Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Thiago Milani Cabral

Os Trabalhos Envolvendo Os Números De Stirling

Rio de Janeiro
2019

Thiago Milani Cabral

Os Trabalhos Envolvendo Os Números De Stirling

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Younes Nikdelan

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

C117 Cabral , Thiago Milani.
Os trabalhos envolvendo os números de Stirling / Thiago Milani. - 2019.
58 f. : il.

Orientador: Younes Nikdelan.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística.

1. Análise numérica - Teses. 2. Análise combinatória - Teses. 3. Polinômios - Teses. I. Nikdelan, Younes. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 519.6

Patrícia Bello Meijinhos CRB-7/5217 – Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Assinatura | Data

Thiago Milani Cabral

Os Trabalhos Envolvendo Os Números De Stirling

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 27 de Agosto de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Younes Nikdelan (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Ruben Edwin Lizarbe Monje
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Seyed Hamid Hassanzadeh Hafshejani
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Aos meus familiares, minha esposa Cássia, meu filho Arthur que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

RESUMO

MILANI CABRAL, Thiago *Os Trabalhos Envolvendo Os Números De Stirling*. 2019. 58 f. Dissertação (Mestrado em PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística , Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Neste trabalho iremos apresentar os números de Stirling de primeiro e segundo tipos, suas propriedades e identidades, e demonstrando algumas delas. Além disso será apresentada a relação desses números com os números de Bell, números Harmônicos e números de Lah. Também será tratatado parcialmente um problema que relaciona certa equação diferencial com números de Stirling.

Palavras-chave: Números do Stirling do primeiro tipo. Números do Stirling do segundo tipo. Números de Bell. Números Harmônicos.

ABSTRACT

MILANI CABRAL, Thiago *Work Involving Stirling Numbers*. 2019. 58 f. Dissertação (Mestrado em PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística
, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

In this dissertation we will present Stirling numbers of the first and second types, their properties and identities, some of which will be demonstrated. In addition, the relationship of these numbers to Bell numbers, Harmonic numbers an Lah numbers will be presented. We will also partially address a problem that relates a certain differential equation to Stirling numbers.

Keywords: Stirling numbers of the first kind. Stirling numbers of the second kind. Bell numbers. Harmonic numbers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar a teoria combinatória desenvolvida por Stirling, os números de Stirling de primeiro e segundo tipos, suas propriedades, relações e algumas de suas aplicações.

Este trabalho será dividido em parte histórica e mais três capítulos, na primeira parte é apresentada a história de James Stirling, suas publicações e contextos que permitiram a realização de tais trabalhos.

No segundo capítulo, será apresentado o conceito de ciclos em uma permutação e posteriormente a definição dos números de Stirling de primeiro tipo, sua relação de recorrência e algumas propriedades demonstradas por indução.

No terceiro capítulo, será apresentado o conceito de partição de um conjunto, necessário para a definição do número de Stirling de segundo tipo. Definiremos a relação de recorrência e algumas propriedades, bem como suas demontrações por indução, e por último será definida a relação entre os dois tipos de números de Stirling.

No quarto capítulo será abordada a relação dos números de Bell, dos números harmônicos e dos números de Lah com os números de Stirling de segundo tipo. Será apresentada uma aplicação relacionada a equações diferenciais.

1 HISTÓRIA

1.1 JAMES STIRLING

[1] Nascido em maio de 1692 no Garden, em Stirlingshire ou Condado de Stirling, na Escócia. Filho de Archibald Stirling e Anna Hamilton. James era seu terceiro filho e ele nasceu na propriedade da família em Garden, cerca de 20 km a oeste da cidade escocesa de Stirling. A família era forte defensora da causa jacobita e isso teria uma influência significativa na vida de James Stirling.

A causa jacobita foi a do rei dos Stuart, James II (da Grã-Bretanha - James VII da Escócia: Jacobus em latim), exilado após a Revolução de 1688 e seus descendentes. A Escócia uniu-se à Inglaterra e Gales em 1707. Os Stuarts eram católicos escoceses, mas católicos romanos e, portanto, tinham apenas um apoio limitado. Eles, no entanto, ofereceram uma alternativa à coroa britânica com um tribunal exilado na França, que tinha forte apoio de muitos como a família Stirling. Quando James Stirling tinha cerca de 17 anos, seu pai foi preso e acusado de alta traição por causa de suas simpatias jacobitas. No entanto, ele foi absolvido das acusações.

Nada se sabe da infância de Stirling ou de seus anos de graduação na Escócia. A primeira informação definitiva que sabemos é que ele viajou para Oxford no outono de 1710 para se matricular lá. Na verdade, Stirling matriculou-se no Balliol College Oxford em 18 de janeiro de 1711 como um Snell Exhibitioner.

Alguns livros afirmam que Stirling estudou na Universidade de Glasgow. No entanto, isso não é absolutamente certo. Tweddle [2] observa que um estudante com o nome "James Stirling"matriculado na Universidade de Edimburgo em 24 de março de 1710, não se formou, e que possui uma assinatura semelhante à do matemático.

Em 1717 Stirling publicou seu primeiro trabalho *lineae tertii Ordinis Neutoniana* que estendeu a teoria de Newton para curvas planas de grau 3, adicionando 4 novos tipos de curvas às 72 estudadas por Newton. No trabalho há outros resultados que Stirling obteve. Há resultados na curva de descida mais rápida, resultados na catenária (em particular relacionando esses problemas com o de colocar esferas em um arco) e resultados em trajetórias ortogonais. O problema das trajetórias ortogonais foi levantado por Leibniz e muitos matemáticos trabalharam no problema, além de Stirling, incluindo Johann Bernoulli , Nicolaus (I) Bernoulli , Nicolaus (II) Bernoulli e Leonard Euler . Sabe-se que Stirling resolveu o problema no início do ano de 1716.

No final de 1724, Stirling viajou para Londres, onde permaneceu por dez anos. Foram dez anos em que Stirling foi muito ativo matematicamente, correspondendo a muitos matemáticos e desfrutando de sua amizade com Newton . Newton propôs Stirling para uma bolsa da Royal Society of London e, em 3 de novembro de 1726, Stirling foi

Figura 1 - Methodus


Methodus Differentialis:
SIVE
TRACTATUS
DE
SUMMATIONE
ET
INTERPOLATIONE
SERIERUM INFINITARUM.
AUCTORE *JACOBO STIRLING*, R. S. S.
LONDINI:
Typis GUL. BOWYER.
Impensis G. STRAHAN ad Insigne Globi aurati e regione
Excambii Regalis. MDCCXXX.

Fonte: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-letter-and-visiting-card-of-augustus-de-morgan

eleito.

No período que esteve em Londres, Stirling publicou sua obra mais importante *Methodus differentialis* em 1730, Figura 1. O livro foi escrito em Latin, foi um dos livros mais científicos da época. Ele contém inúmeros resultados e idéias das quais Stirling é lembrado até hoje (os números de Stirling, a fórmula de interpolação de Stirling, a fórmula de Stirling para $\ln n!$), mas também inúmeros materiais sobre transformações de séries e processos limitantes. Séries fatoriais inversas, séries hipergeométricas e séries assintóticas. Interpolação e quadratura são discutidos e há uma impressionante coleção de cálculos para ilustrar a eficácia dos métodos apresentados.

O livro de Stirling foi bem recebido por seus contemporâneos. Houveram citações e utilização de seus resultados em alguns trabalhos de Euler e De Moivre. O trabalho de Stirling foi baseado no livro *"Methodus Differentialis"*de Newton no qual ele apresenta proposições sobre formulas de interpolação e quadratura.

Um dos principais objetivos do livro foi considerar métodos de acelerar a convergência de séries. Stirling observa no Prefácio que Newton considerou esse problema. Como um exemplo do problema que ele está tentando resolver, Stirling dá o exemplo da série $\sum \frac{1}{[2n\,(2n-1)]}$ que havia sido estudada por Brouncker em seu trabalho na área sob uma hipérbole . Stirling escreve, em Methodus differentialis , que:

> *...se alguém encontrasse um valor exato desta série para nove lugares ... eles precisariam de mil milhões de termos; e esta série converge muito mais rápido que muitos outros ...*

Muitos exemplos de seus métodos são fornecidos, incluindo a série de Gregory-Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

e ele também dá um teorema para tratar a convergência de um produto infinito. Incluído neste trabalho sobre aceleração da convergência é uma discussão sobre os métodos de De Moivre.

O livro contém outros resultados sobre a função Gamma e a função Hipergeométrica. De Moivre publicou *Miscellanea Analytica* em 1730. Stirling escreveu para De Moivre apontando alguns erros que ele havia feito em uma tabela de logaritmos de fatoriais no livro e também contando De Moivre sobre o Exemplo 2 à Proposição 28 do *Methodus Differentialis*. De Moivre foi capaz de estender seus resultados anteriores usando as idéias de Stirling e publicou um Suplemento à Miscellanea Analytica alguns meses depois. Claramente Stirling e De Moivre regularmente correspondiam por volta dessa época em setembro de 1730, Stirling relata o episódio e os novos resultados de De Moivre em uma carta para Gabriel Cramer .

Euler escreveu a Stirling em 8 de junho de 1736 de São Petersburgo. Abaixo encontra-se sua carta em que ele dá sua opinião sobre o trabalho de Stirling:

> *... quanto mais aprendi com seus excelentes artigos, que vi aqui e ali em suas Transações, sobre a natureza das séries, um estudo no qual realmente gastei muito esforço, mais gostaria de me familiarizar com você para que eu pudesse receber mais de você e também enviar minhas próprias deliberações para o seu julgamento. Mas antes de escrever para você, procurei com grande entusiasmo por seu excelente livro sobre o método das diferenças, uma revisão que eu havia visto pouco tempo antes na Acta Lipsiensis, até atingir meu desejo. Agora que o li atentamente, estou verdadeiramente espantado com a grande abundância de excelentes métodos contidos em um volume tão pequeno, por meio do qual você mostra como somar as séries convergentes com facilidade e como interpolar as progressões que são muito difíceis de lidar. Mas especialmente agradável para mim foi a proposição XIV de parte1 em que você dá um método pelo qual séries, cuja lei de progressão nem sequer é estabelecida, pode ser resumida com grande facilidade usando apenas a relação dos últimos termos, certamente este método se estende amplamente e é de grande utilidade. De fato, a prova dessa proposição, que você parece ter deliberadamente*

Figura 2 - Tabulam1

Tabulam priorem.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
	1	3	7	15	31	63	127	255	&c.
		1	6	25	90	301	966	3025	&c.
			1	10	65	350	1701	7770	&c.
				1	15	140	1050	6951	&c.
					1	21	266	2646	&c.
						1	28	461	&c.
							1	36	&c.
								1	&c.
									&c.

retido, me causou enorme dificuldade, até que finalmente consegui, com muito prazer, extraí-la dos resultados precedentes, razão pela qual ainda não consegui examinar detalhadamente todas as proposições subseqüentes

Além do seu livro mais famoso, Stirling publicou outras obras tais como: The Differential Method: Or, A Treatise Concerning Summation and Interpolation of Infinite Series, E. Cave, London 1749 e Of the Figure of the Earth, and the Variation of Gravity on the Surface, Philosophical Transactions 39, 1735.

Stirling foi eleito membro da Royal Academy of Berlin, em 1746. Em 1753, ele renunciou à Royal Society como ele estava em dívida com a sociedade e não podia mais pagar as assinaturas anuais. Custou-lhe 20 libras para renunciar.

James Stirling faleceu aos 78 anos no dia 5 de dezembro de 1770 em Edimburgo.

