UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Kleber Silva Filho

Combinatória na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 3

RECIFE
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Kleber Silva Filho

Combinatória na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 3.

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586c Filho, Kleber Silva
Combinatória na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 3 / Kleber Silva Filho. - 2020.
84 f.

Orientador: Eudes Mendes Barboza.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. Combinatória. 2. Princípios de Contagem. 3. OBMEP. 4. Formação de professores. 5. Resolução de problemas. I. Barboza, Eudes Mendes, orient. II. Título

CDD 510

Kleber Silva Filho

COMBINATÓRIA NA OBMEP — UMA ANÁLISE DE QUESTÕES DA PRIMEIRA FASE DO NÍVEL 3

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática — PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemâtica.

Aprovado em ____/____/______

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza (Orientador) — PROFMAT/UFRPE

____

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro — PROFMAT/UFPB

____

Profa. Dra. Karla Ferreira de Arruda Duque. — PROFMAT/UFRPE

Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo ao nosso Deus, pois sem Ele nada disso seria possível.

Aos meus pais, Luiza e Kleber por todo o sacrifício que fizeram durante a minha infância para que eu tivesse sempre uma educação de qualidade, serei eternamente grato. A minha filha Raquel, razão do meu viver, meu muito obrigado. A minha madrinha Fernanda, por ter contribuído de maneira fundamental para o meu crescimento acadêmico.

Agradeço ao meu orientador, Prof Dr Eudes Mendes Barboza, por não medir esforços durante o processo desse trabalho, ser paciente, amigo e uma pessoa ímpar. Agradeço também aos professores do PROFMAT, em especial a Prof Dra Anete Soares Cavalcanti, por toda sua maestria em conduzir o PROFMAT.

Gostaria de agradecer a Gilberto Campos, por sempre me apoiar nos momentos mais difíceis desse trabalho, sem me deixar desistir e sempre disponível para discutirmos alguma ideia. Aos amigos do PROFMAT, onde vivemos dois anos juntos, como uma família, sempre incentivando e animando para chegarmos ao final desse mestrado.

"A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É essa a emoção fundamental que está em toda ciência e toda arte. Se em um dia de tristeza, tiveres de escolher entre o mundo e o amor... escolhas o amor, e com ele conquiste o mundo!"

(Albert Einstein)

Declaração

Eu, Kleber Silva Filho declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título "Combinatória na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 3”, entregue como trabalho de conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo o uso de paráfrase sem as devidas indicações das fontes será considerado plágio e estará sujeito a processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador Dr. Eudes Mendes Barboza de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 20 de fevereiro de 2020.

Kleber Silva Filho

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal analisar questões das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) com ênfase em Combinatória. Comprometido com procedimentos didáticos adequados, baseados na melhora do processo de ensino-apendizagem, o presente trabalho torna-se uma possível ferramenta de estudo para a formação e capacitação de professores do Ensino Médio, alunos da Licenciatura em Matemática, bem como atender as demandas de estudantes que pretendem melhorar seu desempenho para participarem de Olimpíadas de Matemática, concursos e provas de vestibulares. Para atender tal objetivo foram selecionadas questões do nível 3 da OBMEP, do ano de 2010 até o ano de 2019 que tratem de Combinatória. Dessa forma, ao realizar uma análise na íntegra desse material, o profissional de educação perceberá que tal seleção de questões pode também ser usada como material didático em sala de aula.

Palavras-chave: Combinatória, Princípios de Contagem, OBMEP, Resolução de problemas, Formação de professores, Princípio da Casa dos Pombos.

Abstract

The present work has as main objective to analyze questions of the Brazilian Public Schools Mathematics Olympics (OBMEP) with emphasis on Combinatorics. Committed to adequate didactic procedures, based on the improvement of the teaching-learning process, the present work becomes a possible study tool for the formation and qualification of high school teachers, students of the Mathematics Degree, as well as meeting the demands of students who want to improve their performance by participating in Mathematical Olympiads, competitions and entrance exams. To meet this objective, OBMEP level 3 questions were selected from 2010 to 2019 that deal with Combinatorics. Thus, by conducting a full analysis of this material, the education professional will realize that such a selection of questions can also be used as didactic material in the classroom.

Keywords: Combinatorics, Counting Principles, OBMEP, Problem Solving, Teacher Training, Pigeonhole Principle.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

Ao longo da experiência como professor numa escola de Educação Básica, lecionando matemática para crianças e jovens, é práxis buscar diferentes maneiras para que todos os alunos aprendam os conteúdos repassados.

Quando se leciona no Ensino Médio, pode-se perceber que os estudantes apresentam bastante dificuldade em noções básicas e principalmente em raciocínio lógico-matemático. Ao investigar de maneira empírica o que se passava com o ensino-aprendizagem de matemática, percebe-se que uma grande parte dos estudantes e também de professores acabam tratando a matemática de forma mecânica, dificultando a elaboração do raciocínio lógico-dedutivo.

Conversando com alguns professores, é comum escutar a alegação de que é muito mais prático e fácil jogar fórmulas e treinar a aplicação delas, do que ensinar aos estudantes a pensar e desenvolver a lógica matemática.

No tocante à Combinatória, se observa que muitos docentes evitam esta área e outros, simplesmente, incentivam os alunos apenas a aplicarem fórmulas de arranjos, combinações e permutações, impedindo, assim, o aprendizado na área.

Com experiência de pouco mais de vinte anos com o Ensino Médio, conseguimos perceber muitas dificuldades com a combinatória, tanto pelos estudantes quanto pelos professores. Diante dessa observação fica o seguinte questionamento: Como tratar a combinatória de maneira menos mecânica nas aulas de matemática, permitindo que os alunos utilizem os conteúdos relativos a esse tópico com respostas simples e criativas?

Assim, buscamos escrever sobre esse tema com o objetivo de tentar ajudar professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem dessa área. Para isso, analisaremos as questões da 1ª fase da OBMEP do nível 3 (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) dos últimos dez anos (2010 a 2019) que tratam de combinatória. Tal escolha se justifica por se tratar de provas que possuem questões com uma abrangência muito grande de interessados. Essas questões incentivam a criatividade e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático nas suas resoluções, o que mostra a verdadeira essência da análise combinatória.

A partir disso, estabelecemos os seguintes objetivos

i) Divulgar o trabalho da OBMEP;
ii) Elaborar um material que sirva de base para estudantes do Ensino Médio que querem um material específico sobre combinatória para se prepararem para as

Olimpíadas de Matemática, bem como para o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM e demais vestibulares;

iii) Dar um suporte para professores do Ensino Médio, com o qual se pode refletir sobre o ensino-aprendizagem de combinatória;

iv) Apresentar soluções simples e criativas de problemas propostos pela OBMEP sobre combinatória;

v) Auxiliar estudantes da licenciatura em matemática, explorando ideias para trabalharem sobre combinatória.

Portanto, buscamos atingir professores, estudantes e admiradores da área de combinatória com esse trabalho, que está dividido em três capítulos. Como descrito a seguir.

Falaremos inicialmente sobre as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, sobre a Base Nacional Comum Curricular - BNCC e sobre o ensino de combinatória, onde exploraremos várias dicas para melhorar o ensino-aprendizagem.

No segundo capítulo trataremos sobre a Análise Combinatória, onde vamos ver o que é, além de um breve resumo sobre as principais partes da combinatória. Exploraremos o Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, Permutações, Combinações, Arranjos e o Princípio da Casa dos Pombos. Com esse resumo teremos ferramentas suficientes para trabalhar o capítulo seguinte.

No último capítulo, traremos as questões de combinatória da 1° fase da OBMEP dos últimos dez anos. Além das questões, apresentaremos as resoluções da OBMEP e na maioria das questões, resoluções alternativas. Teremos também comentários de todas as questões, fazendo uma análise de cada problema e, em alguns casos, sugerindo abordagens dessas questões em sala de aula.

1 OBMEP E O ENSINO DE COMBINATÓRIA

Neste capítulo abordaremos brevemente como as olimpíadas de matemática, especificamente a OBMEP, podem servir de instrumento motivador para tornar as aulas de matemática interessantes e desafiadoras, favorecendo o ensino dessa disciplina e atingir objetivos traçados por documentos e diretrizes oficiais como a Base Nacional Comum Curricular.

1.1 Sobre a OBMEP

Com o intuito de estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, no ano de 2005 foi criada a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, um projeto nacional dirigido inicialmente às escolas públicas, e posteriormente, a partir do ano de 2017 foi aberta a escolas da rede privada. É realizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

A OBMEP, entre outros, tem como objetivos principais;

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Além dos objetivos citados acima, a OBMEP ajuda a criar um ambiente motivador na escola, trabalhando de forma amigável o caráter de se por em estado de competição. O contato com questões desafiadoras e interessantes leva os alunos a melhorar a relação com os professores e os influenciam a trabalhar em grupo, melhorando assim o processo de ensino-aprendizagem.

As provas são dirigidas a alunos a partir do sexto ano do Ensino Fundamental e todas as séries do Ensino Médio. A OBMEP ano após ano vem quebrando recordes de participantes. Na sua primeira edição, em 2005, a OBMEP teve 10,5 milhões de alunos de 31 mil escolas. Já no ano de

2019, a OBMEP teve um total de 18.158.665 de alunos inscritos e 54.498 instituições de ensino participantes, mantendo assim, segundo o IMPA, o posto de maior competição de matemática do mundo.

1.2 Sobre a BNCC

Em 05 de outubro de 1988 após 20 meses de Assembleia Constituinte, foi promulgada a Constituição da República Federativa do Brasil de 1988, que prevê no artigo 210, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Primeiramente tratando apenas de diretrizes para o Ensino Fundamental, mas no decorrer da história, teve seu texto ampliado, trazendo diretrizes para o Ensino Infantil e Médio.

A BNCC consiste numa norma jurídica que prevê e define quais devem ser os conteúdos estudados na Educação Básica Nacional.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem ocorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017)

Dessa forma, podemos perceber que o documento norteia, de maneira objetiva, as bases do ensino no Brasil da educação infantil ao Ensino Médio.

1.2.1 A BNCC e as competências específicas para o Ensino Médio.

O Ensino Médio é direito de todo cidadão brasileiro, logo a BNCC vem como instrumento da garantia de exercer esse direito e, além disso, ela tem o papel de garantir a permanência e a conclusão do estudante desse ensino, diante da pluralidade econômica, cultural e social da sociedade contemporânea.

Além da garantia de direitos, e diante de tal pluralidade social, a BNCC descreve competências específicas para o Ensino Médio que acolham todos na escola e preparem os jovens diante das escolhas que cada um, no cerne de sua individualidade, queira tomar no sentido da sua formação profissional e consequentemente na carreira que queira seguir.

Desta forma foi necessário modificar a matriz curricular do Ensino Médio para atender as demandas sociais cada vez mais distintas, como fez a Reforma do Ensino Médio de 2017 - Lei n° 13.415/2017, que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, estabelecendo que:

> O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
>
> I – linguagens e suas tecnologias;
>
> II – matemática e suas tecnologias;
>
> III – ciências da natureza e suas tecnologias;
>
> IV – ciências humanas e sociais aplicadas;
>
> V – formação técnica e profissional (LDB, Art. 36; ênfases adicionadas).

Em particular, para a matemática e suas tecnologias, a BNCC elege competências específicas tanto para o Ensino Fundamental, como para o Ensino Médio, buscando a continuidade nesses ensinos.

A BNCC, na área da matemática e suas tecnologias, apresenta para o Ensino Médio as seguintes competências especificas:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (LDB, Lei nº 9.394/1996).

Estas diretrizes, como podemos perceber, já eram tratadas pela Lei de diretrizes e Bases (LDB) desde a década de 90. De lá para cá, muito já se avançou no que tange o ensino de matemática, no entanto, ainda se precisa pôr em prática o que se encontra no papel.

1.3 Sobre o Ensino de Combinatória

No ensino de combinatória precisamos evitar a mecanização e incentivar bastante o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Estudar análise combinatória é estimular a criatividade e a organização na resolução de problemas.

Precisa-se evitar a aplicação de fórmulas em excesso ou priorização de problemas particulares demais. A aplicação de muitas fórmulas atrapalha ideias gerais e complica bastante o raciocínio. Trocar o princípio multiplicativo por fórmulas de Arranjos, por exemplo, faz com que se crie dificuldades em resolver até problemas bem simples. Morgado (2014) corrobora dessa ideia dizendo:

> Você quer mostrar que é bom? Ou quer que seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema. Não se deve mostrar o truque antes de mostrar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos. Combinatória não é difícil, impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos.
> (MORGADO; CARVALHO, 2014, p.144)

Debater os erros cometidos pelos alunos são fundamentais para o aprendizado de combinatória. Ao realizar uma montagem errada não se deve falar simplesmente ao aluno que está errada e peça para ele apagar e fazer de novo. Analisar, explorar e discutir com o estudante o raciocínio que ele teve para chegar até aquele resultado, é um dos melhores processos para se entender combinatória, portanto deve-se discutir bastante sobre as contagens erradas, pois ajudará nos problemas futuros.

Morgado ainda faz os seguintes questionamentos: “Um processo seguro de se tornar as coisas complicadas é começar assim: Esse é um problema de arranjo ou de combinação? Aliás, para que serve os arranjos?” (MORGADO; CARVALHO, 2014).

Observando a citação acima e analisando a pergunta sobre para que servem os arranjos, gostaria de falar que não precisamos de fórmulas de arranjo para resolver os problemas de combinatória, o princípio multiplicativo é muito mais didático e bem melhor para o desenvolvimento do estudante. Mas, precisamos falar sobre arranjo em nossas aulas de ensino médio? A resposta é sim, pois os nossos estudantes prestarão alguns vestibulares e alguns deles exigem que o aluno conheça sobre o tema. Em particular, o ENEM, explora com frequência isso, como podemos verificar abaixo, por exemplo, uma questão da prova de 2018.

O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia. Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estante é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é?"

A) A_{10}^{4}

B) C_{10}^{4}

C) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$

D) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$

E) $C_4^2 \times C_6^2$

(Enem 2018, p.18, segundo dia – prova rosa).

Como podemos verificar na questão acima, o aluno precisa saber o que é um arranjo. E esse é o único motivo que nos faz ter que falar sobre arranjos em sala de aula.

Nesse exemplo acima, uma questão do ENEM, podemos destacar o absurdo que são as alternativas sugeridas como resposta. O que o elaborador quer com isso? Não tem sentido algum essas alternativas, pois o estudante pode realizar a contagem de uma outra forma, por exemplo usando o princípio multiplcativo e não encontrar alternativa. Ainda temos o fato de que a resolução seria simplesmente uma multiplicação de arranjos simples, mas o elaborador força o estudante a ter que apresentar a resposta como um produto de combinações simples multiplicada por 2×2. O item poderia apresentar respostas numéricas, o que privilegiaria todas as diferentes formas de contagem que chegariam a 360, que seria a resposta da questão.

Ao trabalhar com análise combinatória não podemos deixar de explorar as simetrias em algumas questões. Como, por exemplo, a questão 20 da primeira fase da OBMEP de 2017 (vide p. 62), onde a figura está dividida em quatro quadrados e basta contar o que acontece em um deles e multiplicar por 4. Outro exemplo é encontrado na questão 15 da primeira fase da OBMEP 2019 (vide p. 74), onde a contagem iniciando pelas cadeiras 1, 2 e 3 será a mesma se iniciando pelas cadeiras 6, 5 e 4 respectivamente.

