UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA COMO SOLUÇÃO PARA A NAVEGAÇÃO ASTRONÔMICA

LUIZ FERNANDO DA SILVA BEZERRA

Rio de Janeiro
2019

LUIZ FERNANDO DA SILVA BEZERRA

A Trigonometria Esférica como solução para a Navegação Astronômica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Xavier Penna
Doutor em Matemática - IMPA

Rio de Janeiro
2019

B574

BEZERRA, LUIZ FERNANDO
A GEOMETRIA ESFÉRICA COMO SOLUÇÃO PARA A NAVEGAÇÃO ASTRONÔMICA / LUIZ FERNANDO BEZERRA. -- Rio de Janeiro, 2019.
96p.

Orientador: FÁBIO PENNA.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Geometria Esférica. 2. Navegação Astronômica. 3. Geometria não-Euclidiana. 4. Trigonometria Esférica. 5. Navegação . I. PENNA, FÁBIO, orient. II. Título.

Luiz Fernando da Silva Bezerra

A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA COMO SOLUÇÃO PARA A NAVEGAÇÃO ASTRONÔMICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 13 de dezembro de 2019.

Prof. Dr. Fábio Xavier Penna (Orientador) .... CCET/UNIRIO

Prof. Drª. Luzia da Costa Tonon Martarelli .... CCET/UNIRIO

Prof. MSc. Guilherme Wagner de Azevedo Cordeiro .... ESCOLA NAVAL

Rio de Janeiro

2019

Agradecimentos

Minha eterna gratidão...

Aos meus pais *(in memoriam)* pelo carinho e educação.

Aos meus queridos filhos: Bruno, Filipe e Fernando Jr., razão de ser da minha vida.

A minha amada esposa Audrey, companheira de todas as horas, incentivadora e eterna fonte de inspiração.

Conduzo também a todos os docentes desse curso de mestrado, aos quais prefiro chamar de matemáticos e a quem devo respeito e admiração, pelo tratamento dispensado e ensinamentos transmitidos. Em especial, ao Prof. Dr. Fábio Xavier Penna, por acreditar nesse projeto e pela orientação profissional e segura.

Aos amigos e colegas de curso, pelo companheirismo, incentivo e diversas risadas ao longo desses dois anos.

A Marinha do Brasil, pela sólida formação acadêmica e por todos os valores morais e intelectuais recebidos.

Ao programa PROFMAT e a Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro pela oportunidade e pela condução desse curso de mestrado.

E por fim a Deus, grande geômetra do universo, por sempre me apontar as melhores soluções.

Sem a Matemática, não poderia haver
Astronomia; sem os recursos maravilhosos
da Astronomia, seria completamente
impossível a navegação. E a navegação foi o
fator máximo do progresso da humanidade.
(Amoroso Costa)

Resumo

Este trabalho tem como proposta principal ampliar os conhecimentos de alunos e professores do Ensino Médio acerca dos conceitos fundamentais de Geometria Esférica. A fim de atingir este propósito, foram escolhidos como objetos de estudo os conceitos e modelos da Geometria Esférica empregados na formalização da Navegação Astronômica. Em um primeiro momento é apresentado o contexto histórico dessa geometria, antes e depois de Euclides, para em seguida mostrar a importância do quinto postulado de Euclides na criação das novas geometrias do século XIX, estudadas por Gauss, Bolyai, Lobacheswsky e Riemann dentre outros. Em seguida descreve-se os conceitos mais relevantes da trigonometria esférica com a demonstração dos principais teoremas e fórmulas e uma analogia desses princípios com aqueles empregados na Geometria Plana. Também é realizada uma adequada caracterização da Navegação Astronômica antecedida dos fatos históricos principais que envolvem esta técnica. A parte final dessa dissertação é marcada pelo emprego da trigonometria esférica como ferramenta para a Navegação Astronômica, com demonstrações e justificativas da modelagem matemática utilizada nesse tipo de navegação. Para finalizar foram propostas algumas atividades, em forma de exercícios, relacionadas ao emprego da trigonometria esférica descrita nas seções anteriores.

Abstract

This work has as main proposal to broaden the knowledge of high school students and teachers about the fundamental concepts of Spherical Geometry. In order to achieve this objective, concepts and models of Spherical Geometry employed in the formalization of Astronomical Navigation were selected as objects of study. At first, the historical context of this Geometry is presented, before and after Euclid, to continue showing the importance of Euclid's fifth postulate in the creation of new nineteenth century geometries, studied by Gauss, Bolyai, Lobacheswsky and Riemann. The following describes the most relevant concepts of Spherical Trigonometry with a demonstration of the main Theorems and Formulas and an analogy of these principles with which it uses Flat Geometry. An adequate characterization of Astronomical Navigation preceded by the main historical facts involved in this technique is also performed. A final part of this dissertation is marked by the use of Spherical Trigonometry, as a tool for Astronomical Navigation, with demonstrations and justifications of the mathematical modeling used in this type of navigation. To finalize this work, were presented some activities in the form of exercises, related to the use of Spherical Trigonometry presented in previous sections.

Sumário

Lista de Figuras

Fonte das Figuras

- Figura 1.1: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/ ommartins/seminario/rhind/inicio.htm -(acesso em 22/04/2019).
- Figura 2.1: https://https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria-esférica - (acesso em 22/04/2019).
- Figura 2.2: http://matemolivares.blogia.com/2014/090403-elementos-de-geometria-de-euclides..php -(acesso em 22/04/2019).
- Figura 2.3: http://astronomy.swin.edu.au/cosmos/C/Critical+Density - (acesso em 22/04/2019).
- Figura 2.4: https://pt.wikipedia.org/wiki/Curvatura-gaussiana - (acesso em 08/05/2019).
- Figura 2.5:http://geohiperbolica.benditamatematica.com/2016/06/alguns-fatos-historicos-da-geometria.html- (acesso em 08/05/2019).
- Figura 2.6: http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm - (acesso em 08/05/2019).
- Figura 3.1 a 3.6: o autor.
- Figura 3.7: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/esfera - (acesso em 08/05/2019).
- Figura 3.8 a 3.9: o autor.
- Figura 3.10: https://noic.com.br/trigonometria-esferica/ - (acesso em 08/05/2019).
- Figura 3.11: https://revista.ufrr.br/rct/article/download/4645/2482 - (acesso em 23/05/2019).
- Figura 3.12: o autor.
- Figura 3.13: https://docplayer.com.br/10812540-Geometria-esferica-e-trigonometria-esferica-aplicadas-a-astronomia-de-posicao.html - (acesso em 23/05/2019).

- Figura 3.14: https://www.obaricentrodamente.com/2012/06/integracao-por-substituicao.html- (acesso em 23/05/2019).
- Figura 4.1 a 4.4: https: o autor.
- Figura 5.1: MIGUENS, A. P. (1999).Navegação a Ciência e a Arte - navegação astronômica ederrotas -Vol II. Diretoria de Hidrografia e Navegação, Niterói, RJ.
- Figura 5.2: COUTINHO, L. (2001).Convite às geometrias não-euclidianas. Interciência, Riode Janeiro, RJ.
- Figura 6.1 a 6.12: MIGUENS, A. P. (1999).Navegação a Ciência e a Arte - navegação astronômica ederrotas -Vol II. Diretoria de Hidrografia e Navegação, Niterói, RJ.
- Figura 6.13 a 6.15: Almanaque Náutico Brasileiro (ANB) 1993. Diretoria de Hidrografia e Navegação, Niterói, RJ.
- Figura 6.16 a 6.32: MIGUENS, A. P. (1999).Navegação a Ciência e a Arte - navegação astronômica ederrotas -Vol II. Diretoria de Hidrografia e Navegação, Niterói, RJ.
- Figura 6.33 a 6.38: Modelos de Cálculos da Diretoria de Hidrografia e Navegação, Niterói, RJ.
- Figura 7.1: https://www.diferenca.com/solsticio-e-equinocio - (acesso em 07/10/2019).

INTRODUÇÃO

O surgimento da geometria no antigo Egito relacionada às cheias do Rio Nilo, versão mais aceita, e o seu desenvolvimento e embasamento teórico na antiga Grécia, graças, principalmente, à Euclides de Alexandria, marca os primeiros momentos dessa importante parte da Matemática.

Por quase dois mil anos permaneceu como única e absoluta a geometria grega, ancorada, fundamentalmente, em uma das mais importantes obras da Matemática que foi "Os Elementos de Euclides".

Mas foi essa obra de Euclides, por meio do quinto postulado do livro I, conhecido como o axioma das paralelas, que protagonizou um dos maiores desafios já encontrados pelos matemáticos; - a demonstração do quinto postulado.

Próclo Lício (412 - 485),

> Este postulado deve ser riscado da lista, pois é uma proposição com muitas dificuldades que Ptolomeu de Alexandria (90 - 168), em certo livro, se propôs resolver... a asserção de que duas linhas retas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo prolongadas, acabam por se encontrar, é plausível mas não necessária. (...) É claro, portanto, que devemos procurar uma demonstração do presente teorema, e que este é estranho ao carácter especial dos postulados.

Durante séculos, vários matemáticos se debruçaram na tentativa de uma demonstração do postulado das paralelas, até que, no século XIX, Gauss, Janos Bolyai, Bernard Riemann e Nicolai Lobachevski mostraram que realmente se tratava de um axioma. Essa conclusão, acarretou a descoberta de duas outras geometrias: a Geometria Hiperbólica de Lobachevski e a Geometria Elíptica de Riemann, ficando conhecidas como geometrias não euclidianas.

Foi nesse contexto da criação das geometrias não euclidianas que a Geometria Esférica, como caso particular da geometria de Riemann, surgiu de maneira formal e sistemática. Dando origem a diversas aplicações e descrição de fenômenos que não poderiam ser contemplados pela Geometria Euclidiana.

Quando os portugueses iniciaram as grandes navegações surgiu a necessidade de referências para a localizaçao dos navios além da topografia da costa, daí tiveram que recorrer a métodos astronômicos. Esses métodos, já descobertos na antiguidade grega, supunham que as estrelas eram fixas numa esfera celeste. E foi o estudo dessa esfera celeste, amparado nos conceitos matemáticos da Geometria Esférica, mais precisamente nas relações trigonométricas nos triângulos esféricos, que permitiu uma adequada modelagem da posição dos astros e o consequente desenvolvimento da Navegação Astronômica.

A Navegação Astronômica é um método de navegação em que o navegante determina sua posição, ou obtém outras informações úteis para a segurança da navegação, por meio de observações dos astros da esfera celeste.

Pode até ser questionada a relevância da navegação astronômica nos dias atuais, marcados por diversas maravilhas e dispositivos eletrônicos. A resposta é que ainda vale à pena aprender Navegação Astronômica, pois continua havendo inúmeras vantagens neste método de navegação; equipamentos eletrônicos são caros, complexos e sujeitos a avarias, além de necessitarem de energia elétrica estabilizada, o que pode ser uma fonte de problemas, além dos custos de manutenção envolvidos.

Por outro lado, a simplicidade da Navegação Astronômica é admirável. Basta um rudimentar instrumento que permita medir ângulo dos astros, um bom cronômetro e um conjunto de Tábuas para que se consiga determinar sua posição em qualquer ponto da Terra. Energia elétrica não é necessária. Você pode navegar no maior e mais sofisticado dos navios, ou até mesmo em um pequeno veleiro.

O propósito desta dissertação é, por meio de alguns conceitos e teoremas, apresentar adequadamente a Geometria Esférica, para em seguida aplicar as principais relações da trigonometria esférica na obtenção da posição da Navegação Astronômica.

1 A GEOMETRIA PRÉ-EUCLIDIANA

A cultura egípcia se desenvolveu no noroeste da África, no vale do rio Nilo, desde aproximadamente 3200 a.C até os primeiros séculos da era cristã. Nesse período vários acontecimentos deixaram latente o conhecimento e desenvolvimento técnico dessa civilização, a saber:

- O desenvolvimento de três formas de escrita;
- A construção das pirâmides do egito, imensas estruturas destinadas aos túmulos reais;
- A criação de um calendário solar de 365 dias baseado em constelação celeste relacionada às cheias do rio Nilo;
- O descobrimento dos Papiros de Moscou e de Rhind (Figura 1.1), datados aproximadamente de 1850 a.C e 1650 a.C, respectivamente, onde encontramos diversos problemas matemáticos relacionados a situações práticas.

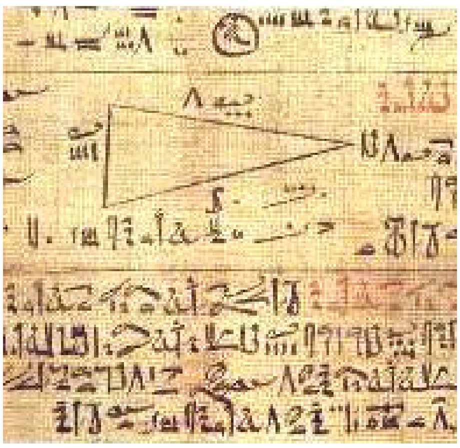


Figura 1.1: Papiro de Rhind ou Ahmes

A geometria nasceu no antigo Egito, segundo registros de filósofos como Heródoto e Aristóteles, e somente no século V, foi trazida pelo filósofo Tales de Mileto para a Grécia. Na Grécia antiga a filosofia ganhou seu embasamento teórico fundamentado na razão, graças a Euclides de Alexandria, que reuniu em seu tratado "Os Elementos de Euclides" os cinco postulados geométricos que são ensinados até hoje nas escolas.(BICUDO, 2019)

Para Heródoto, conforme registrado no segundo livro da sua obra "História", a geometria teria surgido graças ao Faraó Sesóstris III, que dividiu as terras da região para a agricultura, fazendo com que cada proprietário pagasse tributos conforme o tamanho do terreno. Quando o Nilo transbordava, e tomava parte dessa terra, os agricultores requeriam nova metragem para pagar menos impostos. A partir dessas medições, teria surgido a geometria.

Uma outra versão, segundo Aristóteles, diz que no Egito antigo havia uma classe sacerdotal que se dedicava aos estudos geométricos. Ou seja, nas versões desses filósofos, percebemos claramente origens distintas para o surgimento da geometria, uma calculada na prática e outra simplesmente teórica. É preciso lembrar que as visões filosóficas eram completamente diferentes no Egito e na Grécia. No Egito e na Babilônia, por exemplo, o critério de verdade era a experiência, ou seja, acreditava-se naquilo que a pessoa via, enquanto que na Grécia, não bastava ver para crer, e sim, provar por meio da razão.

Tanto no Egito quanto na Babilônia quem dominava o conhecimento era a classe sacerdotal, que se colocava como intermédio entre os deuses e o povo. Sendo assim, eles "interpretavam" a vontade do deus. Dessa maneira, os acontecimentos eram determinados pela vontade divina e, sendo assim, os sacerdotes não tinham que explicá-los. Quando o conhecimento chegou à Grécia, não havendo a classe sacerdotal, havia a necessidade de explicações pelas razão. A geometria não fugiu a isso e era preciso explicar os resultados geométricos pela razão e, para isso, foi estipulada uma base, com definições para objetos geométricos e suas propriedades.(ROQUE, 2019)

Os postulados são as primeiras noções geométricas que são aceitas sem contestações. A partir desses postulados, são apresentadas outras regras. Dessa maneira, a geometria se transformou em uma ciência dedutiva (qualquer afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente) e baseada em princípios. Nesse contexto, Euclides fez o primeiro grande resumo de tudo que se conhecia antes dele em Matemática. Ele foi um chefe de escola em Alexandria, 300 anos antes de Cristo, e sua obra "Os Elementos de Euclides" resume muito bem tudo que se conhecia em matemática elementar e o desenvolvimento da geometria da época.

2 DESCOBRIMENTO DOS ESPAÇOS NÃO-EUCLIDIANOS

Na Geometria Plana ou Geometria Euclidiana, os conceitos básicos são ponto e reta. Na esfera, os pontos estão definidos no sentido usual. Os equivalentes das retas não estão definidos no sentido usual da "linha reta", mas sim no sentido de "a trajetória mais curta entre os pontos", a qual é chamada de geodésica. Neste capítulo, ao estudarmos a esfera e seus elementos fundamentais, mostraremos inicialmente a evolução da geometria com estudos e contribuições de diversos matemáticos para em seguida apresentarmos algumas relevantes associações com o globo terrestre, remetendo a conceitos geográficos comuns como; meridianos, paralelos, latitudes, longitudes, polos etc, que são comuns tanto à Matemática quanto à Geografia.

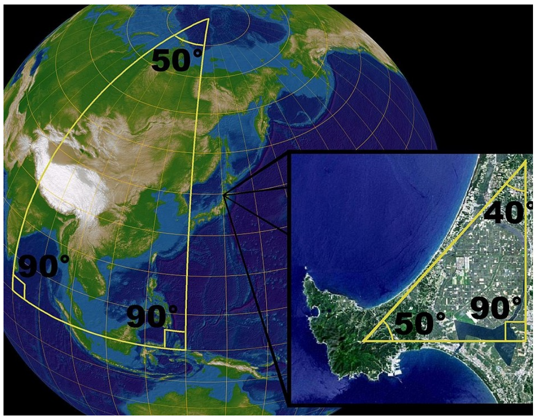


Figura 2.1: Superfície terrestre

2.1 Do V Postulado de Euclides às Geometrias não Euclidianas

Apesar de muitos resultados da Geometria Esférica serem conhecidos desde a antiguidade enquanto sistema axiomático, este tipo de geometria só foi formalizada no séc. XIX após a descoberta das geometrias não euclidianas, pois contrariam o V postulado de Euclides de Alexandria (360 a.C - 295 a.C). Registros bibliográficos mostram que conhecimentos geométricos não triviais já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia, na Índia e também na Grécia. Entretanto, pode-se dizer que foi através dos gregos que se difundiram tais conhecimentos geométricos para o resto do mundo. A geometria grega, difundida por Euclides, permaneceu por quase dois mil anos como única e absoluta e apenas no início do século XIX surgiram outras estruturas, denominadas geometrias não-euclidianas.(BICUDO, 2019)

Postulado 1. *"Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos."*

O quinto postulado do livro I, como descrito acima, é o mais famoso dos postulados de Euclides e aquele que tem dado mais dores de cabeça aos matemáticos. Equivalente ao *axioma das paralelas*, de acordo com o qual, por um ponto exterior a uma reta, apenas passa uma outra reta paralela à dada. Desde cedo este postulado foi objeto de polêmica por não possuir o mesmo grau de "evidência" que os restantes.

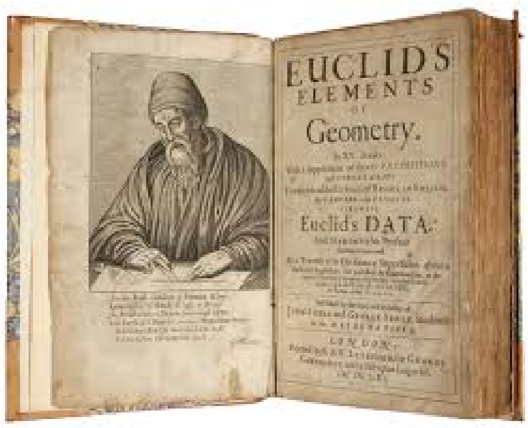


Figura 2.2: Os Elementos de Euclides

Próclo Lício (412 - 485), criticou este postulado nos seguintes termos:

> Este postulado deve ser riscado da lista, pois é uma proposição com muitas dificuldades que Ptolomeu de Alexandria (90 - 168), em certo livro, se propôs resolver... a asserção de que duas linhas retas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo prolongadas, acabam por se encontrar, é plausível mas não necessária. (...) É claro, portanto, que devemos procurar uma demonstração do presente teorema, e que este é estranho ao carácter especial dos postulados.

O próprio Euclides e muitos dos seus sucessores tentaram demonstrar esta proposição a partir de outros axiomas da geometria. Mas sempre em vão. Esta impossibilidade foi durante séculos o escândalo da geometria e o desespero dos geômetras. A primeira tentativa de demonstração de que há conhecimento é de Ptolomeu. Outro exemplo de uma tentativa frustrada de contornar o quinto postulado de Euclides é feita por John Wallis (1616 - 1703), matemático britânico antecessor de Isaac Newton (1643 - 1727). De fato, Wallis não fez mais do que propor um novo enunciado do quinto postulado de Euclides.

O padre jesuíta G. Saccheri (1667 - 1733) foi talvez o primeiro a ensaiar uma abordagem inteiramente nova. No seu último livro, *"Ab omni naevo vindicatus"*, tentou utilizar a técnica de redução ao absurdo, admitindo a negação do postulado do paralelismo de Euclides com vista a obter algum absurdo ou contradição. Sem saber, Saccheri tinha descoberto a geometria não-euclidiana! O trabalho de Saccheri permaneceu ignorado durante um século e meio.

Outros grandes matemáticos, como Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855), o príncipe dos matemáticos, redescobriram e desenvolveram a geometria em bases semelhantes às de Saccheri (negando o quinto postulado), sem nunca chegarem a uma contradição. Gauss chega mesmo a escrever:

> Estou cada vez mais convencido de que a necessidade da nossa geometria (euclidiana) não pode ser demonstrada, pelo menos não pela razão humana, nem por culpa dela. Talvez, numa outra vida, consigamos obter a intuição sobre a natureza do espaço que, no presente, é inatingível.

Outros, mais ousados, não recuaram perante o estranho mundo novo que se abria a seus olhos. O jovem húngaro Janos Bolyai (1802 - 1860) admite a negação do postulado do paralelismo de Euclides como hipótese não absurda, isto é, como um novo postulado, a juntar aos postulados habituais da geometria absoluta. Pela mesma época, e trabalhando independentemente, o jovem russo Nicolai Lobachewski (1792 - 1856) publica em 1829 a sua versão da geometria não euclidiana à qual chama, primeiramente "imaginária" e depois "pangeometria". Atualmente, esta geometria é chamada Geometria Hiperbólica.

Foi necessário esperar até ao século XIX para que Gauss, Janos Bolyai, Bernard Riemann e Nicolai Ivanovich Lobachevski conseguissem demonstrar que se trata efetivamente de um axioma, necessário e independente dos outros. Supuseram que o postulado de Euclides não era verdadeiro e substituíram-no por outros axiomas:

- Por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta reta (geometria de Lobachevski);

- Por um ponto exterior a uma reta não podemos traçar nenhuma paralela a esta reta (geometria de Riemann).

Todos então se deram conta de que, substituindo o axioma das paralelas, era possível construir duas geometrias diferentes da Geometria Euclidiana, igualmente coerentes e que não conduziam a nenhuma contradição. Apesar de serem dificilmente concebíveis, estas duas novas geometrias foram pouco a pouco reconhecidas como alternativas legítimas.

Chegou-se mesmo a demonstrar que, se qualquer das duas pudesse apresentar alguma contradição, a própria Geometria Euclidiana seria também contraditória. Desde então, encontramo-nos perante três sistemas geométricos diferentes:

- A Geometria Euclidiana, por vezes também chamada parabólica;
- A Geometria de Lobachevski, também chamada hiperbólica;
- A Geometria do Riemann, também chamada elíptica ou esférica.

As duas últimas recebem o nome de geometrias não euclidianas. Estas novas geometrias permitiram às ciências exatas do século XX uma série de avanços, entre os quais a elaboração da Teoria da Relatividade de Albert Einstein (1879 - 1955), que evidenciou as aplicações práticas dessas teorias.

De fato, conclui-se que o quinto postulado de Euclides é o que distingue a geometria não euclidiana da Geometria Euclidiana.

As Geometrias Elípticas e Hiperbólicas, ao contrário da Geometria Euclidiana, são definidas sobre a superfície de uma esfera ou de um hiperboloide (algo parecido com a sela de um cavalo), sendo convencionado que uma superfície esférica tem uma curvatura positiva, enquanto que a superfície de um hiperboloide tem curvatura negativa. A Figura 2.3 ilustra a representação de retas paralelas nessas superfícies esféricas.

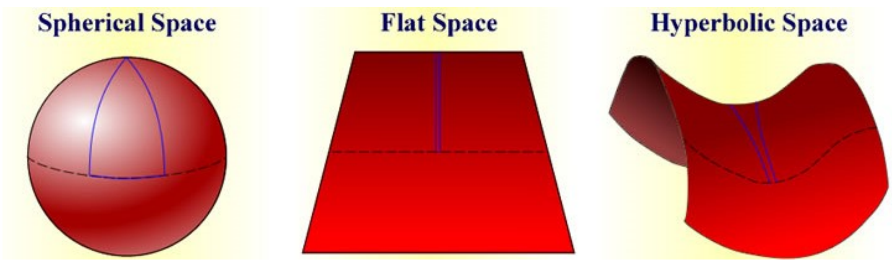


Figura 2.3: Retas paralelas nas superfícies esférica, plana e hiperbólica

Em uma superfície com curvatura negativa a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado nessa superfície é menor que 180°. No caso de uma superfície com curvatura nula, a soma desses ângulos internos é igual a 180° e ainda, quando a curvatura é positiva, temos a soma dos ângulos internos maior que 180°. A Figura 2.4 exemplifica essas superfícies.

Na Geometria Hiperbólica, o postulado de Euclides é substituído pelo que afirma que, por um ponto **P**, fora de uma reta **r**, existe mais de uma paralela a esta reta **r**, enquanto que na Geometria Elíptica postula-se que não existe nenhuma paralela.

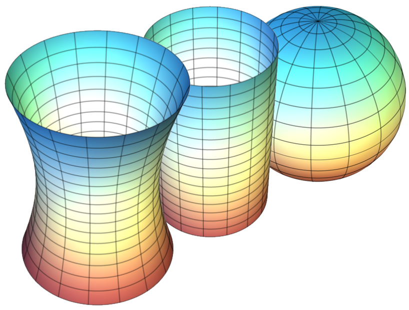


Figura 2.4: hiperbolóide, cilindro e esfera

A **pseudo-esfera** (Figura 2.5) e a **esfera** são as superfícies tridimensionais adequadas á modelagem, respectivamente, das Geometrias Hiperbólica e Elíptica. A esfera tem curvatura positiva e a pseudo-esfera curvatura negativa, enquanto que o plano, superfície de curvatura nula, está ligado à Geometria Euclidiana que pode ser considerada o meio termo entre as duas clássicas geometrias não-euclidianas.

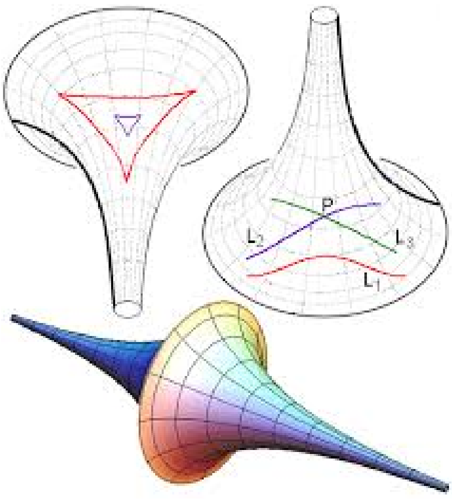


Figura 2.5: Pseudo-esferas

2.2 Riemann e a base da Geometria Esférica

A geometria de Riemann, que abandona a noção de um ponto "estar entre" dois outros, foi considerada pela primeira vez na aula inaugural pronunciada em 1851 por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) para sua admissão como professor-adjunto da Universidade de Göttingen. Na verdade, Riemann, na ocasião, apontou as possibilidades de outras geometrias e, consequentemente, outros espaços, o que motivou, a partir de então, os nomes geometrias ou espaços de Riemann.(COUTINHO, 2001)

Postulado 2. *"Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro."*

Uma das maneiras de interpretar o postulado acima, também segundo COUTINHO (2001), seria pensar na superfície esférica, onde "retas" seriam os círculos máximos ou geodésicas da superfície esférica. Nessa superfície, quaisquer dois círculos máximos se intercepam, aliás, em mais de um ponto. Evita-se inconvêniencias considerando idênticos os dois pontos de interseçção. Na Figura 2.6, os círculos máximos, ou seja, as "retas" ACA' e ADA', perpendiculares à "reta" BCDE, intersectam-se nos pontos antípodas A e A' (extremidades de um mesmo diâmetro da esfera). A "reta" perpendicular às retas ACA' e ADA' é a polar comum dos pontos A e A', e estes dois pontos são os pólos da "reta" BCDE. A distância de A ou A' a qualquer ponto da "reta" BCDE é constante. Note-se que duas "retas" secantes como as "retas" ACA' e ADA' da Figura 2.6, têm em comum uma única "reta" perpendicular BCDE.

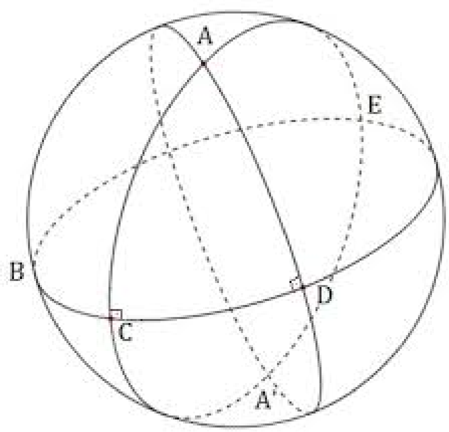


Figura 2.6: Esfera

3 GEOMETRIA ESFÉRICA: ELEMENTOS FUNDAMENTAIS

Nesta seção apresentaremos algumas definições e teoremas fundamentais da Geometria Esférica, muitos deles análogos aos da Geometria Euclidiana, necessários a compreensão das seções e capítulos posteriores.

3.1 Definições

Definição 3.1.1 (Esfera). *Seja O um ponto e r um número real positivo. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que, a distância entre O e P seja menor ou igual do que r, isto é, d(O,P)$\leq$ r.*

Sendo assim, concluímos que a esfera é um sólido geométrico.

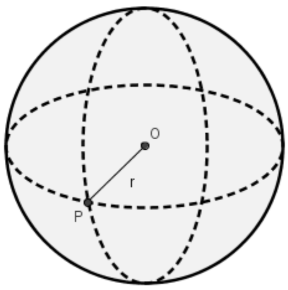


Figura 3.1: Esfera de raio r e centro O

Definição 3.1.2 (Superfície Esférica). *Chama-se superfície esférica de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que, a distância entre O e P seja igual a r, isto é d(O,P)= r.*

Apesar de a definição 3.1.2 se referir a uma superfície esférica, existem outros tipos de superfícies como uma superfíce plana definida por uma folha de papel, a superfície definida pela terra, pela casca de um ovo etc. Como definiríamos melhor o conceito de superfície, para SAMPAIO (2008) superfícies são objetos geométricos de duas dimensões que não existem no mundo real, mas somente na nossa imaginação, pois não possuem espessura. O que acabamos de definir é apenas um conceito intuitivo sem pretensões de formalidade, que só é alcançada com conceitos de topologia e cálculo avançado que extrapolam ao propósito deste trabalho.

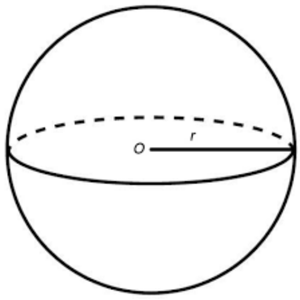


Figura 3.2: Superfície esférica de raio r e centro O

Definição 3.1.3 (Diâmetro da superfície esférica)**.** *É o segmento de reta que contém o centro da esfera e cujos extremos pertencem à superfície esférica. Pontos antípodas são pontos opostos de um mesmo diâmetro situados na superfície esférica.*

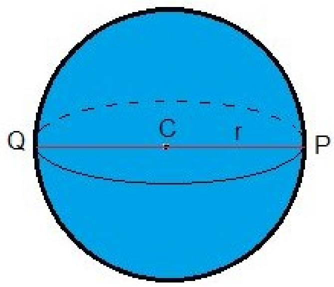


Figura 3.3: Diâmetro da superfície esférica e pontos antípodas Q e P

Teorema 3.1.1 (Circunferência Máxima)**.** *A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio, que é o raio da superfície esférica.*

Demonstração. Seja S uma superfície esférica com centro O e raio r e um plano β que passa por O. A interseção S $\cap$ β é o conjunto dos pontos de β cuja distância a O é igual a r. E essa definição coincide com a de uma circunferência de centro O e raio r. $\square$

O plano β da Figura 3.4, divide a superfície esférica em dois hemisférios.

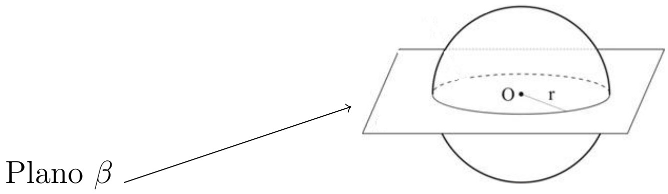


Figura 3.4: Circunferência máxima obtida com um plano passando por O

Definição 3.1.4 (Elementos notáveis da superfície esférica)**.**

- *Eixo - (**e**): É qualquer reta que contém o centro O.*
- *Polos: São os pontos de interseção do eixo **e** com a superfície esférica.*
- *Paralelo: É a circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo.*
- *Equador: É a circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo.*
- *Meridiano: É uma semicircunferência máxima cujo plano contém o eixo **e**, e liga os polos.*

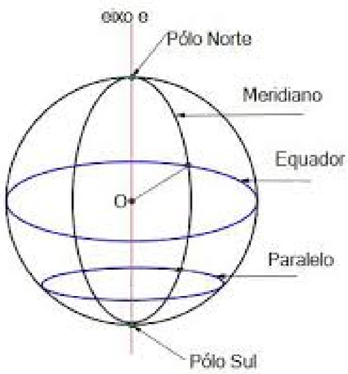


Figura 3.5: Elementos da superfície esférica

Definição 3.1.5 (Ângulo Esférico)**.** *É o ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas; quando dois arcos de circunferência máxima se intersectam, o ângulo α formado por esses dois arcos é o ângulo entre as semiretas tangentes a esses arcos.*

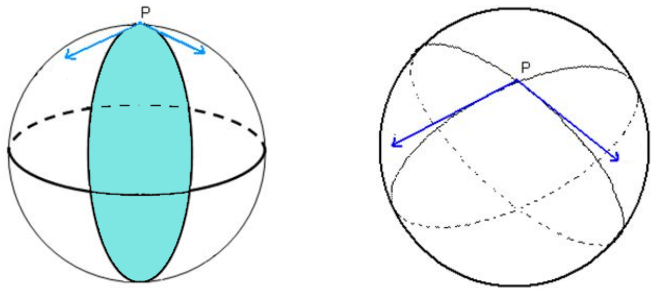


Figura 3.6: Ângulo Esférico

O ponto P (Figura 3.6) é o ponto de intersecção dos dois arcos e, é também, a origem das semirretas que determinam o ângulo α.

Definição 3.1.6 (Fuso Esférico)**.** *Também conhecido como Biângulo Esférico é a região da superfície esférica compreendida entre dois meridianos. Esses meridianos possuem dois pontos em comum, diametralmente opostos, que são os vértices do fuso e os meridianos são os lados do fuso.*

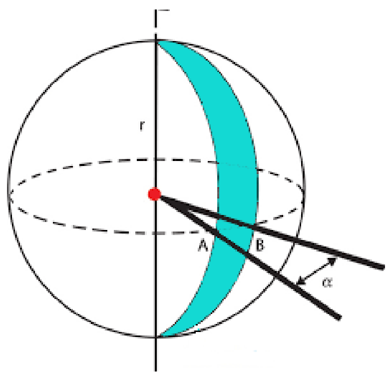


Figura 3.7: Fuso Esférico

Cada meridiano está contido em uma circunferência máxima distinta. Logo, as duas circunferências máximas descritas na figura determinam dois fusos esféricos antípodas, isto é, um fuso completo ou duplo, conforme a Figura 3.8.

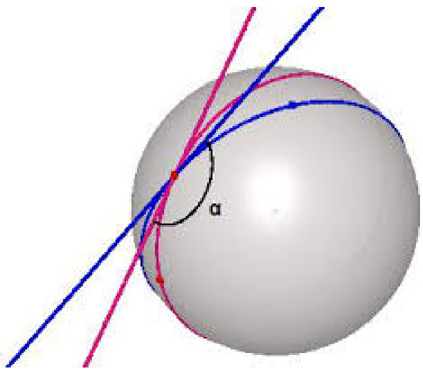


Figura 3.8: Fusos Esféricos Antípodas

Definição 3.1.7 (Geodésica ou Reta). *É a curva, contida na superfície esférica, que minimiza a distância entre dois pontos distintos. Ou seja, é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos.*

A geodésica, em um sentido amplo, é a linha que estabelece o menor caminho entre dois pontos de uma superfície. Na superfície cilíndrica, por exemplo, temos a reta e a espiral, dependendo das posições dos pontos envolvidos. Na geometria do plano, dois pontos determinam uma única reta. Na Geometria Esférica acontece o mesmo: por dois pontos passa um, e somente um círculo máximo. Conclusão: a reta está para o plano, assim como o círculo máximo está para a superfície esférica. Diz-se, então, que a "reta" da esfera é o círculo máximo, ou, em linguagem técnica: o círculo máximo é a geodésica da superfície esférica. E mais: o círculo máximo, apesar de ilimitado, é finito, enquanto a reta é, também, ilimitada, porém infinita.

Sendo assim, podemos considerar que, uma reta na Geometria Esférica, é a interseção da superfície esférica com um plano que passa pelo centro da esfera.

Entretanto, na superfície esférica, duas de suas "retas", ou melhor, duas geodésicas sempre se intersectam em dois pontos, extremidades de um mesmo diâmetro. Equivale a dizer: não existem círculos máximos paralelos. Nesse sentido, pode-se dizer que a Geometria Esférica não é euclidiana.