Stirling e seus números

Como visto em [3], o nome "números de Stirling" vem do matemático dinamarquês Niels Nielsen (1865–1931). Na página 68 de seu livro, Nielsen atribui esta nomenclatura a Stirling. No começo de seu livro, Stirling estudou cuidadosamente os coeficientes A_n^m na sentença

$$z^m = A_1^m z + A_2^m z(z-1) + A_3^m z(z-1)(z-2) + \cdots + A_m^m z(z-1)\cdots(z-m+1),$$

onde $m = 1, 2, \cdots$. Na página 8 ele apresentou a tabela dada na Figura 2 contendo alguns desses coeficientes. Nesta Tabela m varia horizontalmente, da esquerda para a direita, e n verticalmente, de cima para baixo. Os números dessa Tabela são os que chamamos hoje

Figura 3 - Tabulam2

Tabula posterior.

1									
1	1								
2	3	1							
6	11	6	1						
24	50	35	10	1					
120	274	225	85	15	1				
720	1764	1624	735	175	21	1			
5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
40320	109584	105056	67284	22449	4536	546	36	1	
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

em dia de números de Stirling de segundo tipo. Curiosamente, em seu livro a definição dos números de Stirling de primeiro tipo, sem sinal, veio após os de segundo tipo.

2 NÚMEROS DE STIRLING DE PRIMEIRO TIPO

Neste capítulo iremos apresentar e definir os números de Stirling de primeiro tipo sem sinal, com sinal e as relações de recorrência que eles possuem. Desenvolveremos algumas propriedades para os números de Stirling de primeiro tipo, demonstrando os teoremas e proposições por indução.

Começando pela explicação dos números de Stirling sem sinal, vamos considerar o conjunto $S = \{1, 2, 3\}$, podemos descrever todas as permutações de S utilizando o diagrama abaixo, onde a primeira linha representa o elemento do conjuntos S e a segunda linha representa uma possível permutação. Com isso obtemos todas as permutações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que o conjunto S permite 6 permutações, ou seja, (o conjunto de todas a permutações de S),$S_3 = 3! = 6$ permutações, como foi dito anteriormente.

No segundo diagrama temos uma permutação, onde o algarismo 2 está no lugar do 1; o algarismo 3 está no lugar do 2 e o algarismo 1 está no lugar do 3, ou seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para uma melhor compreensão, podemos representar a situação acima utilizando uma notação que será útil na definição de números de Stirling de primeiro tipo, a saber, ciclos em uma permutação.

2.1 CICLOS EM UMA PERMUTAÇÃO

Considere o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a seguinte permutação:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Note que $\sigma(1) = 2$ e $\sigma(2) = 1$. Isto significa que, na primeira posição o segundo elemento do conjunto deve ser posto, na segunda posição o primeiro elemento do conjunto deve ser colocado, este comportamento é chamado de "ciclo". Observe também que $\sigma(3) = 4, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 6$ e $\sigma(6) = 3$, isto significa que, na terceira posição o quarto elemento do conjunto deve ser posto, na quarta posição o quinto elemento do conjunto deve ser colocado, na quinta posição o sexto elemento deve ser colocado e, por fim, na sexta posição o terceiro elemento deve ser colocado, fechando assim mais um ciclo.

Podemos representar o primeiro ciclo por $(1\,2)$ ou $(2\,1)$, onde o segundo elemento ocupa a primeira posição e o primeiro elemento ocupa a segunda posição, e o segundo ciclo por $(3\,4\,5\,6)$, ou $(4\,5\,6\,3)$, ou ainda $(5\,6\,3\,4)$, ou até $(6\,3\,4\,5)$, mas não como $(4\,6\,3\,5)$, pois representa um ciclo diferente do que foi apresentado no exemplo.

Definição 1. *Considerando o grupo P_n das permutações sobre o conjunto $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, $n \geq 2$. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_r \in I_n$ inteiros distintos. Se $\sigma \in P_n$é uma permutação tal que $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = \sigma^2(a_1) = a_3, \cdots, \sigma(a_{r-1}) = \sigma^{r-1}(a_1) = a_r, \sigma(a_r) = \sigma^r(a_1) = a_1$ e $\sigma(x) = x$, para todo $x \in I_n - \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, então se diz que σ é um ciclo de comprimento r e que $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ é o conjunto suporte de σ. Para designar a permutação assim definida, usaremos a notação $(a_1 a_2 \cdots a_r)$. Se $r = 2$, então σ é chamado de transposição.*

Exemplo 1. *Consideremos em P_5 a permutação*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

como $\sigma(1) = 4, \sigma(4) = 2$ e $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$ e $\sigma(5) = 5$, então σ é um ciclo de comprimento 3 cujo conjunto suporte é $\{1, 2, 4\}$. Portanto, podemos escrever:

$$\sigma = (1\,4\,2).$$

Exemplo 2. *Consideremos em P_5 a permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ possui dois ciclos:*

$$(1\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, (3\,4\,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

É importante notar que a notação de permutação em ciclos pode ser escrita de mais de uma maneira, desde que não mude a sequência em que cada elemento aparece. Por exemplo: $(3\,4\,5) = (4\,5\,3) = (5\,3\,4)$, representam o mesmo ciclo de comprimento 3, cujo conjunto suporte é $\{3, 4, 5\}$.

Dois ciclos, como $(1\,2\,4)$ e $(3\,5)$, em P_5, cujos suportes são conjuntos disjuntos, são chamados *ciclos disjuntos.*

Denotando por $A_{n,k}$ o conjunto de permutações de $P_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ que se decompõem em k ciclos disjuntos. A Tabela 1 apresenta todas as 6 permutações separadas em ciclos.

Podemos utilizar também uma notação de mais fácil compreensão por meio da seguinte situação.

Tabela 1 - Permutações de P_3 em ciclos

k	$A_{3,k}$	$\|A_{n,k}\|$
1	$(1\,2\,3)\,;\,(1\,3\,2)$	2
2	$(1)\,(2\,3)\,;\,(2)\,(1\,3)\,;\,(3)\,(1\,2)$	3
3	$(1)\,(2)\,(3)$	1

Fonte: Autor.

Exemplo 3. *Desejamos saber de quantas maneiras podemos distribuir três pessoas em duas mesas circulares idênticas, de modo que nenhuma mesa fique vazia.*

Acomodando a primeira pessoa, temos duas possibilidades:

· A primeira pessoa ficará sozinha numa mesa.

· A primeira pessoa terá companhia.

No primeiro caso, temos que acomodar as duas pessoas restantes numa mesa. Isso só pode ser feito de uma maneira. Logo:

$(1)(2\,3)$

No segundo caso, a primeira pessoa terá a companhia da segunda pessoa: $(1\,2)(3)$

Ou terá a companhia da terceira pessoa:

$(1\,3)(2)$ Portanto, temos 3 possibilidades para organizar essas pessoas em duas mesas circulares indenticas sem que uma mesa fique vazia. Utilizando o mesmo raciocínio do exemplo anterior para o caso de termos uma ou três mesas, obtemos 2 e 3 possibilidades, respectivamente, a saber:

$(1\,2\,3)\,;\,(1\,3\,2)$

$(1)\,(2)\,(3)$

Com esse raciocínio, podemos definir os números de Stirling de primeiro tipo.

Definição 2. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k \geq 1$. Definimos $|s(n,k)|$[1] como sendo o número de Stirling de primeiro tipo, que nos dá o total de permutações de n elementos em k ciclos disjuntos ou, como no exemplo 2, o número de maneiras de organizar n pessoas em k mesas idênticas sem que uma mesa fique vazia.*

Convencionando $|s(n,0)| = 1$, $|s(0,0)| = 1$ e $|s(0,k)| = 1$

Utilizando esta definição, podemos construir a Tabela 2 e consequentemente a Tabela 3 com os cinco primeiros números de Stirling:

[1] Os números de Stirling de primeiro e segundo tipos aparecem em alguns textos, especialmente em língua estrangeira, com as notações $\begin{bmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{Bmatrix}$, respectivamente. Esta notação, usada especialmente por *D.E.Knuth* é devido ao fato que esses números satisfazem a recorrência triangular similar as conhecidas relações dos coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ no Triângulo de Pascal.

Tabela 2 - Números de Stirling de primeiro tipo

$\|s(n,k)\|$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=1$	$\|s(1,1)\|$	0	0	0	0
$n=2$	$\|s(2,1)\|$	$\|s(2,2)\|$	0	0	0
$n=3$	$\|s(3,1)\|$	$\|s(3,2)\|$	$\|s(3,3)\|$	0	0
$n=4$	$\|s(4,1)\|$	$\|s(4,2)\|$	$\|s(4,3)\|$	$\|s(4,4)\|$	0
$n=5$	$\|s(5,1)\|$	$\|s(5,2)\|$	$\|s(5,3)\|$	$\|s(5,4)\|$	$\|s(5,5)\|$

Fonte: Autor.

Tabela 3 - Números de Stirling de primeiro tipo

$\|s(n,k)\|$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=1$	1	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0
$n=3$	2	3	1	0	0
$n=4$	6	11	6	1	0
$n=5$	24	50	35	10	1

Fonte: Autor.

Podemos utilizar uma representação gráfica para a compreensão dos ciclos. Onde as seguintes imagens ilustram o números de Stirling de primeiro tipo $|s(n,k)|$ para $k = \{1, \cdots, 5\}$. Por exemplo, na figura 4 temos as posições dos 5 elementos indicadas e a troca de posições é indicada pelo sentido da seta, onde o elemento 2 está na posição 1, o elemento 1 está na posição 5, o elemento 5 está na posição 4, o elemento 4 está na posição 3 e, por fim, o elemento 3 está na posição 2. Quando o elemento for mantido na posição original, esta situação será representada por um ponto.

Figura 4 - Exemplo ciclo

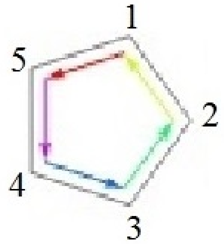


Figura 5 - $|s(5,1)| = 24$ (5 objetos com 1 ciclo)

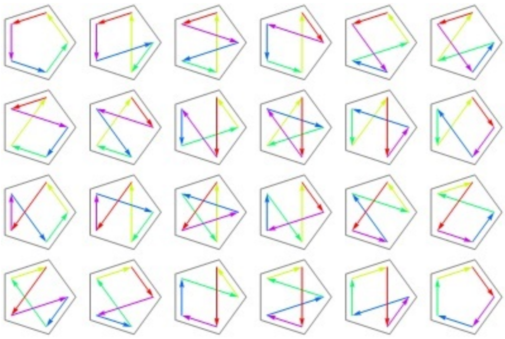


Figura 6 - $|s(5,2)| = 50$ (5 objetos com 2 ciclos)

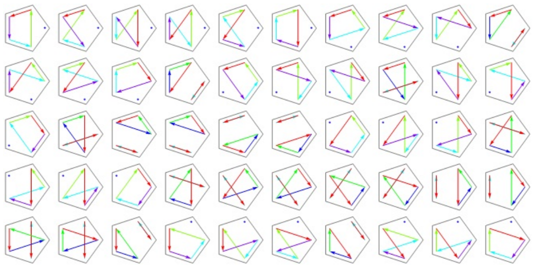


Figura 7 - $|s(5,3)| = 35$ (5 objetos com 3 ciclos)

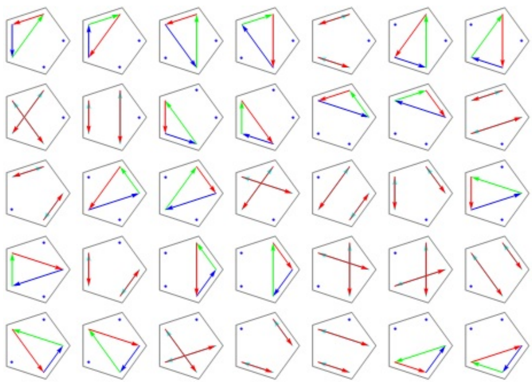


Figura 8 - $|s(5,4)| = 10$ (5 objetos com 4 ciclos)

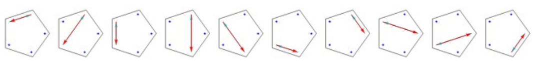
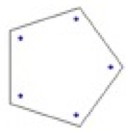