Devemos sempre incentivar os estudantes a observar casos particulares em alguns problemas. Reduzir a contagem e buscar um padrão para casos menores ajuda bastante o desenvolvimento para o caso geral de um problema. Assim como devemos estimular os estudantes a escreverem alguns casos particulares na contagem de um problema.

Quando nos deparamos com um problema de combinatória é fundamental que procuremos nos sentir na questão, ou seja, se nos imaginarmos vivendo aquela situação problema e tentarmos contar caso a caso, ajudará bastante em construir a ideia da resolução.

Outra dica importante é ensinar a contar pelo método destrutivo, isto é, contar todos os casos de um problema e depois contar os casos que não servem. Ao fazer a diferença entre essas contagens, encontramos o resultado de vários problemas, como por exemplo, a questão 19 da primeira fase da OBMEP 2016 (vide p. 59).

Mais na frente, no capítulo 3, vamos encontrar esses métodos bem mais explicados e exemplificados.

Podemos também ver outro exemplo na questão 10 da primeira fase da OBMEP 2018 (vide p. 69).

Nos exemplos acima, percebemos que a contagem pelo método destrutivo é mais prática e de melhor compreensão.

Ao começar a organizar seu pensamento sobre a resolução de um problema de combinatória deve-se procurar tratar, de imediato, as restrições do problema. Iniciar a resolução pelas restrições é totalmente indicado.

Em resumo, para trabalharmos com o ensino de análise combinatória, precisamos incentivar nossos alunos a pensar bastante, desenvolver o raciocínio lógico-matemático, estimular a criatividade nas soluções e nunca tentar padronizar essa área tão bela da matemática.

2 UM POUCO SOBRE COMBINATÓRIA

Neste capítulo trataremos dos principais temas de combinatória presente nas últimas 10 edições da OBMEP. Estamos nos baseando em Augusto Cesar Morgado; Paulo Cezar Pinto Carvalho no Livro Matemática Discreta, Coleção Profmat e Augusto Cesar Morgado no Livro Análise Combinatória e Probabilidade.

2.1 O que é combinatória?

Essa parte da Matemática Discreta tem como principal objetivo a contagem. Organizar e contar subconjuntos de elementos de um conjunto finito, de acordo com algumas restrições.

Estudar a análise combinatória estimula a criatividade do indivíduo. Com problemas de vários modelos e níveis de dificuldade bem diversificados, o raciocínio lógico-matemático prevalece nas resoluções.

A combinatória apresenta também algumas fórmulas, que podem ajudar na contagem de problemas bem simples, bem como em boa parte das soluções de questões de nível avançado. Combinações, permutações e arranjos, por exemplo, são partes da combinatória que ajudam a contagem de algumas situações padronizadas, exploraremos isso mais a frente.

Ao falar de combinatória, não podemos deixar de citar a teoria das probabilidades. O estudo de combinatória se desenvolveu bastante devido a necessidade de resolver problemas de contagem com origem na teoria das probabilidades.

2.2 O Princípio Fundamental da Contagem.

Conhecido também como princípio multiplicativo, é o mais importante princípio na combinatória. Utilizado na grande maioria dos problemas de combinatória, podemos enunciá-lo da seguinte forma:

"Se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \times y$." (Coleção Profmat).

Exemplo: Raquel vai a um batizado. Ao abrir seu guarda roupas, percebeu que tem 4 vestidos e 3 sandálias. De quantas maneiras Raquel pode se vestir, se ela precisa escolher um vestido e uma sandália?

Solução: Para escolher o vestido (Decisão 1), Raquel tem 4 modos. Escolhido o vestido, ela tem 3 modos para escolher a sandália (Decisão 2), então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões 1 e 2 é 4 × 3 = 12.

2.3 O Princípio Aditivo.

Esse princípio está diretamente associado à união de dois conjuntos disjuntos. Podemos enunciá-lo da seguinte forma:

"Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos." (MORGADO, 1991).

Exemplo: Luiza tem 5 calças e 3 bermudas e precisa escolher uma dessas peças de roupa para vestir. De quantas maneiras ela pode fazer essa escolha?

Solução: Luiza tem 5 opções de escolher uma calça (Conjunto A) e 3 opções de escolher uma bermuda (Conjunto B). Como os conjuntos A e B são disjuntos e ela precisa escolher um elemento de A ou de B, então ela pode fazer isso de 5 + 3 = 8 maneiras.

2.4 Permutações.

Inicialmente, falaremos das permutações simples. Em seguida, focaremos em permutações com elementos repetidos e permutações circulares.

2.4.1 Permutações Simples.

Determinar o número de permutações simples é contar de quantas maneiras podemos organizar n objetos distintos em uma fila.

Para isso, temos n maneiras de escolher o primeiro da fila, $(n-1)$ maneiras de escolher o segundo da fila, $(n-2)$ de escolher o terceiro da fila, até o ultimo da fila que poderá ser escolhido de uma maneira. Utilizando o princípio multiplicativo, podemos organizar essa fila de $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$ maneiras, onde $n!$ significa o fatorial do número n.

Definição: O número de permutações simples, de n objetos distintos, P_n, é dado por:

$$P_n = n!$$

Exemplo: Quantos anagramas tem a palavra GATO?

Solução: Contar o número de anagramas da palavra GATO é pensar de quantas maneiras podemos ordenar as letras distintas G, A, T, O em uma fila, ou seja, uma permutação simples de 4 objetos, que é dado por $P_4 = 4! = 24$.

2.4.2 Permutações com elementos repetidos.

Contar o número de anagramas de uma palavra com letras repetidas é um exemplo clássico de permutações com repetição. Vamos analisar quantos anagramas tem a palavra APARTAMENTO. Se falássemos que seria uma permutação simples de 11 dígitos, cometeríamos um erro, pois ao trocar de posição duas letras repetidas, não mudaríamos o anagrama. Podemos então pensar quantas vezes estaríamos contando o mesmo anagrama ao trocar de posição as letras repetidas. Observe que a palavra APARTAMENTO possui três letras A, que podem permutar entre si de 3! maneiras, ou seja, se considerarmos a permutação de 11 letras, contaríamos o mesmo anagrama 3! vezes. Observe também que a letra T aparece duas vezes, e de maneira análoga ao que pensamos com a letra A, contaremos o mesmo anagrama de 2! maneiras. Se tivéssemos mais letras repetidas, seguiríamos o mesmo raciocínio. Portanto, podemos afirmar que o número de anagramas da palavra apartamento é dado por $\frac{11!}{3!2!}$, e podemos chamar esse problema de permutação de elementos repetidos, permutação de 11 elementos com 3 e 2 repetições. Podemos escrever isso da forma $P_{11}^{3,2}$.

Definição: O número de permutações de n elementos com r_1, r_2, r_3, ... , r_k elementos repetidos, é dado por:

$$P_n^{r_1,r_2,r_3,\dots,r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2!\, r_3! \dots\, r_k!}$$

Exemplo: Bruno, Breno, Bento, Carlos e Daniel são sócios de uma empresa e querem criar uma sigla com as iniciais de seus nomes. Quantas siglas podem obter?

Solução: Contar o número de siglas possíveis é contar o número de anagramas de BBBCD, que é uma permutação de 5 elementos com 3 elementos repetidos, e isso é dado por $P_5^3 = \frac{5!}{3!} = 20$.
Portanto, podem obter 20 siglas.

2.4.3 Permutações Circulares.

Esse é um conceito de combinatória que conta o número de maneiras de organizar n objetos distintos em um círculo, de modo que os espaçamentos entre eles sejam o mesmo e que disposições que coincidam por rotação sejam consideradas iguais.

Se tivéssemos que permutar n objetos distintos, poderíamos fazer isso de $n!$ maneiras, mas se colocarmos esses n objetos em um círculo, cada configuração aparecerá n vezes, considerando as n rotações, e portanto poderíamos ter $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ maneiras de organizar esses n objetos distintos em círculo.

Definição: O número de permutações circulares de n objetos distintos é dado por:

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Exemplo: De quantas maneiras 6 crianças podem se sentar em círculo, supondo que os espaços entre elas seja sempre o mesmo?

Solução: O número de maneiras que elas podem se sentar é obtido pelo número de permutações circulares de 6 elementos distintos, que é dado por $(PC)_6 = (6-1)! = 5! = 120$.

2.5 Combinação.

Aqui trataremos de combinação simples e com repetição.

2.5.1 Combinação Simples.

É a parte da combinatória que conta de quantas maneiras podemos selecionar p objetos, não ordenadamente, entre n objetos distintos dados.

Para selecionar o 1º objeto temos n maneiras, o 2º objeto temos $(n-1)$ maneiras, para o 3º objeto temos $(n-2)$ maneiras, até o p-ésimo objeto, onde temos $(n-p+1)$ maneiras. Como a ordem não é importante, podemos permutar esses p objetos selecionados de $p!$ maneiras e o grupo selecionado continua o mesmo. Portanto, se queremos selecionar p objetos, não ordenadamente, entre n objetos distintos, temos:

$$\frac{n \times (n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)}{p!} = \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)}{p!} \times \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{p!\times(n-p)!} \text{ maneiras.}$$

Definição: O número de maneiras de selecionar, não ordenadamente, p objetos entre n objetos distintos, é chamado de combinação simples e dado por:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplo: De quantas maneiras podemos formar um grupo de 3 pessoas, se temos 7 pessoas disponíveis?

Solução: Queremos selecionar 3 elementos, não ordenadamente, de 7 elementos disponíveis. Podemos fazer isso de $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 28$ maneiras.

2.5.2 Combinação com Repetição.

É um conceito da combinatória, usado para contar as maneiras que podemos selecionar p objetos, não ordenadamente, entre n objetos dados e esses objetos podem ser repetidos.

Todo problema de combinação com repetição pode ser associado ao seguinte problema:

"Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$?"

Vamos tomar um exemplo para determinar a resposta do problema acima.

Exemplo: Quantas soluções inteiras e não negativas tem a equação $x + y + z + w = 8$?

Solução: Cada solução dessa equação pode ser representada por uma fila de 8 bolas e 3 barras, por exemplo:

(3, 2, 0, 3) ⇒ ○○○ | ○○ | | ○○○

(1, 2, 3, 2) ⇒ ○ | ○○ | ○○○ | ○○

(0, 0, 5, 3) ⇒ | | ○○○○○ | ○○○

Perceba que as três barras separam os valores de x, y, z, w, onde a quantidade de bolas antes da primeira barra representa o valor de x, a quantidade de bolas entre a primeira e a segunda barra representa o valor de y, a quantidade de bolas entre a segunda e a terceira barra representa o valor de z e a quantidade de bolas após a terceira barra representa o valor de w.

Determinar então o número de soluções da equação é o mesmo que determinar o número de permutações de 8 bolas e 3 barras, o que é dado por $P_{11}^{8,3} = \frac{11!}{8!3!} = 165$.

Portanto, o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 8$ é 165.

Observando o exemplo acima, podemos dizer que o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ é dado por $P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1\,)}{p!(n-1)!}$. O que representa o número de permutações de p bolas e $(n-1)$ barras.

Definição: O número de maneiras de selecionar não ordenadamente, p objetos entre n objetos disponíveis podendo ter objetos repetidos é dado por:

$$(CR)_n^p = P_{n+p-1}^{n-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

Exemplo: De quantas maneiras podemos comprar um sorvete de 3 bolas em uma sorveteria que dispõe de 8 sabores distintos?

Solução: Podemos associar esse problema a pergunta: quantas soluções inteiras e não negativas tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3$, onde x_i representa a quantidade de bolas de sorvete do sabor i? O que pode ser determinado por uma permutação de 10 objetos, com repetição de 3 e de 7, e é dado por $P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$.

Portanto, podemos montar esse sorvete de 120 maneiras.

2.6 Arranjos Simples.

É o conceito de combinatória que conta o número de maneiras de selecionar p objetos, ordenadamente, de n objetos distintos disponíveis.

Para selecionar o 1º objeto temos n maneiras, para o 2º objeto temos $(n-1)$ maneiras, até a seleção do p–ésimo objeto, que pode ser feita de $(n-p+1)$ maneiras. O número de maneiras que podemos selecionar, ordenadamente, esses p objetos é dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots (n-p+1) \times \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Definição: O número de maneiras de selecionar ordenadamente, p objetos de n objetos distintos disponíveis é chamado de arranjo simples e é dado por:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo: De quantas maneiras podemos ter os três primeiros lugares de uma corrida com 10 participantes?

Solução: Precisamos selecionar 3 elementos, ordenadamente, de 10 elementos disponíveis. Isso é dado por:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

Temos então 720 maneiras de obter os três primeiros lugares.

2.7 Princípio da Casa dos Pombos.

Também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet, é um método muito utilizado em olimpíadas de matemática. O Princípio da Casa dos Pombos diz que se n pombos devem ser postos em m casas, e se $n > m$, então pelo menos uma casa terá pelo menos dois pombos. Quando enunciado como Princípio das Gavetas diz que se n objetos devem ser colocados em m gavetas, e se $n > m$, então pelo menos uma gaveta terá pelo menos dois objetos e facilmente observamos que são análogos.

Utilizado para resolver problemas de todos os níveis, esse princípio não pode ser deixado de lado quando falamos de contagem. Vejamos alguns exemplos:

i) Em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas nasceram no mesmo mês do ano.

ii) Ao lançar um dado 7 vezes, pelo menos em dois lançamentos teremos o mesmo resultado.

iii) Escolhendo um dia de uma semana para cada um dos 8 funcionários trabalharem em uma empresa, pelo menos dois funcionários trabalharão no mesmo dia.

3 Questões da OBMEP

No presente capítulo apresentaremos questões da OBMEP do nível 3 dos anos de 2010 a 2019, referentes a Combinatória, com as suas respectivas soluções disponibilizadas pela comissão organizadora no site oficial da OBMEP (www.obmep.org.br). Na maioria das questões o leitor encontrará uma resposta sugerida, diferente da fornecida pela OBMEP, com o intuito de gerar discussões em sala de aula e melhorar o processo de ensino-aprendizagem, bem como comentários e sugestões que ajudam o profissional docente a enxergar como trabalhar as questões em sala de aula e como usá-las de forma lúdica nas aulas de matemática.

Os comentários das questões foram elaborados de forma a poder auxiliar os estudantes que pretendem realizar tanto a OBMEP, como o ENEM e provas de vestibulares, bem como professores em suas aulas.

3.1 Problemas, Soluções, Comentários e Sugestões.

1. (Questão 12 - Ano 2010) Joana tem 10 pares diferentes de meias, guardados dentro de uma gaveta. Três meias estão furadas, sendo duas do mesmo par. Quantas meias ela deve tirar da gaveta, uma de cada vez e sem olhar, para ter certeza de que entre elas haja um par sem defeito?

Figura 1 - Escolhendo meias.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1jhEt_aHkQspkZLDXytZjT547HsvRLxzQ/view.

