) e Berlingoff e Gouvêa (2008) fizemos uma breve explanação histórica que o professor pode apresentar aos seus alunos. Utilizando os livros de Dante (2010), Paiva (2013), Souza (2010) e Iezzi (2005) apresentamos definições e exemplos sobre os polinômios, operações com polinômios, raízes, métodos para encontrar as raízes, necessários para que os alunos consigam resolver os exercícios que serão propostos.

A lista de exercícios que segue no caderno começará com exercícios utilizando a história que foi descrita anteriormente. O caderno pedagógico também terá uma seção, destinada ao professor, que indicará quais conceitos serão utilizados em cada exercício para facilitar a escolha pelo professor.

No apêndice do trabalho teremos um caderno de atividades, nosso produto educacional, com uma sugestão de como utilizar o caderno pedagógico, será uma versão com lacunas para serem preenchidas pelos alunos, sugerimos que o professor leve o material impresso para os alunos, otimizando o tempo de escrever as definições no quadro e podendo fazer uma aula mais dialogada com os alunos.

3 REVISÃO DA LITERATURA: PROFMAT

A revisão de literatura foi restrita as dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) por ser o banco de dados do programa no qual estamos envolvidos. No diretório do PROFMAT quando digitado “polinômio” tivemos 53 registros com a palavra polinômio no título, elas estão listadas no Quadro 1 e serão categorizadas para a revisão da literatura.

Quadro 1 – Dissertações

Nº	**Data da defesa**	**Aluno**	**Título da Dissertação**
1	31/05/2019	Evaldir Barbosa de Oliveira Junior	Aspectos teóricos e computacionais em polinômios
2	26/04/2019	Leonardo Antonio Coelho	Congruências e aplicações em polinômios
3	10/01/2019	Diego Morais Pereira de Lima	Polinômios e métodos de fatoração
4	19/10/2018	Maikon Luiz Mirkoski	Números e polinômios de Bernoulli
5	25/05/2018	Arthur Silva Lopes	Polinômio interpolador de Lagrange: uma proposta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica
6	23/04/2018	Lauseli Fernandes de Azevedo Ames	Interpolação e aproximação de funções por polinômios
7	05/04/2018	Lenilson dos Reis Silva	Grafos, coloração, polinômios cromáticos e jogos no processo de ensino aprendizagem da enumeração e da contagem
8	26/01/2018	Edson Vander da Silva	Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino aprendizagem

9	01/09/2017	Mariana Fabiane Garcia Travassos	Abordagens algébrica e combinatória para o polinômio de Gauss
10	30/08/2017	Christiano de Almeida Sales	Polinômios com raízes no círculo unitário
11	25/08/2017	Gustavo Feltrin Rossini	Grafos e seu polinômio característico
12	07/08/2017	Eduardo Isidoro dos Santos	O polinômio e séries de Taylor: um estudo com aplicações
13	14/07/2017	Júlio César de Carvalho Júnior	Como as funções são calculadas? Apresentando os polinômios de Taylor
14	31/03/2017	Benício Fagundes de Brito Júnior	Aproximação de funções por polinômios ortogonais
15	23/02/2017	Ferdinando Caique Genghini Dantas Lobo	Números complexos, polinômios e equações algébricas
16	18/11/2016	Vanessa Priscila Nicolussi Marques	Polinômios e aproximação de função
17	31/08/2016	Douglas Daniel	Modelagem por polinômios do ensino médio
18	26/08/2016	Ricardo Dutra de Abreu	Polinômios, funções polinomiais, fatoração e algumas aplicações
19	19/08/2016	Rodolfo Silva Alves	Raízes de polinômios: de Bhaskara a Abel
20	28/07/2016	Angelo Marcio Santana Guimaraes	Estudo de anéis de polinômios aos elos de níveis de ensino
21	27/06/2016	Suellen Karina Palhano Iochucki	Propostas para o ensino da trigonometria: introdução à aproximações de funções periódicas por polinômios trigonométricos

22	06/06/2016	Clicio Freire da Silva	A interpolação de Lagrange: uma proposta ao ensino médio para a modelagem matemática de polinômios
23	20/05/2016	Francisca Alves de Sauza	O ensino de polinômios utilizando a história da matemática como recurso didático
24	04/04/2016	Ambrósio da Silva Marques	Disposição dos números naturais em arranjo plano e polinômios que geram números primos
25	15/03/2016	Wálmisson Régis de Almeida	Derivações em anéis polinomiais e polinômios de Darboux
26	12/01/2016	Acacio Pedro da Silva Junior	Aplicações do triângulo de Pascal à poligenia: um polinômio que determina a frequência dos genótipos
27	19/11/2015	Marcos Moutinho Silva	Uma investigação aos zeros de um polinômios através da álgebra
28	28/08/2015	Everton Melo de Oliveira	Fatoração de polinômios
29	27/08/2015	Ana Mary Fonseca Barreto	Registros de representações semióticas no estudo de polinômios usando aplicativos em tablets
30	29/07/2015	Carlos Kleber Alves do Nascimento	Polinômios, equações algébricas e estudo das suas raízes reais
31	27/04/2015	Alessandro Silva Santos	Ajuste de curvas por polinômios, com foco no currículo do ensino médio
32	13/03/2015	Carlos Antônio Ferreira Peixoto	O uso do geogebra no ensino de polinômios
33	06/03/2015	Fernanda Diniz Pessoa	Polinômios: raízes e utilidade para métodos numéricos
34	23/02/2015	Adão de Aguiar Biano	O esboço de gráficos de polinômios de 2º e 3º graus usando derivadas

35	05/12/2014	Clóvis João Pissarék	Congruências e polinômios: uma aplicação
36	05/12/2014	Sézani Moraes Gonçalves de Carvalho	Matrizes, determinantes e polinômios: aplicações em códigos corretores de erros, como estratégia motivacional para o ensino de matemática
37	22/08/2014	André Ricardo Dierings	Ensino de polinômios no ensino médio - uma nova abordagem
38	03/07/2014	Emilio Curi Neto	Aplicação do polinômio de Taylor na aproximação da função seno
39	19/05/2014	Joel Marcelo Becker	Polinômios, equações algébricas e suas resoluções
40	14/03/2014	Lidyanna Jhonaika Garcia Lima	Polinômios de Fibonacci: algumas aplicações
41	10/03/2014	Ricardo Neves Biazzi	Polinômios irredutíveis: critérios e aplicações
42	23/08/2013	José Ribamar Farias de Lima	Polinômios de matrizes
43	19/08/2013	Jomildo Cavalcante Sousa	Cálculo da área entre os gráficos de dois polinômios de coeficientes reais que possuem apenas dois pontos em comum - fórmula prática
44	16/08/2013	Pedro José da Silva Pessoa	O uso de polinômios na racionalização de denominadores
45	09/08/2013	Valdir Soares Costa	Uma introdução aos polinômios simétricos e aplicações
46	15/04/2013	Antonio Carlos Mendes	Algumas experiências algébricas e gráficas com polinômios trigonométricos

47	11/04/2013	Mauro Munsignatti Junior	O polinômio de Alexander e o determinante de um nó
48	10/04/2013	Magno de Oliveira Silva	Uso de ferramentas computacionais no processo de ensino aprendizado na teoria de polinômios na educação básica
49	08/04/2013	Airton Monte Serrat Borin Junior	Divisão de polinômios com duas variáveis
50	05/04/2013	José Jorge Nicodemos	Utilizando conexões para o estudo de polinômios
51	28/03/2013	Vitor Gustavo de Amorim	Aproximação de funções contínuas por polinômios
52	11/03/2013	Reinaldo Gomes	Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do geogebra
53	01/03/2013	Alcione Aparecida de Oliveira Moura	Construindo o conceito de álgebra: monômios e polinômios

Fonte: produção da autora, 2019.

A partir da leitura dos títulos das dissertações fizemos o Quadro 2 com os temas de cada dissertação para posteriormente separar quais delas tem conexão com o nosso trabalho.

Quadro 2 – Categorias

Conteúdo/Tema	**Dissertações**
Uso da tecnologia	1, 17, 29, 32, 36, 48, 52
Congruências	2, 35
Fatoração	3 ,18, 28, 41
Teoria dos números	4, 24, 53
Interpolação	5, 6, 22
Grafos	7, 11
Raízes	8, 10, 15, 19, 27, 30, 33, 37, 39, 50

Polinômio de Gauss	9
Aproximação de funções	12, 13, 14, 16, 21, 31, 38, 51
Anel dos polinômios	20
Polinômio de Darboux	25
História	23
Hereditariedade	26
Gráfico	34, 43, 46
Polinômio de Fibonacci	40
Polinômios de matrizes	42
Racionalização de denominadores	44
Polinômios simétricos	45
Polinômio de Alexander	47
Polinômio de duas variáveis	49

Fonte: produção da autora, 2019.

Podemos observar pelo Quadro 2 que a maioria dos trabalhos é sobre raízes e em segundo lugar temos a aproximação de funções por meio de polinômios e o uso da tecnologia, como Geogebra e tablets. Dos demais trabalhos podemos destacar que vários são sobre um polinômio específico, como o de Gauss, Darboux, Fibonacci, e outros.

Para o nosso trabalho vamos focar nos trabalhos que tem por tema raízes, fatoração e anel dos polinômios, ou seja, os trabalhos 3, 8, 10, 15, 18, 19, 20, 27, 28, 30, 33, 37, 39, 41 e 50. A seguir temos o Quadro 3 com uma breve descrição desses trabalhos, para tal consultamos em cada trabalho seu resumo, sumário e um pouco da introdução.

Quadro 3 – Resumos

Nº	**Data da Defesa**	**Aluno**	**Título da Dissertação**
3	10/01/2019	Diego Morais Pereira de Lima	Polinômios e métodos de fatoração

Descrição breve: Desenvolveu os conceitos básicos da teoria de polinômios e como podem ser utilizados para obter fatorações importantes. Apresenta uma técnica para identificar fatorações de expressões algébricas e aplicações para a teoria dos números. Apresenta lista de exercícios resolvidos.			
8	26/01/2018	Edson Vander da Silva	Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino aprendizagem
Descrição breve: Fez um estudo de polinômios e equações polinomiais, apresentou orientações dos PCN's e como os livros didáticos abordam o tema. Buscou condições sobre os coeficientes para que os polinômios tenham raízes. Resultados abordados: Teorema do Resto, Briot-Ruffini, Teorema da Decomposição, relações de Girard, Teorema das Raízes Racionais, Teorema Fundamental da Álgebra e fórmulas de resolução de equações polinomiais por radicais até o quarto grau. Fez aplicação de atividades no Ensino Médio.			
10	30/08/2017	Christiano de Almeida Sales	Polinômios com raízes no círculo unitário
Descrição breve: Caracterizou os polinômios em $Q[x]$ que possuem raízes no círculo unitário e procurou estimar quantas são essas raízes. Para isso estuda raízes e fatoração de polinômios bem como o Teorema Fundamental da Álgebra. Apresenta exercícios resolvidos sobre um teorema específico do trabalho.			
15	23/02/2017	Ferdinando Caique Genghini Dantas Lobo	Números complexos, polinômios e equações algébricas
Descrição breve: Apresenta a teoria dos números complexos nas formas algébrica e trigonométrica. Fez um estudo dos polinômios e equações algébricas, principalmente na divisão de polinômios por Briot-Ruffini, relações de Girard e métodos de pesquisa de raízes. Apresenta uma lista de exercícios resolvidos para aprofundar o conhecimento.			
18	26/08/2016	Ricardo Dutra de Abreu	Polinômios, funções polinomiais, fatoração e algumas aplicações

Descrição breve: Traz um breve desenvolvimento histórico. Trabalhou as estruturas algébricas de anéis e corpos e a álgebra dos polinômios. Mostrou aplicações de polinômios e trabalhou fatoração. Propõe atividades para aprofundar o conhecimento.			
19	19/08/2016	Rodolfo Silva Alves	Raízes de polinômios: de Bhaskara a Abel
Descrição breve: Estudou as estruturas básicas de álgebra e os conceitos relacionados a teoria de Galois para demonstrar o Teorema de Abel. Mostrou como resolver equações quadradas, cúbicas e quárticas por radicais. E o método de Newton para resolver equações que não saem por radicais.			
20	28/07/2016	Angelo Marcio Santana Guimarães	Estudo de anéis de polinômios aos elos de níveis de ensino
Descrição breve: Abordou os anéis de polinômios, e a conexão desta estrutura algébrica entre o estudo da álgebra no Ensino Superior e na Educação Básica.			
27	19/11/2015	Marcos Moutinho Silva	Uma investigação aos zeros de um polinômio através da álgebra
Descrição breve: Trabalhou com o cálculo de raízes a partir de espaços compostos por pontos isolados no campo de álgebra moderna. Apresentou o teorema central da solução de um sistema polinomial. Apresenta atividades resolvidas para aplicação de teorema do trabalho.			
28	28/08/2015	Everton Melo de Oliveira	Fatoração de polinômios
Descrição breve: Apresentou as propriedades do anel dos polinômios, o algoritmo da divisão e o máximo divisor comum entre polinômios. Utilizou o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum. Trabalhou a fatoração de polinômios e o método de Kronecker, usou o Teorema Fundamental da Álgebra.			
30	29/07/2015	Carlos Kleber Alves do Nascimento	Polinômios, equações algébricas e estudo das suas raízes reais

<table>
<tr><td colspan="4">Descrição breve: Apresenta as propriedades e operações básicas de polinômios, utilizando Briot-Ruffini na divisão. Equações algébricas, métodos resolutivos de equações como o método de Gustavo, Teorema das Raízes Racionais, Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema de Descartes, Teorema de Bolzano e o Teorema de Lagrange.</td></tr>
<tr><td>33</td><td>06/03/2015</td><td>Fernanda Diniz Pessoa</td><td>Polinômios: raízes e utilidade para métodos numéricos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descrição breve: Estudou métodos utilizados para encontrar raízes de vários graus e aproximação de funções utilizando polinômios. Apresentou o Teorema Fundamental da Álgebra, relações de Girard, método de Newton e o círculo de Gersgorin. Propôs atividades para serem aplicadas no Ensino Médio.</td></tr>
<tr><td>37</td><td>22/08/2014</td><td>André Ricardo Dierings</td><td>Ensino de polinômios no Ensino Médio - uma nova abordagem</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descrição breve: Apresenta uma nova abordagem para o ensino de polinômios. Começa com um apanhado histórico, estuda como o assunto é abordado e a nova proposta utilizando: Briot-Ruffini ou Horner, Teorema do Valor Intermediário, Teorema Fundamental da Álgebra, raízes complexas, regra de sinal de Descartes e o Teorema das Raízes Racionais. Fez aplicação da sua abordagem no Ensino Médio.</td></tr>
<tr><td>39</td><td>19/05/2014</td><td>Joel Marcelo Becker</td><td>Polinômios, equações algébricas e suas resoluções</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descrição breve: Métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas. Trás um pouco sobre equações algébricas e polinômios, como o Teorema das Raízes Racionais, equações binomiais e trinomiais. Apresenta a sugestão de uma sequência didática para o Ensino Médio.</td></tr>
<tr><td>41</td><td>10/03/2014</td><td>Ricardo Neves Biazzi</td><td>Polinômios irredutíveis: critérios e aplicações</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descrição breve: Fez um estudo de polinômios irredutíveis, apresentando critérios de irredutibilidade e resultados desse tema. Propõe atividades para serem aplicadas no Ensino Médio.</td></tr>
</table>

50	05/04/2013	José Jorge Nicodemos	Utilizando conexões para o estudo de polinômios
Descrição breve: Estudou um método de obtenção das raízes de polinômios da forma $p(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$ utilizando progressões geométricas. Faz uma proposta de aula para aplicação no Ensino Médio.			

Fonte: produção da autora, 2019.

Com base nessas breves descrições, percebemos que os trabalhos 8, 30 e 37 apresentam pontos alinhados aos nossos objetivos e, portanto, vamos fazer uma consulta mais detalhada neles, para determinar as diferenças e semelhanças entre eles e o meu trabalho.

O trabalho de Silva (2018) começa com um apanhado histórico sobre a álgebra, sem apresentar fórmulas. O autor diz que seu objetivo é buscar condições sobre os coeficientes de um polinômio para que $p(x) = 0$ tenha solução. Faz um comentário sobre os documentos oficiais e como os livros didáticos do Ensino Médio tratam os polinômios. Apresenta definições, proposições e exemplos sobre grupos, subgrupos, anéis, subanéis e ideais. Define anel dos polinômios e divisão.

A dissertação de Silva também faz um breve apanhado histórico sobre o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) e exibe duas demonstrações para ele, uma analítica e uma algébrica. Demonstra a fórmula de Cardano e traz algumas definições sobre polinômios, como: grau, raiz, valor numérico, etc. Traz os seguintes resultados: Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert, Briot-Ruffini, Teorema da Decomposição, relações de Girard, Teorema das Raízes Racionais. Apresenta as soluções de equações polinomiais por radicais até o quarto grau. Para finalizar elabora e aplica atividades utilizando o aplicativo Graphmatica no Ensino Médio.

O trabalho de Nascimento (2015) começa com os números complexos, trazendo uma breve história e depois entra no corpo dos complexos, define as operações de soma e multiplicação e comenta quais propriedades devem ter para formar um corpo, demonstrando algumas delas. Define polinômios com coeficientes complexos, grau e as operações, demonstrando a maioria das propriedades. Define derivadas e chega na fórmula de Taylor.

Quando chega ao Teorema Fundamental da Álgebra faz um apanhado histórico e sua demonstração. Mostrando em seguida a fatoração dos polinômios. Traz em um parágrafo os matemáticos importantes na busca por raízes de polinômios. Mostra o método de Gustavo para solução de equações de terceiro grau e afirma que é possível resolver as de quarto grau com uma variação dessa técnica. Demonstra e dá exemplos do Teorema das Raízes Racionais e das relações de Girard. Para finalizar analisa o número de raízes reais de um polinômio, com os Teoremas de Descartes, Bolzano e Lagrange.

Já o trabalho de Dierings (2014) começa com fatos históricos do desenvolvimento da álgebra, fazendo um breve comentário sobre cada equação (do primeiro, segundo e terceiro grau) sem demonstrar nenhuma fórmula e apenas apresentando a expressão que resolve as equações do terceiro grau. Depois discute como os polinômios estão sendo ensinados no Ensino Médio, o que os parâmetros curriculares nacionais (PCN) (BRASIL, 2002) trazem e como os livros didáticos apresentam os polinômios. Em seguida começa com a teoria para a sua proposta de uma nova abordagem, trazendo atividades envolvendo o Geogebra para exercitar o que foi apresentado. A teoria consiste em: definir polinômios e operações, dispositivo de Briot-Ruffini, Teorema do Valor Intermediário e Fundamental da Álgebra sem demonstrá-los, decomposição polinomial, raízes complexas, regra de sinal de Descartes e Teorema das Raízes Racionais. Então faz a análise da aplicação de atividades no Ensino Médio, que não são as mesmas atividades mencionadas durante o texto.

Neste trabalho faremos um resgate histórico detalhado sobre polinômios, complementando os textos de Silva (2018), Nascimento (2015) e Dierings (2014), além disso faremos a construção do Anel de Polinômios, ponto que não foi destacado nos textos anteriores, e proporemos uma sequência didática para ser aplicada no Ensino Médio ou no Ensino Superior em cursos de formação de professores, com objetivo de introduzir um estudo mais completo de polinômios. Como destacado o nosso trabalho traz pontos diferentes dos demais ampliando os referenciais para os professores que buscam novas propostas de ensino.

4 UM POUCO DE HISTÓRIA

Este capítulo será dedicado a trazer um pouco da história dos polinômios, os quais surgiram, inicialmente, como equações de primeiro grau, quadráticas e cúbicas.

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 125),

> Problemas que se reduzem a resolver uma equação de primeiro grau aparecem naturalmente sempre que aplicamos matemática ao mundo real. Não é surpreendente, portanto, descobrir que quase todos que estudaram matemática, dos escribas egípcios aos servidores públicos chineses, desenvolveram técnicas para resolver tais problemas.

Porém, é preciso ter em mente que naquela época a notação matemática não era a utilizada hoje em dia.

> Quando vemos hoje uma equação ser escrita, por exemplo, $ax^2+bx+c=0$ ou a raiz quadrada de um número ser simbolizado por $\sqrt{*}$, imaginamos que as coisas tenham sido sempre assim. Na realidade, esta simbologia é relativamente moderna pois a soma e a subtração eram representadas pelas letras p (plus) e m (minus) até meados do século XVI, quando, gradativamente, passaram a ser empregados os $+$ e $-$, propostos em 1489 pelo alemão Johann Widmann e popularizados por Michael Stifel (1487-1567). O sinal da multiplicação $\times$ foi introduzido em 1631 pelo inglês Oughtred (autor do Clavis Mathematicae, estudado por Newton em seu mergulho). Descartes foi o primeiro a representar potências sob a forma a^b e um dos primeiros a utilizar letrar minúsculas para representar parâmetros ou incógnitas e a escrever as equações algébricas sob a forma de um polinômio igualado a zero. A raiz quadrada era indicada por R ou Rq até que, em 1525, o alemão Christoff Rudolff inventou o símbolo $\sqrt{*}$. Os sinais $>$ (maior) e $<$ (menor) foram criados por Thomas Harriot (1560-1621) e publicados postumamente em 1631. O sinal de igualdade foi inventado pelo inglês Robert Recorde (1510-1558) e publicado em 1557. (GARBI, 2009, p. 100).

Por exemplo um problema de equação do primeiro grau era escrito assim (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 125):

"Uma quantidade; sua metade e seu terço são adicionados a ela. Ela se torna 10."

que na nossa notação seria simplesmente:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10.$$

Para resolver esse problema, o escriba era instruído a fazer o que nós também faríamos: divida 10 por $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Contudo, existia um método bem diferente que foi utilizado para resolver esse tipo de problema no papiro de Rhind, chamado de falsa posição. Vejamos como funcionava esse método no seguinte exemplo (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 125):

"Uma quantidade; seu quarto é somado a ela. Ela se torna 15."

vamos supor que a quantidade é 4 (já que é fácil calcular um quarto de 4). Somando 4 ao seu quarto temos $4+1=5$. Queríamos chegar a 15, mas chegamos a 5. Se multiplicarmos 5 por 3 chegamos ao 15, logo basta multiplicar a nossa suposição por 3, ou seja, a quantidade é $4 \cdot 3 = 12$.

Isso é verdade pois estamos lidando com equações do tipo $Ax = B$ e se multiplicarmos x por um fator k, temos:

$$A(kx) = k(Ax) = kB.$$

Porém, se a equação for do tipo $Ax + C = B$ esse método não funciona, então foi encontrado o método da falsa posição dupla, cuja funcionalidade pode ser encontrada em Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 126).

Já as equações de segundo grau aparecem no livro de Al-Khwarizmi com o seguinte problema:

> Um quadrado e dez raízes dele são iguais a trinta e nove dirhems. Quer dizer, quanto deve ser o quadrado, o qual, quando aumentado por dez de suas próprias raízes, é igual a trinta e nove? (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 131).

O que na nossa notação seria: $x^2 + 10x = 39$. E a solução dada por ele também é descritiva, da seguinte forma:

> Você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo, o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove. (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 131).

Escrevendo as instruções em símbolos, temos:

$$\begin{aligned} \text{divide o número de raízes por dois: } \frac{10}{2} &= 5; \\ \text{multiplica por si mesmo: } 5 \times 5 &= 25; \\ \text{some isso a trinta e nove: } 25 + 39 &= 64; \\ \text{tome a raiz disso: } \sqrt{64} &= 8; \\ \text{subtraia disso a metade do número de raízes: } 8 - 5 &= 3. \end{aligned}$$

E isso é exatamente a fórmula usada atualmente,

$$x = \frac{-10 + \sqrt{10^2 - 4(-39)}}{2} = -\frac{10}{2} + \frac{\sqrt{10^2 + 4 \times 39}}{2} = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - 5.$$

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008):

> A maior diferença entre isso e a fórmula moderna é que consideraríamos ambas as raízes quadradas positivas e negativas. Mas, tomando a raiz quadrada negativa, obteríamos um valor negativo para x. Os matemáticos daquela época não acreditavam em números negativos; a raiz positiva era a única para as quais eles se atentavam. (p.132).

O que nos leva a tão conhecida fórmula de resolução da equação do segundo grau, conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara, e sobre ela temos o seguinte comentário de Garbi:

> No primeiro milênio da era cristã a Índia produziu célebres matemáticos e astrônomos, como **Varahamihira** (circa 505) e **Brahmagupta** (circa 630) mas o nome de **Bhaskara** (1114-1185) é o que mais facilmente vem a nossa memória, por estar ligado a fórmula geral da solução das equações do segundo grau. A este respeito há um fato curioso: a fórmula de Bhaskara não foi descoberta por Bhaskara. Conforme ele mesmo relatou no século 12, a mencionada fórmula fora encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara (991-?) e publicada em uma obra que não chegou até nós. (GARBI, 2009, p. 25).

Com a notação moderna é muito fácil deduzir a fórmula de Bhaskara apenas completando quadrados. Seja a equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ com } a \neq 0$$

dividindo tudo por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou, ainda

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

agora vamos completar quadrados

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

extraindo a raíz quadrada em ambos os lados,

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou seja,

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donde obtemos,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Um problema clássico em que a equação do segundo grau é utilizada é o seguinte: encontrar dois números, x e y, conhecendo-se sua soma s e seu produto p (GARBI, 2009). O que corresponde ao sistema:

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y=s-x \\ xy=p \end{cases}$$

Logo, $x(s-x)=p$ ou $x^2-sx+p=0$ e, portanto,

$$x=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2} \quad \text{e} \quad y=s-x=\frac{s\mp\sqrt{s^2-4p}}{2}.$$

Antes da representação simbólica da matemática, esse problema poderia ser resolvido da seguinte maneira "eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número." (LIMA, 2013, p. 108). Que é exatamente o que chegamos acima.

Al-Khwarizmi (780-850) e Bhaskara (1114-1185) chegaram a descrever a resolução das equações de segundo grau, mas eles não chegaram a uma fórmula com a notação que conhecemos hoje, conforme Roque e Carvalho (2012, p. 204):

> Os métodos enunciados por Bhaskara e Al-Khawarizmi permitem reduzir uma equação do segundo grau a uma equação do tipo $ax^2+bx=c$, mas ainda não havia símbolos algébricos para expressar coeficientes genéricos da equação no caso, os coeficientes a, b e c. Se traduzirmos o método usado por eles na linguagem algébrica atual e o aplicarmos a uma equação geral do tipo $ax^2+bx+c=0$, obteremos o equivalente da fórmula para resolução de equações do segundo grau. Isto quer dizer que havia um método geral para resolução de equações, ainda que expresso por palavras. No entanto, não podemos dizer que já existisse uma 'fórmula', no sentido que entendemos hoje, uma vez que não se usava nenhum simbolismo para os coeficientes.

Segundo Roque e Carvalho (2012, p. 223) quem deu o passo decisivo na obtenção de fórmulas para tais soluções foi o matemático François Viète (1540-1603), quando introduziu o simbolismo para os coeficientes das equações, ele definiu que as incógnitas seriam representadas pelas vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas. E ainda, simboliza as potências, se A é a incógnita, o seu quadrado é A *quadratum*, o cubo é A *cubum*, e assim por diante. Tornando possível escrever as equações e suas fórmulas com símbolos.

É importante ressaltar que segundo Pedroso (2010) a fórmula de Bhaskara recebe esse nome, curiosamente, só no Brasil, na literatura em geral ela é chamada de fórmula de resolução da equação do segundo grau.

Depois de resolver as equações quadráticas, chegamos as cúbicas, que por sua vez, aparecem naturalmente através de problemas geométricos, considerados primeiro pelos gregos, de acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008, p.137), "a história começa com uma famosa questão geométrica: dado um ângulo, existe uma maneira de construir um ângulo medindo um terço dele?"

Conforme a trigonometria foi sendo desenvolvida, ficou claro que esse problema seria resolvido por uma cúbica.

> Para encontrar um terço de um ângulo θ dado, podemos começar pensando que θ é três vezes o ângulo que estamos procurando, o qual chamaremos de α; isto é $\alpha = \theta/3$. Agora, aplicamos a fórmula do cosseno de 3α:
>
> $$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$
>
> (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 137).

Chamando $\cos(\theta)$ de a, já que $\alpha = \theta/3$ é conhecido, e $x = \cos(\theta/3)$ então temos que encontrar a solução da equação $4x^3 - 3x - a = 0$.

O árabe 'Umar Al-Khāyammī (1048-1131), conhecido no ocidente como Omar Khayyam, desenvolveu técnicas geométricas para resolver as cúbicas

> Como os matemáticos árabes não usavam números negativos e não permitiam zero como coeficiente, Al-Khāyammī teve que considerar muitos casos. Para ele, $x^3 + ax = b$ e $x^3 = ax + b$ eram tipos diferentes de equações. A álgebra arábica era inteiramente expressa em palavras, como 'um cubo e raízes são iguais a um número' e 'um cubo é igual a raízes e um número', respectivamente. Consideradas dessa maneira, existem 14 tipos diferentes de equações cúbicas. Para cada uma delas, Al-Khāyammī encontrou uma solução geométrica: uma construção que fornecia um segmento de reta cujo comprimento satisfazia a equação. Muitas dessas construções envolviam intersecções com sessões cônicas, e muitas tinham condições laterais para garantir a existência de soluções positivas. (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 138).

Todo esse trabalho nos leva a construções geométricas e não a números ou fórmulas, o que levou muitos matemáticos a tentaram resolver esse problema, sendo que vários deles chegaram a discutir soluções para exemplos de equações cúbicas, o que não chega nem perto de solucionar o caso geral.

O real progresso para tais soluções começou com Scipione del Ferro (1465-1526) que passou a sua solução de equações do tipo $x^3+px+q=0$ para seu aluno Antonio Maria Fior (século XV- século XVI), mas não publicou sua descoberta. Fior, com o conhecimento de seu falecido professor, desafiou Nicolo Fontana (1499-1557), mais conhecido como Tartaglia, a resolver problemas que um iria propor ao outro, uma prática muito comum naquela época.

Tartaglia descobriu que Fior tinha essa solução e foi estudar, resolvendo além da que Fior já sabia, também as equações do tipo $x^3+px^2+q=0$, e com esse conhecimento ganhou o desafio.

Cardano (1501-1576), a outra face dessa história, ficou sabendo que Tartaglia havia feito essa descoberta e pediu a ele essa solução, que negou o seu pedido alegando que ele mesmo queria fazer essa publicação.

> Diante dessa negativa, Cardano ofendeu Tartaglia, acusando-o de mesquinho, egoísta e não interessado em colaborar com o desenvolvimento da humanidade. Algum tempo após a troca de insultos, Tartaglia recebeu uma carta assinada por um nobre italiano, convidando-o a visitá-lo em milão. Lá chegando, ao invés do fictício nobre, esperava-o o próprio Cardano que lhe implorou, sob juramento de segredo, a revelação das cobiçadas fórmulas. Nas próprias palavras de Tartaglia, ele decidiu confiar em Cardano pois, se não acreditasse em um homem que fazia tais juramentos sobre o evangelho, ele mesmo deveria ser considerado uma pessoa perversa e desumana. Aceita a promessa, Tartaglia mandou o segredo em um poema, de forma cifrada e misteriosa, que Cardano não conseguiu entender. Mais conversações, mais juras, mais promessas e, finalmente, Tartaglia revelou tudo. (GARBI, 2009, p. 37).