Figura 9 - $|s(5,5)| = 1$ (5 objetos com 5 ciclos)



Os números de Stirling de primeiro tipo respeitam a seguinte relação de recorrência:

Teorema 2.1. *Sejam n e k números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$, temos que:*

$$|s(n,k)| = |s(n-1,k-1)| + (n-1)|s(n-1,k)|. \tag{2.1}$$

Demonstração. Este teorema será demonstrado de maneira combinatória.
Vamos dividir as permutações dos elementos de $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ com k ciclos em dois grupos: primeiro grupo em que o elemento n forma um ciclo e os demais elementos de $I_{n-1} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ formam $k-1$ ciclos, o que resulta em $|s(n-1,k-1)|$ permutações dos elementos de I_n em k ciclos. No segundo grupo o elemento n não forma um ciclo. Nesse caso os elementos de I_{n-1} formam k ciclos que resulta em $|s(n-1,k)|$ permutações, e em cada dessas $|s(n-1,k)|$ permutações o elemento n pode ser posicionado em $n-1$ maneiras diferentes, o que leva em $(n-1)|s(n-1,k)|$ permutações e completa a demostração. □

Com esta relação é possivel aumentar a Tabela 2, pois:

$$\begin{aligned} |s(6,1)| &= |s(5,0)| + 5 \times |s(5,1)| \\ &= 0 + 5 \times 24 \\ &= 120, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |s(6,2)| &= |s(5,1)| + 5 \times |s(5,2)| \\ &= 24 + 5 \times 50 \\ &= 274, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s|(6,3)| &= |s(5,2)| + 5 \times |s(5,3)| \\ &= 50 + 5 \times 35 \\ &= 225, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |s(6,4)| &= |s(5,3)| + 5 \times |s(5,4)| \\ &= 35 + 5 \times 10 \end{aligned}$$

Tabela 4 - Números de Stirling de primeiro tipo

$\lvert s(n,k)\rvert$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0
$n=3$	2	3	1	0	0	0	0
$n=4$	6	11	6	1	0	0	0
$n=5$	24	50	35	10	1	0	0
$n=6$	120	274	225	85	15	1	0
$n=7$	720	1764	1624	735	175	21	1

Fonte: Autor.

$$= 85,$$

$$\begin{aligned}|s(6,5)| &= |s(5,4)| + 5 \times |s(5,5)| \\ &= 10 + 5 \times 1 \\ &= 15,\end{aligned}$$

e assim sucessivamente, obtemos a Tabela 4

Proposição 2.2. *Seja n um número natural, $n \geq 1$, temos que:*

$$|s(n,1)| = (n-1)!\ . \tag{2.2}$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos $|s(1,1)| = 1 = 0!$(*por convenção*).

Supondo válido para $n = p$, temos $|s(p,1)| = (p-1)!$

Para $n = p+1$:

$$\begin{aligned}|s(p+1,1)| &= |s(p,0)| + p|s(p,1)| \\ &= |s(p,0)| + (p-1)p! \\ &= p!\ .\end{aligned}$$

□

Proposição 2.3. *Sejam n e k números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$, temos que:*

$$\sum_{k=1}^{n} |s(n,k)| = n!\,. \tag{2.3}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n. Para $n = 1$, temos que $|s(1,1)| = 1 = 1!$.

Supondo que o resultado seja válido para $n = p > 1$, ou seja:

$$\sum_{k=1}^{p} |s(p,k)| = p!$$

Para $n = p + 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} |s(p+1,k)| &= \sum_{k=1}^{p+1}(|s(p,k-1)| + p.|s(p,k)|) \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} |s(p,k-1)| + \sum_{k=1}^{p+1} p.|s(p,k)| \\
&= \sum_{k=1}^{p} |s(p,k)| + p\sum_{k=1}^{p} |s(p,k)| \\
&= p! + p.(p!) \\
&= p!(p+1) \\
&= (p+1)!\,.
\end{aligned}$$

□

Um outro modo de se obter os números de Stirling, é utilizando polinômios. Considerando $x^{\overline{n}}$ como sendo o fatorial crescente x de grau n:

$x^{\overline{n}} = x.(x+1).(x+2).\cdots.(x+n-1).$

Para $1 \leq n \leq 5$, temos:

$x^{\overline{1}} = x;$
$x^{\overline{2}} = x.(x+1) = x^2 + x;$
$x^{\overline{3}} = x.(x+1).(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x;$
$x^{\overline{4}} = x.(x+1).(x+2).(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x;$
$x^{\overline{5}} = x.(x+1).(x+2).(x+3).(x+4) = x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x;$
$\vdots$

$x^{\underline{n}} = x.(x+1).(x+2).\cdots.(x+n-1).(x+n) = |s(n,n)|x^n + |s(n,n-1)|x^{n-1} + |s(n,n-2)|x^{n-2} + \cdots + |s(n,2)|x^2 + |s(n,1)|x.$

Com estes resultados obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.4. *Sejam n e k números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$, temos que:*

$$x^{\overline{n}} = x.(x+1).(x+2).\cdots.(x+n-1) = \sum_{k=1}^{n} |s(n,k)|x^k. \tag{2.4}$$

Demonstração. Para $n = 1$ temos, $|s(1,1)|x = x$

Supondo válido para $n = p$.

$$\sum_{k=1}^{p}|s(p,k)|x^k = x^{\overline{p}} = x.(x+1).(x+2).\cdots.(x+p-1)$$

Para $n = p+1$, temos:

$$\begin{aligned}
x^{\overline{p+1}} &= x.(x+1).(x+2).\cdots.(x+p-1).(x+p)\\
&= \sum_{k=1}^{p}|s(p,k)|x^k(x+p)\\
&= \sum_{k=1}^{p}|s(p,k)|x^{k+1} + \sum_{k=1}^{p}p.|s(p,k)|x^k\\
&= \sum_{k=2}^{p+1}|s(p,k-1)|x^k + \sum_{k=1}^{p}p.|s(p,k)|x^k\\
&= \sum_{k=2}^{p}|s(p,k-1)|x^k + |s(p,p)|x^{p+1} + p.|s(p,1)|x + \sum_{k=2}^{p}p.|s(p,k)|x^k\\
&= p!x + \sum_{k=2}^{p}(|s(p,k-1)| + p.|s(p,k)|)x^k + |s(p,p)|x^{p+1}\\
&= |s(p+1,1)|x + \sum_{k=2}^{p}|s(p+1,k)|x^k + |s(p+1,p+1)|x^{p+1}\\
&= \sum_{k=1}^{p+1}|s(p+1,k)|x^k.
\end{aligned}$$

□

Continuaremos com a definição de números de Stirling sem sinal.

Definição 3. *Sendo n e k números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$, os números de Stirling de primeiro tipo, com sinal, são dados por $s(n,k) = (-1)^{n-k}|s(n,k)|$.*

Podemos obter os números de Stirling com sinal. Considerando $x^{\underline{n}}$ como sendo o fatorial decrescente x de grau n,

Para $1 \leq n \leq 5$, temos:

$$\begin{aligned}
&x^{\underline{1}} = x;\\
&x^{\underline{2}} = x.(x-1) = x^2 - x;\\
&x^{\underline{3}} = x.(x-1).(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x;\\
&x^{\underline{4}} = x.(x-1).(x-2).(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x;\\
&x^{\underline{5}} = x.(x-1).(x-2).(x-3).(x-4) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x;\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&x^{\underline{n}} = x.(x-1).(x-2).\cdots.(x-n+1)\\
&\quad = s(n,n)x^n + s(n,n-1)x^{n-1}s(n,n-2)x^{n-2} + \cdots + s(n,2)x^2 + s(n,1)x.
\end{aligned}$$

De posse desses resultados obtemos a seguinte proposição:

Proposição 2.5. *Sendo n e k números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$, os números de Stirling de primeiro tipo, com sinal, são definidos como os coeficientes $s(n,k)$ do polinômio que satisfaz a equação:*

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k. \tag{2.5}$$

Demonstração.

Pela lei da reciprocidade[2], nós temos $x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$. Então,

$$\begin{aligned} x^{\underline{n}} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|(-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}|s(n,k)|x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \end{aligned}$$

Portanto:

$s(n,k) = (-1)^{n+k}|s(n,k)|$

Por outro lado $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$.

Assim concluímos que $s(n,k) = (-1)^{n-k}|s(n,k)|$.

□

Proposição 2.6. *(Recorrência com sinal). Sendo n e k números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$ temos que:*

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \tag{2.6}$$

Demonstração.

Sabemos que $x^{n} = x^{n-1}.(x-n+1)$

daí,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(x)^k &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} s(n,k)(x)^k\right)(x-(n-1)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)(x)^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}(n-1)s(n-1,k)(x)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)(x)^k - \sum_{k=0}^{n-1}(n-1)s(n-1,k)(x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}[s(n-1,k-1)-(n-1)s(n-1,k)](x)^k \\ &= s(n,k). \end{aligned}$$

[2] A lei da reciprocidade nos mostra que da igualdade $(-x)^{\underline{n}} = (-x)(-x-1)\cdots(-x-n+1) = (-1)^n x(x+1)\cdots(x+n-1)$, nós obtemos $x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$ e $(-x)^{\overline{n}} = (-1)^n x^{\underline{n}}$

Tabela 5 - Números de Stirling de primeiro tipo com sinal

$s(n,k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=1$	1	0	0	0	0
$n=2$	-1	1	0	0	0
$n=3$	2	-3	1	0	0
$n=4$	-6	11	-6	1	0
$n=5$	24	-50	35	-10	1

Fonte: Autor.

$\square$

Assim podemos reformular a Tabela 5

Proposição 2.7. *Seja n um número natural, tal que $n \geq 2$, temos que:*

$$|s(n,n-1)| = \binom{n}{2}. \tag{2.7}$$

Demonstração. Para $n=2$, temos $|s(2,1)| = \dfrac{2!}{2!0!} = 1$.

Supondo válido para $n=p$, temos $|s(p,p-1)| = \dfrac{p!}{2!(p-2)!}$

Para $n = p+1$:

$$\begin{aligned}
|s(p+1,p)| &= |s(p,p-1)| + p.|s(p,p)| \\
&= \frac{p!}{2!(p-2)!} + p \\
&= \frac{p.(p-1).(p-2)! + 2p(p-2)!}{2!(p-2)!} \\
&= \frac{p.(p-2)!(p-1+2)}{2!(p-2)!} \\
&= \frac{p.(p+1)}{2!}.\frac{(p-1)!}{(p-1)!} \\
&= \frac{(p+1)!}{2!((p+1)-2)!}.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 2.8. *Sejam n um número natural, tal que $n \geq 3$, temos que:*

$$|s(n,n-2)| = \frac{1}{4}(3n-1)\binom{n}{3}. \tag{2.8}$$

Demonstração. Para $n=3$, temos $|s(3,1)| = 2$.

Supondo válido para $n = p$, temos $|s(p, p-2)| = \frac{1}{4}(3p-1)\binom{p}{3}$

Para $n = p+1$:

$$\begin{aligned}
|s(p+1, p-1)| &= |s(p, p-2)| + p.|s(p, p-1)| \\
&= \frac{1}{4}(3p-1)\frac{p.(p-1).(p-2)}{6} + \frac{p.p(p-1)}{2} \\
&= \frac{p(p-1)}{4}\left[\frac{3p^2+5p+2}{6}\right] \\
&= \frac{p(p-1)}{4}\left[\frac{(p+1)(3p+2)}{6}\right] \\
&= \frac{1}{4}(3p+2)\frac{(p+1)p(p-1)}{3!} \\
&= \frac{1}{4}(3(p+1)-1)\frac{(p+1)!}{3!((p+1)-3)!} \\
&= \frac{1}{4}(3(p+1)-1)\binom{p+1}{3}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.9. *Sejam n um número natural, tal que $n \geq 2$, temos que:*

$$|s(n, n-3)| = \binom{n}{2}\binom{n}{4}. \qquad (2.9)$$

Demonstração. Para $n = 4$, temos $|s(4,1)| = \frac{4!}{2!2!}\frac{4!}{4!0!} = 6$.

