Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

José Flavio de Castro Soares

Erros comuns dos estudantes em álgebra

São Gonçalo
2019

Jose Flavio de Castro Soares

Erros comuns dos estudantes em álgebra

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano

São Gonçalo

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CEH/D

S676 Soares, José Flavio de Castro.
Erros comuns dos estudantes em álgebra / José Flavio de Castro Soares – 2019.
83f.: il.

Orientador: Abel Rodolfo Garcia Lozano
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Álgebra - Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino - Teses. I. Lozano, Abel Rodolfo Garcia. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III. Título.

CRB/7 – 4994 CDU 512

Assinatura Data

Jose Flavio de Castro Soares

Erros comuns dos estudantes em álgebra

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 31 de outubro de 2019.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano

Faculdade de Formação de Professores – UERJ

____

Prof. Dr. Sérgio Ricardo Pereira de Mattos

Universidade do Grande Rio (UNIGRANRIO)

____

Profª. Dra. Valessa Leal Lessa de Sá Pinto

Universidade do Grande Rio (UNIGRANRIO)

São Gonçalo

2019

DEDICATÓRIA

A todos que acreditam na educação pública e de qualidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores, pelos ensinamentos dentro e fora da sala de aula, durante toda a minha formação.

Ao meu orientador, Prof. Doutor Abel Lozano por toda a ajuda, dando estímulos para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu pai (in memoria) e minha mãe por toda a dedicação e carinho.

A minha irmã Alessandra e minha companheira Barbara pelos incentivos dados em todos os momentos.

Aos amigos de profissão Danielle Hepner, Roberta Coube, Cristiane Lima e Luiz Claudio Silva pelo auxilio na busca e acesso de materiais que viabilizaram este trabalho.

Aos alunos que participaram desta pesquisa, além de todos os demais familiares e amigos, principalmente aos que não tiveram as mesmas oportunidades de estudo.

Aos professores do PROFMAT – UERJ (FFP) por toda a dedicação e coordenação deste mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Não há vida sem correção, sem retificação.

Paulo Freire

RESUMO

SOARES, José Flavio de Castro. *Erros comuns dos estudantes em álgebra.* 2019. 83f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

A álgebra é vista por muitos alunos como impossível de ser compreendida, uma vez que boa parte dos estudantes levam dificuldades em aritmética para séries posteriores. A educação tradicional de sala de aula se limita a exposição de conteúdos sem participação direta dos estudantes, em que na maioria das avaliações são apontados apenas os acertos e os erros dos estudantes, sem resolver o problema dos que cometeram os equívocos, fazendo com que estes se sintam excluídos do processo de aprendizagem, gerando um sentimento de incapacidade. Pesquisas em Análise de erros em Matemática têm mostrado que se o professor decidisse entender a forma com que os alunos resolveram ou interpretaram os problemas, poderia visualizar de forma clara e objetiva em quais pontos estão as dificuldades dos seus educandos e mais que isso, devendo-se questionar, ainda, sobre a possibilidade das respostas apresentadas representarem a solução de outro problema, ao qual o aluno interpretou e que não necessariamente estaria incorreto. Ao propor uma investigação a respeito da origem dos erros dos estudantes o professor coloca estes alunos como participantes ativos na construção do conhecimento e desenvolvimento do pensamento algébrico, motivados a buscar entender seus erros. Nesse sentido, foi realizada uma pesquisa, no qual os estudantes responderam algumas questões, a partir das quais foi possível analisar as respostas, verificando que existem alguns erros comuns conforme mostram diversos trabalhos analisados.

Palavras-chave: Educação Matemática. Análise de erros. Álgebra.

]

ABSTRACT

SOARES, José Flavio de Castro. *The most common algebra student mistakes.* 2019. 83f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

Algebra is seen by many students as impossible to understand, as most students experience difficulties in arithmetic for later grades. Traditional classroom education is limited to the exposure of content without direct student participation, in which most assessments only point out the students' hits and misses, without solving the problem of those who made the mistakes, making them feel excluded from the learning process, generating a feeling of incapacity. Research on Error Analysis in Mathematics has shown that if the teacher decides to understand how students have solved or interpreted problems, they can clearly and objectively visualize where their learner's difficulties lie, and more than that. to question, still, about the possibility of the answers presented represent the solution of another problem, which the student interpreted and that would not necessarily be incorrect. In proposing an investigation into the origin of student errors, the teacher places these students as active participants in the construction of knowledge and the development of algebraic thinking, motivated to seek to understand their errors. In this sense, a research was conducted, in which the students answered some questions, from which it was possible to analyze the answers, verifying that there are some common errors as shown by several analyzed works.