Uma tradução dos versos dados a Cardano por Tartaglia é dada por Milies (1994, p. 1):

> 1. Quando o cubo com a coisa em apreço
> Se igualam a qualquer número discreto
> Acha dois outros diferentes nisso
>
> 2. Depois terás isto por consenso
> Que seu produto seja sempre igual
> Ao cubo do terço da coisa certo
>
> 3. Depois, o resíduo geral
> Das raízes cúbicas subtraídas
> Será tua coisa principal
>
> 4. Na segunda destas operações,
> Quando o cubo estiver sozinho

Observarás estas outras reduções

5. Do número farás dois, de tal forma
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa

6. Depois, por um preceito comum
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito

7. Depois, a terceira dessas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são idênticas

8. Isto eu achei, e não com passo tardo
No mil e quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar.

Nesses versos Tartaglia considera três casos, que para ele, eram distintos

$$x^3 + ax = b$$

$$x^3 = ax + b$$

$$x^3 + b = ax.$$

A partir do primeiro verso ele trata a primeira equação listada acima, a partir do quarto verso ele trata da segunda equação listada acima e no sétimo verso afirma que o terceiro caso é da mesma natureza que o segundo e, portanto, se resolve da mesma forma.

Para resolver a primeira dessas equações $x^3 + ax = b$, Tartaglia sugere encontrar dois outros números cuja diferença seja b, ou seja,

$$u - v = b$$

e também, o seu produto seja igual ao cubo da terça parte da coisa, portanto,

$$uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

e ele coloca que a solução será dada por,

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}.$$

Porém, depois de seis anos estudando, Cardano conseguiu resolver o problema da equação geral, mas ele não queria quebrar sua promessa, então de acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 139) "Cardano descobriu que del Ferro havia encontrado a solução do caso crítico antes de Tartaglia. Já que não prometera manter a solução de *del Ferro* secreta, ele sentiu que poderia publicá-la mesmo que ela fosse idêntica à que aprendera com Tartaglia." E, sabendo que fizera uma real contribuição para a matemática fez a publicação do livro *Ars Magna* revelando toda a solução.

Na sequência, apresentamos a solução que foi dada, por Cardano, para as cúbicas. Considere a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Se $x = y + m$, então

$$\begin{aligned} a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d &= 0 \\ a(y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3) + b(y^2 + 2ym + m^2) + c(y+m) + d &= 0 \\ ay^3 + 3ay^2m + 3aym^2 + am^3 + by^2 + 2bym + bm^2 + cy + cm + d &= 0 \\ ay^3 + y^2(3am + b) + y(3am^2 + 2bm + c) + (am^3 + bm^2 + cm + d) &= 0. \end{aligned}$$

Tomando

$$b + 3am = 0$$

temos

$$m = -\frac{b}{3a}.$$

Assim podemos reescrever a equação geral como $y^3 + py + q = 0$ e depois achar $x = y - \frac{b}{3a}$. Porém, esse tipo de equação já havia sido resolvida por del Ferro, do seguinte modo, suponha que

$$\begin{aligned} x &= A + B \\ x^3 &= (A+B)^3 \\ x^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ x^3 &= A^3 + B^3 + 3AB(A+B). \end{aligned}$$

Como $x = A + B$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

ou ainda,

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0.$$

Como, $x^3 + px + q = 0$, logo

$$p = -3AB \quad \mathbf{e} \quad q = -(A^3 + B^3)$$

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \quad \mathbf{e} \quad A^3 + B^3 = -q.$$

Ou seja, A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto e esse é um problema que se resolve com equações do segundo grau. Portanto,

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \mathbf{e} \quad B^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Como $x = A + B$, então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

que é conhecida como fórmula de Cardano.

Vamos ver se a solução dada por Tartaglia nos versos vistos acima bate com a solução dada por Cardano em seu livro. Tartaglia diz pra pegar dois números tais que

$$\begin{aligned} u - v &= b \\ uv &= \left(\frac{a}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Lembrando que Tartaglia está trabalhando com uma equação do tipo $x^3 + ax = b$, então ela fica $x^2 + ax - b = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} + \sqrt{\left(\frac{v-u}{2}\right)^2 + uv}} + \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} - \sqrt{\left(\frac{v-u}{2}\right)^2 + uv}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} + \sqrt{\frac{v^2 - 2uv + u^2}{4} + uv}} + \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} - \sqrt{\frac{v^2 - 2uv + u^2}{4} + uv}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} + \sqrt{\frac{v^2 - 2uv + u^2 + 4uv}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} - \sqrt{\frac{v^2 - 2uv + u^2 + 4uv}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} + \sqrt{\frac{v^2 + 2uv + u^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} - \sqrt{\frac{v^2 + 2uv + u^2}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} + \sqrt{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} - \sqrt{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} + \left(\frac{u+v}{2}\right)} + \sqrt[3]{\frac{u-v}{2} - \left(\frac{u+v}{2}\right)} \\
&= \sqrt[3]{\frac{2u}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-2v}{2}} \\
&= \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{-v} \\
&= \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}.
\end{aligned}$$

Que foi a solução dada por Tartaglia.

Ludovico Ferrari (1522-1560) aluno de Cardano, munido dos métodos para solucionar as equações de terceiro grau, pode resolver as equações de quarto grau, tal solução foi publicada por Cardano no *Ars Magna* juntamente com o a solução do terceiro grau.

Então, seja a equação geral do quarto grau,

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

podemos transformá-la em

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

considerando uma substituição do tipo $x = y + m$ e com o mesmo procedimento da equação cúbica, só que zerando o coeficiente de y^3.

Então, segundo Garbi (2009)

> Ferrari olhou a equação
>
> $$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$
>
> e procurou reagrupar os termos de modo que nos dois lados da igualdade houvesse polinômios quadrados perfeitos. Se tal reagrupamento fosse possível, seriam extraídas as raízes quadradas, cair-se-ia em equações do 2º grau e o problema estaria resolvido. (p. 43).

Vamos escrever,

$$x^4 + px^2 + \alpha x^2 - \alpha x^2 + qx + r + \beta - \beta = 0$$

e, reagrupando,

$$x^4 + (p+\alpha)x^2 + (r+\beta) = \alpha x^2 - qx + \beta$$

α e β são números a serem determinados para que os dois lados da igualdade sejam quadrados perfeitos. Para isso basta que o discriminante de ambos os lados seja igual a zero. Ou seja,

$$(p+\alpha)^2 - 4(r+\beta) = 0 \quad \textbf{e} \quad q^2 - 4\alpha\beta = 0.$$

Isolando β na segunda equação,

$$\beta = \frac{q^2}{4\alpha}$$

então,

$$\begin{aligned}
(p+\alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) &= 0 \\
p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} &= 0 \\
\alpha p^2 + 2p\alpha^2 + \alpha^3 - 4r\alpha - q^2 &= 0 \\
\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 &= 0
\end{aligned}$$

que é uma equação do terceiro grau em α. Como já vimos, as equações do terceiro grau podem ser resolvidas, assim basta encontrar α e depois β e extrair as raízes quadradas.

$$\sqrt{x^4 + (p+\alpha)x^2 + (r+\beta)} = \pm\sqrt{\alpha x^2 - qx + \beta}.$$

> Para cada alternativa de sinal + ou − tem-se uma equação do 2º grau, ambas com duas soluções. Portanto, para a equação do 4º grau, o método fornece 4 raízes, de uma forma semelhante ao que acontece na fórmula de Bhaskara.

> Os passos para a solução da equação geral do 4º grau, portanto, são
>
> 1. Toma-se a equação geral e faz-se uma transformação do tipo $x = y + m$ de modo a cair-se em uma equação do 4º grau em y sem o termo do 3º grau;
>
> 2. Reagrupam-se seus termos de modo a fazer com que ambos os lados da igualdade sejam quadrados perfeitos. Cai-se em uma equação do 3º grau em α. Se ela for completa, faz-se a transformação $\alpha = \alpha' + t$ de modo a obter-se uma equação do 3º grau em α', sem o termo do 2º grau;
>
> 3. Resolve-se a equação em α' pelo método de Tartaglia;
>
> 4. Soma-se t a α' e obtem-se α. Obtido α calcula-se β;
>
> 5. Com α e β, extraem-se as raízes quadradas dos dois lados da igualdade e obtém-se os 4 valores possíveis de y. Soma-se m a y e obtém-se as 4 raízes da equação geral. (GARBI, 2009, p. 44).

É importante ressaltar que mesmo se a equação do 3º grau em α tiver 3 soluções reais, as soluções da equação do quarto grau serão sempre as mesmas, independente da raiz da cúbica utilizada. Cada raiz da cúbica corresponde a uma forma de agrupar as raízes da quártica.

Com as equações cúbicas chegamos a um fato curioso, de acordo com Garbi (2009, p. 48),

> Aqui estava uma questão realmente séria e que não poderia simplesmente ser ignorada. Quando, nas equações do 2º grau, a fórmula de Bhaskara levava a raízes quadradas de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a inexistência de soluções. Agora, entretanto, estava-se diante de equações do 3º grau com soluções evidentes, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos.

Vamos analisar esse curioso fato partindo de uma equação fatorada. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a equação

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

que tem $x = a$, $x = b$ e $x = c$ como raízes, já que cada um desses valores anula o produto. Vamos descobrir que relação devem ter a, b e c para que esse produto fique do tipo $x^3 + px + q = 0$ e possamos utilizar a fórmula de Cardano.

$$\begin{aligned}(x^2 - bx - ax + ab)(x-c) &= 0\\ x^3 - cx^2 - bx^2 + bcx - ax^2 + acx + abx - abc &= 0\\ x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc &= 0.\end{aligned}$$

Para que o termo do segundo grau suma, é necessário e suficiente que $a+b+c=0$ ou seja, $c=-(a+b)$, então temos

$$(x-a)(x-b)(x+[a+b])=0$$

com $x=a$, $x=b$ e $x=-(a+b)$ como raízes, e

$$\begin{aligned} x^3+[ab-b(a+b)-a(a+b)]x+ab(a+b)&=0\\ x^3+[ab-(a+b)(a+b)]x+ab(a+b)&=0\\ x^3+[ab-(a+b)^2]x+ab(a+b)&=0. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Cardano, temos

$$x=\sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2}+\sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2+\left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}+\\ \sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2}-\sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2+\left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}.$$

Seja,

$$\Delta=\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2+\left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3$$

vamos trabalhar com essa expressão fazendo operações algébricas:

$$\begin{aligned} \Delta&=\frac{a^2b^2(a+b)^2}{4}+\frac{a^3b^3-3a^2b^2(a+b)^2+3ab(a+b)^4-(a+b)^6}{27}\\ \Delta&=\frac{27a^2b^2(a+b)^2+4a^3b^3-12a^2b^2(a+b)^2+12ab(a+b)^4-4(a+b)^6}{108}\\ \Delta&=\frac{15a^2b^2(a+b)^2+4a^3b^3+12ab(a+b)^4-4(a+b)^6}{108}. \end{aligned}$$

Trabalhando somente com o numerador, já que todas as parcelas tem o mesmo denominador, obtemos:

$$15a^2b^2(a^2+2ab+b^2)+4a^3b^3+12ab(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)-$$
$$4(a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6)=$$
$$15(a^4b^2+2a^3b^3+a^2b^4)+4a^3b^3+12(a^5b+4a^4b^2+6a^3b^3+4a^2b^4+ab^5)+$$
$$-4a^6-24a^5b-60a^4b^2-80a^3b^3-60a^2b^4-24ab^5-4b^6=$$
$$15a^4b^2+30a^3b^3+15a^2b^4+4a^3b^3+12a^5b+48a^4b^2+72a^3b^3+48a^2b^4+12ab^5+$$
$$-4a^6-24a^5b-60a^4b^2-80a^3b^3-60a^2b^4-24ab^5-4b^6=$$
$$-4a^6-12a^5b+3a^4b^2+26a^3b^3+3a^2b^4-12ab^5-4b^6=$$
$$-(4a^6+12a^5b-3a^4b^2-26a^3b^3-3a^2b^4+12ab^5+4b^6)=$$
$$-(a-b)^2(4a^4+20a^3b+33a^2b^2+20ab^3+4b^4)=$$
$$-(a-b)^2(2a+b)^2(a^2+4ab+4b^4)=$$
$$-(a-b)^2(2a-b)^2(a+2b)^2.$$

Voltando a expressão inteira,

$$\Delta=-\frac{(a-b)^2(2a-b)^2(a+2b)^2}{108}.$$

Como podemos ver, todos os termos estão ao quadrado e, portanto são positivos e como existe um sinal negativo na frente da expressão, ela será sempre negativa, não importa quais os valores de a e b. Porém, Δ está dentro de uma raiz quadrada, ou seja, para descobrir as raízes da equação vista acima, que são reais, já que construímos a equação com as raízes, precisamos extrair a raiz quadrada de um número negativo, o que não era possível na época. Quem deu uma solução a essa equação foi Bombelli (1526-1572), e para resolver tal problema ele precisaria de um novo conjunto de números.

> Os estudos de Bombelli começaram com a tentativa de conciliar o resultado fornecido pela Fórmula de Cardano para a equação
> $$x^3-15x-4=0$$
> $$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$
> com a raiz $x=4$, constatada por simples observação. (GARBI, 2009, p. 51).

Bombelli imaginou que os números $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser da forma $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$, respectivamente. Então,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})^3 &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3\\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1}\\ &= 2 + 11\sqrt{-1}\\ &= 2 + \sqrt{-121}\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{-1})^3 &= 8 - 12\sqrt{-1} + 6(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3\\ &= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1}\\ &= 2 - 11\sqrt{-1}\\ &= 2 - \sqrt{-121}.\end{aligned}$$

Portanto, $a = 2$ e $b = 1$, logo

$$x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4.$$

> Ao realizar seus cálculos, Bombelli criou as seguintes regras para trabalhar com $\sqrt{-1}$:
>
> $$\begin{aligned}(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) &= -1\\ (-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) &= 1\\ (-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) &= -1\\ (\pm 1)(\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{-1}\\ (\pm 1)(-\sqrt{-1}) &= \mp\sqrt{-1}.\end{aligned}$$
>
> Criou também a regra para a soma de dois números do tipo $m + n\sqrt{-1}$:
>
> $$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{-1}.$$
>
> (GARBI, 2009, p. 52).

Bombelli, mesmo sem saber, lançou as bases para o estudo dos números complexos. Garbi (2009) observa um equívoco que acontece muito nos livros-texto sobre a origem dos números complexos, alguns colocam como sendo as equações de segundo grau, mas, observa-se, pelos fatos históricos, que foram as equações do terceiro grau que começaram o seu estudo.

Depois disso é natural pensar em equações do quinto grau, segundo Burton (2007) durante 300 anos matemáticos duelaram com tais equações sem progresso, sugerindo que elas não tem solução como as anteriores. Abel chegou a acreditar que havia chegado a uma fórmula para equações do quinto grau, mas logo percebeu seu erro.

> Seus professores não conseguiram detectar qualquer falha no processo e decidiram enviar os papéis ao maior matemático da Escandinávia, Ferdinand Degan, para que opinasse. Este, também, não identificou erros mas, prudentemente, pediu maiores informações. Ao dá-las, o próprio Abel descobriu que a sua solução era incorreta. (GARBI, 2009, p. 147).

Sendo assim, o mais provável era que as equações quínticas não teriam solução por radicais, o que foi estudado por vários matemáticos.

> Uma vez que a resolução de uma equação quártica se reduz à resolução de uma cúbica associada a ela, Euler, por volta de 1750, tentou igualmente reduzir a resolução de uma equação quíntica geral à de uma quártica associada. Euler falhou nesse seu intento, assim como falharia também Lagrange uns trintas anos mais tarde. O médico italiano Paolo Ruffini, porém, tomou outro caminho: em tentativas de 1803, 1805 e 1813 procurou provar, embora sempre de maneira ineficiente, que as raízes das equações gerais de grau cinco, ou maior, não podem ser expressas por meio de radicais em termos dos coeficientes respectivos, um fato verdadeiro, como se sabe hoje. Esse resultado notável foi demonstrado independente e conclusivamente pelo famoso matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) em 1824. Em 1858, Charles Hermite (1822-1901) deu uma solução da equação quíntica geral por meio de funções elípticas. O êxito de Hermite com as equações quínticas levou mais tarde ao fato de que uma raiz de uma equação geral de grau n pode ser representada em termos dos coeficientes por meio de funções fuchsianas. (EVES, 2004, p. 305).

Burton (2007) comenta que muitas equações de grau 5 tem solução por radicais e que foi Galois (1811-1832) que caracterizou quais tipos tem solução e quais não tem. Segundo Garbi (2009) Galois foi o primeiro a usar a palavra grupo, e essa sua maneira de abordar as equações algébricas vieram de um trabalho sobre as leis das permutações publicado por Cauchy (1789-1857) em 1818.

Segundo Eves (2004, p. 553) foram matemáticos como Hamilton (1805-1865), Grassmann (1809-1877) e Cayley (1821-1895) que abriram as portas da álgebra abstrata, estudando vários postulados da álgebra usual e chegando a outros sistemas, como grupos, anéis, domínios de integridade, anéis de divisão, anéis booleanos, corpos e etc.

Outra descoberta importante foi a do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), o primeiro a fazer essa demonstração correta foi Gauss (1777-1855) em 1799, antes dele tiveram muitas tentativas consideradas erradas e depois dele muitos outros matemáticos fizeram a demonstração de muitas maneiras diferentes, esse teorema diz que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo dos complexos, pelo menos uma raiz.

Seja o polinômio de grau n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n.$$

Pelo teorema existe pelo menos um número complexo k_1 que é solução da equação $P(x) = 0$. Sabemos da álgebra que $P(x)$ é divisível por $(x - k_1)$ e o polinômio pode ser reescrito como o produto de $(x - k_1)$ por um polinômio de grau $n - 1$. Para esse novo polinômio de grau $n - 1$ também vale o TFA e existe pelo menos um k_2 raiz do novo polinômio. Se continuarmos com esse raciocínio, $P(x)$ pode ser escrito como o produto de a_0 por n monômios do tipo $(x - k_i)$ em que $i = 1, 2, ..., n$. Como existem n valores de x que anulam cada um dos n monômios, o polinômio $P(x)$ de grau n tem exatamente n raízes, eventualmente repetidas, já que nada obriga os n k_i a serem diferentes.

"**Portanto, ao demonstrar que as equações polinomiais têm pelo menos uma raiz no campo complexo, Gauss demonstrou que elas tem exatamente n raízes, sendo n o grau do respectivo polinômio.**" (GARBI, 2009, p. 116)

No próximo capítulo vamos desenvolver a parte teórica desse trabalho, começando com a teoria de anéis para chegar aos anéis de polinômios e por fim vamos ver alguns resultados para encontrar raízes reais de polinômios.

5 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esse capítulo será dedicado a estabelecer a fundamentação teórica que será utilizada no caderno pedagógico, vamos dividi-lo em três seções, a primeira com algumas definições e propriedades de anel, a segunda com o anel dos polinômios e a terceira com resultados sobre raízes reais de um polinômio.

5.1 ANÉIS

Nessa seção vamos tratar dos conteúdos preliminares sobre anéis, para isso utilizaremos o livro de Janesch e Taneja (2008). Começaremos com a definição clássica de anel e as definições de domínio e corpo.

Os itens $(i) - (vi)$ da Definição 5.1 são chamados de axiomas de anel.

Definição 5.1. *Um **anel** é um conjunto $A \neq \emptyset$ no qual estão definidas duas operações, $+$ e $\cdot$, satisfazendo os seguintes axiomas:*

(i) *Comutatividade de $+$: $a + b = b + a, \qquad \forall a, b \in A$.*

(ii) *Associatividade de $+$: $(a + b) + c = a + (b + c), \qquad \forall a, b, c \in A$.*

(iii) *Existência do elemento neutro da $+$: Existe $0_A \in A$ tal que $a + 0_A = a = 0_A + a, \qquad \forall a \in A$.*

(iv) *Existência de simétricos: Dado $a \in A$, existe $(-a) \in A$ tal que $a+(-a) = (-a)+a = 0_A, \qquad \forall a \in A$.*

(v) *Associatividade de $\cdot$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \qquad \forall a, b, c \in A$.*

(vi) *Distributividade de $\cdot$ em relação a $+$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall a, b, c \in A$.*
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad \forall a, b, c \in A$.

Lembrando que os símbolos $+$ e $\cdot$ indicam operações em A, isto é,

$$\begin{array}{lcl} + : A \times A \to A & \quad e \quad & \cdot : A \times A \to A \\ (a, b) \mapsto a + b & & (a, b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

são funções de $A \times A$ em A.

Observação 5.1. *A escolha dos símbolos* $+$ *e* $\cdot$ *para indicar as operações do anel* A *é apenas uma notação. Poderíamos representar por* $*$ *e* Δ.

Notação: Se A é um anel com as operações $+$ e $\cdot$, escrevemos $(A, +, \cdot)$. A primeira operação $+$ é chamada adição e a segunda $\cdot$ é chamada multiplicação.

Observação 5.2. *O elemento* 0_A *do axioma* (iii) *é chamado elemento neutro ou zero da adição do anel* A*, quando não houver confusão, escrevemos somente* 0*. O elemento* $-a \in A$ *do axioma* (iv)*, é chamado de simétrico de* a *ou oposto de* a.

Definição 5.2. *Sejam* A *um anel e* $a, b \in A$*, então* $-b \in A$ *e definimos a subtração de dois elementos do anel como*

$$a - b = a + (-b).$$

Observação 5.3. *Quando fazemos a multiplicação dos elementos* a *e* b *do anel* $(A, +, \cdot)$*, é comum omitir o símbolo* $\cdot$ *que indica a operação. Ou seja,* $a \cdot b = ab$.

A seguir apresentamos definições que fazem com o que o anel A tenha denominações especiais.

Definição 5.3. *O anel* A *é comutativo quando:*

(vii) $ab = ba, \qquad \forall a, b \in A.$

Definição 5.4. *O anel* A *é com unidade quando:*

(viii) *Existe* $1_A \in A$ *tal que* $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$*, para todo* $a \in A$.

Observação 5.4. *Um elemento* a *do anel* A *é chamado divisor de zero quando* $a \neq 0$ *e existe* $b \in A, b \neq 0$*, tal que* $ab = 0$ *ou* $ba = 0$.

Definição 5.5. *O anel* A *é sem divisores de zero quando:*

(ix) *Se* $a, b \in A$ *e* $ab = 0$*, então* $a = 0$ *ou* $b = 0$.

A seguir apresentamos um exemplo que existem anéis que tem divisores de zero e anéis que não são comutativos.

Exemplo 5.1. *Considere o anel das matrizes* 2×2*, vamos mostrar que esse anel tem divisores de zero e não é comutativo.*

(a) *Considere as matrizes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que A *e* B *são diferentes do elemento nulo do anel, mas*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o anel das matrizes 2×2 *tem divisores de zero.*

(b) *Considere as matrizes:*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad e \; D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação $C \cdot D$*:*

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, fazendo a multiplicação $D \cdot C$*:*

$$DC = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, $C \cdot D \neq D \cdot C$*, e o anel das matrizes* 2×2 *não é comutativo.*

Definição 5.6. *Um domínio é um anel com unidade, comutativo e sem divisores de zero.*

Definição 5.7. *Um corpo é um anel* K *com unidade e comutativo que satisfaz:*

(x) *Para todo* $a \in K$*,* $a \neq 0$*, existe* $x \in K$ *tal que* $ax = 1_K$*.*

Observação 5.5. *O elemento* x *é chamado de inverso de* a*, e denotado por* a^{-1}*. Então, um corpo é um anel com unidade e comutativo em que todo elemento diferente de zero tem inverso.*
Utilizamos a notação $\mu(A)$ *para representar o conjunto de todos elementos inversíveis de* A*.*

Como $+$ é uma operação em A, ela associa a cada par de elementos de A um único elemento de A. Assim, para quaisquer $a, b, c \in A$, se $b = c$ os pares (a, b) e (a, c) são os mesmos em $A \times A$, e portanto, $a+b = a+c$. Isto que dizer que se $b = c$, então $a+b = a+c$. Do mesmo modo, se $b = c$, então $b+a = c+a$. Além disso, como $\cdot$ também é uma operação em A, temos que se $b = c$, então $ab = ac$ e $ba = ca$.

A proposição abaixo apresenta propriedades imediatas de um anel.

Proposição 5.1. *Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e $a, b, c \in A$. Temos que:*

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, *para todo* $a \in A$.
2. *O zero é único.*
3. *O simétrico é único.*
4. $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.
5. $-(-a) = a$.
6. $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.
7. $(-a)(-b) = ab$.
8. $a(b - c) = ab - ac$.
9. $(a - b)c = ac - bc$.
10. $-(a + b) = -a - b$.

Demonstração. No que se segue, o elemento neutro de A será denotado por 0.

1. Seja $a \in A$. Verificaremos que $a \cdot 0 = 0$. A igualdade $0 \cdot a = 0$ se prova de forma análoga. Pelos axiomas (iii) e (iv) temos:

$$0 = 0 + 0 \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Somando o simétrico x de $a \cdot 0$, que existe pelo axioma (iv), e usando os axiomas (ii) e (iii) temos:

$$a \cdot 0 + x = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + x \Rightarrow a \cdot 0 + x = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + x) \Rightarrow 0 = a \cdot 0 + 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 0.$$

2. Suponha que existe outro elemento neutro $x \in A$. Logo, $0 + x = 0_A$ e como 0 também é elemento neutro de A, $0 + x = x$. Dessas duas igualdades temos que $x = 0$, e portanto, 0 é o único elemento neutro de A.
3. Suponha que existe outro simétrico $x \in A$ de a, além de $-a$. Assim

$$x = x + 0 = x + (a + (-a)) = (x + a) + (-a) = 0 + (-a) = -a.$$

Logo, $x = -a$ e então $-a$ é o único simétrico de a.

4. Por hipótese $a+b=a+c$. Então, somando $-a$ em ambos os lados obtemos:

$$-a+(a+b)=-a+(a+c)\Rightarrow(-a+a)+b=(-a+a)+c\Rightarrow 0+b=0+c\Rightarrow b=c.$$

5. Como $-a$ é o simétrico de a valem as igualdades $a+(-a)=(-a)+a=0$. Isso mostra que a é o simétrico de $-a$. Desde que o símbolo $-$ indica o simétrico temos $-(-a)=a$.
6. Temos que $(-a)b+ab=(-a+a)b=0\cdot b=0$.
   Analogamente, verifica-se que $ab+(-a)b=0$. Isso mostra que $(-a)b$ é simétrico de ab. Pela unicidade do simétrico vista na propriedade (2) vem que $-(ab)=(-a)b$.
   A igualdade $-(ab)=a(-b)$ pode ser verificada da mesma forma.
7. Usando as igualdades do item (6) temos que:
$$(-a)(-b)=-(a(-b))=-(-ab)=ab.$$
8. Temos que $a(b-c)=a(b+(-c))=ab+a(-c)=ab+(-ac)=ab-ac$.
9. Analogamente ao item (8), $(a-b)c=(a+(-b))c=ac+(-b)c=ac+(-bc)=ac-bc$.
10. Usando as propriedades $(i),(ii),(iii)$ e (iv) temos que
$$a+b+(-a)+(-b)=a+(-a)+b+(-b)=0+0=0.$$
    Analogamente, $(-a)+(-b)+a+b=0$.
    Assim, segue que o simétrico de $a+b$ é $(-a)+(-b)=-a-b=-(a+b)$. □

Proposição 5.2. *Se K é corpo, então K é domínio.*

Demonstração. Como K é um corpo, temos que K é anel com unidade e comutativo e satisfaz o axioma (x). Assim, basta provar que K não tem divisores de zero.

Sejam $a,b\in K$ tais que $ab=0$. Se $a=0$ a demonstração acabou.

Se $a\neq 0$, usando o axioma (x), existe $a^{-1}\in K$ tal que $aa^{-1}=1$. Agora, usando os axiomas $(vi),(viii)$ e (x) temos que:

$$ab=0\ \Rightarrow\ a^{-1}(ab)=a^{-1}0\ \Rightarrow\ (a^{-1}a)b=0\ \Rightarrow\ 1b=0\ \Rightarrow\ b=0.$$

Portanto, quando $ab=0$ devemos ter $a=0$ ou $b=0$. Isso mostra que K é um domínio. □

Exemplo 5.2. *Em todos os conjuntos a seguir estamos considerando as operações usuais de soma $+$ e produto $\cdot$.*

1. *O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ satisfaz os axiomas de anel, e portanto, é um anel, além disso, o conjunto $\mathbb{Z}$ é comutativo, tem unidade e é sem divisores de zero, logo é um domínio. Porém, nem todo elemento não nulo de $\mathbb{Z}$ é inversível, $2 \in \mathbb{Z}$ e $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, então $\mathbb{Z}$ não é corpo.*
2. *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ satisfaz os axiomas de anel, e portanto, é um anel. Além disso, o conjunto $\mathbb{Q}$ é comutativo, tem unidade e é sem divisores de zero, logo é um domínio. E, ainda, todo elemento não nulo é inversível, logo é também, um corpo.*
3. *Bem como o conjuntos dos números racionais $\mathbb{Q}$, os conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$ e dos números complexos $\mathbb{C}$ são exemplos de corpos.*

Proposição 5.3. *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com unidade.*

1. *A unidade é única.*
2. *Se $a \in A, a \neq 0$ e a tem inverso em A, então o inverso de a é único.*
3. *Se $1 = 0$, então $A = \{0\}$.*

Demonstração.

1. Suponha que existe outro $x \in A$ que também é unidade de A, então $1x = 1$. Como 1 também é unidade de A, $1x = x$. Dessas igualdade obtemos que $x = 1$, e portanto, a unidade é única.
2. Suponha que existe outro $x \in A$ tal que $ax = 1 = xa$. Assim,

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (a \cdot a^{-1}) = (x \cdot a) \cdot a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = a^{-1}.$$

   Logo, $x = a^{-1}$ e o inverso é único.
3. Seja $a \in A$. Multiplicando por a ambos os lados da igualdade $1 = 0$ obtemos, $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$. Logo, $A = \{0\}$. □

Proposição 5.4. *Se $(A, +, \cdot)$ é um anel, então são equivalentes:*

(i) *A é anel sem divisores de zero;*

(ii) $$\begin{cases} ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c \\ ba = ca \quad \Rightarrow \quad b = c \end{cases} \qquad \forall a, b, c \in A, a \neq 0.$$

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Temos que:

$$ab = ac \;\Rightarrow ab - ac = 0 \;\Rightarrow ab + a(-c) = 0 \;\Rightarrow a(b-c) = 0.$$

Como A não tem divisores de zero e $a \neq 0$, vem que $b - c = 0$, e portanto, $b = c$. A segunda situação é análoga.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sejam $a, b \in A$ tais que $ab = 0$. Suponha que $a \neq 0$. Aplicando a hipótese na igualdade $ab = 0 = a \cdot 0$, vem que $b = 0$. Portanto, $a = 0$ ou $b = 0$, ou seja, o anel A não tem divisores de zero. □

Note que a propriedade (b) da proposição acima é a lei do cancelamento da multiplicação. Ou seja, em qualquer domínio a lei do cancelamento é válida.

Definição 5.8. *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dado $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, definimos:*

$$a^1 = a$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a, \quad n \geq 1$$

Quando A tem unidade 1_A também definimos $a^0 = 1_A$.

Proposição 5.5. *Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel, $a, b \in A$ e $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Então:*

1. $a^m a^n = a^{m+n}$;
2. $(a^m)^n = a^{mn}$;
3. $(ab)^n = a^n b^n$, *quando* $ab = ba$.

Demonstração. Usaremos o Princípio de Indução sobre n nas três provas.

1. Para $n = 1$ temos $a^m a^1 = a^m a = a^{m+1}$, pela definição de potência. Suponha que vale para $n \geq 1$, isto é, $a^m a^n = a^{m+n}$. Vejamos que vale para $n + 1$.

$$a^m a^{n+1} = a^m(a^n a^1) = (a^m a^n)a = a^{m+n}a = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}.$$

2. Para $n = 1$ temos $(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$. Suponha que vale para $n \geq 1$, isto é, $(a^m)^n = a^{mn}$. Vejamos que vale para $n + 1$.