Supondo válido para $n = p$, temos $|s(p, p-3)| = \frac{p!}{2!(p-2)!}\frac{p!}{4!(p-4)!}$.

Para $n = p+1$:

$$\begin{aligned}
|s(p+1, p-2)| &= |s(p, p-3)| + p.|s(p, p-2)| \\
&= \frac{p!}{2!(p-2)!}\frac{p!}{4!(p-4)!} + p\frac{1}{4}(3p-1)\frac{p!}{3!(p-3)!} \\
&= \frac{p(p-1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{48} + \frac{p(3p-1)p(p-1)(p-2)}{24} \\
&= \frac{p^2(p-1)(p-2)}{48}\left[(p-1)(p-3) + 2(3p-1)\right] \\
&= \frac{p^2(p+1)^2(p-1)(p-2)}{48} \\
&= \frac{(p+1)p}{2!}\frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{4!} \\
&= \frac{(p+1)!}{2!(p-1)!}\frac{(p+1)!}{4!(p-3)!} \\
&= \frac{(p+1)!}{2!((p+1)-2)!}\frac{(p+1)!}{4!((p+1)-4)!}.
\end{aligned}$$

□

3 NÚMEROS DE STIRLING DE SEGUNDO TIPO

Neste capítulo iremos apresentar e definir os números de Stirling de segundo tipo, estudar suas propriedades, as relações de recorrência que eles posuem e sua relação com os números de Stirling de primeiro tipo. Construiremos também tabelas com esses números.

3.1 PARTIÇÃO DE UM CONJUNTO

Seja A um conjunto não vazio. Uma partição de um conjunto A é qualquer coleção C de subconjuntos não vazios de A dotada da seguinte propriedade:

todo elemento de A pertence a um e apenas um dos elementos de C.

Assim, uma coleção de conjuntos $C = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ é uma partição (finita) do conjunto A, se as seguintes condições forem simultaneamente satisfeitas:

(1) $A_i \neq \varnothing, para \;\; i = 1, 2, \cdots, n;$
(2) $A_i \subset A, para \;\; i = 1, 2, \cdots, n;$
(3) $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n;$
(4) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são mutuamente disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \varnothing,$
$para \;\; i \neq j, com\, i, j = 1, 2, \cdots, n.$

Exemplo 4. *No conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *, os subconjuntos* $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{3, 4, 5\} \, e \, P_3 = \{6, 7\}$ *é uma partição de A. Entretanto* $P_4 = \{1, 2, 3\}$, $P_5 = \{3, 4, 5\} \, e \, P_6 = \{6, 7\}$ *não é uma partição de A pois* $P_4 \cap P_5 = \{3\} \neq \emptyset$. *Também* $P_7 = \{1, 2, 3\} \, e \, P_8 = \{5, 6, 7\}$ *não é partição de A pois o elemento 4 não pertencem a nenhum dos* P_i.

Exemplo 5. *De posse do conjunto* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *vamos determinar todas as partições do conjunto B em 2 subconjuntos.*

$$\{1\}, \{2, 3, 4, 5\};$$
$$\{2\}, \{1, 3, 4, 5\};$$
$$\{3\}, \{1, 2, 4, 5\};$$
$$\{4\}, \{1, 2, 3, 5\};$$
$$\{5\}, \{1, 2, 3, 4\};$$
$$\{1, 2\}, \{3, 4, 5\};$$
$$\{1, 3\}, \{2, 4, 5\};$$
$$\{1, 4\}, \{2, 3, 5\};$$

$$\{1,5\},\{2,3,4\};$$
$$\{2,3\},\{1,4,5\};$$
$$\{2,4\},\{1,3,5\};$$
$$\{2,5\},\{1,3,4\};$$
$$\{3,4\},\{1,2,5\};$$
$$\{3,5\},\{1,2,4\};$$
$$\{4,5\},\{1,2,3\}.$$

Sendo possível formar 15 subconjuntos utilizando o conjunto B. Com esses dois exemplos podemos apresentar os números de Stirling de segundo tipo.

Definição 4. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k \geq 1$. Definimos o número de Stirling de segundo tipo $S(n,k)$ como sendo o número de partições de um conjunto com n elementos em k subconjuntos não vazios. Sendo, por convenção, $S(n,0) = 0, S(0,0) = 1$.*

Podendo ser definido também como o número de maneiras de distribuir n distinguíveis objetos em k caixas indistinguíveis (com o número de caixas que não vazias iguais a $1 \leq k \leq n$), como segue no exemplo:

Exemplo 6. *De quantas maneiras podemos colocar quatro funcionários diferentes em um, dois, três ou quatro escritórios indistinguíveis, quando cada escritório pode conter qualquer número de empregados, mas que nenhum fique vazio?*

Representando os funcionários por A, B, C e D. Nós podemos alocar todos os quatro funcionários em um escritório exatamente de uma maneira $S(4,1) = 1$, representado por $\{\{A, B, C, D\}\}$.

Nós podemos alocar três empregados em um escritório e o quarto empregado em um escritório diferente de exatamente quatro modos distintos, representado por $\{\{A, B, C\}\}, \{D\}\}$; $\{\{A, B, D\}\}, \{C\}\}$; $\{\{A, C, D\}\}, \{B\}\}$ e $\{\{B, C, D\}\}, \{A\}\}$.

E nós podemos alocar dois empregados em um escritório e dois em um outro escritório diferente de exatamente três modos distintos, representado por $\{\{A, B\}\}, \{C, D\}\}$; $\{\{A, C\}\}, \{B, D\}\}$ e $\{\{A, D\}\}, \{B, C\}\}$. Totalizando $S(4,2) = 7$.

Consequentemente, nós podemos alocar dois empregados em um escritório e cada um em cada um dos dois escritórios restantes de seis maneiras diferentes, representando por $\{\{A, B\}\}, \{C\}, \{D\}\}$; $\{\{A, C\}\}, \{B\}, \{D\}\}$; $\{\{A, D\}\}, \{B\}, \{C\}\}$; $\{\{B, C\}\}, \{A\}, \{D\}\}$; $\{\{B, D\}\}, \{A\}, \{C\}\}$; $\{\{B, C\}\}, \{A\}, \{B\}\}$. Totalizando $S(4,3) = 6$.

Finalmente, nós podemos alocar os quatro empregados, um em cada escritório, representando por $\{A\}, \{B\}, \{C\}$ e $\{D\}$. Totalizando $S(4,4) = 1$.

Os resultados e demais possibilidades podem ser representados nas seguintes Tabelas 6 e 7, onde n representa o número de funcionários e k o número de salas:

Tabela 6 - Números de Stirling de segundo tipo

$S(n,k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=1$	$S(1,1)$	0	0	0
$n=2$	$S(2,1)$	$S(2,2)$	0	0
$n=3$	$S(3,1)$	$S(3,2)$	$S(3,3)$	0
$n=4$	$S(4,1)$	$S(4,2)$	$S(4,3)$	$S(4,4)$

Tabela 7 - Números de Stirling de segundo tipo

$S(n,k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=1$	1	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0
$n=3$	1	3	1	0	0
$n=4$	1	7	6	1	0
$n=5$	1	15	25	10	1

Podemos utilizar uma representação gráfica para a compreensão da situação na qual a ordem não importa. Por exemplo as seguintes imagens ilustram o números de Stirling de segundo tipo para $S(5,k)$ para $k = \{(1, \cdots, 5\}$.

Por exemplo, na Figura 10 os elementos $1, 2, 4$ e 5 formam uma partição e o elemento 3 compõe uma partição isolada.

Os números de Stirling de segundo tipo respeitam a relação de recorrência:

Teorema 3.1. *Sejam n e k números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$, temos que:*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k). \tag{3.1}$$

Demonstração. Este teorema será demonstrado de maneira combinatória.
Considere um conjunto X com n elementos e seja $x \in X$. Vamos separar as partições de X em k subconjuntos não vazios em dois casos: no primeiro caso o elemento x está sozinho

Figura 10 - Exemplo de partição

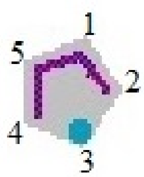


Figura 11 - $S(5,1) =$
1

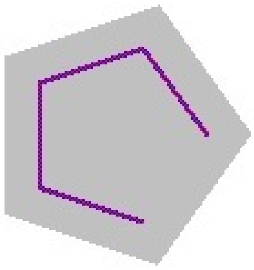


Figura 12 - $S(5,2) = 15$

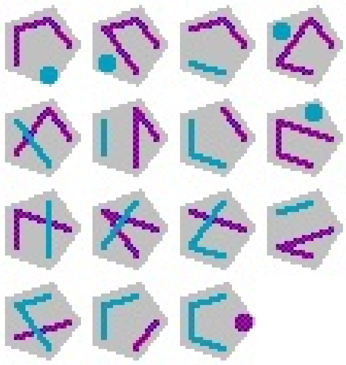


Figura 13 - $S(5,3) = 25$

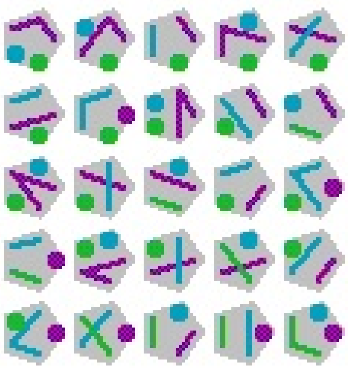


Figura 14 - $S(5,4) = 10$

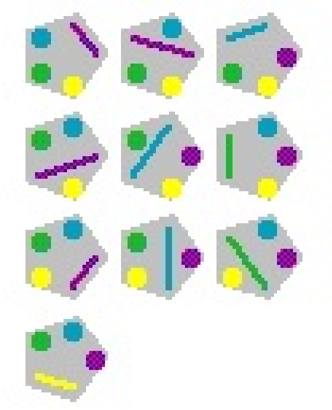
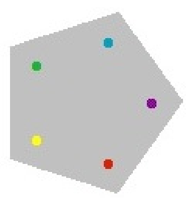


Figura 15 - $S(5,5) = 1$



em um subconjunto, então os outros $n-1$ elementos devem ser distribuídos nos outros $k-1$ subconjuntos, assim existirá $S(n-1,k-1)$ partições em que x aparece sozinho. No segundo caso o elemento x não está sozinho em um subconjunto, ele será inserido em um dos k subconjuntos não vazios de $X \setminus \{x\}$. Há $S(n-1,k)$ maneiras de particionar $X \setminus \{x\}$ em k subconjuntos não vazios. Para cada uma dessas partições, nós podemos inserir o elemneto x em qualquer um desses k subconjuntos, totalizando $k.S(n-1,k)$ possibilidades.

□

Com esta relação é possivel aumentar a Tabela 8, pois:

$$\begin{aligned}
S(6,1) &= S(5,0) + 1 \times S(5,1) \\
&= 0 + 1 \times 1 \\
&= 1; \\
S(6,2) &= S(5,1) + 2 \times S(5,2) \\
&= 1 + 2 \times 15 \\
&= 31; \\
S(6,3) &= S(5,2) + 2 \times S(5,3) \\
&= 15 + 3 \times 25 \\
&= 90;
\end{aligned}$$

Tabela 8 - Números de Stirling de segundo tipo

$S(n,k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0
$n=3$	1	3	1	0	0	0	0
$n=4$	1	7	6	1	0	0	0
$n=5$	1	15	25	10	1	0	0
$n=6$	1	31	90	65	15	1	0
$n=7$	1	63	301	350	140	21	1

$$\begin{aligned} S(6,4) &= S(5,3) + 4 \times S(5,4) \\ &= 25 + 4 \times 10 \\ &= 65; \\ S(6,5) &= S(5,4) + 5 \times s(5,5) \\ &= 10 + 5 \times 1 \\ &= 15; \\ S(6,6) &= S(5,5) + 5 \times s(5,6) \\ &= 1 + 5 \times 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Os números de Stirling de segundo tipo aparecem em alguns problemas. Como visto em [4] Por exemplo, podemos utiliza-los para expressar potências x^n, com $n \in \mathbb{N}$, utilizando fatoriais decrescentes de x. Representado por $x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$.