Keywords: Mathematical Education. Error analysis. Algebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO E TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABE	Associação Brasileira de Educação
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CIAEM	Comitê Interamericano de Educação Matemática
CONSED	Conselho Nacional de Secretários de Educação
DNE	Departamento Nacional de Ensino
EBRAPEM	Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação Matemática
GEEM	Grupo de Estudos do Ensino da Matemática
GEMPA	Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de Porto Alegre
IEPIC	Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério da Educação
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNE	Plano Nacional da Educação
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
UNDIME	União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ensinar álgebra é um dos desafios dos professores de matemática, uma vez que, boa parte dos estudantes trazem muitas dificuldades de séries anteriores em relação à aritmética, fazendo com que as interpretações dos problemas algébricos não sejam compreendidos de maneira correta, uma vez que o pensamento abstrato ainda não atingiu os níveis desejados, levando o aluno a acreditar que a matemática é algo impossível de ser feito, ou que não tem aptidão para tal disciplina, desestimulando o interesse pela matemática.

Nos estudos realizados por Borasi (1996) e Cury (2007) verificou-se que existem muitos tipos de erros que podem estar associados a diversos problemas, erro de interpretação, erro conceitual, erros de falsas generalizações dentre muitos outros, porém existem alguns erros que na verdade poderiam ser aproveitados como outras possíveis interpretações para o mesmo problema, mostrando que o pensamento do aluno não estaria totalmente incorreto. Por muitas vezes professores em suas correções só consideram a resposta do estudante como certa ou errada, sem considerar as estratégias que o mesmo possa ter elaborado para a resolução, por isso deve-se refletir a respeito das respostas dadas.

O trabalho baseia-se nas pesquisas de Helena Cury (2007), Raffaella Borasi (1996) e Bobby Ojose (2015) e tem por objetivo mostrar os diversos tipos de respostas que podem surgir na resolução de problemas e oferecer orientações e estratégias de resolução de problemas.

De acordo com Cury (2007, p. 13) “a análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também, enfocada como metodologia de ensino”. Portanto, os objetivos são: (I) analisar as respostas dos estudantes; (II) fazer com que os alunos questionem suas respostas e as causas que o levaram ao equivoco (em caso de erro); (III) mostrar aos alunos as possíveis formas de resolução do problema, mesmo as resoluções não convencionais.

Este trabalho contém quatro capítulos e tem como público alvo professores e estudantes de matemática que desejam aprimorar seus conhecimentos em aplicação de atividades em sala de aula, análise de respostas dos estudantes, além de entender os problemas encontrados ao longo da história da álgebra que é utilizada e o que as políticas públicas propõem sobre o tema.

O primeiro capítulo traz uma breve história sobre a álgebra e está baseado, principalmente, nos trabalhos de John Baumgart (1992) e Carl Boyer (1974), neste capitulo é abordado um pouco do surgimento do conhecimento algébrico e seu desenvolvimento ao longo do tempo.

O segundo capítulo traz alguns pontos importantes sobre a educação no Brasil e sua importância, o desenvolvimento da educação matemática, assim como as abordagens tomadas pelas políticas públicas, podendo citar a LDB, os PCNs e a BNCC dentre outras intervenções do poder público na educação e no ensino de matemática.

O terceiro capítulo traz a importância da análise de erros, possíveis causas, discussões e os métodos apresentados pelos principais precursores nas pesquisas sobre análise de erros, assim como a apresentação de alguns erros comuns na álgebra do ensino fundamental.

O quarto e último capítulo aborda a análise dos erros cometidos pelos estudantes na resolução das questões problemas, realizada em duas turmas de 9º ano de uma escola pública da região metropolitana do Rio de Janeiro.