A) 5
B) 6
C) 10
D) 11
E) 13

Solução da OBMEP: (alternativa E)

Seja “n” o menor número de meias que a Joana pode retirar da gaveta com a certeza de que entre as meias retiradas haja um par sem defeito. Então $n-1$ é o maior número de meias que podem ser retiradas de tal forma que, entre elas, qualquer par seja defeituoso. O pior dos casos ocorre quando se retiram os dois pares defeituosos (o par de meias furadas e o par com uma das meias furada) e uma meia de cada um dos outros oito pares, num total de 12 meias. Portanto $n-1=12$ e então $n=13$.

Solução sugerida:

Temos que pensar no maior número de meias que Joana pode tirar sem ter ainda um par sem defeito. Ela pode tirar as 3 furadas, sendo as duas do mesmo par, tirar mais uma meia que fez par com uma das defeituosas e ainda retirar mais 8 meias, sendo uma de cada par dos que estão sem defeito e mesmo assim não conseguir um par sem defeito, ou seja, ela pode retirar $3+1+8=12$ meias sem obter um par sem defeito. Portanto, ao retirar mais uma meia, ela terá a certeza de que terá um par sem defeito, ou seja, Joana precisa retirar 13 meias.

Comentários e sugestões:

Podemos perceber na resolução desse problema a ideia do Princípio da Casa dos Pombos. Esse princípio, que não é apresentado na maior parte dos principais livros didáticos do Ensino Médio, é de extrema importância para o estudo de Combinatória. Nós professores, precisamos explorá-lo nas nossas aulas, entregando um material complementar ou discutindo em sala sobre esse Princípio.

2. (Questão 17 - Ano 2010) Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

A) 20
B) 32
C) 60
D) 72
E) 120

Solução da OBMEP: (alternativa C)

Temos dois casos a analisar: (a) Ana recebe dois presentes ou (b) Ana recebe apenas a boneca. No caso (a), Ana recebe a boneca e Tio Paulo deve distribuir os quatro presentes restantes de modo que cada criança, inclusive Ana, receba exatamente um desses presentes. Para isso, ele pode numerar os presentes (que são distintos) e escolher qual das crianças vai ganhar o primeiro presente (4 escolhas), depois qual vai ganhar o segundo (3 escolhas), depois qual vai ganhar o terceiro (2 escolhas) e finalmente qual vai ganhar o último (1 escolha). Isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. No caso (b), Tio Paulo deve distribuir os presentes entre as outras três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos um presente. Desse modo, uma das crianças vai receber dois presentes e as outras duas apenas um. O Tio Paulo deve escolher quem vai receber dois presentes (3 escolhas). Depois disso ele dá um presente para cada uma das crianças que vão receber apenas um presente ($4 \times 3 = 12$ escolhas) e entrega os presentes restantes à criança que vai ganhar dois presentes (1 escolha). Isso pode ser feito de $3 \times 1 \times 12 = 36$ maneiras diferentes. No total, Tio Paulo pode distribuir os presentes de $24 + 36 = 60$ maneiras diferentes.

Solução sugerida:

Como temos cinco presentes e quatro crianças, vamos inicialmente escolher a criança que ficará com dois presentes, escolher os presentes dela e em seguida escolher os presentes das outras crianças, pois todas devem receber presente.

Sendo Ana a criança que ficará com dois presentes, temos 4 maneiras para escolher os presentes dela, pois ela ficará com a boneca. Escolhidos os presentes de Ana, temos 3 possibilidades para escolher o presente de Bruna, 2 possibilidades para o de Cecília e 1 para Daniela. Portanto, sendo Ana a Criança com 2 presentes, podemos distribuir os presentes de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras.

Sendo Bruna a criança que ficará com 2 presentes, temos $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras diferentes para escolher os presentes de Bruna, pois Ana ficará com a boneca, restando 2 possibilidades para escolher o presente de Cecília e 1 possibilidade para escolher o presente de Daniela. Portanto, sendo Bruna a criança que ficará com 2 presentes, podemos distribuí-los de $6 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$ maneiras.

Sendo Cecília ou Daniela ficando com dois presentes, o número de maneiras de distribuição é análogo ao de Bruna.

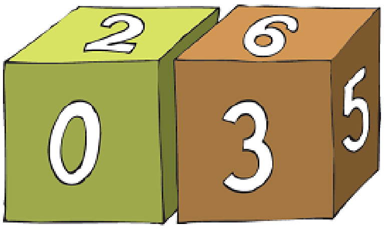
Portanto, para distribuir os presentes, $24 + 12 \times 3 = 60$ possibilidades.

Comentários e sugestões:

Ao trabalhar com essa questão, podemos indagar aos estudantes se teria a possibilidade de resolver essa questão sem dividir em pelo menos dois casos, e a partir daí explorar o quanto é importante atacar a questão pela restrição e que isso acarretará na divisão da questão em pelo menos dois casos. Perceba que podemos explorar nessa questão um pouco de combinação simples, conforme solução sugerida, mas que também ela pode ser resolvida sem necessidade de combinação, conforme solução da OBMEP.

3. (Questão 5 - Ano 2011) Pedro tem dois cubos com faces numeradas, com os quais ele consegue indicar os dias do mês de 01 a 31. Para formar as datas, os cubos são colocados lado a lado e podem ser girados ou trocados de posição. A face com o 6 também é usada para mostrar o 9. Na figura ao lado, os cubos mostram o dia 03. Qual é a soma dos números das quatro faces não visíveis no cubo da esquerda?

Figura 2 – Cubos de faces numeradas.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1hpMlzKP2a2NN_rm_3i9AtLnqcW42rSH4/view.

A) 15
B) 16
C) 18
D) 19
E) 20

Solução da OBMEP: (alternativa E)

O número 0 deve aparecer nos dois dados, para que seja possível formar as datas de 01 a 09 e 10, 20 e 30. Os números 1 e 2 também devem aparecer nos dois dados, para formar as datas 11 e 22. Desse modo no dado da direita aparecem os números 0, 1, 2, 3, 5, 6 (que também é 9) e no dado da esquerda aparecem os números 0, 1, 2, 4, 7 e 8. A soma das faces não visíveis do dado da esquerda é então $1 + 4 + 7 + 8 = 20$.

Outra solução é a seguinte:

Como acima, os números 0, 1 e 2 devem aparecer nos dois dados; os números 4, 7 e 8 também devem aparecer. Assim, a soma dos números nos dois dados deve ser $2 \times (0 + 1 + 2) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 39$. Os números que aparecem no dado da direita são 0, 1, 2 (ocultos) e 3, 5, 6 (visíveis); os números 0 e 2 estão visíveis no cubo da esquerda. Logo a soma dos números não visíveis no cubo da esquerda é $39 - (0 + 2 + 0 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6) = 39 - 19 = 20$.

Solução sugerida:

Como os cubos devem representar todos os dias de 01 a 31, então precisamos ter todos os números de 0 a 8, pois o 6 fará também o papel do número 9. Os dois cubos precisam ter o 1 e o 2, para poder formar os números 11 e 22. Ocupadas duas faces de cada cubo temos ainda 4 faces disponíveis em cada cubo, ou seja, 8 faces, e precisamos colocar os números 0, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. De acordo com a figura do enunciado, percebemos que o cubo da direita tem as faces com os números 3, 5, 6, além do 1 e do 2, logo o 8 ou 9 deverá aparecer no cubo da esquerda e então concluímos que o cubo da direita também deve ter o 0 para formar os dias 08 e 09. Portanto, o cubo da direita deve ser formado pelos números 0, 1, 2, 3, 5, 6.

O cubo da esquerda tem então o 4, 7 e 8 além do 1 e do 2 e consequentemente deve ter o zero para formar o dia 03. Assim, temos que:

- Faces do cubo da esquerda: 0, 1, 2, 4, 7 e 8.
- Faces do cubo da direita: 0, 1, 2, 3, 5 e 6.

A soma dos números das quatro faces que não estão visíveis no cubo da esquerda é $1 + 4 + 7 + 8 = 20$.

Comentários e sugestões:

Uma excelente questão para trabalhar a criatividade dos estudantes. Podemos resolver essa questão de forma prática, em sala de aula, onde podem ser construídos cubos e a questão ser resolvida com os estudantes testando todas as possibilidades, de uma forma lúdica. Podemos destacar também o fato de que Combinatória não é um jogo de aplicação de fórmulas e sim, de muito raciocínio e criatividade.

4. (Questão 9 - Ano 2011) Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

A) 12654

B) 12740

C) 13124

D) 13210

E) 13320

Solução da OBMEP: (alternativa A)

Com os números 1, 4, 6 e 8 podem-se formar $4 \times 3 \times 2 = 24$ números de três algarismos distintos, pois temos 4 possibilidades para escolher a centena, depois 3 possibilidades para escolher a dezena e por fim 2 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irá aparecer seis vezes cada um dos algarismos 6, 4, 2 e 1, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e $24 \div 4 = 6$; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como $6 \times (8 + 6 + 4 + 1) = 114$, a soma desses 24 números será $114 + 10 \times 114 + 100 \times 114 = 114 + 11400 + 1140 = 12654$.

Comentários e sugestões:

Uma questão que envolve o Princípio Multiplicativo e também uma noção de aritmética no que diz respeito a valores posicionais. O professor pode explorar, também, a resolução montando a conta de adição e sugerindo que os estudantes a efetuem usando o algoritmo habitual.

5. (Questão 15 - Ano 2012) Para a decoração da festa junina, Joana colocou em fila 25 bandeirinhas azuis, 14 brancas e 10 verdes, sem nunca deixar que duas bandeirinhas de mesma cor ficassem juntas. O que podemos concluir, com certeza, dessa informação?

Figura 3 - Bandeirinhas.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1lVhCd3QCzg-XLehaCUnYP994d1p9yBJG/view.

A) Nas extremidades da fila aparecem uma bandeirinha azul e uma branca.
B) Há cinco bandeirinhas consecutivas nas quais não aparece a cor verde.
C) Há pelo menos uma bandeirinha branca ao lado de uma verde.
D) Pelo menos quatro bandeirinhas azuis têm uma branca de cada lado.
E) Não existe um grupo de três bandeirinhas consecutivas de cores todas diferentes.

Solução da OBMEP: (alternativa B)

Para simplificar, no parágrafo a seguir “azul” significa “bandeirinha azul” e analogamente para as outras cores. Para que não haja azuis juntas, é necessário que entre duas azuis haja pelo menos uma bandeirinha de outra cor. Para isso, são necessárias pelo menos 24 bandeirinhas não azuis; como há exatamente $14 + 10 = 24$ bandeirinhas brancas e verdes, concluímos que a fila de bandeirinhas começa e termina com uma azul e que entre quaisquer duas azuis há exatamente uma branca ou uma verde. Em particular, as alternativas A) e C) são falsas. Usando as letras A, B e V para as cores azul, branco e verde, a figura abaixo mostra que a alternativa D) é falsa:

Figura 4 - Esquema do posicionamento das bandeirinhas.

ABABABABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABA

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1lVhCd3QCzg-XLehaCUnYP994d1p9yBJG/view

Vamos agora pensar em uma fila qualquer como uma sequência de blocos de duas letras dos tipos AB e AV, com uma letra A na extremidade direita. Pelo menos um bloco AB deve estar ao lado de um bloco AV, criando assim um bloco maior ABAV ou AVAB. Em qualquer dos casos, vemos uma sequência (BAV ou VAB) de três bandeirinhas de cores todas diferentes, o que mostra que a alternativa E) é falsa.

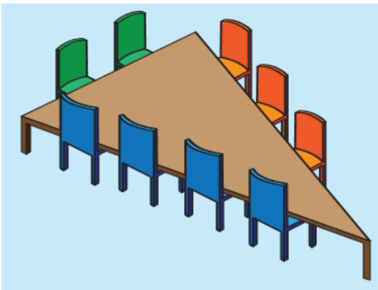
Finalmente, notamos que uma fila da Joana há 14 blocos AB e 10 blocos AV, além do A à direita. Com esses 10 blocos AV é possível separar no máximo 11 blocos AB uns dos outros; assim, há pelo menos dois blocos AB consecutivos, seguidos de uma letra A. Logo em qualquer fila da Joana há um bloco do tipo ABABA, ou seja, há pelo menos cinco bandeirinhas consecutivas nas quais não aparece a cor verde.

Comentários e sugestões:

Um problema que pode ser trabalhado de maneira lúdica no laboratório de matemática, onde os estudantes podem fazer as possibilidades com as bandeirinhas e comprovar a sua resposta de forma prática. Essa questão estimula o espírito criativo do estudante e faz com que ele tenha que pensar em várias possibilidades para identificar os itens falsos.

6. (Questão 18 - Ano 2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Figura 5 – Mesa triangular.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1lVhCd3QCzg-XLehaCUnYP994d1p9yBJG/view.

A) 288
B) 6720
C) 10080
D) 15120
E) 60480

Solução da OBMEP: (alternativa C)

Há 6 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Alice e Bernardo podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Os quatro amigos que ainda estão em pé podem se sentar nos 7 lugares vazios de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras diferentes. No total, os amigos podem se sentar à mesa de $6 \times 2 \times 840 = 10080$ maneiras diferentes.

Comentários e sugestões:

Mais uma questão onde podemos destacar que fórmulas não resolvem os problemas de Combinatória. Precisamos destacar, também, a importância de iniciar a resolução atacando as restrições, o que facilitará bastante o aprendizado de Combinatória.

7. (Questão 11 - Ano 2013) Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

A) 96
B) 102
C) 126
D) 144
E) 180

Solução da OBMEP: (alternativa A)

Vamos dividir os possíveis horários de Ana em dois casos: (1) se ela tem aula aos sábados e (2) se ela não tem aula aos sábados.

No caso (1), ela deve escolher sua aula de sábado (3 possibilidades) e depois sua aula à tarde (2 possibilidades) em algum dia de segunda a quinta (4 possibilidades). Temos então horários $3 \times 2 \times 4 = 24$ possíveis nesse caso.

No caso (2), ela deve escolher dois dias não consecutivos da semana (6 possibilidades), escolher um deles para ter aula pela manhã (2 possibilidades; automaticamente, no outro dia escolhido ela terá aula à tarde), escolher seu horário da manhã (3 possibilidades) e seu horário da tarde (2 possibilidades). Temos então $6 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$ horários possíveis nesse caso.

Solução sugerida:

Ana tem 6 dias pela manhã e 3 horários disponíveis, portanto $6 \times 3 = 18$ maneiras de escolher a aula da manhã. Ela tem 5 dias pela tarde e 2 horários disponíveis, portanto $5 \times 2 = 10$ maneiras de escolher a aula da tarde. Ana tem $18 \times 10 = 180$ maneiras de escolher uma aula pela manhã e outra pela tarde, sem restrições.

Temos $3 \times 2 = 6$ maneiras de marcar a aula no mesmo dia, pois temos 3 horários de manhã e 2 horários a tarde. Como as aulas do mesmo dia podem ocorrem de segunda a sexta, temos $6 \times 5 = 30$ maneiras de marcar a aula no mesmo dia.

Podemos marcar as aulas em dois dias consecutivos de $9 \times 6 = 54$ maneiras, pois são 9 maneiras de escolher os dias (segunda manhã / terça tarde, terça manhã / quarta tarde, quarta manhã / quinta tarde, quinta manhã / sexta tarde, segunda tarde / terça manhã, terça tarde / quarta manhã, quarta tarde/ quinta manhã, quinta tarde / sexta manhã, sexta tarde / sábado manhã) e $2 \times 3 = 6$ horários pra cada escolha dos dias consecutivos, (3 pela manhã e 2 pela tarde).