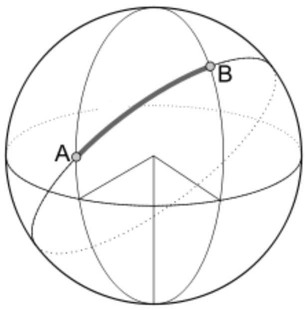


Figura 3.9: Geodésica

Definição 3.1.8 (Triângulo Esférico). *É a superfície limitada por três arcos de circunferências máximas, contida em algum hemisfério, sendo estes arcos menores que uma semicircunferência máxima.*

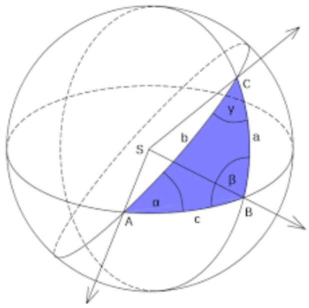


Figura 3.10: Triângulo Esférico

Na Figura 3.10 o triângulo esférico possui vértices A, B e C, ângulos internos α, β e γ e seus lados são as geodésicas a, b e c.

Teorema 3.1.2. *A área S de uma superfície esférica de raio r é dada por $S = 4\pi r^2$.*

Demonstração. Considere a equação da circunferência $y^2+x^2 = r^2$ onde podemos concluir que $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Tomemos a superfície esférica obtida pela rotação da curva $y = f(x), \quad a \leq x \leq b$, ao redor do eixo Ox, em que f é positiva e tem derivada contínua. A área dessa superfície será obtida pela fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Derivando *f(x)* teremos $f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x), \quad \text{logo } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

E ainda, $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Dessa forma, $S = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \quad \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx$

Então, $S = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r(r) - 2\pi r(-r)$

Logo, $S = 2\pi r^2 + 2\pi r^2, \qquad S = 4\pi r^2$ □

Corolário 3.1.1. *A área S_f de um fuso esférico é dada por $S_f = 2\alpha r^2$, onde r é o raio da superfície esférica e α o ângulo do fuso esférico.*

Demonstração. Como a área do fuso esférico é diretamente proporcional ao âgulo α correspondente, tendo o seu valor máximo igual a 2π quando atinge uma superfície esférica completa, podemos de maneira imediata proceder a uma regra de três simples, com efeito

$$\frac{S_f}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Logo, $S_f = \dfrac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} = 2\alpha r^2$ □

Teorema 3.1.3. *Dado um fuso esférico completo ϕ cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que contenha o centro da superfície esférica a decompõe em dois hemisférios H_1 e H_2. As partes R_1 e R_2 do fuso completo ϕ contidas em cada um desses hemisférios possuem a mesma área igual a $2\alpha r^2$.*

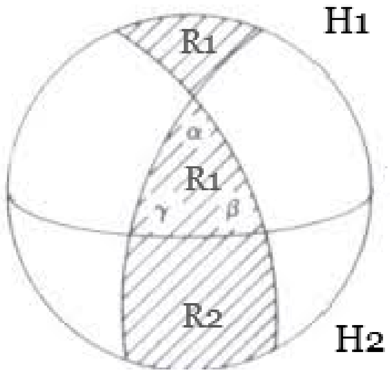


Figura 3.11: A região hachurada R= $R_1 \cup R_2$ representa um fuso completo com partes pertencentes aos hemisférios H_1 e H_2

Demonstração. De acordo com LIMA (2011). Como R_1 e R_2 são figuras antípodas, isto é, cada ponto de R_1 é o antípoda de um ponto em R_2 e vice-versa. Temos ainda que $R_1 = s \cup t$ é a reunião de dois triângulos esféricos com um vértice em comum e $R_2 = s' \cup t'$ é a união dos triângulos antípodas de s e t. Dessa maneira, é suficiente provar que um triângulo esférico t e seu antípoda t' têm a mesma área. Observamos que t e t' têm ângulos iguais e lados congruentes, dois a dois, mas t e t' não são congruentes; não é possível, por um movimento rígido, sobrepor exatamente um ao outro por meio de movimento, a menos que t e t' sejam isósceles. Observamos que se os triângulos esféricos t e t' forem isósceles então t deverá ser congruente ao seu antípoda t', logo esses dois triângulos terão a mesma área. No caso geral, procede-se da seguinte maneira. Os pontos A, B e C vértice de t, conforme a Figura 3.12, determinam um pequeno círculo e portanto uma calota [1] esférica que contém o triângulo esférico t. Seja P o polo dessa calota. (P é o ponto de interseção da calota com a perpendicular ao plano ABC tirada pelo centro do círculo). Os arcos de

[1]Uma calota esférica, é a parte de uma esfera cortada por um plano. Se tal plano passa pelo centro da esfera, logicamente, a altura da calota é igual ao raio da esfera, e a calota esférica será uma semiesfera.

círculo máximo PA, PB e PC têm o mesmo comprimento, logo os triângulos esféricos PAB, PBC e PAC são isósceles. Se o ponto P estiver no interior do triângulo t (ABC), teremos $S_t = S(PAB) + S(PBC) + S(PAC)$, onde S representa a área. De maneira análoga, pode-se construir o mesmo raciocícino com o triângulo antípoda t'(A'B'C'), decompondo-o como reunião justaposta dos triângulos isósceles P'A'B', P'B'C' e P'A'C', cada um deles antípoda do seu correspondente em t. Dessa forma teremos $S_t = S_t'$.

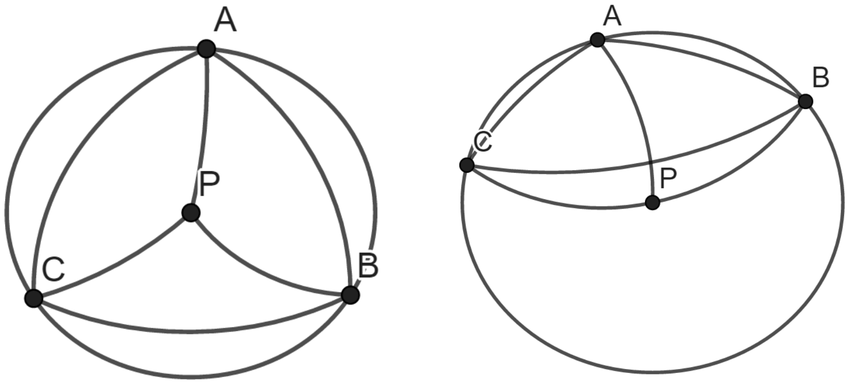


Figura 3.12: O polo do triângulo ABC pode estar dentro ou fora de ABC

Pode ocorrer, entretanto, que o polo P esteja situado fora do triângulo t. Neste caso, $S_t = S(PAB) + S(PAC) - S(PBC)$. Uma situação análoga ocorre em t' e concluíremos também que $S_t = S_t'$.

□

Teorema 3.1.4 (Fórmula de Girard). . *A área de um triângulo esférico com ângulos internos α, β e γ, em uma superfície esférica de raio r, é igual a* $r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

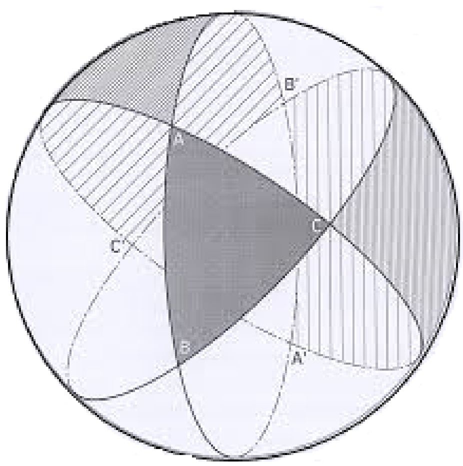


Figura 3.13: Triângulo Esférico ABC

Demonstração. Sejam os ângulos internos α, β e γ de um triângulo esférico, e sejam A, B e C os respectivos vértices correspondentes. As três circunferências de círculo máximo dividem a esfera em seis fusos, dois deles de amplitude α com polos em A e A'(ponto antípoda de A), dois de amplitude β com pólos em B e B'(ponto antípoda de B) e dois de amplitude γ com pólos em C e C'(ponto antípoda de C). Um dos fusos de amplitude α contém o triângulo esférico ABC e o outro fuso contém o triângulo A'B'C', triângulo antípoda de ABC. Denotemos a região união destes dois fusos por AA'. O mesmo ocorre com os dois fusos de amplitude β (denotemos a sua união por BB') e os dois de amplitude γ (denotemos a sua união por CC').

Então, $AA' \cap BB' = AA' \cap CC' = BB' \cap CC' = ABC \cup A'B'C'$,

Como a esfera pode ser obtida da união das regiões AA', BB' e CC', temos que a área da esfera (S_c)= S(AA')+ S(BB') + S(CC') - 2S(ABC) - 2S(A'B'C')

Mas como S(ABC) = S(A'B'C'), pois a aplicação que leva cada ponto P da esfera no seu ponto antípoda P' é claramente uma isometria [2], logo também será equiareal [3]. Consequentemente,

$$S(ABC) = \frac{1}{4}\left(S(AA') + S(BB') + S(CC') - S_c\right)$$

Aplicando o Teorema 3.1.2 e o Corolário 3.1.1 teremos,

$$S(ABC) = \frac{1}{4}\left(4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4\pi r^2\right)$$

Logo, $S(ABC) = r^2\,(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

$\square$

LIMA (2011) faz as seguintes considerações á respeito da fórmula de Girard:

> Na fórmula de Girard, a diferença $\dfrac{S(ABC)}{r^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ é chamada de "excesso esférico". Para um triângulo de área muito pequena, o excesso esférico é insignificante. Por outro lado, se tomarmos um triângulo esférico na superfície da terra com um lado sobre o equador e um vértice no polo norte, os outros dois lados serão arcos de meridianos, logo os dois ângulos serão retos. Se a base for um arco de um quarto do equador, os três ângulos desse triângulos serão todos retos. Pode-se imaginar triângulos esféricos com $\alpha + \beta + \gamma$ tão próximo de 6 ângulos retos quanto se deseje. Basta tomar os três vértices equidistantes

[2]Uma isometria é uma transformação geométrica do plano que conserva os comprimentos dos segmentos de reta e as amplitudes dos ângulos.

[3]Aplicação equiareal é aquela que preserva as áreas envolvidas.

> e bem próximos do equador. Resulta ainda da fórmula de Girard que se s e t são triângulos situados sobre a mesma esfera e os ângulos de s são iguais aos ângulos de t então s e t possuem a mesma área. Na realidade, pode-se provar bem mais: se os ângulos de s são iguais aos de t (sempre supondo s e t sobre a mesma esfera) então os lados de s também são iguais aos de t. Isto é bem diferente do que acontece na Geometria Plana.

O resultado da fórmula de Girard aponta que, diferentemente do que acontece na Geometria Euclidiana plana, na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre é superior a π. Essa conclusão apresenta algumas consequências relevantes, quais sejam:

- Não existe nenhuma isometria entre a esfera e o plano (ou mesmo entre uma parte da esfera e uma parte do plano). Em termos cartográficos, isto significa que é impossível termos um mapa (plano) de uma porção da superfície terrestre que represente distâncias com total precisão. Por que? Porque tal isometria teria que preservar distâncias e ângulos, e teria que aplicar circunferências de círculos máximo (que são as geodésicas na esfera) em retas (que são as geodésicas no plano). Portanto a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico teria que coincidir com a soma dos ângulos internos do correspondente triângulo no plano, que é π, e isto implicaria que o triângulo esférico tivesse área nula.

- Em particular, não há semelhança de triângulos sobre a mesma esfera, salvo quando a razão de semelhança é igual a 1. Esta última afirmação também pode ser constatada se lembrarmos que dois arcos de círculos semelhantes subtendem o mesmo ângulo central e a razão entre seus comprimentos (igual a razão de semelhança) é a mesma razão entre os raios dos círculos a que pertencem, portanto arcos de circunferências máximas sobre a mesma esfera só podem ser semelhantes quando têm o mesmo comprimento. Dois triângulos semelhantes na Geometria Euclidiana têm os mesmos ângulos mas podem ser de tamanhos diferentes. Contudo, na Geometria Esférica os ângulos de um triângulo determinam a sua área e portanto o seu tamanho e forma.

- A Fórmula de Girard pode ser estendida a qualquer *polígono esférico convexo* (definido pela interseção de n circunferências de círculo máximo):

  se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n$ são os ângulos internos do polígono, a sua área é igual a

$$r^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi \right)$$

A fórmula anterior é conhecida como *Fórmula de Gauss-Bonnet* e pode ser facilmente provada dividindo o polígono em triângulos e utilizando a fórmula de Girard. Contudo, foge ao propósito desse trabalho um maior aprofundamento nesse tema. De qualquer maneira, a fim de ilustrar a extensão da fórmula de Girard para qualquer superfície arbitrária, tomemos como exemplo uma pseudo-esfera, isto é, a superfície de revolução definida pela curva geratriz

$$\gamma(u) = \left(e^u, 0, \sqrt{1-\epsilon^{2u}} - cosh^{-1}1\left(\frac{1}{\epsilon^u}\right)\right) \text{ com } \quad u \in (-\infty, 0]$$

Esta curva geratriz é conhecida como *tractriz* e pode ser observada na Figura 3.14.

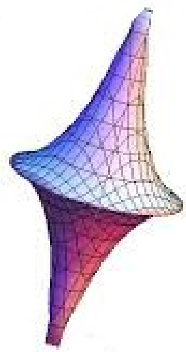


Figura 3.14: Pseudo-Esfera

A superfície mostrada apresenta exemplo de triângulo de ângulos internos α, β, γ cuja área é igual a $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, o que significa que na geometria da pseudo-esfera a soma dos ângulos de um triângulo sempre será inferior a π, e isso representa mais um exemplo de *geometria não euclidiana.*

Uma vez demonstrada a fórmula de Girard para triângulos esféricos pode-se vislumbrar uma nova possibilidade de demonstração do famoso Teorema de Euler para poliedros convexos. Diversas outras demonstrações haviam sido apresentadas para esse teorema, dentre elas, destacam-se as demonstrações de Cauchy e do professor "Zoroastro Azambuja Filho", ambas comentadas em LIMA (2011), mas nenhuma é tão clara, simples e inteligível quando a demonstração apresentada por Legendre.

Visando uma melhor sequência didática, apresentaremos a demonstração de Legendre para o Teorema de Euler no apêndice deste trabalho.

4 TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Em Matemática, a trigonometria esférica estuda as propriedades geométricas dos triângulos esféricos, em especial as relações que envolvem ângulos esféricos e arcos esféricos. É a área da Geometria Esférica que estuda os polígonos que se formam sobre a superfície das esferas, em especial, os triângulos. O estudo de trigonometria esférica tem especial relevância em náutica e navegação para determinar a posição de uma embarcação em alto-mar mediante a observação dos corpos celestes, objetivo principal desse trabalho.

No capítulo anterior introduzimos o conceito de triângulo esférico e algumas definições relacionadas aos mesmos deixando para o presente capítulo a apresentação das ferramentas necessárias a resolução desses triângulos, onde serão utilizadas as leis que relacionam seus elementos. Resolver um triângulo esférico é determinar três de seus elementos quando são conhecidos os outros três. Os elementos de um triângulo esférico são:

- Três ângulos: são os ângulos esféricos formados nos vértices do triângulo, que representaremos por A, B e C;

- Três lados: são os arcos de circunferências máximas que unem os três vértices, dois a dois, os quais denotaremos por a, b e c.

Cada elemento desconhecido de um triângulo esférico é calculado em função de outros três, proporcionando, em cada caso, uma combinação de quatro elementos. Como são seis elementos de um triângulo, teremos

$$C_4^6 = \binom{6}{4} = 15$$

O valor obtido acima, representa a quantidade de fórmulas necessárias a contemplar todas as soluções nos triângulos esféricos. Obviamente nos concentraremos nas principais relações de triângulos esféricos procurando, na medida do possível, estabelecer analogias com as relações da Geometria Euclidiana. MIGUENS (1999)

4.1 Fórmula Fundamental ou Lei dos Cossenos

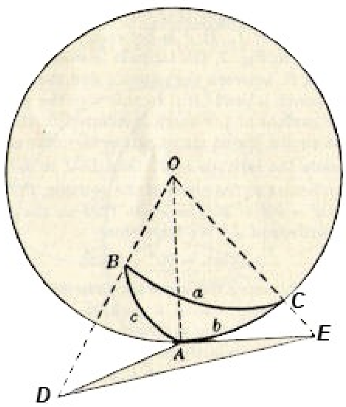
A fórmula fundamental equivale à Lei dos Cossenos da trigonometria esférica, e recebe essa denominação porque todas as outras fórmulas para triângulos esféricos podem ser obtidas a partir dela. A fórmula fundamental pode ser descrita pelo teorema abaixo:

Teorema 4.1.1. *Seja ABC um triângulo esférico com ângulos internos A, B e C e cujos lados opostos medem a, b e c, respectivamente. Então, o cosseno de um lado é igual ao produto do cosseno dos outros dois lados mais o produto dos senos dos mesmos lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.*

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \tag{4.1}$$

A fórmula acima, além de fórmula fundamental ainda é conhecida como *"fórmula dos quatro elementos-lado"*.

Demonstração. Considere o triângulo esférico ABC (Figura 4.1) de lados a, b e c, sendo b e c menores que 90º; OADE o triedro associado ao triângulo; OA = OB = OC = 1 raio da esfera; AE e AD tangentes em A aos lados b e c do triângulo. Assim, o ângulo formado por essas tangentes mede A, que é um dos ângulos do triângulo esférico.



Ç

Figura 4.1: Triângulo esférico ABC e triedro OADE

Observe que os ângulos DÔE, AÔE, AÔD das faces do triedro possuem as mesmas medidas dos lados a, b e c do triângulo esférico ABC.

Por outro lado, devido ao fato de as tangentes em A serem perpendiculares ao raio R em A, temos que os triângulos OAE e OAD, formados pelas tangentes AE e AD, e os prolongamentos OE e OD são, ambos retângulos em A.

Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos ODE e ADE temos:

$$\overline{DE}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - 2.\overline{OE}.\overline{OD}.\cos a$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2.\overline{AE}.\overline{AD}.\cos A$$

Igualando os primeiros membros das relações acima teremos:

$$\overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - 2.\overline{OE}.\overline{OD}.\cos a = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2.\overline{AE}.\overline{AD}.\cos A \tag{4.2}$$

Como os triângulos OAE e OAD são retângulos em A, valem as relações trigonométricas abaixo:

$$\cos b = \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}}; \qquad \cos b = \frac{1}{\overline{OE}}; \qquad \sec b = \overline{OE}; \qquad \sec^2 b = \overline{OE}^2$$

$$\tan b = \frac{\overline{AE}}{\overline{OA}}; \qquad \tan b = \overline{AE}; \qquad \tan^2 b = \overline{AE}^2$$

$$\cos c = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}; \qquad \cos c = \frac{1}{\overline{OD}}; \qquad \sec c = \overline{OD}; \qquad \sec^2 c = \overline{OD}^2$$

$$\tan c = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}; \qquad \tan c = \overline{AD}; \qquad \tan^2 c = \overline{AD}^2$$

Substituindo os resultados anteriores na Equação 4.2 vem que:

$$\sec^2 b + \sec^2 c - 2\sec b.\sec c.\cos a = \tan^2 b + \tan^2 c - 2.\tan b.\tan c.\cos A$$

Por outro lado, temos as identidades trigonométricas $\sec^2 b = 1+\tan^2 b$ e $\sec^2 c = 1 + \tan^2 c$, dessa forma, o primeiro membro da equação anterior passa a ser:

$$1 + \tan^2 b + 1 + \tan^2 c - 2.\sec b.\sec c.\cos a = \tan^2 b + \tan^2 c - 2.\tan b.\tan c.\cos A$$

Que equivale a,

$$2 - 2.\sec b.\sec c.\cos a = -2.\tan b.\tan c.\cos A$$

Dividindo os dois membros da equação anterior por $(2\sec b.\sec c)$, teremos então:

$$\frac{1}{\sec b.\sec c} - \cos a = -\frac{\tan b.\tan c.\cos A}{\sec b.\sec c}$$

Como, $\cos b = \dfrac{1}{\sec b}$; $\cos c = \dfrac{1}{\sec c}$; $\dfrac{\tan b}{\sec b} = \operatorname{sen} b$ e $\dfrac{\tan c}{\sec c} = \operatorname{sen} c$

Teremos então,

$$\cos b.\cos c - \cos a = -\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c.\cos A$$

E finalmente,

$$\cos a = \cos b . \cos c + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} c . \cos A$$

□

De maneira análoga, considerando os lados b e c opostos, respectivamente, aos ângulos B e C, teremos,

$$\cos b = \cos a . \cos c + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos B$$

$$\cos c = \cos a . \cos b + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b . \cos C$$

A prova anterior foi realizada considerando os lados b e c menores que 90°. Mostraremos agora que a mesma fórmula se aplica a qualquer triângulos. Em outros termos, os lados b e c podem ser maiores que 90°.

Qualquer triângulo esférico de uma superfície esférica sempre estará associado ao seu triângulo suplementar, com o qual forma um fuso esférico,

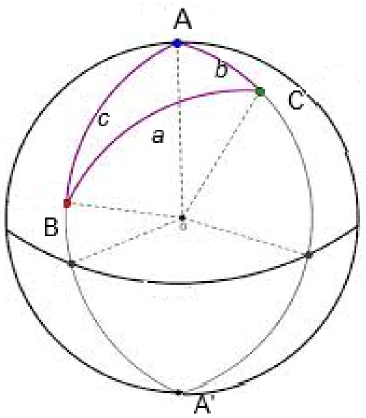


Figura 4.2: Triângulo ABC e triângulo suplementar A'BC

O triângulo ABC representado na Figura 4.2, com b e c menores que 90°, está associado ao triângulo A'BC, com lados $180^o - b$, e $180^o - c$.

Aplicando a Fórmula 4.2 no triângulo A'BC teremos:

$$\cos a = \cos(180^o - b) . \cos(180^o - c) + \operatorname{sen}(180^o - b) . \operatorname{sen}(180^o - c) . \cos A'$$

Como,
$\cos(180^o - b) = -\cos b$; $\cos(180^o - c) = -\cos c$; $\operatorname{sen}(180^o - b) = \operatorname{sen} b$ e $\operatorname{sen}(180^o - c) = \operatorname{sen} c$.

Teremos então:

$$\cos a = (-\cos b).(-\cos c) + \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A'$$

Por serem ângulos de um mesmo fuso, implicará A'=A, logo:

$$\cos a = \cos b. \cos c + \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A$$

Observemos que, retirando também a hipótese imposta ao raio de ser unitário, a fórmula sofre pequenas alterações, passando para

$$cos\left(\frac{a}{R}\right) = cos\left(\frac{b}{R}\right).cos\left(\frac{c}{R}\right) + sen\left(\frac{b}{R}\right).sen\left(\frac{c}{R}\right). \cos A$$

4.2 Analogia dos Senos ou Lei dos Senos

O termo *"analogia"* é uma denominação arcaica para proporcionalidade. Assim, podemos compreender a analogia dos senos como fórmula da proporcionalidade dos senos, que é apresentada no teorema a seguir,

Teorema 4.2.1. *Seja ABC um triângulo esférico com ângulos internos A, B e C e cujos lados opostos medem a, b e c, respectivamente. Então, os senos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \tag{4.3}$$

Apesar da pouca contribuição árabe na Astronomia e ciências do século XI, é atribuída ao matemático árabe Abu Nasr Mansur, que viveu nesse século, a descoberta da lei dos senos. COUTINHO (2001)

Demonstração. Considere um triângulo esférico de lados a, b e c. Partindo-se da fórmula fundamental, Fórmula 4.1, temos

$$\operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A = \cos a - \cos b. \cos c$$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação, temos

$$\operatorname{sen}^2 b. \operatorname{sen}^2 c. \cos^2 A = \cos^2 a - 2. \cos a. \cos b. \cos c + \cos^2 b. \cos^2 c$$

Como $\cos^2 A = 1 - \operatorname{sen}^2 A$ (identidade trigonométrica), então, substituindo apenas no primeiro membro teremos

$$\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c.(1 - \operatorname{sen}^2 A) = \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b.\cos c + \cos^2 b.\cos^2 c$$

$$\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c.\operatorname{sen}^2 A = \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b.\cos c + \cos^2 b.\cos^2 c$$

Fazendo também $\operatorname{sen}^2 b = 1 - \cos^2 b \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c$ vem que

$$(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c.\operatorname{sen}^2 A = \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b.\cos c + \cos^2 b.\cos^2 c$$

$$1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b.\cos^2 c - \operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c.\operatorname{sen}^2 A = \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b.\cos c + \cos^2 b.\cos^2 c$$

Eliminando $\cos^2 b.\cos^2 c$ em ambos os membros, passamos a

$$1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c.\operatorname{sen}^2 A = \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b.\cos c$$

$$\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c.\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2.\cos a.\cos b.\cos c$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c}$$

Dividindo ambos os membros da equação por $\operatorname{sen}^2 a$, teremos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c} \tag{4.4}$$

Como no segundo membro da Fórmula 4.4 as expressões com os arcos a , b e c aparecem de forma semelhante, é razoável que, de forma análoga, tenhamos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b} = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c} \tag{4.5}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 c} = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c} \tag{4.6}$$

Dessa maneira, como o segundo membro das Fórmulas 4.4, 4.5 e 4.6 são iguais, é válida a igualdade

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b} = \frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 c}$$

E, finalmente teremos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

□

A fórmula fundamental (Fórmula 4.1) envolve os três lados de um triângulo esférico e o ângulo oposto a um deles. Dessa maneira, possuindo dois lados de um triângulo esférico e o ângulo formado entre eles, é possível determinar o lado oposto ao ângulo. Uma aplicação interessante da fórmula fundamental diz respeito à navegação oceânica quando, na maioria das vezes, a derrota[1] planejada para o navio é navegando através de círculos máximos. A navegação em círculos máximos é denominada navegação ortodrômica ou ortodromia [2], ao passo que a navegação em círculos menores, quando o rumo do navio é constante, é denominada navegação loxodrômica ou loxodromia [3].

4.3 Teorema de Pitágoras na Superfície Esférica

Os triângulos esféricos retângulos, por terem um ângulo igual a 90°, estão sujeitos a fórmulas mais simples, com a vantagem da opção do seu emprego na resolução dos outros tipos de triângulos, pois qualquer triângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos, bastando para isso traçar por um de seus vértices um círculo máximo perpendicular ao lado oposto (Figura 4.3). Apresentaremos nesta seção o Teorema de Pitágoras

[1]Derrota — Caminho, carreira ou rumo seguido por um navio, do ponto de partida ao ponto de chegada, não se contando para este efeito os portos ou ancoradouros acidentais. O mesmo que rota, roteiro; relatório de viagem; curva que os astros descrevem, ou o espaço que percorrem.

[2]Ortodromia, círculo máximo, representa a menor distância entre dois pontos na superfície da terra, mas faz ângulos diferentes com os sucessivos meridianos.

[3]Loxodromia, linha de rumo, ou simplesmente rumo entre dois pontos, é a linha que une estes dois pontos cortando todos os meridianos segundo um mesmo ângulo. Para navegar na loxodromia o navio deve governar em uma direção constante

para triângulos esféricos retângulos bem como outras relações trigonométricas também empregadas nestes triângulos.

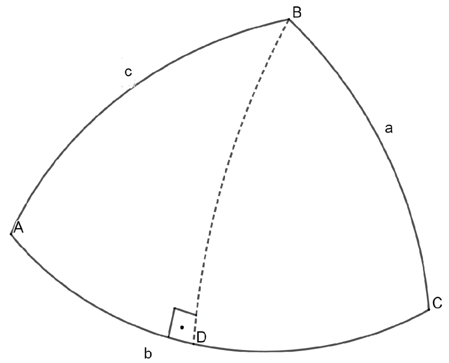


Figura 4.3: Triângulo Esférico retângulo

Teorema 4.3.1. *Seja ABC um triângulo esférico retângulo com ângulos internos A, B e C e cujos lados opostos medem a, b e c, respectivamente. Então, sendo a hipotenusa o lado oposto ao ângulo de 90º, o cosseno da hipotenusa é igual ao produto dos cossenos dos catetos.*

$$\cos a = \cos b. \cos c \tag{4.7}$$

Demonstração. Considere o triângulo retângulo ABC de lados a, b e c pertencentes a uma superfície esférica de centro O e ângulo A=90º (Figura 4.4). Traça-se em B a tangente ao círculo máximo AB; esta tangente pertence ao plano OAB do círculo máximo AB e, portanto, encontra o prolongamento do raio OA em A'. Também por B traça-se a tangente BC', que pela mesma razão encontra o prolongamento do raio OC em C' e, em seguida, liga-se A' a C'. Desde que o raio OB é perpendicular às duas tangentes BA' e BC', segue-se que o plano A'BC' é perpendicular a cada plano que passa por OB e, portanto, ao plano AOB. Por hipótese o plano AOC é perpendicular ao plano AOB, pois o ângulo A é reto. A reta A'C', sendo a interseção dos dois planos AOC e A'BC', é perpendicular ao plano AOB. Logo, os ângulos OA'C'e BA'C' são retos. Assim, a Figura 4.4 ilustra quatro triângulos retângulos planos; A'BC', A'OC', A'OB e C'OB, tendo os ângulos A'BC', C'OA', A'OB e C'OB medidas iguais, respectivamente, às dos elementos B, b, c e a do triângulo esférico retângulo ABC. Multiplicando ambos os termos da razão $\dfrac{OB}{OC'}$ por OA' teremos:

$$\frac{OB}{OC'} = \frac{OA'.OB}{OC'.OA'} = \frac{OA'}{OC'}.\frac{OB}{OA'}$$

como $\cos a = \dfrac{OB}{OC'}$, $\cos b = \dfrac{OA'}{OC'}$ e $\cos c = \dfrac{OB}{OA'}$ segue que,

$$\cos a = \cos b . \cos c \qquad \square$$

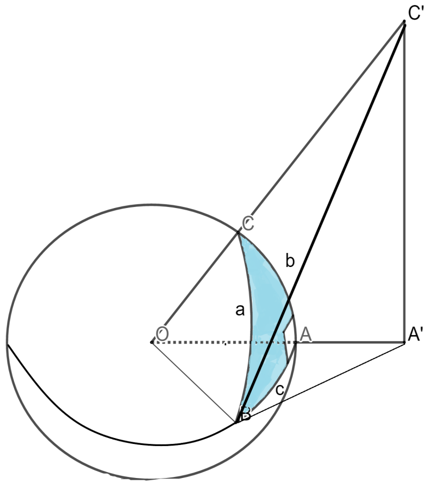


Figura 4.4: triângulo retângulo na superfície esférica

As relações trigonométricas apresentadas abaixo, baseadas na Figura 4.4, são de grande relevância nas publicações de Navegação Astronômica e, por conveniência didática, serão demonstradas no apêndice deste trabalho.

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} B \tag{4.8}$$

$$\operatorname{tg} c = \cos B . \operatorname{tg} a \tag{4.9}$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B . \operatorname{sen} c \tag{4.10}$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C \tag{4.11}$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C . \cos b \tag{4.12}$$

4.4 Do Triângulo Esférico ao Triângulo Plano

Quando o triângulo esférico, tratado na Geometria Esférica, está contido em uma superfície esférica de dimensões muito grande em relação às dimensões do triângulo, é razoável inferir que esse triângulo se aproximará de um triângulo plano da Geometria Euclidiana. Podemos, sem perda de generalidade, considerar a superfície terrestre como essa superfície esférica de grande dimensões e utilizar a Geometria Euclidiana para cálculos em triângulos esféricos de pequenas dimensões.

Demonstraremos a seguir que a Lei dos Senos, Lei dos Cossenos e Teorema de Pitágoras, demonstrados anteriormente para a superfície esférica, também valem na Geometria Euclidiana quando consideramos uma superfície esférica de grandes dimensões. Na tentativa de uma demonstração dessa aproximação, SANTOS (2018), na *Revista de Ciência e Tecnologia -RCT*, estabelece o raciocínio à seguir para as Leis dos Senos e Cossenos e, em seguida, COUTINHO (2001), fundamenta uma demonstração para o Teorema de Pitágoras:

Observa-se através do *Limite Trigonométrico Fundamental*, $\lim_{a\to 0} \frac{\operatorname{sen} a}{a} = 1$, cuja demonstração pode ser encontrada em STEWART (v.1, 2013, p.174) , que se o valor de a tornar-se muito próximo de zero, o valor de $\operatorname{sen} a$ torna-se cada vez mais próximo de a. Dessa maneira teremos $\operatorname{sen} a \cong a$, $\operatorname{sen} b \cong b$, $\operatorname{sen} c \cong c$.

E a igualdade $$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

ficará próxima de $$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

o que equivale a $$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

que é a (Lei dos Senos para triângulos planos).

Observamos também, por meio da Série de Maclaurin,[4] que a representação de $\cos x$ é dada por:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \tag{4.13}$$

Fazendo a aproximação até o termo de segunda ordem teremos,

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2} \tag{4.14}$$

A demonstração da Fórmula 4.14 pode ser encontrada em STEWART (v.2, 2013, p.684).

Analogamente ao que ocorre com a Lei dos Senos para triângulos esféricos, se um triângulo têm lados a b e c com comprimentos muito próximos de zero, aplicando a Fórmula 4.14 e o limite trigonométrico fundamental temos que,

$$\cos a = \cos b . \cos c + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} c . \cos A$$

[4]A série de Maclaurin é assim denominada em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin(1698-1746) e representa um caso especial da série de Taylor. Mas a ideia de representar funções específicas como somas de séries de potências remonta a Newton e foi popularizada por Maclaurin em seu livro de cálculo Treatise of Fluxions, publicado em 1742.

equivalerá a

$$1-\frac{a^2}{2}=\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2}\right)+bc.\cos A$$

e ainda

$$\left(\frac{2-a^2}{2}\right)=\left(\frac{2-b^2}{2}\right)\left(\frac{2-c^2}{2}\right)+bc.\cos A$$

Multiplicando por 4 teremos,

$$4-2a^2=(2-b^2)(2-c^2)+4bc.\cos A$$

$$4-2a^2=4-2c^2-2b^2+b^2c^2+4bc.\cos A$$

$$2a^2=2b^2+2c^2-b^2c^2-4bc.\cos A$$

Logo,

$$a^2=b^2+c^2-\frac{b^2c^2}{2}-2bc.\cos A \tag{4.15}$$

Considerando que para os valores de a, b e c muito próximos de zero, a parcela $-\frac{b^2c^2}{2}$ tem um valor desprezível, o que torna a igualdade muito próxima de

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

que é a (Lei dos cossenos para triângulos planos).

Mostraremos agora que, em uma esfera, quando fizermos r tender a infinito, a Fórmula 4.7 transforma-se na relação de Pitágoras para triângulos planos. Senão, vejamos:

Suponha os lados do triângulo expressos em radianos e aplicados na Fórmula 4.7, teremos então:

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}.\cos\frac{c}{R} \tag{4.16}$$

Desenvolvendo as séries de Maclaurin (Fórmula 4.13) para cada um dos termos, obteremos:

$$\cos\frac{a}{R}\cong 1-\frac{a^2}{2R^2}+\frac{a^4}{24R^4}$$
$$\cos\frac{b}{R}\cong 1-\frac{b^2}{2R^2}+\frac{b^4}{24R^4}$$
$$\cos\frac{c}{R}\cong 1-\frac{c^2}{2R^2}+\frac{c^4}{24R^4}$$

Substituindo os valores na Fórmula 4.16 resulta em:

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} \cong \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right) . \left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva no segundo termo, escreve-se:

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} \cong 1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4} - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^2c^2}{4R^4} - \frac{b^2c^4}{48R^6} + \frac{b^4}{24R^4} - \frac{b^4c^2}{48R^6} + \frac{b^4c^4}{576R^8}$$

Multiplicando os dois lados por $2R^2$ obteremos:

$$2R^2 - a^2 + \frac{a^4}{12R^2} \cong 2R^2 - c^2 + \frac{c^4}{12R^2} - b^2 + \frac{b^2c^2}{2R^2} - \frac{b^2c^4}{24R^4} + \frac{b^4}{12R^2} - \frac{b^4c^2}{24R^4} + \frac{b^4c^4}{288R^6}$$

Cancelando $2R^2$ em ambos os termos e fazendo R tender a infinito, a esfera passa a ter a curvatura praticamente zero, com isto, os termos da expressão anterior contendo potências de R no denominador anulam-se, ficando, apenas:

$$-a^2 = -c^2 - b^2$$

E por fim, o famoso Teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Conforme apresentamos acima, as fórmulas obtidas para a Geometria Esférica tornam-se as mesmas da Geometria Euclidiana quando fazemos $r \to \infty$. Isso nos possibilita afirmar que, sob certos parâmetros, a Geometria Esférica se aproxima da Geometria Plana quando operamos com um raio da esfera excessivamente grande.

5 NAVEGAÇÃO ASTRONÔMICA: CARACTERIZAÇÃO, EVOLUÇÃO HISTÓRICA E CONCEITOS FUNDAMENTAIS

5.1 Importância e Caracterização da Navegação Astronômica

De acordo com (MIGUENS, 1999) a definição de navegação é: "Navegação é a ciência e a arte de conduzir, com segurança, um navio (ou embarcação) de um ponto a outro da superfície terrestre".

Dessa maneira, podemos caracterizar a Navegação Astronômica como um método de navegação em que o navegante determina sua posição, ou obtém outras informações úteis para a segurança da navegação, através de observações dos astros.(MIGUENS, 1999)

Os métodos de Navegação Astronômica usados atualmente são suficientemente simples para serem aprendidos por qualquer um que seja capaz de interpretar uma carta náutica ou fazer as leituras de um instrumento de navegação.

Pode ser questionado se no mundo atual dos equipamentos e maravilhas eletrônicas ainda faz sentido a utilização da Navegação Astonômica. A resposta é sim. Principalmente se considerarmos os caros equipamentos de navegação, de difícil manutenção e totalmente dependentes de geração de energia elétrica. Por outro lado, a simplicidade da Navegação Astronômica é admirável. Bastam um sextante, um bom cronômetro e um conjunto de Tábuas para determinar sua posição em qualquer ponto da Terra. Energia elétrica não é necessária. Você pode navegar num grande navio, num pequeno veleiro ou até mesmo ser um náufrago de uma embarcação salva-vidas em situação de emergência.