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n a^m = a^{mn} a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}.$$

Observe que usamos o item anterior na penúltima igualdade.

3. Para $n = 1$, temos $(ab)^1 = ab = a^1b^1$. Suponha que vale para $n \geq 1$, isto é, $(ab)^n = a^nb^n$, quando $ab = ba$. Vejamos que vale para $n + 1$.

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n(ab) = a^nb^nab = a^nab^nb = a^{n+1}b^{n+1}.$$

Observe que na penúltima igualdade usamos n vezes seguidas a hipótese que $ba = ab$. $\square$

Definição 5.9. *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é subanel de A quando:*

1. *As operações de A são operações em B, isto é,*

$$a, b \in B \quad \Rightarrow \quad a + b \in B \text{ e } ab \in B.$$

2. *$(B, +, \cdot)$ é anel.*

Após essa breve revisão de anéis traremos na próxima seção o Anel de Polinômios.

5.2 O ANEL DOS POLINÔMIOS

Nessa seção vamos trabalhar com o anel dos polinômios, utilizando os livros de Janesch (2008), Gonçalves (2008), Hefez e Villela (2012) e Iezzi (2005). Queremos mostrar que um conjunto de polinômios na variável x sobre um anel A também é um anel. Vamos mostrar que o Algoritmo de Euclides é válido para esse anel e demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra. Nessa seção não faremos muitos exemplos, pois estes podem ser consultados no caderno pedagógico.

Definição 5.10. *Seja A um anel. Um polinômio $p(x)$ com coeficientes em A, na variável x, é uma expressão da forma:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

em que $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in A$, para $0 \leq j \leq n$.

Observação 5.6. *Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ é um polinômio sobre A na variável x com $a_n \neq 0$, chamamos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de coeficientes de $p(x)$, a_0 de coeficiente independente e a_n de coeficiente dominante.*

O conjunto dos polinômios na variável x sobre o anel A é escrito como:

$$A[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n;\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ \forall\, i \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}\}.$$

Definição 5.11. *Seja A um anel. Dizemos que $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x]$ tem grau n quando:*

(i) $a_n \neq 0$;

(ii) $a_j = 0$, *para todo* $j > n$.

Notação: $\partial(p(x)) = n$ indica que o grau de $p(x)$ é n.

O grau pode ser visto como a função:

$$\partial : A[x] - \{0\} \to \mathbb{N}$$
$$p(x) \mapsto \partial(p(x)).$$

O polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x]$ pode ser escrito como $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots + 0x^m$, para todo $m > n$. Portanto, quando comparamos dois polinômios $p(x), q(x) \in A[x]$, é possível assumir que os termos de ambos tem as mesmas potências de x, mas isso não significa que $p(x)$ e $q(x)$ tem o mesmo grau.

Definição 5.12. *Seja A um anel. Para cada $a \in A$, o polinômio*

$$p(x) = a + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

é chamado de polinômio constante a, e indicado por $p(x) = a$. Em particular, quando $a = 0$, temos o polinômio $p(x) = 0$, que é chamado de polinômio nulo. Quando $a \neq 0$ o grau do polinômio constante é $\partial(p(x)) = 0$.

Note que o grau só está definido para polinômio não nulo, pois é necessário ter algum coeficiente diferente de zero no polinômio.

Uma vez que cada elemento a de um anel A pode ser identificado com o polinômio constante $p(x) = a$, podemos interpretar A com um subconjunto de $A[x]$.

Queremos mostrar que $A[x]$ também é um anel e que suas propriedades dependem das propriedades do anel A, para isso precisamos de algumas definições. Dessa forma, A é visto como um subanel de $A[x]$.

Definição 5.13. *Dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A[x]$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in A[x]$ são iguais se $a_i = b_i$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$.*

Definição 5.14. *Sejam A um anel, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A[x]$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in A[x]$. Definimos a soma de $p(x)$ com $q(x)$ por:*

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \in A[x].$$

Definição 5.15. *Sejam A um anel, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A[x]$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m \in A[x]$. Definimos o produto de $p(x)$ com $q(x)$ por:*

$$p(x)q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_kx^k \in A[x],$$

em que

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0.$$

Note que $p(x) + q(x)$ e $p(x)q(x)$ são de fato elementos de $A[x]$, pois todos os seus coeficientes são obtidos fazendo operações no anel A e, portanto, estão em A.

O próximo teorema garante que se A é um anel então $A[x]$ é um anel, e suas propriedades decorrem das propriedades de A.

Teorema 5.1. *Seja A um anel. Então:*

1. *$A[x]$ é um anel.*
2. *Se A é comutativo, então $A[x]$ é comutativo.*
3. *Se A tem unidade 1, então $A[x]$ tem unidade $g(x) = 1$.*
4. *Se A é domínio, então $A[x]$ é domínio.*

Demonstração.

1. Devemos verificar os 6 axiomas de anel. Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A[x]$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in A[x]$ e $r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n \in A[x]$. Lembrando que os coeficientes dos polinômios estão em A e, portanto, valem os axiomas de anel para os coeficientes.

   (i) Comutatividade da adição.

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \cdots + (b_n + a_n)x^n \\ &= q(x) + p(x). \end{aligned}$$

   (ii) Associatividade da adição.

$$\begin{aligned} p(x) + [q(x) + r(x)] &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \\ &+ [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \cdots + (b_n + c_n)x^n] \\ &= [a_0 + (b_0 + c_0)] + [a_1 + (b_1 + c_1)]x \\ &+ \cdots + [a_n + (b_n + c_n)]x^n \\ &= [(a_0 + b_0) + c_0] + [(a_1 + b_1) + c_1]x \\ &+ \cdots + [(a_n + b_n) + c_n]x^n \\ &= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n] \\ &+ (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\ &= [p(x) + q(x)] + r(x). \end{aligned}$$

   (iii) Existência do elemento neutro.

Tome $f(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n \in A[x]$. Então,

$$\begin{aligned} p(x) + f(x) &= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + \cdots + (a_n + 0)x^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ &= p(x). \end{aligned}$$

(iv) Existência de simétrico.

Para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A[x]$, tome o polinômio

$$-p(x) = -a_0 + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \cdots + (-a_n)x^n \in A[x].$$

Então,

$$p(x) + (-p(x)) = (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)x + (a_2 - a_2)x^2 + \cdots (a_n - a_n)x^n = 0.$$

(v) Associatividade da multiplicação.

Vamos mostrar que $p(x)(q(x)r(x)) = (p(x)q(x))r(x)$.

Escrevendo,

$$\begin{aligned} q(x)r(x) &= d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n, \quad d_i = \sum_{j+t=i} b_jc_t, \\ p(x)(q(x)r(x)) &= e_0 + e_1x + \cdots e_nx^n, \quad e_i = \sum_{j+t=i} a_jd_t, \\ p(x)q(x) &= l_0 + l_1x + \cdots l_nx^n, \quad l_i = \sum_{j+t=i} a_jb_t \text{ e} \\ (p(x)q(x))r(x) &= m_0 + m_1x + \cdots + m_nx^n, \quad m_i = \sum_{j+t=i} l_jc_t, \end{aligned}$$

devemos mostrar que $e_i = m_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. De fato, para cada $i \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j+t=i} a_jd_t = \sum_{j+t=i} a_j \left(\sum_{\alpha+\beta=t} b_\alpha c_\beta \right) \\ &= \sum_{j+\alpha+\beta=i} a_j(b_\alpha c_\beta) = \sum_{j+\alpha+\beta=i} (a_jb_\alpha)c_\beta \\ &= \sum_{n+\beta=i} \left(\sum_{j+\alpha=n} a_jb_\alpha \right) c_\beta = \sum_{n+\beta=i} l_nc_\beta = m_i. \end{aligned}$$

(vi) Distributividade.

Faremos apenas a distributividade a esquerda. A outra é análoga. Queremos mostrar que:

$$p(x)(q(x) + r(x)) = p(x)q(x) + p(x)r(x).$$

Escrevendo

$$p(x)(q(x)+r(x)) = u_0 + u_1x + \cdots + u_nx^n, \quad u_i = \sum_{j+t=i} a_j(b_t+c_t),$$

$$p(x)q(x) = l_0 + l_1x + \cdots + l_nx^n, \quad l_i = \sum_{j+t=i} a_jb_t \text{ e}$$

$$p(x)r(x) = v_0 + v_1x + \cdots + v_nx^n, \quad v_i = \sum_{j+t=i} a_jc_t,$$

devemos mostrar que $u_i = l_i + v_i$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$. Temos

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j+t=i} a_j(b_t+c_t) = \sum_{j+t=i} (a_jb_t + a_jc_t) \\ &= \sum_{j+t=i} a_jb_t + \sum_{j+t=i} a_jc_t = l_i + v_i, \end{aligned}$$

como desejado.

Como $A[x]$ satisfaz os 6 axiomas de anel, temos que $A[x]$ é um anel.

2. Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A[x]$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in A[x]$.

   Escrevendo

$$p(x)q(x) = l_0 + l_1x + \cdots + l_nx^n, \quad l_i = \sum_{j+t=i} a_jb_t,$$

$$q(x)p(x) = w_0 + w_1x + \cdots + w_nx^n, \quad w_i = \sum_{j+t=i} b_ta_j.$$

   Devemos provar que $l_i = w_i$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$.

   Por hipótese, o anel A é comutativo, e então para cada i, temos

$$l_i = \sum_{j+t=i} a_jb_t = \sum_{j+t=i} b_ta_j = w_i.$$

3. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A[x]$. Escreva $g(x) = 1$ como $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, sendo $b_0 = 1$ e $b_t = 0$ para todo $t \geq 1$.

   Note que

$$p(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n, \text{ em que } c_i = \sum_{j+t=i} a_jb_t,$$

   para todo $i \in 0, 1, 2, \cdots, n$.

   A única forma das parcelas do somatório $\sum\limits_{j+t=i} a_jb_t$ serem não nulas é quando $t = 0$.

   Assim,

$$c_i = \sum_{j+t=i} a_jb_t = \sum_{j+0=i} a_jb_0 = \sum_{j=i} a_j = a_i, \text{ e } p(x)g(x) = p(x).$$

De forma análoga prova-se que $g(x)p(x) = p(x)$. Portanto, $g(x) = 1$ é a unidade do anel $A[x]$.

4. Como A é domínio, temos que A é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero. Segue dos itens (2) e (3), que $A[x]$ também é um anel comutativo com unidade. Falta provar que $A[x]$ não tem divisores de zero. Faremos esta prova por absurdo, isto é, vamos supor que $A[x]$ tenha divisores de zero. Então existem $p(x)$, $q(x) \in A[x]$, $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$, tais que $p(x)q(x) = 0$. Escrevemos $p(x) = a_0 + ... + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + ... + b_mx^m$, em que $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. (Aqui o grau de $p(x)$ é n e o de $q(x)$ é m).

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_mx^m. \end{aligned}$$

Então,

$$0 = p(x)q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots c_{n+m}x^{n+m}, \text{ com } c_i = \sum_{j+t=i} a_jb_t.$$

Deste modo, $c_i = 0$ para todo $i \in 0, 1, \cdots, n+m$ e, em particular, $c_{n+m} = 0$. No entanto,

$$0 = c_{n+m} = a_nb_m.$$

Isso contradiz o fato de A ser domínio. Portanto, $A[x]$ não tem divisores de zero. □

Já temos a definição de soma em um anel, vamos definir agora a subtração.

Definição 5.16. *Sejam A um anel, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A[x]$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in A[x]$ e $-b_i, i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ os simétricos dos coeficientes de $q(x)$.*

Definimos a subtração de $p(x)$ com $q(x)$ por:

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= p(x) + [-q(x)] \\ &= (a_0 + (-b_0)) + (a_1 + (-b_1))x + (a_2 + (-b_2))x^2 + \cdots + (a_n + (-b_n))x^n \\ &= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n \in A[x]. \end{aligned}$$

Agora queremos mostrar que o Algoritmo da Divisão Euclidiana também é válido para certos anéis de polinômios, bem como no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Para isso precisamos de algumas propriedades do grau de um polinômio que foi definido anteriormente.

Proposição 5.6. *Sejam A um anel, $p(x), q(x) \in A[x]$ com $p(x) \neq 0$ e $q(x) \neq 0$.*

1. *Se $p(x) + q(x) \neq 0$, então*

$$\partial(p(x) + q(x)) \leq max\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\}.$$

2. *Se $\partial(p(x)) \neq \partial(q(x))$, então $\partial(p(x) + q(x)) \neq 0$ e*

$$\partial(p(x) + q(x)) = max\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\}.$$

3. *Se $p(x)q(x) \neq 0$, então*

$$\partial(p(x)q(x)) \leq \partial(p(x)) + \partial(q(x)).$$

4. *Se A é domínio, então $p(x)q(x) \neq 0$ e*

$$\partial(p(x)q(x)) = \partial(p(x)) + \partial(q(x)).$$

Demonstração. Suponhamos que $\partial(p(x)) = n$ e $\partial(q(x)) = m$. Então, podemos escrever $p(x) = a_0 + a_1 + ... + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + ... + b_m x^m$ com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.

1. Sem perda de generalidade, assumimos que $n \geq m$. Assim $p(x) + q(x) \neq 0$. Temos que

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_n + b_n)x^n,$$

   sendo que acrescentamos coeficientes $b_j = 0$ para $j > m$, se for necessário. Se $a_n + b_n \neq 0$, então $\partial(p(x) + q(x)) = n$. Se $a_n + b_n = 0$, $\partial(p(x) + q(x)) < n$. Portanto,

$$\partial(p(x) + q(x)) \leq n = max\{n, m\} = max\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\}.$$

2. Por hipótese, $\partial(p(x)) \neq \partial(q(x))$, então $n \neq m$. Vamos assumir que $n > m$. Assim,

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n.$$

   Desde que $a_n \neq 0$, temos que $p(x) + q(x) \neq 0$ e também

$$\partial(p(x) + q(x)) = n = max\{n, m\} = max\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\}.$$

3. Escrevemos $p(x)q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots$, com $c_k = \displaystyle\sum_{i+j=k} a_i b_j$, e lembrando que $a_i = 0$ para $i > n$, pois $\partial(p(x)) = n$ e $b_j = 0$ para $j > m$, pois $\partial(q(x)) = m$. Quando

$k > n+m$, cada uma das parcelas do somatório $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ envolve a_i com $i > n$ ou b_j com $j > m$, portanto todas estas parcelas são nulas. Consequentemente, $c_k = 0$ para $k > n+m$. Segue que

$$p(x)q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+m} x^{n+m},$$

e então,

$$\partial(p(x)q(x)) \leq m+n = \partial(p(x)) + \partial(q(x)).$$

4. Novamente, escrevemos $p(x)q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots$, com $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. Vimos na demonstração anterior que $c_k = 0$ para $k > n+m$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} c_{n+m} &= a_0 b_{n+m} + a_1 b_{n+m-1} + \cdots + a_{n-1} b_{m+1} + a_n b_m + a_{n+1} b_{m-1} + \cdots + a_{n+m} b_0 \\ &= a_n b_m, \end{aligned}$$

pois $a_i = 0$ para $i > n$ e $b_j = 0$ para $j > m$. Como A é domínio, $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, temos que $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$. Portanto, $p(x)q(x) \neq 0$ e

$$\partial(p(x)q(x)) = n+m = \partial(p(x)) + \partial(q(x)).$$

□

Note que, nos itens 3 e 4, quando A é domínio a igualdade é garantida. Isto quer dizer que a desigualdade pode ocorre quando A não é domínio. Não discutimos aqui sobre os anéis $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$ [1], das classes dos resíduos módulo $n \geq 2$, mas o leitor que conhece um pouco de anéis certamente sabe do que estamos falando e entenderá o exemplo a seguir. O anel $\mathbb{Z}_6$ é comutativo com unidade, mas tem divisores de zero, ou seja, $\mathbb{Z}_6$ não é domínio, tome $p(x) = \overline{2}x^2 + \overline{4}x + \overline{1}$ e $q(x) = \overline{3}x^2 + \overline{5}$ em $\mathbb{Z}_6[x]$. Temos que

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (\overline{2}x^2 + \overline{4}x + \overline{1})(\overline{3}x^2 + \overline{5}) \\ &= \overline{6}x^4 + \overline{10}x^2 + \overline{12}x^3 + \overline{20}x + \overline{3}x^2 + \overline{5} \\ &= \overline{13}x^2 + \overline{20}x + \overline{5} \\ &= \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{5}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos um exemplo em que $\partial(p(x)q(x)) < \partial(p(x)) + \partial(q(x))$.

Proposição 5.7. *Se A é um domínio, então o conjunto dos elementos inversíveis de A e de $A[x]$ coincidem, isto é, $\mu(A) = \mu(A[x])$.*

[1] O leitor pode encontrar informações sobre esse anel em Janesch e Taneja (2008, p. 43).

Demonstração. A inclusão $\mu(A) \subseteq \mu(A[x])$ é imediata, pois $A \subseteq A[x]$. (Aqui estamos identificando A como o conjunto de todos os polinômios constantes de $A[x]$.) Tome agora $f(x) \in \mu(A[x])$. Então, existe $g(x) \in A[x]$ tal que $f(x)g(x) = 1$. Assim, $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$. Como $A[x]$ é domínio, pois A é domínio, segue que,

$$0 = \partial(1) = \partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x)).$$

Portanto, $\partial(f(x)) = \partial(g(x)) = 0$, isto é, $f(x) = a \in A$ e $g(x) = b \in A$ e $ab = 1$. Logo $f(x) = a \in \mu(A)$. □

Corolário 5.1. *Nenhum anel de polinômios é corpo.*

Demonstração. Seja A um anel, e suponha que $A[x]$ é corpo. Então, $\mu(A[x]) = A[x] - \{0\}$. Pela proposição anterior, concluímos que $A[x] - \{0\} = \mu(A[x]) = \mu(A) \subseteq A$, o que é um absurdo. □

Agora, podemos mostrar o Algoritmo da Divisão Euclidiana, também conhecido como algoritmo da divisão, para o anel de polinômios. Note que ele não vale para qualquer anel, algumas condições são necessárias para que o Algoritmo da Divisão Euclidiana seja válido.

Teorema 5.2. *(Algoritmo da Divisão Euclidiana) Seja A um anel comutativo com unidade. Dados $f(x), g(x) \in A[x]$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, com $b_m \in \mu(A)$, existem únicos $q(x), r(x) \in A[x]$ tais que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, com $r(x) = 0$ ou $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$.*

Demonstração. Se $f(x) = 0$, basta tomar $q(x) = r(x) = 0$.

Agora, vamos admitir que $f(x) \neq 0$. Como $g(x) \neq 0$, escrevemos

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \text{ em que } a_n \neq 0 \text{ e}$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m, \text{ em que } b_m \neq 0.$$

Temos dois casos para analisar.

1º caso: Se $\partial(f(x)) < \partial(g(x))$ basta tomar $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$.

2º caso: Se $\partial(f(x)) \geq \partial(g(x))$ vamos usar o segundo princípio de indução sobre $n = \partial(f(x))$.

Se $n = 0$, então $f(x) = a_0$, para algum $a_0 \in A$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 = n = \partial(f(x)) &\geq \partial(g(x)) \\ &\Rightarrow \partial(g(x)) = 0 \\ &\Rightarrow g(x) = b_0, \text{ para algum } b_0 \in A - \{0\}. \end{aligned}$$

Uma vez que, neste caso, b_0 é coeficiente dominante de $g(x)$, por hipótese, b_0 é inversível, e assim, existe $b_0^{-1} \in A$.

Tome $q(x) = b_0^{-1}a_0$ e $r(x) = 0$. É claro que

$$f(x) = a_0 = b_0(b_0^{-1}a_0) + 0 = g(x)q(x) + r(x).$$

Suponhamos agora que o $\partial(f(x)) = n > 0$ e que o teorema seja verdadeiro para todo polinômio de grau s com $0 \leq s < n$. Isto significa que, se $h(x) \in A[x]$, $h(x) \neq 0$ com $\partial(h(x)) < n$, então existem $q_1(x), r_1(x) \in A$ tais que $h(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, com $r_1(x) = 0$ ou $\partial(r_1(x)) < \partial(g(x))$.

Considere o polinômio

$$h(x) = f(x) - (a_n b_m^{-1} x^{n-m})g(x). \tag{1}$$

Se $h(x) = 0$, então $f(x) = (a_n b_m^{-1} x^{n-m})g(x)$, e portanto, $r(x) = 0$ e $q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m}$.

Se $h(x) \neq 0$, podemos perceber que $\partial(h(x)) < n$, pois o grau de $(a_n b_m^{-1})x^{n-m}g(x)$ é n e seu coeficiente dominante é $-a_n$. Usando a hipótese de indução, obtemos $q_1(x), r_1(x) \in K$ tais que $h(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, com $r_1(x) = 0$ ou $\partial(r_1(x)) < \partial(g(x))$.

Substituindo em (1) e isolando $f(x)$, vem que

$$\begin{aligned} g(x)q_1(x) + r_1(x) &= f(x) - (a_n b_m^{-1} x^{n-m})g(x) \\ f(x) &= (a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x))g(x) + r_1(x). \end{aligned}$$

Chame $q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x)$ e $r(x) = r_1(x)$. Então, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ com $r(x) = 0$ ou $\partial(r_1(x)) < \partial(g(x))$.

Isso prova a existência de $q(x)$ e $r(x)$, resta verificar a unicidade.

Sejam $q(x), q^*(x), r(x), r^*(x) \in A[x]$ tais que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ com $r(x) = 0$ ou $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ e $f(x) = g(x)q^*(x) + r^*(x)$ com $r^*(x) = 0$ ou $\partial(r_1^*(x)) < \partial(g(x))$. Isso fornece a igualdade:

$$g(x)(q(x) - q^*(x)) = r^*(x) - r(x).$$

Suponha que $q(x) - q^*(x) \neq 0$. Escreva $q(x) - q^*(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_tx^t$, com $c_t \neq 0$.

Se $g(x)(q(x) - q^*(x)) = 0$, vem que $b_mc_t = 0$, donde , $b_m^{-1}b_mc_t = 0$, que leva a contradição $c_t = 0$. Logo, $g(x)(q(x) - q^*(x)) \neq 0$.

Desde que $b_mc_t \neq 0$ temos:

$$\partial(g(x)(q(x) - q^*(x))) = m + t \geq m = \partial(g(x)).$$

Da afirmação anterior podemos concluir que $r(x) \neq 0$ e $r^*(x) \neq 0$. De fato, se $r(x) = 0$, então $g(x)(q(x) - q^*(x)) = r^*(x)$. Olhando para o grau, chegamos ao absurdo,

$$\partial(g(x)) \leq \partial(g(x)(q(x) - q^*(x))) = \partial(r^*(x)) < \partial(g(x)).$$

Assim, $r(x) \neq 0$, e analogamente $r^*(x) \neq 0$. Isso garante que podemos falar em $\partial(r(x))$ e $\partial(r^*(x))$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\partial(g(x)) \leq \partial(g(x)(q(x) - q^*(x))) &= \partial(r^*(x) - r(x)) \\ &\leq max\{r^*(x), r(x)\} < \partial(g(x)).\end{aligned}$$

A contradição acima mostra que não podemos ter $q(x) - q^*(x) \neq 0$.

Portanto $q(x) = q^*(x)$, e consequentemente $r(x) = r^*(x)$. □

Vejamos com um exemplo a necessidade do coeficiente dominante de $q(x)$ ser inversível no anel A. Sejam o anel $\mathbb{Z}$ e os polinômios $p(x) = 2x^2 - 4x + 1$ e $q(x) = 3x^2 \in \mathbb{Z}$, temos que 3 não é um elemento inversível de $\mathbb{Z}$, fazendo a divisão de $p(x)$ por $q(x)$ temos

$$\begin{array}{rr|l} 2x^2 & -\,4x + 1 & 3x^2 \\ \cline{3-3} -\,2x^2 & & \frac{2}{3} \\ \cline{1-1} & -\,4x + 1 & \end{array}$$

e o quociente $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Então, temos que o Corolário 5.2 segue diretamente do Teorema 5.2, já que no teorema supomos que $b_m \in \mu(A)$ e a seguir temos como hipótese que A é um corpo, o que implica que todos os elementos não nulos de A são inversíveis.

Corolário 5.2. *Sejam K um corpo, $f(x), g(x) \in K[x]$ e $g(x) \neq 0$. Então, existem únicos $q(x), r(x) \in K[x]$ tais que*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

com $r(x) = 0$ ou $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$.

Tendo o Algoritmo da Divisão Euclidiana, podemos apresentar algumas definições sobre divisão de polinômios e raízes, as quais são importantes para deduzirmos o Teorema Fundamental da Álgebra.

Definição 5.17. *Sejam A um anel e $f(x), g(x) \in A[x]$. Dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$ em $A[x]$ quando existe $h(x) \in A[x]$ tal que $f(x) = g(x)h(x)$.*

Notação: $g(x) \mid f(x)$.

Definição 5.18. *Sejam A um anel, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x]$ e $\alpha \in A$. Chamamos de valor de $f(x)$ em α o elemento*

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n.$$

Como A é anel e $a_0, a_1, \cdots, a_n \in A$, temos que $f(\alpha) \in A$.

A seguir, definimos o que é a raiz de um polinômio.

Definição 5.19. *Sejam A um anel e $f(x) \in A[x]$. Dizemos que α é raiz de $f(x)$ quando $f(\alpha) = 0$.*

A próxima proposição é usualmente denominada como Teorema do Resto de D'Alembert, e trata do resultado sobre a divisão de polinômios em que o divisor é um polinômio de grau um, $x - k$, então, o resto será o valor do polinômio dividendo calculado em k.

Proposição 5.8. *Sejam A um anel comutativo com unidade e $\alpha \in A$. Para $f(x) \in A[x]$, existe $q(x) \in A[x]$ tal que $f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha)$.*

Demonstração. Como $\alpha \in A$, temos $x - \alpha \in A[x]$. De acordo com o Teorema 5.2, existem $q(x), r(x) \in A[x]$ tais que $f(x) = (x-\alpha)q(x)+r(x)$, com $r(x) = 0$ ou $\partial(r(x)) < \partial((x-\alpha)) = 1$.

Isso assegura que $r(x)$ é constante.

Avaliando $f(x)$ no elemento α temos

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha).$$

Como $r(x)$ é constante e $r(\alpha) = f(\alpha)$, temos que $r(x) = f(\alpha)$, para todo $x \in A$.

Logo, $f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha)$. $\square$

Corolário 5.3. *Sejam A um anel comutativo com unidade, $\alpha \in A$ e $f(x) \in A[x]$. São equivalentes:*

(a) α *é raiz de* $f(x)$*;*

(b) $(x - \alpha) \mid f(x)$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ De acordo com a Proposição 5.8, existe $q(x) \in A[x]$ tal que

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha).$$

Como α é raiz de $f(x)$, temos que $f(\alpha) = 0$. Segue que

$$f(x) = (x - \alpha)q(x),$$

ou seja, $(x - \alpha) \mid f(x)$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Por hipótese, existe $q(x) \in A[x]$ tal que

$$f(x) = (x - \alpha)q(x).$$

Avaliando $f(x)$ em α, temos

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0.$$

Logo, α é raiz de $f(x)$. $\square$

Proposição 5.9. *Sejam A um domínio, $f(x) \in A[x]$ e $f(x) \neq 0$. Então, o número de raízes de $f(x)$ em A não ultrapassa $\partial(f(x))$.*

Demonstração. Desde que $f(x) \neq 0$, podemos falar em grau de $f(x)$. Seja $n = \partial(f(x))$. Faremos a demonstração usando o princípio de indução sobre n.

Se $n = 0$, então $f(x) = a_0$ para algum $a_0 \in A - \{0\}$. Logo, $f(x)$ não tem raiz, e a proposição está provada.

Para o caso $n > 0$, como hipótese de indução, admita que todo polinômio de grau $n - 1$ tenha no máximo $n - 1$ raízes em A.

Note que, se $f(x)$ não tem raiz em A, nada tem-se a fazer, pois nesse caso o número de raízes é 0, que é menor do que $\partial(f(x)) = n$.

Admita então que $f(x)$ tenha raiz $\alpha \in A$. Pelo Corolário 5.3, podemos escrever

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) \text{ com } q(x) \in A[x].$$

Se $f(x)$ só possui a raiz α em A, temos que o número de raízes é $1 \leq \partial(f(x))$.

Se $f(x)$ tem raiz $\beta \in A$ e $\beta \neq \alpha$, então β é raiz de $q(x)$.

De fato, $0 = f(\beta) = (\beta - \alpha)q(\beta)$, e como $\beta \neq \alpha$ e A é domínio, vem que $\beta - \alpha \neq 0$ e $q(\beta) = 0$.

Como $A[x]$ é domínio, a Proposição 5.6 permite concluir que

$$n = \partial(f(x)) = \partial((x - \alpha)) + \partial(q(x)) = 1 + \partial(q(x)).$$

Logo, $\partial(q(x)) = n - 1$ e, pela hipótese de indução, $q(x)$ tem no máximo $n - 1$ raízes em A. Portanto, $f(x)$ tem no máximo n raízes em A, pois as raízes de $f(x)$ são α e as raízes de $q(x)$. $\square$

A razão pela qual não se define grau para o polinômio constante igual a zero, $p(x) = 0$, é que fazer isso iria contrariar a Proposição 5.9, pois para qualquer $a \in A$, tem-se $p(a) = 0$, ou seja, se A tem infinitos elementos, então o polinômio nulo tem infinitas raízes.

Corolário 5.4. *Sejam A um domínio, $f(x), g(x) \in A[x]$ com $\partial(f(x)) = \partial(g(x)) = n$. Se existirem $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1} \in A$, dois a dois distintos, tais que $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$, então $f(x) = g(x)$.*

Demonstração. Suponha que $f(x) \neq g(x)$. Então, $h(x) = f(x) - g(x) \in A[x], h(x) \neq 0$ e $\partial(h(x)) \leq n$. Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$, temos

$$h(\alpha_i) = f(\alpha_i) - g(\alpha_i) = 0.$$

Isso diz que $h(x)$ tem mais de n raízes em A, contradizendo a Proposição 5.9. Portanto, $f(x) = g(x)$. $\square$

Um polinômio em $A[x]$ de grau n pode ter no máximo n raízes em A e estas podem ser iguais entre si ou diferentes, e em cada caso recebem um nome específico, conforme segue.

Sejam A um anel comutativo com unidade, $\alpha \in A$ e $f(x) \in A[x]$ com $f(x) \neq 0$. Sabemos que se α é raiz de $f(x)$,

$$f(x) = (x - \alpha)q_1(x), \; q_1(x) \in A[x].$$

Se $q_1(\alpha) \neq 0$, então α não é raiz de $q_1(x)$, e dizemos que α é uma raiz simples de $f(x)$.

Se $q_1(\alpha) = 0$, então α é raiz de $q_1(x)$, e dizemos que α é raiz múltipla de $f(x)$. Então,

$$q_1(x) = (x - \alpha)q_2(x), \ q_2(x) \in A[x] \text{ e}$$

$$f(x) = (a - \alpha)^2 q_2(x).$$

Se $q_2(\alpha) \neq 0$, então α é raiz de multiplicidade 2.

Se $q_2(\alpha) = 0$, seguimos o processo.