1 UMA BREVE HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

A história da matemática grega conta com um período de glória, um de declínio e outro em que esse declínio é interrompido. Segundo Carl Boyer em seu livro *História da matemática* (1974), a interrupção desse declínio marca o início da história da álgebra com o surgimento do trabalho desenvolvido pelo grego Diofanto. Apesar de ser o autor de *Arithmetica*, suas contribuições algébricas o levaram a ser considerado por muitos como o pai da Álgebra. Segundo Boyer, a paternidade dada a ele se justifica pela apresentação da escrita nos seis livros preservados de Arithmetica. Neles, afirma o autor, pode ser observado o estágio intermediário de desenvolvimento da Álgebra, caracterizado pelo uso de abreviações:

> A expressão $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, por exemplo, poderia aparecer numa forma equivalente a SS2 C3 x5 M S4 u6, onde as nossas letras S, C, x, M e u foram usadas para "quadrado", "cubo", a "incógnita", "menos" e "unidade" e nossos numerais em lugar de notação grega alfabética que se usava no tempo de Diofanto. (BOYER, 1974, p. 133)

A diferença entre a sincopação de Diofanto e a álgebra moderna está na falta de algumas outras representações, como a notação exponencial. No entanto, as abreviações de Diofanto foram para a matemática grega o rompimento com a limitação que era o uso apenas das três primeiras potências ou dimensões.

No livro *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula* (1992), o organizador e autor da Introdução, John Baumgart diz que a palavra "álgebra" tem hoje um significado muito mais amplo do que já tivera, e que uma definição satisfatória requer um enfoque em duas fases, sendo elas: 1) álgebra antiga - é o estudo das equações e métodos de resolvê-las (elementar); e 2) álgebra moderna - é o estudo das estruturas matemáticas tais como grupos anéis e corpos (abstrata).

Segundo Baumgart, o desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios: 1) o retórico (verbal); 2) o sincopado (uso de abreviações); e 3) o simbólico. Neste, "a notação passou por várias modificações e mudanças, até tornar-se razoavelmente estável ao tempo de Isaac Newton." (BAUMGART, 1992, p. 3).

1.1 **A Álgebra babilônica**

Representando o estilo retórico, Baumgart apresenta a álgebra babilônica. Em sua obra, o autor segue a linha dos que acreditam que a álgebra se originou na Babilônia. Como exemplo, ele expõe um típico problema encontrado em escrita cuneiforme em tábuas de argila, que remonta ao templo do rei Hamurábi (1700 a.C.). No entanto, apesar de apresentar um alto nível de resolução de problemas, os árabes não utilizavam métodos com incógnitas, preferindo eliminá-las por substituição e expressar tudo em termos de palavras e números conforme exemplo abaixo exposto por Roque (2012).

> O problema encontra-se na coleção do British Museum, na placa BM13901. O problema foi traduzido usualmente assim:
> Procedimento: “Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45.
> Qual o lado?”
> Solução:
> (i) tome 1
> (ii) fracione 1 tomando a metade (:0,30)
> (iii) multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15)
> (iv) some 0,15 a 0,45 (:1)
> (v) 1 é a raiz quadrada de 1
> (vi) subtraia os 0,30 de 1
> (vii) 0,30 é o lado do quadrado. (ROQUE, 2012, p. 47)

Para a resolução de problemas algébricos exigia-se a consulta a tabletes com as devidas operações.

1.2 **A Álgebra no Egito**

Também representando o período retórico, o autor afirma que a álgebra no Egito surgiu ao mesmo tempo em que na Babilônia. No entanto, faltava a ela os métodos sofisticados da álgebra babilônica, bem como a variedade de “equações” resolvidas. O fato de o sistema de numeração egípcio ser relativamente primitivo em comparação com o dos babilônios ajuda, segundo o autor, a explicar a falta de sofisticação da álgebra egípcia.

1.3 **A Álgebra grega**

Segundo Gertrud Pratt (1992), autora do capítulo denominado *A álgebra grega primitiva* do livro organizado por Baumgart, a álgebra grega era geométrica devido à dificuldade lógica dos gregos com números irracionais e fracionários, além da baixa praticidade que ofereciam os números gregos. A autora afirma, ainda, que sua álgebra era geométrica conforme foi formulada pelos pitagóricos e por Euclides. Para ela, não há dúvidas de que os pitagóricos conheciam bem a álgebra babilônica e seguiam seus métodos de resolução de equações.

Segundo a autora “os gregos da época de Euclides pensavam o produto ab (como o escrevemos hoje) como um retângulo de base b e altura a, e referiam-se a ele como ‘o retângulo contido por CD e DE’.” (PRATT, 1992, p. 68)

1.4 **Notação algébrica sincopada**

Representando o estágio “sincopado”, o matemático grego Diofanto deu impulso à álgebra na trilha dos antigos métodos babilônicos (BAUMGART, 1992). Seguindo o mesmo caminho de Boyer, Baumgart afirma que a fama de Diofanto baseia-se na sua obra *Arithmética*, “na qual ele apresenta um engenhoso tratamento das equações indeterminadas”, chamadas de equações diofantinas. “Sua abordagem segue as linhas babilônicas no sentido de que ele expressa todas as incógnitas em termos de um parâmetro e depois obtenha uma equação e envolvendo só um parâmetro.” (BAUMGART, 1992, p. 9).