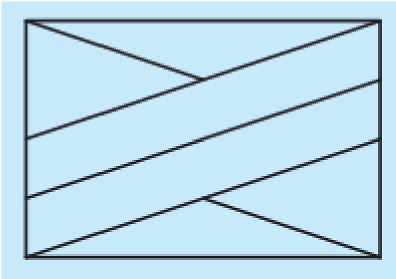
Portanto, Ana tem $180 - 30 - 54 = 96$ modos de marcar suas aulas de acordo com as restrições do problema.

Comentários e sugestões:

Uma questão onde podemos explorar com os estudantes duas formas diferentes de contagem; a construtiva e a destrutiva. Discutir com os estudantes que as duas formas de resolução são necessárias para o bom aprendizado da Combinatória, e destacar que a melhor forma de fazer é aquela que ele pensar na hora da resolução.

8. (Questão 17 - Ano 2013) Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez e que regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?

Figura 6 - Bandeira.



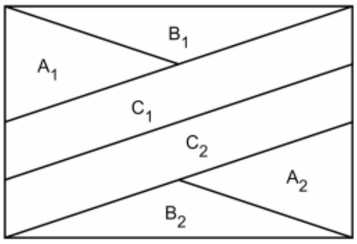
Fonte: https://drive.google.com/file/d/16QUYqvy4g96f6LYg4bWWO-LrSuZYGks5/view.

A) 336
B) 420
C) 576
D) 864
E) 972

Solução da OBMEP: (alternativa A)

Chamemos de n_1 o número de maneiras diferentes que Paulo pode pintar a bandeira, de acordo com as condições do enunciado, usando pelo menos 3 cores dentre as 4 cores disponíveis, e de n_2 o número de maneiras diferentes que Paulo pode pintar a bandeira usando 3 cores diferentes, dentre as 4 que ele dispõe. A resposta ao nosso problema será $n = n_1 - n_2$.

Figura 7 - Bandeira a ser pintada 1.



Fonte https://drive.google.com/file/d/16QUYqvy4g96f6LYg4bWWO-LrSuZYGks5/view

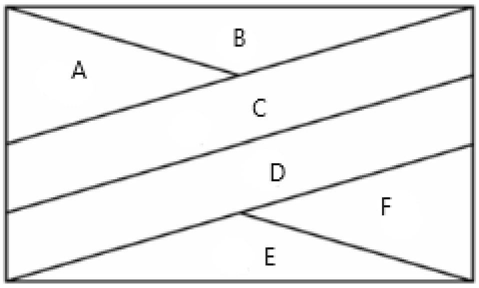
Vamos supor que Paulo pinte a bandeira na sequência A_1, B_1, C_1, C_2, B_2 e A_2. Pelo Princípio Multiplicativo, temos $n_1 = 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 432$. Por outro lado, para cada trio de cores diferentes temos $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes de pintar a bandeira. Como Paulo tem 4 maneiras diferentes de escolher trios de cores diferentes, temos que $n_2 = 4 \times 24 = 96$. Logo $n = 432 - 96 = 336$.

Solução sugerida:

Para seguir o enunciado do problema, teremos que usar no mínimo 3 cores, caso contrário, regiões adjacentes poderão possuir a mesma cor.

Vamos chamar de regiões da bandeira de A, B, C, D, E e F de acordo com a figura abaixo.

Figura 8 – Bandeira a ser pintada 2.



Fonte: Construção do autor.

Pintaremos seguindo a ordem A, B, C, D, E e F. Para a região A temos 4 possibilidades, para a região B temos 3 possibilidades, pois deve ser diferente da A e para a região C temos 2 possibilidades, pois deve ser diferente da A e da B. Observe que necessariamente devemos usar três cores diferentes para essa 3 regiões. Para pintar a região D temos 3 possibilidades, pois deve ser diferente de C, para a região E são 3 possibilidades, pois deve ser diferente de D, para a região F temos 2 possibilidades, pois deve ser diferente das regiões D e E.

Temos então, pelo Princípio Multiplicativo, $4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 432$ maneiras para pintar, sem restrições.

Para pintar usando exatamente 3 cores temos 4 possibilidades para a região A, 3 possibilidades para a região B, 2 possibilidades para a região C. Observe que já estamos com 3 cores escolhidas.

Para a região D temos 2 possibilidades, a mesma da região A ou da B. Para a região E temos 2 possibilidades, diferentes da região D. Para a região F temos uma possibilidade , diferente das regiões D e F.

Portanto, podemos pintar a bandeira de $432 - 96 = 336$ maneiras, usando necessariamente quatro cores.

Comentários e sugestões:

Um problema onde você pode explorar a importância do princípio destrutivo, contando todos os casos com as 4 cores e os casos onde são usadas apenas 3 cores e efetuar a diferença. Questões de pintar bandeiras e também de pintar mapas são bem tradicionais na área de Combinatória e devemos sempre trabalhar com elas em sala de aula.

9. (Questão 10 - Ano 2014) Gustavo possui certa quantidade de moedas de 1, 10, 25 e 50 centavos, tendo pelo menos uma de cada valor. É impossível combiná-las de modo a obter exatamente 1 real. Qual é o maior valor total possível para suas moedas?

A) 86 centavos

B) 1 real e 14 centavos

C) 1 real e 19 centavos

D) 1 real e 24 centavos

E) 1 real e 79 centavos

Solução da OBMEP: (alternativa C)

Como Gustavo possui pelo menos uma moeda de cada tipo, ele não pode ter duas moedas de 50 centavos, senão formaria um real. Ele também não pode ter duas moedas de 25 centavos. Com a moeda de 50 centavos e com uma moeda de 25 centavos ele também não pode formar um real. Concluímos assim, que Gustavo possui uma moeda de 50 centavos e uma moeda de 25 centavos. Gustavo não pode ter cinco moedas de 10 centavos, senão junto com a moeda de 50 centavos ele formaria um real. Para maximizar, podemos supor que ele tem, então, quatro moedas de 10 centavos. Com elas e com as moedas de 50 e 25 centavos ele não consegue formar um real. Por fim, ele não pode ter cinco moedas de 1 centavo, pois se tivesse, formaria um real juntando a elas a moeda de 50 centavos com a de 25 centavos e mais duas de 10 centavos. Assim, Gustavo deve ter, no máximo, quatro moedas de 1 centavo.

Logo, o maior valor total possível que Gustavo pode ter é $50 + 25 + 4 \times 10 + 4 \times 1 = 119$ centavos, ou seja, R$ 1,19.

Solução sugerida:

Como queremos o maior valor possível, vamos iniciar por moedas de maior valor.

Ele só pode ter uma moeda de R$ 0,50, pois se tivesse duas, completaria R$ 1,00.

Ele só pode ter uma moeda de R$ 0,25, pois se tivesse duas, junto com a moeda de R$ 0,50, completaria R$ 1,00.

A maior quantidade de moedas de R$ 0,10 que ele pode possuir são quatro, pois se ele tiver 5 e juntássemos com a de R$ 0,50 completaria R$ 1,00.

O máximo de moedas de R$ 0,01 seriam quatro, pois se tivesse cinco, e juntássemos com duas de R$ 0,10 uma de R$ 0,25 e uma de R$ 0,50, completaria R$ 1,00.

Sendo assim, o maior valor possível que Gustavo pode ter, é obtido quando ele possuir uma moeda de R$ 0,50, uma moeda de R$ 0,25, quatro de R$ 0,10 e quatro de R$ 0,01 totalizando 119 centavos de real, ou seja, R$ 1,19.

Comentários e sugestões:

A organização na hora da contagem é fundamental para que possamos resolver problemas de contagem. Esse problema é um exemplo disso, pois explora perfeitamente a necessidade de começar a contagem pelas moedas de maior valor. Poderíamos provocar os estudantes perguntando o que aconteceria se começassem a contagem a partir das moedas de 1 centavo e discutir um pouco a partir das respostas dadas.

10. (Questão 17 - Ano 2014) Mônica tem três dados nos quais a soma dos números em faces opostas é sempre 7. Ela enfileira os dados de modo que as faces em contato tenham o mesmo número, obtendo um número de três algarismos nas faces superiores. Por exemplo, o número 436 pode ser obtido como mostrado na figura; já o número 635 não pode ser obtido. Quantos números diferentes ela pode obter?

Figura 9 - Dados**.**

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1KZjoQvAYWBFzJXNZv1KhWDo3a4sFRAE4/view.

A) 72
B) 96
C) 168
D) 192
E) 216

Solução da OBMEP: (alternativa C)

Como as faces opostas somam 7, as faces podem ser divididas em três duplas: $\{1,6\}, \{2,5\}\ e\ \{3,4\}$.

Vamos considerar três casos:

a) Os algarismos que aparecem no topo dos três dados são todos da mesma dupla. Neste caso, a dupla $\{1,6\}$ gera $2 \times 2 \times 2 = 8$ números diferentes: 111, 116, 161, 611, 661, 616, 166 e 666.

Analogamente, a dupla $\{2,5\}$ gera outras oito possibilidades e a dupla $\{3,4\}$ mais oito. Assim, neste primeiro caso temos um total de 24 possibilidades.

b) Dois dos algarismos do topo pertencem a uma dupla e o outro pertence a uma dupla diferente.

Tabela 1 - Disposições possíveis das faces dos dados.

Em dois dados aparecem algarismos da dupla:	**No outro dado aparece algarismo da dupla:**
$\{1,6\}$	$\{2,5\}$
$\{1,6\}$	$\{3,4\}$
$\{2,5\}$	$\{1,6\}$
$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
$\{3,4\}$	$\{1,6\}$
$\{3,4\}$	$\{2,5\}$

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1KZjoQvAYWBFzJXNZv1KhWDo3a4sFRAE4/view

Pensemos nas possibilidades de formação de números em cada uma das linhas da tabela acima; por exemplo, no caso em que 1 ou 6 aparece no topo de dois dados e no outro dado aparece 2 ou 5, teremos $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ possibilidades (a saber: 112, 121, 211, 115, 151, 511, 162, 126, 216, ... , 566). Analogamente, cada um dos casos apresentados nas linhas da tabela produzirão 24 números diferentes.

No total, neste caso teremos $6 \times 24 = 144$ possibilidades.

c) Os três números que aparecem no topo dos dados são provenientes de números de duplas diferentes. Este caso nunca ocorre, pois é impossível enfileirar os dados de modo que as faces em contato tenham o mesmo número.

Logo, podemos obter $24 + 144 = 168$ números diferentes.

Outra solução, utilizando o complementar:

Já que o caso c) não ocorre, basta descontar do total de números obtidos sem restrições de contato ($6 \times 6 \times 6 = 216$) os números obtidos que utilizam algarismos das três duplas. Para formar números utilizando algarismos das três duplas, temos 6 escolhas para o primeiro dado (números das 3 duplas), 4 escolhas para o segundo dado (números de duas duplas) e 2 escolhas para o terceiro dado (números de uma dupla). Logo, existem $6 \times 4 \times 2 = 48$ números no caso c). Consequentemente, Mônica pode obter $216 - 48 = 168$ números.

Uma terceira solução:

Podemos considerar inicialmente três casos:

a) As faces 1 e 6 (ou 6 e 1) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$. Neste caso, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \times 4 \times 4 = 64$ números diferentes.

b) As faces 2 e 5 (ou 5 e 2) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto $\{1, 3, 4, 6\}$. Analogamente neste caso, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \times 4 \times 4 = 64$ números diferentes. Entretanto, eles não precisam ser diferentes dos números encontrados no caso a).

c) As faces 3 e 4 (ou 4 e 3) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto $\{1, 2, 5, 6\}$. Como nos casos anteriores, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \times 4 \times 4 = 64$ números diferentes. Entretanto, eles não precisam ser diferentes dos números encontrados no caso a) ou no caso b).

Os três casos juntos produzem $3 \times 64 = 192$ números, porém nem todos distintos. Precisamos retirar desta contagem os números comuns aos casos a) e b), b) e c) e a) e c). Não há algarismos comuns aos três casos.

Como $\{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 4, 6\} = \{3, 4\}$, os algarismos comuns aos casos a) e b) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 3 e 4. A quantidade de tais números é $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Analogamente, como $\{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 5, 6\} = \{2, 5\}$, os algarismos comuns aos casos a) e c) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 2 e 5. A quantidade de tais números é $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Do mesmo modo, como $\{1, 3, 4, 6\} \cap \{1, 2, 5, 6\} = \{1, 6\}$, os algarismos comuns aos casos b) e c) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 2 e 5. A quantidade de tais números é $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Assim, Mônica pode obter $3 \times 64 - 3 \times 8 = 168$ números diferentes.

Comentários e sugestões:

Uma questão que exige do estudante um pouco mais de atenção, pois precisa ter muito cuidado para não contar casos repetidos. A OBMEP apresenta três soluções, tanto pelo método construtivo quanto pelo método destrutivo. O estudante precisa também perceber que ao juntar as faces iguais, você pode ter quatro possibilidades de face voltada para cima, o que é crucial para resolução do problema.

11. (Questão 5 - Ano 2015) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Figura 10 - Premiação.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1A8gk7I8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW-/view.

A) 20
B) 30
C) 60
D) 90
E) 120

Solução da OBMEP: (alternativa D)

Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos dois premiados são:

AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: Ouro Ouro, Ouro Prata, Ouro Bronze, Prata Ouro, Prata Prata, Prata Bronze, Bronze Ouro, Bronze Prata e Bronze Bronze, ou seja, há 9 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, as diferentes formas de premiação são $10 \times 9 = 90$.

Outra solução:

Existem dois casos a considerar: ou os dois meninos premiados ganharam medalhas iguais, ou ganharam medalhas diferentes. Se as medalhas são iguais, há 3 possibilidades para as medalhas, a saber, ou as duas são de ouro, ou as duas são de prata, ou as duas são de bronze. Além disso, dos 5 meninos, apenas 2 receberam medalhas, o que pode ocorrer de $\frac{5 \times 4}{2}$ maneiras diferentes (são 5 escolhas para o primeiro e são 4 escolhas para o segundo menino, mas precisamos dividir por 2, para eliminar as repetições, uma vez que para determinar a dupla de premiados, não importa a ordem de escolha dos meninos). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times \frac{5 \times 4}{2} = 3 \times 10 = 30$ possibilidades para a premiação de dois desses meninos com medalhas iguais.

No segundo caso, se as medalhas recebidas pelos dois meninos premiados são diferentes, há 3 possibilidades para os tipos de medalhas: ouro e prata; ouro e bronze; e prata e bronze. Em cada uma dessas possibilidades, a mais valiosa será recebida por 1 dos 5 meninos e a outra por um dentre os 4 meninos restantes. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, nesse caso, o número de formas diferentes de premiação é $3 \times 5 \times 4 = 60$. Portanto, pelo Princípio Aditivo, o número total de formas diferentes de ocorrer a premiação é $30 + 60 = 90$.

Solução sugerida:

Temos 5 participantes e precisamos escolher dois derem para ser premiados. Podemos fazer isso de $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!}$ = 10 maneiras.

Ao escolher os dois premiados, temos $3 \times 3 = 9$ maneiras de escolher as medalhas deles, ouro, prata ou bronze. (Observe que eles podem receber medalhas do mesmo tipo).