Este processo é finito e será provado na proposição a seguir:

Proposição 5.10. *Sejam $f(x) \in A[x]$ e $\alpha \in A$ raiz de $f(x)$. Então, existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(x) = (x - \alpha)^r q_r(x)$, com $q_r(x) \in A[x]$ e $q_r(\alpha) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $n = \partial(f(x))$ e suponha que o processo descrito acima não seja finito. Então, temos $q_{n+1}(x)$ com $q_{n+1}(\alpha) = 0$ e podemos escrever

$$f(x) = (x - \alpha)^{n+1} q_{n+1}(x).$$

Segue que $\partial((x-\alpha)^{n+1} q_{n+1}(x)) = \partial(f(x)) = n$. Por outro lado, como $q_{n+1}(x) \neq 0$ podemos escrever:

$$q_{n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_t x^t$$

com $a_t \neq 0$ e $t \geq 0$.

Logo, o termo de maior grau do polinômio $(x - \alpha)^{n+1} q_{n+1}(x)$ é

$$x^{n+1} a_t x^t = a_t x^{n+1+t}.$$

Então, $\partial((x - \alpha)^{n+1} q_{n+1}(x)) = n + 1 + t > n$, o que é uma contradição.

Portanto, o processo é finito, ou seja, existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(x) = (x - \alpha)^r q_r(x)$, com $q_r(x) \in A[x]$ e $q_r(\alpha) \neq 0$. □

Definição 5.20. *Sejam A um anel comutativo com unidade e $\alpha \in A$ uma raiz de $f(x) \in A[x]$, $f(x) \neq 0$. Dizemos que α é raiz de multiplicidade r, $r \in \mathbb{N}^*$, quando $f(x) = (x - \alpha)^r q_r(x)$, com $q_r(x) \in A[x]$ e $q_r(\alpha) \neq 0$.*

Vamos apresentar duas demonstrações para o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), sendo que ambas dependem de resultados que não são imediatos, mas que fogem ao propósito desse texto. A primeira está em Hefez e Villela (2012, p. 192) e a segunda pode ser encontrada em Soares (2009, p. 119).

O TFA foi demonstrado pela primeira vez pelo matemático Gauss (1777-1855) em 1799, mas depois disso muitos outros também o demonstraram. Esse teorema diz respeito as raízes de um polinômio no anel $\mathbb{C}[x]$, então vamos assumir como verdadeiras as propriedades do conjunto dos números complexos.

Lema 5.1. *Dado um polinômio $p(z) \in \mathbb{C}[x] - \mathbb{C}$, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\mid p(z_0) \mid \leq \mid p(z) \mid, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Basta provar o resultado para polinômios do tipo $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Uma vez que as raízes dos polinômios $p(x)$ e $ap(x)$, para qualquer $a \in \mathbb{C}^*$, são as mesmas. Seja $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, pelas desigualdades triangulares, temos para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \mid p(z) \mid &= \mid z \mid^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \\ &\geq \mid z \mid^n \left(1 - \frac{\mid a_{n-1} \mid}{\mid z \mid} - \cdots - \frac{\mid a_0 \mid}{\mid z \mid^n} \right), \end{aligned}$$

mostrando que

$$\lim_{|z| \to +\infty} \mid p(z) \mid = +\infty.$$

Assim, existe $R > 0$, tal que $\mid p(z) \mid > \mid p(0) \mid$ para todo z com $\mid z \mid > R$. Se $D = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid \leq R\}$, pelo Teorema de Weierstrass [2], temos que existe $z_0 \in D$, tal que $\mid p(z_0) \mid \leq \mid p(z) \mid$ para todo $z \in D$. Como $\mid p(z_0) \mid \leq \mid p(0) \mid$, temos que $\mid p(z_0) \mid \leq \mid p(z) \mid$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

A demonstração do próximo lema pode ser encontrado no livro citado acima, não vamos fazê-la aqui porque ela usa argumentos de análise complexa que não são o objetivo desse trabalho.

Lema 5.2. *Seja $p(x) \in \mathbb{C}[x] - \mathbb{C}$. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $p(z_0) \neq 0$, então existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\mid p(z_1) \mid < \mid p(z_0) \mid$.*

Agora podemos enunciar e provar o TFA.

Teorema 5.3. *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem uma raiz complexa.*

[2] Seja $D \in \mathbb{R}$ compacto. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua, então existem $x_0, x_1 \in D$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in D$.

Demonstração. Seja $p(x) \in \mathbb{C}[x] - \mathbb{C}$. Pelo Lema 5.1, temos a existência de $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\mid p(z_0) \mid \leq \mid p(z) \mid$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que $p(z_0) = 0$. De fato, se $p(z_0) \neq 0$, então, pelo Lema 5.2, existiria $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\mid p(z_1) \mid < \mid p(z_0) \mid$, o que é um absurdo. Logo, z_0 é raiz de p. □

Também é possível demonstrar esse resultado utilizando o Teorema de Liouville, a demonstração desse teorema pode ser encontrada em Soares (2009, p. 118).

O Teorema de Liouville utiliza a definição de função inteira, de acordo com Soares (2009, p. 47) uma função definida em todo conjunto $\mathbb{C}$ e derivável em todo ponto de $\mathbb{C}$ é uma função inteira.

Teorema 5.4. *(Teorema de Liouville) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira. Se existe um número $M \geq 0$ tal que $\mid f(z) \mid \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$ então, f é constante.*

Teorema 5.5. *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem uma raiz complexa.*

Demonstração. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n$ e suponha, por contradição, que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, isso significa que $p(z)$ não tem raízes. Defina $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ que é inteira. Como

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots a_n \right),$$

e, como

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{\mid z \mid^j} = 0, \text{ para todo } \ j \geq 1,$$

então, dado $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$\mid z \mid > M \ \Rightarrow \ \frac{1}{\mid z \mid^j} < \epsilon.$$

Isso mostra que $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ é limitada em $\{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid > M\}$. Como $f(z)$ é contínua, pois é inteira, podemos usar o Teorema de Weierstrass para concluir que $f(z)$ também é limitada em $\{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid \leq M\}$. Portanto $f(z)$ é limitada em todo o $\mathbb{C}$, então pelo Teorema 5.4 $f(z)$ é constante, logo $p(z)$ também é constante, mas isso contradiz a hipótese. Consequentemente $p(z)$ possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$. □

A seguir apresentamos o Teorema da Decomposição que é muito importante para escrever qualquer polinômio como um produto de polinômios de primeiro grau. Esse resultado segue conforme é apresentado por Iezzi (2005, p. 106).

Teorema 5.6. *(Teorema da Decomposição) Todo polinômio* $p(x) = a_n x^n + ... + a_0$ *com coeficientes complexos e grau* $n \geq 1$ *pode ser decomposto em* n *fatores do primeiro grau, isto é,*

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

em que $r_1, r_2, \cdots, r_n$ *são raízes de* $p(x)$. *Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar a existência.

Como $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, podemos aplicar o TFA e $p(x)$ tem pelo menos uma raiz r_1. Assim, $p(r_1) = 0$ e $p(x)$ é divisível por $x - r_1$:

$$p(x) = (x - r_1)q_1(x)$$

em que $q_1(x)$ é polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 1$, então $n - 1 = 0$ e $q_1(x)$ é polinômio constante, portanto, $q_1(x) = a_n$ e

$$p(x) = a_n(x - r_1),$$

o que demonstra o teorema.

Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$ e o TFA é aplicável ao polinômio $q_1(x)$, isto é, $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz r_2. Assim $q_1(r_2) = 0$ e $q_1(x)$ é divisível por $x - r_2$:

$$q_1(x) = (x - r_2)q_2(x),$$

portanto,

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x),$$

em que $q_2(x)$ é polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 2$, isto é, $n - 2 = 0$, então $q_2(x) = a_n$ e

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2),$$

o que demonstra o teorema.

Após n aplicações sucessivas do TFA, chegamos a igualdade:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)q_n(x)$$

em que $q_n(x)$ tem grau $n - n = 0$ e coeficiente dominante a_n, portanto $q_n(x) = a_n$ e

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

Agora, vamos mostrar a unicidade.

Suponhamos que $p(x)$ admite duas decomposições:

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) \tag{2}$$

$$p(x) = a'_n(x - r'_1)(x - r'_2) \cdots (x - r'_n) \tag{3}$$

Temos que o termo de maior grau de $p(x)$ é:

$$a_n x^n = a'_m x^m$$

então, $n = m$ e $a_n = a'_m$. Portanto, ficamos com a igualdade

$$(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) = (x - r'_1)(x - r'_2) \cdots (x - r'_n).$$

Fazendo $x = r_1$ na equação acima temos,

$$0 = (r_1 - r'_1)(r_1 - r'_2) \cdots (r_1 - r'_n)$$

e, se o produto é nulo, um dos fatores $r_1 - r'_j$ é nulo para algum j. Com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, podemos colocar $r_1 = r'_1$. Então,

$$(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) = (x - r_1)(x - r'_2) \cdots (x - r'_n).$$

Agora, substituindo $x = r_2$, temos

$$0 = (r_2 - r_1)(r_2 - r'_2) \cdots (r_2 - r'_n).$$

Analogamente, temos que $r_2 - r'_k$ é nulo para algum k e com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, podemos colocar $r_2 = r'_2$. Continuando este processo sucessivamente por n vezes obtemos $r_i - r'_i$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Então a decomposição é única. $\square$

O TFA não vale para o conjunto dos números reais, pois nem todo polinômio com coeficientes reais tem todas as suas raízes reais. Como por exemplo, as duas raízes de $p(x) = x^2 + 4$ são $2i$ e $-2i$, que não são números reais. Outros polinômios têm raízes reais e complexas, por exemplo, as raízes de $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ são 3, $2i$ e $-2i$, ou seja, uma raiz real e duas complexas.

Uma vez que o TFA não garante que qualquer polinômio em $\mathbb{R}[x]$ tem raízes em $\mathbb{R}$, veremos a seguir novas ferramentas algébricas e analíticas que nos auxiliarão a encontrar tais raízes, se existirem.

5.3 *RESULTADOS PARA ENCONTRAR RAÍZES REAIS*

Nessa seção vamos apresentar métodos e teoremas sobre raízes de polinômios e sobre como efetuar a divisão de polinômios. Exemplos dos resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados no caderno pedagógico (Capítulo 6).

Iniciaremos com o Método de Descartes (ou Método de Coeficientes a Determinar) que determina o quociente e o resto na divisão euclidiana de polinômios. Esse não é um método muito utilizado para este fim, geralmente o mais usual é o Método das Chaves, por ser mais simples. Porém, esse método será apresentado uma vez que ele é necessário para a demonstração do dispositivo de Briot-Ruffini, que é muito prático para fazer a divisão de polinômios por binômios.

5.3.1 Método de Descartes ou coeficientes a determinar

Sejam os polinômios $p(x), m(x) \in A[x]$. Efetuando a divisão de $p(x)$ por $m(x)$ temos os polinômios $q(x), r(x) \in A[x]$ chamados de quociente e resto, respectivamente.

O método de coeficientes a determinar se baseia em dois fatos:

1. grau $q(x)$ =grau $p(x)-$grau $m(x)$
2. grau $r(x)$ <grau $m(x)$ ou $r(x) = 0$.

O Método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

1º) calculam-se grau $q(x)$ e grau $r(x)$;

2º) constroem-se os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ deixando seus coeficientes como incógnitas;

3º) determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$.

5.3.2 Algoritmo de Briot-Ruffini

A seguir veremos por que e como o chamado Algoritmo de Briot-Ruffini funciona. Este algoritmo é um dispositivo prático e eficiente para determinar o quociente e o resto na divisão euclidiana de um polinômio $p(x) \in A[x]$ por um binômio $x - k$, sendo $k \in A$. Uma vez que o divisor tem grau 1 (um) o resto nessa divisão será um polinômio constante, que denotaremos por $r \in A$.

Considere $p(x) \in A[x]$ com $\partial(p(x)) = n$. Para facilitar vamos representar $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in A[x]$ em vez de usar na forma padrão. Considere $q(x) \in A[x]$ e $r \in A$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de $p(x)$ por $x - k$. Então,

$$p(x) = q(x)(x-k) + r, \text{ sendo } \partial(q(x)) = n - 1.$$

Escrevendo $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$ (usando o mesmo tipo de representação de $p(x)$), temos que

$$\begin{aligned} p(x) &= (b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0)(x-k) + r \\ &= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - kb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_0 - kb_1)x + (r - kb_0). \end{aligned}$$

Comparando com os coeficientes de $p(x)$, obtemos:

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} - kb_{n-1} = a_{n-1} \\ b_{n-3} - kb_{n-2} = a_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 - kb_2 = a_2 \\ b_0 - kb_1 = a_1 \\ r - kb_0 = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + kb_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + kb_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 = a_2 + kb_2 \\ b_0 = a_1 + kb_1 \\ r = a_0 + kb_0 \end{cases}$$

Observe que a sequência acima à direita, é um processo recursivo que permite calcular os coeficientes de $q(x)$, da maior potência para a menor, sucessivamente, a partir do valor inicial conhecido $b_{n-1} = a_n$. Os demais são determinados, um após o outro.

O quociente e o resto podem ser obtidos mediante ao dispositivo abaixo. O dispositivo é formado por três linhas. Começamos colocando na primeira linha os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1$ e a_0 do dividendo $p(x)$. Na segunda linha colocamos k. Em seguida, na terceira linha o valor inicial $b_{n-1} = a_n$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ k & & & & & & \\ \hline & b_{n-1} = a_n & & & & & \end{array}$$

Agora inciamos fazendo o cálculo $b_{n-2} = a_{n-1} + kb_{n-1}$, colocando-a na terceira linha após b_{n-1}:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
k						
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + kb_{n-1}$				

Continuamos o processo até que obtemos:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
k						
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + kb_{n-1}$	$\cdots$	$b_1 = a_2 + kb_2$	$b_0 = a_1 + kb_1$	$r = a_0 + kb_0$

Deste modo calculamos os coeficientes do quociente $q(x)$, $b_{n-1}, b_{n-2}, \cdots, b_0$ e o resto r.

5.3.3 Relações de Girard

As Relações de Girard são igualdades que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial. Essas relações podem auxiliar na determinação das raízes de um polinômio.

Iniciaremos com polinômios de grau 2, depois 3 e 4 e em seguida generalizaremos para um polinômio de grau n.

Para um polinômio do segundo grau temos, $p(x) = ax^2+bx+c$ ou $p(x) = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$. Sejam r_1 e r_2 as raízes de $p(x)$. Então, pelo Teorema da Decomposição,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - r_1)(x - r_2) \\ &= x^2 - r_2x - r_1x + r_1r_2 \\ &= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de $p(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Para um polinômio do terceiro grau temos, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ou $p(x) = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$. Considere r_1, r_2 e r_3 as raízes de $p(x)$. Pelo Teorema da Decomposição,

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\
&= (x^2 - r_2x - r_1x + r_1r_2)(x - r_3) \\
&= x^3 - r_3x^2 - r_1x^2 + r_1r_3x - r_2x^2 + r_1r_3x + r_1r_2x - r_1r_2r_3 \\
&= x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3.
\end{aligned}$$

Novamente, comparando os coeficientes de $p(x)$ concluímos que

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{b}{a} \\
r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 &= \frac{c}{a} \\
r_1r_2r_3 &= -\frac{d}{a}.
\end{aligned}$$

Faremos o mesmo para um polinômio do quarto grau. Sejam $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ou $p(x) = x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}$ e r_1, r_2, r_3 e r_4 suas raízes. Novamente, pelo Teorema da Decomposição,

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) \\
&= (x^2 - r_2x - r_1x + r_1r_2)(x^2 - r_3x - r_4x + r_3r_4) \\
&= x^4 - r_3x^3 - r_4x^3 + r_3r_4x^2 - r_1x^3 + r_1r_3x^2 + r_1r_4x^2 - r_1r_3r_4x - r_2x^3 + r_2r_3x^2 \\
&+ r_2r_4x^2 - r_2r_3r_4x + r_1r_2x^2 - r_1r_2r_3x - r_1r_2r_4x + r_1r_2r_3r_4 \\
&= x^4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2 \\
&- (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)x + r_1r_2r_3r_4.
\end{aligned}$$

Comparando os coeficients de $p(x)$ obtemos

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= -\frac{b}{a} \\
r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 &= \frac{c}{a} \\
r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 &= -\frac{d}{a} \\
r_1r_2r_3r_4 &= \frac{e}{a}.
\end{aligned}$$

Assim, sucessivamente encontramos as Relações de Girard de um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ de grau n com raízes $r_1, r_2, \cdots, r_n$:

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 + \cdots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n &= \frac{a_{n-1}}{a_n} \\
r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
&\vdots \\
r_1r_2r_3 \cdots r_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}
$$

Na próxima seção apresentamos resultados que nos auxiliarão a determinar ou localizar as raízes reais de um polinômio.

5.3.4 Teoremas para determinar raízes reais

O primeiro teorema nos fornece um conjunto finito de todas as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros. Essa demonstração pode ser encontrada no livro Iezzi (2005, p. 141).

Teorema 5.7. *(Teorema das Raízes Racionais) Se um polinômio*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

com $a_n \neq 0$ *de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional* $\frac{p}{q}$*, em que* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* p *e* q *são primos entre si, então* p *é divisor de* a_0 *e* q *é divisor de* a_n*.*

Demonstração. Se $\frac{p}{q}$ é uma raiz de $p(x)$, então

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + \cdots + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0$$

multiplicando por q^n, temos

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n = 0.$$

Isolando a_np^n e depois a_0q^n,

$$
\begin{aligned}
a_np^n &= -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) \\
a_0q^n &= -p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1q^{n-1})
\end{aligned}
$$

o que significa que a_np^n é divisível por q e, como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q e a_0q^n é divisível por p e, como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p. $\square$

O teorema a seguir nos ajuda a encontrar intervalos em que se encontram as raízes reais de uma função contínua, como os polinômios são funções contínuas, o teorema sempre se aplica aos polinômios. A demonstração desse teorema é do livro Lima (1999, p. 184) e utiliza alguns conceitos de topologia, como por exemplo cisão de conjuntos, que podem ser encontrados em Lima (1999, p. 133).

Teorema 5.8. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer d entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(c) = d.$$

Demonstração. Como $f(x)$ é contínua no ponto a, dado $\epsilon = d - f(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $a \leq x \leq a + \delta \;\Rightarrow\; f(x) < f(a) + \epsilon = d$. Assim, todos os pontos x suficientemente próximos de a no intervalo $[a, b]$ são tais que $f(x) < d$. De modo análogo se verifica que todos os pontos y suficientemente próximos de b no intervalo $[a, b]$ são tais que $d < f(y)$.

Considere os conjuntos

$$A = \{x \in (a, b); f(x) < d\}$$
$$B = \{y \in (a, b); f(x) > d\}.$$

Pelo que vimos acima ambos os conjuntos são não vazios e são conjuntos abertos. Portanto, se não existir $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$, então $A \cup B = (a, b)$ e $A \cap B = \emptyset$, logo essa é uma cisão não trivial do intervalo (a, b), o que é uma contradição. □

Teorema 5.9. *(Teorema de Bolzano) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.*

Demonstração. Para que $f(a) \cdot f(b) < 0$ precisamos que um dos números seja maior do que zero e o outro seja menor do que zero, sendo assim, temos duas opções:

(i) suponha que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário temos que, existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

(ii) agora suponha que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário temos que, existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

Em ambos os casos existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$. □

A partir do Teorema de Bolzano temos o método da bisseção para aproximar raízes reais de um polinômio, ele pode ser encontrado em Ruggiero e Lopes (1996, p. 41).

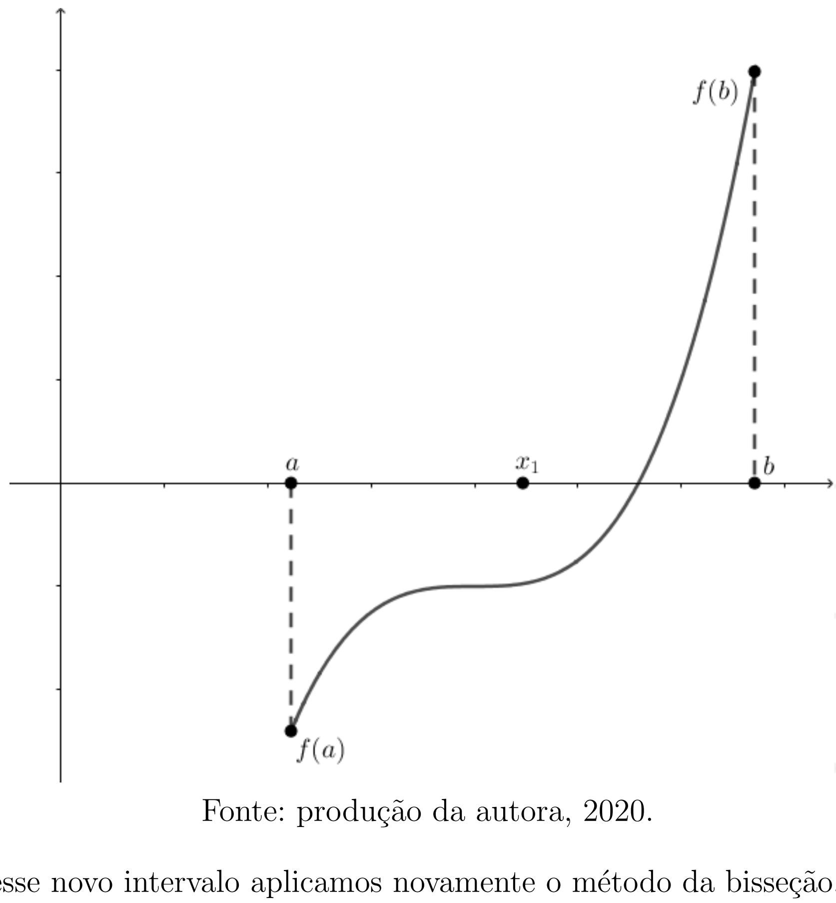
Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ com apenas um raiz da equação $f(x) = 0$ nesse intervalo. O método da bisseção consiste em dividir o intervalo $[a, b]$ ao meio de forma iterativa.

Para verificar se a raiz esta contida na primeira ou na segunda metade do intervalo inicial, é utilizado o Teorema de Bolzano e em seguida é repetido o processo no novo intervalo. Ou seja,

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

se $f(a)f(x_1) < 0$, então a raiz está no intervalo $[a, x_1]$ e $x_1 = b$, caso contrário a raiz está no intervalo $[x_1, b]$ e $x_1 = a$. Essa iteração está ilustrada na Figura 1.

Figura 1 – Primeira iteração da bisseção



Fonte: produção da autora, 2020.

Com esse novo intervalo aplicamos novamente o método da bisseção. Como a cada iteração é atualizado o ponto a ou b, tem-se que a função de iteração desse método é dada por:

$$x_k = \frac{a+b}{2}, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Para saber quando parar com o processo é preciso saber qual o erro desejado. Seja ϵ o erro, o processo é finalizado quando se obtém um intervalo cujo tamanho é menor ou igual a ϵ, então qualquer ponto desse intervalo pode ser tomado como estimativa para a raiz.

Com a teoria apresentada e os resultados demonstrados podemos desenvolver no próximo capítulo o caderno pedagógico, que é o objetivo desse trabalho.

6 CADERNO PEDAGÓGICO

Apresentaremos neste capítulo um caderno pedagógico que tem por objetivo auxiliar o professor a trabalhar com polinômios no contexto histórico, algébrico e analítico no Ensino Médio e na Formação de Professores.

O caderno está dividido da seguinte forma: primeiro trazemos um breve contexto histórico sobre os polinômios, depois apresentamos as definições e propriedades de polinômios com coeficientes reais, como são apresentadas no Ensino Médio.

Por fim trazemos uma lista de exercícios composta por algumas atividades que foram apresentadas durante o caderno e outras questões gerais que envolvem mais de um tópico do conteúdo ou que tem diferentes estratégias de resolução, sendo a maioria selecionadas de vestibulares ou provas nacionais. Na sequência da lista temos uma seção com exercícios resolvidos e indicações para os professores do que esperar para a solução.

6.1 UM ESTUDO SOBRE POLINÔMIOS

História

Iniciaremos esta seção alertando o leitor que a notação matemática antiga é muito diferente da notação moderna, os símbolos para os sinais de mais e menos foram propostos em 1489, o sinal de multiplicação em 1631, e símbolo para a raiz quadrada em 1525. Sendo assim, os problemas antigos eram descritivos e suas resoluções também. (GARBI, 2009, p. 100).

Os polinômios aparecem naturalmente na história da matemática começando pelos de primeiro grau, e dos escribas egípcios aos servidores públicos chineses, todos desenvolveram técnicas para resolver tais problemas. (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 125).

O papiro de Rhind (1650 a.C.) é um documento muito antigo, no qual um escriba egípcio resolve vários problemas da época, esse papiro mostra um método bem diferente para resolver as equações de primeiro grau, o chamado método da falsa posição: (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 125):

> "Uma quantidade; seu quarto é somado a ela. Ela se torna 15."

Com a simbologia atual, isso seria,

$$x + \frac{x}{4} = 15.$$

Solução: Suponha que a quantidade seja 4, $4 + 1 = 5$, mas queríamos chegar a 15, se multiplicarmos 5 por 3 chegamos a 15, logo basta multiplicar a suposição por 3, e a quantidade é 12.

Al-Khwarizmi (780-850) e Bhaskara (1114-1185) chegaram a descrever a resolução das equações de segundo grau, mas eles não chegaram a uma fórmula com a notação que conhecemos hoje, quem introduziu os símbolos para os coeficientes das equações foi Francois Viète (1540-1603), que fez um grande progresso para chegar na simbologia atual.

O problema seguinte foi encontrado no livro de Al-Khwarizmi.

> Um quadrado e dez raízes dele são iguais a trinta e nove dirhems. Quer dizer, quanto deve ser o quadrado, o qual, quando aumentado por dez de suas próprias raízes, é igual a trinta e nove? (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 131).

Equacionando:

$$x^2 + 10x = 39.$$

Solução: Você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo, o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove.

Numericamente, isso significa:

$$\text{divide o número de raízes por dois: } \frac{10}{2} = 5;$$

$$\text{multiplica por si mesmo: } 5 \times 5 = 25;$$

$$\text{some isso a trinta e nove: } 25 + 39 = 64;$$

$$\text{tome a raiz disso: } \sqrt{64} = 8;$$

$$\text{subtraia disso a metade do número de raízes: } 8 - 5 = 3.$$

E isso é exatamente a fórmula usada atualmente,

$$x = \frac{-10 + \sqrt{10^2 - 4(-39)}}{2} = -\frac{10}{2} + \frac{\sqrt{10^2 + 4 \times 39}}{2} = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - 5.$$

Cardano (1501-1576) e Tartaglia (1499-1557) tiveram uma briga pela solução das equações de grau 3. Todo polinômio de grau 3 pode ser transformado em um polinômio do tipo (GARBI, 2009, p. 38):

$$x^3 + px + q = 0$$

e sua solução será (essa solução é conhecida como fórmula de Cardano):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

As equações do quarto grau são mais complicadas, abaixo segue um passo a passo para faze-las.

1. Toma-se a equação geral e faz-se uma transformação do tipo $x = y + m$ de modo a cair-se em uma equação do 4º grau em y sem o termo do 3º grau;
2. Reagrupam-se seus termos de modo a fazer com que ambos os lados da igualdade sejam quadrados perfeitos. Cai-se em uma equação do 3º grau em α. Se ela for completa, faz-se a transformação $\alpha = \alpha' + t$ de modo a obter-se uma equação do 3º grau em α', sem o termo do 2º grau;
3. Resolve-se a equação em α' pelo método de Tartaglia;
4. Soma-se t a α' e obtem-se α. Obtido α calcula-se β;
5. Com α e β, extraem-se as raízes quadradas dos dois lados da igualdade e obtém-se os 4 valores possíveis de y. Soma-se m a y e obtém-se as 4 raízes da equação geral. (GARBI, 2009, p. 44).

Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou em 1824 que nem todo polinômio de grau 5 ou superior possui solução por radicais. Porém, muitas equações de grau 5 tem solução por radicais, foi Évariste Galois (1811-1832) que mostrou quais polinômios de grau 5 tem solução por radicais e quais não tem.

Exercícios de História [1]

1. Considere o polinômio $x^2 - sx + p$, em que s é a soma das raízes e p é o produto das raízes desse polinômio. Os babilônios encontravam as raízes desse polinômio seguindo a instrução: "eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e

[1] Esses exercícios estão resolvidos na última seção do caderno.

extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número".

a) Resolva a equação: $x^2 - 9x + 20 = 0$ seguindo os passos da instrução.

b) Escreva simbolicamente a instrução dada.

c) Verifique que a equação $x^2 - sx + p = 0$ é equivalente a resolver o problema de determinar os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro s e a área p.

2. Dada a fórmula de Cardano para solução das cúbicas, resolva a seguinte equação, $x^3 - 15x - 4 = 0$. Esse polinômio tem alguma raiz real? Usando a fórmula de Cardano é possível encontrar, se houver, essa raiz?
3. Traduza para a notação atual e resolva pelo método da falsa posição o seguinte problema: uma quantidade, seu terço é somado a ela. Ela se torna 24.

Conceitos

A teoria exposta neste caderno pedagógico é baseada em Dante (2010), Paiva (2013), Souza (2010) e Iezzi (2005).

Definição 6.1. *Um **polinômio**[2] na variável **x** é uma expressão dada por:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ *são números reais denominados coeficientes e* $a_n \neq 0$*;*
- a_0 *é o coeficiente independente do polinômio e* a_n *é o coeficiente dominante;*
- ***n*** *é um número natural;*
- *o maior expoente de **x**, com coeficiente não nulo, é o grau do polinômio.*

Para indicar que $p(x)$ representa a expressão $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ escrevemos

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

[2] Estávamos usando a notação com a ordem dos expoentes de 0 até n e aqui estamos fazendo ao contrário, de n até 0, pois essa é a notação mais usual no Ensino Médio.

Exemplos:

(1) $p(x) = 10x^4 + 5x^2 - 87$ é um polinômio com grau 4, coeficiente independente -87 e coeficiente dominante 10.

(2) $q(x) = \sqrt{x} + 5x^2 - 8x$ não é um polinômio, pois $\sqrt{x} + 5x^2 - 8x = x^{1/2} + 5x^2 - 8x$ e o expoente do termo $x^{1/2}$ não é um número natural.

(3) $m(x) = \frac{1}{x^2} - 6x^3 + 12x + 3$ não é um polinômio, pois $\frac{1}{x^2} - 6x^3 + 12x + 3 = x^{-2} - 6x^3 + 12x + 3$ e o expoente do termo x^{-2} não é um número natural.

(4) $r(x) = \pi - \sqrt{2}x^3 - 17x^{100} + \dfrac{1}{2}x^{13}$ é um polinômio com grau 100, coeficiente independente π e coeficiente dominante -17. Podemos reescrever esse polinômio como $-17x^{100} + \dfrac{1}{2}x^{13} - \sqrt{2}x^3 + \pi$.

Exercício 1: Classifique cada expressão em polinômio ou não. Em caso negativo, justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine o grau do polinômio, o coeficiente dominante e o coeficiente independente.

(a) $q(x) = x^5 - x^3 + 5x^{-1} + 2$

(b) $s(x) = \dfrac{1}{-3x^2 + x}$

(c) $m(x) = 5 - \sqrt{17}x + 8432x^2 + 23x^7$

(d) $t(x) = 0x^{10} - \frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x$

Exercício 2: Seja $m \in \mathbb{R}$. Qual o grau do polinômio $p(x)$ dado por,

$$p(x) = (m^2 - 1)x^4 + (m + 1)x^3 + x^2 + 3.$$

Definição 6.2. *(a) Dizemos que um polinômio é **nulo** (ou identicamente nulo) quando todos os coeficientes do polinômio são iguais a zero. Assim,*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é nulo se, $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. Não se define grau do polinômio nulo.

*(b) Dizemos que um polinômio é **constante** se todos os coeficientes são nulos exceto o primeiro. Assim,*

$$p(x) = a + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

e é indicado por $p(x) = a$. O grau do polinômio constante é 0.