5.2 Evolução histórica

No início da era da navegação, as posições eram seguidas por referências terrestres. Entretanto, quando os portugueses começaram as grandes navegações, eles precisavam de pontos além da topografia costeira. Logo, tiveram que recorrer a métodos astronômicos.

Esses métodos foram descobertos pelos gregos, em tempos antes de Cristo, quando aprimoraram a teoria geocêntrica da terra. Os gregos, que supunham que as estrelas se encontravam fixas na esfera celeste, pensavam que, uma vez determinadas as suas coordenadas celestes, estas não variavam mais. Mas, no século II a.C, Hiparco de Niceia deu-se conta que as ascensões retas de todas as estrelas tinham aumentado constantemente, enquanto as declinações praticamente mantinham os mesmos valores. Interpretou este fato como sendo devido a um desvio constante do Ponto Vernal, origem da contagem da ascensão reta.(ANJO, 2019)

Quase todas as estrelas não permanecem no mesmo ponto do céu, mas nos dão a impressão de descrever grandes curvas a cada noite, à medida que a Terra executa o movimento de rotação em torno de seu eixo. Os marujos tinham necessidade de alguma referência estável que os orientasse. Dessa maneira, descobriram que certas estrelas que parecem não se mover, como a Estrela Polar, seria o referencial ideal. A Polaris situa-se quase diretamente ao norte do eixo terrestre. Em consequência disso, quando a Terra gira sobre si mesma, em vez de percorrer o céu, a Estrela parece descrever um círculo de raio tão diminuto que pode ser considerada praticamente estacionária. A partir desse ponto, os marinheiros poderiam estimar de forma segura qual a posição da embarcação na superfície da Terra, medindo, em graus, a elevação dessa estrela. E diante disso, calcularam que tudo o que deveriam fazer era verificar a distância do horizonte da Polar todas as noites e ter certeza que permaneceria a mesma. Assim, quando chegassem a uma ilha, poderiam medir sua latitude e retornar a ela repetidas vezes (MIGUENS, 1999). As medidas eram imprecisas, então foram sendo criados equipamentos para auxiliar a navegação, como o astrolábio, o quadrante, a bússola, a balestilha e o sextante, por exemplo.

5.3 Conceitos fundamentais

As distâncias da Terra aos corpos celestes são tão grandes que podemos supô-los projetados na superfície interna de uma imensa esfera oca, de raio infinito, concêntrica com a Terra. Essa esfera aparente, de raio muito grande, é denominada Esfera Celeste, Figura 5.1.

Assim, em Navegação Astronômica, considera-se a Terra uma esfera perfeita, estacionária, suspensa, fixa no centro do Universo, e todos os corpos celestes localizados na superfície interna de uma imensa esfera oca, de raio infinito, centrada no centro da Terra: a Esfera Celeste. Esta esfera aparente é dotada de um movimento de rotação de Leste para Oeste, perfazendo uma volta completa a cada dia, com seu eixo de rotação coincidindo com o eixo da Terra. (COUTINHO, 2001)

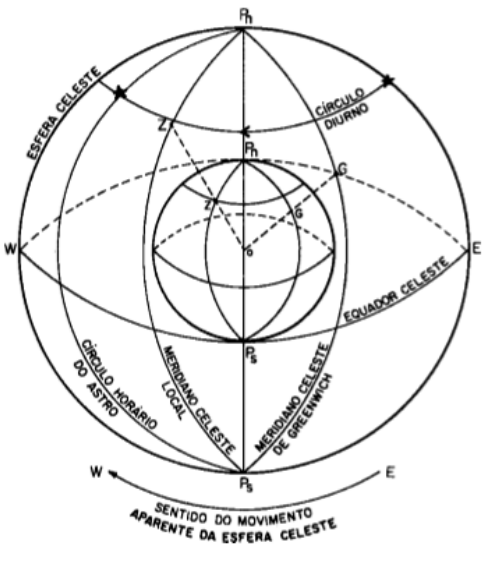


Figura 5.1: Elementos da Esfera Celeste

O Eixo de rotação da Esfera Celeste coincide com o eixo da Terra e os Pólos Celestes são as projeções dos Pólos Terrestres na superfície da Esfera Celeste.

Pólos Celestes são os pontos em que o eixo de rotação da Esfera Celeste intercepta sua superfície e são as projeções dos Pólos Terrestres na superície da Esfera Celeste.

O Equador Celeste é o círculo máximo da Esfera Celeste perpendicular ao eixo dos Pólos Celestes. É o Equador da Terra projetado na Esfera Celeste.

Paralelos de Declinação ou Círculos Diurnos são círculos menores da Esfera Celeste, paralelos ao Equador Celeste.

Meridiano Celeste é um círculo máximo da Esfera Celeste que contém os Pólos Celestes e o Zênite de um ponto da Terra. Os Meridianos Celestes representam as projeções dos meridianos da Terra na Esfera Celeste, sendo, então, círculos máximos perpendiculares ao Equador Celeste.

Os Círculos Horários são círculos máximos da Esfera Celeste que contém os Pólos Celestes e o centro de um astro. Assim, os Círculos Horários são, também, círculos máximos perpendiculares ao Equador Celeste. Desta forma, um Círculo Horário e um Meridiano Celeste têm a mesma definição, sendo os Meridianos usados para referência de locais (posições do observador) e os Círculos Horários para astros. A única diferença é que os Círculos Horários deslocam-se com os astros no seu movimento aparente em torno da Terra, enquanto os Meridianos Celestes permanecem fixos, formando uma espécie de gaiola, no interior da qual gira a Esfera Celeste, no seu movimento aparente de Leste para Oeste. Quando um observador se desloca, move-se de um meridiano para outro.

Os meridianos convergem para os polos, isto é, na medida em que nos aproximamos dos polos, as distâncias entre os meridianos vão tendendo a zero. Assim, medindo a separação dos meridianos pelo arco paralelo corresponente (Figura 5.2), tem-se o seguinte:

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB}.cos\varphi$$

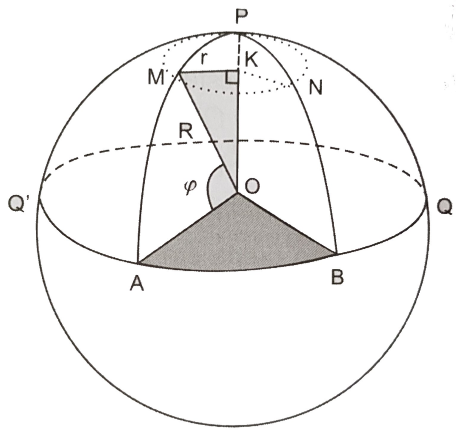


Figura 5.2: Triângulo MKO é retângulo com vértice O no centro da Terra

A relação anterior pode ser demonstrada considerando a igualdade dos ângulos $\widehat{MKN} = \widehat{AOB}$ (ângulos de um fuso) e verificando que no triângulo retângulo MKO teremos $\text{sen}(90^o - \varphi) = \cos\varphi = \left(\frac{\overline{MK}}{R}\right)$ e, consequentemente $\overline{MK} = R.\cos\varphi$. Dessa maneira, teremos o arco $\overset{\frown}{MN} = (\widehat{MKN}).(\overline{MK})$, o que equivale a $\overset{\frown}{MN} = \widehat{AOB}.(R.\cos\varphi)$, e ainda, $\overset{\frown}{MN} = (\widehat{AOB}).(R).\cos\varphi$ e finalmente $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB}.\cos\varphi$, sendo $\overset{\frown}{AB}$ o arco referente ao ângulo $\widehat{AOB}$.

A Milha Marítima é uma unidade de distância amplamente utilizada em navegação marítima, e equivale ao comprimento de 1 minuto de meridiano terrestre, tomado na latitude de 45º. Devido ao achatamento da Terra nos polos, os meridianos não são círculos, mas semelhantes a elipses. Dessa maneira, 1 minuto de arco de meridiano varia ao longo das diferentes latitudes.

A Conferência Hidrográfica Internacional Extraordinária de 1929 fixou o valor de uma milha marítima em exatos 1852m, com o simbolo MN. Sendo assim, na resolução de triângulos esféricos na superfície terrestre, suposta esférica para efeito de navegação, vale a relação que 1min de arco de círculo máximo = 1 milha marítima.(COUTINHO, 2001)

6 TRIGONOMETRIA ESFÉRICA NA NAVEGAÇÃO ASTRONÔMICA

Segundo MIGUENS (1999), para determinar um ponto na superfície terrestre utilizamos o sistema de coordenadas geográficas (Latitude e Longitude), de maneira análoga, na Navegação Astronômica utilizamos os seguintes sistemas de coordenadas astronômicas:

- Sistema de Coordenadas Horárias;
- Sistema de Coordenadas Equatoriais ou Uranográficas; e
- Sistema de Coordenadas Horizontais ou Azimutais.

6.1 Sistema de Coordenadas Horárias

Esse sistema tem como círculos máximos fundamentais o Equador Celeste e, perpendicular a este, o Meridiano Celeste do observador. Dessa forma, as Coordenadas Horárias permitem fixar a posição de um astro na Esfera Celeste, em um determinado instante, tendo como referência o Equador Celeste e o Meridiano Superior do lugar onde se encontra o observador. As Coordenadas Horárias são divididas em Declinação e Ângulo Horário, logo abaixo definidas:

- Declinação: Declinação de um astro é o comprimento do arco do Círculo Horário[1] situado entre o Equador Celeste e a posição do astro, medido para o Norte ou para o Sul, a partir do Equador Celeste, de 00º a 90º. A Declinação na Esfera Celeste é análoga à Latitude na Terra.
- Ângulo Horário: Ângulo Horário de um astro é o arco de Equador Celeste (ou o ângulo no Pólo Celeste) entre um Meridiano Celeste e o Círculo Horário do astro,

[1]É um círculo máximo da Esfera Celeste que contém os Pólos Celestes e o centro de um astro. Desta forma, um Círculo Horário e um Meridiano Celeste têm a mesma definição, sendo os Meridianos Celestes usados para referência de locais (posições do observador) e os Círculos Horários para astros. A única diferença é que os Círculos Horários deslocam-se com os astros, no seu movimento aparente em torno da Terra, enquanto os Meridianos Celestes permanecem fixos como se fossem uma gaiola.

medido para oeste, de 000º a 360º. Quando o meridiano de origem é o Meridiano de Greenwich ou o Meridiano Local qualquer, chamamos Ângulo Horário em Greenwich (AHG) ou Ângulo Horário Local (AHL), respectivamente.

Como o ângulo entre o Meridiano Local e o Meridiano de Greenwich corresponde à Longitude do local (representada pela letra λ), valerá sempre a relação:

$$AHL = AHG \pm \lambda \tag{6.1}$$

Conforme podemos observar na Figura 6.1 utiliza-se na fórmula anterior o sinal negativo quando λ é oeste (W) e o sinal positivo quando λ é leste (E).

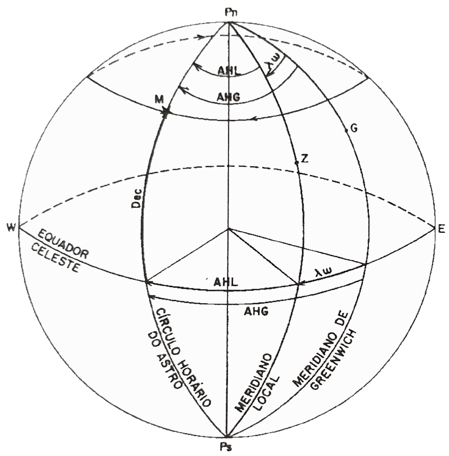


Figura 6.1: Coordenadas Horárias

Os conceitos abaixo, também relacionados às Coordenadas Horárias, são importantes para o entendimento da Navegação Astronômica:

- Ângulo no Polo (t_1): É o ângulo entre o Meridiano Superior do lugar e o Círculo Horário do astro, medido de 000º a 180º, para Leste ou para Oeste do Meridiano Superior. Então, como o Ângulo Horário é medido para Oeste, de 000º a 360º, tem-se:

  ASTRO A OESTE: $t_1 = AHL$

  ASTRO A LESTE: $t_1 = 360^{o} - AHL$

- Distância Polar (p): A distância polar de um astro é o comprimento do Círculo horário do astro entre o Pólo Elevado (pólo celeste acima do horizonte) e a posição do astro, medido a partir do Pólo Elevado, de 000º a 180º. Se a Declinação do astro for de mesmo nome que o Pólo Elevado (ou seja, se a Declinação e a Latitude do observador forem de mesmo nome), a distância polar será $p = 90^{o} - Dec$ (Figura 6.2), do contrário, resultará em $p = 90^{o} + Dec$.

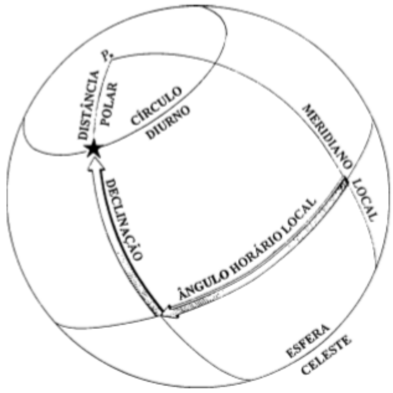


Figura 6.2: Coordenadas Horárias e Distância Polar

6.2 Sistema de Coordenadas Equatoriais ou Uranográficas

Os círculos máximos fundamentais de referência desse sistema de coordenadas são o Equador Celeste e o Círculo Horário do Ponto Vernal. As Coordenadas Equatoriais são divididas em Declinação (Dec), já tratada anteriormente, e Ascenção Reta Versa (ARV). A Ascenção Reta Versa é definida como o arco do Equador Celeste (ou o Ângulo no Pólo) entre o Círculo Horário do Ponto Vernal e o Círculo Horário do astro, medido desde o Círculo Horário do Ponto Vernal, de 000º a 360º, para Oeste.

A Figura 6.3 mostra a Declinação (Dec) e a Ascenção Reta Versa (ARV) de um astro. Como o Círculo Diurno (ou Paralelo de Declinação) de uma estrela é paralelo ao Equador Celeste, sua Declinação (Dec), que é o arco do Círculo Horário do astro entre o Equador e o Círculo Diurno, é constante. O Ponto Vernal, um ponto que utilizamos como referência para diversos cálculos astronômicos, é o ponto no qual a Eclítica intercepta o Equador Celeste quando o Sol, no seu movimento aparente de translação em torno da Terra, passa do Hemisfério Sul para o Hemisfério Norte Celeste. Sendo um ponto do Equador Celeste, o Ponto Vernal gira com a Esfera Celeste, no seu movimento aparente em torno da Terra, de Leste para Oeste.

Assim, como o astro e o Ponto Vernal giram com a Esfera Celeste, a Ascensão Reta Versa (ARV) também permanece constante.

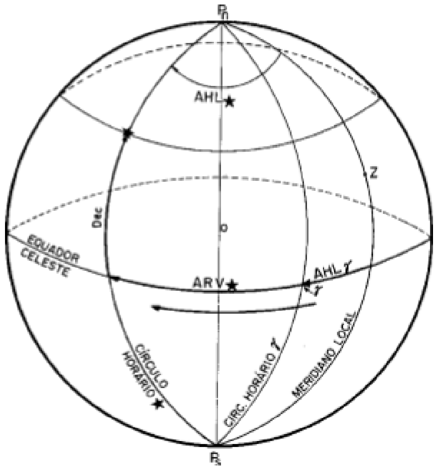


Figura 6.3: Declinação e Ascenção Reta Versa

As duas relações abaixo, também representadas nos diagramas de tempo da Figura 6.4, constituem-se em importantes ferramentas para a Navegação Astronômica:

$$AHL* = AHL_{\gamma} + ARV* \tag{6.2}$$

$$AHG* = AHG_{\gamma} + ARV* \tag{6.3}$$

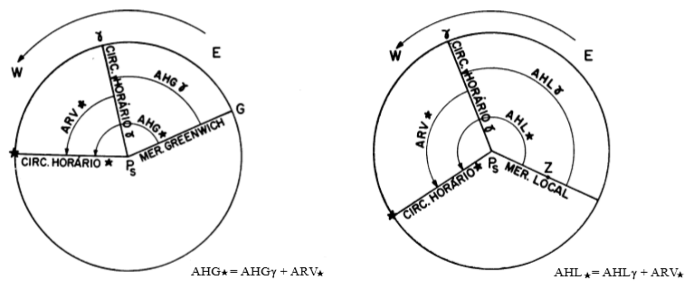


Figura 6.4: Relações entre Ângulos Horários e ARV

Estas relações são fundamentais haja vista que o Almanaque Náutico fornece apenas o Ângulo Horário em Greenwich do Ponto Vernal AHG_{γ} e a Ascensão Reta Versa (ARV) das estrelas. Combinando-se estes elementos, obtém-se o Ângulo Horário em Greenwich das estrelas.

6.3 Sistema de Coordenadas Horizontais ou Coordenadas Azimutais

6.3.1 Elementos da Esfera Local Aparente

A representação do céu estrelado em um determinado instante, assemelhando-se a uma fotografia do céu, onde as estrelas e planetas aparentam estar fixos em uma imensa superfície esférica de raio infinito, é o que denominamos Esfera Local Aparente ou Esfera Local. A Esfera Local tem como centro o olho do observador ou o centro da Terra. Dessa forma, a Esfera Local não participa do movimento diurno (movimento aparente) da Esfera Celeste, representando a configuração desta esfera em um determinado instante.

Os principais elementos da Esfera Local estão representados na Figura 6.5 seguidos das respectivas definições.

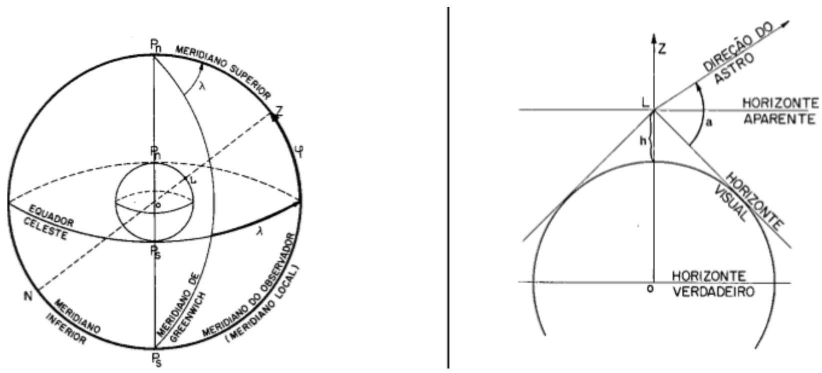


Figura 6.5: Elementos da Esfera Local e Horizontes

ZÊNITE(Z) - o Zênite de um observador, ou de um determinado local da superfície da Terra, é o ponto da Esfera Celeste situado na vertical do lugar, ou seja, é a projeção na Esfera Celeste de um ponto na superfície da Terra.

NADIR(N) - o Nadir é o ponto da Esfera Celeste diametralmente oposto ao Zênite. Está, portanto, situado a 180º do Zênite, ou seja, é o antípoda do Zênite.

MERIDIANO LOCAL - é a projeção na Esfera Celeste do meridiano de um lugar da superfície da Terra. O semicírculo deste meridiano que contém a linha dos polos e o Zênite do observador é o MERIDIANO SUPERIOR e a outra parte, que contém a linha do polo e o Nadir, é o MERIDIANO INFERIOR.

HORIZONTE VISUAL - é a superfície cônica, com vértice no olho do observador (L), tangente à superfície do globo terrestre. A linha de tangência do Horizonte Visual com a superfície do globo terrestre é materializada, em alto-mar, pela linha em que o céu aparenta unir-se à Terra.

HORIZONTE APARENTE - é um plano perpendicular à vertical do lugar e que contém o olho do observador.

HORIZONTE VERDADEIRO - é um círculo máximo da Esfera Celeste perpendicular à linha Zênite-Nadir, que passa pelo centro da Terra. Em Navegação Astronômica, quando se observa a altura de um astro com o sextante, ela é medida em relação ao Horizonte Visual, conforme indicado na Figura 6.5. Daqui por diante, chamaremos o Horizonte Verdadeiro apenas de horizonte.

VERTICAL DE UM ASTRO - é o círculo máximo da Esfera Celeste que contém a linha Zênite-Nadir e que passa pelo astro. É, portanto, perpendicular ao plano do horizonte (Figura 6.6).

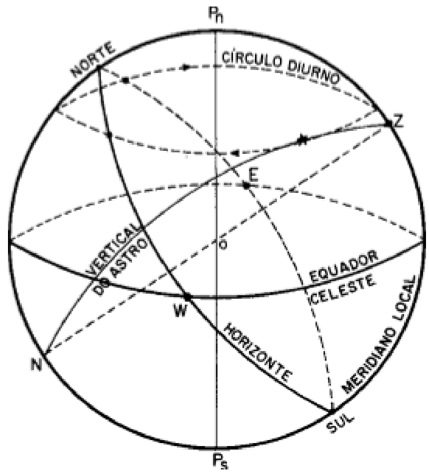


Figura 6.6: Horizonte e Vertical do Astro

PONTO NORTE (N) DO HORIZONTE - é a projeção do Polo Norte Celeste sobre o Horizonte.

PONTO LESTE (E) DO HORIZONTE - está situado a 90° do ponto N, no sentido horário.

PONTO SUL (S) DO HORIZONTE - é a projeção do Polo Sul Celeste sobre o Horizonte. Está situado a 180° do ponto Norte.

PONTO OESTE (W) DO HORIZONTE - está situado a 270° do ponto Norte, no sentido horário.

POLO ELEVADO - é o Polo Celeste acima do Horizonte, pode ser o Polo Norte ou Polo Sul.

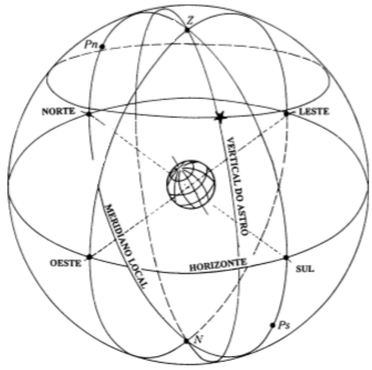


Figura 6.7: Horizonte e Meridiano Local

6.3.2 Coordenadas Horizontais ou Azimutais

Os círculos de referência do Sistema de Coordenadas Horizontais ou Azimutais são o horizonte (círculo máximo básico) e o meridiano do lugar (círculo máximo perpendicular). Essas coordenadas permitem fixar a posição de um astro na Esfera Celeste em relação à posição de um observador, tendo como referência o Horizonte e o Meridiano do lugar (Figura 6.7). As seguintes definições são relevantes ao entendimento da Navegação Astronômica:

ALTURA (a) - a altura de um astro é o comprimento do arco do Vertical do astro (ou ângulo central), medido entre o horizonte e o astro, contado a partir do horizonte, de 00º a 90º (astro no horizonte: $a = 00^o$, astro no Zênite: $a = 90^o$). A altura será denominada observada (a_o), aparente (a_{ap}) ou vedadeira(a), conforme haja sido medida a partir do Horizonte Visual, Horizonte Aparente ou Horizonte verdadeiro, respectivamente.

AZIMUTE VERDADEIRO(A_z) - o Azimute Verdadeiro de um astro é a distância angular, medida ao longo do horizonte (ou Ângulo no Zênite) entre o Meridiano Local e o Vertical do astro, contado no sentido horário, de 000º a 360º, desde a parte Norte do Meridiano Local, que contém o Polo Norte Celeste (ou do ponto Norte do horizonte).

DISTÂNCIA ZENITAL (z) - a distância zenital de um astro é o arco do Vertical do astro entre o Zênite e o astro, medido a partir do Zênite. Para todo astro acima do horizonte teremos a distância zenital como complemento da altura:

$$z = 90^o - a$$

ÂNGULO NO ZÊNITE (Z) - o Ângulo no Zênite de um astro é o ângulo entre o Meridiano Local e o Vertical do astro, medido de 000º a 180º, para Leste ou para Oeste, a partir do meridiano. é designado N ou S, de acordo com o Polo Elevado, e E ou W, conforme esteja a Leste ou Oeste do Meridiano Local. Asssim, pode-se registrar para o

Ângulo no Zênite: Z=045ºNE; Z=120ºSW etc. Os círculos menores da Esfera Celeste paralelos ao horizonte são denominados de Círculos de Altura, Paralelos de Altura ou Almicantarados.

AZIMUTE NÁUTICO OU SEMICIRCULAR - é o mesmo que o Ângulo no Zênite do "triângulo de posição", ou seja, é o menor ângulo formado entre o Vertical do astro e o Meridiano do Local, medido de 000º a 180º, sobre o horizonte, a partir da projeção do polo elevado, para Leste ou para Oeste. É designado por um prefixo, N ou S (Norte ou Sul), conforme o polo elevado, e por um sufixo E ou W (Leste ou Oeste), conforme esteja o astro a Leste ou Oeste do meridiano.

AZIMUTE QUADRANTAL (Aq ou Aqd) - é a distância angular, medida sobre o horizonte, de 00º a 90º, a partir de um ponto de origem (Norte ou Sul), para Leste ou para Oeste (de acordo com a posição do astro), até o Círculo Vertical do astro; recebe sempre uma designação, que pode ser NE (medido de Norte para Leste), NW (medido de Norte para Oeste), SE ou SW, conforme o caso.

6.4 O Triângulo Astronômico ou Triângulo de Posição e a Posição Astronômica

6.4.1 Como é obtida a Posição Astronômica?

De acordo com MIGUENS (1999), para que seja obtida uma posição na Navegação Astronômica o seguinte processo deve ser seguido:

- Inicialmente o navegante precisa saber a sua posição estimada quando observa um astro; observando o astro com o sextante[2], ele obtém, após aplicar algumas correções à altura instrumental obtida, a altura verdadeira (a) do astro;

- Utilizando a posição estimada, também conhecida como posição assumida, o navegante resolve o triângulo de posição (que será apresentado a seguir) e determina a altura calculada (a_e) do astro, que é a altura que o astro apresentaria se o navio estivesse exatamente na posição estimada, e o Azimute Verdadeiro (A_z) do astro;

- Comparando a altura verdadeira (a) com a altura calculada (a_e), o navegante, baseado na diferença de alturas e no Azimute Verdadeiro calculado para o astro, determina uma linha de posição [3] (LDP) para o navio; e

[2] O sextante é o instrumento de reflexão destinado à medida de ângulos e que, a bordo, é principalmente empregado na obtenção das alturas angulares dos astros acima do horizonte.

[3] Linha de posição é o lugar geométrico de todas as posições que o navio pode ocupar, tendo efetuado a observação da altura de um astro, em um determinado instante.

- Observando três ou mais astros, determina-se três ou mais LDP e, assim, obtém-se a posição do navio, na interseção das linhas de posição.

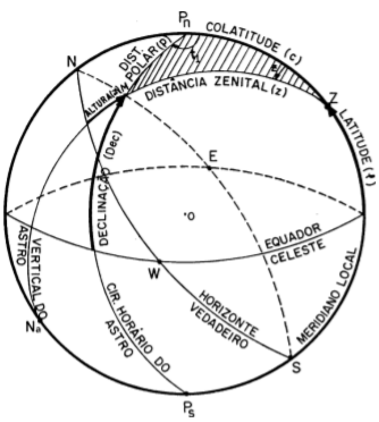
Dessa maneira, resolve-se o triângulo de posição para a posição estimada, a fim de determinar a altura calculada (a_e) e o Azimute Verdadeiro (A_z) do astro observado. A partir dai, com o Azimute Verdadeiro (A_z) e a diferença entre a altura verdadeira (a) e a altura calculada (a_e), obtém-se uma linha de posição (LDP) para o navio. Com pelo menos três LDP, determina-se a posição astronômica do navio.

O processo apresentado anteriormente é, em resumo, a maneira de obtenção da LDP e da posição do navio por meio da Navegação Astronômica, e será estudado detalhadamente nas seções seguintes.

6.4.2 O Triângulo de Posição e seus elementos

O triângulo de posição é um triângulo esférico obtido combinando-se os três sistemas de coordenadas utilizados em Navegação Astronômica.

- Sistema de Coordenadas Geográficas (Lat e Long) - para fixar a posição do ZÊNITE do observador na Esfera Celeste (posição assumida ou posição estimada);
- Sistema de Coordenadas Horárias (AHL e Dec) - para fixar a posição do astro na Esfera Celeste, no instante da observação; e
- Sistema de Coordenadas Horizontais ou Azimutais (a e A_z) - para fixar a posição do astro em relação ao observador, no instante da observação.



VÉRTICES	LADOS	ÂNGULOS
– PÓLO ELEVADO	– COLATITUDE $c = 90° - \varphi$	– ÂNGULO NO PÓLO (t_1)
– ZÊNITE DO OBSERVADOR (POSIÇÃO ESTIMADA OU ASSUMIDA)	– DISTÂNCIA ZENITAL $z = 90° - a$	– ÂNGULO NO ZÊNITE (Z)
– ASTRO OBSERVADO	– DISTÂNCIA POLAR $p = 90° \pm Dec$	– ÂNGULO PARALÁTICO

Figura 6.8: Triângulo de Posição

De acordo com a Figura 6.8, os principais elementos do triângulo de posição são:

VÉRTICES:

- Polo elevado (polo celeste situado acima do horizonte e que dá o nome à Latitude)

- Zênite do observador (ponto cuja posição na Esfera Celeste é definida pela Latitude e Longitude correspondentes à posição estimada)

- Astro observado (posição do astro na Esfera Celeste, no instante da observação).

LADOS:

- Colatitude (c) - $90^o - Lat$ (complemento da Latitude)

- Distância zenital (z) - $90^o - a$ (complemento da altura)

- Distância polar (p) - $90^o \pm Dec$ (se a Latitude e a Declinação são de mesmo nome, $p = 90^o - Dec$, se são de nomes opostos, $p = 90^o + Dec$)

ÂNGULOS:

- Ângulo no Polo (t_1) - é o ângulo no polo elevado, entre o meridiano superior do observador e o círculo horário do astro medido de 000º a 180º, para Leste ou para Oeste do meridiano superior. Na Figura 6.9 podem ser visualizadas as relações entre o Ângulo no Pólo (t_1) e o Ângulo Horário Local (AHL) do astro:

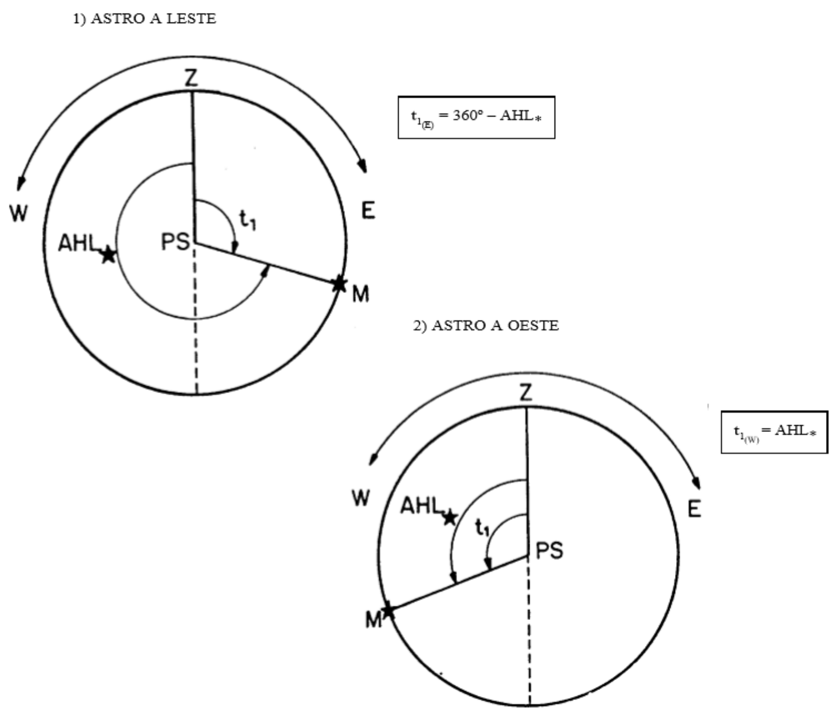


Figura 6.9: Ângulo no Pólo e suas relações com AHL

A única diferença entre o Ângulo Horário Local (AHL) e o Ângulo no Pólo (t_1) de um astro é que o AHL é sempre medido para Oeste (de 000º a 360º), enquanto que o t_1 é o menor ângulo entre o meridiano superior do observador e o círculo horário do astro, sendo medido de 000º a 180º, para Leste ou para Oeste do meridiano do observador, recebendo assim, o sufixo (E) ou (W).

É possível calcular o Azimute Verdadeiro (A_z) através do Ângulo no Zênite (Z). As Figuras 6.10 e 6.11 ilustram essa transformação.

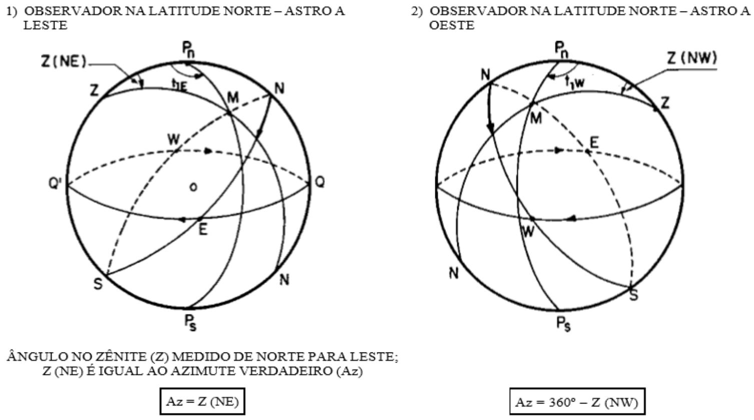


Figura 6.10: Ângulo no Zênite para observador ao Norte

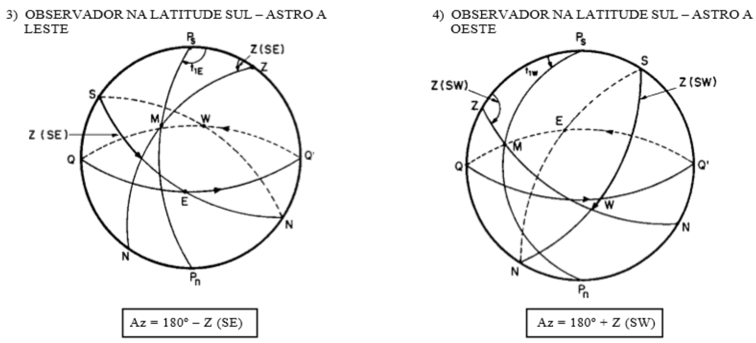


Figura 6.11: Ângulo no Zênite para observador ao Sul

- Ângulo paralático - é o ângulo do triângulo de posição formado no astro M (entre o círculo horário e o vertical do astro). Não é utilizado em Navegação Astronômica.

6.4.3 Resolvendo o Triângulo de Posição

Quando o navegante, conhecedor da sua posição estimada, observa a altura do astro, ele possui a sua Latitude e Longitude Estimadas. Com a Latitude Estimada ele obtém a colatitude ($c = 90^o - Lat$). Este é o primeiro elemento conhecido do triângulo de posição.

Exatamente no instante em que for medir a altura, o navegante registra a hora exata da observação. Com esta hora, convertida em Hora Média de Greenwich (HMG), e a Longitude estimada, obtém-se, por meio do Almanaque Náutico ou outras Tábuas, as coordenadas horárias do astro (AHL e Dec). A partir do valor da Declinação é possível obter a distância polar ($p = 90^o \pm Dec$), que é o segundo elemento conhecido do triângulo de posição. Com o AHL, determina-se o Ângulo no Polo (t_1), que é o terceiro elemento conhecido do triângulo de posição. Dessa forma, teremos os seguintes elementos conhecidos do triângulo de posição:

- Colatitude: $c = 90^o - Lat$
- Distância Polar: $p = 90^o - Dec$
- Ângulo no Polo: $t_1(W) = AHL$ e $t_1(E) = 360^o - AHL$

Teremos também os seguintes elementos a calcular:

- Distânica Zenital(z)
- Ângulo no Zênite (Z)

Obtendo a Distância Zenital (z) e o Ângulo no Zênite (Z) por meio da solução do triângulo de posição, podemos determinar a altura calculada do astro ($a_e = 90^o - z$) e o Azimute Verdadeiro (A_z) do astro, que nos permitirão, em conjunto com a altura verdadeira do astro (a), gerada após várias correções à altura instrumental obtida pelo sextante, traçar uma linha de posição do navio.