A figura 1 representa um exemplo de notação algébrica sincopada proposta pelo autor.

Figura 1 – Álgebra sincopada

$$\kappa^{\Upsilon}\beta \quad \varsigma\eta \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\varepsilon \quad \mathring{M}\delta \quad \acute{\varepsilon}\sigma\tau\acute{\iota} \quad \mu\delta;$$

isto é

$$x^3 2 \qquad x 8 \;-\; x^2 5 \quad 1 \cdot 4 = 44$$

ou

$$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$$

Fonte: (BAUMGART, 1992, p. 10)

1.5 **Álgebra hindu e arábica**

Pouco se sabe sobre a Índia e sua matemática antes dos séculos IV ou V d.C. devido à carência de registros históricos do período antigo. Segundo Wrestler (1992), o trabalho *Surya Sidhanta* – em português *Sistema do Sol* - datado de 500 d.C., sobre Astronomia, foi responsável pelo desenvolvimento da álgebra e da aritmética hindu, revelando valiosos matemáticos como Aryabhata (525), Brahmagupta (628), Mahavira (850) e Bhaskara (1150). Segundo Baumgart (1992, p.10), as numerosas invasões que a Índia sofreu tiveram como consequência a facilitação do intercâmbio de ideias neste país, uma vez que "as realizações babilônicas e gregas, em particular, eram conhecidas, ao que parece, pelos matemáticos hindus.".

Segundo afirma Baumgart (1992), Brahmagupta trabalhou no estilo sincopado e um exemplo disso é a forma como o indiano escreve a expressão $5xy + \sqrt{35} - 12$:

Figura 2 – Incógnitas

ya	*ka*	5	*bha*	*k*(*a*) 35	*ru*	$\dot{1}2$
x	*y*	5	produto	irracional 35	número "puro"	– 12

Fonte: (BAUMGART, 1992, p. 10)

Para o mesmo autor o trabalho dos hindus com equações indeterminadas era superior ao diofantino:

> Eles tentavam achar todas as soluções inteiras possíveis e foram, talvez, os primeiros a dar métodos gerais de solução. O trabalho de Brahmagupta e Bhaskara sobre a chamada equação de Pell $y^2 = ax^2 + 1$ (onde a é um inteiro não quadrado perfeito) é excelente. E eles mostraram como obter uma infinidade de soluções a partir de uma dada solução x, y (desde que $xy \neq 0$). (BAUMGART, 1992, p.10)

No entanto, Wrestler (1992) afirma que a álgebra de Brahmagupta era amplamente retórica, ainda que o enunciado do problema seja a ilustração do estilo sincopado. O autor afirma isso a partir de uma demonstração feita por Brahmagupta para encontrar uma das duas raízes positivas de $x^2 - 10x = 9$, equação escrita originalmente conforme a Figura 3.

Figura 3 – Expressão algébrica (estilo sincopado)

$$\textit{ya v } 1 \ \textit{ya } \dot{1}\dot{0}$$
$$\textit{ru } \dot{9}$$

Fonte: (WRESTLER, 1992, p. 72)

E a solução traduzida encontra-se na primeira coluna da Figura 4, demonstrando o caráter verbal da álgebra hindu, enquanto a notação moderna está na segunda coluna:

Figura 4 – Resolução verbal (Álgebra Hindu)

	$x^2 - 10x = -\dot{9}$
Aqui o número puro ($\dot{9}$) multiplicado por (1) o [coeficiente do] quadrado [é] ($\dot{9}$),	$(-9)(1) = -9$
e somado ao quadrado da metade do [coeficiente do] termo médio, 25, resulta 16;	$-9 + \left(-\frac{-10}{2}\right)^2 = 16$
cuja raiz quadrada, 4, menos metade do [coeficiente da] incógnita ($\dot{5}$), é 9;	$\sqrt{16} - \left(-\frac{-10}{2}\right) = 9$
e dividido pelo [coeficiente do] quadrado (1) fornece o valor da incógnita 9.	$\frac{9}{1} = 9.$

Fonte: (WRESTLER, 1992, p. 72)

Segundo Read (1992), pouco se sabe sobre a civilização árabe antes do tempo de Maomé. O profeta teve papel fundamental para a formação de uma poderosa nação e com o advento do islamismo foi fornecido o ímpeto que logo levaria os árabes a conquista da Índia, da Pérsia, da Mesopotâmia, do norte da África e da Espanha. Teria sido desta forma que os árabes obtiveram os escritos científicos de gregos e hindus, traduzindo-os para seu idioma e preservando-os.