Exercício 3: Considere o polinômio $p(x) = (a^2 - 9)x^4 + (2b + 1)x^2 + a + 3$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a e b tais que:

(a) $p(x)$ seja um polinômio constante;

(b) $p(x)$ seja um polinômio nulo.

Definição 6.3. *Dois polinômios $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ são ditos **iguais** (ou idênticos) se $a_i = b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Exemplo:

(5) Para quais valores de a, b, c e d os polinômios $p(x) = (a + 8)x^3 + (b - 3)x^2 + (c - 5)x + (d + 10)$ e $q(x) = 12x^2 + 4x - 9$ são iguais?

Pela definição de igualdade de polinômios obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 8 = 0 \\ b - 3 = 12 \\ c - 5 = 4 \\ d + 10 = -9 \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} a = -8 \\ b = 15 \\ c = 9 \\ d = -19 \end{cases}$$

Exercício 4: Determine os valores a, b e c para que sejam iguais os polinômios $p(x) = cx^3 + 3x + 2$ e $q(x) = (a + b)x^2 + (a + 3)x + (2 - b)$.

Operações com Polinômios

Definição 6.4. *A **adição** (soma) de dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é o polinômio obtido ao se adicionarem os termos de $p(x)$ com os termos de $q(x)$ que têm, respectivamente, o mesmo expoente na variável (caso não conste um termo com determinado expoente na variável, considera-se que seu coeficiente é zero).*

Observação: Valem para a adição as propriedades comutativa, associativa, elemento neutro (que é o polinômio nulo $p(x) = 0$) e o elemento simétrico de $p(x)$ (obtido com a troca dos sinais de todos os termos de $p(x)$).

Exemplos:

(6) Sejam $p(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 10$ e $q(x) = 5x^4 + 20x^2 - 8x - 5$. Então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 10) + (5x^4 + 20x^2 - 8x - 5) \\ &= (1+5)x^4 + (5+0)x^3 + (-9+20)x^2 + (-4-8)x + (10-5) \\ &= 6x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 12x + 5. \end{aligned}$$

(7) O simétrico (oposto) do polinômio $p(x) = 4x^3 - 3x - 1$ é $-p(x) = -4x^3 + 3x + 1$.

(8) Sejam $p(x) = x^7 - \frac{1}{5}x^3 - 1$ e $q(x) = -\sqrt{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 + 13x^2 - x + 1$. Então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^7 - \frac{1}{5}x^3 - 1) + (-\sqrt{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 + 13x^2 - x + 1) \\ &= (1+0)x^7 + (0 - \sqrt{5})x^4 + \left(-\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\right)x^3 + (13+0)x^2 \\ &+ (-1+0)x + (-1+1) \\ &= x^7 - \sqrt{5}x^4 - x^3 + 13x. \end{aligned}$$

Definição 6.5. *A* ***subtração*** *(diferença) entre dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, nessa ordem, é definida como a adição de $p(x)$ com o oposto de $q(x)$, isto é,*

$$p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)].$$

Exemplo:

(9) Sejam $p(x) = 10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x$ e $q(x) = 7x^4 - 14x^2 + 3x - 15$. Então,

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x) - (7x^4 - 14x^2 + 3x - 15) \\ &= 10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x - 7x^4 + 14x^2 - 3x + 15 \\ &= (10-7)x^4 + (8-0)x^3 + (-7+14)x^2 + (-5-3)x + (0+15) \\ &= 3x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 8x + 15, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q(x) - p(x) &= (7x^4 - 14x^2 + 3x - 15) - (10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x) \\ &= 7x^4 - 14x^2 + 3x - 15 - 10x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 5x \\ &= (7-10)x^4 + (0-8)x^3 + (-14+7)x^2 + (3+5)x + (-15+0) \\ &= -3x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 8x - 15. \end{aligned}$$

Note que $p(x) - q(x) = -[q(x) - p(x)]$.

(10) Calcule a diferença de $p(x) = 4x^4+4x^3-8x^2-7x+9$ com $q(x) = 4x^4-7x^3+5x^2+2x-1$.

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (4x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 7x + 9) - (4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2x - 1) \\ &= (4-4)x^4 + (4+7)x^3 + (-8-5)x^2 + (-7-2)x + (9+1) \\ &= 11x^3 - 13x^2 - 9x + 10. \end{aligned}$$

Definição 6.6. *A* ***multiplicação*** *(produto) dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é o polinômio que obtemos multiplicando cada termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo e adicionando os produtos obtidos.*

Observação: Valem para a multiplicação as propriedades comutativa, associativa, elemento neutro (que é o polinômio $p(x) = 1$), além das distributividades da adição em relação a multiplicação.

Exemplos:

(11) Sejam $p(x) = 2x^2 - 1$ e $q(x) = -x^2 - 6$. Então,

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= \big(2x^2 - 1\big) \cdot \big(-x^2 - 6\big) \\ &= (2x^2) \cdot (-x^2) + (2x^2) \cdot (-6) + (-1) \cdot (-x^2) + (-1) \cdot (-6) \\ &= -2x^4 - 12x^2 + x^2 + 6 \\ &= -2x^4 - 11x^2 + 6. \end{aligned}$$

(12) Sejam $p(x) = x - 1$ e $q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Então,

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (x-1) \cdot \big(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\big) \\ &= (x) \cdot (x^5) + (x) \cdot (x^4) + (x) \cdot (x^3) + (x) \cdot (x^2) + (x) \cdot (x) \\ &+ (x) \cdot (1) + (-1) \cdot (x^5) + (-1) \cdot (x^4) + (-1) \cdot (x^3) \\ &+ (-1) \cdot (x^2) + (-1) \cdot (x) + (-1) \cdot (1) \\ &= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ &= x^6 - 1. \end{aligned}$$

(13) Sabendo que os polinômios $m(x), n(x)$ e $p(x)$ têm respectivamente graus 3, 5 e 7, determine o grau do polinômio $q(x)$, sendo:

(a) $q(x) = p(x) + n(x)$

O grau de $p(x)$ é 7 e o de $n(x)$ é 5, então o grau de $q(x)$ é 7.

(b) $q(x) = m(x)n(x)$

O grau de $m(x)$ é 3 e o de $n(x)$ é 5, então o grau de $q(x)$ é $5 + 3 = 8$.

(c) $q(x) = p(x)m(x) - n(x)$.

O grau de $p(x)$ é 7 e o de $m(x)$ é 3, então o grau de $p(x)m(x)$ é 10, e o grau de $n(x)$ é 5, então o grau de $q(x)$ é 10.

Exercício 5: Dados os polinômios $q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1$ e $t(x) = x^3 + 2x + 4$, determine o polinômio $p(x)$ tal que $p(x) + 3q(x) = 2t(x)$.

Exercício 6: Obtenha os valores das constantes a e b na identidade:

$$(x^3 + x + 1)(ax + b) + 4x^2 - 3x - 1 = 2x^4 + x^3 + 6x^2.$$

Observação: O grau do polinômio produto é igual a soma dos graus dos polinômios fatores. O grau do polinômio soma é menor ou igual ao maior dos graus, como ilustrado no Exemplo 10.

Divisão de Polinômios

Algoritmo da Divisão: Efetuar a divisão de um polinômio $p(x)$ pelo polinômio $m(x)$ não nulo significa determinar um polinômio $q(x)$ e um polinômio $r(x)$, tais que:

$$p(x) = m(x)q(x) + r(x)$$

com grau $r(x) <$ grau $m(x)$, ou $r(x) = 0$.

Assim, dizemos que:

$p(x)$ é o dividendo; $\quad m(x)$ é o divisor;

$q(x)$ é o quociente; $\quad r(x)$ é o resto.

Quando $r(x) = 0$, dizemos que a divisão é exata, ou que $p(x)$ é divisível por $m(x)$.

Além de ser possível provar a existência do quociente e resto, demonstra-se que existem um único quociente $q(x)$ e um único resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Essa demonstração pode ser encontrada em Janesch (2008, p. 32) e no Teorema 5.2 desse trabalho.

Exemplos:

(14) A divisão do polinômio $p(x) = 6x^2 - 8x + 16$ pelo polinômio $m(x) = -3x + 1$ resulta no quociente $q(x) = -2x + 2$ e resto $r(x) = 14$, ou seja,

$$6x^2 - 8x + 16 = (-3x + 1) \cdot (-2x + 2) + 14.$$

(15) A divisão do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 22x + 40$ pelo polinômio $m(x) = x - 4$ resulta no quociente $q(x) = x^2 + 3x - 10$ e no resto $r(x) = 0$, ou seja,

$$x^3 - x^2 - 22x + 40 = (x - 4) \cdot (x^2 + 3x - 10).$$

Isto significa que $p(x)$ é divisível por $m(x)$.

(16) A divisão do polinômio $p(x) = x^7+9x^4-8x^3-12x+6$ pelo polinômio $m(x) = x^5-5x^3+7x^2-5x+8$ resulta no quociente $q(x) = x^2+5$ e resto $r(x) = 2x^4+22x^3-43x^2+13x-34$, logo

$$x^7+9x^4-8x^3-12x+6 = (x^5-5x^3+7x^2-5x+8)\cdot(x^2+5)+(2x^4+22x^3-43x^2+13x-34)$$

Exercício 7: Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que o quociente e resto da divisão de $p(x) = ax^4 - 3x^3 - 20x^2 - x + 13$ por $m(x) = x^2 - 3x$ sejam respectivamente $q(x) = 5x^2 + 12x + 16$ e $r(x) = 47x + 13$.

Veremos a seguir métodos para encontrar o quociente e o resto na divisão de polinômios.

Método de Descartes ou Coeficientes a Determinar: Utilizado para encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Esse método se baseia em dois fatos:

1. grau $q(x)$ =grau $p(x)-$grau $m(x)$
2. grau $r(x)$ <grau $m(x)$ ou $r(x) = 0$.

O Método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

P1: calculam-se grau $q(x)$ e grau $r(x)$;

P2: constroem-se os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ deixando seus coeficientes como incógnitas;

P3: determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$.

Observação 6.1. *O método de Descartes é pouco utilizado, o mais usual é o Método das Chaves, por ser parecido com a divisão de números inteiros, e será apresentado na sequência.*

Exemplo:

(17) Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $m(x) = x - 2$, pelo Método de Descartes:

P1: grau $q(x) =$ grau $p(x) -$ grau $m(x) = 3 - 1 = 2$ e grau $r(x) <$ grau $m(x) = 1$;

P2: $q(x) = ax^2 + bx + c$ e $r(x) = d$;

P3:

$$\begin{aligned}
p(x) &= m(x)q(x) + r(x)\\
5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= (x-2)(ax^2 + bx + c) + d\\
5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c + d\\
5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x + (-2c+d)
\end{aligned}$$

Logo, temos o sistema,

$$\begin{cases}
a = 5 & & & \\
b - 2a = 1 & \Rightarrow \quad b = 2a + 1 & \overset{a=5}{\Rightarrow} & b = 11\\
c - 2b = -10 & \Rightarrow \quad c = 2b - 10 & \overset{b=11}{\Rightarrow} & c = 12\\
-2c + d = -24 & \Rightarrow \quad d = 2c - 24 & \overset{c=12}{\Rightarrow} & d = 0
\end{cases}$$

Portanto, $q(x) = 5x^2 + 11x + 12$ e $r(x) = 0$.

Método das Chaves: Utilizado para encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Podemos aplicar a mesma ideia da divisão de números inteiros utilizando chaves e seguindo os passos:

P1: escrever os polinômios (divisor e dividendo) em ordem decrescente dos seus expoentes e completá-los quando necessário, com coeficientes zero;

P2: dividir o termo de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor, o resultado será um termo do quociente;

P3: multiplicar o termo obtido no passo 2 pelo divisor e subtrair esse produto do dividendo;

P4: se a diferença for o polinômio nulo ou o seu grau for menor do que o grau do divisor, a diferença será o resto da divisão e a divisão termina;

P5: caso contrário, retomasse o passo 2, considerando a diferença como um novo dividendo.

Exemplo:

Os seguintes exemplos consistem em armar e efetuar, conforme o modelo

$$\begin{array}{c|c} p(x) & m(x) \\ \cline{2-2} \vdots & q(x) \\ \cline{1-1} r(x) & \end{array}$$

(18) A divisão utilizando o Método das Chaves dos polinômios:

a) $p(x) = x^3 + 3x - 4$ e $m(x) = x - 1$

Passo 1:

$$\begin{array}{cccc|c} x^3 & +0x^2 & +3x & -4 & x-1 \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Passo 2:

$$\begin{array}{cccc|c} x^3 & +0x^2 & +3x & -4 & x-1 \\ \cline{5-5} & & & & x^2 \end{array}$$

Passo 3:

$$\begin{array}{cccc|c} x^3 & +0x^2 & +3x & -4 & x-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & +x^2 & & & x^2 \\ \cline{1-4} & x^2 & +3x & -4 & \end{array}$$

Passo 5: Como o grau de $x^2 + 3x - 4$ é maior do que o grau de $x - 1$ devemos continuar o processo. Retornemos para o passo 2.

Passo 2:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +0x^2 & +3x & -4 & \; x-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & +x^2 & & & x^2+x \\ \cline{1-4} & x^2 & +3x & -4 & \end{array}$$

Passo 3:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +0x^2 & +3x & -4 & \; x-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & +x^2 & & & x^2+x \\ \cline{1-4} & x^2 & +3x & -4 & \\ & -x^2 & +x & & \\ \cline{2-4} & & 4x & -4 & \end{array}$$

Passo 5: Como o grau de $4x - 4$ é igual ao grau de $x - 1$ devemos continuar, dividindo estes polinômios. Retornemos para o passo 2.

Passo 2:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +0x^2 & +3x & -4 & \; x-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & +x^2 & & & x^2+x+4 \\ \cline{1-4} & x^2 & +3x & -4 & \\ & -x^2 & +x & & \\ \cline{2-4} & & 4x & -4 & \end{array}$$

Passo 3:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +0x^2 & +3x & -4 & \; x-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & +x^2 & & & x^2+x+4 \\ \cline{1-4} & x^2 & +3x & -4 & \\ & -x^2 & +x & & \\ \cline{2-4} & & 4x & -4 & \\ & & -4x & +4 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Passo 4: Como 0 é o polinômio nulo a divisão terminou.

Temos que o quociente é $q(x) = x^2 + x + 4$ e o resto é $r(x) = 0$.

b) $p(x) = 3x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 6x^2 + 7x - 12$ e $m(x) = x^3 - 4x^2 + 6$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -5x^4+13x^3 & -6x^2 & +7x & -12 & & x^3-4x^2+6 \\ \cline{7-7}
-3x^5+12x^4 & & -18x^2 & & & & 3x^2+7x+41 \\ \cline{1-3}
 & 7x^4+13x^3 & -24x^2 & +7x & & & \\
 & -7x^4+28x^3 & & -42x & & & \\ \cline{2-4}
 & 41x^3 & -24x^2 & -35x & -12 & & \\
 & -41x^3+164x^2 & & & -246 & & \\ \cline{2-5}
 & & 140x^2 & -35x & -258 & &
\end{array}
$$

Resultam em: $q(x) = 3x^2 + 7x + 41$ e $r(x) = 140x^2 - 35x - 258$.

c) $p(x) = x^2 + 5x - 6$ e $m(x) = x - 2$

$$
\begin{array}{rr|l}
x^2+5x & -6 & x-2 \\ \cline{3-3}
-x^2+2x & & x+7 \\ \cline{1-1}
7x & -6 & \\
-7x & +14 & \\ \cline{1-2}
 & 8 &
\end{array}
$$

Resultam em: $q(x) = x + 7$ e $r(x) = 8$.

d) $p(x) = 5x^3 - 4x + 8$ e $m(x) = 3x - 2$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & & -4x & +8 & 3x-2 \\ \cline{5-5}
-5x^3+\frac{10}{3}x^2 & & & & \frac{5}{3}x^2+\frac{10}{9}x-\frac{16}{27} \\ \cline{1-1}
 & \frac{10}{3}x^2 & -4x & & \\
 & -\frac{10}{3}x^2 & +\frac{20}{9}x & & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{16}{9}x & +8 & \\
 & & \frac{16}{9}x & -\frac{32}{27} & \\ \cline{3-4}
 & & & \frac{184}{27} &
\end{array}
$$

Resultam em: $q(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{10}{9}x - \frac{16}{27}$ e $r(x) = \frac{184}{27}$.

(19) Verifique se o polinômio $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ é divisível por $x - 1$ e também por $2x + 3$.

Temos que:

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^3+5x^2 & -x-6 & & x-1 \\ \cline{4-4} -2x^3+2x^2 & & & 2x^2+7x+6 \\ \cline{1-1} 7x^2 & -x & & \\ -7x^2 & +7x & & \\ \cline{1-2} & 6x-6 & & \\ & -6x+6 & & \\ \cline{2-2} & 0 & & \end{array}$$

e, ainda

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^3+5x^2 & -x-6 & & 2x+3 \\ \cline{4-4} -2x^3-3x^2 & & & x^2+x-2 \\ \cline{1-1} 2x^2 & -x & & \\ -2x^2 & -3x & & \\ \cline{1-2} & -4x-6 & & \\ & 4x+6 & & \\ \cline{2-2} & 0 & & \end{array}$$

Como o resto foi nulo em ambas as divisões, o polinômio $2x^3+5x^2-x-6$ é divisível por $x-1$ e por $2x+3$.

Exercício 8: Determine o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 3x^5+4x^4-8x^2-15$ por $g(x) = 5x^2-3x+4$.

Definição 6.7. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio. O **valor numérico do polinômio** $p(x)$ **em** α é igual ao número real obtido quando substituímos x por α e efetuamos as operações indicadas. Indica-se por $p(\alpha)$. Assim, de modo geral, o valor numérico de $p(x)$ em α é:*

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0.$$

Exemplos:

(20) O valor numérico do polinômio $p(x) = x^3-9x^2+3x+5$ em $x=-5$ e $x=1$ é $p(-5) = (-5)^3-9(-5)^2+3(-5)+5 = -360$ e $p(1) = (1)^3-9(1)^2+3(1)+5 = 0$, respectivamente.

(21) O valor numérico do polinômio $q(x) = -\frac{5}{3}$ em $x = 0, x = 2$ e $x = \pi$ é $-\frac{5}{3}$.

(22) Os restos da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-1$ e por $x+2$ são respectivamente, 1 e -23. Qual o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-1)(x+2)$?

Temos que $p(x) = (x-1)(x+2)q(x) + r(x)$, como $(x-1)(x+2)$ tem grau 2, $r(x) = ax+b$, podemos escrever $p(x) = (x-1)(x+2)q(x) + ax + b$. Ainda, $p(1) = 1$ e $p(-2) = -23$. Então,

$$p(1) = (1-1)(1+2)q(1) + a + b = 1$$
$$p(-2) = (-2-1)(-2+2)q(-2) - 2a + b.$$

Ou seja,

$$a + b = 1$$
$$-2a + b = -23$$

o que nos da como solução $a = 8$ e $b = -7$, então o resto é $8x - 7$.

Observação: Considere um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e um número real α. Então:

- Se $\alpha = 1$, o valor numérico de $p(x)$ em α é a soma de seus coeficientes:

$$p(1) = a_n(1)^n + a_{n-1}(1)^{n-1} + \cdots + a_1(1) + a_0 = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0.$$

- Se $\alpha = 0$, o valor númerico de $p(x)$ em α é o termo independente:

$$p(0) = a_n(0)^n + a_{n-1}(0)^{n-1} + ... + a_1(0) + a_0 = a_0.$$

Definição 6.8. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos que um número real α é **raiz** do polinômio $p(x)$ se,*

$$p(\alpha) = 0,$$

ou seja, o valor numérico de $p(x)$ em α é zero.

Exemplos:

(23) 4 e 3 são raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 12$, pois $p(4) = (4)^2 - 7(4) + 12 = 0$ e $p(3) = (3)^2 - 7(3) + 12 = 0$.

(24) Dado o polinômio $q(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, temos:

- $q(1) = 1 - 3 + 2 = 0,$ logo 1 é raiz de $q(x)$.
- $q(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 2 = -2$, logo 2 não é raiz de $q(x)$.

Exercício 9: O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admite as raízes 6 e 1. Calcule os coeficientes a e b.

Exercício 10: Quais dos itens a seguir correspondem às raízes do polinômio

$$p(x) = x^6 + 3x^5 - 11x^4 - 15x^3 + 46x^2 - 24x?$$

(a) -3 (b) 5 (c) 0 (d) 6 (e) 4 (f) 1 (g) -4 (h) 2

(Sugestão: esse exercício pode ser resolvido em grupos, cada grupo deve testar algumas das possibilidades para assim o processo ser mais rápido.)

Exercício 11: Use a fórmula de Bháskara para determinar as raízes dos polinômios quadráticos:

(a) $p(x) = 3x^2 - 15x + 18$

(b) $k(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$

(c) $r(x) = x^2 - 2x + 2$.

Exercício 12: Determine o polinômio $p(x)$ do 2º grau tal que $p(0) = 2, p(1) = 3$ e $p(2) = 8$. Quantos polinômios existem satisfazendo tais igualdades.

O próximo resultado trata sobre a divisão de polinômios em que o divisor é um polinômio de grau um, $x - k$, então, o resto será o valor do polinômio dividendo calculado em k.

Teorema do Resto de D'Alembert: Considere um polinômio $p(x)$ não constante. Então, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - k$, $k \in \mathbb{R}$, é $p(k)$.

Demonstração. Se o divisor é de primeiro grau, então o resto deverá ser um polinômio de grau zero, ou seja, uma constante real. Sendo r essa constante real, pelo algoritmo da divisão, temos que,

$$p(x) = (x - k)q(x) + r.$$

Logo, fazendo $x = k$,

$$p(k) = (k - k)q(x) + r = r.$$

$\square$

Exemplo:

(25) Determine o resto da divisão de $p(x) = x^4 + 5x^3 - 7x + 13$ por $q(x) = x + 4$.

Utilizando o método das chaves, temos que

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +5x^3 & & -7x & +13 & x+4 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -4x^3 & & & & x^3 + x^2 - 4x + 9 \\ \cline{1-2}
 & x^3 & & & & \\
 & -x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -4x^2 & -7x & & \\
 & & 4x^2 & +16x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 9x & +13 & \\
 & & & -9x & -36 & \\ \cline{4-5}
 & & & & -23 &
\end{array}$$

logo, o resto é $r(x) = -23$. Por outro lado, pelo Teorema de D'Alembert, temos que o resto da divisão é obtido diretamente pela seguinte conta:

$$p(-4) = (-4)^4 + 5(-4)^3 - 7(-4) + 13 = -23.$$

O resultado a seguir é um dispositivo muito prático, rápido e simples que permite efetuar divisão de polinômios por um binômio. Podemos encontrar essa demonstração no livro (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 118) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Algoritmo de Briot-Ruffini: Utilizado para determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ por um binômio do tipo $m(x) = x - k$. O algoritmo segue conforme os passos[3]

P1: na primeira linha colocamos os coeficientes de $p(x)$, do maior grau para o menor, completando com zero os termos faltantes, e na segunda linha à esquerda colocamos o valor de k;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

P2: o primeiro número da terceira linha é o coeficiente do termo dominante de $p(x)$;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

P3: o segundo número da segunda linha é obtido multiplicando-se o primeiro número da terceira linha por k;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & & & & \\ \hline & \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & & & & & \end{array}$$

P4: o segundo número da terceira linha é obtido somando-se os números que estão imediatamente acima dele na primeira e segunda linha;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & & & & \\ \hline & b_{n-1} & \underbrace{kb_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}} & & & & \end{array}$$

[3] Acompanhe o passo a passo no Exemplo 26.

P5: continua-se repetindo o processo: os números da segunda linha são obtidos multiplicando-se os número da terceira linha situado na coluna anterior por k e os números da terceira linha são obtidos somando-se os números que estão imediatamente acima dele na primeira e segunda linha.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & kb_{n-2} & \cdots & & \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \underbrace{kb_{n-2} + a_{n-2}}_{b_{n-3}} & \cdots & & \end{array}$$

P6: termina quando a terceira linha estiver completa.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & kb_{n-2} & \cdots & & \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r \end{array}$$

O quociente será $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0$ e o resto $r(x) = r$.

Veja no exemplo a seguir como proceder com o algoritmo.

Exemplo:

(26) Determine, usando o Algoritmo de Briot-Ruffini, a divisão de $p(x) = x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 2x - 6$ por $q(x) = x - 2$. Temos que,

Passo 1

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Passo 2

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Passo 3

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Passo 4

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & & & \\ \hline & 1 & 7 & & & \end{array}$$

Passo 5

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & & \\ \hline & 1 & 7 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & & \\ \hline & 1 & 7 & 29 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & \\ \hline & 1 & 7 & 29 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \end{array}$$

Passo 6

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & 112 \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & 112 \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \boxed{106} \end{array}$$

Logo, $q(x) = x^3 + 7x^2 + 29x + 56$ e $r(x) = 106$.

(27) Determine, usando o Algoritmo de Briot-Ruffini, a divisão de $p(x) = x^3 - 5x + 4$ por $q(x) = x - 1$. Temos que,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & -4 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -5 & 4 \\
1 & & 1 & 1 & -4 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -5 & 4 \\
1 & & 1 & 1 & -4 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Logo, $q(x) = x - 2$ e $r(x) = 0$.

A seguir serão apresentadas as Relações de Girard, para polinômios de segundo e terceiro grau, que trazem condições que relacionam as raízes e os coeficientes dos polinômios. Essa demonstração pode ser encontrada no livro Iezzi (2005, p. 115) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Relações de Girard: Para as equações de segundo grau, seja $p(x) = ax^2 + bx + c$, se r_1 e r_2 são as raízes, temos as relações,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$
$$r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Para as equações de terceiro grau, seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com raízes r_1, r_2 e r_3, temos as relações,

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$$
$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a}$$
$$r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a}.$$

Exemplo:

(28) Se a, b e c são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Pelas relações de Girard,

$$a + b + c = 5$$
$$ab + ac + bc = -4$$
$$abc = -20.$$

Temos que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ac + bc}{abc}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{-4}{-20}=\frac{1}{5}.$$

Note que podemos resolver esse exemplo usando a divisão de polinômios. Analisando, sabemos que 2 é uma raiz de $p(x)$, usando Briot-Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & -4 & 20 \\ 2 & & 2 & -6 & -20 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

obtemos $q(x)=x^2-3x-10$, assim $p(x)=(x-2)q(x)$. Agora resolvendo $q(x)=0$, usando a fórmula de Bháskara, temos

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm 7}{2}.$$

Então, $x=5$ e $x=-2$ também são raízes, e portanto,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{-2}=\frac{1}{5}.$$

O próximo resultado é o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) que garante a existência de raízes complexas de qualquer polinômio não constante com coeficientes complexos. Note que o mesmo não vale para raízes reais de polinômios com coeficientes reais, por exemplo, $p(x)=x^2+4$ tem coeficentes reais, mas não possui raízes reais. Essa demonstração pode ser encontrada em duas versões no Capítulo 5 desse trabalho ou no livro Hefez e Villela (2012, p. 192). Também veremos o Teorema da Decomposição, que é uma consequência imediata do TFA e do Algoritmo da Divisão. Com este teorema podemos afirmar que qualquer polinômio com grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes complexas.

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio de coeficientes complexos e de grau n possui pelo menos uma raiz complexa.

Exemplo:

(29) Encontre as raízes dos polinômios:

a) $p(x)=x^4-x^3-19x^2+49x-30$.

O polinômio $p(x)$ tem grau 4 e tem quatro raízes reais, a saber 1, 2, -5 e 2.

b) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$.

O polinômio $q(x)$ tem grau 3 e 3, $2i$ e $-2i$ são suas raízes. Logo, só uma é real e as outras duas são complexas.

c) $m(x) = 3x^2 + 6$

O polinômio $m(x)$ tem grau 2 e tem duas raízes complexas, a saber $\sqrt{2}i$ e $-\sqrt{2}i$.

O próximo teorema mostra que podemos decompor um polinômio com suas raízes, essa demonstração pode ser encontrada em Iezzi (2005, p. 106) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema da Decomposição: Todo polinômio

$$p(x) = a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

com grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é

$$p(x) = a_n(x - r_n) \cdots (x - r_2)(x - r_1)$$

em que $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são as raízes de $p(x)$ (tais raízes podem ser complexas).

Exemplo:

(30) Decomponha em fatores lineares os polinômios do exemplo anterior.

a) $p(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = (x - 1)(x - 3)(x + 5)(x - 2)$.

b) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = (x - 3)(x - 2i)(x + 2i)$.

c) $m(x) = 3x^2 + 6 = 3(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$.

Nem toda raiz de um polinômio real é um número real, como por exemplo o item (b) do Exemplo 30. Temos alguns resultados que nos indicam como encontrar as raízes reais, caso existirem.

O próximo teorema nos fornece um conjunto finito de todas as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros dado. Essa demonstração pode ser encontrada no livro Iezzi (2005, p. 141) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema das Raízes Racionais: Se um polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

com $a_n \neq 0$ de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_+^*$ e p e q são primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Exemplos:

(31) Resolva os seguintes itens:

a) Quais são as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$?

Pelo Teorema das Raízes Racionais, as raízes estão no conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, testando no polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$

$$\begin{aligned} p(1) &= -4, \quad p(-1) = -6 \\ p(2) &= 0, \quad p(-2) = -16 \\ p(4) &= 44, \quad p(-4) = -84 \end{aligned}$$

Então, a única raiz inteira é 2.

b) Decomponha o polinômio $p(x)$ em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.

Basta dividir $p(x)$ por $x - 2$,

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -x^2 & & -4 & x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x^2+x+2 \\ \cline{1-2} & x^2 & & & \\ & -x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3} & & 2x & -4 & \\ & & -2x & +4 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Podemos escrever

$$p(x) = (x-2)(x^2 + x + 2).$$

c) Quantas raízes reais tem esse polinômio?

Basta utilizar a fórmula de Bháskara para ver se $q(x) = x^2 + x + 2$ tem raízes reais. Temos que o delta será:

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0.$$

Como o delta é menor do que zero, $q(x)$ não tem raízes reais, portanto o polinômio $p(x)$ tem uma raiz (raízes) real (reais).

(32) Se o polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ pode ser fatorado na forma $(2x-1)(x+3)(x-k)$, então qual é o valor de k?

Solução 1: Pela divisão de polinômios temos que

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15 & 2x - 1 \\ \cline{2-2} -\, 2x^3 \;\; + x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 - 2x - 15 \\ \cline{1-1} -\, 4x^2 - 28x \qquad\; & \\ 4x^2 \;\; - 2x \qquad\; & \\ \cline{1-1} -\, 30x + 15 & \\ 30x - 15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

então divida o resultado por $x+3$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x - 15 & x + 3 \\ \cline{2-2} -\, x^2 - 3x \qquad\; & x - 5 \\ \cline{1-1} -\, 5x - 15 & \\ 5x + 15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Como

$$p(x) = (2x-1)(x+3)(x-k)$$

então $k = 5$. Pela igualdade de polinômios segue que

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x-1)(x+3)(x-5) \\ &= (2x^2 + 6x - x - 3)(x-5) \\ &= (2x^2 + 5x - 3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2x^3 - 10x^2 + 5x^2 - 25x - 3x + 15 \\ &= 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15. \end{aligned}$$

Solução 2: Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que as raízes racionais estão no conjunto $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \pm 15/2\}$ testando, vemos que além de $1/2$ e -3, 5 também é raiz, portanto, $k = 5$.

(33) Utilize o Teorema das Raízes Racionais para encontrar as raízes racionais, se houverem, do polinômio $p(x) = x^3 - 4x + 6$.