De uma maneira geral, os navegantes resolvem o triângulo de posição por Tábuas, calculadoras pré-programadas ou mesmo programas de computador. De qualquer maneira, seja qual for o modo de resolver o triângulo de posição, estão explícitas ou implícitas as fórmulas abaixo,

$$a_e = arc\ sen[\operatorname{sen}(Dec)\operatorname{sen}(Lat) + \cos(Dec)\cos(Lat)\cos(t_1)] \tag{6.4}$$

$$Z = arc\ cos\left[\frac{\operatorname{sen}(Dec) - \operatorname{sen}(Lat)\operatorname{sen}(a_e)}{\cos(a_e)\cos(Lat)}\right] \tag{6.5}$$

Inicialmente deduziremos a Fórmula 6.4 para em seguida fazermos a dedução da Fórmula 6.5,

6.4.4 Dedução da Fórmula 6.4

De acordo com a Fórmula 4.1, descrita para um triângulo ABC:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

Considerando o triângulo de posição P_nZH ilustrado na Figura 6.8 com vértices, respectivamente, coincidentes com os vértices de um triângulo ABC. Dessa forma, o lado a do segundo triângulo é congruente a z e $A \equiv P_n$, b é congruente a distância polar p e $B \equiv Z$, e por último, c do segundo triângulo é congruente à colatitude c do primeiro, com $C \equiv H$. Sendo assim, a fórmula anterior pode ser escrita como,

$$\cos z = \cos p \cos c + \operatorname{sen} p \operatorname{sen} c \cos(t_1)$$

Fazendo, $z = 90^o - a_e$; $p = 90^o - Dec$ e $c = 90^o - Lat$ temos,

$$\cos(90^o - a_e) = \cos(90^o - Dec)\cos(90^o - Lat) + \operatorname{sen}(90^o - Dec)\operatorname{sen}(90^o - Lat)\cos(t_1)$$

Considerando ainda:
$\cos(90^o - a_e) = \operatorname{sen}(a_e)$ e $\operatorname{sen}(90^o - a_e) = \cos(a_e)$
$\cos(90^o - Dec) = \operatorname{sen}(Dec)$ e $\operatorname{sen}(90^o - Dec) = \cos(Dec)$
$\cos(90^o - Lat) = \operatorname{sen}(Lat)$ e $\operatorname{sen}(90^o - Lat) = \cos(Lat)$, chegaremos a,

$$\operatorname{sen}(a_e) = \operatorname{sen}(Dec)\operatorname{sen}(Lat) + \cos(Dec)\cos(Lat)\cos(t_1)$$

Observemos ainda, de acordo com a Figura 6.9, que $t_{1E} = 360^o - AHL*$ ou $t_{1W} = AHL*$. Como $\cos(360^o - AHL*) = \cos(AHL*)$ teremos sempre que $cos(t_1) = cos(AHL*)$, resultando então que,

$$\operatorname{sen}(a_e) = \operatorname{sen}(Dec)\operatorname{sen}(Lat) + \cos(Dec)\cos(Lat)\cos(AHL*)$$

e, finalmente,

$$a_e = arc\ sen[\operatorname{sen}(Dec)\operatorname{sen}(Lat) + \cos(Dec)\cos(Lat)\cos(t_1)]$$

6.4.5 Dedução da Fórmula 6.5

Considerando as mesmas condições para o triângulo P_nZH descritas na demonstração anterior, e aplicando novamente a Lei dos cossenos, considerando porém, do lado esquerdo da equação o $\cos p$, ao invés do $\cos z$, calculado anteriormente, teremos,

$$\cos p = \cos c \cos z + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} z \cos(Z)$$

$$\cos(90^o - Dec) = \cos(90^o - Lat)\cos(90^o - a_e) + \operatorname{sen}(90^o - Lat)\operatorname{sen}(90^o - a_e)cos(Z)$$

o que resulta em,

$$\text{sen}(Dec) = \text{sen}(Lat)\,\text{sen}(a_e) + \cos(Lat)\cos(a_e)cos(Z)$$

$$\cos(Lat)\cos(a_e)cos(Z) = \text{sen}(Dec) - \text{sen}(Lat)\,\text{sen}(a_e)$$

$$\cos(Z) = \left[\frac{\text{sen}(Dec) - \text{sen}(Lat)\,\text{sen}(a_e)}{\cos(a_e)\cos(Lat)}\right]$$

e finalmente,

$$Z = arc\ cos\left[\frac{\text{sen}(Dec) - \text{sen}(Lat)\,\text{sen}(a_e)}{\cos(a_e)\cos(Lat)}\right]$$

Observações quanto a utilização das Fórmulas 6.4 e 6.5:

- Se a Latitude e a Declinação forem de nomes contrários, utilizar a Declinação com sinal negativo.
- O ângulo no Zênite (Z) pode ser convertido para Azimute Vedadeiro (A_z) utilizando uma das fórmulas abaixo:

  A_z= Z (NE) A_z= 360º - Z (NW)

  A_z= 180º - Z (SE) A_z= 180º + Z (SW)

6.5 Como obter as Coordenadas dos Astros por meio do Almanaque Náutico

No capítulo anterior apresentamos as ações necessárias para a obtenção de uma linha de posição (LDP):

- Observar a altura do astro com o sextante, anotando a hora correspondente ao instante da observação (esta hora será transformada em Hora Média de Greenwich -HMG); aplicar as correções para determinar a altura verdadeira (a) do astro;
- Resolver o triângulo de posição (para a posição assumida), a fim de obter a altura calculada (a_e) e o Azimute Verdadeiro (A_z) do astro; e
- Com a diferença ($a - a_e$) e o Azimute Verdadeiro (A_z), traçar a linha de posição (reta de altura).

De acordo com MIGUENS (1999), para que tenhamos elementos suficientes à resolução do triângulo de posição, necessitamos conhecer as coordenadas horárias (AHL e Dec) do astro observado, no instante da observação. Isto é feito com o auxílio do Almanaque

Náutico. O argumento de entrada no Almanaque Náutico será o Tempo Universal (TU) ou Hora Média de Greenwich (HMG) e possibilitará a obtenção do AHG, que pode ser transformado em AHL, fazendo $AHL = AHG - Long(W)$ ou $AHL = AHG + Long(E)$ conforme a Figura 6.12.

Quando o astro for uma estrela, temos primeiramente que obter no Almanaque o Ângulo Horário em Greenwich do Ponto Vernal (AHG_γ), tabulado para cada hora inteira de HMG, e o valor da Ascenção Reta Versa (ARV) e Declinação (Dec) de uma das 57 estrelas utilizadas na Navegação Astronômica (estrelas com ARVe Dec que variam lentamente e podem ser consideradas constantes durante um período de vários dias). Com estes elementos, pode-se obter o AHG das estrelas, através das Fórmulas 6.2 e 6.3,

$$AHL* = AHL_\gamma + ARV*$$

$$AHG* = AHG_\gamma + ARV*$$

Quando obtivermos o AHG podemos calcular o AHL combinando a Longitude como vimos anteriormente.

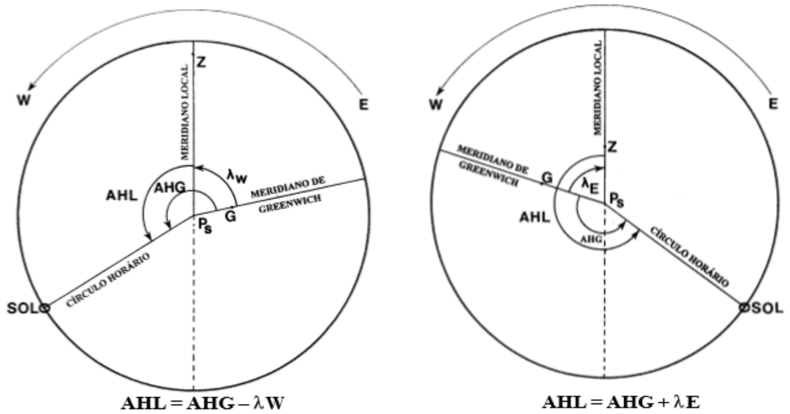


Figura 6.12: Conversão de AHG em AHL

Ainda sobre a obtenção das coordenadas horárias das estrelas, não haveria como o Almanaque Náutico apresentar, nas páginas diárias, o AHG e a Dec das 57 estrelas selecionadas para uso náutico.

Entretanto, como vimos anteriormente, o Ponto Vernal(γ), interseção da Eclítica com o Equador Celeste, quando o Sol, no seu movimento aparente de translação em torno da Terra, passa do Hemisfério Sul Celeste para o Hemisfério Norte Celeste, é dotado de um movimento aparente igual ao das estrelas, perfazendo uma rotação completa em torno da terra em um dia sideral, exatamente. Assim sendo, o Almanaque fornece, nas páginas diárias, o AHG do Ponto Vernal, tabulado para cada hora inteira de HMG, e a Ascenção Reta Versa (ARV) e Declinação (Dec) das 57 estrelas citadas.

Observações:

- Os movimentos horários do Ponto Vernal (γ) são perfeitamente conhecidos. Desta forma, v (valor obtido no Almanaque e que nos permite determinar a correção para as irregularidades do movimento horário dos planetas e da Lua) é ZERO para o Ponto Vernal.

- Os valores de ARV e Dec das estrelas variam muito lentamente, mantendo-se praticamente constantes por vários dias. Assim, não é necessário fazer qualquer correção nestes elementos (ARVe Dec) para o instante da observação, bastando apenas utilizar os valores apresentados nas páginas diárias do Almanaque Náutico.

6.5.1 Exercícios práticos envolvendo consultas ao Almanaque Náutico

Nesta subseção, a título de fixar os conhecimentos até então apresentados, resolveremos alguns exercícios envolvendo coordenadas horárias de astros com a extração de dados do Almanaque Náutico.

EXERCÍCIO 1 - Deseja-se converter a H Leg = 0800 em Norfolk, EUA (Longitude 076º 18' W) para HMG.

- Determinação do Fuso Horário de Norfolk: Dividindo a Longitude por 15º (pois temos um total de 24 fusos de 15º) e comparando com o resto 7,5º conclui-se que o Fuso de Norfolk é +5(R).

- Portanto, a Hora Legal é expressa por: H Leg = 0800 R

- Aplicando o Fuso com o seu sinal à H Leg, obtém-se a HMG correspondente: HMG = 0800R + 5 = 1300Z.

EXERCÍCIO 2 - Calcular o Ângulo Horário Local (AHL) e a Declinação (Dec) do Sol em 27/set/1993, na Hora legal = $15^h\ 26^m\ 50^s$, estando o observador no fuso $+3^h$ (P).

Solução:

$$\begin{array}{rcccc} Hleg = & 15^h & 26^m & 50^s & P \\ f = & +3 & & & P \\ \hline HMG = & 18^h & 26^m & 50^s & Z \end{array}$$

Entrar no Almanaque Náutico de 1993, com a data e a HMG inteira menor e mais próxima (27/set, HMG 18^h), na coluna referente ao Sol (Figura 6.14) para obter os valores tabulados do AHG, Dec e d; em seguida, entrar nas páginas "amarelas"do almanaque para determinar os acréscimos e correções para 26^m 50^s (Figura 6.15):

$$\begin{array}{llll}
AHG(18^h) = & 092^o16,7' & Dec(18^h) = & 01^o50,6'S \quad (d=+1,0') \\
ACRESC.(26^m50^s) = & 06^o42,5' & & \\
CORREC.\ d(26^m) = & & & +0,4' \\
\hline
HMG\ 18^h26^m50^s \longrightarrow AHG = 098^o\ 59,2' & & Dec & = 01^o51,0'S
\end{array}$$

Observação:

Conforme observamos, as irregularidades do movimento horário (v) para o SOL são desprezíveis.

EXERCÍCIO 3 - Calcular o (AHL) e a (Dec) do Sol, para um lugar de Longitude 032º 25,0'E, em 25/set/93, H leg=15^h 27^m $40,0^s$, no fuso horário -2 (B).

Solução:

$$\begin{array}{rllll}
Hleg = & 15^h & 27^m & 40,0^s & B \\
f = & -2 & & & B \\
\hline
HMG = & 13^h & 27^m & 40,0^s & Z
\end{array}$$

Entrar no Almanaque Náutico de 1993, com a data e a HMG inteira menor e mais próxima (25/set, HMG 13^h), na coluna referente ao Sol (Figura 6.14) para obter os valores tabulados do AHG, Dec e d; em seguida, entrar nas páginas amarelas para determinar os acréscimos e correções para 27^m $40,0^s$ (Figura 6.15):

$$\begin{array}{llll}
AHG(13^h) = & 017^o05,4' & Dec(13^h) = & 00^o59,0'S \quad (d=+1,0') \\
ACRESC.(27^m40,0^s) = & 06^o55,0' & & \\
CORREC.\ d(27^m) = & & & +0,5' \\
\hline
HMG\ 13^h27^m40,0^s \longrightarrow AHG = 024^o\ 00,4' & & Dec & = 00^o59,5'S
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
HMG\ 13^h27^m40,0^s \longrightarrow AHG = & 024^o\ 00,4' & Dec\ = 00^o59,5'S \\
\lambda = & 032^o25,0'E & \\
\hline
AHL = & 056^o25,4' &
\end{array}$$

EXERCÍCIO 4 - Obter o (AHL) e a (Dec) de Sirius, para um lugar de Longitude

047º 50,0’W, em 25/set/93, H leg=$05^h\ 26^m\ 18,0^s$.

Solução:

Para o cálculo do fuso: Divide-se a Longitude por 15º, como o quociente é 3 e resto é menor que 7,5º, portanto, o fuso será +3 (P).

$$\begin{array}{rcccc} Hleg = & 05^h & 26^m & 18,0^s & B \\ f = & +3 & & & P \\ \hline HMG = & 08^h & 26^m & 18,0^s & Z \end{array}$$

Entrando no Almanaque Náutico na data de 25/set/93, (Figura 6.13), com a parte inteira da HMG obteremos $AHG_\gamma = 124^o 09,2'$ e para um acréscimo de $26^m 18^s$ (Figura 6.15) teremos $06^o 35,6'$.

$$\begin{array}{rcc} AHG_\gamma(08^h) = & 124^o & 09,2' \\ ACRESC(26^m 18^s) = & 06^o & 35,6' \\ \hline AHG_\gamma = & 130^o & 44,8' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} AHG_\gamma = & 130^o & 44,8' \\ ARV(SIRIUS) = & 258^o & 46,7' \\ \hline AHG(SIRIUS) = & 029^o & 31,5' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} AHG(SIRIUS) = & 029^o & 31,5' \\ LONGITUDE = & 047^o & 50,0'W \\ \hline AHL(SIRIUS) = & 341^o & 41,5' \\ \text{e} \quad Dec\ (SIRIUS) = & 16^o & 42,3'\ S \end{array}$$

TU (HMG) d	h	♈ AHG	VÊNUS −3.9 AHG	VÊNUS Dec.	MARTE +1.6 AHG	MARTE Dec.	JÚPITER −1.7 AHG	JÚPITER Dec.	SATURNO +0.5 AHG	SATURNO Dec.	ESTRELAS Nome	ARV	Dec.
25 SÁBADO	00	3 49.5	207 24.9	N10 56.5	157 13.6	S10 53.5	164 56.2	S 6 49.1	36 28.1	S14 47.6	Acamar	315 29.2	S40 19.5
	01	18 52.0	222 24.4	55.5	172 14.5	54.1	179 58.2	49.3	51 30.7	47.7	Achernar	335 37.1	S57 15.9
	02	33 54.4	237 24.0	54.4	187 15.3	54.7	195 00.2	49.5	66 33.3	47.7	Acrux	173 26.6	S63 03.9
	03	48 56.9	252 23.5	·· 53.4	202 16.2	·· 55.3	210 02.1	·· 49.7	81 35.9	·· 47.8	Adhara	255 24.2	S28 57.6
	04	63 59.4	267 23.0	52.4	217 17.1	55.9	225 04.1	49.9	96 38.5	47.8	Aldebaran	291 06.2	N16 29.9
	05	79 01.8	282 [illegible]	51.3	232 18.0	56.6	240 06.1	50.1	111 41.1	47.8			
	06	94 04.3	[illegible] 22.1	N10 50.3	247 18.8	S10 57.2	255 08.1	S 6 50.3	126 43.7	S14 47.9	Alioth	166 34.1	N55 59.7
	07	109 06.7	[illegible] 21.7	49.3	262 19.7	57.8	270 10.0	50.5	141 46.3	47.9	Alkaid	153 10.9	N49 20.8
	08	124 09.2	327 21.2	48.2	277 20.6	58.4	285 12.0	50.7	156 48.9	48.0	Al Na'ir	28 01.8	S46 59.4
	09	139 11.7	342 20.7	·· 47.2	292 21.5	·· 59.1	300 14.0	·· 50.9	171 51.4	·· 48.0	Alnilam	276 01.3	S 1 12.2
	10	154 14.1	357 20.3	46.2	307 22.3	10 59.7	315 16.0	51.1	186 54.0	48.0	Alphard	218 10.8	S 8 37.8
	11	169 16.6	12 19.8	45.1	322 23.2	11 00.3	330 17.9	51.3	201 56.6	48.1			
	12	184 19.1	27 19.4	N10 44.1	337 24.1	S11 00.9	345 19.9	S 6 51.5	216 59.2	S14 48.1	Alphecca	126 23.7	N26 44.3
	13	199 21.5	42 18.9	43.0	352 24.9	01.5	0 21.9	51.7	232 01.8	48.2	Alpheratz	357 58.4	N29 03.6
	14	214 24.0	57 18.4	42.0	7 25.8	02.2	15 23.8	51.9	247 04.4	48.2	Altair	62 22.5	N 8 51.4
	15	229 26.5	72 18.0	·· 41.0	22 26.7	·· 02.8	30 25.8	·· 52.1	262 07.0	·· 48.3	Ankaa	353 29.8	S42 20.2
	16	244 28.9	87 17.5	39.9	37 27.6	03.4	45 27.8	52.3	277 09.6	48.3	Antares	112 44.5	S26 25.1
	17	259 31.4	102 17.1	38.9	52 28.4	04.0	60 29.8	52.5	292 12.1	48.3			
	18	274 33.8	117 16.6	N10 37.8	67 29.3	S11 04.6	75 31.7	S 6 52.7	307 14.7	S14 48.4	Arcturus	146 09.4	N19 13.0
	19	289 36.3	132 16.1	36.8	82 30.2	05.3	90 33.7	53.0	322 17.3	48.4	Atria	107 59.8	S69 01.2
	20	304 38.8	147 15.7	35.8	97 31.0	05.9	105 35.7	53.2	337 19.9	48.5	Avior	234 24.4	S59 29.2
	21	319 41.2	162 15.2	·· 34.7	112 31.9	·· 06.5	120 37.6	·· 53.4	352 22.5	·· 48.5	Bellatrix	278 47.8	N 6 20.7
	22	334 43.7	177 14.8	33.7	127 32.8	07.1	135 39.6	53.6	7 25.1	48.5	Betelgeuse	271 17.2	N 7 24.4
	23	349 46.2	192 14.3	32.6	142 33.6	07.7	150 41.6	53.8	22 27.7	48.6			
26 DOMINGO	00	4 48.6	207 13.9	N10 31.6	157 34.5	S11 08.4	165 43.6	S 6 54.0	37 30.3	S14 48.6	Canopus	264 02.7	S52 41.3
	01	19 51.1	222 13.4	30.5	172 35.4	09.0	180 45.5	54.2	52 32.8	48.7	Capella	280 56.1	N45 59.4
	02	34 53.6	237 12.9	29.5	187 36.3	09.6	195 47.5	54.4	67 35.4	48.7	Deneb	49 41.3	N45 15.9
	03	49 56.0	252 12.5	·· 28.5	202 37.1	·· 10.2	210 49.5	·· 54.6	82 38.0	·· 48.7	Denebola	182 49.0	N14 36.4
	04	64 58.5	267 12.0	27.4	217 38.0	10.8	225 51.4	54.8	97 40.6	48.8	Diphda	349 10.3	S18 01.0
	05	80 01.0	282 11.6	26.4	232 38.9	11.5	240 53.4	55.0	112 43.2	48.8			
	06	95 03.4	297 11.1	N10 25.3	247 39.7	S11 12.1	255 55.4	S 6 55.2	127 45.8	S14 48.9	Dubhe	194 10.2	N61 46.9
	07	110 05.9	312 10.7	24.3	262 40.6	12.7	270 57.4	55.4	142 48.4	48.9	Elnath	278 31.2	N28 36.1
	08	125 08.3	327 10.2	23.2	277 41.5	13.3	285 59.3	55.6	157 51.0	48.9	Eltanin	90 53.0	N51 29.7
	09	140 10.8	342 09.8	·· 22.2	292 42.3	·· 13.9	301 01.3	·· 55.8	172 53.5	·· 49.0	Enif	34 01.3	N 9 51.0
	10	155 13.3	357 09.3	21.1	307 43.2	14.6	316 03.3	56.0	187 56.1	49.0	Fomalhaut	15 39.8	S29 39.2
	11	170 15.7	12 08.9	20.1	322 44.1	15.2	331 05.2	56.2	202 58.7	49.1			
	12	185 18.2	27 08.4	N10 19.0	337 44.9	S11 15.8	346 07.2	S 6 56.4	218 01.3	S14 49.1	Gacrux	172 18.0	S57 04.7
	13	200 20.7	42 07.9	18.0	352 45.8	16.4	1 09.2	56.6	233 03.9	49.1	Gienah	176 07.8	S17 30.4
	14	215 23.1	57 07.5	16.9	7 46.7	17.0	16 11.1	56.8	248 06.5	49.2	Hadar	149 09.5	S60 20.7
	15	230 25.6	72 07.0	·· 15.9	22 47.5	·· 17.6	31 13.1	·· 57.0	263 09.0	·· 49.2	Hamal	328 17.1	N23 26.1
	16	245 28.1	87 06.6	14.8	37 48.4	18.3	46 15.1	57.2	278 11.6	49.3	Kaus Aust.	84 03.3	S34 23.3
	17	260 30.5	102 06.1	13.8	52 49.3	18.9	61 17.1	57.4	293 14.2	49.3			
	18	275 33.0	117 05.7	N10 12.7	67 50.1	S11 19.5	76 19.0	S 6 57.6	308 16.8	S14 49.3	Kochab	137 20.3	N74 11.0
	19	290 35.5	132 05.2	11.6	82 51.0	20.1	91 21.0	57.8	323 19.4	49.4	Markab	13 52.7	N15 10.6
	20	305 37.9	147 04.8	10.6	97 51.9	20.7	106 23.0	58.0	338 22.0	49.4	Menkar	314 30.2	N 4 04.1
	21	320 40.4	162 04.3	·· 09.5	112 52.7	·· 21.4	121 24.9	·· 58.2	353 24.6	·· 49.5	Menkent	148 25.3	S36 20.4
	22	335 42.8	177 03.9	08.5	127 53.6	22.0	136 26.9	58.4	8 27.1	49.5	Miaplacidus	221 43.4	S69 41.3
	23	350 45.3	192 03.4	07.4	142 54.5	22.6	151 28.9	58.6	23 29.7	49.5			
27 SEGUNDA FEIRA	00	5 47.8	207 03.0	N10 06.4	157 55.3	S11 23.2	166 30.8	S 6 58.8	38 32.3	S14 49.6	Mirfak	309 01.2	N49 50.3
	01	20 50.2	222 02.5	05.3	172 56.2	23.8	181 32.8	59.0	53 34.9	49.6	Nunki	76 16.5	S26 18.2
	02	35 52.7	237 02.1	04.3	187 57.0	24.4	196 34.8	59.2	68 37.5	49.7	Peacock	53 42.0	S56 45.4
	03	50 55.2	252 01.6	·· 03.2	202 57.9	·· 25.1	211 36.8	·· 59.4	83 40.1	·· 49.7	Pollux	243 45.9	N28 02.4
	04	65 57.6	267 01.2	02.1	217 58.8	25.7	226 38.7	59.6	98 42.6	49.7	Procyon	245 15.2	N 5 14.5
	05	81 00.1	282 00.7	01.1	232 59.6	26.3	241 40.7	6 59.8	113 45.2	49.8			
	06	96 02.6	297 00.3	N10 00.0	248 00.5	S11 26.9	256 42.7	S 7 00.0	128 47.8	S14 49.8	Rasalhague	96 20.2	N12 34.1
	07	111 05.0	311 59.8	9 59.0	263 01.4	27.5	271 44.6	00.2	143 50.4	49.9	Regulus	207 59.4	N11 59.9
	08	126 07.5	326 59.4	57.9	278 02.2	28.1	286 46.6	00.4	158 53.0	49.9	Rigel	281 26.1	S 8 12.4
	09	141 09.9	341 58.9	·· 56.8	293 03.1	·· 28.8	301 48.6	·· 00.6	173 55.6	·· 49.9	Rigil Kent.	140 12.4	S60 48.7
	10	156 12.4	356 58.5	55.8	308 03.9	29.4	316 50.5	00.8	188 58.1	50.0	Sabik	102 29.5	S15 43.0
	11	171 14.9	11 58.0	54.7	323 04.8	30.0	331 52.5	01.0	204 00.7	50.0			
	12	186 17.3	26 57.6	N 9 53.6	338 05.7	S11 30.6	346 54.5	S 7 01.2	219 03.3	S14 50.1	Schedar	349 56.9	N56 30.3
	13	201 19.8	41 57.2	52.6	353 06.5	31.2	1 56.5	01.4	234 05.9	50.1	Shaula	96 42.0	S37 06.0
	14	216 22.3	56 56.7	51.5	8 07.4	31.8	16 58.4	01.6	249 08.5	50.1	Sirius	258 46.7	S16 42.3
	15	231 24.7	71 56.3	·· 50.5	23 08.3	·· 32.5	32 00.4	·· 01.8	264 11.1	·· 50.2	Spica	158 [illegible]	S11 07.7
	16	246 27.2	86 55.8	49.4	38 09.1	33.1	47 02.4	02.0	279 13.6	50.2	Suhail	223 [illegible]	S43 24.3
	17	261 29.7	101 55.4	48.3	53 10.0	33.7	62 04.3	02.2	294 16.2	50.2			
	18	276 32.1	116 54.9	N 9 47.3	68 10.8	S11 34.3	77 06.3	S 7 02.4	309 18.8	S14 50.3	Vega	[illegible] 48.9	N38 47.0
	19	291 34.6	131 54.5	46.2	83 11.7	34.9	92 08.3	02.6	324 21.4	50.3	Zuben'ubi	137 22.0	S16 00.9
	20	306 37.1	146 54.0	45.1	98 12.6	35.5	107 10.2	02.8	339 24.0	50.4		ARV	Pass Merid
	21	321 39.5	161 53.6	·· 44.1	113 13.4	·· 36.1	122 12.2	·· 03.0	354 26.5	·· 50.4	Vênus	202 25.2	10 11
	22	336 42.0	176 53.1	43.0	128 14.3	36.8	137 14.2	03.2	9 29.1	50.4	Marte	152 45.9	13 29
	23	351 44.4	191 52.7	41.9	143 15.1	37.4	152 16.1	03.4	24 31.7	50.5	Júpiter	160 54.9	12 55
Pass Merid		23 36.9	v −0.5	d 1.1	v 0.9	d 0.6	v 2.0	d 0.2	v 2.6	d 0.0	Saturno	32 41.6	21 26

Figura 6.13: Página diária do Almanaque de 25, 26 e 27 de setembro de 1993

TU (HMG) d	h	SOL AHG	SOL Dec.	LUA AHG	LUA v	LUA Dec.	LUA d	LUA Ph
		° ′	° ′	° ′	′	° ′	′	′
25	00	182 02.6	S 0 46.4	64 48.7	12.0	S16 40.1	7.7	55.6
	01	197 02.8	47.3	79 19.7	12.0	16 32.4	7.8	55.6
	02	212 03.0	48.3	93 50.7	12.1	16 24.6	7.8	55.6
	03	227 03.2	. . 49.3	108 21.8	12.1	16 16.8	8.0	55.6
	04	242 03.5	50.3	122 52.9	12.2	16 08.8	8.0	55.5
	05	257 03.7	51.2	137 24.1	12.3	16 00.8	8.0	55.5
	06	272 03.9	S 0 52.2	151 55.4	12.4	S15 52.8	8.1	55.5
S	07	287 04.1	53.2	166 26.8	12.4	15 44.7	8.2	55.5
Á	08	302 04.3	54.2	180 58.2	12.5	15 36.5	8.3	55.4
B	09	317 04.5	. . 55.1	195 [illegible]	12.5	15 28.2	8.3	55.4
A	10	332 04.8	56.1	[illegible]	12.7	15 19.9	8.4	55.4
D	11	347 05.0	57.1	[illegible] 32.9	12.6	15 11.5	8.5	55.4
O	12	2 05.2	S 0 58.0	[illegible] 04.5	12.8	S15 03.0	8.5	55.3
	13	17 05.4	0 59.0	253 36.3	12.8	14 54.5	8.6	55.3
	14	32 05.6	1 [illegible]	268 08.1	12.9	14 45.9	8.6	55.3
	15	47 05.8	. . [illegible]	282 40.0	12.9	14 37.3	8.7	55.3
	16	62 06.0	[illegible]	297 11.9	13.0	14 28.6	8.8	55.2
	17	77 06.3	02.9	311 43.9	13.1	14 19.8	8.8	55.2
	18	92 06.5	S 1 03.9	326 16.0	13.1	S14 11.0	8.9	55.2
	19	107 06.7	04.9	340 48.1	13.2	14 02.1	8.9	55.2
	20	122 06.9	05.8	355 20.3	13.2	13 53.2	9.0	55.2
	21	137 07.1	. . 06.8	9 52.5	13.3	13 44.2	9.0	55.1
	22	152 07.3	07.8	24 24.8	13.3	13 35.2	9.1	55.1
	23	167 07.6	08.8	38 57.1	13.5	13 26.1	9.2	55.1
26	00	182 07.8	S 1 09.7	53 29.6	13.4	S13 16.9	9.2	55.1
	01	197 08.0	10.7	68 02.0	13.6	13 07.7	9.2	55.1
	02	212 08.2	11.7	82 34.6	13.5	12 58.5	9.3	55.0
	03	227 08.4	. . 12.7	97 07.1	13.7	12 49.2	9.4	55.0
	04	242 08.6	13.6	111 39.8	13.7	12 39.8	9.4	55.0
	05	257 08.8	14.6	126 12.5	13.7	12 30.4	9.4	55.0
	06	272 09.1	S 1 15.6	140 45.2	13.8	S12 21.0	9.5	55.0
D	07	287 09.3	16.6	155 18.0	13.9	12 11.5	9.6	54.9
O	08	302 09.5	17.5	169 50.9	13.9	12 01.9	9.6	54.9
M	09	317 09.7	. . 18.5	184 23.8	14.0	11 52.3	9.6	54.9
I	10	332 09.9	19.5	198 56.8	14.0	11 42.7	9.7	54.9
N	11	347 10.1	20.5	213 29.8	14.0	11 33.0	9.7	54.9
G	12	2 10.3	S 1 21.4	228 02.8	14.2	S11 23.3	9.8	54.8
O	13	17 10.6	22.4	242 36.0	14.1	11 13.5	9.8	54.8
	14	32 10.8	23.4	257 09.1	14.2	11 03.7	9.8	54.8
	15	47 11.0	. . 24.3	271 42.3	14.3	10 53.9	9.9	54.8
	16	62 11.2	25.3	286 15.6	14.3	10 44.0	10.0	54.8
	17	77 11.4	26.3	300 48.9	14.4	10 34.0	9.9	54.8
	18	92 11.6	S 1 27.3	315 22.3	14.4	S10 24.1	10.0	54.7
	19	107 11.8	28.2	329 55.7	14.4	10 14.1	10.1	54.7
	20	122 12.1	29.2	344 29.1	14.5	10 04.0	10.1	54.7
	21	137 12.3	. . 30.2	359 02.6	14.5	9 53.9	10.1	54.7
	22	152 12.5	31.2	13 36.1	14.6	9 43.8	10.1	54.7
	23	167 12.7	32.1	28 09.7	14.6	9 33.7	10.2	54.7
27	00	182 12.9	S 1 33.1	42 43.3	14.7	S 9 23.5	10.2	54.6
	01	197 13.1	34.1	57 17.0	14.7	9 13.3	10.3	54.6
	02	212 13.3	35.1	71 50.7	14.8	9 03.0	10.3	54.6
	03	227 13.5	. . 36.0	86 24.5	14.7	8 52.7	10.3	54.6
S	04	242 13.8	37.0	100 58.2	14.9	8 42.4	10.3	54.6
E	05	257 14.0	38.0	115 32.1	14.8	8 32.1	10.4	54.6
G	06	272 14.2	S 1 38.9	130 05.9	14.9	S 8 21.7	10.4	54.6
U	07	287 14.4	39.9	144 39.8	15.0	8 11.3	10.5	54.5
N	08	302 14.6	40.9	159 13.8	15.0	8 00.8	10.4	54.5
D	09	317 14.8	. . 41.9	173 47.8	15.0	7 50.4	10.5	54.5
A	10	332 15.0	42.8	188 21.8	15.0	7 39.9	10.5	54.5
	11	347 15.2	43.8	202 55.8	15.1	7 29.4	10.6	54.5
F	12	2 15.5	S 1 44.8	217 29.9	15.1	S 7 18.8	10.5	54.5
E	13	17 15.7	45.8	232 04.0	15.2	7 08.3	10.6	54.5
I	14	32 15.9	46.7	246 [illegible]	15.2	6 57.7	10.6	54.4
R	15	47 16.1	. . 47.7	261 [illegible]	15.2	6 47.1	10.7	54.4
A	16	62 16.3	48.7	[illegible] 46.6	15.2	6 36.4	10.6	54.4
	17	77 16.5	49.7	[illegible] 20.8	15.3	6 25.8	10.7	54.4
	18	92 16.7	S 1 50.6	304 55.1	15.3	S 6 15.1	10.7	54.4
	19	107 16.9	51.6	319 29.4	15.3	6 04.4	10.7	54.4
	20	122 17.1	52.6	334 03.7	15.4	5 53.7	10.8	54.4
	21	137 17.4	. . 53.5	348 38.1	15.4	5 42.9	10.7	54.4
	22	[illegible] 17.6	54.5	3 12.5	15.4	5 32.2	10.8	54.3
	23	[illegible]	55.5	17 46.9	15.4	5 21.4	10.8	54.3
		S.D. 16.0	d 1.0	S.D.	15.1	14.9		14.8

Lat.	CREP Náut	CREP Civil	SOL Nascer	LUA — Nascer 25	26	27	28
°	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
N 72	03 22	04 48	05 56	17 42	17 18	17 01	16 46
N 70	03 38	04 54	05 55	17 13	17 01	16 52	16 43
68	03 51	04 59	05 55	16 51	16 48	16 44	16 41
66	04 01	05 03	05 55	16 34	16 37	16 38	16 39
64	04 09	05 07	05 54	16 20	16 28	16 33	16 37
62	04 16	05 10	05 54	16 09	16 20	16 28	16 36
60	04 22	05 12	05 53	15 58	16 13	16 24	16 34
N 58	04 28	05 14	05 53	15 50	16 06	16 21	16 33
56	04 32	05 16	05 53	15 42	16 01	16 17	16 32
54	04 36	05 17	05 53	15 35	15 56	16 14	16 31
52	04 39	05 19	05 52	15 29	15 52	16 12	16 30
50	04 42	05 20	05 52	15 23	15 48	16 09	16 29
45	04 48	05 22	05 52	15 11	15 39	16 04	16 28
N 40	04 53	05 24	05 51	15 01	15 32	16 00	16 26
35	04 56	05 26	05 51	14 52	15 25	15 56	16 25
30	04 59	05 27	05 50	14 44	15 20	15 53	16 24
20	05 02	05 28	05 50	14 31	15 10	15 47	16 22
N 10	05 04	05 28	05 49	14 19	15 01	15 41	16 20
0	05 03	05 27	05 48	14 08	14 53	15 37	16 19
S 10	05 02	05 26	05 47	13 57	14 45	15 32	16 17
20	04 58	05 24	05 46	13 45	14 37	15 27	16 15
30	04 53	05 21	05 45	13 32	14 27	15 21	16 13
35	04 49	05 19	05 44	13 24	14 21	15 17	16 12
40	04 44	05 16	05 43	13 15	14 15	15 13	16 11
45	04 38	05 12	05 42	13 05	14 07	15 09	16 09
S 50	04 30	05 08	05 40	12 52	13 58	15 03	16 08
52	04 26	05 06	05 40	12 46	13 54	15 01	16 07
54	04 21	05 03	05 39	12 39	13 49	14 58	16 06
56	04 16	05 01	05 38	12 32	13 44	14 55	16 05
58	04 10	04 58	05 37	12 24	13 38	14 52	16 04
S 60	04 04	04 54	05 36	12 14	13 32	14 48	16 03

Lat.	SOL Pôr	CREP Civil	CREP Náut	LUA — Pôr 25	26	27	28
°	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
N 72	17 44	18 51	20 17	23 14	25 10	01 10	02 56
N 70	17 45	18 46	20 01	23 41	25 25	01 25	03 03
68	17 46	18 41	19 49	24 02	00 02	01 37	03 09
66	17 46	18 37	19 39	24 18	00 18	01 47	03 14
64	17 47	18 34	19 31	24 31	00 31	01 55	03 18
62	17 47	18 31	19 24	24 42	00 42	02 02	03 21
60	17 48	18 29	19 18	24 51	00 51	02 08	03 24
N 58	17 48	18 27	19 13	24 59	00 59	02 13	03 26
56	17 49	18 26	19 09	25 06	01 06	02 18	03 29
54	17 49	18 24	19 05	00 03	01 13	02 22	03 31
52	17 49	18 23	19 02	00 10	01 19	02 26	03 33
50	17 50	18 22	18 59	00 17	01 24	02 30	03 34
45	17 50	18 19	18 54	00 32	01 35	02 37	03 38
N 40	17 51	18 18	18 49	00 44	01 44	02 43	03 41
35	17 51	18 16	18 46	00 54	01 52	02 48	03 44
30	17 52	18 16	18 43	01 03	01 59	02 53	03 46
20	17 53	18 15	18 40	01 18	02 10	03 01	03 50
N 10	17 54	18 15	18 39	01 31	02 21	03 08	03 54
0	17 55	18 15	18 39	01 44	02 30	03 14	03 57
S 10	17 56	18 17	18 41	01 56	02 40	03 21	04 00
20	17 57	18 19	18 45	02 09	02 50	03 28	04 04
30	17 58	18 22	18 50	02 24	03 01	03 35	04 07
35	17 59	18 25	18 54	02 32	03 08	03 40	04 10
40	18 00	18 28	18 59	02 42	03 15	03 45	04 12
45	18 02	18 31	19 06	02 54	03 24	03 51	04 15
S 50	18 03	18 36	19 14	03 07	03 34	03 58	04 18
52	18 04	18 38	19 18	03 14	03 39	04 01	04 20
54	18 05	18 40	19 23	03 21	03 44	04 04	04 22
56	18 06	18 43	19 28	03 29	03 50	04 08	04 23
58	18 07	18 46	19 34	03 38	03 57	04 12	04 26
S 60	18 08	18 50	19 41	03 48	04 04	04 17	04 28