Escrevendo os quatro primeiros casos, obtemos:

$$\begin{aligned} x^0 &= x^{\underline{0}}; \\ x^1 &= x^{\underline{1}}; \\ x^2 &= x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}; \\ x^3 &= x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}; \\ x^4 &= x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}. \end{aligned}$$

Teorema 3.2. *Sejam n e k números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$, temos que:*

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}. \tag{3.2}$$

Por convenção vamos considerar $S(n,0) = S(0,k) = 0, S(n,k) = 0$ se $k > n$ e $S(0,0) = 1$.

Demonstração. Temos $x.x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$, devido ao fato de $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k)$; então, supondo válido para $n-1$, de $x.x^{n-1}$ obtemos:

$$\begin{aligned} x\sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)x^{\underline{k}} &= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)kx^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=2}^{n} S(n-1,k-1)x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n} S(n-1,k)kx^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)\right) x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.3. *Seja n um número natural, com $n \geq 2$, temos a seguinte propriedade para os números de Stirling do segundo tipo:*

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1. \tag{3.3}$$

Demonstração. Para $n = 2$, temos:

$$S(2,2) = 2^{2-1} - 1 = 2 - 1 = S(1,1) = 1$$

Supondo válido para $n = p$:

$$S(p,2) = 2^{p-1} - 1.$$

Para $n = p + 1$, temos:

$$\begin{aligned} S(p+1,2) &= 2S(p,2) + S(p,1) \\ &= 2(2^{p-1} - 1)) + 1 \\ &= 2^p - 2 + 1 \\ &= 2^p - 1. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.4. *Seja n um número natural, com $n \geq 2$, temos a seguinte propriedade para os números de Stirling do segundo tipo:*

$$S(n,n-1) = \binom{n}{2}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Para $n = 2$, temos:

$$S(2,1) = \frac{2}{2} = 1.$$

Supondo válido para $n = p$:
$S(p, p-1) = \dfrac{p!}{2!(p-2)!}$.
Para $n = p+1$, temos:

$$\begin{aligned}
S(p+1, p) &= pS(p,p) + S(p, p-1) \\
&= p + \frac{p(p-1)}{2} \\
&= \frac{2p + p^2 - p}{2} \\
&= \frac{p(p+1)}{2} \\
&= \frac{(p+1)!}{2!(p-1)!}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.5. *Seja n um número natural, com $n \geq 3$, temos a seguinte propriedade para os números de Stirling do segundo tipo:*

$$S(n, 3) = \frac{3^{n-1} + 1}{2} - 2^{n-1}. \tag{3.5}$$

Demonstração.

Para $n = 3$, temos:
$S(3,3) = \dfrac{3^{3-1} + 1}{2} - 2^{3-1} = 1.$

Supondo $S(p, 3) = \dfrac{3^{p-1} + 1}{2} - 2^{p-1}$ válido para $n = p \geq 3$

para $n = p + 1$:

$$\begin{aligned}
S(p+1, 3) &= 3S(p,3) + S(p,2) \\
&= 3\left(\frac{3^{p-1} + 1}{2} - 2^{p-1}\right) + \left(2^{p-1} - 1\right) \\
&= \frac{3^p + 3}{2} - 3(2^{p-1}) + 2^{p-1} - 1 \\
&= \frac{3^p + 3}{2} - 1 - 2(2^{p-1}) \\
&= \frac{3^p + 1}{2} - 2^p.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.6. *Seja n um número natural, com $n \geq 3$, temos a seguinte propriedade para os números de Stirling do segundo tipo:*

$$S(n, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Para $n = 3$, temos:

$$S(3,1) = \frac{3.2.1.(3.3-5)}{24} = 1.$$

Supondo válido para $n = p$:

$$S(p,p-2) = \frac{p(p-1)(p-2)(3p-5)}{24}.$$

para $n = p+1$:

$$\begin{aligned} S(p+1,p-1) &= S(p,p-2) + (p-1)S(p,p-1) \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)(3p-5)}{24} + (p-1)\frac{p!}{2!(p-2)!} \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)(3p-5)}{24} + \frac{p(p-1)^2}{2} \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)(3p-5) + 12p(p-1)^2}{24} \\ &= \frac{(p+1)p(p-1)(3p-2)}{24}. \end{aligned}$$

$\square$

3.2 FÓRMULA EXPLÍCITA PARA OS NÚMEROS DE STIRLING DO SEGUNDO TIPO

De acordo com [5], podemos determinar uma fórmula explícita para $S(n,k)$ por meio da equação (2.1). Vamos utilizar $F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n$ para encontrar uma função geradora para $S(n,k)$.

Considerando $k \geq 1$ e multiplicando a Equação (2.1) por x^n:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k),$$

temos que:

$$S(n,k)x^n = S(n-1,k-1)x^n + kS(n-1,k)x^n,$$

assim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S(n-1,k-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} kS(n-1,k)x^n.$$

Portanto:

$F_k(x) = xF_{k-1}(x) + kxF_k(x),$

ou seja:

$F_k(x) - kxF_k(x) = xF_{k-1}(x),$

assim:

$F_k(x) = \dfrac{x}{1-kx}F_{k-1}(x),$

para todo $k \geq 1$.

Sabendo que para $k = 0$, temos $F_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S(n,0)x^n = S(0,0) = 1$

E fazendo $k = 1, 2, 3, \cdots$. Obtemos:

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{x}{1-x}F_0(x) = \frac{x}{1-x};\\
F_2(x) &= \frac{x}{1-2x}F_1(x) = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)};\\
F_3(x) &= \frac{x}{1-x}F_2(x) = \frac{x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)};\\
&\vdots\\
F_k(x) &= \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

O coefiente de x^n na expansão de $F_k(x)$ dada em (2.7) é o número de Stirling de segundo tipo $S(n,k)$, então dizemos que $\dfrac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}$ é a função geradora ordinária para os números de Stirling de segundo tipo. Podemos observar que o coeficiente de $S(n,k)$ é equivalente ao coeficiente de x^{n-k} em:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}. \qquad (3.8)$$

Vamos decompor (2.8) em frações parciais para obtermos uma forma explícita para

$S(n,k)$. Dessa forma, existem $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1-2x} + \cdots + \frac{A_r}{1-rx} + \cdots + \frac{A_k}{1-kx}, \quad (3.9)$$

assim,

$$\frac{A_1(1-2x)\cdots(1-kx) + \cdots + A_k(1-x)\cdots(1-(k-1)x)}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)},$$

ou seja:

$$1 = A_1(1-2x)\cdots(1-kx) + \cdots + A_r(1-x)\cdots(1-(r-1)x)(1-(r+1)x) + \cdots + A_k(1-x)\cdots(1-(k-1)x). \quad (3.10)$$

Fazendo $x = \dfrac{1}{r}$ em (2.10) temos:

$$A_r\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-2\frac{1}{r}\right)\cdots\left(1-(r-1)\frac{1}{r}\right)\left(1-(r+1)\frac{1}{r}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{r}\right) = 1,$$

ou seja,

$$A_r\left(\frac{r-1}{r}\right)\left(\frac{r-2}{r}\right)\cdots\left(\frac{r-r+1}{r}\right)\left(\frac{r-r-1}{r}\right)\cdots\left(\frac{r-k}{r}\right) = 1,$$

isto é,

$$A_r\left[\frac{(r-1)(r-2)\cdots 1(-1)(-2)\cdots(r-k)}{r^{k-1}}\right] = 1,$$

assim,

$$A_r\frac{(r-1)!(-1)^{r-k}(k-r)!}{r^{k-1}} = 1,$$

logo,

$$A_r = \frac{(r)^{k-1}(-1)^{k-r}}{(r-1)!(k-r)!}.$$

Reescrevendo A_r:

$$A_r = \frac{(r)^{k-1}(-1)^{k-r}r}{(r-1)!(k-r)!r} = \frac{(r)^k(-1)^{k-r}k!}{(r)!(k-r)!k!} = \frac{r^k}{k!}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}. \quad (3.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.9):

$$\frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-2x)}\cdots\frac{1}{(1-kx)} = \sum_{r=1}^{k} A_r \frac{1}{(1-rx)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{r^k(-1)^{k-r}}{k!}\binom{k}{r}\frac{1}{(1-rx)}. \tag{3.12}$$

Sabendo que:

$$\frac{1}{(1-rx)} = 1 + rx + r^2x^2 + \cdots , \tag{3.13}$$

substituindo (2.13) em (2.12):

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-2x)}\cdots\frac{1}{(1-kx)} &= \sum_{r=1}^{k} A_r \frac{1}{(1-rx)} \\ &= \sum_{r=1}^{k} \frac{r^k(-1)^{k-r}}{k!}\binom{k}{r}(1 + rx + r^2x^2 + \cdots).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Segue de (2.14) que o coeficiente de x^{n-k}, $S(n,k)$ é:

$$S(n,k) = \sum_{r=1}^{k} \frac{r^k(-1)^{k-r}}{k!}\binom{k}{r} r^{n-k} = \frac{1}{k!}\sum_{r=1}^{k} r^n(-1)^{k-r}\binom{k}{r}. \tag{3.15}$$

Reescrevendo a equação anterior:

$$\begin{aligned}S(n,k) &= \frac{1}{k!}\sum_{r=1}^{k} r^n(-1)^{k-r}\binom{k}{r} \\ &= \frac{1}{k!}\left(1^n(-1)^{k-1}\binom{k}{1} + \cdots + (k-1)^n(-1)^1\binom{k}{k-1} + k^n(-1)^0\binom{k}{k}\right)\end{aligned}$$

Como $\binom{k}{k-i} = \binom{k}{i}$, concluímos que:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(k-i)^n(-1)^i\binom{k}{i}.$$

Com isso podemos calcular os números de Stirling de segundo tipo de forma explícita.

Teorema 3.7. *Sejam n, k números naturais, com $n \geq k > 0$, temos a seguinte propriedade para os números de Stirling do segundo tipo:*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(k-i)^n(-1)^i\binom{k}{i}. \tag{3.16}$$

3.3 RELAÇÃO ENTRE NÚMEROS DE STIRLING DE PRIMEIRO E SEGUNDO TIPOS

De acordo com [6], em Álgebra Linear, nós vemos que os polinômios em uma variável formam um espaço vetorial de dimensão infinita. Uma base comum para esse espaço é o conjunto de monômios $1, x, x^2, x^3, \cdots$. Os polinômios de grau menor ou igual a m formam um subspaço de dimensão $m+1$ com base $1, x, x^2, \cdots, x^m$.