Pelo Teorema das Raízes Racionais temos que as raízes racionais estão no intervalo $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, substituindo em $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(1) &= 3, & p(-1) &= 1 \\ p(2) &= -2, & p(-2) &= -18 \\ p(3) &= -3, & p(-3) &= -57 \\ p(6) &= 78, & p(-6) &= -354. \end{aligned}$$

então, $p(x)$ não tem nenhuma raiz racional.

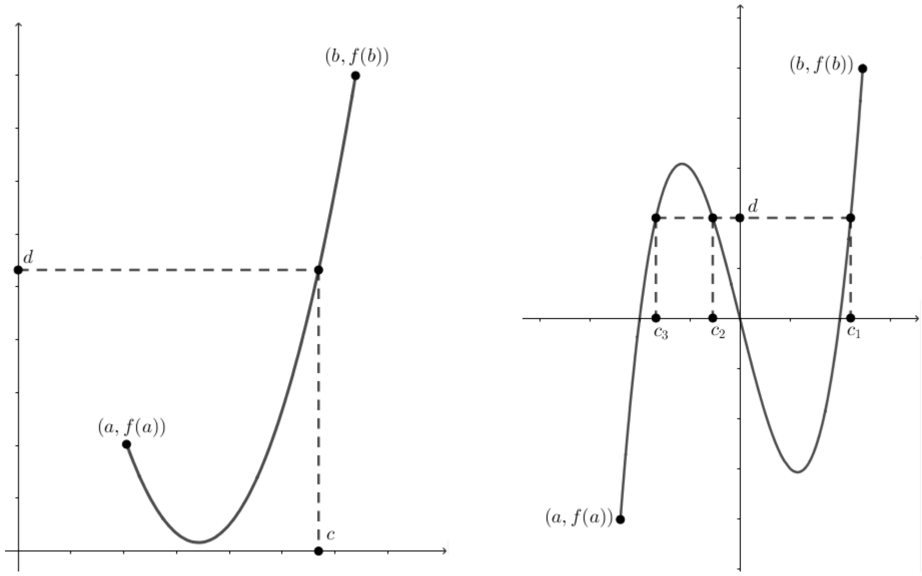
O fato de não haverem raízes racionais no exemplo acima não significa que o polinômio não tem nenhuma raiz real, podemos ter raízes irracionais, e para encontrá-las temos um resultado de Calculo Diferencial e Integral I, o Teorema do Valor Intermediário, e sua demonstração pode ser encontrada no livro Lima (1999, p. 234) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema do Valor Intermediário: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer d entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = d.$$

Esse teorema faz muito sentido quando se considera que os gráficos de funções contínuas são desenhados sem retirar o lápis do papel, então se sabemos que o gráfico passa por $(a, f(a))$ e por $(b, f(b))$, com $f(a) \neq f(b)$, então ele deve passar por todos os pontos entre $f(a)$ e $f(b)$, como ilustrado na Figura 2 (a). Como as funções polinomiais são sempre contínuas em um intervalo, sempre podemos usar esse teorema. Note que o teorema diz que existe $c \in (a, b)$, mas ele não é necessariamente único, como, por exemplo, ilustra a Figura 2 (b).

Figura 2 – Teorema do Valor Intermediário



(a) (b)

Fonte: produção da autora, 2020.

Teorema de Bolzano: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

Demonstração. Para que $f(a) \cdot f(b) < 0$ precisamos que um dos números seja maior do que zero e o outro seja menor do que zero, então suponha que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, se for o outro é análogo, portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário temos que, existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$. □

Sendo assim, o Teorema de Bolzano pode ser utilizado para encontrar intervalos que contenham raízes de um polinômio, basta achar um intervalo em cujos extremos a função assuma valores com sinais contrários. Podemos ver como utilizá-lo nos exemplos abaixo.

Exemplo:

(34) Já vimos que o polinômio $p(x) = x^3 - 4x + 6$ não tem raízes racionais, utilize o Teorema de Bolzano e encontre, se houverem, intervalos que contenham as raízes que não são racionais.

Vimos anteriormente, os valores de $p(x)$ em:

$$\begin{aligned} p(1) = 3, &\quad p(-1) = 1 \\ p(2) = -2, &\quad p(-2) = -18 \\ p(3) = -3, &\quad p(-3) = -57 \\ p(6) = 78, &\quad p(-6) = -354. \end{aligned}$$

então, pelo Teorema de Bolzano temos raízes reais nos intervalos $(1, 2)$, $(3, 6)$ e $(-2, -1)$. O que significa que o polinômio tem 3 raízes reais.

(35) Utilize o Teorema das Raízes Racionais para encontrar as raízes racionais do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$, encontre um intervalo para as raízes que não forem racionais, se houverem.

Pelo Teorema das Raízes Racionais, as raízes racionais estão no conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, substituindo em $p(x)$

$$\begin{aligned} p(1) = 2, &\quad p(-1) = 4 \\ p(2) = -2, &\quad p(-2) = -10 \\ p(3) = 0, &\quad p(-3) = -42 \\ p(6) = 102, &\quad p(-6) = -306. \end{aligned}$$

vemos que 3 é uma raiz de $p(x)$, e as outras raízes reais, se existirem, serão números irracionais.

Pelo Teorema de Bolzano temos que as outras raízes estão nos intervalos: $(-2, -1)$, pois $p(-2) = -10 < 0$ e $p(-1) = 4 > 0$; $(1, 2)$, pois $p(1) = 2 > 0$ e $p(2) = -2 < 0$.

Podemos utilizar o Algoritmo de Briot- Ruffini para diminuir o grau de $p(x)$ e depois utilizar a fórmula de Bhaskara para encontrar as outras duas raízes.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & & 3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Temos $g(x) = x^2 - 2$, que tem as raízes $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$, que estão nos intervalos que o Teorema de Bolzano mostrou que estariam. Pelo Teorema da Decomposição, sabemos que podemos escrever $p(x)$ da forma,

$$p(x) = (x - 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

(36) Analise o polinômio $p(x) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x + 32$ e tente localizar suas raízes.

Para esse polinômio fica bastante cansativo utilizar o Teorema das Raízes Racionais, por causa da quantidade de números que o teorema fornece, inclusive frações. Vamos substituir alguns valores para usar o Teorema de Bolzano,

$$\begin{array}{ll} p(0) = 32, & p(-1) = 24 \\ p(1) = 42, & p(-2) = -30 \\ p(2) = 150, & p(-3) = -490 \\ p(3) = 860. & \end{array}$$

Pelo Teorema de Bolzano temos uma raiz no intervalo $(-2, -1)$, isso não significa que todas as outras raízes são complexas, apenas não obtivemos resultados para encontrar as raízes reais. Ou seja, para polinômios de grau maior ainda é difícil, apenas com esses resultados, determinar todas as raízes. Seria necessário um estudo mais avançado de funções, como por exemplo o que é visto nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral I nas graduações.

Observação 6.2. *Todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real, pois se* $a_n > 0$ *(vale o mesmo para* $a_n < 0$*), temos que quando* x *assume valores muito altos positivos, então o valor do polinômio também assume valores muito altos positivos. Quando* x *assume valores muito altos negativos, então o polinômio também assume valores muito altos negativos, pois um número negativo elevado a uma potência ímpar resulta num número negativo. Assim, existem* a *e* b *tais que* $f(a)f(b) < 0$ *e o polinômio tem uma raiz real pelo Teorema de Bolzano.*

6.2 LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Considere o polinômio $x^2 - sx + p$, em que s é a soma das raízes e p é o produto das raízes desse polinômio. Os babilônios encontravam as raízes desse polinômio seguindo a instrução: "eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número".

   a) Resolva a equação: $x^2 - 9x + 20 = 0$ seguindo os passos da instrução.

   b) Escreva simbolicamente a instrução dada.

   c) Verifique que a equação $x^2 - sx + p = 0$ é equivalente a resolver o problema de determinar os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro s e a área p.

2. Dada a fórmula de Cardano para solução das cúbicas, resolva a seguinte equação, $x^3 - 15x - 4 = 0$. Esse polinômio tem alguma raiz real? Usando a fórmula de Cardano é possível encontrar, se houver, essa raiz?

3. Traduza para a notação atual e resolva pelo método da falsa posição o seguinte problema: uma quantidade, seu terço é somado a ela. Ela se torna 24.

4. Determine o polinômio $p(x)$ do 2^o grau tal que $p(0) = 2, p(1) = 3$ e $p(2) = 8$

5. As raízes do polinômio $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 64$ são a_1, a_2, a_3 e 8, e formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2 em que todos os termos são positivos.

   a) Calcule os valores de a_1, a_2 e a_3.

   b) Determine os valores de b, c e d.

   c) Escreva o polinômio $p(x)$.

6. O polinômio $p(x) = (a^2 - 5a + 6)x^4 + (ab^2 - 27)x^3 - 2ax^2 - 3$ tem grau 2, em que $a, b \in \mathbb{Z}$. Qual é o valor do coeficiente dominante desse polinômio?

7. (ENADE) Para quais valores de k e m o polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + kx + m$ é múltiplo de $q(x) = x^2 - 4$?

8. (UDESC) Sabendo-se que o polinômio $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 10x + 8$ tem 4 raízes racionais que são os primeiros termos de uma progressão geométrica com razão negativa e o primeiro termo negativo, então qual a soma de 8 termos dessa progressão?

9. (ACAFE) Assinale as afirmações a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F) e justifique sua resposta:

   a) ( ) Se
   $$\frac{2x}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4},$$
   então $A + B - C = 1$.

   b) ( ) O resto da divisão de $p(x) = x^{15} - 3x^4 + 2x + 3$ por $q(x) = x + 1$ é 3.

   c) ( ) Se $p(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ é divisível por $x + 1$ e o quociente dessa divisão é um polinômio com raiz dupla então a e b são primos entre si.

   d) ( ) A equação $x^3 + 2x^2 + 3 = 0$ possui pelo menos uma raiz racional.

10. (UFSC 2018) Assinale as afirmações a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F) e justifique sua resposta:

    a) ( ) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^n + 1$ por $(x - 1)$ é -2.

    b) ( ) Existem números reais a e b tais que o quociente da divisão exata do polinômio $p(x) = -x^4 + 5x^2 + ax + b$ por $(x^2 + 5x + 6)$ é $q(x) = -x^2 + 5x - 14$.

    c) ( ) Se α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 2x - 3 = 0$, então $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 20$.

11. (MACKENZIE) Seja $p(x) = x^n - 1$ um polinômio de grau $n > 1$ com raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots, \alpha_n$. Se $\alpha_1 = 1$ é raiz de $p(x)$, então o produto
    $$(3 - \alpha_2) \cdot (3 - \alpha_3) \cdot (3 - \alpha_4) \cdot \cdots \cdot (3 - \alpha_n)$$
    é sempre igual a $\frac{3^n - 1}{2}$.

12. (UFPR) Considerando o polinômio $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$, em que a e b são números inteiros, assinale verdadeiro (V) ou falso (F), justifique sua resposta:

    a) ( ) Se $a = b = 3$, então $p(x) = (x - 1)^3$.

    b) ( ) Se $p(x)$ é divisível por $(x - 1)$, então $a = b$.

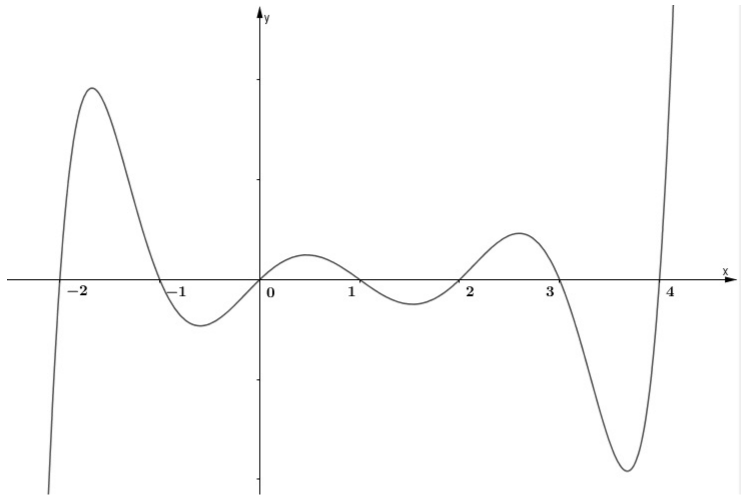
c) ( ) Qualquer número inteiro pode ser raiz da equação $p(x) = 0$, desde que os números inteiros a e b sejam escolhidos adequadamente.

d) ( ) A equação $p(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz real, quaisquer que sejam os números inteiros a e b.

e) ( ) Quaisquer que sejam os números inteiros a e b, o produto das raízes da equação $p(x) = 0$ é 1.

13. (UFPE) A figura a seguir mostra o esboço de uma função polinomial $p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Figura 3 – Função Polinomial



Fonte: produção da autora, 2019.

Analise as afirmações a seguir e assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) ( ) O grau do polinômio $p(x)$ é ≤ 6.

b) ( ) O grau do polinômio $p(x)$ é ≥ 7.

c) ( ) A equação $p(x) = 0$ não possui raízes reais.

d) ( ) O polinômio $p(x)$ é divisível por $x(x + 2)(x - 2)$.

e) ( ) O polinômios $p(x)$ é divisível por $(x^2 - 1)(x - 3)(x - 4)$.

14. (UFSC) O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$ pode ser escrito como um produto de polinômios de grau 1 com coeficientes reais? Justifique sua resposta.

15. (ITA) A divisão de um polinômio $p(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. Qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $2x + 1$?

16. (UNESP) Se m é raiz do polinômio real $p(x) = x^6 - (m + 1)x^5 + 32$, determine o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$.

17. (UNITAU) Sabe-se que 1, 2 e 3 são raízes de um polinômio do terceiro grau $p(x)$ e que $p(0) = 1$. Logo, quanto vale $p(10)$?

18. (FUVEST) Considere um polinômio não nulo $p(x)$ tal que

$$(p(x))^3 = x^2 p(x) = x p(x^2) \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

   a) Qual é o grau de $p(x)$?

   b) Determine $p(x)$.

19. (FUVEST) Sejam R_1 e R_2 os restos das divisões de um polinômio $p(x)$ por $x - 1$ e por $x + 1$, respectivamente. Nessas condições, se $R(x)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 - 1$, determine o valor de $R(0)$.

20. (FUVEST) Considere o polinômio não nulo $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ em que $a_0, a_1, a_2, \cdots \ a_n$ estão em progressão geométrica de razão $q \neq 0$.

   a) Calcule $p\left(\frac{1}{q}\right)$.

   b) Mostre que, para n par, o polinômio $p(x)$ não tem raiz real.

21. (FUVEST) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 3$. Dividindo $p(x)$ por $x - 1$ obtemos quociente $q(x)$ e resto $r = 10$. Quanto é o resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$?

22. (FUVEST) Seja $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de $p(x)$ são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares tem o polinômio $p(x)$?

23. (UNICAMP) Seja

$$p(x) = det \begin{bmatrix} a - x & 0 & b \\ 0 & 2 - x & c \\ b & 0 & d - x \end{bmatrix}$$

em que a, b, c e d são números reais.

   a) Mostre que $x = 2$ é raiz do polinômio.

   b) Mostre que as outras duas raízes de $p(x)$ também são reais.

   c) Quais as condições sobre a, b, c e d para que $p(x)$ tenha uma raiz dupla, $x \neq 2$?

24. (UEL) O polinômio p tem grau $4n + 2$ e o polinômio q tem grau $3n - 1$, sendo n inteiro e positivo. Qual é o grau do polinômio $p \cdot q$?

25. (MACKENZIE) Se a soma de duas raízes de $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k$ é 3, então qual é o número real k?

26. (FAAP) Dividindo-se $x^2 + kx + 2$ por $x - 1$ e por $x + 1$ são encontrados restos iguais entre si. Qual o valor de k?

27. (MACKENZIE) O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $2x - 1$ é 4; deste modo, qual é o resto da divisão de $(x^2 - x)p(x)$ por $2x - 1$?

28. (FEI) A soma de dois polinômios $p(x) + q(x)$ é um polinômio de grau 6, e a diferença $p(x) - q(x)$ é um polinômio de grau 4. É válido afirmar que:

    a) a diferença $q(x) - p(x)$ tem grau 6
    b) $p(x)$ e $q(x)$ tem o mesmo grau
    c) $p(x)$ tem grau 5
    d) $q(x)$ tem grau 4
    e) $p(x)$ tem grau 4

29. Um professor colocou três resistores associados em paralelo e pediu para que os alunos calculassem o valor da resistência do resistor equivalente sabendo que os valores R_1, R_2, R_3 das resistências dos três resistores escolhidos, medidos em ohms, são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

6.3 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere o polinômio $x^2 - sx + p$, em que s é a soma das raízes e p é o produto das raízes desse polinômio. Os babilônios encontravam as raízes desse polinômio seguindo a instrução: "eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número".

   a) Resolva a equação: $x^2 - 9x + 20 = 0$ seguindo os passos da instrução.
   b) Escreva simbolicamente a instrução dada.
   c) Verifique que a equação $x^2 - sx + p = 0$ é equivalente a resolver o problema de determinar os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro s e a área p.

> **Indicação para o professor:** no item *a*) espera-se que o aluno utilize os passos da instrução para resolver o polinômio dado, no item *b*) espera-se que o aluno escreva simbolicamente os passos dados e no item *c*) espera-se que o aluno perceba que o semiperímetro é dado por $a + b$ e a área por ab e isso é exatamente o que o problema descreve que são as raízes do polinômio $x^2 - sx + p = 0$.

Solução: Temos o polinômio $x^2 - sx + p$ com raízes r_1 e r_2 tais que $r_1 + r_2 = s$ e $r_1 r_2 = p$.

a) Para o polinômio $x^2 - 9x + 20 = 0$ temos que:

$$\begin{aligned}
\text{eleve ao quadrado a metade da soma: } \left(\frac{9}{2}\right)^2 &= \frac{81}{4}\\
\text{subtraia o produto: } \frac{81}{4} - 20 &= \frac{1}{4}\\
\text{extraia a raiz quadrada da diferença: } \sqrt{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{2}\\
\text{some ao resultado a metade da soma: } \frac{1}{2} + \frac{9}{2} &= 5\\
\text{subtraia-o da soma para obter o outro número: } 9 - 5 &= 4.
\end{aligned}$$

Logo, temos as raízes $r_1 = 5$ e $r_2 = 4$.

b)

$$\begin{aligned}
\text{eleve ao quadrado a metade da soma: } & \left(\frac{s}{2}\right)^2 \\
\text{subtraia o produto: } & \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \\
\text{extraia a raiz quadrada da diferença: } & \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \\
\text{some ao resultado a metade da soma: } & \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} + \frac{s}{2} \\
\text{subtraia-o da soma para obter o outro número: } & \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.
\end{aligned}$$

c) Sejam a e b os lados de um retângulo, seu semiperímetro será s e sua área p:

$$a + b = s$$

$$ab = p.$$

Então, a e b são as raízes do polinômio $x^2 - sx + p = 0$.

2. Dada a fórmula de Cardano para solução das cúbicas, resolva a seguinte equação, $x^3 - 15x - 4 = 0$. Esse polinômio tem alguma raiz real? Usando a fórmula de Cardano é possível encontrar, se houver, essa raiz?

Indicação para o professor: nessa questão espera-se que o aluno tente utilizar a fórmula de Cardano e ao cair em uma raiz quadrada de um número negativo, perceber que a fórmula não fornece as raízes sem conhecimentos de números complexos e então use o Teorema das Raízes Racionais para encontrar as raízes do polinômio.

Solução: Pela fórmula de Cardano temos:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} \\
&= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}
\end{aligned}$$

Chegamos em uma raiz quadrada de um número negativo, isso poderia significar que o polinômio não tem raiz real. Porém, o Teorema Raízes Racionais indica que se tivermos raízes racionais, essas estariam no conjunto: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Testando esses valores, vemos que $x = 4$ é raiz. Ou seja, o polinômio tem raízes reais, mas a fórmula de Cardano não nos ajuda a encontrá-las.

3. Traduza para a notação atual e resolva pelo método da falsa posição o seguinte problema: uma quantidade, seu terço é somado a ela. Ela se torna 24.

> **Indicação para o professor:** espera-se que o aluno utilize os passos dados na parte histórica da aula para resolver o problema.

Solução: Na notação atual teremos:

$$x + \frac{x}{3} = 24.$$

Seguindo os passos dados durante a parte histórica, vamos supor que $x = 3$ e então:

$$3 + \frac{3}{3} = 4$$

como

$$6 \cdot 4 = 24$$

temos que $x = 3 \cdot 6 = 18$ é a solução do problema.

4. Determine o polinômio $p(x)$ do 2^o grau tal que $p(0) = 2, p(1) = 3$ e $p(2) = 8$.

> **Indicação para o professor:** espera-se que o aluno utilize o valor numérico do polinômio para criar um sistema que encontre a, b, e c.

Solução: Temos as seguintes condições do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$.:

$$\begin{cases} p(0) = 2 \\ p(1) = 3 \\ p(2) = 8. \end{cases}$$

Que nos da o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 2 \\ a(1)^2 + b(1) + c = 3 \\ a(2)^2 + b(2) = 8 \end{cases}$$

simplificando, temos:

$$\begin{cases} c = 2 \\ a + b = 1 \\ 2a + b = 3. \end{cases}$$

O que nos da $a = 2$, $b = -1$ e $c = 2$, ou seja, o polinômio $p(x) = 2x^2 - x + 2$.

5. As raízes do polinômio $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 64$ são a_1, a_2, a_3 e 8, e formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2 em que todos os termos são positivos.

   a) Calcule os valores de a_1, a_2 e a_3.
   b) Determine os valores de b, c e d.
   c) Escreva o polinômio $p(x)$.

Indicação para o professor: no item *a*) espera-se que o aluno utilize as propriedades conhecidas de PG para encontrar a_1 e as outras raízes, no item *b*) espera-se que o aluno use o valor numérico do polinômio e encontre um sistema, resolvendo o sistema encontram-se os coeficientes; uma alternativa para esse item é utilizar as relações de Girard para encontrar os coeficientes do polinômio, mas nesse caso os alunos precisam investigar quais são as Relações de Girard para um polinômio de grau 4, e no item *c*) já foram encontrados todos os coeficientes, logo basta escrever o polinômio.

Solução:

a) Temos que a forma geral de uma PG é:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

com $a_4 = 8$ e $q = 2$, podemos encontrar a_1:

$$a_4 = a_1 2^{4-3}$$
$$8 = a_1 2^3$$
$$a_1 = 1.$$

tendo a_1 e q podemos encontrar os outros elementos da PG, logo temos todas as raízes:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 4$$
$$a_4 = 8.$$

b) No item a descobrimos quem são as raízes, então, podemos usá-las para montar o sistema abaixo:

$$\begin{cases} p(1) = 0 \\ p(2) = 0 \\ p(4) = 0 \\ p(8) = 0 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} 1 + b + c + d + 64 = 0 \\ 16 + 8b + 4c + 2d + 64 = 0 \\ 256 + 64b + 16c + 4d + 64 = 0 \\ 4096 + 512b + 64c + 8d + 64 = 0. \end{cases}$$

Portanto, simplificando, temos que,

$$\begin{cases} b + c + d = -65 \\ 4b + 2c + d = -40 \\ 16b + 4c + d = -80 \\ 64b + 8c + d = -520. \end{cases}$$

Fazendo a segunda equação menos a primeira e a quarta menos a terceira:

$$\begin{cases} 3b + c = 25 \\ 48b + 4c = -440 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} 3b + c = 25 \\ 12b + c = -110 \end{cases}$$

agora, fazendo a segunda equação menos a primeira:

$$\begin{aligned} 9b &= -135 \\ b &= -15. \end{aligned}$$

Substituindo nas anteriores, encontramos:

$$\begin{aligned} b &= -15 \\ c &= 70 \\ d &= -120. \end{aligned}$$

Solução alternativa do item b: Utilizando as relações de Girard, temos:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -b \\ &a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4 = c \\ &a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4 = -d \\ &a_1a_2a_3a_4 = 64. \end{aligned}$$

Fazendo os cálculos, temos:

$$b = -15$$
$$c = 70$$
$$d = -120.$$

c) O polinômio é: $p(x) = x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + 64$.

6. O polinômio $p(x) = (a^2 - 5a + 6)x^4 + (ab^2 - 27)x^3 - 2ax^2 - 3$ tem grau 2, em que $a, b \in \mathbb{Z}$. Qual é o valor do coeficiente dominante desse polinômio?

Indicação para o professor: espera-se que o aluno iguale os coeficientes das incógnitas com expoente maior do que 2 a 0 e encontre relações para a e b, resolvendo essas relações descubra o coeficiente de x^2.

Solução: Para que o polinômio tenha grau 2 é necessário que:

$$\begin{cases} a^2 - 5a + 6 = 0 \\ ab^2 - 27 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação usando a fórmula de Bháskara temos,

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$
$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - a \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

teremos as raízes: $a = 3$ ou $a = 2$.

Para a segunda equação, temos as duas opções, se $a = 3$:

$$3b^2 - 27 = 0$$
$$b^2 - 9 = 0$$
$$b^2 = 9$$
$$b = \pm 3.$$

Se $a = 2$:

$$2b^2 - 27 = 0$$
$$2b^2 = 27$$
$$b^2 = \frac{27}{2}$$
$$b = \sqrt{\frac{27}{2}}$$

o que não pode acorrer já que $b \in \mathbb{Z}$, logo $a = 3$.

Então, o coeficiente dominante do polinômio p é:

$$-2a = -6.$$

7. (ENADE) Para quais valores de k e m o polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + kx + m$ é múltiplo de $q(x) = x^2 - 4$?

Indicação para o professor: espera-se que o aluno faça a divisão de polinômios e depois utilize a igualdade de polinômios com o polinômio nulo para encontrar k e m.

Solução: Fazendo a divisão de polinômios, temos que:

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 - 3x^2 & + kx & + m & x^2 - 4 \\ \cline{4-4}
- x^3 & + 4x & & x - 3 \\ \cline{1-2}
- 3x^2 & + (4 + 1k)\,x & + m & \\
3x^2 & & - 12 & \\ \cline{1-3}
 & (4 + 1k)\,x & + (-12 + 1m) &
\end{array}$$

Como queremos que os polinômios sejam múltiplos, o resto deve ser 0, logo:

$$\begin{cases} 4 + k = 0 & \Rightarrow \quad k = -4 \\ -12 + m = 0 & \Rightarrow \quad m = 12 \end{cases}$$

Portanto, os polinômios são múltiplos quando $k = -4$ e $m = 12$.

8. (UDESC) Sabendo-se que o polinômio $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 10x + 8$ tem 4 raízes racionais que são os primeiros termos de uma progressão geométrica com razão negativa e o primeiro termo negativo, então qual a soma de 8 termos dessa progressão?

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize o Teorema das Raízes Racionais para encontrar todas as raízes do polinômio e depois utilize os conhecimentos de progressão geométrica para encontrar a progressão e a soma.

Solução: Temos que $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 10x + 8$ tem as raízes $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Q}$ em PG com $a_1 < 0$ e razão $q < 0$. Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos os coeficientes $a_0 = 8$ e $a_n = 2$, logo as raízes racionais estão no conjunto:

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \right\}.$$

Fazendo as contas vemos que $1, -1/2, -2, 4$ são raízes do polinômio, para cumprir as condições da PG, temos que ela é $-1/2, 1, -2, 4$, e $a_1 = -1/2$ e $q = -2$, portanto,

$$a_n = -\frac{1}{2}(-2)^{n-1}.$$

Então, como a fórmula da soma de PG finita (8 termos) é $S_8 = \dfrac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1}$, temos que

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{-\frac{1}{2}((-2)^8 - 1)}{-2 - 1} \\ S_8 &= \frac{85}{2}. \end{aligned}$$

9. (ACAFE) Assinale as afirmações a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F) e justifique sua resposta:

   a) (F) Se
   $$\frac{2x}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4},$$
   então $A + B - C = 1$.

   b) (F) O resto da divisão de $p(x) = x^{15} - 3x^4 + 2x + 3$ por $q(x) = x + 1$ é 3.

   c) (F) Se $p(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ é divisível por $x + 1$ e o quociente dessa divisão é um polinômio com raiz dupla então a e b são primos entre si.

   d) (F) A equação $x^3 + 2x^2 + 3 = 0$ possui pelo menos uma raiz racional.

Indicação para o professor: no item (a) espera-se que o aluno trabalhe com igualdade de polinômios; no item (b) com Briot-Ruffini ou perceber que o resto da divisão será o valor numérico de $p(-1)$ conforme garante o resultado do Teorema do Resto de D'Alembert; no item (c) com divisão e igualdade de polinômios; no item (d) com o Teorema das Raízes Racionais para resolver o problema. Para complementar sugerimos que o professor instigue os alunos a localizarem um intervalo que contém uma raiz utilizando o Teorema de Bolzano, além de trabalhar com a percepção dos valores que o polinômio relacionado assume e com inequações para concluir que essa equação tem apenas uma raiz real.

Solução:

a) Trabalhando com o lado esquerdo da igualdade, temos

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^3-2x^2+4x-8} &= \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\\ &= \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4)}\\ &= \frac{Ax^2+4A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{x^3-2x^2+4x-8}.\end{aligned}$$

Como os denominadores são iguais, basta que os numeradores sejam iguais, ou seja,

$$\begin{aligned}2x &= Ax^2+4A+Bx^2-2Bx+Cx-2C\\ 2x &= (A+B)x^2+(-2B+C)x+(4A-2C)\end{aligned}$$

logo, temos o sistema,

$$\begin{cases} A+B=0\\ -2B+C=2\\ 4A-2C=0\end{cases}$$

que tem por solução $A=1/2$, $B=-1/2$ e $C=1$. Portanto,

$$A+B-C=-1$$

e a afirmação é falsa.

b) Usando a divisão de polinômios obtemos:

$$x^{15} - 3x^4 + 2x + 3 = (x+1)(x^{14} - x^{13} + x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 6) + (-3)$$

Logo, o resto é -3, e a afirmação é falsa. Ou usando o Teorema do Resto de D'Alembert também segue que o resto da divisão de $p(x)$ por $x-1$ é $p(-1) = -3$.

c) Fazendo a divisão de $p(x)$ por $x+1$ temos,

$$x^3 + 5x^2 + ax + b = (x+1)(x^2 + 4x + (a-4)) + (b-a+4).$$

Como $p(x)$ é divisível por $x+1$, temos que o resto é zero, $b - a + 4 = 0$, e o quociente é um polinômio com raiz dupla, ou seja, $x^2 + 4x + (a-4) = (x+k)^2$, como o coeficiente de x é 4, temos que $k = 2$ então $a = 8$.

Ainda, $b - a + 4 = 0$, portanto $b = 4$, a e b não são primos entre si. Portanto, a afirmação é falsa.

d) Seja $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3$. Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que as raízes racionais estão no conjunto $\{\pm 1, \pm 3\}$, fazendo testes vemos que,

$$\begin{aligned} p(1) &= 6 \\ p(-1) &= 4 \\ p(3) &= 48 \\ p(-3) &= -6. \end{aligned}$$

Sendo assim, $p(x)$ não tem raízes racionais, e a afirmação é falsa. Além disso, ainda podemos delimitar um intervalo que contém uma raiz usando o Teorema de Bolzano. Por especulação, temos que $p(-2) = 3$, logo $p(-3)p(-2) < 0$ então existe uma raiz no intervalo $(-3, -2)$.

Nesse ponto sugerimos que o professor instigue seus alunos a observarem que o polinômio $p(x)$ tem apenas uma raiz real. Por exemplo, ele pode chamar atenção que a parcela $2x^2 + 3$, do polinômio $p(x)$, é sempre positiva. Com isso em mente pode-se concluir que para valores de $x \geq 0$ teremos $p(x) > 0$. Para valores de $x < -3$ teremos $p(x) < 0$, pois

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2) < x^2 \cdot (-1) = -x^2 < -9,$$

logo $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3 < -9 + 3 = -6 < 0$.