Dia	SOL ET 00h	SOL ET (+) 12h	SOL Pass Merid	LUA Pass Merid Sup	LUA Pass Merid Inf	LUA Idade	LUA Fase
	m s	m s	h m	h m	h m	d	
25	08 10	08 20	11 52	20 19	07 56	09	
26	08 31	08 41	11 51	21 04	08 42	10	
27	08 51	09 01	11 51	21 47	09 26	11	

Figura 6.14: Página diária do Almanaque de 25, 26 e 27 de setembro de 1993

26^m **ACRÉSCIMOS E CORREÇÕES** 27^m

26^m	SOL PLANETAS	♈	LUA	v ou d	Corr.	v ou d	Corr.	v ou d	Corr.
s	° ′	° ′	° ′	′	′	′	′	′	′
00	6 30·0	6 31·1	6 12·2	0·0	0·0	6·0	2·7	12·0	5·3
01	6 30·3	6 31·3	6 12·5	0·1	0·0	6·1	2·7	12·1	5·3
02	6 30·5	6 31·6	6 12·7	0·2	0·1	6·2	2·7	12·2	5·4
03	6 30·8	6 31·8	6 12·9	0·3	0·1	6·3	2·8	12·3	5·4
04	6 31·0	6 32·1	6 13·2	0·4	0·2	6·4	2·8	12·4	5·5
05	6 31·3	6 32·3	6 13·4	0·5	0·2	6·5	2·9	12·5	5·5
06	6 31·5	6 32·6	6 13·7	0·6	0·3	6·6	2·9	12·6	5·6
07	6 31·8	6 32·8	6 13·9	0·7	0·3	6·7	3·0	12·7	5·6
08	6 32·0	6 33·1	6 14·1	0·8	0·4	6·8	3·0	12·8	5·7
09	6 32·3	6 33·3	6 14·4	0·9	0·4	6·9	3·0	12·9	5·7
10	6 32·5	6 33·6	6 14·6	1·0	0·4	7·0	3·1	13·0	5·7
11	6 32·8	6 33·8	6 14·9	1·1	0·5	7·1	3·1	13·1	5·8
12	6 33·0	6 34·1	6 15·1	1·2	0·5	7·2	3·2	13·2	5·8
13	6 33·3	6 34·3	6 15·3	1·3	0·6	7·3	3·2	13·3	5·9
14	6 33·5	6 34·6	6 15·6	1·4	0·6	7·4	3·3	13·4	5·9
15	6 33·8	6 34·8	6 15·8	1·5	0·7	7·5	3·3	13·5	6·0
16	6 34·0	6 35·1	[illegible]	1·6	0·7	7·6	3·4	13·6	6·0
17	6 34·3	6 35·3	6 16·3	1·7	0·8	7·7	3·4	13·7	6·1
18	6 34·5	6 35·6	6 16·5	1·8	0·8	7·8	3·4	13·8	6·1
19	6 34·8	6 35·8	6 16·8	1·9	0·8	7·9	3·5	13·9	6·1
20	6 35·0	6 36·1	6 17·0	2·0	0·9	8·0	3·5	14·0	6·2
21	6 35·3	6 36·3	6 17·2	2·1	0·9	8·1	3·6	14·1	6·2
22	6 35·5	6 36·6	6 17·5	2·2	1·0	8·2	3·6	14·2	6·3
23	6 35·8	6 36·8	6 17·7	2·3	1·0	8·3	3·7	14·3	6·3
24	6 36·0	6 37·1	6 18·0	2·4	1·1	8·4	3·7	14·4	6·4
25	6 36·3	6 37·3	6 18·2	2·5	1·1	8·5	3·8	14·5	6·4
26	6 36·5	6 37·6	6 18·4	2·6	1·1	8·6	3·8	14·6	6·4
27	6 36·8	6 37·8	6 18·7	2·7	1·2	8·7	3·8	14·7	6·5
28	6 37·0	6 38·1	6 18·9	2·8	1·2	8·8	3·9	14·8	6·5
29	6 37·3	6 38·3	6 19·2	2·9	1·3	8·9	3·9	14·9	6·6
30	6 37·5	6 38·6	6 19·4	3·0	1·3	9·0	4·0	15·0	6·6
31	6 37·8	6 38·8	6 19·6	3·1	1·4	9·1	4·0	15·1	6·7
32	6 38·0	6 39·1	6 19·9	3·2	1·4	9·2	4·1	15·2	6·7
33	6 38·3	6 39·3	6 20·1	3·3	1·5	9·3	4·1	15·3	6·8
34	6 38·5	6 39·6	6 20·3	3·4	1·5	9·4	4·2	15·4	6·8
35	6 38·8	6 39·8	6 20·6	3·5	1·5	9·5	4·2	15·5	6·8
36	6 39·0	6 40·1	6 20·8	3·6	1·6	9·6	4·2	15·6	6·9
37	6 39·3	6 40·3	6 21·1	3·7	1·6	9·7	4·3	15·7	6·9
38	6 39·5	6 40·6	6 21·3	3·8	1·7	9·8	4·3	15·8	7·0
39	6 39·8	6 40·8	6 21·5	3·9	1·7	9·9	4·4	15·9	7·0
40	6 40·0	6 41·1	6 21·8	4·0	1·8	10·0	4·4	16·0	7·1
41	6 40·3	6 41·3	6 22·0	4·1	1·8	10·1	4·5	16·1	7·1
42	6 40·5	6 41·6	6 22·3	4·2	1·9	10·2	4·5	16·2	7·2
43	6 40·8	6 41·8	6 22·5	4·3	1·9	10·3	4·5	16·3	7·2
44	6 41·0	6 42·1	6 22·7	4·4	1·9	10·4	4·6	16·4	7·2
45	6 41·3	6 42·3	6 23·0	4·5	2·0	10·5	4·6	16·5	7·3
46	6 41·5	6 42·6	6 23·2	4·6	2·0	10·6	4·7	16·6	7·3
47	6 41·8	6 42·8	6 23·4	4·7	2·1	10·7	4·7	16·7	7·4
48	6 42·0	6 43·1	6 23·7	4·8	2·1	10·8	4·8	16·8	7·4
49	6 42·3	[illegible]	6 23·9	4·9	2·2	10·9	4·8	16·9	7·5
50	6 42·5	6 43·6	6 24·2	5·0	2·2	11·0	4·9	17·0	7·5
51	6 42·8	6 43·9	6 24·4	5·1	2·3	11·1	4·9	17·1	7·6
52	6 43·0	6 44·1	6 24·6	5·2	2·3	11·2	4·9	17·2	7·6
53	6 43·3	6 44·4	6 24·9	5·3	2·3	11·3	5·0	17·3	7·6
54	6 43·5	6 44·6	6 25·1	5·4	2·4	11·4	5·0	17·4	7·7
55	6 43·8	6 44·9	6 25·4	5·5	2·4	11·5	5·1	17·5	7·7
56	6 44·0	6 45·1	6 25·6	5·6	2·5	11·6	5·1	17·6	7·8
57	6 44·3	6 45·4	6 25·8	5·7	2·5	11·7	5·2	17·7	7·8
58	6 44·5	6 45·6	6 26·1	5·8	2·6	11·8	5·2	17·8	7·9
59	6 44·8	6 45·9	6 26·3	5·9	2·6	11·9	5·3	17·9	7·9
60	6 45·0	6 46·1	6 26·6	6·0	2·7	12·0	5·3	18·0	8·0

27^m	SOL PLANETAS	♈	LUA	v ou d	Corr.	v ou d	Corr.	v ou d	Corr.
s	° ′	° ′	° ′	′	′	′	′	′	′
00	6 45·0	6 46·1	6 26·6	0·0	0·0	6·0	2·8	12·0	5·5
01	6 45·3	6 46·4	6 26·8	0·1	0·0	6·1	2·8	12·1	5·5
02	6 45·5	6 46·6	6 27·0	0·2	0·1	6·2	2·8	12·2	5·6
03	6 45·8	6 46·9	6 27·3	0·3	0·1	6·3	2·9	12·3	5·6
04	6 46·0	6 47·1	6 27·5	0·4	0·2	6·4	2·9	12·4	5·7
05	6 46·3	6 47·4	6 27·7	0·5	0·2	6·5	3·0	12·5	5·7
06	6 46·5	6 47·6	6 28·0	0·6	0·3	6·6	3·0	12·6	5·8
07	6 46·8	6 47·9	6 28·2	0·7	0·3	6·7	3·1	12·7	5·8
08	6 47·0	6 48·1	6 28·5	0·8	0·4	6·8	3·1	12·8	5·9
09	6 47·3	6 48·4	6 28·7	0·9	0·4	[illegible]	3·2	12·9	5·9
10	6 47·5	6 48·6	6 28·9	1·0	0·5	7·0	3·2	13·0	6·0
11	6 47·8	6 48·9	6 29·2	1·1	0·5	7·1	3·3	13·1	6·0
12	6 48·0	6 49·1	6 29·4	1·2	0·6	7·2	3·3	13·2	6·1
13	6 48·3	6 49·4	6 29·7	1·3	0·6	7·3	3·3	13·3	6·1
14	6 48·5	6 49·6	6 29·9	1·4	0·6	7·4	3·4	13·4	6·1
15	6 48·8	6 49·9	6 30·1	1·5	0·7	7·5	3·4	13·5	6·2
16	6 49·0	6 50·1	6 30·4	1·6	0·7	7·6	3·5	13·6	6·2
17	6 49·3	6 50·4	6 30·6	1·7	0·8	7·7	3·5	13·7	6·3
18	6 49·5	6 50·6	6 30·8	1·8	0·8	7·8	3·6	13·8	6·3
19	6 49·8	6 50·9	6 31·1	1·9	0·9	7·9	3·6	13·9	6·4
20	6 50·0	6 51·1	6 31·3	2·0	0·9	8·0	3·7	14·0	6·4
21	6 50·3	6 51·4	6 31·6	2·1	1·0	8·1	3·7	14·1	6·5
22	6 50·5	6 51·6	6 31·8	2·2	1·0	8·2	3·8	14·2	6·5
23	6 50·8	6 51·9	6 32·0	2·3	1·1	8·3	3·8	14·3	6·6
24	6 51·0	6 52·1	6 32·3	2·4	1·1	8·4	3·9	14·4	6·6
25	6 51·3	6 52·4	6 32·5	2·5	1·1	8·5	3·9	14·5	6·6
26	6 51·5	6 52·6	6 32·8	2·6	1·2	8·6	3·9	14·6	6·7
27	6 51·8	6 52·9	6 33·0	2·7	1·2	8·7	4·0	14·7	6·7
28	6 52·0	6 53·1	6 33·2	2·8	1·3	8·8	4·0	14·8	6·8
29	6 52·3	6 53·4	6 33·5	2·9	1·3	8·9	4·1	14·9	6·8
30	6 52·5	6 53·6	6 33·7	3·0	1·4	9·0	4·1	15·0	6·9
31	6 52·8	6 53·9	6 33·9	3·1	1·4	9·1	4·2	15·1	6·9
32	6 53·0	6 54·1	6 34·2	3·2	1·5	9·2	4·2	15·2	7·0
33	6 53·3	6 54·4	6 34·4	3·3	1·5	9·3	4·3	15·3	7·0
34	6 53·5	6 54·6	6 34·7	3·4	1·6	9·4	4·3	15·4	7·1
35	6 53·8	6 54·9	6 34·9	3·5	1·6	9·5	4·4	15·5	7·1
36	6 54·0	6 55·1	6 35·1	3·6	1·7	9·6	4·4	15·6	7·2
37	6 54·3	6 55·4	6 35·4	3·7	1·7	9·7	4·4	15·7	7·2
38	6 54·5	6 55·6	6 35·6	3·8	1·7	9·8	4·5	15·8	7·2
39	6 54·8	[illegible]	6 35·9	3·9	1·8	9·9	4·5	15·9	7·3
40	6 55·0	6 56·1	6 36·1	4·0	1·8	10·0	4·6	16·0	7·3
41	6 55·3	6 56·4	6 36·3	4·1	1·9	10·1	4·6	16·1	7·4
42	6 55·5	6 56·6	6 36·6	4·2	1·9	10·2	4·7	16·2	7·4
43	6 55·8	6 56·9	6 36·8	4·3	2·0	10·3	4·7	16·3	7·5
44	6 56·0	6 57·1	6 37·0	4·4	2·0	10·4	4·8	16·4	7·5
45	6 56·3	6 57·4	6 37·3	4·5	2·1	10·5	4·8	16·5	7·6
46	6 56·5	6 57·6	6 37·5	4·6	2·1	10·6	4·9	16·6	7·6
47	6 56·8	6 57·9	6 37·8	4·7	2·2	10·7	4·9	16·7	7·7
48	6 57·0	6 58·1	6 38·0	4·8	2·2	10·8	5·0	16·8	7·7
49	6 57·3	6 58·4	6 38·2	4·9	2·2	10·9	5·0	16·9	7·7
50	6 57·5	6 58·6	6 38·5	5·0	2·3	11·0	5·0	17·0	7·8
51	6 57·8	6 58·9	6 38·7	5·1	2·3	11·1	5·1	17·1	7·8
52	6 58·0	6 59·1	6 39·0	5·2	2·4	11·2	5·1	17·2	7·9
53	6 58·3	6 59·4	6 39·2	5·3	2·4	11·3	5·2	17·3	7·9
54	6 58·5	6 59·6	6 39·4	5·4	2·5	11·4	5·2	17·4	8·0
55	6 58·8	6 59·9	6 39·7	5·5	2·5	11·5	5·3	17·5	8·0
56	6 59·0	7 00·1	6 39·9	5·6	2·6	11·6	5·3	17·6	8·1
57	6 59·3	7 00·4	6 40·2	5·7	2·6	11·7	5·4	17·7	8·1
58	6 59·5	7 00·6	6 40·4	5·8	2·7	11·8	5·4	17·8	8·2
59	6 59·8	7 00·9	6 40·6	5·9	2·7	11·9	5·5	17·9	8·2
60	7 00·0	7 01·1	6 40·9	6·0	2·8	12·0	5·5	18·0	8·3

Figura 6.15: Tábua de Acréscimos e Correções do Almanaque Náutico

6.6 Como Traçar a Linha de Posição Astronômica

Nos capítulos anteriores aprendemos a obter a altura de um astro e a resolver o triângulo de posição da Navegação Astronômica decorrente dessa observação. Isso nos conduziu a uma linha de posição (LDP) denominada reta de altura do Astro. O propósito deste capítulo é explicar um pouco mais sobre essa LDP, mostrando que, na verdade, a observação de um astro em uma posição qualquer determina uma circunferência de igual altura (ou circunferência de posição), em torno do ponto subastral (PSA) ou ponto subestelar (posição geográfica do astro (GP), no instante da observação).

O conceito de linha de posição astronômica ou reta de altura é fundamental para que se saiba realmente o que se está fazendo, ao observar um astro, calcular os elementos determinativos da reta de altura e traçá-la na carta náutica[4] ou folha de plotagem.[5]

6.6.1 Circunferência de posição - uma perspectiva geométrica

Imaginemos um mastro vertical perpendicular a uma superfície plana e nivelada (Figura 6.16), e que um fio foi esticado do seu tope até a superfície abaixo, de modo que o ângulo formado pelo fio e a superfície seja 30°. Se o fio for girado em torno da base do mastro, a figura descrita será uma circunferência e, de qualquer ponto desta, o ângulo entre o tope do mastro e a superfície será de 30°, como podemos observar na figura.

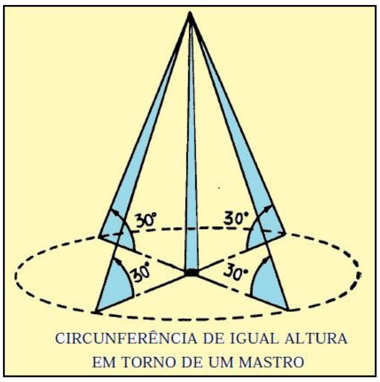


Figura 6.16: Circunferência de igual altura em torno de um mastro

A título de ilustração, imaginemos que um observador se posicione próximo do mastro vertical, portando um sextante, e busque um ponto onde o ângulo vertical entre

[4]Carta náutica é uma representação da superfície terrestre sobre um plano, mas que foi especialmente traçada para ser usada em navegação ou outra atividade técnica ou científica, servindo não só para ser examinada, mas, principalmente, para que se trabalhe sobre ela na resolução de problemas gráficos, onde os principais elementos serão ângulos e distâncias, ou na determinação da posição através das coordenadas geográficas (Latitude e Longitude).

[5]Folhas de plotagens são modelos criados específicamente para se traçar linhas de posicão obtidas na navegação.

o tope e a base do mastro seja 30º. Se for medida a distância deste ponto ao pé do mastro e traçada em torno do mastro uma circunferência tendo essa distância como raio, de qualquer ponto de tal circunferência o ângulo vertical entre o tope e a base do referido mastro será sempre de 30º. Assim, ter-se-á traçado em torno do mastro a circunferência de igual altura de 30º, mostrada na Figura 6.16.

Suponhamos agora, que o tope do mastro foi estendido até uma distância infinita da base e que existe um astro no tope do mastro. Os raios de luz provenientes do astro, situado a uma distância infinita da superfície, serão praticamente paralelos uns aos outros, Figura 6.17. Como a superfície abaixo é a superfície da Terra, aproximadamente esférica, as medidas dos ângulos verticais de incidência dos raios são feitas em relação a um plano tangente à superfície da esfera terrestre, isto é, horizonte visual.

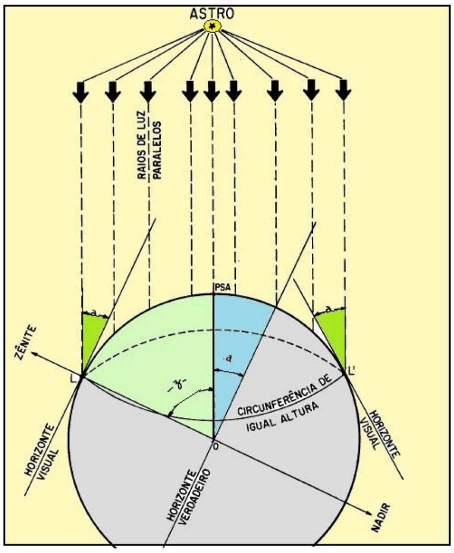


Figura 6.17: Circunferência de igual altura - na superfície da Terra

Dessa forma, o ângulo vertical varia de 90º, na base do mastro (ponto subastral, ponto subestelar ou posição geográfica do astro), até 00º(zero), em todos os pontos da superfície da esfera terrestre situados a 90º da base. O ponto subastral (PSA) representa a projeção do astro sobre a superfície da esfera terrestre e pode ser localizado na superfície da Terra por suas coordenadas geográficas, que a Latitude coincide com a Declinação do astro e a Longitude com o Ângulo no Polo em Greenwich do astro, no instante da observação. Como se sabe, o Ângulo no Polo em Greenwich do astro (t_1G) é igual ao Ângulo Horário em Greenwich (AHG ou tG) com o astro a Oeste e igual a 360º $- AHG$, com o astro a Leste.

Assim, a circunferência de igual altura é uma circunferência na superfície da Terra, centrada na posição geográfica do astro, isto é, no ponto subastral, de onde se observa o astro sob a mesma altura.

Como o astro é considerado estar a uma distância infinita da Terra, sendo seus raios luminosos paralelos entre si, o ângulo vertical medido na superfície da Terra é igual ao ângulo medido no centro da Terra. Este ângulo é a altura verdadeira (a) do astro, isto é, sua distância angular acima do horizonte verdadeiro, conforme indicado na Figura 6.17.

A distância angular do horizonte verdadeiro ao Zênite de um determinado local é sempre 90º. A distância angular do horizonte verdadeiro ao ponto subastral (posição geográfica do astro) é igual a altura verdadeira (a) do astro, como pode ser verificado na Figura 6.17. O seu complemento, isto é, $90^o - a$, ou seja, a distância zenital (z) do astro, é o raio da circunferência de igual altura. Desta forma, ao observarmos um astro com o sextante num determinado instante, obtendo, após as correções, sua altura verdadeira (a), estamos, na realidade, definindo uma linha de posição (LPD) constituída por uma circunferência de igual altura, com centro na posição geográfica do astro (ponto subastral) e raio igual à distância zenital do astro ($z = 90^o - a$) naquele instante.

A distância zenital (z) é medida ao longo de um círculo máximo (o círculo máximo da esfera terrestre entre a posição do observador e o ponto subastral, isto é, a projeção na superfície da Terra do vertical do astro). Então, o raio da circunferência de igual altura pode ser expresso em milhas náuticas, sendo 1' de arco igual a 1 milha.

Por conseguinte, no exemplo anterior, $a = 30^o$, $z = 90^o - a = 90^o - 30^o = 60^o$. Assim, $z = 60$ x $60 = 3600$ milhas náuticas. Daí, quando observamos um astro na altura verdadeira de 30º, estamos, na realidade, definindo uma linha de posição (LDP) constituída por uma circunferência de igual altura centrada na posição geográfica do astro (ponto subastral) e de raio igual a 60º ou 3.600 milhas náuticas.

Uma vez que conhecemos as coordenadas da posição geográfica do astro no instante da observação (AHG e Dec), obtidas por meio do Almanaque Náutico, poderíamos plotar o ponto subastral em um globo terrestre e traçar, com um compasso de pontas curvas, a circunferência de igual altura, com centro no ponto subastral e raio igual a distância zenital verdadeira do astro, conforme mostrado na Figura 6.18. Esta circunferência de igual altura seria sua linha de posição astronômica, representando o lugar geométrico dos pontos da superfície da Terra sobre o qual estaria localizada sua posição.

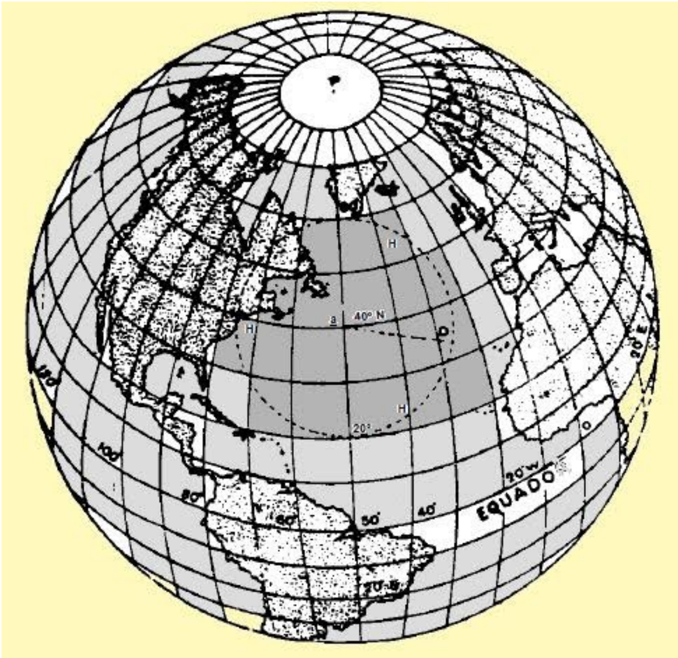


Figura 6.18: Circunferência de igual altura (LDP astronômica)

Na Figura 6.18 é apresentada a circunferência de posição traçada com o ponto subastral de um astro, em um determinado instante, localizado na Latitude 40°N e Longitude de 050°W e raio de 20° (1.200 milhas). Neste instante, todos os observadores situados sobre a circunferência traçada mediriam a altura de 70° para o astro visado ($a = 90^o - z = 90^o - 20^o = 70^o$). Todos os observadores que se acham no interior da citada circunferência medem, no momento considerado, alturas maiores que 70°; um observador localizado exatamente no ponto subastral (Figura 6.18, ponto "a") tem o astro no Zênite e registra altura de 90°. Os observadores localizados fora da circunferência, medem alturas menores que 70° e os que se acham sobre uma circunferência equidistante de 90° do ponto subastral, observam uma altura de 0° (astro no horizonte).

Observando dois astros e traçando as circunferências de alturas iguais em torno dos respectivos ponto subastrais, as duas circunferências vão, normalmente, cruzar-se em dois pontos, estando a posição do observador em uma das interseções, provavelmente a mais próxima da posição estimada do navio no instante da observação, como mostrado na Figura 6.19. Se os dois pontos de interseção estiverem tão próximos que puderem causar confusão ou ambiguidade na determinação da posição astronômica, a dúvida poderia ser resolvida pela observação de um terceiro astro e o traçado de uma terceira circunferência de altura iguais.

Apesar de o método acima descrito, isto é, a solução geométrica do problema, ser de fácil compreensão, não é prático para uso a bordo, pois, para obter a posição astronômica com a precisão exigida seria necessário um globo terrestre de dimensões muito grandes.

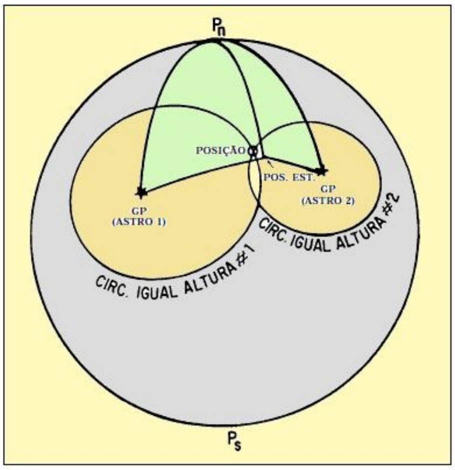


Figura 6.19: Posição astronômica - Interseção de duas circunferências de alturas iguais

Suponhamos que obtivéssemos as alturas $a_1 = 30^o$ e $a_2 = 40^o$ para dois astros, isso resultaria em $z_1 = 60^o$ e $z_2 = 50^o$ respectivamente, e ainda em raios z_1=3.600 milhas e z_2= 3.000 milhas. Esses valores, para serem traçados com um erro menor que 1 milha, resultaria em dispor de um globo com diâmetro muito grande, incompatível com o espaço físico de bordo. Por outro lado, se escolhessemos astros com elevadas alturas; $a_1 = 87^o$ e $a_2 = 85^o$, obteríamos z_1= 180 milhas e z_2=300 milhas, o que seria uma distância razoável para ser utilizada como raio das circunferências de posição em cartas náuticas de pequena escala. Entretanto, normalmente não se observam astros com alturas maiores que 65° ou 70°, pela dificuldade de definir claramente o vertical do astro com o sextante.

Por outro lado, a solução analítica, que consiste na resolução de um sistema de duas equações com duas incógnitas (Latitude e Longitude do observador), sendo longa e complicada, também não era utilizada na prática corrente da navegação astronômica até a introdução dos computadores e calculadoras. Atualmente, mesmo dispondo destes auxílios, em geral, adota-se para cálculo das retas de altura e determinação da posição astronômica, uma combinação da solução analítica com uma solução gráfica sobre a carta náutica ou folha de plotagem, conforme mostrado a seguir.

6.6.2 Circunferência de posição - representação em carta náutica

Segundo MIGUENS (1999), as circunferências de posição ou circunferências de alturas iguais podem assumir diversos lugares geométrico quando representadas nas cartas náuticas de Mercator[6], Figura 6.20. Poderão ser obtidas circunferências, elipses, pará-

[6]A projeção de Mercator é um tipo de projeção cilíndrica do globo terrestre. Nessa projeção, os meridianos são planificados na forma de linhas retas paralelas verticais que são horizontalmente equidistantes, ao passo que os paralelos são planificados na forma de linhas retas paralelas horizontais, de modo que a distância vertical entre dois paralelos sucessivos é tanto menor quanto mais próximos esses paralelos estiverem da linha do equador.

bolas e outras curvas conforme a posição do polo terrestre em relação à circunferência de posição. Devido a representação complexa da curva de alturas iguais na carta náutica de Mercator, já foi demonstrado em trabalhos mais específicos a possibilidade de substituí-las, em um pequeno trecho, por um arco de circunferência com o mesmo raio de curvatura que a circunferência de altura, no referido trecho (Circunferência Osculatriz) e ainda, esta circunferência pode ser substituída por uma linha reta, perpendicular ao raio no ponto de tangência, que estará próximo da posição estimada do observador, Figura 6.21.

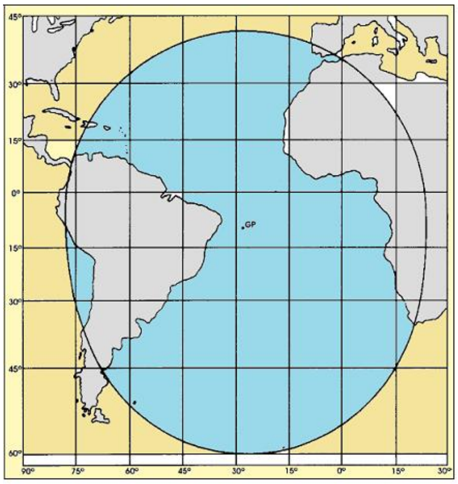


Figura 6.20: Circunferência de alturas iguais traçada em uma carta de Mercator

Esta reta tangente, nas proximidades da posição estimada, é denominada reta de altura e representa o lugar geométrico das posições do navio, quando se efetua a observação da altura de um astro, em um determinado instante.

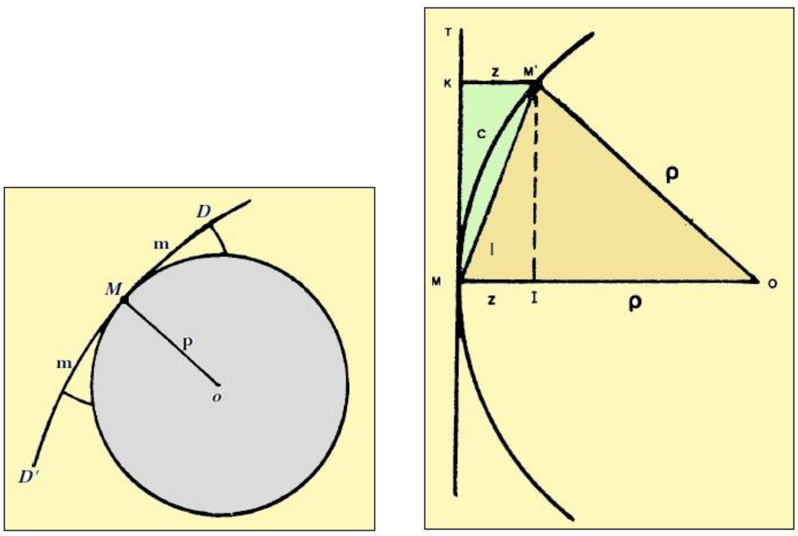


Figura 6.21: Esquerda-circunferência de altura aproximando para circunferência osculatriz Direita-circunferência osculatriz aproximando para a reta tangente

Orientação da Reta de Altura

O triângulo de posição ou triângulo esférico de posição, como já descrevemos, é composto dos seguintes elementos na Esfera Celeste:

- Vértices (Polo Elevado Celeste - Pn ou Ps; Astro observado - M e Zênite da posição estimada do observador - Z)

- Lados (Distância polar do astro - p; Distância zenital do astro - z e Colatitude - c)

- Ângulos (Ângulo no Polo - t_1; Ângulo no Zênite - Z e Ângulo paralático - Ap)

Quando se projeta o triângulo de posição da Esfera Celeste para a Esfera Terrestre (Figura 6.22), seus vértices tornam-se, então:

- Polo elevado terrestre (Pn ou Ps)
- Posição estimada (ou assumida) do observador (AP)
- Ponto subastral (PSA) ou posição geográfica do astro observado (GP)

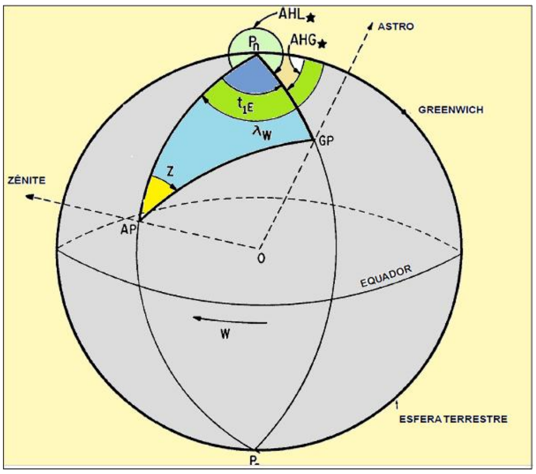


Figura 6.22: Triângulo de Posição projetado na Esfera Terrestre

Também já foi apresentado que, para resolver o triângulo de posição, é necessário conhecer 2 lados e o ângulo formado entre eles. Ademais, conforme mencionado, resolve-se o triângulo assumindo-se uma posição (geralmente a posição estimada do observador no instante de medição da altura do astro). Assim, tornam-se conhecidos os seguintes elementos do triângulo de posição:

- Colatitude: $c = 90^o - \varphi_e$, onde φ_e representa a Latitude estimada;
- Distância Polar do Astro: $p = 90^o \pm Dec*$; e
- Ângulo no Polo do Astro: $t_1(W) = AHL*$ e $t_1(E) = 360^o - AHL*$

Desta forma, conhecem-se 2 lados (colatitude e distância polar) e o ângulo formado entre eles (Ângulo no Polo). Pode-se, então, calcular os 2 outros elementos do triângulo que nos interessam:

- Ângulo no Zênite (Z)
- Distância Zenital (z)

Com estes elementos, obtêm-se o Azimute Verdadeiro (Az) do astro (a partir do Ângulo no Zênite) e a altura calculada (a_e) do astro (a partir da distância zenital).

A Figura 6.23 mostra, no lado esquerdo, o triângulo de posição projetado na Esfera Terrestre, com a circunferência de alturas iguais traçada na superfície da Terra e, no seu lado direito, a representação da curva de posição (curva de alturas) CC' na carta de Mercator.

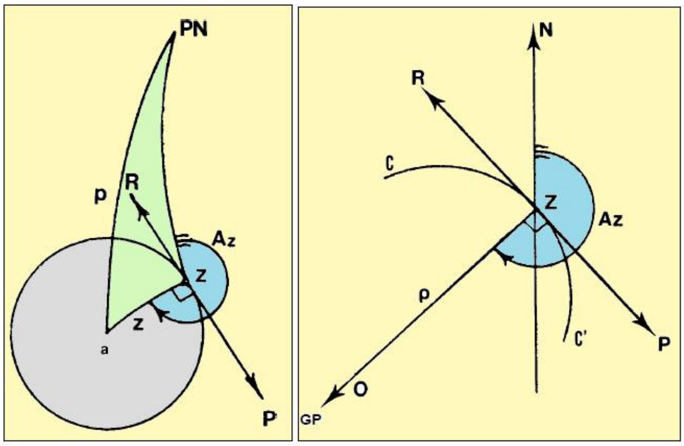


Figura 6.23: Circunferência de Posição na Esfera Terrestre e na Carta de Mercator

Sendo a reta RP uma tangente à circunferência de alturas iguais, nas proximidades da posição estimada, ela será normal ao raio da circunferência no ponto de tangência (distância zenital), que se orienta segundo o Azimute Verdadeiro (Az) do astro, no instante da observação, conforme a figura da esquerda. Como a projeção de Mercator é conforme, isto é, um ângulo na superfície da Terra é igual à sua representação na carta, resulta que a reta de altura RP será normal à projeção do vertical do astro na carta de Mercator, o que equivale a afirmar que a reta de altura é perpendicular ao Azimute Verdadeiro (Az) do astro, no instante da observação.

Então, da posição assumida (AP) plotada na carta, pode-se traçar uma linha na direção do Azimute Verdadeiro (Az) do astro no momento da observação, e afirmar que esta linha representa um segmento do raio da circunferência de alturas iguais correspondente ao astro observado e que, portanto, a reta de altura será perpendicular a ela (Figura 6.24).

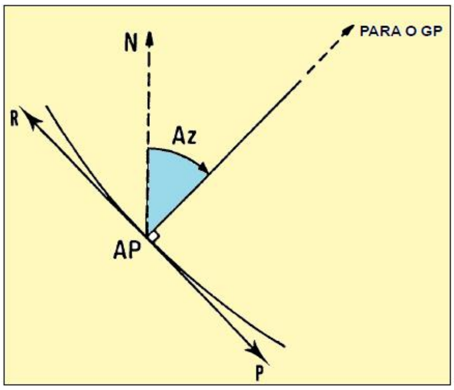


Figura 6.24: Traçado da Reta de Altura

Elementos determinativos da Reta de Altura. Ponto Marcq Saint-Hilaire - Método do Vertical Estimado

Na subseção anterior verificamos que dentro de certos parâmetros a curva de alturas iguais pode ser substituída pela reta de altura (ou reta de posição) que é tangente á curva e perpendicular ao Azimute Verdadeiro do astro no instante da observação.

Conceituaremos como ponto determinativo ao ponto pertencente a uma reta de altura e utilizado para o seu traçado na carta náutica, especificamente estudaremos o ponto determinativo Marcq Saint-Hilaire.[7]

Apresentamos anteriormente que o resultado da solução do triângulo de posição, considerando uma posição estimada no instante da observação, é o valor do Azimute Verdadeiro (Az) e a altura calculada (a_e) do astro. Dessa maneira, inicia-se de uma posição estimada (ponto mais próximo que se dispõe da verdadeira posição do navio) para se obter o ponto determinativo, pelo qual deve ser traçada a reta de altura na carta náutica.

Por outro lado, há uma diferença entre a altura medida com o sextante no momento da observação e a altura calculada (a_e), haja vista que o observador, no momento da observação, não está exatamente na posição assumida. Sendo assim, a reta de altura não passa exatamente na posição assumida (AP).