Existe uma outra base para o espaço de todos os polinômios, definida como $x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, x^{\underline{3}}, \cdots$.Consequentemente podemos concluir que $x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \cdots, x^{\underline{m}}$ formam uma base para os polinîmios de grau m. No capítulo 1 foi visto que

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k,$$

são os números de Stirling de primeiro tipo $s(n,k)$ para $0 \leq k \leq m$, dispostos em uma matriz triangular $(m+1) \times (m+1)$ formam uma transformação linear que transforma a base $1, x, x^2, \cdots, x^m$ na base $x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \cdots, x^{\underline{m}}$.

$$\begin{pmatrix} \text{s(0,0)} & 0 & 0 & \cdots & \text{s(0,m)} \\ 0 & \text{s(1,1)} & 0 & \cdots & \text{s(1,m)} \\ 0 & \text{s(2,1)} & \text{s(2,2)} & \cdots & \text{s(2,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{s(m,0)} & \text{s(m,1)} & \text{s(m,2)} & \cdots & \text{s(m,m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ x^{\underline{2}} \\ \vdots \\ x^{\underline{m}} \end{pmatrix}$$

Assim, no caso $m = 6$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & -120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ x^{\underline{2}} \\ x^{\underline{3}} \\ x^{\underline{4}} \\ x^{\underline{5}} \\ x^{\underline{6}} \end{pmatrix}$$

Os números de Stirling de segundo tipo transformam o espaço na direção inversa. Sabemos que

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x^{\underline{k}},$$

são os números de Stirling de segundo tipo $S(n,k)$ para $0 \leq k \leq m$, dispostos em uma matriz triangular $(m+1)\times(m+1)$ formam uma transformação linear que transforma a base $x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \cdots, x^{\underline{m}}$ na base $1, x, x^2, \cdots, x^m$.

$$\begin{pmatrix} \text{S(0,0)} & 0 & 0 & \cdots & \text{S(0,m)} \\ 0 & \text{S(1,1)} & 0 & \cdots & \text{S(1,m)} \\ 0 & \text{S(2,1)} & \text{s(2,2)} & \cdots & \text{S(2,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{S(m,0)} & \text{S(m,1)} & \text{S(m,2)} & \cdots & \text{S(m,m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ x^{\underline{2}} \\ \vdots \\ x^{\underline{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$$

Assim, no caso $m = 6$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ x^{\underline{2}} \\ x^{\underline{3}} \\ x^{\underline{4}} \\ x^{\underline{5}} \\ x^{\underline{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix}$$

Assim, podemos escrever a produto das matrizes dado por:

$$\begin{pmatrix} \text{s(0,0)} & 0 & 0 & \cdots & \text{s(0,m)} \\ 0 & \text{s(1,1)} & 0 & \cdots & \text{s(1,m)} \\ 0 & \text{s(2,1)} & \text{s(2,2)} & \cdots & \text{s(2,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{s(m,0)} & \text{s(m,1)} & \text{s(m,2)} & \cdots & \text{s(m,m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{S(0,0)} & 0 & 0 & \cdots & \text{S(0,m)} \\ 0 & \text{S(1,1)} & 0 & \cdots & \text{S(1,m)} \\ 0 & \text{S(2,1)} & \text{s(2,2)} & \cdots & \text{S(2,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{S(m,0)} & \text{S(m,1)} & \text{S(m,2)} & \cdots & \text{S(m,m)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que as duas matrizes são inversas Por exemplo, no caso $m = 6$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & -120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em outras palavras

$$\sum_{k=0}^{m+1} s(i,k)S(k,n) = \delta_{i,n}, \tag{3.17}$$

e

$$\sum_{k=0}^{m+1} S(i,k)s(k,n) = \delta_{i,n}. \tag{3.18}$$

Onde $\delta_{i,n}$ representa $Kronecker - delta$, $\delta_{in} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = n, \\ 0, & \text{if } i \neq n. \end{cases}$

Abramowitz e Stegun[7] apresentam as seguintes fórmulas simétricas que relacionam os números de Stirling de primeiro e segundo tipos de forma explícita. [3]

$$s(n,k) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-1+j}{n-k+j} \binom{2n-k}{n-k-j} S(n-k+j, j), \tag{3.19}$$

e

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-1+j}{n-k+j} \binom{2n-k}{n-k-j} s(n-k+j, j). \tag{3.20}$$

Estas fórmulas podem ser demonstradas utilizando a interpolação de Lagrange, usando o fato que $S(n, n-m)$ e $s(n, n-m)$ são polinômios em n de grau $2m$, como visto em [8].

[3] Goldberg, K.; Newman, M; Haynsworth, E. (1972), "Stirling Numbers of the First Kind, Stirling Numbers of the Second Kind", in Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A. (eds.), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 10th printing, New York: Dover, pp. 824–825

4 TRABALHOS ENVOLVENDO OS NÚMEROS DE STIRLING

4.1 NÚMEROS DE STIRLING E OS NÚMEROS DE BELL

O número de maneiras de particionar um conjunto de n objetos rotulados, $\{1, 2, \cdots, n\}$ em k partes disjuntas não vazias são dadas pelo número de Stirling do segundo tipo $S(n, k)$. Por outro lado, o número Bell, representado por B_n, lista todas as partições possíveis de $\{1, 2, \cdots, n\}$. De [9] segue que

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k). \tag{4.1}$$

Por exemplo, para o caso de $n = 4$ o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ determina o único modo de particionar $\{1, 2, 3, 4\}$ em um conjunto, ou seja $S(4, 1) = 1$. Com o mesmo pensamento,

$$\begin{gathered}
\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \\
\{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \\
\{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}, \\
\{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}, \\
\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \\
\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \\
\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\},
\end{gathered}$$

Vemos que $S(4, 2) = 7$. No próximo

$$\begin{gathered}
\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}, \\
\{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}, \\
\{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}, \\
\{\{2\}, \{3\}, \{1, 4\}\}, \\
\{\{2\}, \{4\}, \{1, 3\}\}, \\
\{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\},
\end{gathered}$$

Obtemos $S = (4, 3) = 6$. Por último, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ representa o único modo de obtermos a partição do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ em 4 subconjuntos, $S(4, 4) = 1$. Logo:

$$B_4 = \sum_{k=1}^{4} S(4, k) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

Utilizando este resultado e a tabela dos números de Stirling de segundo tipo, podemos obter outros números de Bell, assim obtemos a Tabela 9:

Um outro modo de obtermos os números de Bell é utilizando a relação de recorrência:

Tabela 9 - Números de Stirling de segundo tipo e os números de Bell

$s(n,k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	B_n
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0	1
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0	2
$n=3$	1	3	1	0	0	0	0	5
$n=4$	1	7	6	1	0	0	0	15
$n=5$	1	15	25	10	1	0	0	52
$n=6$	1	31	90	65	15	1	0	203
$n=7$	1	63	301	350	140	21	1	877

Proposição 4.1. *Sejam n e k, números naturais, tais que $n \geq k \geq 0$, os números de Bell satisfazem a seguinte recorrência:*

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \end{cases} \tag{4.2}$$

Demonstração. Vamos demonstrar essa relação de forma combinatória.
Analisando todos os casos possíveis das partições em que o elemento $n+1$ do conjunto $I_{n+1} = \{1, 2, \cdots, n, n+1\}$ forma um suconjunto sozinho, um subconjunto com mais um elemento, um subconjunto com mais dois elementos e assim sucessivamente. Ao formar uma particão de I_{n+1} incluindo o subconjunto $\{n+1\}$ temos B_n partições dos elementos restantes. No caso em que o elemento $n+1$ está na partição com outro elemento, ou seja a partição inclui o subconjunto $\{n+1, x\}$, $x \in I_{n+1}$, temos $\binom{n}{1}$ maneiras de escolher o elemento x e B_{n-1} partições com os elementos restantes. Assim, para a partição com $n+1$ elementos, i.e. $\{n+1, 1, 2, 3, \ldots, n\}$, temos $\binom{n}{n}$ modos de escolher os elementos que acompanham $n+1$ no mesmo subconjunto. Portanto,

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= B_n + \binom{n}{1} B_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} \\ &= \binom{1}{0} B_n + \binom{n}{1} B_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} B_0, \end{aligned}$$

usando a relação $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$,

$$B_{n+1} = \binom{n}{n} B_n + \binom{n}{n-1} B_{n-1} + \cdots + \binom{n}{0} B_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

□

Tabela 10 - Numeros Harmônicos

n	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	H_n
1	1	1
2	$1 + 1/2$	$3/2$
3	$1 + 1/2 + 1/3$	$11/6$
4	$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$	$25/12$
5	$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5$	$137/60$

Determinando alguns números de Bell utilizando a definição anterior:

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1;\\
B_1 &= \sum_{k=0}^{0}\binom{1-1}{k}B_k = \binom{0}{0}B_0 = 1.1 = 1;\\
B_2 &= \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}B_k = \binom{1}{0}B_0 + \binom{1}{1}B_1 = 1.1 + 1.1 = 2;\\
B_3 &= \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}B_k = \binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 + \binom{2}{2}B_2 = 1.1 + 2.1 + 1.2 = 5;\\
B_4 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}B_k = \binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2 + \binom{3}{3}B_3 = 1.1 + 3.1 + 3.2 + 1.5 = 15;\\
B_5 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}B_k = \binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2 + \binom{4}{3}B_3 + \binom{4}{4}B_4\\
&= 1.1 + 4.1 + 6.2 + 4.5 + 1.15 = 52;
\end{aligned}$$

4.2 NÚMEROS DE STIRLING E OS NÚMEROS HARMÔNICOS

Os números harmônicos são definidos como somas parciais da série harmônica:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, com\ n \geq 1.$$

Com isso podemos construir a Tabela 10 com os primeiros números harmônicos: Os números harmônicos obedecem a seguinte relação com os números de Stirling de primeiro tipo:

Teorema 4.2. *Seja n natural, $n \geq 1$, temos que:*

$$H_n = \frac{1}{n!}|s(n+1,2)|. \tag{4.3}$$

Demonstração. Segue do Teorema 1.1 que para $n+1$ e $k=2$, temos que:

$|s(n+1,2)| = |s(n,1)| + n|s(n,2)|$,

substituindo no Teorema 3.2:

$$\frac{1}{n!}|s(n+1,2)| = \frac{|s(n+1,2)|}{n!} = \frac{|s(n,1)| + n|s(n,2)|}{n!} = \frac{|s(n,1)|}{n!} + \frac{n|s(n,2)|}{n!},$$

utilizando a Proposição 1.2,

$$\frac{1}{n!}|s(n+1,2)| = \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{|s(n,2)|}{(n-1)!} = \frac{1}{n} + \frac{|s(n,2)|}{(n-1)!}.$$

Utilizando novamente o Teorema 1.1,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}|s(n+1,2)| &= \frac{1}{n} + \frac{|s(n-1,1)| + (n-1)|s(n-1,2)|}{(n-1)!}\\ &= \frac{1}{n} + \frac{|s(n-1,1)|}{(n-1)!} + \frac{|s(n-1,2)|}{(n-2)!}.\end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 1.6 para $n-1$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}|s(n+1,2)| &= \frac{1}{n} + \frac{(n-2)!}{(n-1)!} + \frac{|s(n-1,2)|}{(n-2)!}\\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)} + \frac{|s(n-1,2)|}{(n-2)!}.\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 1.1 e a Proposição 1.6, de forma análoga temos:

$$\frac{1}{n!}|s(n+1,2)| = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{(n-2)} + \frac{|s(n-2,2)|}{(n-3)!}.$$

Repetindo esse processo temos que:

$$\frac{1}{n!}|s(n+1,2)| = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = H_n.$$

□

4.3 NÚMEROS DE STIRLING E OS NÚMEROS DE LAH

Os números de Lah, descobertos por Ivo Lah em 1954 [10] e [11], assim como os números de Stirling $S(n,k)$ descrevem o número de maneiras pelas quais um conjunto com n elementos pode ser particionado em k subconjuntos não ordenados e não-vazios, os números de Lah, $L(n,k)$ descrevem a mesma situação porém, o conteúdo dos subconjuntos é ordenado e não-vazio, tal subconjunto é conhecido como *tupla*.

Podemos definir tupla como uma lista ordenada finita (sequência) de elementos.

Tabela 11 - Números de Lah

$L(n,k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=1$	1	0	0	0	0
$n=2$	2	1	0	0	0
$n=3$	6	6	1	0	0
$n=4$	24	36	12	1	0
$n=5$	120	240	120	20	1

Uma *n-tupla* é uma sequência (ou lista ordenada) de n elementos em que n é um número não-negativo. Se os n objetos são representados por $x_1, x_2, \cdots, x_n$, então podemos escrever uma *n-tupla* como $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Exemplo 7. $L(3,2) = 6$ *corresponde a partição de três elementos, por exemplo,* $\{A, B, C\}$ *em dois subconjuntos ordenados ou* $2 - tuplas$*.*

$$\begin{gathered}\{\{A,B\},\{C\}\};\\ \{\{B,A\},\{C\}\};\\ \{\{A,C\},\{B\}\};\\ \{\{C,A\},\{B\}\};\\ \{\{B,C\},\{A\}\};\\ \{\{C,B\},\{A\}\}.\end{gathered}$$

Ou melhor organizados na Tabela 11.