10. (UFSC 2018) Assinale as afirmações a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F) e justifique sua resposta:

   a) (F) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^n + 1$ por $(x - 1)$ é -2.
   b) (V) Existem números reais a e b tais que o quociente da divisão exata do polinômio $p(x) = -x^4 + 5x^2 + ax + b$ por $(x^2 + 5x + 6)$ é $q(x) = -x^2 + 5x - 14$.
   c) (V) Se α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 2x - 3 = 0$, então $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 20$.

Indicação para o professor: no item *a*) utilizar o Teorema do Resto de D'Alembert ou a divisão de polinômios para descobrir o resto, no item *b*) espera-se que o aluno faça divisão de polinômios e a igualdade de polinômio, no item *c*) espera-se que use as Relações de Girard ou encontre as raízes usando primeiro o Teorema das Raízes Racionais, depois o Algoritmo de Briot-Ruffini ou a divisão de polinômios para escrever a expressão dada como um produto de polinômios de primeiro e segundo grau e, por fim, determinar as raízes do polinômio de segundo grau usando a fórmula de Bháskara.

Solução:

a) Pelo Teorema do Resto de D'Alembert tem-se que o resto da divisão de $p(x)$ pelo binômio $x - 1$ será $p(1)$, que é

$$p(1) = 1^n + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Logo, a afirmação é falsa.

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
-x^4 & & +5x^2 & +ax & +b & x^2+5x+6 \\ \cline{6-6}
x^4 & +5x^3 & +6x^2 & & & -x^2+5x-14 \\ \cline{1-3}
 & 5x^3 & +11x^2 & +ax & & \\
 & -5x^3 & -25x^2 & -30x & & \\ \cline{2-4}
 & & -14x^2 & +(-30+1a)\,x & +b & \\
 & & 14x^2 & +70x & +84 & \\ \cline{3-5}
 & & & (40+1a)\,x & +(84+1b) &
\end{array}$$

Para que a divisão seja exata, precisamos que o resto seja $r(x) = 0$ então, temos que $a = -40$ e $b = -84$, logo existem valores a e b tais que a divisão seja exata e o quociente seja $q(x)$, e a afirmação é verdadeira.

c) Pelas Relações de Girard, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= -4 \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma &= -2 \\ \alpha\beta\gamma &= 3. \end{aligned}$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) &= 16 \\ \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\gamma\beta+\gamma^2 &= 16 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) &= 16 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(-2) &= 16 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= 20. \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação é verdadeira.

Solução alternativa do item *c*: Como alternativa às relações de Girard, pode-se usar o Teorema das Raízes Racionais para determinar que $x=-1$ é uma raiz, sendo que as possibilidades seriam os valores $\{\pm1,\pm3\}$. Na sequência utilizar o Algoritmo de Briot-Ruffini ou a divisão de polinômios para escrever $x^3+4x^2-2x-3=(x-1)(x^2+5x-3)$ e por fim utilizar a fórmula de Bháskara para obter as outras duas raízes como sendo $\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$. Concluir que tendo explicitadas as raízes a conta não é imediata para determinar a soma dos quadrados das raízes.

11. (MACKENZIE) Seja $p(x)=x^n-1$ um polinômio de grau $n>1$ com raízes $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\cdots,\alpha_n$. Se $\alpha_1=1$ é raiz de $p(x)$, então o produto

$$(3-\alpha_2)\cdot(3-\alpha_3)\cdot(3-\alpha_4)\cdot\cdots(3-\alpha_n)$$

é sempre igual a $\frac{3^n-1}{2}$.

> **Indicação para o professor:** espera-se que o aluno use a decomposição do polinômio em suas raízes e o valor numérico do polinômio.

Solução: Decompondo o polinômio $p(x)$ com suas raízes, temos que:

$$p(x)=x^n-1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

Sabemos que $\alpha_1 = 1$, então substituindo na equação anterior:

$$p(x) = x^n - 1 = (x-1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

Calculando $p(3)$, obtemos:

$$p(x) = 3^n - 1 = 2(3-\alpha_2)\cdots(3-\alpha_n)$$
$$(3-\alpha_2)\cdots(3-\alpha_n) = \frac{3^n-1}{2}.$$

12. (UFPR) Considerando o polinômio $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$, em que a e b são números inteiros, assinale verdadeiro (V) ou falso (F), justifique sua resposta:

   a) (V) Se $a = b = 3$, então $p(x) = (x-1)^3$.
   b) (V) Se $p(x)$ é divisível por $(x-1)$, então $a = b$.
   c) (F) Qualquer número inteiro pode ser raiz da equação $p(x) = 0$, desde que os números inteiros a e b sejam escolhidos adequadamente.
   d) (V) A equação $p(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz real, quaisquer que sejam os números inteiros a e b.
   e) (V) Quaisquer que sejam os números inteiros a e b, o produto das raízes da equação $p(x) = 0$ é 1.

Indicação para o professor: no item *a*) espera-se que o aluno use a igualdade de polinômios; no item *b*) espera-se que o aluno use divisão e igualdade de polinômios ;no item *c*) espera-se que use o valor numérico de 0 para perceber que em nenhum caso 0 poderá ser raiz do polinômio; no item *d*) espera-se que o aluno perceba que o polinômio sempre tem grau ímpar não importa o valor de a e b então terá pelo menos uma raiz real; no item *d*) espera-se que o aluno use as relações de Girard.

Solução:

a) Se $a = b = 3$ então, $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ que é exatamente $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, logo a afirmação é verdadeira.

b) Seja $q(x) = x - 1$ e $r(x) = 0$, então a divisão será:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)(x^2 + (1-a)x + (b-a+1)) + (b-a)$$

como o resto é nulo, temos que:

$$b - a = 0$$

$$a = b.$$

Assim, a afirmação é verdadeira.

c) É falso, pois $0 \in \mathbb{Z}$, mas 0 não pode ser raiz da equação, não importa quem sejam a e b, já que:

$$p(0) = (0)^3 - a(0)^2 + b(0) - 1 = -1 \neq 0.$$

d) Quaisquer que sejam a e b inteiros, como $p(x)$ tem grau ímpar, o polinômio tem pelo menos uma raiz real, a afirmação é verdadeira.

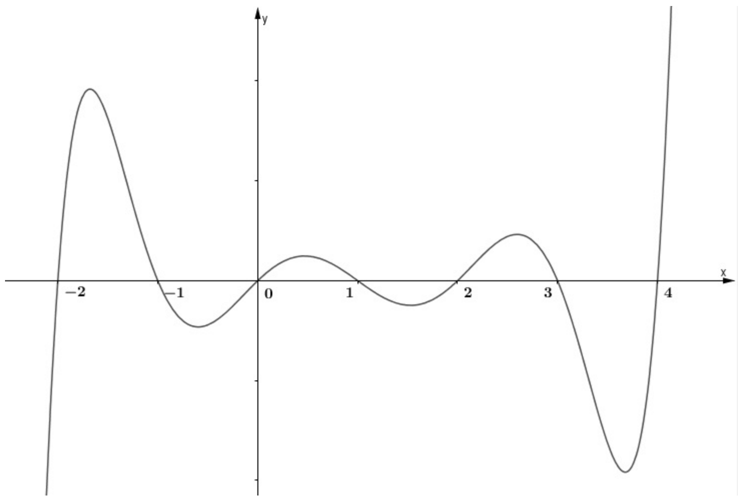
e) Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes do polinômio, pelas relações de Girard, temos que:

$$r_1 r_2 r_3 = -(-1) = 1$$

logo a afirmação é verdadeira.

13. (UFPE) A figura a seguir mostra o esboço de uma função polinomial $p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Figura 4 – Função Polinomial Resolvida



Fonte: produção da autora, 2019.

Analise as afirmações a seguir e assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) (F) O grau do polinômio $p(x)$ é ≤ 6.

b) (V) O grau do polinômio $p(x)$ é ≥ 7.

c) (F) A equação $p(x) = 0$ não possui raízes reais.

d) (V) O polinômio $p(x)$ é divisível por $x(x+2)(x-2)$.

e) (V) O polinômios $p(x)$ é divisível por $(x^2-1)(x-3)(x-4)$.

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize os conhecimentos sobre raízes para resolver esse exercício.

Solução:

a) Como podemos ver na Figura 3 a função passa pelo eixo x, pelo menos 7 vezes, então o grau do polinômio é maior ou igual a 7, logo a afirmação é falsa.

b) Como vimos no item anterior, o grau é maior ou igual a 7, logo a afirmação é verdadeira.

c) Como o gráfico da função $p(x)$, ilustrado na Figura 3, cruza o eixo x sete vezes, então a equação $p(x) = 0$ tem pelo menos 7 raízes reais, logo a afirmação é falsa.

d) Pela Figura 3, percebe-se que $p(x)$ tem as raízes: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ logo $p(x)$ é divisível por $x(x+2)(x-2)$ e a afirmação é verdadeira.

e) Como $(x^2-1)(x-3)(x-4) = (x+1)(x-1)(x-3)(x-4)$ e, pela Figura 3, $-1, 1, 3, 4$ são raízes de $p(x)$ então a afirmação é verdadeira.

14. (UFSC) O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$ pode ser escrito como um produto de polinômios de grau 1 com coeficientes reais? Justifique sua resposta.

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize o Teorema das Raízes racionais para encontrar uma raiz, então faça divisão de polinômios para chegar em um polinômio que não tem raízes reais.

Solução: Usando o Teorema das Raízes Racionais podemos ver que -1 é raiz desse polinômio, fazendo a divisão temos que:

$$\begin{array}{rr|l} & x^3 + x^2 + 4x + 4 & x+1 \\ \cline{3-3} -x^3 - x^2 & & x^2+4 \\ \cline{1-1} & 4x + 4 & \\ & -4x - 4 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Logo,

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2+4).$$

Como $x^2 + 4$ não tem raízes reais, não podemos escrever o polinômio $p(x)$ como um produto de binômios reais.

15. (ITA) A divisão de um polinômio $p(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. Qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $2x + 1$?

Indicação para o professor: espera-se que o aluno use a multiplicação e divisão de polinômios.

Solução: Temos que $p(x) = (x^2 - x)(6x^2 + 5x + 3) - 7x$, ou seja,

$$p(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 6x^3 - 5x^2 - 3x - 7x$$

$$p(x) = 6x^4 - x^3 - 2x^2 - 10x.$$

Logo, a divisão é:

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^4 & -x^3 & -2x^2 & -10x & 2x+1 \\ \cline{5-5}
-6x^4 & -3x^3 & & & 3x^3 - 2x^2 - 5 \\ \cline{1-2}
& -4x^3 & -2x^2 & & \\
& 4x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-3}
& & & -10x & \\
& & & 10x + 5 & \\ \cline{4-4}
& & & 5 &
\end{array}$$

Portanto, o resto dessa divisão é 5.

16. (UNESP) Se m é raiz do polinômio real $p(x) = x^6 - (m+1)x^5 + 32$, determine o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$.

Indicação para o professor: espera-se que o aluno use a raiz do polinômio para descobrir $p(x)$ e então faça a divisão de polinômios ou use o Teorema do Resto de D'Alembert.

Solução: Se m é raiz do polinômio $p(x)$, então:

$$
\begin{aligned}
p(m) = m^6 - (m+1)m^5 + 32 &= 0 \\
m^6 - m^6 - m^5 + 32 &= 0 \\
m^5 &= 32 \\
m &= 2.
\end{aligned}
$$

Logo, $p(x) = x^6 - 2x^5 + 32$, e pela divisão de polinômios segue que:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & -2x^5 & & & & & +32 & x-1 \\ \cline{8-8}
-x^6 & +x^5 & & & & & & x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ \cline{1-2}
 & -x^5 & & & & & & \\
 & x^5 & -x^4 & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^4 & & & & & \\
 & & x^4 & -x^3 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -x^3 & & & & \\
 & & & x^3 & -x^2 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & -x^2 & & & \\
 & & & & x^2 & -x & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & -x & +32 & \\
 & & & & & x & -1 & \\ \cline{6-7}
 & & & & & & 31 &
\end{array}
$$

portanto o resto é 31.

Ou simplesmente pelo Teorema do Resto de D'Alembert, tem-se que o resto é $p(1) = 31$.

17. (UNITAU) Sabe-se que 1, 2 e 3 são raízes de um polinômio do terceiro grau $p(x)$ e que $p(0) = 1$. Logo, quanto vale $p(10)$?

> **Indicação para o professor:** espera-se que o aluno utilize a forma decomposta e o valor numérico do polinômio.

Solução: Como $1, 2$ e 3 são raízes do polinômio $p(x)$ de grau 3, podemos escreve-lo como

$$p(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$$

como $p(0) = 1$, segue que

$$a(-1)(-2)(-3) = 1$$

logo,

$$a = -\frac{1}{6}$$

então

$$p(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

e podemos calcular $p(10)$,

$$p(10) = -\frac{1}{6}(10-1)(10-2)(10-3) = -84.$$

18. (FUVEST) Considere um polinômio não nulo $p(x)$ tal que

$$(p(x))^3 = x^2p(x) = xp(x^2) \;\forall\; x \in \mathbb{R}.$$

a) Qual é o grau de $p(x)$?

b) Determine $p(x)$.

Indicação para o professor: no item *a*) espera-se que o aluno utilize as propriedades de grau e no item *b*) a igualdade de polinômios.

Solução:

a) Seja n o grau de $p(x)$, temos que

$$3n = 2 + n$$

$$n = 1.$$

O grau de $p(x)$ é 1.

b) Temos que $p(x) = ax + b$, então

$$(p(x))^3 = (ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$$

$$x^2p(x) = x^2(ax+b) = ax^3 + bx^2$$

$$xp(x^2) = x(ax^2+b) = ax^3 + bx.$$

Como são todos iguais, temos que

$$\begin{cases} a^3 = a \\ 3a^2b = b \\ 3ab^2 = b \\ b^3 = 0 \end{cases}$$

então, $b = 0$ e $a^2 = 1 \;\to\; a = \pm 1$. Os polinômios que satisfazem as condições são $p_1(x) = x$ e $p_2(x) = -x$.

19. (FUVEST) Sejam R_1 e R_2 os restos das divisões de um polinômio $p(x)$ por $x - 1$ e por $x + 1$, respectivamente. Nessas condições, se $R(x)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 - 1$, determine o valor de $R(0)$.

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize o fato de que o resto tem grau menor do que o divisor e o Teorema do Resto.

Solução: Temos que

$$p(x) = (x-1)q_1(x) + R_1$$
$$p(x) = (x+1)q_2(x) + R_2$$
$$p(x) = (x^2-1)q_3(x) + R(x).$$

Então, $p(x) = (x-1)(x+1)q_3(x) + R(x)$ e $R(x) = ax + b$, portanto $R(0) = b$. Pelo Teorema do Resto,

$$p(1) = R_1 = a + b$$
$$p(-1) = R_2 = -a + b.$$

Temos que

$$b = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

isto é,

$$R(0) = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

20. (FUVEST) Considere o polinômio não nulo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ em que $a_0, a_1, a_2, \cdots\; a_n$ estão em progressão geométrica de razão $q \neq 0$.

   a) Calcule $p\left(\frac{1}{q}\right)$.

   b) Mostre que, para n par, o polinômio $p(x)$ não tem raiz real.

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize o valor numérico do polinômio e propriedades de PG.

Solução:

a) Como os coeficientes estão em PG, temos que, $a_n = a_0 q^n$, como

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

então,

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_0 q x + a_0 q^2 x^2 + \cdots + a_0 q^n x^n \\
p\left(\frac{1}{q}\right) &= a_0 + a_0 q \left(\frac{1}{q}\right) + a_0 q^2 \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \cdots + a_0 q^n \left(\frac{1}{q}\right)^n \\
p\left(\frac{1}{q}\right) &= a_0 + a_0 + a_0 + \cdots + a_0 \\
p\left(\frac{1}{q}\right) &= a_0(n+1).
\end{aligned}$$

b) O polinômio $p(x)$ é dado por

$$p(x) = a_0(1 + qx + q^2x^2 + \cdots + q^n x^n)$$

que é uma PG com razão qx, logo, para $qx \neq 1$ ou equivalentemente, $x \neq \frac{1}{q}$, temos que

$$p(x) = a_0 \left(\frac{(qx)^{n+1} - 1}{qx - 1}\right)$$

então $p(x) = 0$ ocorre apenas se $(qx)^{n+1} = 1$ e $qx \neq 1$, como n é par, então $n+1$ é ímpar e $(-1)^{n+1} \neq 1$, logo $p(x) \neq 0$ para n par. E quando $x \neq \frac{1}{q}$, então

$$p\left(\frac{1}{q}\right) = a_0(n+1)$$

e $n \in \mathbb{N}$, então também não é 0 já que $a_0 \neq 0$.

21. (FUVEST) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 3$. Dividindo $p(x)$ por $x - 1$ obtemos quociente $q(x)$ e resto $r = 10$. Quanto é o resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$?

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize o Teorema do Resto.

Solução: Temos que $p(3) = 0$ e

$$p(x) = (x-1)q(x) + 10.$$

Substituindo $x = 3$ na equação acima temos

$$\begin{aligned} p(3) &= (3-1)q(3) + 10 \\ 0 &= 2q(3) + 10 \\ q(3) &= -5 \end{aligned}$$

e pelo Teorema do Resto, o resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$ é -5.

22. (FUVEST) Seja $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de $p(x)$ são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares tem o polinômio $p(x)$?

Indicação para o professor: espera-se que o professor indique para os aluno procurarem as Relações de Girard para as equações de grau 4, e as propriedades de números pares e ímpares.

Solução: Temos que $b, c, d, e \in \mathbb{Z}$. Sejam $r, s, t, w \in \mathbb{Z}$ as raízes do polinômio $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tais que r, s, t são pares e w é ímpar, pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{aligned} &r + s + t + w = -b \\ &rs + rt + rw + st + sw + tw = c \\ &rst + rsw + rtw + stw = -d \\ &rstw = e \end{aligned}$$

Se um número é par ou ímpar, seu oposto também é par ou ímpar, então b é a soma de 3 números pares e de um 1 número ímpar, logo b é ímpar. Todo número multiplicado por um par, é par, então c é a soma de 6 números pares, e portanto par. O mesmo acontece para d e e, que também são pares. O polinômio tem 3 coeficientes pares.

23. (UNICAMP) Seja

$$p(x) = det \begin{bmatrix} a-x & 0 & b \\ 0 & 2-x & c \\ b & 0 & d-x \end{bmatrix}$$

em que a, b, c e d são números reais.

a) Mostre que $x = 2$ é raiz do polinômio.

b) Mostre que as outras duas raízes de $p(x)$ também são reais.

c) Quais as condições sobre a, b, c e d para que $p(x)$ tenha uma raiz dupla, $x \neq 2$?

Indicação para o professor: espera-se que os alunos utilizem conhecimentos de determinante e das raízes de um polinômio do segundo grau.

Solução:

a) Seja $x = 2$ temos que,

$$p(2) = det \begin{bmatrix} a-x & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ b & 0 & d-x \end{bmatrix}$$

como a segunda coluna é nula, o determinante é 0 e 2 é raiz de $p(x)$.

b) Temos que,

$$\begin{aligned} p(x) &= (a-x)(2-x)(d-x) - (2-x)b^2 \\ &= (2-x)[(a-x)(d-x) - b^2] \\ &= (2-x)(x^2 - (a+d)x + ad - b^2). \end{aligned}$$

Seja $q(x) = x^2 - (a+d)x + ad - b^2$, então suas raízes são,

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - b^2) \\ &= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 \\ &= (a-d)^2 + 4b^2 \end{aligned}$$

e como $(a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$ então, $q(x)$ tem duas raízes reais, e $p(x)$ tem três raízes reais.

c) Para que $p(x)$ tenha uma raiz dupla, é necessário e suficiente que

$$(a-d)^2 + 4b^2 = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (a-d)^2 &= 0 \\ 4b^2 &= 0 \end{aligned}$$

o que nos leva a $a = d$ e $b = 0$, mas ainda precisamos considerar que $x \neq 2$. Para que 2 não seja raiz de $p(x)$ então 2 não pode ser raiz dupla de $q(x)$. Quando $a = d$ e $b = 0$ temos $q(x) = x^2 - 2ax + a^2$, como $\Delta = 0$ $x = \frac{2a}{2} = a$ então basta que $a \neq 2$. As condições são: $a = d \neq 2, b = 0$ e para todo $c \in \mathbb{R}$.

24. (UEL) O polinômio p tem grau $4n + 2$ e o polinômio q tem grau $3n - 1$, sendo n inteiro e positivo. Qual é o grau do polinômio $p \cdot q$?

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize conhecimentos de grau.

Solução: Sabemos que o grau do produto é a soma dos graus, então

$$(4n + 2) + (3n - 1) = 7n + 1.$$

25. (MACKENZIE) Se a soma de duas raízes de $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k$ é 3, então qual é o número real k?

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize as relações de Girard.

Solução: Sejam a, b e c as raízes do polinômio $p(x)$ e $a + b = 3$. Pelas Relações de Girard:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 6 \\ ab + ac + bc &= 11 \\ abc &= -k. \end{aligned}$$

Como $a + b = 3$ então $3 + c = 6$ ou seja, $c = 3$, agora

$$\begin{aligned} ab + ac + bc &= 11 \\ ab + c(a + b) &= 11 \\ ab + 3(3) &= 11 \\ ab &= 2 \end{aligned}$$

e por fim,

$$\begin{aligned} abc &= -k \\ 2 \cdot 3 &= -k \\ k &= -6. \end{aligned}$$

26. (FAAP) Dividindo-se $x^2 + kx + 2$ por $x - 1$ e por $x + 1$ são encontrados restos iguais entre si. Qual o valor de k?

> **Indicação para o professor:** espera-se que o aluno utilize a divisão e a igualdade de polinômios.

Solução: Usando a divisão de polinômios, temos que

$$x^2 + kx + 2 = (x - 1)(x + k + 1) + (k + 3)$$

$$x^2 + kx + 2 = (x + 1)(x + k - 1) + (3 - k)$$

Então, pela igualdade dos restos, segue que $3 + k = 3 - k$, ou seja, $k = 0$.

27. (MACKENZIE) O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $2x - 1$ é 4; deste modo, qual é o resto da divisão de $(x^2 - x)p(x)$ por $2x - 1$?

> **Indicação para o professor:** espera-se que o aluno utilize os conhecimentos de resto e valor numérico.

Solução: Temos que

$$p(x) = (2x - 1)q(x) + 4$$

logo, para $x = \frac{1}{2}$,

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) q\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 4.$$

Por outro lado, temos que,

$$(x^2 - x)p(x) = (2x - 1)g(x) + R$$

e substituindo x por $\frac{1}{2}$, segue que

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\right] p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) g\left(\frac{1}{2}\right) + R$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 4 = R$$

$$R = -1.$$

28. (FEI) A soma de dois polinômios $p(x) + q(x)$ é um polinômio de grau 6, e a diferença $p(x) - q(x)$ é um polinômio de grau 4. É válido afirmar que:

a) a diferença $q(x) - p(x)$ tem grau 6

b) $p(x)$ e $q(x)$ tem o mesmo grau

c) $p(x)$ tem grau 5

d) $q(x)$ tem grau 4

e) $p(x)$ tem grau 4

Indicação para o professor: espera-se que o aluno utilize as propriedades de grau de polinômio.

Solução: Como o grau da soma é 6, segue o grau de $p(x)$ é 6 ou o grau de $q(x)$ é 6 (ou se ambos é 6). Como o grau da diferença é 4 significa que os coeficientes dos termos x^6 e x^5 se anularam na subtração, ou seja, os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ tem o mesmo grau, que é 6 (não pode ser maior do que 6 pois se cancelasse na soma não cancelaria na diferença). Assim, o item (b) é verdadeiro, os itens $(c), (d)$ e (e) são falsos. O item (a) é falso, pois o polinômio $q(x) - p(x)$ é o oposto do polinômio $p(x) - q(x)$ logo tem grau 4.

29. Um professor colocou três resistores associados em paralelo e pediu para que os alunos calculassem o valor da resistência do resistor equivalente sabendo que os valores R_1, R_2, R_3 das resistências dos três resistores escolhidos, medidos em ohms, são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

Indicação para o professor: nessa questão espera-se que o aluno utilize as relações de Girard ou o Teorema das Raízes Racionais e o Algoritmo de Briot-Ruffni.

Solução 1: Sabemos que:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Então,

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$$

Pelas relações de Girard:

$$\begin{aligned} R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2 &= \frac{-16}{1} = -16 \\ R_1R_2R_3 &= \frac{-12}{1} = -12. \\ \frac{1}{R} &= \frac{-16}{-12}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R = \frac{3}{4} \text{ ohms.}$$

Solução 2: Uma vez que temos o polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$, podemos encontrar suas raízes utilizando o Teorema das Raízes Racionais, as raízes de $p(x)$ estão no conjunto: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$, fazendo testes vemos que $p(2) = 0$, portanto $R_1 = 2$. Aqui o aluno poderia continuar e obter as outras raízes pelo Teorema.
Pelo algoritmo de Briot-Ruffini temos que

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)(x^2 - 5x + 6)$$

Agora basta encontrar as raízes do polinômio $q(x) = x^2 - 5x + 6$, que são $R_2 = 3$ e $R_3 = 2$. Como sabemos que,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{3}{4} \text{ ohms.}$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como objetivo elaborar um caderno pedagógico para trabalhar com polinômios no contexto histórico, algébrico e analítico no Ensino Médio e na Formação de Professores. Para isso começamos com um resgate histórico, buscando na história da matemática, as descobertas mais importantes sobre os polinômios e como os matemáticos chegaram as soluções que temos atualmente para as equações polinomiais.

Então, realizamos uma pesquisa nos livros didáticos do Ensino Médio para descobrir como são apresentados os polinômios, quais propriedades são usadas e em que ordem aparecem os resultados estudados no Ensino Médio, para podermos, assim, estruturar nosso caderno pedagógico e a teoria envolvida nesse processo.

Para termos a fundamentação teórica do trabalho, estudamos primeiramente os anéis, para então provar que o conjunto dos polinômios com coeficientes em um anel A é também um anel, chamado de anel dos polinômios, destacando que os polinômios normalmente são escritos em ordem diferentes, na literatura da Teoria de Anéis e nos livros didáticos do Ensino Médio, e por fim fizemos as demonstrações de alguns resultados clássicos de busca de raízes reais de um polinômio.

Em seguida apresentamos o caderno pedagógico, que inicia com um pouco de história para os alunos do Ensino Médio, segue com os conceitos e operações com polinômios, métodos para divisões de polinômios e termina com alguns teoremas para busca de raízes reais de um polinômio. Durante o decorrer do caderno trazemos exemplos e exercícios que ajudam o aluno a fixar o conteúdo.

Para que os alunos tenham uma ferramenta para localizar as raízes reais de um polinômio, buscamos no Cálculo Diferencial e Integral I os resultados dos Teoremas do Valor Intermediário e de Bolzano. Como o resultado desses teoremas pode ser ilustrado graficamente e explicado de modo intuitivo, nossa proposta é que sejam utilizados para auxiliar a localizar raízes irracionais de polinômios.

Ao final do caderno temos uma lista de exercícios em duas versões, uma somente com os exercícios, para o professor que quiser imprimir e levá-los para sua sala de aula, e a segunda versão com as soluções e indicação aos professores dos conceitos usados em cada exercício. Dessa forma cada professor pode escolher quais atividades da lista fazem mais sentido com objetivo da sua aula.

Buscando por exercícios para a nossa lista pudemos perceber que os temas mais abordados com relação aos polinômios são a divisão e as raízes, por isso a importância dos resultados que tratam desse ponto, tais como: Teorema das Raízes Racionais, Algoritmo de Briot-Ruffini, Relações de Girard, Teorema da Decomposição e Algoritmo da Divisão. Todos tratados nesse trabalho.

No apêndice desse trabalho temos um produto educacional onde foi colocada uma sugestão de como utilizar o caderno pedagógico, é uma versão que pode ser impressa e levada para sala de aula, otimizando o tempo do professor de escrever todos os conceitos no quadro. O produto educacional foi elaborado com lacunas para serem preenchidas pelos alunos durante a aula.

Ao final deste mestrado pude fazer parte de um projeto de ensino da UDESC, no qual demos início ao Caderno Pedagógico. O caderno será utilizado nesse projeto, sendo feitas algumas adequações para o seu público alvo, que são alunos ingressantes da universidade, principalmente para os cursos da Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Ciências da Computação que tem em sua matriz curricular uma disciplina de "Pré-cálculo". Além do mais, o material também poderá beneficiar os alunos de outros cursos, uma que vez muitos calouros entram na universidade apresentando grandes dificuldades neste conteúdo, importantíssimo para os Cálculos.

Esperamos que o Caderno Pedagógico também seja utilizado por professores em sala de aula. Para tal iremos divulga-lo para professores do Ensino Médio e do Ensino Superior da UDESC, que trabalham com o curso de Licenciatura em Matemática.

Por fim, a ideia de estudar anéis de polinômios nesse trabalho veio da minha vontade de aprender outros conceitos da matemática abstrata e por minha inclinação ao estudo dos conteúdos de álgebra moderna.

Para trabalhos futuros pode-se explorar mais conceitos de cálculo de maneira intuitiva para conseguir mais informações sobre os polinômios, por exemplo explorar a questão de crescimento e decrescimento usando intuitivamente a ideia de derivadas.

REFERÊNCIAS

BERLINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática Através dos Tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. São Paulo: Editora Blucher, 2008.

BRASIL, M. d. E. *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL, S. d. E. a. F. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BRASIL, S. d. E. M. e. T. *PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BURTON, D. M. *The history of mathematics: An introduction*. 6. ed. Boston: McGraw-Hill Primis, 2007.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2010.

DIERINGS, A. R. *Ensino de Polinômios no Ensino Médio - uma Nova Abordagem*. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Santa Maria, 2014.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Ediitora Atlas SA, 1987.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 10. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2007.

GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: Impa, 2008.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações*. São Paulo: Atual, 2005.

JANESCH, O. R. *Álgebra II*. Florianópolis: Editora UFSC/EAD, 2008.

JANESCH, O. R.; TANEJA, I. J. *Álgebra I*. Florianópolis: Editora UFSC/EAD, 2008.

LIMA, E. L. *Curso de análise, volume 1 de Projeto Euclides*. Rio de Janeiro: Impa, 1999.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

MILIES, C. P. A solução de tartáglia para a equação do terceiro grau. *Revista do Professor de Matemática*, v. 25, 1994. Disponível em: ⟨http://www.rpm.org.br/cdrpm/25/4.htm⟩. Acesso em: 02 out. 2019.

MINAYO, M. C. de S.; DESLANDES, S. F.; GOMES, R. *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. 28. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2009.

NASCIMENTO, C. K. A. d. *Polinômios, equações algébricas e estudo das suas raízes reais*. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Ceará, 2015.

OLIVEIRA, S. L. de. *Tratado de metodologia científica: projetos de pesquisas, TGI, TCC, monografias, dissertações e teses*. São Paulo: Pioneira, 1997.

PAIVA, M. *Matemática: Paiva*. São Paulo: Moderna, 2013.

PEDROSO, H. A. Uma breve história da equação do 2º grau. *Revista Eletrônica de matemática*, p. 1–13, 2010.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Makron Books, 1996.

SILVA, E. V. d. *Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino-aprendizagem*. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) — Universidade de São Paulo, 2018.

SILVA, H. A. d. Regimento do mestrado profissional em matemática em rede nacional. SBM, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: ⟨http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/⟩. Acesso em: 03 out. 2019.

SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa*. Rio de Janeiro: Impa, 2009.

SOUZA, J. R. d. *Novo olhar matemática*. São Paulo: FTD, 2010.