Se a altura verdadeira (a) do astro é maior que a altura calculada(a_e), o raio da circunferência de igual altura, ou seja, a distância zenital verdadeira ($z = 90^o - a$), será menor que o raio da circunferência de igual altura correspondente à altura calculada ($z_e = 90^o - a_e$) e a reta de altura estará, realmente, mais próxima do ponto subastral (GP

[7]Em 1875, o Comandante Marcq Saint-Hilaire, na França, introduziu o conceito de circunferências de alturas iguais, no qual é baseado o método das alturas, que, por esta razão, é denominado método Marcq Saint-Hilaire. O método das alturas utiliza, como ponto determinativo da linha de posição (denominada reta de altura), um ponto marcado sobre o azimute do astro, traçado a partir da posição estimada (ou assumida), a uma distância igual à diferença de alturas entre a altura calculada e a altura observada do astro.

do astro), isto é, estará na direção do GP, na direção do Azimute Verdadeiro do astro, conforme mostrado na Figura 6.25. Por outro lado, se a altura verdadeira (a) do astro é menor que a altura calculada (a_e), ocorrerá o oposto, isto é, o raio da circunferência de igual altura correspondente à altura verdadeira ($z = 90^o - a$) será maior que o raio da circunferência de igual altura correspondente à altura calculada ($z_e = 90^o - a_e$) e a nossa reta de altura estará, realmente, mais afastada do GP do astro que a posição assumida (AP), isto é, estará na direção oposta ao GP, como mostra ainda a Figura 6.25.

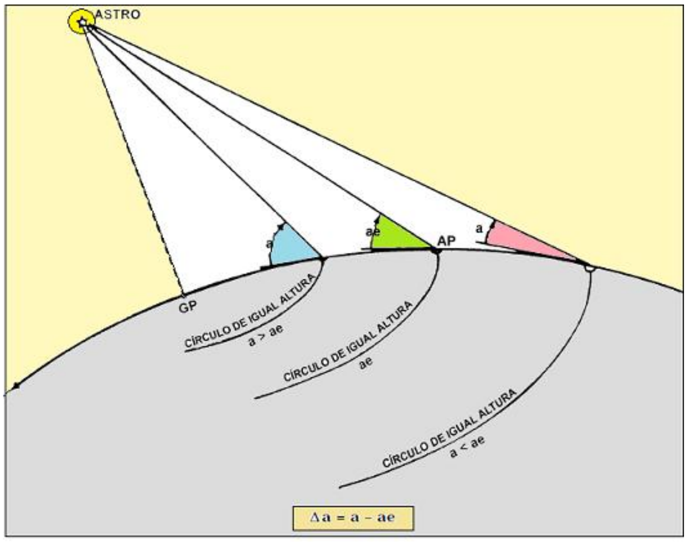


Figura 6.25: Diferença de Alturas

Conforme apresentado na Figura 6.25 a diferença entre a posição assumida (AP) e o ponto onde passa a reta de altura é:

$$\Delta a = z_e - z$$

$$\Delta a = (90^o - a_e) - (90^o - a)$$

$$\Delta a = a - a_e$$

Então, podemos obter o ponto determinativo da reta de altura da seguinte maneira:

- plotar na carta a posição assumida (AP);
- a partir da posição assumida (AP), traçar o Azimute Verdadeiro (A_z) do astro, obtido do Ângulo no Zênite (Z), determinado quando se resolve o triângulo de posição;
- calcular $\Delta a = a - a_e$. Sendo a a altura verdadeira do astro (obtida da altura instrumental, medida com o sextante) e a_e a altura calculada (obtida da solução do triângulo de posição);

- sobre o Azimute Verdadeiro do astro traçado na carta, marcar uma distância igual à diferença de alturas (Δa) na direção do Azimute, se $a > a_e$; ou na direção oposta, se $a < a_e$;
- o ponto assim obtido é o ponto determinativo da reta de altura; e
- passando por este ponto, traçar uma perpendicular ao Azimute Verdadeiro do astro. Esta será, então, a nossa reta de altura.

O Azimute Verdadeiro (A_z) do astro e a diferença de alturas ($\Delta a = a - a_e$) são denominados elementos determinativos da reta de altura.

O ponto determinativo obtido desta maneira é denominado Ponto Marcq Saint-Hilaire e o método descrito para a sua obtenção recebe o nome de "Método do Vertical Estimado".

Dessa maneira, ao se observar o astro, obtém-se a altura instrumental (a_i) e a hora de observação. Em seguida, esta altura é transformada em altura verdadeira (a) e o triângulo de posição é resolvido (para a hora da observação e para a posição estimada, ou assumida), determinando-se o Azimute Verdadeiro (A_z) e a altura calculada (a_e) do astro. Podem, então, ser obtidos os elementos deteminativos da reta de altura, $\Delta a = a - a_e$ e A_z. O ponto determinativo é plotado na carta náutica, marcando-se, a partir da posição assumida (AP), a diferença de alturas (Δa) na direção do Azimute Verdadeiro do astro, se $a > a_e$, Figura 6.26 - esquerda; ou na sua recíproca, se $a < a_e$, Figura 6.26 - direita. Traça-se, então, a reta de altura, na perpendicular ao Azimute Verdadeiro.

Convém lembrar que a linha de posição (reta de altura), individualmente, não é capaz de fornecer a posição do navio. Para tal, são combinadas três ou mais LDP e obtido o seu ponto de interseção.

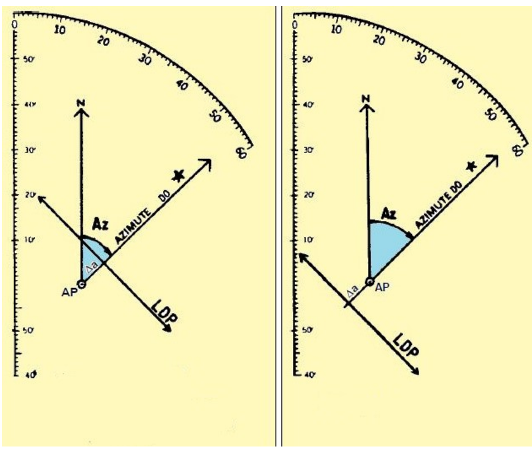


Figura 6.26: Ponto Determinativo da Reta de Altura e Traçado da LDP

6.7 Resolvendo o Triângulo de Posição pela Tábua Radler

O método das alturas ou método Marcq Saint-Hilaire, como já vimos anteriormente, utiliza, como ponto determinativo da linha de posição (denominada reta de altura), um ponto marcado sobre o azimute do astro, traçado a partir da posição estimada, a uma distância igual a diferença de alturas entre a altura calculada e a altura observada do astro. A partir dai, foram desenvolvidos vários métodos para solução do triângulo de posição, para uso com este método de obtenção do ponto determinativo da reta de altura.

Alguns desses métodos, por conveniência trigonométrica, dividiam o triângulo de posição em dois triângulos esféricos retângulos, baixando uma perpendicular ao lado oposto, de um dos três vértices do triângulo. Entre os primeiros criadores desses métodos destaca-se o brasileiro, Comandante Radler de Aquino.

Radler de Aquino, numa tentativa de simplificar as soluções do triângulo de posição, baixou uma perpendicular do astro para o meridiano celeste, dividindo o triângulo esférico de posição em dois triângulos retângulos e permitindo consolidar em um só volume as soluções para todas as combinações possíveis de Latitude, Declinação e Ângulo no Polo.

Publicadas inicialmente com o título de Tábuas de Altura e Azimute, as Tábuas Radler receberam, posteriormente, o título de Tábuas Náuticas e Aeronáuticas. Sua primeira edição foi publicada no Rio de Janeiro, em 1903, e na Inglaterra, em 1912. Em 1927 foi publicada uma edição norte-americana e, a partir dai, foi adotada na U.S. Naval Academy de Annapolis e na U.S.Navy. Diversas outras edições foram publicadas em vários países fazendo das Tábuas Radler uma ferramenta amplamente difundida aos navegadores astronômicos de todo o mundo. Posterioremente foram criadas uma variedade de outras tábuas de observação reunidas em uma só publicaçao denominada Almanaque Náutico. O primeiro Almanaque Náutico inglês e americano data de 1958 e o primeiro Almanaque Náutico editado no Brasil data de 1944. MIGUENS (1999)

6.7.1 Tábuas Radler - Trigonometria esférica e instruções de uso

Considere o triângulo esférico PAZ da Figura 6.27. Se traçarmos um círculo máximo passando pelo vértice A que seja perpendicular ao meridiano PZ do observador, obteremos dois triângulos esféricos retângulos PAM e ZAM.

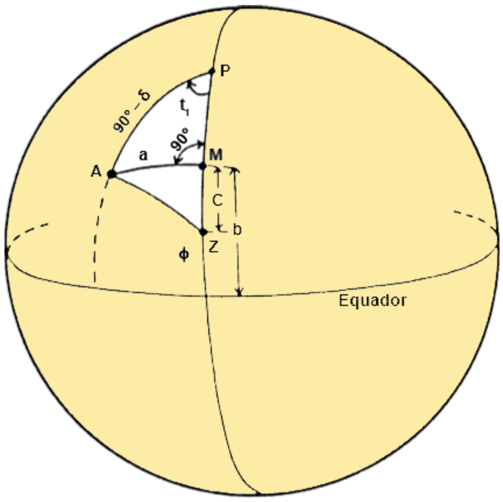


Figura 6.27: Trigonometria Esférica da Tábua Radler

Consideremos como elementos conhecidos do triângulo PAM o lado $PA = 90^{\rm o} - Dec$ e o Ângulo no Polo (t_1). Dessa forma, podemos determinar todos os outros elementos do triângulo porém, vamos nos ater apenas aos lados de interesse a e b, que são obtidos por meio das relações abaixo, apresentadas nos livros didáticos de Navegação Astronômica.

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} t_1.\ \cos(Dec) \tag{6.6}$$

$$\operatorname{cotg} b = \cos t_1.\ \operatorname{cotg}(Dec) \tag{6.7}$$

6.7.2 Dedução da Fórmula 6.6

Consideraremos o triângulo retângulo PAM com ângulos e vértices P, A e M e lados opostos, respectivamente, a, PM e $(90^{\rm o} - Dec)$, sendo $M = 90^{\rm o}$ e $P = t_1$.

Aplicando a Lei dos Senos aos ângulos M e P e seus respectivos ângulos opostos, Fórmula 4.3, teremos:

$$\frac{\operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} M}{\operatorname{sen}(90^{\rm o} - Dec)}$$

Como $\operatorname{sen} M = \operatorname{sen} 90^{\rm o} = 1$ e $P = t_1$, temos

$$\frac{\operatorname{sen} t_1}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{sen}(90^{\rm o} - Dec)}$$

Considerando ainda que $\operatorname{sen}(90^{\rm o} - Dec) = \cos(Dec)$, resulta em

$$\frac{\operatorname{sen} t_1}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\cos(Dec)}$$

E, finalmente,

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} t_1.\ \cos(Dec)$$

6.7.3 Dedução da Fórmula 6.7

Consideraremos ainda o mesmo triângulo da demonstração anterior e, aplicando duas vezes a Lei dos cossenos, Fórmula 4.1, teremos:

$$\cos(90^o - Dec) = \cos a. \cos(PM) + \operatorname{sen} a. \operatorname{sen}(PM). \cos M$$

e

$$\cos a = \cos(90^o - Dec). \cos(PM) + \operatorname{sen}(90^o - Dec). \operatorname{sen}(PM). \cos P$$

Fazendo $P = t_1$ e substituindo $\cos a$ obtido da segunda expressão na primeira, teremos

$$\begin{aligned}
\cos(90^o - Dec) =& [\cos(90^o - Dec). \cos(PM) + \operatorname{sen}(90^o - Dec). \operatorname{sen}(PM). \cos t_1]. \cos(PM) + \\
& \operatorname{sen} a. \operatorname{sen}(PM). \cos M \\
\cos(90^o - Dec) =& \cos(90^o - Dec). \cos^2(PM) + \operatorname{sen}(90^o - Dec). \operatorname{sen}(PM). \cos(PM). \cos t_1 + \\
& \operatorname{sen} a. \operatorname{sen}(PM). \cos M
\end{aligned}$$

O que equivale a,

$$\begin{aligned}
\cos(90^o - Dec) - \cos(90^o - Dec). \cos^2(PM) =& \operatorname{sen}(90^o - Dec). \operatorname{sen}(PM). \cos(PM). \cos t_1 + \\
& \operatorname{sen} a. \operatorname{sen}(PM). \cos M \\
\cos(90^o - Dec)[1 - \cos^2(PM)] =& \operatorname{sen}(90^o - Dec). \operatorname{sen}(PM). \cos(PM). \cos t_1 + \\
& \operatorname{sen} a. \operatorname{sen}(PM). \cos M \\
\cos(90^o - Dec)[\operatorname{sen}^2(PM)] =& \operatorname{sen}(90^o - Dec). \operatorname{sen}(PM). \cos(PM). \cos t_1 + \\
& \operatorname{sen} a. \operatorname{sen}(PM). \cos M
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $\operatorname{sen}(PM)$ temos,

$$\cos(90^o - Dec)[\operatorname{sen}(PM)] = \operatorname{sen}(90^o - Dec). \cos(PM). \cos t_1 + \operatorname{sen} a. \cos M$$

Dividindo ambos os membros por $\operatorname{sen}(90^o - Dec)$ obteremos,

$$\operatorname{cotg}(90^o - Dec)[\operatorname{sen}(PM)] = \cos(PM). \cos t_1 + \frac{\operatorname{sen} a. \cos M}{\operatorname{sen}(90^o - Dec)}$$

Aplicando a Lei do Senos no triângulo PAM temos,

$$\frac{\operatorname{sen} t_1}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} M}{\operatorname{sen}(90^{\circ} - Dec)}$$

Substituindo $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(90^{\circ} - Dec)} = \dfrac{\operatorname{sen} t_1}{\operatorname{sen} M}$ na equação anterior, obteremos

$$\operatorname{cotg}(90^{\circ} - Dec)[\operatorname{sen}(PM)] = \cos(PM).\cos t_1 + \frac{\operatorname{sen} t_1}{\operatorname{sen} M}.\cos M$$

E ainda, fazendo $\operatorname{cotg} M = \dfrac{\cos M}{\operatorname{sen} M}$ tem-se

$$\operatorname{cotg}(90^{\circ} - Dec)[\operatorname{sen}(PM)] = \cos(PM).\cos t_1 + \operatorname{sen} t_1.\operatorname{cotg} M$$

Utilizando M=90º para o triângulo PAM, e como $\operatorname{cotg} 90^{\circ} = 0$, resulta em

$$\operatorname{cotg}(90^{\circ} - Dec)[\operatorname{sen}(PM)] = \cos(PM).\cos t_1 + \operatorname{sen} t_1.0$$

$$\operatorname{cotg}(90^{\circ} - Dec)[\operatorname{sen}(PM)] = \cos(PM).\cos t_1$$

Dividindo agora ambos os membros por $\operatorname{sen}(PM)$

$$\operatorname{cotg}(90^{\circ} - Dec) = \cos t_1.\operatorname{cotg}(PM)$$

Fazendo agora $PM = (90^{\circ} - b)$ e $\operatorname{cotg}(PM) = \operatorname{cotg}(90^{\circ} - b)$ temos

$$\operatorname{cotg}(90^{\circ} - Dec) = \cos t_1.\operatorname{cotg}(90^{\circ} - b)$$

E como $\operatorname{cotg}(90^{\circ} - Dec) = \operatorname{tg}(Dec)$ e $\operatorname{cotg}(90^{\circ} - b) = \operatorname{tg} b$ resulta em

$$\operatorname{tg}(Dec) = \cos t_1.\operatorname{tg} b$$

Logo,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(Dec)} = \frac{1}{\cos t_1.\operatorname{tg} b}$$

Então

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(Dec)} = \left(\frac{1}{\cos t_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{tg} b}\right)$$

E ainda,

$$\operatorname{cotg}(Dec) = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos t_1}$$

E, finalmente,

$$\operatorname{cotg} b = \cos t_1.\ \operatorname{cotg}(Dec)$$

O parâmetro b foi utilizado apenas para a comodidade de cálculos no triângulo de posição, e se refere à distância do pé da perpendicular M ao equador. O valor de c é determinado por meio de soma ou subtração da latitude (dependendo do triângulo).

Dessa forma, determinam-se os dois elementos do segundo triângulo (a e c) necessários à obtenção dos demais elementos. Deste triângulo, porém, só nos interessam o Ângulo no Zênite (Z), que será o Azimute Quadrantal do astro (A_{qd}), e o lado ZA= distância zenital ($90^o - a_e$).

As fórmulas que nos fornecerão esses elementos são:

$$\operatorname{sen} a_e = \cos a. \cos c \tag{6.8}$$

$$\operatorname{cotg} A_{qdt} = \operatorname{cotg} a. \operatorname{sen} c \tag{6.9}$$

6.7.4 Dedução da Fórmula 6.8

Consideraremos para a dedução o triângulo de posição ZAM, com vértices e ângulos Z, A e M e lados opostos respectivamente iguais a a, c e AZ. Sendo $M = 90^o$ e $Z = A_{qd}$.

Aplicando a Lei dos cossenos (Fórmula 4.1) teremos:

$$\cos(AZ) = \cos a. \cos c + \operatorname{sen} a. \operatorname{sen} c. \cos M$$

Como $M = 90^o$, $\quad \cos M = \cos 90^o = 0$ temos,

$$\cos(AZ) = \cos a. \cos c + \operatorname{sen} a. \operatorname{sen} c. \cos 90^o$$

$$\cos(AZ) = \cos a. \cos c + \operatorname{sen} a. \operatorname{sen} c.\ 0$$

$$\cos(AZ) = \cos a. \cos c$$

Sabendo ainda que a distância zenital $AZ = 90^o - a_e$, resulta em

$$\cos(90^o - a_e) = \cos a. \cos c$$

Como $\cos(90^o - a_e) = \operatorname{sen} a_e$, temos finalmente

$$\operatorname{sen} a_e = \cos a . \cos c$$

6.7.5 Dedução da Fórmula 6.9

Consideraremos para a demonstração ainda o triângulo ZAM, com vértices e ângulos Z, A e M e lados opostos respectivamente iguais a a, c e AZ. Sendo $M = 90^o$ e $Z = A_{qd}$.

Aplicando novamente, por duas vezes, a Lei dos cossenos (Fórmula 4.1) teremos:

$$\cos a = \cos c . \cos(AZ) + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen}(AZ) . \cos Z, \quad e$$

$$\cos(AZ) = \cos a . \cos c + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos M$$

Fazendo $Z = A_{qd}$ e substituindo $\cos(AZ)$ obtido da segunda expressão na primeira, teremos

$$\cos a = \cos c . [\cos a . \cos c + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos M] + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen}(AZ) . \cos Z$$

$$\cos a = \cos^2 c . \cos a + \cos c . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos M + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen}(AZ) . \cos Z$$

$$\cos a - \cos^2 c . \cos a = \cos c . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos M + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen}(AZ) . \cos Z$$

$$\cos a (1 - \cos^2 c) = \cos c . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos M + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen}(AZ) . \cos Z$$

$$\cos a . \operatorname{sen}^2 c = \cos c . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos M + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen}(AZ) . \cos Z$$

Dividindo ambos os membros por $\operatorname{sen} c$ teremos

$$\cos a . \operatorname{sen} c = \cos c . \operatorname{sen} a . \cos M + \operatorname{sen}(AZ) . \cos Z$$

Dividindo ambos os membros por $\operatorname{sen} a$ resulta em

$$\frac{\cos a . \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} = \cos c . \cos M + \frac{\operatorname{sen}(AZ) . \cos Z}{\operatorname{sen} a}$$

Como $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$, resulta em

$$\operatorname{cotg} a . \operatorname{sen} c = \cos c . \cos M + \frac{\operatorname{sen}(AZ) . \cos Z}{\operatorname{sen} a}$$

Aplicando a Lei do Senos no triângulo ZAM temos,

$$\frac{\operatorname{sen} Z}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} M}{\operatorname{sen}(AZ)}$$

Substituindo $\frac{\operatorname{sen}(AZ)}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} M}{\operatorname{sen} Z}$ na equação anterior, obteremos

$$\operatorname{cotg} a. \operatorname{sen} c = \cos c. \cos M + \frac{\operatorname{sen} M. \cos Z}{\operatorname{sen} Z}$$

E ainda, fazendo $\operatorname{cotg} Z = \frac{\cos Z}{\operatorname{sen} Z}$ tem-se

$$\operatorname{cotg} a. \operatorname{sen} c = \cos c. \cos M + \operatorname{cotg} Z. \operatorname{sen} M$$

Como M=90º para o triângulo ZAM, e ainda $\cos 90^{\circ} = 0 \; e \operatorname{sen} 90^{\circ} = 1$

$$\operatorname{cotg} a. \operatorname{sen} c = \cos c. \cos 90^{\circ} + \operatorname{cotg} Z. \operatorname{sen} 90^{\circ}$$

$$\operatorname{cotg} a. \operatorname{sen} c = \cos c.0 + \operatorname{cotg} Z.1$$

Então, finalmente temos

$$\operatorname{cotg} A_{qd} = \operatorname{cotg} a. \operatorname{sen} c$$

A solução do triângulo PAM, conforme explicitado nas Fórmulas 6.6 e 6.7, nos permitirá o cálculo dos valores de a e b por meio da utilização da conveniente Declinação (Dec) e Ângulo no Polo (t_1).

Após a determinação de b, pode-se calcular o valor de c com a utilização da Latitude. A partir dai, utilizamos os valores de a e c para entrada, na parte inferior das páginas da Tábua Radler, e obtenção dos valores de A_{qd}(Azimute Quadrantal) e a_e (altura do astro). Devemos atentar ao fato de que, de acordo com o triângulo obtido, existem regras para a combinação de b com a Latitude a fim de determinar o valor de c, como também para a transformação do Azimute obtido (Azimute Quadrantal) em Azimute Verdadeiro.

6.8 Exemplo prático

No dia 08/11/93, com o Veleiro de Oceano "Brekelé" no rumo 000º, velocidade 6,0 nós, na posição estimada Latitude 14º 12,0'S e Longitude 030º 03,0' W, são feitas as seguintes observações no crepúsculo vespertino:

$ESTRELA$	$HR.DOCRONOMETRO$	$ALT.INSTRUMENTAL$
$ACHERNAR$	$20^h\ 25^m\ 40,0^s$	$28^o\ 02,6'$
$ANTARES$	$20h\ 26^m\ 33,0^s$	$17^o\ 27,5'$
$DENEB$	$20h\ 27^m\ 37,0^s$	$29^o\ 09,0'$

Sabendo-se que $e_i = +1,6'$, $Elev = 5,0m$ e $Ea = +00^h00^m22,0^s$.

Calcular as retas de altura pela Tábua PUB.249 Volume I e determinar a posição astronômica da embarcação.

SOLUÇÃO:

a) O cálculo das retas de altura pela PUB.249 Volume I é muito simples. Entretanto, pode ser ainda mais facilitado pelo uso de um modelo de cálculo igual ao mostrado na Figura 6.28, onde encontramos a solução do problema. Os Elementos determinativos das retas de altura calculadas pela PUB.249 Volume I são:

$ESTRELA$	Δa	A_z	$POS.ASSUMIDA$
$ACHERNAR$	$+21,5'$	148^o	$Lat14^oS, Long030^o32,5'W$
$ANTARES$	$+34,1'$	246^o	$Lat14^oS, Long029^o45,8'W$
$DENEB$	$-12,0'$	348^o	$Lat14^oS, Long030^o01,8'W$

b) A plotagem da posição astronômica é mostrada na Figura 6.29 e suas coordenadas geográficas são:

Latitude 14º 14,7'S e Longitude 030º 12,0'W (Hleg = 1828).

c) Os extratos do Almanaque Náutico e da Tábua PUB-249 necessários a resolução do problema encontram-se expostos nas páginas do apêndice.

Observamos que, após a plotagem do ponto, este foi deslocado de 3 milhas para a direção 070º, em virtude da aplicação da correção para a precessão e nutação terrestre ("P e N correction"), fornecida pela Tábua da Figura 9.8 constante do apêndice.

MODELO DE RETA DE ALTURA PELA PUB-249 (VOLUME I)

NAVIO. VO "BREKELÉ" DATA. 08/11/93

LATITUDE ESTIMADA. 14° 12.0' S LONGITUDE ESTIMADA. 030° 03.0' W

RUMO. 000° VELOCIDADE. 6.0 nós

	DATA	08/11/93	08/11/93	08/11/93	
	ASTRO	ACHERNAR	ANTARES	DENEB	
1	HLeg obs	1826	1827	1828	
2	FUSO	+02 (θ)	+02 (θ)	+02 (θ)	
3	HCr obs	20-25-40.0	20-26-33.0	20-27-37.0	
4	Ea	+00-00-22.0	+00-00-22.0	+00-00-22.0	
5	HMG obs	20-26-02.0	20-26-55.0	20-27-59.0	
6	AHG$_\gamma$(h)	348° 00.9'	348° 00.9'	348° 00.9'	
7	corr (m/s)	06° 31.6'	06° 44.9'	07° 00.9'	
8	AHG$_\gamma$(h/m/s)	354° 32.5'	354° 45.8'	355° 01.8'	
9	LONG. ASSUMIDA	030° 32.5'W	029° 45.8'W	030° 01.8'W	
10	AHL (1°ARGUMENTO)	324°	325°	325°	
11	LAT. ASSUMIDA (2°ARG)	14° S	14° S	14° S	
	ELEM DA TÁBUA				
13	ALTURA CALCULADA (ae)	27° 37'	16° 48'	29° 17'	
14	AZIMUTE (Az)	148°	246°	348°	
15	ALTURA INSTRUM. (ai)	28° 02.6'	17° 27.5'	29° 09.0'	
16	ERRO INSTRUM. (ei)	+ 1.6'	+ 1.6'	+ 1.6'	
17	ALTURA OBSERV. (ao)	28° 04.2'	17° 29.1'	29° 10.6'	
18	COR. DEP. | ELEV:	- 3.9' | 5m	- 3.9' | 5m	- 3.9' | 5m	
19	ALTURA APARENTE (aap)	28° 00.3'	17° 25.2'	29° 06.7'	
20	CORREÇÃO (c)	- 1.8'	- 3.1'	- 1.7'	
21	CORR. AD	—	—	—	
22	ALTURA VERD (a)	27° 58.5'	17° 22.1'	29° 05.0'	
23	ALTURA CALC. (ae)	27° 37.0'	16° 48.0'	29° 17.0'	
24	DIF. (a - ae)	+ 21.5'	+ 34.1'	- 12.0'	
25	AZIMUTE (Az)	148°	246°	348°	
26	PM Corr.	3'/070°	3'/070°	3'/070°	

Figura 6.28: Modelo de cálculo da reta de altura

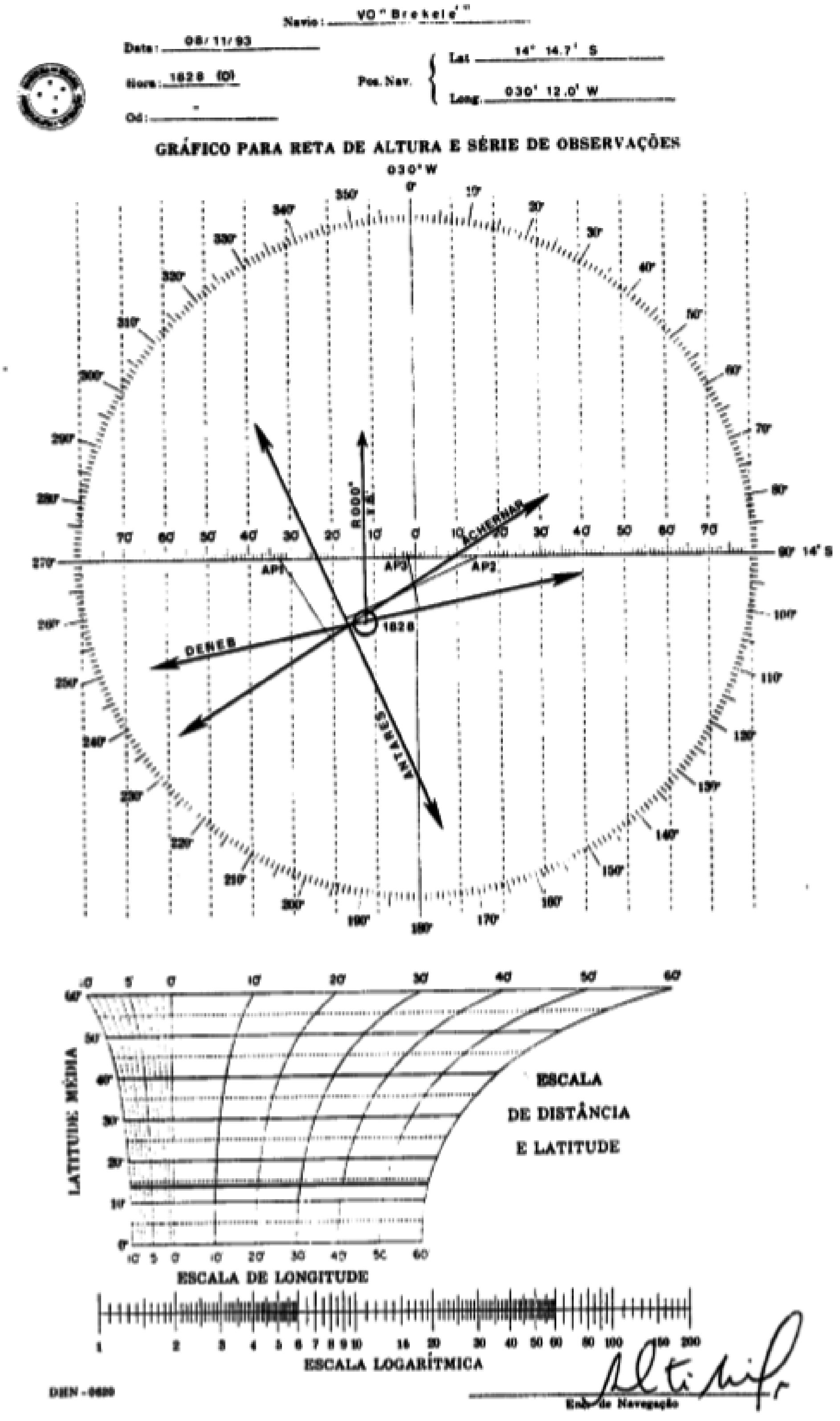


Figura 6.29: DHN-0620

7 ATIVIDADES PROPOSTAS

Após a apresentação de diversos conceitos de Geometria Esférica, especificamente da trigonometria esférica, e suas relações com a Navegação Astronômica, apresentamos no capítulo 6 alguns exercícios de fixação, acompanhados de suas respectivas soluções. No capítulo atual, serão propostos alguns exercícios de aplicação, seguidos dos seus tutoriais de solução, a fim de consolidar os conteúdos estudados anteriormente.

- **EXERCÍCIO 1**

  Três pontos A, B e C representam as extremidades de um imenso triângulo que cobre totalmente a área de uma grande floresta tropical. É necessário o cálculo da área dessa superfície florestal a fim de dimensionar a aplicação de políticas públicas visando a preservação da floresta (área desmatada, controle de queimadas etc). Sabendo que os lados do triângulo ABC representam arcos de círculos máximos e os ângulos esféricos A, B e C medem respectivamente 60º, 80º e 100º, calcule a área da região florestal utilizando como raio da terra o valor de 6370km.

  TUTORIAL: Considere o triângulo esférico ABC e aplique a Relação de Girard para cálculo da área, $S = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, apresentada no capítulo 7.

- **EXERCÍCIO 2**

  Um navio, com velocidade de cruzeiro de 18,5 nós, deseja fazer a travessia de Natal, no Brasil ($\varphi = 05^o\ 47'\ S, \quad \lambda = 25^o\ 12'\ W$), para Dakar, no Senegal ($\varphi = 14^o\ 41'\ N, \quad \lambda = 17^o\ 26'\ W$). Considerando que a empresa responsável pela embarcação deseja relizar a travessia com o menor consumo de combustível possível, determine o tempo previsto para a viagem.

  TUTORIAL: Considere que no triângulo esférico cujos vértices são Natal(N), Polo Norte(P) e Dakar(D), o lado Natal-Dakar representará a ortodromia a ser percorrida pelo navio (menor distância possível). Os outros dois lados do triângulo serão $NP = 95^o\ 47'$ e $DP = 75^o\ 19'$ e o Ângulo no Polo será $P = \Delta\lambda = 17^o 46'$. O lado ND poderá ser obtido pela fórmula do cosseno do lado oposto ao ângulo P, ou seja, a fórmula fundamental $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$, disposta no capítulo 4.

- **EXERCÍCIO 3**

  Para cada Latitude Sul, o dia mais longo do ano acontece quando a Declinação do Sol é 23º 27' (Solstício Sul). Calcule a duração desse dia para um observador na latitude $\varphi = 38^o\ 35'\ S$.

  TUTORIAL: A duração do dia corresponde ao intervalo de tempo do nascer ao pôr do Sol. Nesses instantes o triângulo de posição é retilátero (um lado igual a 90º), pois a altura verdadeira do centro do sol é 0º. O triângulo astronômico terá vértice no Polo Sul, no observador e no centro do Sol. Seus lados serão a colatitude do observador: $90^o - 38^o\ 35' = 51^o\ 25'$, a codeclinação: $90^o - 23^o\ 27' = 66^o\ 33'$ e o complemento da altura: $90^o - 0^o = 90^o$.

  Como pretendemos calcular o ângulo horário de vértice do Polo Sul, que nos dará a metade da duração do dia e o lado de 90º(complemento da altura) é oposto ao Ângulo do Polo, aplicaremos a lei dos cossenos de modo a obter o ângulo P. Transformando o valor angular em horas e minutos atentaremos que o valor obtido representará o intervalo de tempo do nascer até o instante da passagem do Sol pelo meridiano superior do observador. Quando o astro cruza o meridiano do observador, o ângulo horário local é 0º. Após esse instante da passagem, até o Sol se pôr, o ângulo horário crescerá de 0º até o ângulo P. Sendo assim, a duração do dia será duas vezes o valor horário obtido. O valor do dia mais longo obtido será 14h e 42 min.

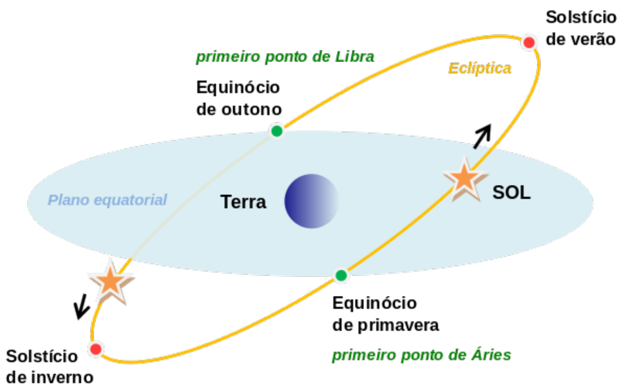


Figura 7.1: Solstício

Solscítio - cada uma das duas datas do ano em que o Sol atinge o maior grau de afastamento angular do equador (declinação), e que são 21 ou 23 de junho (solstício de inverno no hemisfério sul e de verão, no hemisfério norte) e 21 ou 23 de dezembro (solstício de verão no hemisfério sul e de inverno, no hemisfério norte).

8 CONCLUSÃO

Os conteúdos apresentados neste trabalho, tanto os relacionados à Geometria Esférica quanto aqueles referentes à Navegação Astronômica, buscam ampliar conhecimentos das mais diversas categorias de leitores; seja o professor, utilizando para enriquecimento das suas atividades em sala de aula algumas demonstrações e conceitos de Geometria Esférica, de maneira conjugada com conhecimentos aprendidos no Ensino Médio. Ou seja o aluno ou curioso de Navegação Astronômica, que poderá, didática e paulatinamente, construir significado de conceitos fundamentais da Geometria Esférica como também aprender como são utilizadas as principais técnicas de Navegação Astronômica.

De extrema relevância também foi a contextualização história da Geometria Esférica, abordando os principais fatos relacionados ao seu descobrimento. Falou-se da evolução da geometria em tempos pré e pós Euclides, culminando no surgimento dos espaços não-euclidianos em decorrência de uma incessante busca da demonstração do Postulado das Paralelas (V Postulado de Euclides). Os fatos históricos apresentados colaboram não só para um melhor entendimento dos longos caminhos percorridos na evolução do conhecimento como também para promover a discussão sobre qual a geometria mais apropriada a explicar o mundo em que vivemos. Entretanto, citando Henri Poincaré: *"Nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra, apenas é mais conveniente"*.

Haja vista as demonstrações e deduções das principais fórmulas matemáticas empregadas nos livros e manuais de Navegação Astronômica, esse trabalho consegue, de maneira direta e objetiva, mostrar a contribuiçao da Matemática, especificamente da Geometria Esférica, na Navegação, cumprindo assim o seu objetivo principal. Dessa maneira, para os "amantes" e utilizadores das técnicas de Navegação Astronômica, eis a oportunidade de compreender a fundamentação matemática que está por trás das Tábuas e manuais utilizados nessa técnica de navegação.

Por fim, citando COUTINHO (2001) no seu livro *Trigonometria Esférica - a Matemática de um Espaço Curvo,*

> Quando os astrônomos da antiga Mesopotâmia ergueram os olhos para o céu buscando medir as distâncias angulares entre as estrelas a noção de linha trigonométrica seno surgiu. Com o passar dos séculos e a curiosidade aumentada em relação ao Cosmos, os homens de ciência criaram instrumentos e meios

de medir com maior precisão os ângulos e distâncias astronômicas. Entre esses recursos científicos e instrumentais, aparecem aparelhos como o atual sextante digital e os satélites artificiais. Mesmo com todo esse aparato tecnológico moderno, a Trigonometria Esférica tem um papel relevante e fundamental não só na Astronomia que lhe deu origem, como também em outras áreas avançadas do conhecimento humano.

"A trigonometria veio para medir e orientar o caminho até as estrelas...e ficou para enriquecer partes da matemática menos voltadas para os céus!"

9 APÊNDICE

9.1 De Girard a Euler passando por Legendre

Adrien Marie Legendre (1752 a 1833) foi um notável matemático francês. Dentro de uma tradição que muitos dos seus compatriotas ainda seguem, sua destacada posição científica não o impediu de se interessar pelo ensino elementar. Com efeito, uma de suas obras mais conhecidas é o livro "Élements de Géometrie", publicado pela primeira vez em 1794, traduzido em inglês, alemão, italiano, romeno e até mesmo português. A biblioteca do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) possui um exemplar da 14ª edição, impresso em Paris, no ano de 1846, treze anos depois da morte do autor. Da geometria de Legendre, interessa-nos para este trabalho a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Foi a primeira demonstração inteligível desse teorema a ser publicada e apreciaremos a elegância e a beleza do raciocínio nela contido, o qual passaremos a expor.