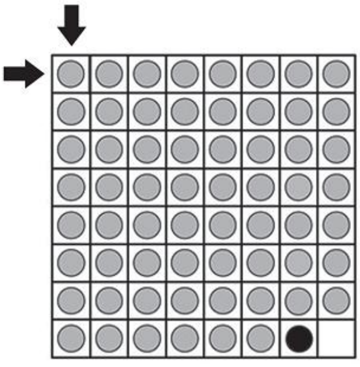
Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, temos $10 \times 9 = 90$ maneiras de fazer essa premiação.

Comentários e sugestões:

Uma questão onde podemos contar os 10 casos de escolhas das crianças e as 9 possibilidades para escolha das medalhas e usar o Princípio Multiplicativo, conforme primeira solução da OBMEP. Mas, podemos também falar um pouco de combinação para a resolução, de acordo com a solução sugerida. Enfim, uma questão muito boa para explorar métodos diferentes de contagem.

12. (Questão 6 - Ano 2015) Joãozinho tem um tabuleiro como o da figura, no qual há uma casa vazia, uma casa com uma peça preta e as demais casas com peças cinzentas. Em cada movimento, somente as peças que estão acima, abaixo, à direita ou à esquerda da casa vazia podem se movimentar, com uma delas ocupando a casa vazia. Qual é o número mínimo de movimentos necessários para Joãozinho levar a peça preta até a casa do canto superior esquerdo, indicada pelas setas?

Figura 11 – Tabuleiro.



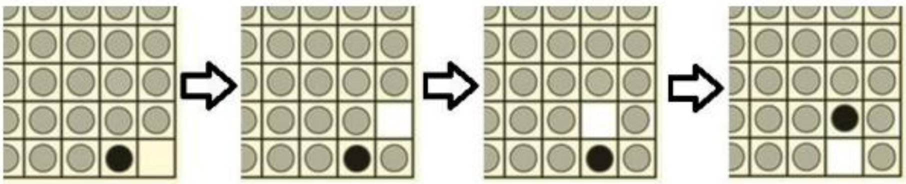
Fonte: https://drive.google.com/file/d/1A8gk7I8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW-/view.

A) 13
B) 21
C) 24
D) 36
E) 39

Solução da OBMEP: (alternativa E)

Joãozinho precisa levar a peça preta até o canto superior esquerdo do tabuleiro, indicado pelas setas. Para fazer isso, a peça preta precisa andar para cima e para a esquerda, sem nunca voltar com ela para a direita ou para baixo. Inicialmente, Joãozinho deve andar com a pedra preta para cima, fazendo três movimentos, indicados na figura abaixo:

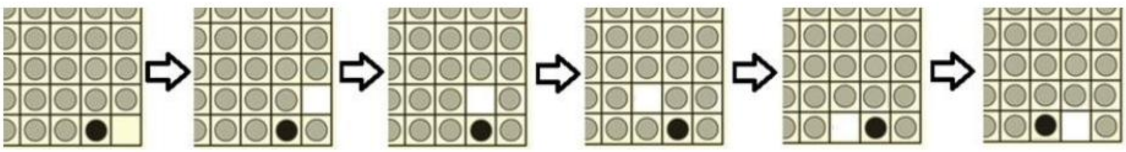
Figura 12 – Primeira movimentação das peças.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1A8gk7I8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW-/view

Ele deve andar com a pedra preta para cima, pois a outra possibilidade (andar com a pedra preta para a esquerda) requereria cinco movimentos, veja:

Figura 13 - Segunda movimentação das peças.

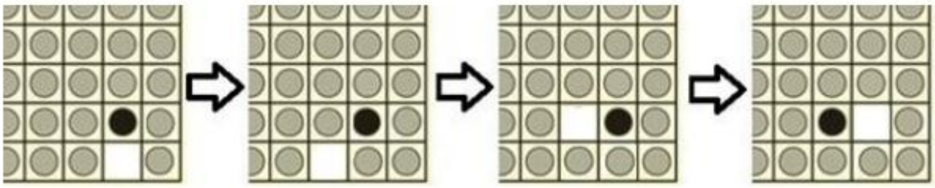


Fonte: https://drive.google.com/file/d/1A8gk7I8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW-/view

Como ele quer realizar o menor número possível de movimentos, ele opta em movimentar a pedra preta para cima, realizando três movimentos.

Após fazer isto, ele deve andar com a pedra preta para a esquerda, fazendo novos três movimentos.

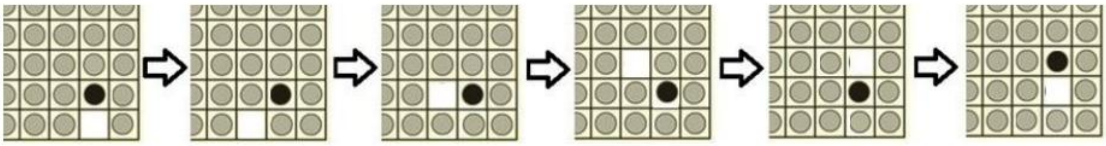
Figura 14 - Terceira movimentação das peças.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1A8gk7I8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW-/view

Se ele optasse por andar com a pedra preta para cima faria cinco movimentos, veja:

Figura 15 - Quarta movimentação das peças.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1A8gk7I8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW-/view

Deste modo, sempre optando em realizar o menor número de movimentos, ele escolhe mover a pedra preta para a esquerda, com outros três movimentos.

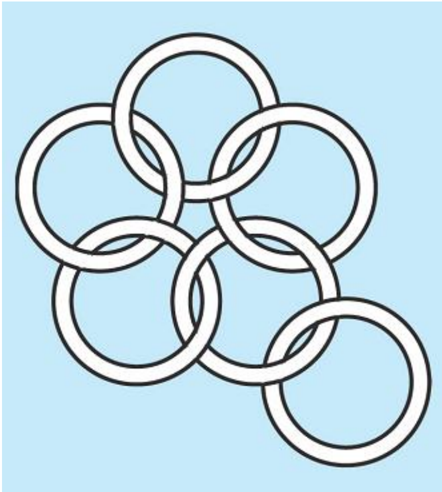
Assim, para levar a pedra preta até o canto superior esquerdo do tabuleiro, com o menor número de movimentos possível, Joãozinho deve andar com a pedra preta sete casas para cima e seis casas para a direita, alternando esses movimentos e começando para cima, gastando sempre três movimentos cada vez que a pedra preta andar uma casa. Logo, o número mínimo de movimentos necessários é $3 \times 7 + 3 \times 6 = 21 + 18 = 39$.

Comentários e sugestões:

Uma belíssima questão para explorarmos a ideia de contar em casos menores, ou seja, nesse problema precisamos perceber que para caminhar com a pedra, uma casa para cima ou uma casa para esquerda, são necessários 3 movimentos, o que vai se repetir até chegar na casa desejada. O estudante vai encontrar o padrão ao fazer a contagem casa a casa.

13. (Questão 18 - Ano 2016) O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?

Figura 16 - Anéis.



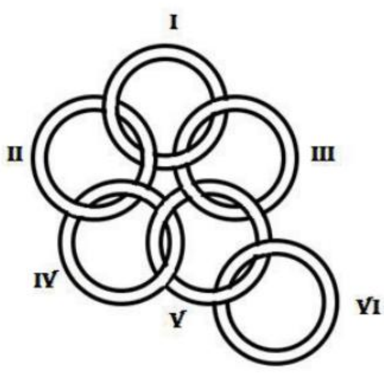
Fonte: https://drive.google.com/file/d/11wxnOCAbxYS1d_FAYKAxfcE5-nJ5iZPk/view.

A) 24
B) 36
C) 48
D) 60
E) 72

Solução da OBMEP: (alternativa D)

Numerando os anéis como na figura e iniciando a contagem pelas possibilidades da pintura do anel I, dividimos o problema em três casos.

Figura 17 - Ilustração do posicionamento dos anéis.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/11wxnOCAbxYS1d_FAYKAxfcE5-nJ5iZPk/view

1. O anel III deve ser pintado com a mesma cor que o anel II, o que garante que os anéis III e IV tenham cores diferentes. Então, pelo Princípio Multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

Figura 18 – Disposição das cores nos anéis 1.

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	2	1	2	→24

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1fTRExqStatHgyI78QRxRq7D3d72-AIFW/view

2. O anel III deve ser pintado com cor diferente do anel II e o anel IV com a mesma cor que o anel III. Então, pelo Princípio Multiplicativo temos as seguintes possibilidades de escolhas de cores.

Figura 19 - Disposição das cores nos anéis 2.

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	2	2	→24

Fonte: https://drive.google.com/file/d/11wxnOCAbxYS1d_FAYKAxfcE5-nJ5iZPk/view.

3. O anel III deve ser pintado com cor diferente do anel II e o anel IV com cor diferente do anel III. Então, pelo Princípio Multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

Figura 20 - Disposição das cores nos anéis 3.

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	1	2	→12

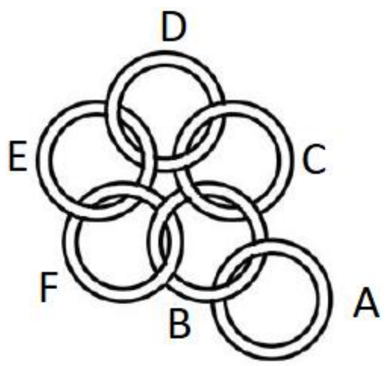
Fonte: https://drive.google.com/file/d/11wxnOCAbxYS1d_FAYKAxfcE5-nJ5iZPk/view.

Logo, o número de maneiras possíveis de pintar o símbolo é $24 + 24 + 12 = 60$.

Solução sugerida:

Vamos chamar os anéis de A, B, C, D, E e F conforme a imagem seguinte.

Figura 21 –Disposição dos anéis.



Fonte: OBMEP

Vamos começar contando as possibilidades para o anel A, são 3 possibilidades de cor, depois temos 2 possibilidades para o anel B, pois precisa ser diferente de A, e 2 possibilidades para o anel C, ou seja, $3 \times 2 \times 2 = 12$ possibilidades para pintar os anéis A, B e C.

Agora vamos pintar os anéis D, E, F. Para isso, quebraremos em 3 casos:

Se os anéis B e D tiverem a mesma cor, nos resta 1 possibilidade para D, 2 possibilidades para o anel E e 1 possibilidade para o anel F, o que dá $1 \times 2 \times 1 = 2$ possibilidades.

Se os anéis B e D tiverem cores diferentes, bem como B e E, nos resta 1 possibilidade para o anel D pois precisa ser diferente de C também, 1 possibilidade para o anel E pois precisa ser diferente de D também e uma possibilidade para o anel F pois precisa ser diferente de E e de B, o que dá $1 \times 1 \times 1 = 1$ possibilidade.

Se os anéis B e D tiverem cores diferentes, mas B e E tiverem a mesma cor, nos resta 1 possibilidade para o anel D, 1 possibilidade para o anel E, e 2 possibilidades para o anel F, o que nos dá $1 \times 1 \times 2 = 2$ possibilidades.

Temos então $2 + 1 + 2 = 5$ possibilidades para pintar os anéis D, E, F.

Portanto, para pintar os 6 anéis, de acordo com as condições propostas, utilizando o Princípio Multiplicativo, temos $12 \times 5 = 60$ maneiras.

Comentários e sugestões:

Essa questão precisa de uma atenção maior. Precisamos dividir em casos para resolvê-la, e o interessante é que esses casos nos leva a comparar anéis não vizinhos, o que torna uma questão de nível mais difícil. Uma questão onde podemos discutir bastante, possíveis erros cometidos pelos estudantes e fazer desses erros, uma enorme ferramenta de aprendizado para o estudo da Combinatória.

14. (Questão 19 - Ano 2016) Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

Figura 22 - Divisão dos pacotes de figurinhas.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/11wxnOCAbxYS1d_FAYKAxfcE5-nJ5iZPk/view.

A) 110
B) 120
C) 200
D) 201
E) 210

Solução da OBMEP: (alternativa C)

Vamos primeiro contar quantos pacotes distintos é possível fazer com qualquer número de figurinhas, incluindo o pacote sem nenhuma figurinha. Para fazer um pacote, Bruno pode, por exemplo, escolher primeiramente quantas figurinhas da Alemanha, depois quantas do Brasil e finalmente quantas da Colômbia ele deseja colocar no pacote. Pelo Princípio Multiplicativo, isso pode ser feito de $6 \times 7 \times 5 = 210$ maneiras diferentes; observemos que o fator 6 nessa expressão corresponde ao fato de que Bruno tem 6 escolhas (a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5) para o número de figurinhas da Alemanha; já o fator 7 é o número de escolhas para o número que figurinhas do Brasil e 5 é o número de escolhas para o número de figurinhas da Colômbia que ele pode colocar no pacote.

Por outro lado, o número de pacotes com menos que três figurinhas é 10, como vemos na tabela abaixo (na segunda coluna, usamos letras A, B e C para denotar Alemanha, Brasil e Colômbia, respectivamente):

Tabela 2 - Formação dos pacotes de figurinhas.

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	Nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
TOTAL		1 + 3 + 6 = 10

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1fTRExqStatHgyI78QRxRq7D3d72-AIFW/view

Segue, então, que o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é $210 - 10 = 200$.

Outra solução:

Um pacote com pelo menos três figurinhas poderá conter figurinhas com as três bandeiras diferentes, ou figurinhas com somente duas das bandeiras ou ainda figurinhas com apenas uma das bandeiras. Vamos fazer a contagem do número de pacotes distintos que podem ser feitos em cada um desses casos, com atenção para que sempre os pacotes contenham, no mínimo, três figurinhas.

1. Pacotes de figurinhas com as três bandeiras diferentes

Bruno tem 5 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira da Alemanha que poderá colocar em um pacote: A, AA, AAA, AAAA, AAAAA. Da mesma forma, terá 6 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira do Brasil e 4 para figurinhas com a bandeira da Colômbia. O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas com as três bandeiras diferentes será $5 \times 6 \times 4 = 120$.

2. Pacotes de figurinhas com todas as figurinhas com a mesma bandeira

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas e todas as figurinhas no pacote com a mesma bandeira é $3 + 4 + 2 = 9$ (AAA, AAAA, AAAAA, BBB, BBBB, BBBBB, BBBBBB, CCC e CCCC).

3. Pacotes de figurinhas com bandeiras de exatamente dois países

Se os países forem, por exemplo, Alemanha e Brasil, teremos $5 \times 6 - 1 = 29$ possibilidades, já que os pacotes devem conter pelo menos três figurinhas, e precisamos desconsiderar o pacote que tem apenas uma figurinha com a bandeira da Alemanha e uma do Brasil. A mesma contagem para as outras duplas (Alemanha - Colômbia e Brasil - Colômbia) nos dará, neste caso, o número de pacotes procurado:

$$(5 \times 6 - 1) + (5 \times 4 - 1) + (6 \times 4 - 1) = 29 + 19 + 23 = 71.$$

Somando os valores obtidos nas três contagens parciais, teremos $120 + 9 + 71 = 200$ pacotes distintos.

Comentários e sugestões:

A OBMEP apresenta duas possíveis soluções, uma pelo método construtivo e outra pelo método destrutivo. Observe que pelo método destrutivo, precisamos pensar no caso de montar o pacote sem figurinhas, caso o estudante estivesse fazendo por esse método, e esquecesse a contagem do pacote sem figurinhas, erraria a questão. A OBMEP apresenta a resposta 201 na alternativa D.