Segundo Baumgart, um dos principais motivos de interesse durante o período arábico centra-se em Al-khowarismi, uma vez que seus livros *Al-jabr* e *Liber algorismi* foram posteriormente traduzidos para o latim, tendo grande influência na matemática europeia.

No entanto, segundo Van der Waerden (1961, *apud* BAUMGART, 1992), estes trabalhos não estão à altura de padrões anteriores, uma vez que o autor rejeitou a erudição grega e ignorou os resultados alcançados até então, e, de acordo com Baumgart, seu objetivo era escrever um livro prático sobre resolução de equações. Tal objetivo teria resultado num estilo retórico, de modo que seu trabalho não foi tão bom quanto os dos babilônicos e hindus.

Para Read (1992), um dos maiores algebristas árabes foi Omar Cahyyan. Um de seus feitos foi resolver equações cúbicas através da determinação da intersecção de cônicas e, segundo a autora, alguns consideram este o maior feito da álgebra árabe.

1.6 **Álgebra na Europa**

Segundo Baumgart (1992), o rápido florescimento da álgebra na Europa se deve aos seguintes fatores:

> 1. facilidade de manipular trabalhos numéricos através do sistema de numeração indo-arábico, muito superior aos sistemas (tais como romano) que requeriam o uso do ábaco;
> 2. invenção da imprensa com tipos móveis, que acelerou a padronização do simbolismo mediante a melhoria das comunicações, baseada em ampla distribuição;
> 3. ressurgimento da economia sustentando a atividade intelectual; e a retomada do comércio e viagens, facilitando o intercâmbio de ideias tanto quanto de bens. Cidades comercialmente fortes surgiram primeiro na Itália e foi lá que o renascimento algébrico na Europa efetivamente teve início (1200 a 1300). (BAUMGART, 1992, pag. 12)

Para Sloyen (1992), a álgebra europeia baseou-se diretamente na álgebra arábica, tendo seu início por volta do ano 1200 e caminhando lentamente até o século XIX, quando passou a se desenvolver com rapidez.

Segundo a autora, grande parte do trabalho inicial foi feito na Itália, onde Fibonacci teria sido responsável por popularizar os números indo-arábicos através do livro *Liber abaci* (1202). No entanto, foi entre 1515 e 1545, com o surgimento de muitos algebristas italianos como Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia; Girolamo Cardano e Ludovico Ferrari, que a atividade algébrica aumentou.

Posteriormente, na França do século XVII, surge um dos maiores matemáticos do século, René Descartes, com seu trabalho sobre geometria analítica plana e, no campo da álgebra, com o aprimoramento do simbolismo e introdução do atual sistema de expoentes inteiros, positivos. Um exemplo de sua contribuição para a álgebra está em sua obra *La geometrie*, que contém a regra de sinais de Descartes para determinar o número de raízes positivas e negativas de uma equação. No século XVI, ainda na França, o trabalho de Pierre de Fermat foi principalmente sobre a teoria dos números.

No Reino Unido, Isaac Newton descobriu o teorema binomial em 1664. Além disso, “a teoria das funções simétricas das raízes de uma equação, inicialmente vislumbrada por Viète, foi firmemente estabelecida por Newton, que também forneceu um método para encontrar aproximações de raízes de equações numéricas.” (SLOYEN, 1992, p. 81).

No final do século XVIII, Carl Friedrich Gauss, um alemão de vinte anos de idade, publicou a primeira demonstração rigorosa do teorema fundamental da álgebra, a saber: “Toda equação algébrica de grau n tem uma raiz”. Além disso, grande parte do trabalho sobre teoria dos números complexos é de Gauss.

Morto num duelo aos vinte e um anos em 1832, o francês Evariste Galois deixou em nota o que viria a se apresentar como a essência da teoria dos grupos. Na mesma época, o norueguês Niels Henrik Abel provava, depois de falhar na resolução de uma equação quíntica, que uma solução por meio de radicais era impossível (SLOYEN, 1992, p. 82).