Apêndice

APÊNDICE A - PRODUTO EDUCACIONAL: CADERNO DE ATIVIDADES SOBRE POLINÔMIOS

O Produto Educacional desenvolvido em nossa pesquisa de mestrado é um caderno de atividades, no qual constam a teoria sobre polinômios, exemplos e exercícios. O caderno de atividades foi elaborado com lacunas de modo a serem completadas pelos alunos.

Conceitos

Definição .1. *Um **polinômio** na variável* $\boldsymbol{x}$ *é uma expressão dada por:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ *são números reais denominados* ____________________ *e* $a_n \neq 0$*;*
- a_0 *é o coeficiente* ____________________ *do polinômio e* a_n *é o coeficiente* ____________________*;*
- $\boldsymbol{n}$ *é um número* ____________________*;*
- *o maior expoente de* $\boldsymbol{x}$*, com coeficiente não nulo, é o* ____________________ *do polinômio.*

Para indicar que $p(x)$ representa a expressão $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ escrevemos

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Exemplos:

(1) $p(x) = 10x^4 + 5x^2 - 87$ é um polinômio com grau __________, coeficiente independente __________ e coeficiente dominante __________.

(2) $q(x) = \sqrt{x} + 5x^2 - 8x$ não é um polinômio, pois $\sqrt{x} + 5x^2 - 8x = x^{1/2} + 5x^2 - 8x$ e o expoente do termo $x^{1/2}$ não é um número ____________________.

(3) $m(x) = \frac{1}{x^2} - 6x^3 + 12x + 3$ não é um polinômio, pois $\frac{1}{x^2} - 6x^3 + 12x + 3 =$ _________________________ e o expoente do termo ____________________ não é um número natural.

(4) $r(x) = \pi - \sqrt{2}x^3 - 17x^{100} + \dfrac{1}{2}x^{13}$ é um polinômio com grau __________, coeficiente independente __________ e coeficiente dominante __________. Podemos reescrever esse polinômio como ______________________________.

Exercício 1: Classifique cada expressão em polinômio ou não. Em caso negativo, justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine o grau do polinômio, o coeficiente dominante e o coeficiente independente.

(a) $q(x) = x^5 - x^3 + 5x^{-1} + 2$

(b) $s(x) = \dfrac{1}{-3x^2 + x}$

(c) $m(x) = 5 - \sqrt{17}x + 8432x^2 + 23x^7$

(d) $t(x) = 0x^{10} - \frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x$

Exercício 2: Seja $m \in \mathbb{R}$. Qual o grau do polinômio $p(x)$ dado por,

$$p(x) = (m^2 - 1)x^4 + (m + 1)x^3 + x^2 + 3.$$

Definição .2. (a) *Dizemos que um polinômio é **nulo** (ou identicamente nulo) quando todos os coeficientes do polinômio são iguais a* ____________________. *Assim,*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é nulo se, $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 =$ __________. *Não se define grau do polinômio nulo.*

(b) *Dizemos que um polinômio é **constante** se todos os coeficientes são nulos exceto o primeiro. Assim,*

$$p(x) = a + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

e é indicado por $p(x) = a$. O grau do polinômio constante é 0.

Exercício 3: Considere o polinômio $p(x) = (a^2 - 9)x^4 + (2b + 1)x^2 + a + 3$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a e b tais que:

(a) $p(x)$ seja um polinômio constante;

(b) $p(x)$ seja um polinômio nulo.

Definição .3. *Dois polinômios $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ são ditos **iguais** (ou idênticos) se $a_i = b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Exemplo:

(5) Para quais valores de a, b, c e d os polinômios $p(x) = (a+8)x^3 + (b-3)x^2 + (c-5)x + (d+10)$ e $q(x) = 12x^2 + 4x - 9$ são iguais?

Pela definição de igualdade de polinômios obtemos o seguinte sistema:

Exercício 4: Determine os valores a, b e c para que sejam iguais os polinômios $p(x) = cx^3 + 3x + 2$ e $q(x) = (a+b)x^2 + (a+3)x + (2-b)$.

Operações com Polinômios

Definição .4. *A **adição** (soma) de dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é o polinômio obtido ao se adicionarem os termos de $p(x)$ com os termos de $q(x)$ que têm, respectivamente, o mesmo expoente na variável (caso não conste um termo com determinado expoente na variável, considera-se que seu coeficiente é zero).*

Observação: Valem para a adição as propriedades comutativa, ____________________, ____________________ ____________________ (que é o polinômio nulo __________) e o ______________________________ de $p(x)$ (obtido com a troca dos sinais de todos os termos de $p(x)$).

Exemplos:

(6) Sejam $p(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 10$ e $q(x) = 5x^4 + 20x^2 - 8x - 5$. Então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 10) + (5x^4 + 20x^2 - 8x - 5) \\ &= (\underline{\qquad})x^4 + (\underline{\qquad})x^3 + (\underline{\qquad})x^2 + (\underline{\qquad})x + (\underline{\qquad}) \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{aligned}$$

(7) O simétrico (oposto) do polinômio $p(x) = 4x^3 - 3x - 1$ é

$-p(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

(8) Sejam $p(x) = x^7 - \frac{1}{5}x^3 - 1$ e $q(x) = -\sqrt{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 + 13x^2 - x + 1$. Então

$p(x) + q(x) =$

Definição .5. *A* ***subtração*** *(diferença) entre dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, nessa ordem, é definida como a adição de $p(x)$ com o oposto de $q(x)$, isto é,*

$$p(x) - q(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Exemplo:

(9) Sejam $p(x) = 10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x$ e $q(x) = 7x^4 - 14x^2 + 3x - 15$. Então,

$$p(x) - q(x) = (10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x) - (7x^4 - 14x^2 + 3x - 15)$$

e

$$q(x) - p(x) = (7x^4 - 14x^2 + 3x - 15) - (10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 5x)$$

Note que $p(x) - q(x) =$ ____________________.

(10) Calcule a diferença de $p(x) = 4x^4+4x^3-8x^2-7x+9$ com $q(x) = 4x^4-7x^3+5x^2+2x-1$.

Definição .6. *A* ***multiplicação*** *(produto) dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é o polinômio que obtemos multiplicando cada termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo e adicionando os produtos obtidos.*

Observação: Valem para a multiplicação as propriedades ____________________, ____________________, ______________________________ (que é o polinômio _______________), além das __________________________ da adição em relação a multiplicação.

Exemplos:

(11) Sejam $p(x) = 2x^2 - 1$ e $q(x) = -x^2 - 6$. Então,

$$p(x) \cdot q(x) = \left(2x^2 - 1\right) \cdot \left(-x^2 - 6\right)$$

(12) Sejam $p(x) = x - 1$ e $q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Então,

$$p(x) \cdot q(x) = (x - 1) \cdot \left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

(13) Sabendo que os polinômios $m(x), n(x)$ e $p(x)$ têm respectivamente graus 3, 5 e 7, determine o grau do polinômio $q(x)$, sendo:

(a) $q(x) = p(x) + n(x)$

O grau de $p(x)$ é _____ e o de $n(x)$ é _____, então o grau de $q(x)$ é _____.

(b) $q(x) = m(x)n(x)$

O grau de $m(x)$ é _____ e o de $n(x)$ é _____, então o grau de $q(x)$ é __________.

(c) $q(x) = p(x)m(x) - n(x)$.

O grau de $p(x)$ é _____ e o de $m(x)$ é _____, então o grau de $p(x)m(x)$ é _____, e o grau de $n(x)$ é _____, então o grau de $q(x)$ é _____.

Exercício 5: Dados os polinômios $q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1$ e $t(x) = x^3 + 2x + 4$, determine o polinômio $p(x)$ tal que $p(x) + 3q(x) = 2t(x)$.

Exercício 6: Obtenha os valores das constantes a e b na identidade:

$$(x^3 + x + 1)(ax + b) + 4x^2 - 3x - 1 = 2x^4 + x^3 + 6x^2.$$

Observação: O grau do polinômio produto é igual a ______________ dos polinômios fatores. O grau do polinômio soma é ___________________ ao maior dos graus ,como ilustrado no Exemplo 10.

Divisão de Polinômios

Algoritmo da Divisão: Efetuar a divisão de um polinômio $p(x)$ pelo polinômio $m(x)$ não nulo significa determinar um polinômio $q(x)$ e um polinômio $r(x)$, tais que:

$$p(x) = m(x)q(x) + r(x)$$

com grau $r(x) <$ grau $m(x)$, ou $r(x) = 0$.
Assim, dizemos que:

$p(x)$ é o ___________________; $m(x)$ é o ___________________;
$q(x)$ é o ___________________; $r(x)$ é o ___________________.

Quando $r(x) = 0$, dizemos que a divisão é ___________________, ou que $p(x)$ é ___________________ por $m(x)$.

Além de ser possível provar a existência do quociente e resto, demonstra-se que existem um único quociente $q(x)$ e um único resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Essa demonstração pode ser encontrada em Janesch (2008, p. 32) e no Teorema 5.2 desse trabalho.

Exemplos:

(14) A divisão do polinômio $p(x) = 6x^2 - 8x + 16$ pelo polinômio $m(x) = -3x + 1$ resulta no quociente $q(x) = -2x + 2$ e resto $r(x) = 14$, ou seja,

$$6x^2 - 8x + 16 = \underline{\hspace{6cm}}$$

(15) A divisão do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 22x + 40$ pelo polinômio $m(x) = x - 4$ resulta no quociente $q(x) = x^2 + 3x - 10$ e no resto $r(x) = 0$, ou seja,

$$x^3 - x^2 - 22x + 40 = \underline{\hspace{6cm}}$$

Isto significa que $p(x)$ ____________________________.

(16) A divisão do polinômio $p(x) = x^7+9x^4-8x^3-12x+6$ pelo polinômio $m(x) = x^5-5x^3+7x^2-5x+8$ resulta no quociente $q(x) = x^2+5$ e resto $r(x) = 2x^4+22x^3-43x^2+13x-34$, logo

$$x^7 + 9x^4 - 8x^3 - 12x + 6 = \underline{\hspace{7cm}}$$

Exercício 7: Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que o quociente e resto da divisão de $p(x) = ax^4 - 3x^3 - 20x^2 - x + 13$ por $m(x) = x^2 - 3x$ sejam respectivamente $q(x) = 5x^2 + 12x + 16$ e $r(x) = 47x + 13$.

Veremos a seguir métodos para encontrar o quociente e o resto na divisão de polinômios.

Método de Descartes ou Coeficientes a Determinar: Utilizado para encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Esse método se baseia em dois fatos:

1. grau $q(x)$ =grau $p(x)-$grau $m(x)$
2. grau $r(x)$ <grau $m(x)$ ou $r(x) = 0$.

O Método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

P1: calculam-se grau $q(x)$ e grau $r(x)$;

P2: constroem-se os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ deixando seus coeficientes como incógnitas;

P3: determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$.

Observação .1. *O método de Descartes é pouco utilizado, o mais usual é o Método das Chaves, por ser parecido com a divisão de números inteiros, e será apresentado na sequência.*

Exemplo:

(17) Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $m(x) = x - 2$, pelo Método de Descartes:

P1: grau $q(x) =$ grau $p(x) -$ grau $m(x) = 3 - 1 = 2$ e grau $r(x) <$ grau $m(x) = 1$;

P2: $q(x) = ax^2 + bx + c$ e $r(x) = d$;

P3:

$$\begin{aligned} p(x) &= m(x)q(x) + r(x) \\ 5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= (x-2)(ax^2 + bx + c) + d \\ 5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= \underline{\hspace{6cm}} \\ 5x^3 + x^2 - 10x - 24 &= \underline{\hspace{7cm}} \end{aligned}$$

Logo, temos o sistema,

Portanto, $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ __________.

Método das Chaves: Utilizado para encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $m(x)$. Podemos aplicar a mesma ideia da divisão de números inteiros utilizando chaves e seguindo os passos:

P1: escrever os polinômios (divisor e dividendo) em ordem decrescente dos seus expoentes e completá-los quando necessário, com coeficientes zero;

P2: dividir o termo de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor, o resultado será um termo do quociente;

P3: multiplicar o termo obtido no passo 2 pelo divisor e subtrair esse produto do dividendo;

P4: se a diferença for o polinômio nulo ou o seu grau for menor do que o grau do divisor, a diferença será o resto da divisão e a divisão termina;

P5: caso contrário, retomasse o passo 2, considerando a diferença como um novo dividendo.

Exemplo:

Os seguintes exemplos consistem em armar e efetuar, conforme o modelo

$$\begin{array}{c|c} p(x) & m(x) \\ \cline{2-2} \vdots & q(x) \\ \cline{1-1} r(x) & \end{array}$$

(18) A divisão utilizando o Método das Chaves dos polinômios:

a) $p(x) = x^3 + 3x - 4$ e $m(x) = x - 1$

Resultam em: $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ _______________.

b) $p(x) = x^2 + 5x - 6$ e $m(x) = x - 2$

Resultam em: $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ _______________.

c) $p(x) = 5x^3 - 4x + 8$ e $m(x) = 3x - 2$

Resultam em: $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ _______________.

(19) Verifique se o polinômio $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ é divisível por $x - 1$ e também por $2x + 3$.

Exercício 8: Determine o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 8x^2 - 15$ por $g(x) = 5x^2 - 3x + 4$.

Definição .7. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio. O **valor numérico do polinômio** $p(x)$ **em** α é igual ao número real obtido quando substituímos x por α e efetuamos as operações indicadas. Indica-se por $p(\alpha)$. Assim, de modo geral, o valor numérico de $p(x)$ em α é:*

$$p(\alpha) = \rule{6cm}{0.4pt}.$$

Exemplos:

(20) O valor numérico do polinômio $p(x) = x^3 - 9x^2 + 3x + 5$ em $x = -5$ e $x = 1$ é
$p(-5) =$ ____________________ = __________ e
$p(1) =$ ____________________ = __________, respectivamente.

(21) O valor numérico do polinômio $q(x) = -\frac{5}{3}$ em $x = 0, x = 2$ e $x = \pi$ é __________.

(22) Os restos da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - 1$ e por $x + 2$ são respectivamente, 1 e -23. Qual o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 1)(x + 2)$?

Observação: Considere um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e um número real α. Então:

- Se $\alpha = 1$, o valor numérico de $p(x)$ em α é ____________________ de seus coeficientes:

$$p(1) = \rule{4.5cm}{0.4pt} = \rule{4.5cm}{0.4pt}.$$

- Se $\alpha = 0$, o valor númerico de $p(x)$ em α é o termo ___________________:

$$p(0) = \underline{\hspace{6cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Definição .8. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos que um número real α é* ***raiz*** *do polinômio $p(x)$ se,*

$$p(\alpha) = \underline{\hspace{2cm}},$$

ou seja, o valor numérico de $p(x)$ em α é ___________________.

Exemplos:

(23) 4 e 3 são raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 12$, pois

$p(4) =$ ___________________ $=$ _________ e

$p(3) =$ ___________________ $=$ _________.

(24) Dado o polinômio $q(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, temos:

- $q(1) =$ ___________________ $=$ _________, logo 1 _________ de $q(x)$.
- $q(2) =$ ___________________ $=$ _________, logo 2 _________ de $q(x)$.

Exercício 9: O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admite as raízes 6 e 1. Calcule os coeficientes a e b.

Exercício 10: Quais dos itens a seguir correspondem às raízes do polinômio

$$p(x) = x^6 + 3x^5 - 11x^4 - 15x^3 + 46x^2 - 24x?$$

(a) -3 (b) 5 (c) 0 (d) 6 (e) 4 (f) 1 (g) -4 (h) 2

(Sugestão: esse exercício pode ser resolvido em grupos, cada grupo deve testar algumas das possibilidades para assim o processo ser mais rápido.)

Exercício 11: Use a fórmula de Bháskara para determinar as raízes dos polinômios quadráticos:

(a) $p(x) = 3x^2 - 15x + 18$

(b) $k(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$

(c) $r(x) = x^2 - 2x + 2.$

Exercício 12: Determine o polinômio $p(x)$ do 2º grau tal que $p(0) = 2, p(1) = 3$ e $p(2) = 8$. Quantos polinômios existem satisfazendo tais igualdades.

O próximo resultado trata sobre a divisão de polinômios em que o divisor é um polinômio de grau um, $x - k$, então, o resto será o valor do polinômio dividendo calculado em k.

Teorema do Resto de D'Alembert: Considere um polinômio $p(x)$ não constante. Então, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - k$, $k \in \mathbb{R}$, é __________.

Demonstração.

Exemplo:

(25) Determine o resto da divisão de $p(x) = x^4 + 5x^3 - 7x + 13$ por $q(x) = x + 4$.

Utilizando o método das chaves, temos que logo, o resto é $r(x) =$ _____.

Por outro lado, pelo Teorema de D'Alembert, temos que o resto da divisão é

____

O resultado a seguir é um dispositivo muito prático, rápido e simples que permite efetuar divisão de polinômios por um binômio. Podemos encontrar essa demonstração no livro (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 118) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Algoritmo de Briot-Ruffini: Utilizado para determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ por um binômio do tipo $m(x) = x - k$. O algoritmo segue conforme os passos

P1: na primeira linha colocamos os coeficientes de $p(x)$, do maior grau para o menor, completando com zero os termos faltantes, e na segunda linha à esquerda colocamos o valor de k;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

P2: o primeiro número da terceira linha é o coeficiente do termo dominante de $p(x)$;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

P3: o segundo número da segunda linha é obtido multiplicando-se o primeiro número da terceira linha por k;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & & & & \\ \hline & \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & & & & & \end{array}$$

P4: o segundo número da terceira linha é obtido somando-se os números que estão imediatamente acima dele na primeira e segunda linha;

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & & & & \\ \hline & b_{n-1} & \underbrace{kb_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}} & & & & \end{array}$$

P5: continua-se repetindo o processo: os números da segunda linha são obtidos multiplicando-se os número da terceira linha situado na coluna anterior por k e os números da terceira linha são obtidos somando-se os números que estão imediatamente acima dele na primeira e segunda linha.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & kb_{n-2} & \cdots & & \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \underbrace{kb_{n-2}+a_{n-2}}_{b_{n-3}} & \cdots & & \end{array}$$

P6: termina quando a terceira linha estiver completa.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & kb_{n-2} & \cdots & & \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r \end{array}$$

O quociente será $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0$ e o resto $r(x) = r$.

Veja no exemplo a seguir como proceder com o algoritmo.

Exemplo:

(26) Determine, usando o Algoritmo de Briot-Ruffini, a divisão de $p(x) = x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 2x - 6$ por $q(x) = x - 2$. Temos que,

Passo 1

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Passo 2

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Passo 3

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

$\cdot 2$

Passo 4

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & & & \\ \hline & 1 & 7 & & & \end{array}$$

$+$

Passo 5

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & & \\ \hline & 1 & 7 & & & \end{array}$$

$\cdot 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & & \\ \hline & 1 & 7 & 29 & & \end{array}$$

$+$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & \\ \hline & 1 & 7 & 29 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \end{array}$$

Passo 6

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & 112 \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 15 & -2 & -6 \\ 2 & & 2 & 14 & 58 & 112 \\ \hline & 1 & 7 & 29 & 56 & \boxed{106} \end{array}$$

Logo, $q(x) =$ ____________________ e $r(x) =$ _____.

(27) Determine, usando o Algoritmo de Briot-Ruffini, a divisão de $p(x) = x^3 - 5x + 4$ por $q(x) = x - 1$.

Logo, $q(x) =$ __________ e $r(x) =$ _____.

A seguir serão apresentadas as Relações de Girard, para polinômios de segundo e terceiro grau, que trazem condições que relacionam as raízes e os coeficientes dos polinômios. Essa demonstração pode ser encontrada no livro Iezzi (2005, p. 115) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Relações de Girard: Para as equações de segundo grau, seja $p(x) = ax^2 + bx + c$, se r_1 e r_2 são as raízes, temos as relações,

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \underline{\hspace{3cm}} \\ r_1 r_2 &= \underline{\hspace{3cm}}. \end{aligned}$$

Para as equações de terceiro grau, seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com raízes r_1, r_2 e r_3, temos as relações,

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= \underline{\hspace{3cm}} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 &= \underline{\hspace{3cm}} \\ r_1 r_2 r_3 &= \underline{\hspace{3cm}}. \end{aligned}$$

Exemplo:

(28) Se a, b e c são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Pelas relações de Girard,

$$\begin{aligned} a + b + c &= \underline{\hspace{1.5cm}} \\ ab + ac + bc &= \underline{\hspace{1.5cm}} \\ abc &= \underline{\hspace{1.5cm}}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \underline{\hspace{5cm}}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Note que podemos resolver esse exemplo usando a divisão de polinômios. Analisando, sabemos que 2 é uma raiz de $p(x)$, usando Briot-Ruffini obtemos $q(x) =$

____________, assim $p(x) = q(x) \cdot$ __________. Agora resolvendo $q(x) = 0$, usando a fórmula de Bháskara, temos

Então, ____________________ também são raízes, e portanto,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \underline{\hspace{6cm}}.$$

O próximo resultado é o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) que garante a existência de raízes complexas de qualquer polinômio não constante com coeficientes complexos. Note que o mesmo não vale para raízes reais de polinômios com coeficientes reais, por exemplo, $p(x) = x^2 + 4$ tem coeficentes reais, mas não possui raízes reais. Essa demonstração pode ser encontrada em duas versões no Capítulo 5 desse trabalho ou no livro Hefez e Villela (2012, p. 192). Também veremos o Teorema da Decomposição, que é uma consequência imediata do TFA e do Algoritmo da Divisão. Com este teorema podemos afirmar que qualquer polinômio com grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes complexas.

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio de coeficientes complexos e de grau n possui pelo menos _________________________.

Exemplo:

(29) Encontre as raízes dos polinômios:

a) $p(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30$.

O polinômio $p(x)$ tem grau 4 e tem __________ raízes reais, a saber _________________________.

b) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$.

O polinômio $q(x)$ tem grau 3 e ____________________ são suas raízes. Logo, só uma é __________ e as outras duas são _______________.

c) $m(x) = 3x^2 + 6$

O polinômio $m(x)$ tem grau 2 e tem duas raízes _______________, a saber _______________.

O próximo teorema mostra que podemos decompor um polinômio com suas raízes, essa demonstração pode ser encontrada em Iezzi (2005, p. 106) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema da Decomposição: Todo polinômio

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em n fatores do ________________, isto é

$$p(x) = a_n \cdot \rule{6cm}{0.4pt}$$

em que $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são as raízes de $p(x)$ (tais raízes podem ser complexas).

Exemplo:

(30) Decomponha em fatores lineares os polinômios do exemplo anterior.

a) $p(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 =$ ________________________.

b) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12 =$ ________________________.

c) $m(x) = 3x^2 + 6 =$ ________________________.

Nem toda raiz de um polinômio real é um número __________, como por exemplo o item (b) do Exemplo 30. Temos alguns resultados que nos indicam como encontrar as raízes reais, caso existirem.

O próximo teorema nos fornece um conjunto finito de todas as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros dado. Essa demonstração pode ser encontrada no livro Iezzi (2005, p. 141) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema das Raízes Racionais: Se um polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

com $a_n \neq 0$ de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_+^*$ e p e q são primos entre si, então p é divisor de __________ e q é divisor de __________.

Exemplos:

(31) Resolva os seguintes itens:

a) Quais são as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$?

Pelo Teorema das Raízes Racionais, as raízes estão no conjunto

____________________, testando no polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$

Então, a única raiz inteira é __________.

b) Decomponha o polinômio $p(x)$ em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.

Basta dividir $p(x)$ por _______________,

Podemos escrever

$$p(x) = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

c) Quantas raízes reais tem esse polinômio?

Basta utilizar a fórmula de Bháskara para ver se $q(x) =$ _______________ tem raízes reais. Temos que o delta será:

$$\Delta = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

Como o delta é __________ do que zero, $q(x)$ __________ raízes reais, portanto o polinômio $p(x)$ tem _______________.

(32) Se o polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ pode ser fatorado na forma $(2x - 1)(x + 3)(x - k)$, então qual é o valor de k?

Solução 1: Pela divisão de polinômios temos que

$$2x^3 - 5x^2 - 28x + 15 \;\big|\; \underline{2x - 1}$$

então divida o resultado por $x + 3$

Como

$$p(x) = (2x - 1)(x + 3)(x - k)$$

então $k =$ _____. Pela igualdade de polinômios segue que

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x-1)(x+3)(x\_\_\_\_\_) \\ &= (2x^2 + 6x - x - 3)(x\_\_\_\_\_) \\ &= (2x^2 + 5x - 3)(x\_\_\_\_\_) \end{aligned}$$

$$= 2x^3 - 10x^2 + 5x^2 - 25x - 3x + \_\_\_\_\_$$
$$= 2x^3\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Solução 2: Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que as raízes racionais estão no conjunto ____ testando, vemos que além de $1/2$ e -3, _____ também é raiz, portanto, $k =$ _____.

(33) Utilize o Teorema das Raízes Racionais para encontrar as raízes racionais, se houverem, do polinômio $p(x) = x^3 - 4x + 6$.

Pelo Teorema das Raízes Racionais temos que as raízes racionais estão no intervalo ______________________________, substituindo em $p(x)$:

então, $p(x)$ ____________________ raiz racional.

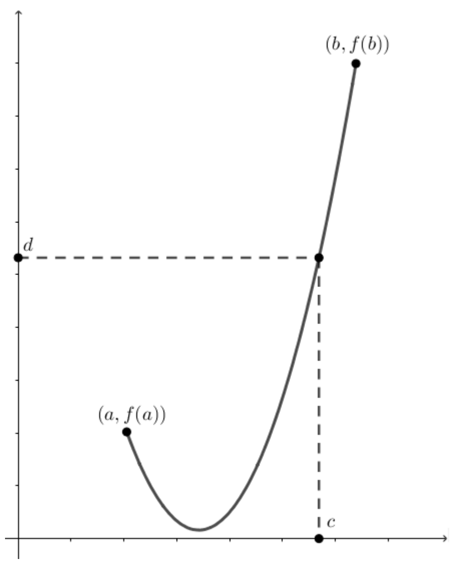
O fato de não haverem raízes racionais no exemplo acima não significa que o polinômio não tem nenhuma raiz real, podemos ter raízes irracionais, e para encontrá-las temos um resultado de Calculo Diferencial e Integral I, o Teorema do Valor Intermediário, e sua demonstração pode ser encontrada no livro Lima (1999, p. 234) ou no Capítulo 5 desse trabalho.

Teorema do Valor Intermediário: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer d entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que

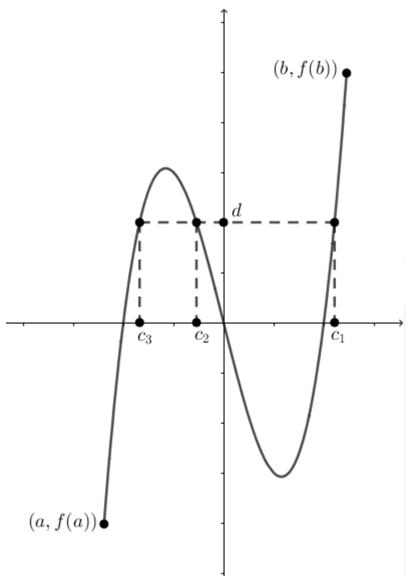
$$f(c) = d.$$

Esse teorema faz muito sentido quando se considera que os gráficos de funções contínuas são desenhados sem retirar o lápis do papel, então se sabemos que o gráfico passa por $(a, f(a))$ e por $(b, f(b))$, com $f(a) \neq f(b)$, então ele deve passar por todos os pontos entre $f(a)$ e $f(b)$, como ilustrado na Figura 2 (a). Como as funções polinomiais são sempre contínuas em um intervalo, sempre podemos usar esse teorema. Note que o teorema diz que existe $c \in (a, b)$, mas ele não é necessariamente único, como, por exemplo, ilustra a Figura 5 (b).

Figura 5 – Teorema do Valor Intermediário Caderno



(a)



(b)

Fonte: produção da autora, 2020.

Teorema de Bolzano: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

Demonstração.

Sendo assim, o Teorema de Bolzano pode ser utilizado para encontrar intervalos que contenham raízes de um polinômio, basta achar um intervalo em cujos extremos a função assuma valores com sinais ______________. Podemos ver como utilizá-lo nos exemplos abaixo.

Exemplo:

(34) Já vimos que o polinômio $p(x) = x^3 - 4x + 6$ não tem raízes racionais, utilize o Teorema de Bolzano e encontre, se houverem, intervalos que contenham as raízes que não são racionais.

Vimos anteriormente, os valores de $p(x)$ em:

$$\begin{array}{cc} p(1) = 3, & p(-1) = 1 \\ p(2) = -2, & p(-2) = -18 \\ p(3) = -3, & p(-3) = -57 \\ p(6) = 78, & p(-6) = -354. \end{array}$$

então, pelo Teorema de Bolzano temos raízes reais nos intervalos ____________________________. O que significa que o polinômio tem _____ raízes reais.

(35) Utilize o Teorema das Raízes Racionais para encontrar as raízes racionais do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$, encontre um intervalo para as raízes que não forem racionais, se houverem.

Pelo Teorema das Raízes Racionais, as raízes racionais estão no conjunto ________________________________, substituindo em $p(x)$

vemos que _____ é uma raiz de $p(x)$, e as outras raízes reais, se existirem, serão números ______________.

Pelo Teorema de Bolzano temos que as outras raízes estão nos intervalos:

____

____.

Podemos utilizar o Algoritmo de Briot- Ruffini para diminuir o grau de $p(x)$ e depois utilizar a fórmula de ______________ para encontrar as outras _________ raízes.

Temos $g(x) =$ ______________, que tem as raízes ___________________, que estão nos intervalos que o Teorema de Bolzano mostrou que estariam. Pelo Teorema da Decomposição, sabemos que podemos escrever $p(x)$ da forma,

$$p(x) = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_).$$

(36) Analise o polinômio $p(x) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x + 32$ e tente localizar suas raízes.

Para esse polinômio fica bastante cansativo utilizar o Teorema das Raízes Racionais, por causa da quantidade de números que o teorema fornece, inclusive frações. Vamos substituir alguns valores para usar o Teorema de Bolzano,

$$\begin{aligned} p(0) &= \underline{\hspace{1.5em}}, \quad p(-1) = \underline{\hspace{1.5em}} \\ p(1) &= \underline{\hspace{1.5em}}, \quad p(-2) = \underline{\hspace{1.5em}} \\ p(2) &= \underline{\hspace{1.5em}}, \quad p(-3) = \underline{\hspace{1.5em}} \\ p(3) &= \underline{\hspace{1.5em}}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Bolzano temos uma raiz no intervalo ______________, isso não significa que todas as outras raízes são complexas, apenas não obtivemos resultados para encontrar as raízes reais. Ou seja, para polinômios de grau maior ainda é difícil, apenas com esses resultados, determinar todas as raízes. Seria necessário um estudo mais avançado de funções, como por exemplo o que é visto nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral I nas graduações.

Observação .2. *Todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos ______________, pois se $a_n > 0$ (vale o mesmo para $a_n < 0$), temos que quando x assume valores muito altos positivos, então o valor do polinômio também assume valores muito altos positivos. Quando x assume valores muito altos negativos, então o polinômio também assume valores muito altos negativos, pois um número negativo elevado a uma potência ímpar resulta num número negativo. Assim, existem a e b tais que $f(a)f(b) < 0$ e o polinômio tem uma raiz real pelo Teorema de Bolzano.*

CONSIDERAÇÕES

Maiores informações sobre a concepção e análise das atividades podem ser encontradas no decorrer da dissertação. No Capítulo 6 temos as soluções do exemplos apresentamos no caderno de atividades, além disso, temos uma lista, com resoluções dos exercícios e indicações aos professores. Com base neste caderno podem ser desenvolvidos outros materiais para ensino de polinômios.