15. (Questão 14 - Ano 2017) Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de sete bolas com três cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?

A) 11
B) 14
C) 21
D) 22
E) 23

Solução da OBMEP: (alternativa E)

Observamos primeiro que Joãozinho pode escolher 22 bolas sem que nenhum grupo de 7 delas satisfaça as condições do enunciado; por exemplo, ele pode escolher 10 bolas verdes, 10 amarelas, 1 azul e 1 vermelha. Por outro lado, se ele escolher 23 bolas haverá, necessariamente, um grupo de 7 delas que satisfará a condição do enunciado. Podemos ver isso como segue.

Ao escolher 23 bolas, pelo menos 6 delas serão de uma mesma primeira cor. De fato, se isso não acontecesse, então haveria no máximo 5 bolas de cada cor, ou seja, Joãozinho teria escolhido no máximo $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ bolas, o que não é o caso, já que estamos supondo que ele escolheu 23. O maior número possível de bolas dessa cor entre as escolhidas é 10; sobram, então, no mínimo $23 - 10 = 13$ bolas para as outras três cores. O mesmo raciocínio aqui mostra que há pelo menos 5 bolas de uma segunda cor e que sobram no mínimo $13 - 10 = 3$ bolas para as duas cores restantes; finalmente, outra vez o mesmo raciocínio mostra que há pelos menos 2 bolas de uma terceira cor.

Mostramos, assim, que, se Joãozinho escolher 23 bolas, entre elas haverá um grupo de 13 bolas com 6 de uma primeira cor, 5 de uma segunda cor e 2 de uma terceira cor; em particular, entre essas bolas aparecerão 3 da primeira cor, 2 da segunda e 2 da terceira. Segue que 23 é o menor número de bolas que ele deve escolher para garantir a condição do enunciado.

Observação geral: O argumento empregado nessa solução pode ser formalizado como segue: se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais e sua média aritmética é m, isto é, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = m$, então, ou $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = m$ ou existe pelo menos um índice i tal que $a_i < m$ e pelo menos um índice j tal que $a_j > m$. No nosso caso, fizemos uma escolha de a_1 bolas verdes, a_2 bolas amarelas, a_3 bolas azuis e a_4 bolas vermelhas tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 23$; temos $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{23}{4} < 5$. Segue que existe pelo menos um i tal que $a_i > 5$, e, como a_i é um número inteiro, temos $a_i \geq 6$; em outras palavras, entre as 23 bolas existem pelo menos 6 de uma mesma cor, e analogamente para o restante da solução. A demonstração do fato geral do início desse parágrafo é inteiramente análoga à do caso particular que acabamos de analisar.

Solução sugerida:

Vamos pensar no número máximo de bolas que poderíamos retirar sem satisfazer a condição da questão, que seria retirar 7 bolas de cores diferentes, sendo 3 de uma cor, 2 de uma outra cor e mais 2 de uma terceira cor. Para isso teríamos que retirar todas as bolas de duas determinadas cores, ou seja, 20 bolas. Ao retirarmos essas 20 bolas, estamos ainda com apenas duas cores. Podemos ainda retirar mais duas bolas, de cores diferentes, uma de cada cor das restantes. Temos então uma retirada de 22 bolas, sendo 10 da primeira cor, 10 da segunda cor, 1 da terceira cor e 1 da quarta cor, e mesmo assim não teríamos 7 bolas de acordo com o enunciado da questão. Perceba que essa seria a quantidade máxima de bolas retiradas sem satisfazer o enunciado. Ao retirarmos mais uma bola, necessariamente teria que ser de uma das duas cores restantes e satisfaríamos a condição da questão. Temos que retirar então, no mínimo 23 bolas para termos a certeza de um grupo de 7 bolas, com três de uma cor, duas de uma outra cor e duas de uma terceira cor.

Comentários e sugestões: Uma questão para explorar a ideia do Princípio da Casa dos Pombos. Durante as aulas podemos estimular os alunos a pensarem na situação extrema de contagem, ou seja, pensar na hipótese de retirar o máximo de bolas sem ainda conseguir o objetivo dado, esse pensamento é extremamente importante no estudo de Combinatória.

16. (Questão 20 - Ano 2017) Sérgio quer numerar de 1 a 16 os triângulos da Figura 1 de tal modo que números consecutivos fiquem em triângulos que têm um lado em comum. Por exemplo, ele pode numerar os triângulos como na Figura 2.

Figura 23 – Triângulos.

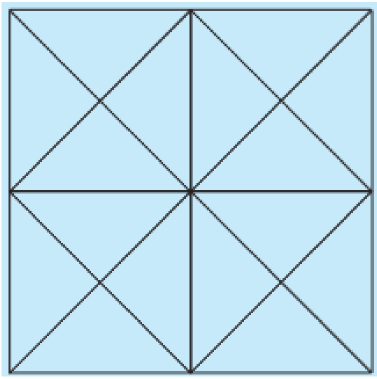


Figura 1

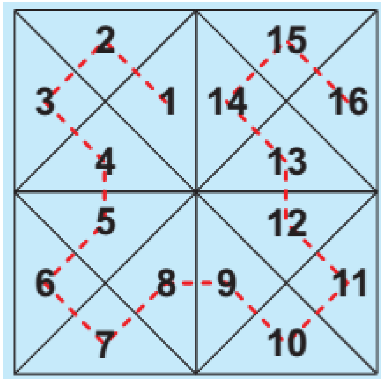


Figura 2

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1O_nEyPi-LqlBE7aZYgB6CXclkPhL7qXO/view

De quantas maneiras Sérgio pode fazer isso?

A) 16
B) 32
C) 48
D) 56
E) 64

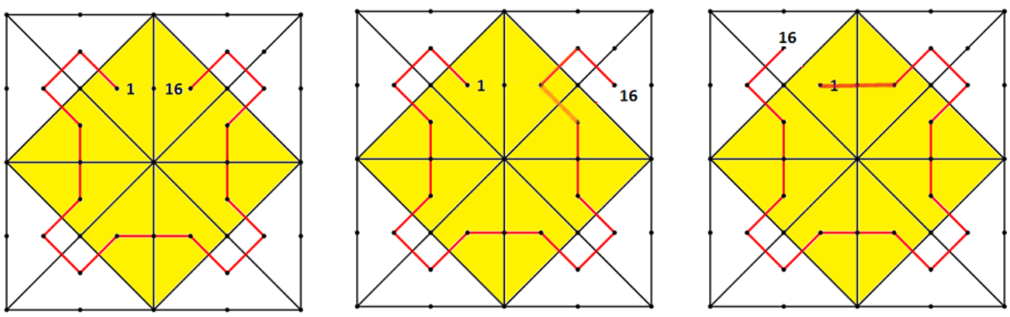
Solução da OBMEP: (alternativa D)

Vamos dividir o problema em duas situações.

1. Primeira situação:

Quando o número 1 é colocado em um dos 8 triângulos indicados na figura abaixo pela cor amarela (triângulos centrais).

Figura 24 - Primeira escolha da disposição dos números nos triângulos.



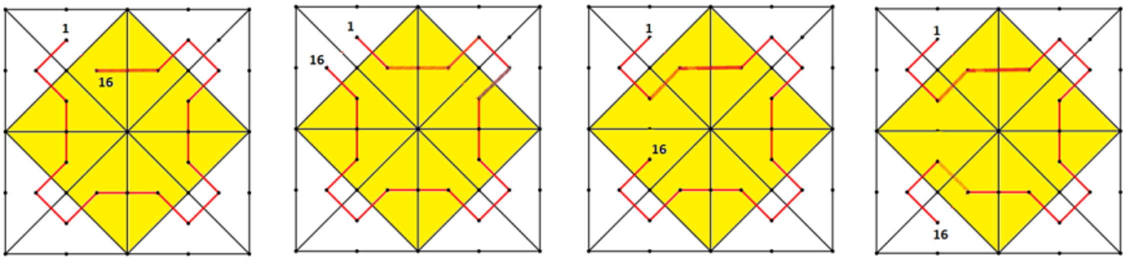
Fonte: https://drive.google.com/file/d/1O_nEyPi-LqlBE7aZYgB6CXclkPhL7qXO/view.

Escolhido qualquer um dos 8 triângulos amarelos para colocar o número 1, haverá 3 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8×3 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo.

2. Segunda situação:

Quando o número 1 é colocado em um triângulo branco (triângulo de canto).

Figura 25 - Segunda escolha da disposição dos números nos triângulos.



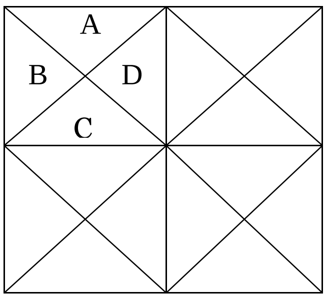
Fonte: https://drive.google.com/file/d/1O_nEyPi-LqlBE7aZYgB6CXclkPhL7qXO/view

Escolhido qualquer um dos 8 triângulos brancos para colocar o número 1, haverá 4 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8×4 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo. Somando-se as quantidades obtidas nas duas hipóteses, obtemos que o número de maneiras é $8 \times 3 + 8 \times 4 = 24 + 32 = 56$.

Solução sugerida:

Vamos contar o número de maneiras que Sérgio pode enumerar os triângulos dividindo essa contagem em alguns casos. Note que a figura está dividida em quatro quadrados menores, cada um deles formado por 4 triângulos. Pela simetria da figura, é suficiente contar o número de maneiras iniciando por um dos triângulos de um desses quatro quadrados e multiplicarmos esse valor por quatro, pois a contagem será a mesma iniciando em qualquer um dos quadrados. Contaremos o número de casos, iniciando a enumeração pelos triângulos A, B, C e D, conforme a figura abaixo.

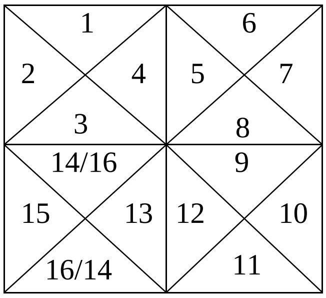
Figura 26 - Quadro 1.



Fonte: Construção do autor.

Iniciando pelo triângulo A, temos 4 possibilidades, conforme observamos a seguir.

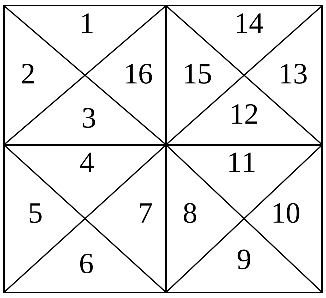
Figura 27 – Quadro 2.



(Temos duas possibilidades nessa configuração)

Fonte: Construção do autor.

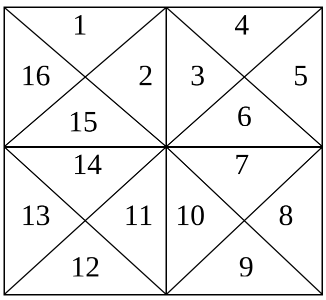
Figura 28 – Quadro 3.



(Temos uma possibilidade nessa configuração)

Fonte: Construção do autor.

Figura 29 – Quadro 4.

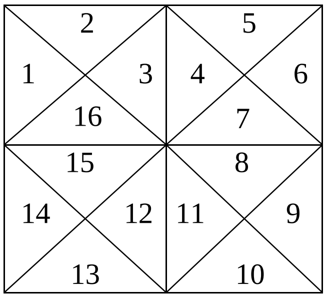


(Temos uma possibilidade nessa configuração)

Fonte: Construção do autor.

Iniciando pelo triângulo B, temos 4 possibilidades, conforme observamos a seguir.

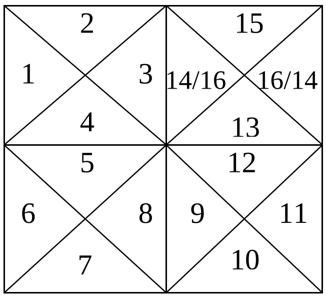
Figura 30 – Quadro 5.



Fonte: Construção do autor.

(Temos uma possibilidade nessa configuração)

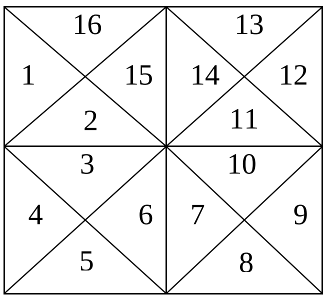
Figura 31 – Quadro 6.



Fonte: Construção do autor.

(Temos duas possibilidades nessa configuração)

Figura 32 – Quadro 7.

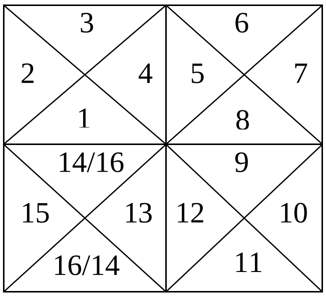


Fonte: Construção do autor.

(Temos uma possibilidade nessa configuração)

Iniciando pelo triângulo C, temos 3 possibilidades, conforme observamos a seguir.

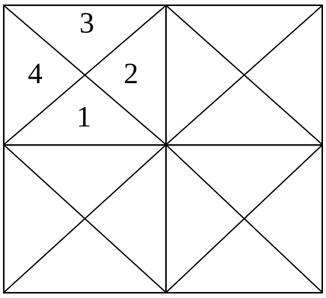
Figura 33 – Quadro 8.



Fonte: Construção do autor.

(Temos duas possibilidades nessa configuração)

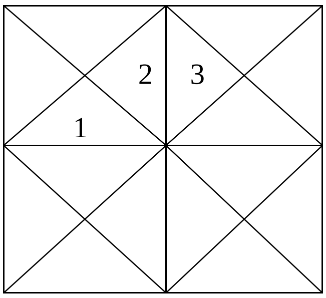
Figura 34 – Quadro 9.



Fonte: Construção do autor.

(Essa configuração é impossível)

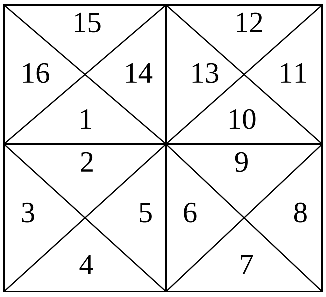
Figura 35 – Quadro 10.



Fonte: Construção do autor.

(Essa configuração é impossível)

Figura 36 – Quadro 11.

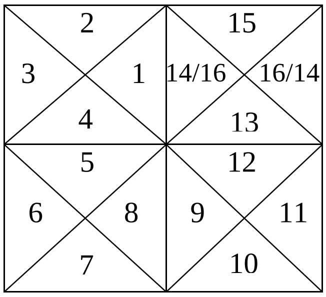


Fonte: Construção do autor.

(Temos uma possibilidade nessa configuração)

Iniciando pelo triângulo D, temos 3 possibilidades, conforme observamos a seguir.

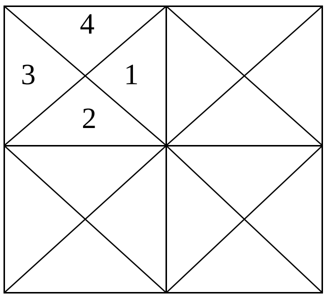
Figura 37 – Quadro 12.