Um outro modo de obtermos os números de Lah é utilizando a relação de recorrência:

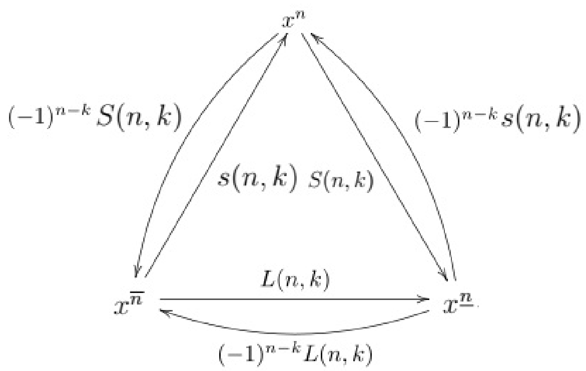
Proposição 4.3. *Sejam n e k, números naturais, tais que $n \geq k \geq 0$, os números de Lah satisfazem a seguinte recorrência:*

$$L(n,k) = (n+k-1)L(n-1,k) + L(n-1,k-1). \tag{4.4}$$

Demonstração. Vamos demonstrar essa relação de forma combinatória.

Para contar o número de partições de um subconjunto de n elementos em k tuplas, podemos condicionar a localização do elemento n. Se n é forma uma tupla sozinho, há $L(n-1,k-1)$ de formar as tuplas restantes. Supondo que n esteja numa tupla com outros elementos. Há $L(n-1,k)$ modos de formar k tuplas não-vazias do elemento 1 ao elemento $n-1$. Então o elemento n pode ser colocado na frente de qualquer k tupla ou após qualquer um dos $n-1$ elementos já posicionados, para um total de $n+k-1$ posições. Portanto há $(n+k-1)L(n-1,k)$ modos de formar k tuplas não-vazias a partir de n elementos se n forma uma tupla com outros elementos. $\square$

Figura 16 - Relação dos números de Lah com
os números de Stirling



Esses números também podem ser obtidos como os coeficientes que relacionam fatoriais crescentes em termos de fatoriais decrescentes. Assim,

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= \sum_{k=1}^{n} L(n,k)x^{\underline{k}} \\ x^{\underline{n}} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}L(n,k)x^{\overline{k}}. \end{aligned}$$

Proposição 4.4. *Sejam n, k e j, números naturais, tais que $n \geq k \geq j \geq 0$, os números de Lah satisfazem a seguinte relação com números de Stirling de primeiro e segundo tipos:*

$$L(n,k) = \sum_{j=0}^{n} |s(n,j)|S(j,k) \tag{4.5}$$

Demonstração. Vamos demonstrar essa relação de forma combinatória.
Como visto em [12], ambas expressões determinam de quantos modos podemos particionar n elementos em k tuplas. O lado esquerdo da equação segue diretamente da definição de números de Lah. Pelo lado direito, podemos particionar os n elementos em j ciclos não vazios de $|s(n,j)|$ maneiras, depois vamos colocar os j ciclos em k subconjuntos não vazios de $S(j,k)$ maneiras. Essa abordagem produz um subconjunto de k tuplas não-vazias pois cada subconjunto de ciclos define unicamente uma permutação nos elementos compõem aqueles ciclos. A soma de todos os valores de j nos fornece o número de maneiras de particionar n elementos em k tuplas. □

A Figura 16 resume as relações:

4.4 APLICAÇÃO EM EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Nesta seção vamos tratar um problema que surge do trabalho de Hossein Movasati e Younes Nikdelan [13]. Suponha que a função $w = f(z)$ satisfaz a equação diferencial:

$$L := \vartheta^{n+1} - z\left(\vartheta + \frac{1}{n+2}\right)\left(\vartheta + \frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(\vartheta + \frac{n+1}{n+2}\right), \tag{4.6}$$

onde $\vartheta := z\dfrac{\partial}{\partial z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Isso quer dizer que $Lw = 0$. Também supomos que com a mudança de variáveis $z = \dfrac{y}{x^{n+2}}$, podemos escrever w da forma $w = xg(x, y)$. Declara-se que $v = g(x, y)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} = -S(n+2, n+1)\frac{x^{n+1}}{x^{n+2} - y}\frac{\partial^n}{\partial x^n} - S(n+2, n)\frac{x^n}{x^{n+2} - y}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} - \\ \ldots - S(n+2, 2)\frac{x^2}{x^{n+2} - y}\frac{\partial}{\partial x} - S(n+2, 1)\frac{x}{x^{n+2} - y},$$

onde $S(r, s), r, s \in \mathbb{N}$ representam os números de Stirling de segundo tipo dados por:

$$S(r, s) = \frac{1}{s!}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{s}{i}(s-i)^n.$$

Aqui vamos demonstrar este problema para $n = 1, 2, 3$. Para este fim, vamos utilizar o seguinte fato. Seja ψ uma função de z, então:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-y(n+2)x^{n+1}}{(x^{n+2})^2}\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{-y(n+2)}{x^{n+3}}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{x^{n+3}}{-y(n+2)}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e daí

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{x^{n+3}}{-y(n+2)}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.7}$$

Portanto

$$\vartheta = z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{y}{x^{n+2}}\frac{x^{n+3}}{-y(n+2)}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{-x}{n+2}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.8}$$

Fazendo $L = 0$ em (4.6):

$$\vartheta^{n+1} = z\left(\vartheta + \frac{1}{n+2}\right)\left(\vartheta + \frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(\vartheta + \frac{n+1}{n+2}\right). \tag{4.9}$$

Demonstração para o caso $n = 1$:

Para $n = 1$ na mudança de variáveis $z = \dfrac{y}{x^{n+2}}$, temos que $z = \dfrac{y}{x^3}$ Fazendo $n = 1$ em (4.8) temos:

$$\vartheta = -\frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.10}$$

Fazendo $n = 1$ em (4.9), temos:

$$\vartheta^2 = z\left(\vartheta + \frac{1}{3}\right)\left(\vartheta + \frac{2}{3}\right) = z\left(\vartheta^2 + \vartheta + \frac{2}{9}\right),$$

assim,

$$(1 - z)\vartheta^2 = z\vartheta + \frac{2}{9}z,$$

então,

$$\vartheta^2 = \frac{z}{1-z}\vartheta + \frac{2}{9}\frac{z}{1-z}, \tag{4.11}$$

utilizando $z = \dfrac{y}{x^3}$, obtemos:

$$\frac{z}{1-z} = \frac{\frac{y}{x^3}}{1 - \frac{y}{x^3}} = \frac{y}{x^3 - y}. \tag{4.12}$$

Substituindo (4.12) em (4.11):

$$\vartheta^2 = \frac{y}{x^3 - y}\vartheta + \frac{2}{9}\frac{y}{x^3 - y}. \tag{4.13}$$

Sabemos que:

$$\vartheta = z\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \vartheta^2 = z\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

e utilizando (4.10):

$$\begin{aligned}\vartheta^2 &= z\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right) = -\frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{1}{9}x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{9}x\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) e (4.10) em (4.13):

$$\frac{1}{9}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = \frac{y}{x^3-y}\left(-\frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{2}{9}\frac{y}{x^3-y} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{-3y}{x^3-y}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2y}{x^3-y} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{-3y}{x^3-y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2y}{x(x^3-y)} \\ \Leftrightarrow x\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{-3y}{x^3-y} - 1\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2y}{x(x^3-y)} \\ \Leftrightarrow x\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{-3y-x^3+y}{x^3-y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2y}{x(x^3-y)} \\ \Leftrightarrow x\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{-2y-x^3}{x^3-y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2y}{x(x^3-y)} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{-x^3-2y}{x(x^3-y)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2y}{x^2(x^3-y)}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

A equação (4.16) é equivalente à equação (4.9) para n=1, logo pela hipótese a função $w = xg(x,y)$ satisfaz a equação diferencial, ou seja:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xg) = \frac{-x^3-2y}{x(x^3-y)}\frac{\partial}{\partial x}(xg) + \frac{2y}{x^2(x^3-y)}(xg). \tag{4.17}$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xg) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xg)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g + x\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \tag{4.18}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}(xg) = g + x\frac{\partial g}{\partial x}. \tag{4.19}$$

Substituindo (4.18) e (4.19) em (4.17):

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial g}{\partial x}+x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{-x^3-2y}{x(x^3-y)}\left(g+x\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\frac{2y}{x(x^3-y)}g\\
\Leftrightarrow x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \left(\frac{-x^3-2y}{x^3-y}-2\right)\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{x^2}{x^3-y}g\\
\Leftrightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -3\frac{x^2}{x^3-y}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{x}{x^3-y}g
\end{aligned}$$

Então a função $v=g(x,y)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -S(3,2)\frac{x^2}{x^3-y}\frac{\partial}{\partial x}-S(3,1)\frac{x}{x^3-y}\quad\Box$$

Demonstração para o caso $n=2$:

Para $n=2$ na mudança de variáveis $z=\dfrac{y}{x^{n+2}}$, temos que $z=\dfrac{y}{x^4}$

Fazendo $n=2$ em (4.8) temos:

$$\vartheta=-\frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.20}$$

Utlilizando a equação anterior temos:

$$\begin{aligned}
\vartheta^2=\vartheta(\vartheta) &= -\frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{1}{16}x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= \frac{1}{16}x\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{16}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\vartheta^3 &= \vartheta(\vartheta^2)=-\frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{16}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{64}x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\\
&= -\frac{1}{64}x\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\\
&= -\frac{1}{64}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+3x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Fazendo $n = 2$ em (4.9), temos:

$$\begin{aligned}
\vartheta^3 &= z\left(\vartheta + \frac{1}{4}\right)\left(\vartheta + \frac{2}{4}\right)\left(\vartheta + \frac{3}{4}\right) \\
&= z\left(\vartheta^2 + \frac{3}{4}\vartheta + \frac{2}{16}\right)\left(\vartheta + \frac{3}{4}\right) \\
&= z\left(\vartheta^3 + \frac{6}{4}\vartheta^2 + \frac{11}{16}\vartheta + \frac{6}{64}\right),
\end{aligned}$$

assim,

$$(1-z)\vartheta^3 = \frac{6}{4}z\vartheta^2 + \frac{11}{16}z\vartheta + \frac{6}{64}z,$$

então,

$$\vartheta^3 = \frac{6}{4}\frac{z}{1-z}\vartheta^2 + \frac{11}{16}\frac{z}{1-z}\vartheta + \frac{6}{64}\frac{z}{1-z}. \tag{4.23}$$

Utilizando $z = \dfrac{y}{x^4}$, obtemos:

$$\frac{z}{1-z} = \frac{\dfrac{y}{x^4}}{1 - \dfrac{y}{x^4}} = \frac{y}{x^4 - y}. \tag{4.24}$$

Substituindo (4.24) em (4.23):

$$\vartheta^3 = \frac{6}{4}\frac{y}{x^4-y}\vartheta^2 + \frac{11}{16}\frac{y}{x^4-y}\vartheta + \frac{6}{64}\frac{y}{x^4-y}. \tag{4.25}$$

Substituindo (4.20), (4.21) e (4.22) em (4.25):

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{64}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) \\
&\quad = \frac{6}{4}\frac{y}{x^4-y}\frac{1}{16}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \frac{11}{16}\frac{y}{x^4-y}\left(-\frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{6}{64}\frac{y}{x^4-y} \\
&\quad = \frac{6}{64}\frac{y}{x^4-y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{11}{64}\frac{y}{x^4-y}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{6}{64}\frac{y}{x^4-y}
\end{aligned}$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} &= \left(3-\frac{6y}{x^4-y}\right)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(-1-\frac{6y}{x^4-y}+\frac{11y}{x^4-y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{6y}{x^4-y}\\
\Leftrightarrow x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} &= \left(\frac{-3x^4+3y-6y}{x^4-y}\right)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{-x^4+y+5y}{x^4-y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{6y}{x^4-y}\\
\Leftrightarrow x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} &= -3\left(\frac{x^4+y}{x^4-y}\right)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-1\left(\frac{x^4-6y}{x^4-y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{6y}{x^4-y}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = -\frac{3}{x}\left(\frac{x^4+y}{x^4-y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4-6y}{x^4-y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{6}{x^3}\frac{y}{x^4-y}. \tag{4.26}$$