Poincaré (1854-1912) foi o primeiro matemático a compeender que o Teorema de Euler é um teorema de Topologia, e não de geometria. Observou que o número V-A+F é um invariante topológico do poliedro P. Para entendermos esse conceito, precisamos da seguinte definição:

Duas figuras F e G são ditas homeomorfas se existir uma transformação contínua $f : F \to G$ com a inversa $f^{-1} : G \to F$ também contínua. De forma intuitiva, um poliedro, ao imaginá-lo de borracha, que ao ser inflado se transforma em uma esfera é homeomorfo a ela. Por exemplo, o cubo e o tetraedro (poliedros convexos) são homeomorfos à esfera. Se um poliedro é convexo, então ele é homeomorfo à esfera, pois, considerando um ponto O em seu interior e uma esfera de centro neste ponto contendo o poliedro, uma reta que passa pelo ponto O intersecta o poliedro em exatamente dois pontos, A e B, e a esfera em A' e B', respetivamente. Assim, deformando o poliedro de modo que o ponto A seja levado no ponto A' e B seja levado no ponto B' da esfera e considerando todas as retas passando pelo ponto O, podemos transformar o poliedro de modo contínuo em uma esfera com centro no ponto O. Dessa forma, podemos enunciar o Teorema de Euler para poliedros da seguinte maneira.

Teorema 9.1.1 (Teorema de Euler para poliedros)**.** *Para todo poliedro homeomorfo à esfera vale a relação V-A+F=2, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.*

Demonstração. A demonstração de Legendre tem como base a fórmula de Girard da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, anterioremente apresentada. Considera também uma superfície esférica com centro no interior do poliedro. As aplicações que se seguirão têm como premissa uma superfície esférica contida no poliedro, contudo, para o poliedro contido no interior da superfície esférica, a demonstraçao é inteiramente análoga. Também considera-se o poliedro convexo com todas as faces em forma de triângulos. Isto é possível por meio da diagonalização das faces dos polígonos que não sejam triângulos, pois cada diagonal traçada não altara o número de vértices V e aumenta em uma unidade o número de arestas A e faces F. Este acréscimo anula a expressão V-A+F.

Como dito, considera-se uma a superfície esférica E com centro O no interior do poliedro P. Projetando-se radialmente o poliedro P sobre a superfície esférica E, conforme a Figura 9.1, temos que o ponto A’ da superfície esférica E é a projeção radial do ponto A do poliedro P.

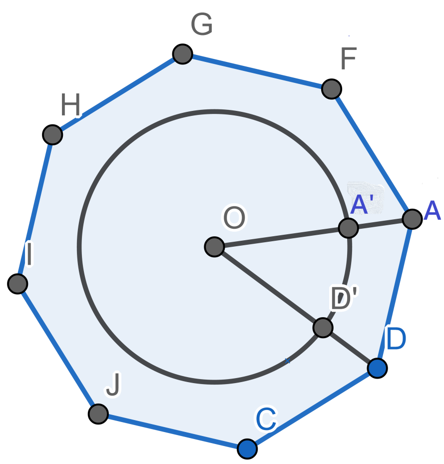


Figura 9.1: Superfície Esférica E contida no Poliedro P

Dessa maneira, é possível estabelecer uma função que relaciona cada ponto A do poliedro P a um ponto A’ da superfície esférica E, pertencentes a um mesmo segmento de reta com extremos em O e A. Podemos então escrever que $f : P \longrightarrow E$ e $A \longmapsto A'$. E como todo ponto em E possui projeção radial de algum ponto de P, a função f será sobrejetora, por outro lado, f também será injetora pois dois pontos distintos em P possuirão projeção diferentes em E. Sendo assim, a função bijetiva f, possibilita a decomposição da esfera E em F triângulos esféricos, dispostos de maneira idêntica às faces do poliedro P, contendo A lados e V vértices. A figura a seguir apresenta a projeção radial de uma face triangular T do poliedro P em um triângulo eférico t da superfície esférica.

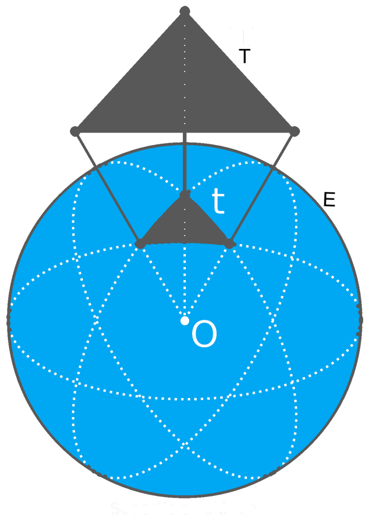


Figura 9.2: Projeção radial de uma face do Poliedro P

Como o poliedro fica decomposto na superfície esférica em F triângulos esféricos, A lados e V vértices. Para cada triângulo t, ilustrado na Figura 9.2, vale a fórmula de Girard (Teorema 3.1.4). Se K_t é a soma dos ângulos internos do triângulo t, então $k_t = \pi + \frac{S_t}{r^2}$, onde S_t é a área de t. E ainda, como possuímos F faces, somando os ângulos internos de todas elas, resultará em

$$\sum K_t = F\pi + \frac{\sum S_t}{r^2}$$

Temos ainda que $\sum k_t = 2\pi V$ já que os ângulos em torno de cada vértice medem 2π.

Ainda, $\sum S_t = 4\pi r^2$ pois a soma de todas as faces triangulares resulta na área total da superfície esférica E.

Então a equação anterior fica:

$$2\pi V = F\pi + \frac{4\pi r^2}{r^2}$$

$$2\pi V = F\pi + 4\pi$$

$$2\pi V - F\pi = 4\pi$$

Dividindo a expressão inteira por π teremos,

$$2V - F = 4$$

Como todo triângulo é formado por 3 lados e cada aresta é lado de exatamente dois triângulos, temos que 2A=3F. Como 2A= F + 2F, resulta em F = 2A - 2F que, substituindo na expressão anterior, obteremos:

$$2V - 2A + 2F = 4$$

e finalmente, dividindo toda a expressão por 2, teremos

$$V - A + F = 2$$

□

9.2 Demonstração de outras relações trigonométricas

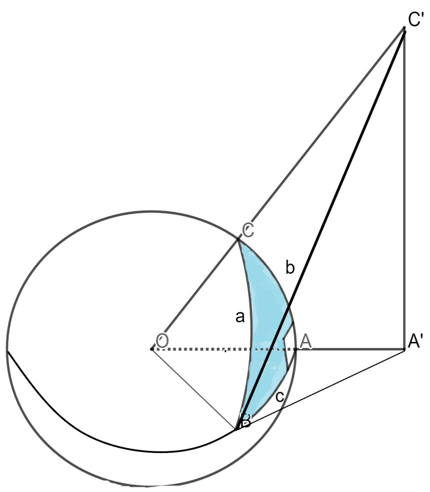


Figura 9.3: triângulo retângulo na superfície esférica

Baseadas na figura acima, seguem as demonstrações das relações trigonométricas a seguir, apresentadas no Capítulo 4 e amplamente utilizadas nos livros de navegação astronômica.

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} B \tag{4.8}$$

$$\operatorname{tg} c = \cos B.\operatorname{tg} a \tag{4.9}$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B.\operatorname{sen} c \tag{4.10}$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B.\operatorname{cotg} C \tag{4.11}$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C.\cos b \tag{4.12}$$

Considerando a razão anterior $\frac{A'C'}{BC'}$ e multiplicando ambos os termos por OC' teremos:

$$\frac{A'C'}{BC'} = \frac{A'C'.OC'}{OC'.BC'} = \frac{A'C'}{OC'}.\frac{OC'}{BC'}$$

como $\operatorname{sen} b = \frac{A'C'}{OC'}$, $\operatorname{cossec} a = \frac{OC'}{BC'}$ *e* $\operatorname{sen} B = \frac{A'C'}{BC'}$ segue que,

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b.\operatorname{cossec} a$$

logo,

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} B \tag{4.8}$$

e, por analogia:

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} C$$

Fazendo ainda a multiplicação de ambos os termos da razão $\frac{A'B'}{BC'}$ por OB teremos:

$$\frac{A'B}{BC'} = \frac{A'B.OB}{OB.BC'} = \frac{A'B}{OB}.\frac{OB}{BC'}$$

como $\cos B = \frac{A'B}{BC'}$, $\operatorname{tg} c = \frac{A'B}{OB}$ *e* $\operatorname{cotg} a = \frac{OB}{BC'}$ segue que,

$$\cos B = \operatorname{tg} c.\operatorname{cotg} a$$

logo,

$$\operatorname{tg} c = \cos B.\operatorname{tg} a \tag{4.9}$$

e, por analogia:

$$\operatorname{tg} b = \cos C.\operatorname{tg} A$$

Fazendo ainda,

$$\frac{A'C'}{A'B} = \frac{A'C'.OA'}{OA'.A'B} = \frac{A'C'}{OA'}.\frac{OA'}{A'B}$$

como $\operatorname{tg} B = \dfrac{A'C'}{A'B}$, $\operatorname{tg} b = \dfrac{A'C'}{OA'}$ *e* $\operatorname{cossec} c = \dfrac{OA'}{A'B}$ segue que,

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b . \operatorname{cossec} c$$

logo,

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B . \operatorname{sen} c \tag{4.10}$$

e também,

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} C . \operatorname{sen} b$$

Agora, multiplicando as duas últimas relações, escreve-se: $\operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C . \operatorname{sen} c . \operatorname{sen} b$, ou então $\operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C = \dfrac{1}{\cos b . \cos c}$

Lembrando, da (Fórmla 4.7), $\cos a = \cos b . \cos c$, teremos,

$$\operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C = \frac{1}{\cos a}$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C \tag{4.11}$$

Multiplicando cruzado a (2ª Fórmula de 4.8) pela (Fórmula 4.9), resulta em: $\operatorname{tg} c . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} C = \cos B .\ tga . \operatorname{sen} c$, ou ainda,

$$\cos B = \frac{\cos a . \cos C}{\cos c}$$

Como, dá (Fórmula 4.7), temos $\cos b = \dfrac{\cos a}{\cos c}$

Assim,

$$\cos B = \operatorname{sen} C . \cos b \tag{4.12}$$

9.3 Páginas de correções do Almanaque Náutico

Out – Mar SOL Abr – Set

a ap (Out–Mar)	Limbo Inf	Limbo Sup	a ap (Abr–Set)	Limbo Inf	Limbo Sup
° ′	′	′	° ′	′	′
9 34	+10.8	−21.5	9 39	+10.6	−21.2
9 45	+10.9	−21.4	9 51	+10.7	−21.1
9 56	+11.0	−21.3	10 03	+10.8	−21.0
10 08	+11.1	−21.2	10 15	+10.9	−20.9
10 21	+11.2	−21.1	10 27	+11.0	−20.8
10 34	+11.3	−21.0	10 40	+11.1	−20.7
10 47	+11.4	−20.9	10 54	+11.2	−20.6
11 01	+11.5	−20.8	11 08	+11.3	−20.5
11 15	+11.6	−20.7	11 23	+11.4	−20.4
11 30	+11.7	−20.6	11 38	+11.5	−20.3
11 46	+11.8	−20.5	11 54	+11.6	−20.2
12 02	+11.9	−20.4	12 10	+11.7	−20.1
12 19	+12.0	−20.3	12 28	+11.8	−20.0
12 37	+12.1	−20.2	12 46	+11.9	−19.9
12 55	+12.2	−20.1	13 05	+12.0	−19.8
13 14	+12.3	−20.0	13 24	+12.1	−19.7
13 35	+12.4	−19.9	13 45	+12.2	−19.6
13 56	+12.5	−19.8	14 07	+12.3	−19.5
14 18	+12.6	−19.7	14 30	+12.4	−19.4
14 42	+12.7	−19.6	14 54	+12.5	−19.3
15 06	+12.8	−19.5	15 19	+12.6	−19.2
15 32	+12.9	−19.4	15 46	+12.7	−19.1
15 59	+13.0	−19.3	16 14	+12.8	−19.0
16 28	+13.1	−19.2	16 44	+12.9	−18.9
16 59	+13.2	−19.1	17 15	+13.0	−18.8
17 32	+13.3	−19.0	17 48	+13.1	−18.7
18 06	+13.4	−18.9	18 24	+13.2	−18.6
18 42	+13.5	−18.8	19 01	+13.3	−18.5
19 21	+13.6	−18.7	19 42	+13.4	−18.4
20 03	+13.7	−18.6	20 25	+13.5	−18.3
20 48	+13.8	−18.5	21 11	+13.6	−18.2
21 35	+13.9	−18.4	22 00	+13.7	−18.1
22 26	+14.0	−18.3	22 54	+13.8	−18.0
23 22	+14.1	−18.2	23 51	+13.9	−17.9
24 21	+14.2	−18.1	24 53	+14.0	−17.8
25 26	+14.3	−18.0	26 00	+14.1	−17.7
26 36	+14.4	−17.9	27 13	+14.2	−17.6
27 52	+14.5	−17.8	28 33	+14.3	−17.5
29 15	+14.6	−17.7	30 00	+14.4	−17.4
30 46	+14.7	−17.6	31 35	+14.5	−17.3
32 26	+14.8	−17.5	33 20	+14.6	−17.2
34 17	+14.9	−17.4	35 17	+14.7	−17.1
36 20	+15.0	−17.3	37 26	+14.8	−17.0
38 36	+15.1	−17.2	39 50	+14.9	−16.9
41 08	+15.2	−17.1	42 31	+15.0	−16.8
43 59	+15.3	−17.0	45 31	+15.1	−16.7
47 10	+15.4	−16.9	48 55	+15.2	−16.6
50 46	+15.5	−16.8	52 44	+15.3	−16.5
54 49	+15.6	−16.7	57 02	+15.4	−16.4
59 23	+15.7	−16.6	61 51	+15.5	−16.3
64 30	+15.8	−16.5	67 17	+15.6	−16.2
70 12	+15.9	−16.4	73 16	+15.7	−16.1
76 26	+16.0	−16.3	79 43	+15.8	−16.0
83 05	+16.1	−16.2	86 32	+15.9	−15.9
90 00			90 00		

ESTRELAS E PLANETAS

a ap	Corr.
° ′	′
9 56	−5.3
10 08	−5.2
10 20	−5.1
10 33	−5.0
10 46	−4.9
11 00	−4.8
11 14	−4.7
11 29	−4.6
11 45	−4.5
12 01	−4.4
12 18	−4.3
12 35	−4.2
12 54	−4.1
13 13	−4.0
13 33	−3.9
13 54	−3.8
14 16	−3.7
14 40	−3.6
15 04	−3.5
15 30	−3.4
15 57	−3.3
16 26	−3.2
16 56	−3.1
17 28	−3.0
18 02	−2.9
18 38	−2.8
19 17	−2.7
19 58	−2.6
20 42	−2.5
21 28	−2.4
22 19	−2.3
23 13	−2.2
24 11	−2.1
25 14	−2.0
26 22	−1.9
27 36	−1.8
28 56	−1.7
30 24	−1.6
32 00	−1.5
33 45	−1.4
35 40	−1.3
37 48	−1.2
40 08	−1.1
42 44	−1.0
45 36	−0.9
48 47	−0.8
52 18	−0.7
56 11	−0.6
60 28	−0.5
65 08	−0.4
70 11	−0.3
75 34	−0.2
81 13	−0.1
87 03	0.0
90 00	

a ap	Corr. adicional
1993	
VÉNUS	
1 Jan – 2 Fev	
28 Mai – 15 Jul	
°	′
0	+0.2
41	+0.1
76	
3 Fev – 26 Fev	
5 Mai – 27 Mai	
°	′
0	+0.3
34	+0.2
60	+0.1
80	
27 Fev – 14 Mar	
19 Abr – 4 Mai	
°	′
0	+0.4
29	+0.3
51	+0.2
68	+0.1
83	
15 Mar – 18 Abr	
°	′
0	+0.5
26	+0.4
46	+0.3
60	+0.2
73	+0.1
84	
16 Jul – 31 Dez	
°	′
0	+0.1
60	
MARTE	
1 Jan – 7 Mar	
°	′
0	+0.2
41	+0.1
76	
8 Mar – 31 Dez	
°	′
0	+0.1
60	

DEPRESSÃO

Elev do Olho (m)	Corr.	Elev do Olho (Pés)
2.4	−2.8	8.0
2.6	−2.9	8.6
2.8	−3.0	9.2
3.0	−3.1	9.8
3.2	−3.2	10.5
3.4	−3.3	11.2
3.6	−3.4	11.9
3.8	−3.5	12.6
4.0	−3.6	13.3
4.3	−3.7	14.1
4.5	−3.8	14.9
4.7	−3.9	15.7
5.0	−4.0	16.5
5.2	−4.1	17.4
5.5	−4.2	18.3
5.8	−4.3	19.1
6.1	−4.4	20.1
6.3	−4.5	21.0
6.6	−4.6	22.0
6.9	−4.7	22.9
7.2	−4.8	23.9
7.5	−4.9	24.9
7.9	−5.0	26.0
8.2	−5.1	27.1
8.5	−5.2	28.1
8.8	−5.3	29.2
9.2	−5.4	30.4
9.5	−5.5	31.5
9.9	−5.6	32.7
10.3	−5.7	33.9
10.6	−5.8	35.1
11.0	−5.9	36.3
11.4	−6.0	37.6
11.8	−6.1	38.9
12.2	−6.2	40.1
12.6	−6.3	41.5
13.0	−6.4	42.8
13.4	−6.5	44.2
13.8	−6.6	45.5
14.2	−6.7	46.9
14.7	−6.8	48.4
15.1	−6.9	49.8
15.5	−7.0	51.3
16.0	−7.1	52.8
16.5	−7.2	54.3
16.9	−7.3	55.8
17.4	−7.4	57.4
17.9	−7.5	58.9
18.4	−7.6	60.5
18.8	−7.7	62.1
19.3	−7.8	63.8
19.8	−7.9	65.4
20.4	−8.0	67.1
20.9	−8.1	68.8
21.4		70.5

Elev do Olho	Corr.
m	′
1.0	−1.8
1.5	−2.2
2.0	−2.5
2.5	−2.8
3.0	−3.0
Ver Tábua ←	
m	′
20	−7.9
22	−8.3
24	−8.6
26	−9.0
28	−9.3
30	−9.6
32	−10.0
34	−10.3
36	−10.6
38	−10.8
40	−11.1
42	−11.4
44	−11.7
46	−11.9
48	−12.2
Pés	′
2	−1.4
4	−1.9
6	−2.4
8	−2.7
10	−3.1
Ver Tábua ←	
ft.	′
70	−8.1
75	−8.4
80	−8.7
85	−8.9
90	−9.2
95	−9.5
100	−9.7
105	−9.9
110	−10.2
115	−10.4
120	−10.6
125	−10.8
130	−11.1
135	−11.3
140	−11.5
145	−11.7
150	−11.9
155	−12.1

Figura 9.4: a_{ap} é a altura dada pelo sextante corrigida do erro instrumental e da depressão

	TU (HMG) d h	♈ AHG	VÊNUS −3.9 AHG	VÊNUS Dec.	MARTE +1.5 AHG	MARTE Dec.	JÚPITER −1.7 AHG	JÚPITER Dec.	SATURNO +0.7 AHG	SATURNO Dec.
		° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′
	6 00	45 13.3	200 26.6	S 8 43.1	169 52.8	S19 58.6	197 48.7	S10 08.8	78 41.4	S15 01.5
	01	60 15.8	215 26.1	44.2	184 53.5	59.0	212 50.6	09.0	93 43.9	01.5
	02	75 18.3	230 25.7	45.4	199 54.1	59.5	227 52.6	09.2	108 46.3	01.5
	03	90 20.7	245 25.2	· · 46.5	214 54.7	19 59.9	242 54.5	· · 09.4	123 48.7	· · 01.5
	04	105 23.2	260 24.7	47.7	229 55.3	20 00.3	257 56.5	09.6	138 51.2	01.5
	05	120 25.6	275 24.3	48.9	244 55.9	00.7	272 58.5	09.7	153 53.6	01.5
	06	135 28.1	290 23.8	S 8 50.0	259 56.6	S20 01.2	288 00.4	S10 09.9	168 56.0	S15 01.4
S	07	150 30.6	305 23.3	51.2	274 57.2	01.6	303 02.4	10.1	183 58.4	01.4
	08	165 33.0	320 22.8	52.3	289 57.8	02.0	318 04.3	10.3	199 00.9	01.4
Á	09	180 35.5	335 22.4	· · 53.5	304 58.4	· · 02.4	333 06.3	· · 10.5	214 03.3	· · 01.4
B	10	195 38.0	350 21.9	54.7	319 59.0	02.9	348 08.2	10.7	229 05.7	01.4
A	11	210 40.4	5 21.4	55.8	334 59.7	03.3	3 10.2	10.9	244 08.1	01.4
	12	225 42.9	20 20.9	S 8 57.0	350 00.3	S20 03.7	18 12.1	S10 11.1	259 10.6	S15 01.3
D	13	240 45.4	35 20.5	58.1	5 00.9	04.1	33 14.1	11.2	274 13.0	01.3
O	14	255 47.8	50 20.0	8 59.3	20 01.5	04.6	48 16.1	11.4	289 15.4	01.3
	15	270 50.3	65 19.5	9 00.4	35 02.1	· · 05.0	63 18.0	· · 11.6	304 17.8	· · 01.3
	16	285 52.7	80 19.0	01.6	50 02.7	05.4	78 20.0	11.8	319 20.3	01.3
	17	300 55.2	95 18.6	02.8	65 03.4	05.8	93 21.9	12.0	334 22.7	01.3
	18	315 57.7	110 18.1	S 9 03.9	80 04.0	S20 06.3	108 23.9	S10 12.2	349 25.1	S15 01.2
	19	331 00.1	125 17.6	05.1	95 04.6	06.7	123 25.8	12.4	4 27.5	01.2
	20	346 02.6	140 17.1	06.2	110 05.2	07.1	138 27.8	12.6	19 30.0	01.2
	21	1 05.1	155 16.6	· · 07.4	125 05.8	· · 07.5	153 29.7	· · 12.8	34 32.4	· · 01.2
	22	16 07.5	170 16.2	08.5	140 06.4	07.9	168 31.7	12.9	49 34.8	01.2
	23	31 10.0	185 15.7	09.7	155 07.1	08.4	183 33.7	13.1	64 37.2	01.2
	7 00	46 12.5	200 15.2	S 9 10.8	170 07.7	S20 08.8	198 35.6	S10 13.3	79 39.7	S15 01.1
	01	61 14.9	215 14.7	12.0	185 08.3	09.2	213 37.6	13.5	94 42.1	01.1
	02	76 17.4	230 14.2	13.1	200 08.9	09.6	228 39.5	13.7	109 44.5	01.1
	03	91 19.9	245 13.8	· · 14.3	215 09.5	· · 10.0	243 41.5	· · 13.9	124 46.9	· · 01.1
	04	106 22.3	260 13.3	15.4	230 10.1	10.5	258 43.4	14.1	139 49.4	01.1
	05	121 24.8	275 12.8	16.6	245 10.7	10.9	273 45.4	14.3	154 51.8	01.1
	06	136 27.2	290 12.3	S 9 17.7	260 11.4	S20 11.3	288 47.3	S10 14.4	169 54.2	S15 01.0
	07	151 29.7	305 11.8	18.9	275 12.0	11.7	303 49.3	14.6	184 56.6	01.0
D	08	166 32.2	320 11.4	20.0	290 12.6	12.1	318 51.3	14.8	199 59.1	01.0
O	09	181 34.6	335 10.9	· · 21.2	305 13.2	· · 12.6	333 53.2	· · 15.0	215 01.5	· · 01.0
M	10	196 37.1	350 10.4	22.3	320 13.8	13.0	348 55.2	15.2	230 03.9	01.0
	11	211 39.6	5 09.9	23.5	335 14.4	13.4	3 57.1	15.4	245 06.3	00.9
I	12	226 42.0	20 09.4	S 9 24.6	350 15.0	S20 13.8	18 59.1	S10 15.6	260 08.7	S15 00.9
N	13	241 44.5	35 08.9	25.8	5 15.6	14.2	34 01.0	15.8	275 11.2	00.9
G	14	256 47.0	50 08.5	26.9	20 16.2	14.6	49 03.0	15.9	290 13.6	00.9
	15	271 49.4	65 08.0	· · 28.1	35 16.9	· · 15.1	64 04.9	· · 16.1	305 16.0	· · 00.9
O	16	286 51.9	80 07.5	29.2	50 17.5	15.5	79 06.9	16.3	320 18.4	00.9
	17	301 54.4	95 07.0	30.4	65 18.1	15.9	94 08.9	16.5	335 20.8	00.8
	18	316 56.8	110 06.5	S 9 31.5	80 18.7	S20 16.3	109 10.8	S10 16.7	350 23.3	S15 00.8
	19	331 59.3	125 06.0	32.7	95 19.3	16.7	124 12.8	16.9	5 25.7	00.8
	20	347 01.7	140 05.5	33.8	110 19.9	17.1	139 14.7	17.1	20 28.1	00.8
	21	2 04.2	155 05.1	· · 35.0	125 20.5	· · 17.5	154 16.7	· · 17.2	35 30.5	· · 00.8
	22	17 06.7	170 04.6	36.1	140 21.1	18.0	169 18.6	17.4	50 32.9	00.7
	23	32 09.1	185 04.1	37.3	155 21.7	18.4	184 20.6	17.6	65 35.4	00.7
	8 00	47 11.6	200 03.6	S 9 38.4	170 22.3	S20 18.8	199 22.6	S10 17.8	80 37.8	S15 00.7
	01	62 14.1	215 03.1	39.5	185 22.9	19.2	214 24.5	18.0	95 40.2	00.7
	02	77 16.5	230 02.6	40.7	200 23.6	19.6	229 26.5	18.2	110 42.6	00.7
	03	92 19.0	245 02.1	· · 41.8	215 24.2	· · 20.0	244 28.4	· · 18.4	125 45.0	· · 00.6
S	04	107 21.5	260 01.6	43.0	230 24.8	20.4	259 30.4	18.6	140 47.5	00.6
E	05	122 23.9	275 01.1	44.1	245 25.4	20.8	274 32.3	18.7	155 49.9	00.6
G	06	137 26.4	290 00.7	S 9 45.3	260 26.0	S20 21.3	289 34.3	S10 18.9	170 52.3	S15 00.6
U	07	152 28.8	305 00.2	46.4	275 26.6	21.7	304 36.2	19.1	185 54.7	00.6
N	08	167 31.3	319 59.7	47.5	290 27.2	22.1	319 38.2	19.3	200 57.1	00.5
D	09	182 33.8	334 59.2	· · 48.7	305 27.8	· · 22.5	334 40.2	· · 19.5	215 59.6	· · 00.5
A	10	197 36.2	349 58.7	49.8	320 28.4	22.9	349 42.1	19.7	231 02.0	00.5
	11	212 38.7	4 58.2	51.0	335 29.0	23.3	4 44.1	19.9	246 04.4	00.5
	12	227 41.2	19 57.7	S 9 52.1	350 29.6	S20 23.7	19 46.0	S10 20.0	261 06.8	S15 00.5
	13	242 43.6	34 57.2	53.2	5 30.2	24.1	34 48.0	20.2	276 09.2	00.5
F	14	257 46.1	49 56.7	54.4	20 30.8	24.5	49 49.9	20.4	291 11.6	00.4
E	15	272 48.6	64 56.2	· · 55.5	35 31.4	· · 24.9	64 51.9	· · 20.6	306 14.1	· · 00.4
I	16	287 51.0	79 55.7	56.7	50 32.0	25.3	79 53.9	20.8	321 16.5	00.4
R	17	302 53.5	94 55.2	57.8	65 32.6	25.8	94 55.8	21.0	336 18.9	00.4
A	18	317 56.0	109 54.7	S 9 58.9	80 33.2	S20 26.2	109 57.8	S10 21.2	351 21.3	S15 00.4
	19	332 58.4	124 54.2	10 00.1	95 33.8	26.6	124 59.7	21.4	6 23.7	00.3
	20	348 00.9	139 53.8	01.2	110 34.4	27.0	140 01.7	21.5	21 26.1	00.3
	21	3 03.3	154 53.3	· · 02.4	125 35.1	· · 27.4	155 03.6	· · 21.7	36 28.6	· · 00.3
	22	18 05.8	169 52.8	03.5	140 35.7	27.8	170 05.6	21.9	51 31.0	00.3
	23	33 08.3	184 52.3	04.6	155 36.3	28.2	185 07.6	22.1	66 33.4	00.3
	Pass Merid	h m 20 51.7	v −0.5	d 1.1	v 0.6	d 0.4	v 2.0	d 0.2	v 2.4	d 0.0

ESTRELAS Nome	ARV	Dec.
	° ′	° ′
Acamar	315 29.0	S40 19.7
Achernar	335 37.1	S57 16.1
Acrux	173 26.3	S63 03.8
Adhara	255 23.8	S28 57.7
Aldebaran	291 05.9	N16 29.9
Alioth	166 34.0	N55 59.4
Alkaid	153 10.9	N49 20.5
Al Na'ir	28 02.0	S46 59.5
Alnilam	276 01.0	S 1 12.3
Alphard	218 10.5	S 8 37.9
Alphecca	126 23.8	N26 44.2
Alpheratz	357 58.4	N29 03.7
Altair	62 22.7	N 8 51.4
Ankaa	353 29.8	S42 20.4
Antares	112 44.6	S26 25.1
Arcturus	146 09.4	N19 12.9
Atria	108 00.2	S69 01.1
Avior	234 23.9	S59 29.2
Bellatrix	278 47.5	N 6 20.7
Betelgeuse	271 16.9	N 7 24.4
Canopus	264 02.3	S52 41.4
Capella	280 55.7	N45 59.4
Deneb	49 41.5	N45 15.9
Denebola	182 48.8	N14 36.3
Diphda	349 10.3	S18 01.1
Dubhe	194 09.9	N61 46.7
Elnath	278 30.9	N28 36.1
Eltanin	90 53.4	N51 29.7
Enif	34 01.5	N 9 51.1
Fomalhaut	15 39.9	S29 39.3
Gacrux	172 17.8	S57 04.6
Gienah	176 07.7	S17 30.4
Hadar	149 09.4	S60 20.5
Hamal	328 17.0	N23 26.2
Kaus Aust.	84 03.5	S34 23.3
Kochab	137 20.6	N74 10.8
Markab	13 52.8	N15 10.6
Menkar	314 30.1	N 4 04.1
Menkent	148 25.3	S36 20.3
Miaplacidus	221 42.8	S69 41.3
Mirfak	309 00.9	N49 50.4
Nunki	76 16.7	S26 18.2
Peacock	53 42.4	S56 45.4
Pollux	243 45.5	N28 02.3
Procyon	245 14.9	N 5 14.4
Rasalhague	96 20.3	N12 34.0
Regulus	207 59.2	N11 59.8
Rigel	281 25.9	S 8 12.4
Rigil Kent.	140 12.4	S60 48.5
Sabik	102 29.7	S15 43.0
Schedar	349 56.9	N56 30.5
Shaula	96 42.2	S37 06.0
Sirius	258 46.4	S16 42.4
Spica	158 47.0	S11 07.7
Suhail	223 03.2	S43 24.3
Vega	80 49.2	N38 47.0
Zuben'ubi	137 22.0	S16 00.9

	ARV	Pass Merid
	° ′	h m
Vênus	154 02.7	10 39
Marte	123 55.2	12 39
Júpiter	152 23.1	10 44
Saturno	33 27.2	18 38

Figura 9.5: Almanaque Náutico páginas de 6,7 e 8 de novembro de 1993

26^m	SOL PLANETAS	♈	LUA	v ou d	Corr.	v ou d	Corr.	v ou d	Corr.
s	° ′	° ′	° ′	′	′	′	′	′	′
00	6 30.0	6 31.1	6 12.2	0.0	0.0	6.0	2.7	12.0	5.3
01	6 30.3	6 31.3	6 12.5	0.1	0.0	6.1	2.7	12.1	5.3
02	6 30.5	6 31.6	6 12.7	0.2	0.1	6.2	2.7	12.2	5.4
03	6 30.8	6 31.8	6 12.9	0.3	0.1	6.3	2.8	12.3	5.4
04	6 31.0	6 32.1	6 13.2	0.4	0.2	6.4	2.8	12.4	5.5
05	6 31.3	6 32.3	6 13.4	0.5	0.2	6.5	2.9	12.5	5.5
06	6 31.5	6 32.6	6 13.7	0.6	0.3	6.6	2.9	12.6	5.6
07	6 31.8	6 32.8	6 13.9	0.7	0.3	6.7	3.0	12.7	5.6
08	6 32.0	6 33.1	6 14.1	0.8	0.4	6.8	3.0	12.8	5.7
09	6 32.3	6 33.3	6 14.4	0.9	0.4	6.9	3.0	12.9	5.7
10	6 32.5	6 33.6	6 14.6	1.0	0.4	7.0	3.1	13.0	5.7
11	6 32.8	6 33.8	6 14.9	1.1	0.5	7.1	3.1	13.1	5.8
12	6 33.0	6 34.1	6 15.1	1.2	0.5	7.2	3.2	13.2	5.8
13	6 33.3	6 34.3	6 15.3	1.3	0.6	7.3	3.2	13.3	5.9
14	6 33.5	6 34.6	6 15.6	1.4	0.6	7.4	3.3	13.4	5.9
15	6 33.8	6 34.8	6 15.8	1.5	0.7	7.5	3.3	13.5	6.0
16	6 34.0	6 35.1	6 16.1	1.6	0.7	7.6	3.4	13.6	6.0
17	6 34.3	6 35.3	6 16.3	1.7	0.8	7.7	3.4	13.7	6.1
18	6 34.5	6 35.6	6 16.5	1.8	0.8	7.8	3.4	13.8	6.1
19	6 34.8	6 35.8	6 16.8	1.9	0.8	7.9	3.5	13.9	6.1
20	6 35.0	6 36.1	6 17.0	2.0	0.9	8.0	3.5	14.0	6.2
21	6 35.3	6 36.3	6 17.2	2.1	0.9	8.1	3.6	14.1	6.2
22	6 35.5	6 36.6	6 17.5	2.2	1.0	8.2	3.6	14.2	6.3
23	6 35.8	6 36.8	6 17.7	2.3	1.0	8.3	3.7	14.3	6.3
24	6 36.0	6 37.1	6 18.0	2.4	1.1	8.4	3.7	14.4	6.4
25	6 36.3	6 37.3	6 18.2	2.5	1.1	8.5	3.8	14.5	6.4
26	6 36.5	6 37.6	6 18.4	2.6	1.1	8.6	3.8	14.6	6.4
27	6 36.8	6 37.8	6 18.7	2.7	1.2	8.7	3.8	14.7	6.5
28	6 37.0	6 38.1	6 18.9	2.8	1.2	8.8	3.9	14.8	6.5
29	6 37.3	6 38.3	6 19.2	2.9	1.3	8.9	3.9	14.9	6.6
30	6 37.5	6 38.6	6 19.4	3.0	1.3	9.0	4.0	15.0	6.6
31	6 37.8	6 38.8	6 19.6	3.1	1.4	9.1	4.0	15.1	6.7
32	6 38.0	6 39.1	6 19.9	3.2	1.4	9.2	4.1	15.2	6.7
33	6 38.3	6 39.3	6 20.1	3.3	1.5	9.3	4.1	15.3	6.8
34	6 38.5	6 39.6	6 20.3	3.4	1.5	9.4	4.2	15.4	6.8
35	6 38.8	6 39.8	6 20.6	3.5	1.5	9.5	4.2	15.5	6.8
36	6 39.0	6 40.1	6 20.8	3.6	1.6	9.6	4.2	15.6	6.9
37	6 39.3	6 40.3	6 21.1	3.7	1.6	9.7	4.3	15.7	6.9
38	6 39.5	6 40.6	6 21.3	3.8	1.7	9.8	4.3	15.8	7.0
39	6 39.8	6 40.8	6 21.5	3.9	1.7	9.9	4.4	15.9	7.0
40	6 40.0	6 41.1	6 21.8	4.0	1.8	10.0	4.4	16.0	7.1
41	6 40.3	6 41.3	6 22.0	4.1	1.8	10.1	4.5	16.1	7.1
42	6 40.5	6 41.6	6 22.3	4.2	1.9	10.2	4.5	16.2	7.2
43	6 40.8	6 41.8	6 22.5	4.3	1.9	10.3	4.5	16.3	7.2
44	6 41.0	6 42.1	6 22.7	4.4	1.9	10.4	4.6	16.4	7.2
45	6 41.3	6 42.3	6 23.0	4.5	2.0	10.5	4.6	16.5	7.3
46	6 41.5	6 42.6	6 23.2	4.6	2.0	10.6	4.7	16.6	7.3
47	6 41.8	6 42.8	6 23.4	4.7	2.1	10.7	4.7	16.7	7.4
48	6 42.0	6 43.1	6 23.7	4.8	2.1	10.8	4.8	16.8	7.4
49	6 42.3	6 43.4	6 23.9	4.9	2.2	10.9	4.8	16.9	7.5
50	6 42.5	6 43.6	6 24.2	5.0	2.2	11.0	4.9	17.0	7.5
51	6 42.8	6 43.9	6 24.4	5.1	2.3	11.1	4.9	17.1	7.6
52	6 43.0	6 44.1	6 24.6	5.2	2.3	11.2	4.9	17.2	7.6
53	6 43.3	6 44.4	6 24.9	5.3	2.3	11.3	5.0	17.3	7.6
54	6 43.5	6 44.6	6 25.1	5.4	2.4	11.4	5.0	17.4	7.7
55	6 43.8	6 44.9	6 25.4	5.5	2.4	11.5	5.1	17.5	7.7
56	6 44.0	6 45.1	6 25.6	5.6	2.5	11.6	5.1	17.6	7.8
57	6 44.3	6 45.4	6 25.8	5.7	2.5	11.7	5.2	17.7	7.8
58	6 44.5	6 45.6	6 26.1	5.8	2.6	11.8	5.2	17.8	7.9
59	6 44.8	6 45.9	6 26.3	5.9	2.6	11.9	5.3	17.9	7.9
60	6 45.0	6 46.1	6 26.6	6.0	2.7	12.0	5.3	18.0	8.0