Fonte: Construção do autor.

(Temos duas possibilidades nessa configuração)

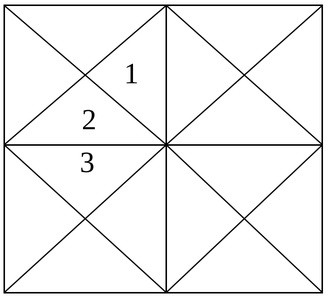
Figura 38 – Quadro 13.



Fonte: Construção do autor.

(Essa configuração é impossível)

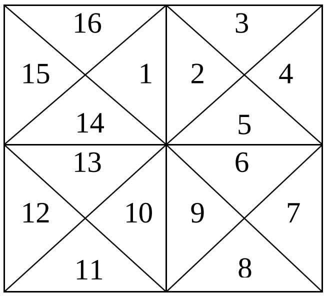
Figura 39 – Quadro 14.



(Essa configuração é impossível)

Fonte: Construção do autor.

Figura 40 – Quadro 15.



(Temos uma possibilidade nessa configuração)

Fonte: Construção do autor.

Iniciando pelos triângulos A, B, C e D, que compõem um dos quadrados menores, temos $4 + 4 + 3 + 3 = 14$ maneiras de enumerá-los.

Pela simetria da figura, concluímos que temos $14 \times 4 = 56$ maneiras para enumerar os triângulos de acordo com as condições do enunciado.

Comentários e sugestões:

Essa é uma questão onde devemos explorar a simetria. Perceba que podemos fazer essa contagem de mais de uma maneira. A solução da OBMEP faz a contagem separando os triângulos de dentro e os triângulos de fora, enquanto na solução sugerida fazemos a contagem separando os triângulos por quadrado. E nos dois casos usamos a simetria da situação para concluir que a contagem será a mesma ao se iniciar por vários triângulos.

17. (Questão 10 - Ano 2018) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

Figura 41 - Carros e vagas de estacionamento.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1_Z0jiUv5bsuKS9TWCrwqxb3C1M-fS8O0/view.

A) 56

B) 70

C) 71

D) 72

E) 80

Solução da OBMEP: (alternativa D)

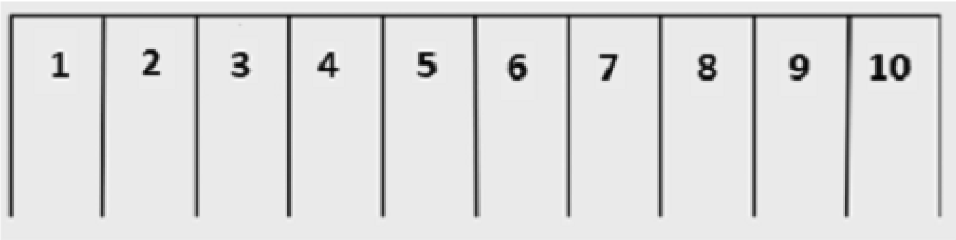
Consideramos dois casos;

a) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcadas com os números 1 ou 10. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 8 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $2 \times 8 = 16$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Multiplicativo da Contagem);

b) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcada com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 7 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $8 \times 7 = 56$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros.

De acordo com as situações anteriores, há um total de $16 + 56 = 72$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Aditivo da Contagem).

Figura 42 - Disposição das vagas disponíveis no estacionamento.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1_Z0jiUv5bsuKS9TWCrwqxb3C1M-fS8O0/view.

Solução sugerida:

Vamos inicialmente contar de quantas maneiras os dois carros podem estacionar, independente de estarem juntos ou não. Temos 10 possibilidades para o primeiro carro estacionar e 9 possibilidades para o segundo carro, pelo Princípio Multiplicativo, temos $10 \times 9 = 90$ maneiras de estacionar.

Vamos contar agora de quantas maneiras os dois carros podem estacionar SEM espaços entre eles. Temos 9 maneiras para escolher as duas vagas juntas $(1-2;\ 2-3;\ 3-4;\ \ldots; 9-10)$ e para cada uma dessas 9 maneiras temos duas possibilidades, que seria a permutação dos dois carros. O que nos dá $9 \times 2 = 18$ maneiras de estacionar os carros juntos.

Temos $90 - 18 = 72$ maneiras de estacionar os dois carros com pelo menos uma vaga livre entre eles.

Comentários e sugestões:

A solução da OBMEP mostra uma solução pelo método construtivo, dividindo a contagem em dois casos e fazendo usando do Princípio Aditivo. Na solução sugerida usamos o método destrutivo, onde o estudante pode contar todas as possibilidades e retirar as que não servem.

18. (Questão 18 - Ano 2018) Helena tem três caixas com 10 bolas em cada uma. As bolas dentro de uma mesma caixa são idênticas, e as bolas em caixas diferentes possuem cores distintas. De quantos modos ela pode escolher 15 bolas dessas três caixas?

Figura 43 - Caixas com bolas vermelhas, verdes e azuis.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1_Z0jiUv5bsuKS9TWCrwqxb3C1M-fS8O0/view.

A) 91
B) 136
C) 150
D) 200
E) 210

Solução da OBMEP: (alternativa A)

Suponha que não escolhamos bolas na primeira caixa; podemos escolher então 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 bolas da segunda caixa e completar o que falta para 15 com bolas da terceira caixa (6 possibilidades).

Se escolhermos só 1 bola da primeira caixa, podemos escolher de 4 a 10 bolas da segunda (7 possibilidades).

Se escolhermos exatamente 2 bolas da primeira caixa, podemos escolher de 3 a 10 bolas da segunda (8 possibilidades).

Prosseguindo dessa maneira, escolhendo 3 bolas da primeira caixa, teremos 9 possibilidades; escolhendo 4 bolas da primeira caixa, teremos 10 possibilidades; escolhendo 5 bolas da primeira caixa, teremos 11 possibilidades.

Ao escolher exatamente 6 bolas da primeira caixa, podemos escolher de 0 a 9 bolas da segunda (10 possibilidades); ao escolher 7 bolas da primeira caixa, teremos outras novas 9 possibilidades; ao escolher 8 bolas da primeira caixa, mais 8 possibilidades; ao escolher 9 bolas da primeira caixa, mais 7 possibilidades e, finalmente, ao escolher as 10 bolas da primeira caixa, 6 possibilidades (as quais correspondem às escolhas de 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 bolas da segunda caixa).

Juntando todos os casos, temos $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91$ possibilidades de escolha. Esse raciocínio, com outra organização, é apresentado na solução a seguir:

Outra solução:

Sejam $x, y\ e\ z$ as quantidades de bolas retiradas de cada uma das três caixas. Devemos ter a seguinte equação em inteiros não negativos:

$$x + y + z = 15, \text{ com as restrições } 0 \leq x \leq 10; 0 \leq y \leq 10\ e\ 0 \leq z \leq 10.$$

Fixado o valor de z, devemos ter $x + y = 15 - z$.

Os possíveis pares (x, y) de inteiros não negativos são: $(0, 15 - z), (1, 14 - z), (2, 13 - z), \dots, (15 - z, 0)$.

- Se $z \geq 5$, todos esses $16 - z$ pares produzem soluções admissíveis, pois satisfazem $0 \leq x \leq 10 \; e \; 0 \leq y \leq 10$.
- Se $z < 5$, uma das outras duas variáveis deverá ser pelo menos 6 e, ao subtrairmos esse valor dela, obteremos uma solução para a equação:

$$x + y = 9 - z$$

Os possíveis pares (x, y) de inteiros não negativos são: $(0, 9 - z), (1, 8 - z), (2, 7 - z), \ldots, (9 - z, 0)$. Todos esses $10 - z$ pares produzem soluções admissíveis, pois satisfazem $0 \leq x \leq 10 \; e \; 0 \leq y \leq 10$.

Assim,

i) para $z = 5, 6, 7, 8, 9 \; e \; 10$, temos 11, 10, 9, 8, 7, 6 soluções, respectivamente.

ii) para $z = 0, 1, 2, 3, 4$, temos 10, 9, 8, 7, 6 soluções, respectivamente.

Portanto, o total de soluções é $(11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6) + (10 + 9 + 8 + 7 + 6) = 91$.

Terceira Solução: (utilizando combinações – método “barra-bola”)

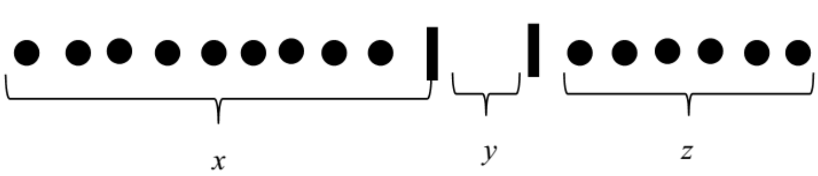
Como antes, sejam $x, y \; e \; z$ as quantidades de bolas retiradas de cada uma das três caixas. Logo, deve valer a seguinte equação em inteiros não negativos:

$$x + y + z = 15, \text{ com as restrições } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \; e \; 0 \leq z \leq 10.$$

Considere 15 bolas e 2 barras. Qualquer permutação desses 17 objetos pode ser associada a uma solução da equação anterior em inteiros não negativos: as bolas à esquerda da primeira barra correspondem ao x; as bolas entre as duas barras correspondem ao y; e a bolas à direita da segunda barra correspondem ao z.

Por exemplo, a escolha de 9 bolas da primeira caixa, nenhuma da segunda e 6 da terceira pode ser representada por:

Figura 44 - Exemplo de escolha das bolas.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1_Z0jiUv5bsuKS9TWCrwqxb3C1M-fS8O0/view

Com 15 bolas e 2 barras, há $\frac{17!}{2!15!} = 136$ modos de separá-las. Entretanto, dentre essas soluções, é possível que uma das três variáveis assuma um valor maior que 10. Como apenas uma das três pode assumir um valor maior que 10, para eliminar as soluções indesejadas, escolhemos uma das três variáveis com valor maior que 10 e subtraímos 11 dela. A solução então passará a satisfazer a equação em inteiros não negativos:

$$x + y + z = 4.$$

Usando agora 4 bolas e 2 barras, concluímos que a equação anterior possui $\frac{6!}{2!4!} = 15$ soluções.

Portanto, o total de soluções é $136 - 3 \times 15 = 91$.

Comentários e sugestões:

Como observamos acima, temos algumas maneiras de resolver o problema. O processo barra-bola, que é de extrema importância no estudo de Combinatória, foi utilizado na terceira solução, que é o mesmo que uma combinação com repetição. Na primeira solução percebemos o uso do método construtivo, onde leva o estudante a uma ideia criativa de solução.

19. (Questão 15 - Ano 2019) As 6 cadeiras de uma fila são numeradas de 1 a 6 e devem ser ocupadas uma de cada vez de modo que, sempre que possível, é escolhida uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Por exemplo, é válida a ordem de ocupação 1 6 3 2 4 5, em que a primeira pessoa ocupa a cadeira 1, a segunda, a cadeira 6, a terceira, a cadeira 3, a quarta, a cadeira 2, a quinta, a cadeira 4 e a última, a cadeira 5. Já a ordem 1 5 2 3 6 4 não é válida, pois a terceira pessoa sentou-se ao lado da primeira quando poderia ter se sentado em uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Quantas ordens de ocupação válidas existem?

Figura 45 - Cadeiras.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1WQrUhNr44io3wXCqRX6WlU_9_ygobctD/view.

A) 72
B) 108
C) 144
D) 192
E) 216

Solução da OBMEP: (alternativa D)

A ocupação dos lugares se dá em duas etapas:

- Inicialmente, os lugares são ocupados de modo que não haja cadeiras vizinhas ocupadas, até que isto não seja mais possível.
- A seguir, os demais lugares são ocupados em qualquer ordem.

Para contar o número de possibilidades de ocupação, vamos, inicialmente, encontrar as configurações maximais, para as quais não há cadeiras vizinhas ocupadas, mas tais que o próximo a chegar necessariamente precisará sentar ao lado de alguém. Há dois tipos de configurações maximais:

- Com duas pessoas, que devem ocupar os lugares 2 e 5.
- Com três pessoas, que podem ocupar os lugares 1, 3, 5; 1, 3, 6; 1, 4, 6; ou 2, 4, 6.

No primeiro caso, há duas possibilidades para a ordem de ocupação dos assentos 2 e 5; para cada uma dessas possiblidades os lugares podem ser ocupados em qualquer ordem, ou seja, há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possiblidades.

Para cada uma das quatro situações do segundo caso, há $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de ordem de ocupação dos lugares da configuração maximal; a seguir, para cada uma dessas possibilidades, os demais lugares também podem ser ocupados em qualquer ordem, com um total de $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

Logo, o número total de possibilidades de ocupação é igual a: $2 \times 24 + 4 \times 6 \times 6 = 192$ possibilidades.

Solução sugerida:

Vamos iniciar contando o número de ocupações pela posição 1:

- Ocupando a posição 1 e em seguida a posição 3, teremos $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ possibilidades.
- Ocupando a posição 1 e em seguida a posição 4, teremos $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.
- Ocupando a posição 1 e em seguida a posição 5, teremos $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.
- Ocupando a posição 1 e em seguida a posição 6, teremos $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ possibilidades.

Iniciando pela posição 1 teremos 36 maneiras de se ocupar as cadeiras.

Contando agora o número de ocupações iniciando pela posição 2, temos:

- Ocupando a posição 2 e em seguida a posição 4, teremos $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

- Ocupando a posição 2 e em seguida a posição 5, teremos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilidades.
- Ocupando a posição 2 e em seguida a posição 6, teremos $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

Iniciando pela posição 2 teremos 36 maneiras de se ocupar as cadeiras.
Contando agora o número de ocupações iniciando pela posição 3, temos:

- Ocupando a posição 3 e em seguida a posição 1, teremos $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ possibilidades.
- Ocupando a posição 3 e em seguida a posição 5, teremos $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.
- Ocupando a posição 3 e em seguida a posição 6, teremos $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

Iniciando pela posição 3 teremos 24 maneiras de se ocupar as cadeiras.

Perceba que o número de ocupações iniciando pela cadeira 4 será igual ao da cadeira 3, ou seja, 24 possibilidades, assim como o da cadeira 5 será igual ao da 2, e o da cadeira 6 igual ao da 1.
Concluímos então que o número de maneiras de ocupar as cadeiras é $36 + 36 + 24 + 24 + 36 + 36 = 192$.

Comentários e sugestões:
Problema onde podemos explorar a ideia da simetria em uma contagem, onde o que acontece iniciando pelas cadeiras 1, 2 e 3, será igual ao que acontece iniciando pelas cadeiras 6, 5 e 4, respectivamente. E como vemos nas duas soluções acima apresentadas, precisamos quebrar a questão em dois ou três casos e fazer uso do Princípio Multiplicativo, bem como do Princípio Aditivo.

20. (Questão 16 - Ano 2019) A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

Figura 46 - Caminho da rã.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1WQrUhNr44io3wXCqRX6WlU_9_ygobctD/view

A) 10
B) 35
C) 45
D) 84
E) 126

Solução da OBMEP: (alternativa C)

Na ida da pedra 1 até a pedra 10, a rã tem que transpor 9 espaços entre pedras consecutivas. Em cada salto, a rã pode percorrer 1, 2 ou 3 espaços. Se chamarmos de $x, y\ e\ z$ o número de saltos em que a rã percorre 1, 2 ou 3 espaços, respectivamente, temos;

- $x + y + z = 5$ (já que a rã anda 5 pulos);
- $x + 2y + 3z = 9$ (já que são 9 espaços a percorrer).