A equação (4.26) é equivalente à equação (4.9) para $n=2$, logo pela hipótese, a função $w=xg(x,y)$ satisfaz a equação diferencial, ou seja:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}(xg) = -\frac{3}{x}\left(\frac{x^4+y}{x^4-y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xg)-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4-6y}{x^4-y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(xg)-\frac{6}{x^3}\frac{y}{x^4-y}(xg) \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}(xg) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial g}{\partial x}+x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) = 2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+x\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = 3\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+x\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \tag{4.28}$$

Substituindo (4.18), (4.19) e (4.28) em (4.27):

$$3\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+x\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = -\frac{3}{x}\left(\frac{x^4+y}{x^4-y}\right)\left(2\frac{\partial g}{\partial x}+x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4-6y}{x^4-y}\right)\left(g+x\frac{\partial g}{\partial x}\right)-\frac{6}{x^3}\frac{y}{x^4-y}(xg)$$

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} &= \left[-3-3\left(\frac{x^4+y}{x^4-y}\right)\right]\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\frac{1}{x}\left[6\left(\frac{x^4+y}{x^4-y}\right)+\frac{x^4-6y}{x^4-y}\right]\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{6}{x^2}\frac{y}{x^4-y}(g)\\
\Leftrightarrow x\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} &= \left(\frac{-3x^4+3y-3x^4-3y}{x^4-y}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\frac{1}{x}\left(\frac{6x^4+6y+x^4-6y}{x^4-y}\right)\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{x^4-y}\right)(g)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = -\frac{6}{x}\left(\frac{x^4}{x^4-y}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\frac{7}{x^2}\left(\frac{x^4}{x^4-y}\right)\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^4}{x^4-y}\right)g \tag{4.29}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = -6\left(\frac{x^3}{x^4-y}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-7\left(\frac{x^2}{x^4-y}\right)\frac{\partial g}{\partial x}-\left(\frac{x}{x^4-y}\right)g$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3} = -6\left(\frac{x^3}{x^4-y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-7\left(\frac{x^2}{x^4-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}-\left(\frac{x}{x^4-y}\right). \tag{4.30}$$

Então a função $v = g(x,y)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = -S(4,3)\left(\frac{x^3}{x^4-y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - S(4,2)\left(\frac{x^2}{x^4-y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - S(4,1)\left(\frac{x}{x^4-y}\right) \qquad \square$$

Demonstração para o caso $n = 3$:

Para $n = 3$ na mudança de variáveis $z = \dfrac{y}{x^{n+2}}$, temos que $z = \dfrac{y}{x^5}$

Fazendo $n = 3$ em (4.8) temos:

$$\vartheta = -\frac{1}{5}x\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.31}$$

Utlilizando a equação anterior temos:

$$\begin{aligned}
\vartheta^2 &= \vartheta(\vartheta) = -\frac{1}{5}x\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{5}x\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= \frac{1}{25}x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= \frac{1}{25}x\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{25}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\vartheta^3 &= \vartheta(\vartheta^2) = -\frac{1}{5}x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{25}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{125}x\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\\
&= -\frac{1}{125}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right),
\end{aligned} \tag{4.33}$$

assim:

$$\begin{aligned}
\vartheta^4 &= \vartheta\left[\vartheta\left(\vartheta^2\right)\right] = \vartheta\left(\vartheta^3\right) = -\frac{1}{5}x\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{125}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right]\\
&= \frac{1}{625}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 7x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 6x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Fazendo $n = 3$ em (4.9), temos:

$$\begin{aligned}
\vartheta^4 &= z\left(\vartheta + \frac{1}{5}\right)\left(\vartheta + \frac{2}{5}\right)\left(\vartheta + \frac{3}{5}\right)\left(\vartheta + \frac{4}{5}\right)\\
&= z\left(\vartheta^4 + \frac{10}{5}\vartheta^3 + \frac{35}{25}\vartheta^2 + \frac{50}{125}\vartheta + \frac{24}{625}\right)\\
&= \frac{10}{5}\frac{z}{1-z}\vartheta^3 + \frac{35}{25}\frac{z}{1-z}\vartheta^2 + \frac{50}{125}\frac{z}{1-z}\vartheta + \frac{24}{625}\frac{z}{1-z}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Utilizando $z = \dfrac{y}{x^5}$, obtemos:

$$\frac{z}{1-z} = \frac{\dfrac{y}{x^5}}{1-\dfrac{y}{x^5}} = \frac{y}{x^5-y} \tag{4.36}$$

Substituindo (4.36) em (4.35):

$$\vartheta^4 = 2\frac{y}{x^5-y}\vartheta^3 + \frac{7}{5}\frac{y}{x^5-y}\vartheta^2 + \frac{2}{5}\frac{y}{x^5-y}\vartheta + \frac{24}{625}\frac{y}{x^5-y} \tag{4.37}$$

Substituindo (4.31), (4.32), (4.33), (4.34) em (4.37):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{625}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 7x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 6x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\\
&= \frac{2y}{x^5-y}\left[-\frac{1}{125}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right] + \frac{7}{5}\frac{y}{x^5-y}\left[\frac{1}{25}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]\\
&\quad + \frac{2}{5}\frac{y}{x^5-y}\left(-\frac{1}{5}x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{24}{625}\frac{x}{x^5-y}x\frac{\partial}{\partial x} + 7x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 6x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-10y}{x^5-y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) + \frac{35y}{x^5-y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{50y}{x^5-y}\frac{x\partial}{\partial x} + \frac{24y}{x^5-y}x^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}\\
&= \left(\frac{-10y}{x^5-y} - 6\right)x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{-30y}{x^- y} - 7 + \frac{35y}{x^5-y}\right)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{-10y-50y+35y}{x^5-y} - 1\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{24y}{x^5-y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^4\frac{\partial^4}{\partial x^4} &= \left(\frac{-10y-6x^5+6y}{x^5-y}\right)x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{5y-7x^5+7y}{x^5-y}\right)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{-25y-x^5+y}{x^5-y}\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{24y}{x^5-y}\\
&= \left(\frac{-6x^5-4y}{x^5-y}\right)x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{-7x^5+12y}{x^5-y}\right)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{-x^5-24y}{x^5-y}\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{24y}{x^5-y},
\end{aligned}$$

assim:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{1}{x}\left(\frac{-6x^5-4y}{x^5-y}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{x^2}\left(\frac{-7x^5+12y}{x^5-y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x^3}\left(\frac{-x^5-24y}{x^5-y}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{24}{x^4}\frac{y}{x^5-y} \tag{4.38}$$

A equação (4.38) é equivalente à equação (4.9) para $n = 3$, logo, pela hipótese, a função $w = xg(x,y)$ satisfaz a equação diferencial, ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial x^4}(xg) &= \frac{1}{x}\left(\frac{-6x^5-4y}{x^5-y}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3}(xg) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{-7x^5+12y}{x^5-y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xg) + \frac{1}{x^3}\left(\frac{-x^5-24y}{x^5-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}(xg)\\
&\quad + \frac{24}{x^4}\frac{y}{x^5-y}(xg)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}(xg) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\right) = 3\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + x\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = 4\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + x\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} \tag{4.40}$$

Substituindo (4.18), (4.19), (4.28) e (4.40) em (4.39) temos:

$$\begin{aligned}4\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + x\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = {}& \frac{1}{x}\left(\frac{-6x^5 - 4y}{x^5 - y}\right)\left(3\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{-7x^5 + 12y}{x^5 - y}\right)\left(2\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) \\ & + \frac{1}{x^3}\left(\frac{-x^5 - 24y}{x^5 - y}\right)\left(g + x\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{24}{x^4}\frac{y}{x^5 - y}(xg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = {}& \left(-4 + \frac{-6x^5 - 4y}{x^5 - y}\right)\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + \frac{1}{x}\left(\frac{-18x^5 - 12y - 7x^5 + 12y}{x^5 - y}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{x^2}\left(\frac{-14x^5 + 24y - x^5 - 24y}{x^5 - y}\right)\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{x^3}\left(\frac{24y - x^5 - 24y}{x^5 - y}\right)g\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = \left(\frac{-4x^5 + 4y - 6x^5 - 4y}{x^5 - y}\right)\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + \frac{1}{x}\left(\frac{-25x^2}{x^5 - y}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\left(\frac{-15x^5}{x^5 - y}\right)\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{x^3}\left(\frac{-x^5}{x^5 - y}\right)g$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = -10\left(\frac{x^4}{x^5 - y}\right)\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - 25\left(\frac{x^3}{x^5 - y}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 15\left(\frac{x^2}{x^5 - y}\right)\frac{\partial g}{\partial x} - 1\left(\frac{x}{x^5 - y}\right). \quad \square$$

Então a função $v = g(x, y)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = {}& -S(5,4)\left(\frac{x^4}{x^5 - y}\right)\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - S(5,3)\left(\frac{x^3}{x^5 - y}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - S(5,2)\left(\frac{x^2}{x^5 - y}\right)\frac{\partial g}{\partial x} \\ & -S(5,1)\left(\frac{x}{x^5 - y}\right)\end{aligned}$$

CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise aprofundada sobre os números de Stirling de primeiro e segundo tipos, assim como algumas de suas relações com outros números e outras aplicações. Esta temática demonstrou que a análise combinatória não se limita somente aos estudos simplificados vistos nos livros didáticos, podemos utilizar uma abordagem histórica em sala de aula no ensino médio, falando sobre James Stirling e seus contemporâneos, principalmente Newton e Euler, podemos demonstrar a relação dos polinômios com os números de Stirling, apresentando soluções a uma maior variedade de problemas e contextos.

REFERÊNCIAS

1 ARCHIVE, M. H. of M. *James Stirling*. 1998. Disponível em: <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stirling.html>. Acesso em: 22/05/2019.

2 TWEDDLE, I. *James Stirling's methodus differentialis: an annotated translation of Stirling's text*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

3 BOYADZHIEV, K. N. Close encounters with the stirling numbers of the second kind. *Mathematics Magazine*, Taylor & Francis, v. 85, n. 4, p. 252–266, 2012.

4 GRAHAM, R. L. et al. Concrete mathematics: a foundation for computer science. *Computers in Physics*, AIP, v. 3, n. 5, p. 106–107, 1989.

5 SILVA, N. A. *Os números de Stirling*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos,, 2005.

6 UNIVERSITY, C. *Stirling Numbers*. 2013. Disponível em: <http://www.cs.cornell.edu/courses/cs2800/2013fa/Handouts/Stirling.pdf>. Acesso em: 22/05/2019.

7 HANDBOOK of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. In: . [S.l.]: Courier Corporation, 1965. p. 824–825.

8 GOULD, H. The lagrange interpolation formula and stirling numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 11, n. 3, p. 421–425, 1960.

9 GRIFFITHS, M.; MEZO, I. A generalization of stirling numbers of the second kind via a special multiset. *Journal of Integer Sequences*, v. 13, n. 2, p. 3, 2010.

10 Wikipedia contributors. *Lah number — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lah_number&oldid=903739833>. Acesso em: 22/05/2019.

11 Robert Dickau. *Lah number*. 2019. Disponível em: <https://www.robertdickau.com/lah.html>. Acesso em: 22/05/2019.

12 SPIVEY, M. Z. *The Art of Proving Binomial Identities*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2019.

13 MOVASATI, H.; NIKDELAN, Y. Gauss-manin connection in disguise: Dwork family. *arXiv preprint arXiv:1603.09411*, 2016.