27^m	SOL PLANETAS	♈	LUA	v ou d	Corr.	v ou d	Corr.	v ou d	Corr.
s	° ′	° ′	° ′	′	′	′	′	′	′
00	6 45.0	6 46.1	6 26.6	0.0	0.0	6.0	2.8	12.0	5.5
01	6 45.3	6 46.4	6 26.8	0.1	0.0	6.1	2.8	12.1	5.5
02	6 45.5	6 46.6	6 27.0	0.2	0.1	6.2	2.8	12.2	5.6
03	6 45.8	6 46.9	6 27.3	0.3	0.1	6.3	2.9	12.3	5.6
04	6 46.0	6 47.1	6 27.5	0.4	0.2	6.4	2.9	12.4	5.7
05	6 46.3	6 47.4	6 27.7	0.5	0.2	6.5	3.0	12.5	5.7
06	6 46.5	6 47.6	6 28.0	0.6	0.3	6.6	3.0	12.6	5.8
07	6 46.8	6 47.9	6 28.2	0.7	0.3	6.7	3.1	12.7	5.8
08	6 47.0	6 48.1	6 28.5	0.8	0.4	6.8	3.1	12.8	5.9
09	6 47.3	6 48.4	6 28.7	0.9	0.4	6.9	3.2	12.9	5.9
10	6 47.5	6 48.6	6 28.9	1.0	0.5	7.0	3.2	13.0	6.0
11	6 47.8	6 48.9	6 29.2	1.1	0.5	7.1	3.3	13.1	6.0
12	6 48.0	6 49.1	6 29.4	1.2	0.6	7.2	3.3	13.2	6.1
13	6 48.3	6 49.4	6 29.7	1.3	0.6	7.3	3.3	13.3	6.1
14	6 48.5	6 49.6	6 29.9	1.4	0.6	7.4	3.4	13.4	6.1
15	6 48.8	6 49.9	6 30.1	1.5	0.7	7.5	3.4	13.5	6.2
16	6 49.0	6 50.1	6 30.4	1.6	0.7	7.6	3.5	13.6	6.2
17	6 49.3	6 50.4	6 30.6	1.7	0.8	7.7	3.5	13.7	6.3
18	6 49.5	6 50.6	6 30.8	1.8	0.8	7.8	3.6	13.8	6.3
19	6 49.8	6 50.9	6 31.1	1.9	0.9	7.9	3.6	13.9	6.4
20	6 50.0	6 51.1	6 31.3	2.0	0.9	8.0	3.7	14.0	6.4
21	6 50.3	6 51.4	6 31.6	2.1	1.0	8.1	3.7	14.1	6.5
22	6 50.5	6 51.6	6 31.8	2.2	1.0	8.2	3.8	14.2	6.5
23	6 50.8	6 51.9	6 32.0	2.3	1.1	8.3	3.8	14.3	6.6
24	6 51.0	6 52.1	6 32.3	2.4	1.1	8.4	3.9	14.4	6.6
25	6 51.3	6 52.4	6 32.5	2.5	1.1	8.5	3.9	14.5	6.6
26	6 51.5	6 52.6	6 32.8	2.6	1.2	8.6	3.9	14.6	6.7
27	6 51.8	6 52.9	6 33.0	2.7	1.2	8.7	4.0	14.7	6.7
28	6 52.0	6 53.1	6 33.2	2.8	1.3	8.8	4.0	14.8	6.8
29	6 52.3	6 53.4	6 33.5	2.9	1.3	8.9	4.1	14.9	6.8
30	6 52.5	6 53.6	6 33.7	3.0	1.4	9.0	4.1	15.0	6.9
31	6 52.8	6 53.9	6 33.9	3.1	1.4	9.1	4.2	15.1	6.9
32	6 53.0	6 54.1	6 34.2	3.2	1.5	9.2	4.2	15.2	7.0
33	6 53.3	6 54.4	6 34.4	3.3	1.5	9.3	4.3	15.3	7.0
34	6 53.5	6 54.6	6 34.7	3.4	1.6	9.4	4.3	15.4	7.1
35	6 53.8	6 54.9	6 34.9	3.5	1.6	9.5	4.4	15.5	7.1
36	6 54.0	6 55.1	6 35.1	3.6	1.7	9.6	4.4	15.6	7.2
37	6 54.3	6 55.4	6 35.4	3.7	1.7	9.7	4.4	15.7	7.2
38	6 54.5	6 55.6	6 35.6	3.8	1.7	9.8	4.5	15.8	7.2
39	6 54.8	6 55.9	6 35.9	3.9	1.8	9.9	4.5	15.9	7.3
40	6 55.0	6 56.1	6 36.1	4.0	1.8	10.0	4.6	16.0	7.3
41	6 55.3	6 56.4	6 36.3	4.1	1.9	10.1	4.6	16.1	7.4
42	6 55.5	6 56.6	6 36.6	4.2	1.9	10.2	4.7	16.2	7.4
43	6 55.8	6 56.9	6 36.8	4.3	2.0	10.3	4.7	16.3	7.5
44	6 56.0	6 57.1	6 37.0	4.4	2.0	10.4	4.8	16.4	7.5
45	6 56.3	6 57.4	6 37.3	4.5	2.1	10.5	4.8	16.5	7.6
46	6 56.5	6 57.6	6 37.5	4.6	2.1	10.6	4.9	16.6	7.6
47	6 56.8	6 57.9	6 37.8	4.7	2.2	10.7	4.9	16.7	7.7
48	6 57.0	6 58.1	6 38.0	4.8	2.2	10.8	5.0	16.8	7.7
49	6 57.3	6 58.4	6 38.2	4.9	2.2	10.9	5.0	16.9	7.7
50	6 57.5	6 58.6	6 38.5	5.0	2.3	11.0	5.0	17.0	7.8
51	6 57.8	6 58.9	6 38.7	5.1	2.3	11.1	5.1	17.1	7.8
52	6 58.0	6 59.1	6 39.0	5.2	2.4	11.2	5.1	17.2	7.9
53	6 58.3	6 59.4	6 39.2	5.3	2.4	11.3	5.2	17.3	7.9
54	6 58.5	6 59.6	6 39.4	5.4	2.5	11.4	5.2	17.4	8.0
55	6 58.8	6 59.9	6 39.7	5.5	2.5	11.5	5.3	17.5	8.0
56	6 59.0	7 00.1	6 39.9	5.6	2.6	11.6	5.3	17.6	8.1
57	6 59.3	7 00.4	6 40.2	5.7	2.6	11.7	5.4	17.7	8.1
58	6 59.5	7 00.6	6 40.4	5.8	2.7	11.8	5.4	17.8	8.2
59	6 59.8	7 00.9	6 40.6	5.9	2.7	11.9	5.5	17.9	8.2
60	7 00.0	7 01.1	6 40.9	6.0	2.8	12.0	5.5	18.0	8.3

Figura 9.6: Tábua de Acréscimos e Correções do Almanaque Náutico

9.4 Extratos da Tábua PUB-249 Volume I

LAT 14°S

LHA ♈	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn
	ARCTURUS	•ANTARES	ACRUX	•Suhail	Alphard	REGULUS	•Denebola
180	43 01 046	26 31 113	40 48 176	42 53 223	52 03 274	51 48 312	61 10 354
181	43 42 045	27 25 113	40 52 177	42 13 223	51 05 274	51 04 311	61 03 352
182	44 23 044	28 19 113	40 55 177	41 33 224	50 07 273	50 20 310	60 54 350
183	45 03 043	29 12 113	40 57 178	40 53 224	49 08 273	49 35 309	60 43 348
184	45 42 042	30 06 113	40 59 179	40 13 224	48 10 273	48 49 308	60 30 346
185	46 21 041	31 00 113	41 00 179	39 32 225	47 12 272	48 03 307	60 15 344
186	46 59 040	31 54 113	41 01 180	38 51 225	46 14 272	47 16 306	59 58 342
187	47 36 039	32 47 113	41 01 180	38 10 225	45 16 272	46 28 305	59 40 341
188	48 12 038	33 41 113	41 00 181	37 28 226	44 18 272	45 40 304	59 19 339
189	48 47 037	34 35 113	40 59 182	36 46 226	43 19 271	44 52 304	58 58 337
190	49 21 036	35 29 113	40 57 182	36 05 226	42 21 271	44 03 303	58 34 335
191	49 55 034	36 22 113	40 54 183	35 23 226	41 23 271	43 14 302	58 09 334
192	50 27 033	37 16 113	40 51 183	34 40 227	40 25 271	42 25 301	57 43 332
193	50 59 032	38 10 113	40 47 184	33 58 227	39 27 270	41 35 301	57 15 330
194	51 29 031	39 03 113	40 43 185	33 16 227	38 28 270	40 45 300	56 45 329
	ARCTURUS	•Rasalhague	ANTARES	•ACRUX	Suhail	REGULUS	•Denebola
195	51 58 029	17 07 072	39 57 113	40 38 185	32 33 227	39 54 299	56 15 327
196	52 26 028	18 03 072	40 51 113	40 33 186	31 50 227	39 03 299	55 43 326
197	52 53 027	18 58 071	41 44 113	40 26 186	31 07 227	38 12 298	55 09 325
198	53 18 025	19 53 071	42 38 113	40 20 187	30 24 228	37 20 297	54 35 323
199	53 43 024	20 48 070	43 31 113	40 12 187	29 41 228	36 28 297	54 00 322
200	54 05 022	21 42 070	44 25 113	40 05 188	28 58 228	35 36 296	53 23 321
201	54 27 021	22 37 070	45 18 114	39 56 189	28 15 228	34 44 296	52 46 319
202	54 47 019	23 32 069	46 11 114	39 47 189	27 32 228	33 52 295	52 08 318
203	55 05 018	24 26 069	47 05 114	39 38 190	26 48 228	32 59 295	51 29 317
204	55 22 016	25 20 069	47 58 114	39 27 190	26 05 228	32 06 294	50 49 316
205	55 38 015	26 14 068	48 51 114	39 17 191	25 21 228	31 13 294	50 08 315
206	55 52 013	27 08 068	49 44 114	39 06 191	24 38 228	30 19 293	49 26 314
207	56 04 011	28 02 067	50 37 115	38 54 192	23 54 228	29 26 293	48 44 313
208	56 15 010	28 56 067	51 30 115	38 42 192	23 11 228	28 32 292	48 01 312
209	56 24 008	29 49 066	52 23 115	38 29 193	22 27 229	27 38 292	47 17 311
	ARCTURUS	•Rasalhague	ANTARES	•RIGIL KENT.	ACRUX	Sienah	•REGULUS
210	56 31 006	30 42 066	53 15 116	42 44 174	38 16 193	64 28 259	26 44 292
211	56 37 005	31 35 065	54 08 116	42 50 174	38 02 194	63 31 259	25 50 291
212	56 40 003	32 28 065	55 00 116	42 55 175	37 48 194	62 34 259	24 55 291
213	56 42 001	33 21 064	55 52 117	43 00 176	37 33 195	61 37 259	24 01 290
214	56 43 359	34 13 064	56 44 117	43 04 176	37 18 195	60 39 259	23 06 290
215	56 41 358	35 05 063	57 36 118	43 08 177	37 02 196	59 42 259	22 11 290
216	56 38 356	35 57 063	58 27 118	43 10 178	36 46 196	58 45 259	21 16 289
217	56 33 354	36 49 062	59 19 119	43 13 178	36 30 197	57 48 259	20 21 289
218	56 27 353	37 40 062	60 10 119	43 14 179	36 13 197	56 50 259	19 26 288
219	56 18 351	38 31 061	61 00 120	43 15 180	35 55 198	55 53 259	18 31 288
220	56 08 349	39 22 060	61 51 120	43 15 180	35 37 198	54 56 260	17 35 288
221	55 57 348	40 12 060	62 41 121	43 14 181	35 19 198	53 59 260	16 40 287
222	55 43 346	41 02 059	63 30 122	43 13 182	35 01 199	53 02 260	15 44 287
223	55 28 344	41 52 058	64 20 123	43 11 182	34 42 199	52 04 259	14 49 287
224	55 12 343	42 42 058	65 09 123	43 08 183	34 22 200	51 07 259	13 53 286
	Alphecca	•VEGA	ALTAIR	•Shaula	RIGIL KENT.	•SPICA	ARCTURUS
225	48 24 011	17 01 041	14 36 077	49 03 131	43 05 184	66 26 274	54 54 341
226	48 35 010	17 39 041	15 33 077	49 47 132	43 01 184	65 28 274	54 34 340
227	48 44 009	18 17 040	16 29 076	50 30 132	42 56 185	64 30 274	54 14 338
228	48 53 007	18 54 040	17 26 076	51 13 133	42 51 186	63 32 273	53 51 337
229	48 59 006	19 31 039	18 22 076	51 55 134	42 45 186	62 33 273	53 28 335
230	49 05 005	20 08 039	19 18 075	52 37 134	42 38 187	61 35 273	53 02 334
231	49 09 003	20 44 038	20 15 075	53 18 135	42 31 188	60 37 272	52 36 332
232	49 12 002	21 20 038	21 11 075	53 59 136	42 23 188	59 39 272	52 09 331
233	49 13 001	21 56 037	22 07 074	54 40 136	42 14 189	58 41 272	51 40 330
234	49 13 359	22 31 037	23 03 074	55 20 137	42 05 189	57 43 271	51 10 328
235	49 11 358	23 05 036	23 59 074	55 59 138	41 55 190	56 44 271	50 39 327
236	49 09 357	23 39 036	24 54 073	56 38 139	41 44 191	55 46 271	50 07 326
237	49 04 355	24 13 035	25 50 073	57 16 140	41 33 191	54 48 271	49 34 325
238	48 59 354	24 46 034	26 46 072	57 53 141	41 22 192	53 50 270	49 00 324
239	48 52 352	25 19 034	27 41 072	58 30 142	41 09 192	52 52 270	48 25 323
	VEGA	•ALTAIR	Shaula	•RIGIL KENT.	SPICA	•ARCTURUS	Alphecca
240	25 51 033	28 36 072	59 06 143	40 56 193	51 53 270	47 49 321	48 44 351
241	26 22 032	29 32 071	59 41 144	40 43 194	50 55 270	47 13 320	48 34 350
242	26 53 032	30 27 071	60 15 145	40 29 194	49 57 269	46 35 319	48 23 348
243	27 24 031	31 21 070	60 48 146	40 14 195	48 59 269	45 57 318	48 11 347
244	27 53 030	32 16 070	61 20 147	39 59 195	48 00 269	45 18 317	47 57 346
245	28 23 030	33 11 069	61 51 148	39 44 196	47 02 269	44 38 316	47 42 345
246	28 51 029	34 05 069	62 21 150	39 28 196	46 04 269	43 57 316	47 26 343
247	29 19 028	34 59 068	62 50 151	39 11 197	45 06 268	43 16 315	47 09 342
248	29 46 028	35 54 068	63 17 153	38 54 197	44 08 268	42 35 314	46 50 341
249	30 13 027	36 47 067	63 44 154	38 36 198	43 10 268	41 52 313	46 31 340
250	30 39 026	37 41 067	64 08 156	38 18 198	42 11 268	41 09 312	46 10 338
251	31 04 025	38 34 066	64 32 157	37 59 199	41 13 267	40 26 311	45 48 337
252	31 29 025	39 28 066	64 53 159	37 40 199	40 15 267	39 42 310	45 25 336
253	31 53 024	40 21 065	65 14 161	37 21 200	39 17 267	38 57 310	45 01 335
254	32 16 023	41 13 065	65 32 162	37 01 200	38 19 267	38 12 309	44 36 334
	•VEGA	ALTAIR	•Peacock	RIGIL KENT.	•SPICA	ARCTURUS	Alphecca
255	32 38 022	42 06 064	32 27 150	36 41 201	37 21 267	37 27 308	44 10 333
256	33 00 021	42 58 063	32 57 150	36 20 201	36 23 266	36 41 308	43 43 332
257	33 21 021	43 50 063	33 26 150	35 59 202	35 24 266	35 54 307	43 15 331
258	33 41 020	44 42 062	33 54 151	35 37 202	34 26 266	35 08 306	42 46 330
259	34 00 019	45 33 061	34 23 151	35 15 202	33 28 266	34 21 306	42 16 329
260	34 18 018	46 24 061	34 51 151	34 53 203	32 30 266	33 33 305	41 45 328
261	34 36 017	47 14 060	35 19 152	34 30 203	31 32 265	32 45 304	41 14 327
262	34 52 016	48 04 059	35 46 152	34 07 203	30 34 265	31 57 304	40 41 326
263	35 08 015	48 54 058	36 13 152	33 44 204	29 36 265	31 09 303	40 08 325
264	35 23 014	49 43 057	36 40 153	33 20 204	28 38 265	30 20 303	39 34 324
265	35 37 013	50 32 057	37 06 153	32 56 205	27 40 265	29 31 302	39 00 323
266	35 50 013	51 21 056	37 32 154	32 32 205	26 42 265	28 41 302	38 24 322
267	36 03 012	52 08 055	37 58 154	32 07 205	25 44 264	27 51 301	37 48 321
268	36 14 011	52 56 054	38 23 155	31 42 205	24 46 264	27 01 301	37 12 321
269	36 24 010	53 42 053	38 48 155	31 17 206	23 48 264	26 11 300	36 34 320

LAT 14°S

LHA ♈	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn	Hc Zn
	•VEGA	ALTAIR	•FOMALHAUT	Peacock	RIGIL KENT.	•ANTARES	ARCTURUS
270	36 34 009	54 28 052	20 30 117	39 13 155	30 52 206	65 13 236	25 21 300
271	36 42 008	55 13 051	21 22 117	39 37 156	30 26 206	64 24 237	24 30 299
272	36 49 007	55 58 049	22 14 117	40 00 156	30 00 207	63 35 238	23 39 299
273	36 56 006	56 42 048	23 06 117	40 23 157	29 34 207	62 45 239	22 48 298
274	37 01 005	57 25 047	23 58 117	40 46 157	29 08 207	61 55 240	21 57 298
275	37 06 004	58 07 046	24 50 117	41 08 158	28 41 207	61 05 240	21 05 297
276	37 09 003	58 48 044	25 42 117	41 29 159	28 14 208	60 14 241	20 13 297
277	37 12 002	59 28 043	26 34 117	41 50 159	27 47 208	59 23 241	19 21 297
278	37 14 001	60 07 041	27 26 117	42 11 160	27 20 208	58 32 242	18 29 296
279	37 14 000	60 45 040	28 19 117	42 31 160	26 53 208	57 40 242	17 37 296
280	37 14 359	61 21 038	29 11 116	42 50 161	26 25 208	56 49 243	16 44 295
281	37 12 358	61 57 037	30 03 116	43 09 161	25 57 209	55 57 243	15 52 295
282	37 10 357	62 31 035	30 55 117	43 27 162	25 30 209	55 05 244	14 59 295
283	37 06 356	63 03 033	31 47 117	43 45 163	25 02 209	54 12 244	14 06 294
284	37 02 355	63 34 031	32 39 117	44 02 163	24 33 209	53 20 244	13 13 294
	•DENEB	•FOMALHAUT	Peacock	RIGIL KENT	•ANTARES	Rasalhague	VEGA
285	26 33 020	33 31 117	44 18 164	24 05 209	52 27 245	55 57 320	36 57 354
286	26 52 019	34 23 117	44 33 165	23 37 209	51 35 245	55 19 319	36 50 353
287	27 10 018	35 15 117	44 48 165	23 08 209	50 42 245	54 40 318	36 43 352
288	27 28 017	36 07 117	45 03 166	22 40 209	49 49 245	54 00 316	36 35 351
289	27 45 017	36 59 117	45 16 167	22 11 210	48 56 246	53 20 315	36 25 350
290	28 02 016	37 51 117	45 29 168	21 42 210	48 03 246	52 39 314	36 15 349
291	28 17 015	38 43 117	45 41 168	21 13 210	47 09 246	51 56 313	36 04 348
292	28 32 014	39 35 117	45 53 169	20 44 210	46 16 246	51 13 312	35 52 348
293	28 47 014	40 26 117	46 04 170	20 15 210	45 23 246	50 30 311	35 39 347
294	29 00 013	41 18 117	46 14 171	19 46 210	44 29 247	49 46 310	35 25 346
295	29 13 012	42 10 118	46 23 171	19 17 210	43 36 247	49 01 309	35 10 345
296	29 25 011	43 01 118	46 31 172	18 48 210	42 43 247	48 15 308	34 55 344
297	29 36 011	43 53 118	46 39 173	18 19 210	41 49 247	47 29 307	34 38 343
298	29 46 010	44 44 118	46 46 174	17 49 210	40 55 247	46 42 306	34 21 342
299	29 56 009	45 35 118	46 52 174	17 20 210	40 02 247	45 55 305	34 02 341
	•DENEB	Alpheratz	•FOMALHAUT	Peacock	•ANTARES	Rasalhague	VEGA
300	30 05 008	16 28 054	46 27 119	46 57 175	39 08 247	45 07 305	33 43 340
301	30 13 007	17 14 053	47 18 119	47 02 176	38 14 247	44 19 304	33 23 340
302	30 20 007	18 01 053	48 08 119	47 05 177	37 21 247	43 31 303	33 03 339
303	30 26 006	18 47 052	48 59 119	47 08 178	36 27 247	42 42 302	32 41 338
304	30 32 005	19 33 052	49 50 120	47 10 178	35 33 247	41 52 302	32 19 337
305	30 36 004	20 19 051	50 40 120	47 12 179	34 40 247	41 03 301	31 56 336
306	30 40 003	21 04 051	51 30 121	47 12 180	33 46 247	40 12 300	31 32 336
307	30 43 003	21 49 050	52 21 121	47 12 181	32 52 247	39 22 300	31 08 335
308	30 46 002	22 34 050	53 10 121	47 10 182	31 58 247	38 31 299	30 42 334
309	30 47 001	23 18 049	54 00 122	47 08 182	31 05 247	37 40 298	30 17 333
310	30 47 000	24 02 049	54 49 122	47 05 183	30 11 247	36 49 298	29 50 332
311	30 47 359	24 46 048	55 38 123	47 02 184	29 17 247	35 57 297	29 23 332
312	30 46 359	25 29 048	56 27 123	46 57 185	28 23 247	35 05 297	28 55 331
313	30 44 358	26 12 047	57 16 124	46 52 186	27·30 247	34 13 296	28 26 330
314	30 41 357	26 54 047	58 04 124	46 46 186	26 36 247	33 21 296	27 57 330
	Alpheratz	•Diphda	ACHERNAR	Peacock	•ANTARES	VEGA	•DENEB
315	27 37 046	36 33 102	22 54 147	46 39 187	25 42 247	27 28 329	30 38 356
316	28 18 045	37 30 102	23 26 147	46 32 188	24 49 247	26 57 328	30 33 355
317	28 59 045	38 27 102	23 58 147	46 23 189	23 55 247	26 26 328	30 28 354
318	29 40 044	39 24 102	24 30 147	46 14 189	23 02 247	25 55 327	30 22 354
319	30 21 044	40 21 102	25 01 147	46 04 190	22 08 247	25 23 326	30 15 353
320	31 01 043	41 18 102	25 33 147	45 53 191	21 14 247	24 50 326	30 08 352
321	31 40 042	42 15 102	26 04 148	45 42 192	20 21 247	24 17 325	29 59 351
322	32 19 042	43 12 102	26 35 148	45 30 192	19 28 247	23 44 325	29 50 350
323	32 57 041	44 09 102	27 06 148	45 17 193	18 34 246	23 10 324	29 40 350
324	33 35 040	45 06 102	27 37 148	45 03 194	17 41 246	22 35 323	29 29 349
325	34 12 039	46 03 102	28 08 148	44 49 195	16 48 246	22 00 323	29 17 348
326	34 49 039	47 00 102	28 38 148	44 34 195	15 54 246	21 25 322	29 05 347
327	35 25 038	47 57 102	29 09 149	44 18 196	15 01 246	20 49 322	28 52 347
328	36 00 037	48 54 102	29 39 149	44 02 197	14 08 246	20 13 321	28 38 346
329	36 35 036	49 51 102	30 09 149	43 45 197	13 15 246	19 36 321	28 23 345
	•Alpheratz	Diphda	•ACHERNAR	Peacock	•Nunki	ALTAIR	DENEB
330	37 09 035	50 48 102	30 38 149	43 28 198	44 55 247	50 28 303	28 08 344
331	37 42 035	51 45 102	31 08 150	43 10 198	44 01 247	49 39 303	27 52 344
332	38 15 034	52 42 102	31 37 150	42 51 199	43 08 247	48 49 302	27 35 343
333	38 47 033	53 39 102	32 06 150	42 31 200	42 14 247	48 00 301	27 17 342
334	39 18 032	54 36 102	32 35 151	42 12 200	41 20 247	47 09 300	26 59 341
335	39 48 031	55 33 102	33 04 151	41 51 201	40 27 247	46 19 299	26 40 341
336	40 18 030	56 30 102	33 32 151	41 30 201	39 33 247	45 28 299	26 20 340
337	40 46 029	57 27 102	34 00 151	41 09 202	38 39 247	44 37 298	26 00 339
338	41 14 028	58 24 102	34 28 152	40 46 203	37 46 247	43 45 297	25 39 339
339	41 41 027	59 21 102	34 55 152	40 24 203	36 52 247	42 53 297	25 18 338
340	42 07 026	60 18 102	35 22 153	40 01 204	35 58 247	42 01 296	24 56 337
341	42 32 025	61 15 102	35 49 153	39 37 204	35 04 247	41 08 295	24 33 337
342	42 56 024	62 12 102	36 15 153	39 13 205	34 11 247	40 16 295	24 09 336
343	43 19 023	63 09 102	36 41 154	38 49 205	33 17 247	39 23 294	23 45 335
344	43 42 022	64 05 103	37 07 154	38 24 205	32 23 247	38 29 294	23 21 335
	Alpheratz	•Hamal	•ACHERNAR	Peacock	Nunki	•ALTAIR	DENEB
345	44 03 021	31 08 051	37 32 154	37 59 206	31 29 247	37 36 293	22 56 334
346	44 23 020	31 53 050	37 57 155	37 33 206	30 36 247	36 42 293	22 30 333
347	44 41 018	32 38 050	38 21 155	37 07 207	29 42 247	35 48 292	22 04 333
348	44 59 017	33 22 049	38 45 156	36 41 207	28 48 247	34 54 292	21 37 332
349	45 16 016	34 06 049	39 09 156	36 14 208	27 54 247	34 00 291	21 10 332
350	45 31 015	34 49 048	39 32 157	35 47 208	27 01 247	33 06 291	20 42 331
351	45 46 014	35 32 047	39 55 157	35 20 208	26 07 247	32 11 290	20 13 331
352	45 59 012	36 15 046	40 17 158	34 52 209	25 13 247	31 16 290	19 45 330
353	46 11 011	36 57 046	40 39 158	34 24 209	24 20 247	30 21 289	19 15 330
354	46 21 010	37 38 045	41 00 159	33 55 209	23 26 247	29 26 289	18 46 329
355	46 31 009	38 19 044	41 21 159	33 27 210	22 32 247	28 31 288	18 15 328
356	46 39 007	38 59 043	41 41 160	32 58 210	21 39 247	27 36 288	17 45 328
357	46 46 006	39 39 042	42 00 161	32 28 210	20 45 247	26 40 288	17 14 327
358	46 52 005	40 18 042	42 20 161	31 59 211	19 52 247	25 45 287	16 42 327
359	46 56 004	40 56 041	42 38 162	31 29 211	18 58 247	24 49 287	16 10 326

Figura 9.7: Página da PUB-249 - Latitude 14º

L.H.A. ♈	N. 89°	N. 80°	N. 70°	N. 60°	N. 50°	N. 40°	N. 20°	0°	S. 20°	S. 40°	S. 50°	S. 60°	S. 70°	S. 80°	S. 89°	L.H.A. ♈
	North latitudes								South latitudes							
								1992								
°	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	°
0	1 010	1 030	1 040	1 050	1 060	1 060	2 070	2 070	2 070	1 060	1 060	1 050	1 040	1 020	1 000	0
30	1 040	1 050	1 060	1 060	2 070	2 070	2 070	2 070	2 070	1 060	1 050	1 040	1 020	1 350	1 330	30
60	1 060	1 070	1 080	1 080	2 080	2 080	2 080	2 080	1 080	1 070	1 060	0 —	0 —	0 —	1 300	60
90	1 090	1 090	1 090	1 090	2 090	2 090	2 090	2 090	1 090	1 090	1 100	0 —	0 —	0 —	1 270	90
120	1 120	1 110	1 110	1 110	2 110	2 100	2 100	2 100	1 110	1 110	1 120	1 140	0 —	1 220	1 240	120
150	1 150	1 140	1 130	1 120	1 120	2 110	2 110	2 110	2 110	1 120	1 130	1 140	1 160	1 180	1 210	150
180	1 180	1 160	1 140	1 130	1 130	1 120	2 120	2 110	2 120	1 120	1 120	1 130	1 140	1 160	1 170	180
210	1 210	1 190	1 160	1 140	1 130	1 120	2 110	2 110	2 110	2 110	2 110	1 120	1 120	1 130	1 150	210
240	1 240	0 —	0 —	0 —	1 120	1 110	1 100	2 100	2 100	2 100	2 100	1 100	1 110	1 110	1 120	240
270	1 270	0 —	0 —	0 —	1 090	1 090	1 090	2 090	2 090	2 090	2 090	1 090	1 090	1 090	1 090	270
300	1 310	1 320	0 —	1 040	1 060	1 070	1 070	2 080	2 080	2 080	2 080	1 070	1 070	1 070	1 060	300
330	1 340	1 000	1 020	1 040	1 050	1 060	2 070	2 070	2 070	2 070	1 060	1 060	1 050	1 040	1 030	330
360	1 010	1 030	1 040	1 050	1 060	1 060	2 070	2 070	2 070	1 060	1 060	1 050	1 040	1 020	1 000	360
								1993								
0	1 000	1 020	1 040	2 050	2 060	2 060	3 070	3 070	3 070	2 060	2 060	2 050	1 040	1 020	1 000	0
30	1 030	1 050	2 060	2 060	2 070	2 070	3 070	3 070	2 070	2 060	1 050	1 040	1 020	1 350	1 330	30
60	1 060	1 070	2 070	2 080	2 080	3 080	3 080	3 080	2 080	1 070	1 060	1 040	1 000	1 320	1 300	60
90	1.090	1 090	2 090	2 090	2 090	3 090	3 090	2 090	2 090	1 090	1 090	0 —	0 —	1 270	1 270	90
120	1 120	1 110	2 110	2 100	2 100	3 100	3 100	2 100	2 110	1 110	1 120	1 140	1 180	1 220	1 240	120
150	1 150	1 130	2 120	2 120	2 120	2 110	3 110	3 110	2 110	2 120	1 130	1 140	1 160	1 190	1 210	150
180	1 180	1 160	1 140	2 130	2 120	2 120	3 120	3 110	3 120	2 120	2 120	2 130	1 140	1 160	1 180	180
210	1 210	1 190	1 160	1 140	1 130	2 120	2 110	3 110	3 110	2 110	2 120	2 120	2 130	1 140	1 150	210
240	1 240	1 220	1 180	1 140	1 120	1 110	2 110	3 100	3 100	3 100	2 100	2 110	2 110	1 110	1 120	240
270	1 270	1 270	0 —	0 —	1 090	1 090	2 090	2 090	3 090	3 090	2 090	2 090	2 090	1 090	1 090	270
300	1 300	1 320	1 000	1 040	1 060	1 070	2 080	2 080	3 080	3 080	2 080	2 080	2 070	1 070	1 060	300
330	1 330	1 350	1 020	1 040	1 050	2 060	2 070	3 070	3 070	2 070	2 070	2 060	2 060	1 050	1 030	330
360	1 000	1 020	1 040	2 050	2 060	2 060	3 070	3 070	3 070	2 060	2 060	2 050	1 040	1 020	1 000	360
								1994								
0	1 000	1 020	2 040	2 050	2 060	3 060	3 070	4 070	3 070	3 060	3 060	2 050	2 040	2 020	1 010	0
30	1 030	2 040	2 050	3 060	3 060	3 070	3 070	3 070	3 070	2 060	2 050	2 040	1 020	1 000	1 330	30
60	1 060	2 070	2 070	3 070	3 080	3 080	4 080	3 080	3 070	2 070	1 060	1 040	1 000	1 320	1 300	60
90	1 090	2 090	2 090	3 090	3 090	3 090	4 090	3 090	3 090	2 090	1 090	0 —	0 —	1 270	1 270	90
120	1 120	2 110	2 110	3 100	3 100	3 100	4 100	3 100	3 100	2 110	1 120	1 140	1 190	1 230	1 240	120
150	1 150	2 130	2 120	3 120	3 110	3 110	4 110	3 110	3 110	2 120	2 130	2 140	1 160	1 190	1 210	150
180	1 180	2 160	2 140	2 130	3 120	3 120	3 120	4 110	3 120	3 120	2 130	2 130	2 140	1 160	1 180	180
210	1 210	1 180	1 160	2 140	2 130	2 120	3 110	3 110	3 110	3 110	3 120	3 120	2 130	2 140	1 150	210
240	1 240	1 220	1 180	1 140	1 120	2 110	3 110	3 100	4 100	3 100	3 100	3 110	2 110	2 110	1 120	240
270	1 270	1 270	0 —	0 —	1 090	2 090	3 090	3 090	4 090	3 090	3 090	3 090	2 090	2 090	1 090	270
300	1 300	1 320	1 000	1 040	1 060	2 070	3 080	3 080	4 080	3 080	3 080	3 080	2 070	2 070	1 060	300
330	1 330	1 350	1 020	2 040	2 050	2 060	3 070	3 070	4 070	3 070	3 070	3 060	2 060	2 050	1 030	330
360	1 000	1 020	2 040	2 050	2 060	3 060	3 070	4 070	3 070	3 060	3 060	2 050	2 040	2 020	1 010	360
								1995								
0	2 000	2 020	2 040	3 050	3 060	4 060	4 070	4 070	4 070	4 060	3 060	3 050	2 040	2 020	2 010	0
30	2 030	2 040	3 050	3 060	4 060	4 070	4 070	4 070	4 070	3 060	3 050	2 040	2 020	2 000	2 340	30
60	2 060	2 070	3 070	3 070	4 080	4 080	4 080	4 080	3 070	2 070	2 060	1 040	1 000	1 320	2 300	60
90	2 090	2 090	3 090	4 090	4 090	4 090	4 090	4 090	3 090	2 090	1 090	1 080	0 —	1 280	2 270	90
120	2 120	2 110	3 110	3 100	4 100	4 100	4 100	4 100	3 100	2 110	2 120	1 140	1 190	1 230	2 240	120
150	2 150	2 130	3 120	3 120	4 110	4 110	4 110	4 110	4 110	3 120	2 130	2 140	2 160	1 190	2 210	150
180	2 180	2 160	2 140	3 130	3 120	4 120	4 120	4 110	4 120	4 120	3 130	3 130	2 140	2 160	2 180	180
210	2 210	2 180	2 160	2 140	3 130	3 120	4 110	4 110	4 110	4 110	4 120	3 120	3 130	2 140	2 150	210
240	2 240	1 220	1 180	1 140	2 120	2 110	3 110	4 100	4 100	4 100	4 100	3 110	3 110	2 110	2 120	240
270	2 270	1 270	0 —	1 100	1 090	2 090	3 090	4 090	4 090	4 090	4 090	4 090	3 090	2 090	2 090	270
300	2 300	1 310	1 350	1 040	2 060	2 070	3 080	4 080	4 080	4 080	4 080	3 080	3 070	2 070	2 060	300
330	2 330	1 350	2 020	2 040	2 050	3 060	4 070	4 070	4 070	4 070	4 070	3 060	3 060	2 050	2 040	330
360	2 000	2 020	2 040	3 050	3 060	4 060	4 070	4 070	4 070	4 060	3 060	3 050	2 040	2 020	2 010	360

Figura 9.8: Página da PUB -249 - Correção para Precessão e Nutação

Referências Bibliográficas

ANJO, A. J. B. (2019). *Cálculos de posicionamento usados pelos capitães do bacalhau, no início do século XX*. acessado em: maio/2016.

BICUDO (2019). *A história da geometria euclidiana do antigo Egito às salas de aula*. Acessado em: 13/09/2019.

COUTINHO, L. (2001). *Convite às geometrias não-euclidianas*. Interciência, Rio de Janeiro, RJ.

LIMA, E. L. (2011). *Meu professor de Matemática e outras histórias*. SBM, Rio de Janeiro,RJ.

MIGUENS, A. P. (1999). *Navegação a Ciência e a Arte - navegação astronômica e derrotas -Vol II*. Diretoria de Hidrografia e Navegação, Niterói, RJ.

ROQUE, PITOMBEIRA, T. R. e. J. B. P. d. C. (2019). *Tópicos de História da Matemática*. SBM, Rio de Janeiro, RJ.

SAMPAIO, J. C. V. (2008). *Uma Introdução à Topologia Geométrica*. EdUFSCAR, São Carlos, SP.

SANTOS, R. Américo e Oliveira, J. (2018). Trigonometria Triangular Esférica. *RCT-Revista de Ciência e Tecnologia*.

STEWART, J. (2013). *Cálculo Vol I*. Cengage Learning, São Paulo, SP.

Wikipedia (2019a). Wikipedia em inglês - trigonometria -esférica. Acessado em: 13/07/2019.

Wikipedia (2019b). Wikipedia em português - trigonometria - esférica. Acessado em: 15/09/2019.