Subtraindo as duas equações, encontramos $y + 2z = 4$. A tabela abaixo dá os possíveis valores de x, y e z e o número de possibilidades em cada caso.

Tabela 3: Escolhas dos saltos da rã.

z	y	x	**Número de possibilidades**
0	4	1	O salto em que é percorrido 1 espaço pode ser qualquer um dos 5 saltos. Há 5 possibilidades.
1	2	2	O salto em que são percorridos 3 espaços pode ser escolhido de 5 modos. Dos 4 saltos restantes, 2 devem percorrer dois espaços; esses saltos podem ser escolhidos de $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ modos. Logo, há $5 \times 6 = 30$ possibilidades.
2	0	3	Os dois saltos em que são percorridos 3 espaços podem ser escolhidos de $\frac{5 \times 4}{2} = 10$

			modos. Os demais saltos são de 1 espaço cada. Há 10 possibilidades.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1sfseHBtT3wf-FTGpmT_ZThSortkkXU7e/view

Logo, o número total de possibilidades para os saltos da rã é $5 + 30 + 10 = 45$.

Solução sugerida:

A rã deve dar um total de 5 pulos. Vamos chamar de a, b e c, o número de pulos para a pedra seguinte, pulando uma pedra e pulando duas pedras, respectivamente. Como a rã deve chegar até a pedra 10, ela deve dar 9 "passos". Vamos analisar as possibilidades, começando pelo valor de c.

Perceba que o c só pode ser 0, 1 ou 2, pois se o c fosse 3, a rã já completaria 9 "passos" em apenas 3 pulos, mas ela precisa dar 5 pulos.

Sendo $c = 0$, é fácil perceber que só podemos ter $b = 4$ e $a = 1$. Teremos então 5 saltos, sendo apenas um de 1 "passo", o que podemos escolher esse salto de $C_5^1 = 5$ maneiras.

Sendo $c = 1$, é fácil perceber que só podemos ter $b = 2$ e $a = 2$. Temos então 5 maneiras pra escolher o salto de 3 "passos", $C_4^2 = 6$ maneiras de escolher os dois saltos de 2 "passos", e os saltos de 1 "passo" ficarão definidos após a escolha dos outros. Portanto temos $5 \times 6 = 30$ maneiras da rã chegar caso $c = 1$.

Sendo $c = 2$, é fácil perceber que só podemos ter $b = 0$ e $a = 3$. Temos então $C_5^2 = 10$ maneiras de escolher os dois saltos de 3 "passos", e os três saltos de 1 "passo" ficarão definidos. Portanto temos 10 maneiras da rã chegar caso $c = 2$.

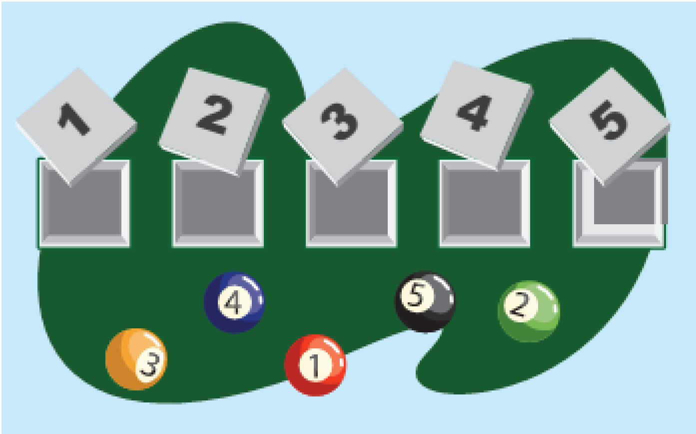
O número de maneiras para a rã chegar à pedra 10 é $5 + 30 + 10 = 45$.

Comentários e sugestões:

Tentando montar um sistema de equações para essa questão, encontramos duas equações e três incógnitas, e não teríamos um sistema determinado. Mas aí entra a ideia da contagem, se isolarmos uma das incógnitas, como na solução sugerida pela OBMEP, bastaria analisarmos todos os casos possíveis e em seguida contar de quantas maneiras podemos realizar os demais pulos. Na solução sugerida, que é bem parecida com a da OBMEP, também precisamos analisar todos os casos, mas também está sendo usado um pouco de combinação simples.

21. (Questão 18 - Ano 2019) Cinco bolas numeradas de 1 a 5 estão dentro de cinco caixas tampadas, também numeradas de 1 a 5. Em cada caixa há somente uma bola, e sabe-se que apenas uma caixa está numerada com o mesmo número de sua bola. Qual é o número mínimo de tampas que devemos abrir para descobrir, com certeza, que caixa é essa?

Figura 47 - Caixas.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1WQrUhNr44io3wXCqRX6WlU_9_ygobctD/view.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

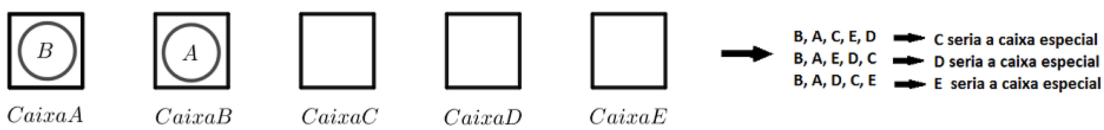
Solução da OBMEP: (alternativa C)

Inicialmente vamos mostrar que abrir duas caixas não é suficiente. Vamos chamar as caixas de A, B, C, D e E e as bolas com os mesmos nomes para que possamos abrir hipóteses sem perder generalidade e chamaremos de caixa especial a caixa com bola de mesma numeração da caixa.

Após abrir a primeira caixa (A) duas coisas podem acontecer: encontrarmos a bola A e teremos descoberto a caixa especial. Então vamos nos concentrar no caso em que a bola na caixa A seja uma bola diferente de A, que chamaremos de B.

Hipótese 1: Abrir a caixa B (é uma hipótese ruim, pois já temos certeza de que a caixa B não é a especial, mas, ainda assim, vamos analisar para esgotar as possibilidades). Se na caixa B estiver a bola A, então ainda não se pode saber qual é a caixa especial, basta ver no diagrama abaixo que haveria três possibilidades para as outras 3 caixas e cada uma dessas possibilidades apresenta uma caixa especial diferente:

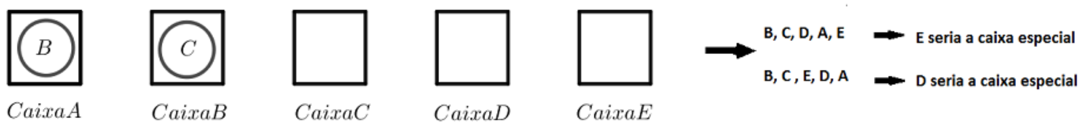
Figura 48 - Escolha das caixas 1.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1sfseHBtT3wf-FTGpmT_ZThSortkkXU7e/view

Se na caixa B estiver uma bola diferente de A e de B, podemos, sem perda de generalidade, chamá-la de C, então com certeza a caixa especial terá que ser a D ou a E, mas as duas coisas ainda poderiam acontecer como descrito no diagrama abaixo e, portanto, não seria possível determinar a caixa especial abrindo só duas caixas.

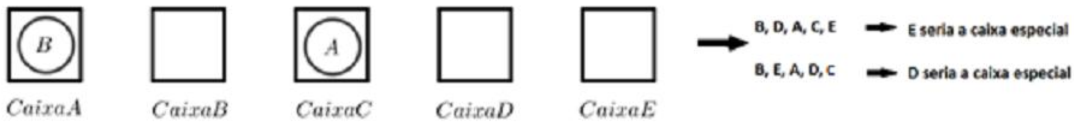
Figura 49 - Escolha das caixas 2.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1sfseHBtT3wf-FTGpmT_ZThSortkkXU7e/view

Hipótese 2: Após abrir a caixa A, escolhemos uma caixa diferente da B para abrir. Separaremos essa hipótese em dois casos: se a bola nessa caixa for A ou se a bola nessa caixa for diferente de A e de C. Se a bola na caixa C for A, então cairemos nos dois casos do diagrama abaixo, e não será possível determinar se a caixa especial é a D ou a E:

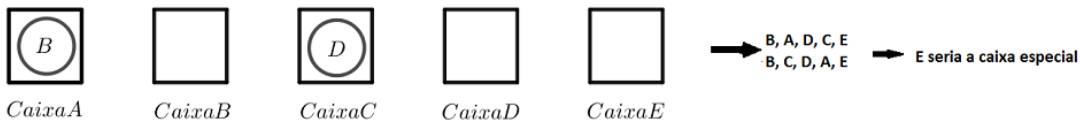
Figura 50 - Escolha das caixas 3.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1sfseHBtT3wf-FTGpmT_ZThSortkkXU7e/view

Se a bola na caixa C for diferente de A e de C (por exemplo, D), esta será a única situação em que a caixa especial ficará determinada após a abertura de duas caixas não especiais.

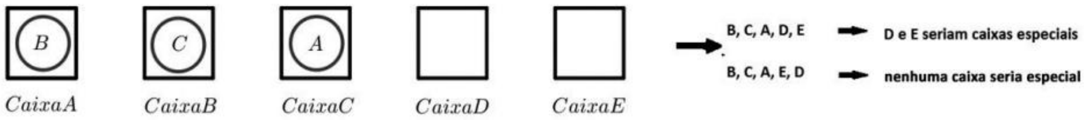
Figura 51 - Escolha das caixas 4.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1sfseHBtT3wf-FTGpmT_ZThSortkkXU7e/view

Com isso, concluímos que, de fato, a abertura de duas caixas não garante a determinação de qual é a especial. Vamos mostrar agora que com a abertura de 3 caixas podemos garantir qual é a caixa especial. Imaginemos que 3 caixas foram abertas e que nenhuma delas era a especial. Se chamarmos essas 3 caixas de A, B e C, então é impossível que as 3 bolas A, B e C já tenham aparecido nas 3 primeiras caixas, pois isso obrigaria as caixas D e E a serem ambas especiais ou ambas não especiais.

Figura 52 - Escolha das caixas 5.



Fonte: https://drive.google.com/file/d/1sfseHBtT3wf-FTGpmT_ZThSortkkXU7e/view

Portanto, em uma das 3 caixas não especiais que já foram abertas tem que aparecer a bola de uma das outras duas caixas que automaticamente poderemos garantir que também não será especial. Com isso, só sobrará uma caixa para ser a especial.

Podemos, portanto, garantir que a quantidade mínima de caixas que precisam ser abertas para descobrirmos qual caixa contém a bola de igual número é 3.

Solução sugerida:

Vamos inicialmente abrir uma das caixas, sem perda de generalidade, vamos abrir a caixa de número 1, se a bola encontrada for a 1, aí terminou e você já encontraria, mas vamos imaginar se a bola na caixa 1 não fosse a de número 1, pois queremos descobrir o número mínimo de caixas para se ter certeza de qual seria a caixa com a bola de mesmo número.

Suponha que na caixa 1, continuando sem perda de generalidade, que encontrássemos a bola de número 2, portanto já concluímos que a caixa 2 não é a procurada, e não precisaremos abri-la. Então vamos agora abrir a caixa de número 3. Na caixa 3 podemos então encontrar as bolas de número 1, 3, 4 ou 5, pois a bola 2 já apareceu na caixa 1. Vamos agora analisar as possibilidades:

Se na caixa 3 tivermos a bola de número 1 saberemos que a caixa 3 não será a correta e portanto teríamos a caixa 4 ou a caixa 5 como a caixa procurada, e teremos que abrir mais uma caixa para descobrir a correta, pois ainda poderíamos ter as bolas de números 3, 4 e 5 nas caixas 4, 2 e 5 ou nas caixas 5, 4 e 2 respectivamente. Portanto, descobriríamos a caixa correta abrindo 3 caixas.

Se na caixa 3 tivermos a bola de número 3, aí termina com duas aberturas.

Se na caixa 3 tivermos a bola de número 4, concluímos que as caixas 3 e 4 estariam erradas e a correta seria a de número 5, e descobriríamos a correta com 2 aberturas.

Se na caixa 3 tivermos a bola de número 5, concluímos que as caixas 3 e 5 estariam erradas e a correta seria a de número 4, e descobriríamos a correta com 2 aberturas.

Então precisaríamos abrir no máximo 3 caixas para se ter certeza da caixa correta.

Comentários e sugestões:

Explorar todas as possibilidades de contagem em algumas situações é uma habilidade que precisamos desenvolver no estudo de Combinatória. Procuremos sempre desenvolver essa habilidade. O Princípio da Casa dos Pombos desenvolve bastante essa habilidade ao ser trabalhado.

Conclusão

O presente trabalho tem como objetivo contribuir para o estudo de combinatória de professores que buscam aprimorar seus conhecimentos e suas aulas, bem como melhorar o processo de ensino-aprendizagem através da aplicação de questões que incentivem a criatividade e desenvolvam o raciocínio lógico-matemático e consolidem o saber. A utilização das questões da OBMEP no Ensino Médio satisfazem as competências definidas pela BNCC. Tratando-se do nível superior em Cursos de Licenciatura em Matemática contribui para a formação acadêmica do profissional em formação.

Mostramos que a mera aplicação de fórmulas de arranjo ou combinação na resolução de problemas e a não reflexão da resposta errada do aluno pelo profissional docente, não contribuem para a consolidação da aprendizagem. O pensamento intuitivo juntamente com a lógica matemática tem a capacidade de trazer a percepção de como a resolução de questões sobre contagem não é simplesmente a aplicação de fórmula; é necessário aprender vários métodos de resolução de questões.

Devemos ressaltar a importância do método investigativo na resolução de problemas de Contagem e como essa prática pode aproximar professores e alunos no trabalho em sala de aula.

Ressaltamos também o trabalho dos professores Augusto César de Oliveira Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho na produção bibliográfica que embasou este trabalho e suas contribuições num tema tão relevante e presente em provas, concursos e competições matemáticas em todo o país.

Destacamos ainda que pretendemos usar essa dissertação como material de apoio em capacitação de professores e congressos na área de Ensino da Matemática.

Referências

BRASIL, M. d. E. e. S. d. E. B. Base Nacional Comum Curricular. [S.l.:s.n.], 2017.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Institui a Lei de Diretrizes Básicas da Educação. Casa Civil: seção IV-A, Brasília, DF, 20 dez. 1996. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm > Acesso em: 03 de dez. De 2019.

INEP, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, c2018, Provas e Gabaritos, Disponível em < http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos > Acesso em: 14 de nov. de 2019.

MORAES FILHO, D. Manual de Redação Matemática: 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

MORGADO, A, et al. Análise Combinatória e Probabilidade: 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

MORGADO, A; CARVALHO, P. Matemática Discreta: 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, c2019, Página Inicial, Disponível em: < http://www.obmep.org.br/ > Acesso em: 10 de out. de 2019.

PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática, c2019, Página Inicial, Disponível em < http://www.dm.ufrpe.br/pg/profmat> Acesso em: 03 de dez. De 2019.