Por fim, os algebristas ingleses Arthur Cayley e James Joseph Sylvester trabalharam juntos por toda a vida na teoria dos invariantes algébricos e, segundo Sloyen, pode-se dizer que com Sylvester começou a “álgebra americana”.

1.7 **Notação algébrica simbólica**

Segundo Baumgart (1992), a notação algébrica simbólica começou a ganhar evidência a partir de 1500. O autor demonstra como eram utilizados os símbolos de acordo com o período da história e de acordo com o matemático (Figura 5).

Figura 5 – Símbolos algébricos históricos

Cardano (1545): cubus $\bar{p}$ 6 rebus aequalis 20.
$x^3 + 6x = 20$

Bombelli (1572): $\overset{6}{\smile}$ $\text{I} \cdot \text{p} \cdot \overset{3}{\smile}$ $8 \cdot$ Eguale à 20.
$x^6 + 8x^3 = 20$

Viète (1591): I QC − 15 QQ + 85 C − 225 Q + 274 N aequatur 120.
$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$

Harriot (1631): aaa − 3bba ═══ +2 · ccc.
$x^3 - 3b^2x = 2c^3$

Descartes (1637): $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0.$

Wallis (1693): $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0.$

Fonte: (BAUMGART, 1992, pp. 12-13)

1.8 **A álgebra de Cardano e de Viète**

No ano de 1545 Girolamo Cardano publicou *Ars Magna*, onde se podiam encontrar soluções para as cúbicas de Scipione Del Ferro e para as quárticas de Ludovico Ferrari. Essas soluções, segundo Baumgart, eram o primeiro material realmente novo desde a antiguidade. O caráter simbólico de sua álgebra, diferentemente, deixava a desejar. Apesar disso, Baumgart expõe itens importantes que o autor cumpriu e que tornaram sua obra inovadora, sendo eles:

> 1) Ele foi o primeiro a exibir três raízes de uma cúbica particular (suspeitava que na verdade, existissem três raízes para todas as cúbicas, mas estava confuso com as raízes negativas e imaginárias);
> 2) reconheceu, pelo menos em certo sentido, as raízes negativas, que chamou de “fictícias”;
> 3) teve a curiosidade intelectual de verificar o que aconteceria ao se operar com números como $5 \pm \sqrt{-15}$, que hoje chamamos de “complexos” ou “imaginários”;
> 4) reconheceu o “caso irredutível” na solução de uma cúbica;
> 5) removeu o termo x^2 de uma equação cúbica (esta remoção teve mais alcance teórico-geral do que ele imaginava);
> 6) afirmou que a soma das três raízes de uma cúbica é o oposto do coeficiente de x^2. (BAUMGART, 1992, p. 14)

O autor reconhece François Viète como o divisor de águas do pensamento algébrico, sendo o francês “o primeiro a introduzir letras como coeficientes genéricos (positivos) e a dar alguns outros toques de acabamento no simbolismo que se finalizou e atualizou na época de Newton” (BAUMGART, 1992, p. 14). No entanto, as contribuições mais significativas de

Viète estavam em sua obra publicada postumamente, de 1615, cujo nome é *De aequationum recognitione et emendatione*. Em seu trabalho, Viète, forneceu transformações para:

> 1) aumentar ou multiplicar raízes de uma equação por uma constante;
> 2) demonstrou consciência das relações entre raízes e coeficientes de uma equação polinomial;
> 3) formulou uma transformação que desembaraça um polinômio de seu termo vizinho ao de maior grau. (BAUMGART, 1992, p. 14)

1.9 **O desenvolvimento dos números complexos**

Para o desenvolvimento da álgebra, os números imaginários ou negativos foram o grande empecilho de Viète e de Cardano. Foi, segundo Baumgart, Albert Girard que deu foco a números negativos e imaginários ao usá-los para resolver problemas geométricos. Por exemplo, Girard "sugeriu que, aceitando-se também os números imaginários como raízes, seria possível afirmar que uma equação admite tantas raízes quanto é seu grau" (BAUMGART, 1992, p. 15).

Foram, no entanto, vários os matemáticos famosos que contribuíram para tornar mais aceitáveis os números negativos e imaginários, sendo eles: Descartes, por exemplo, com a representação geométrica dos números negativos; ou Johann Hudde, que deu passo importante ao usar uma letra numa fórmula para indicar qualquer número real positivo ou negativo; ou ainda Euler, no século XVIII, com uma bem-sucedida utilização dos números imaginários.

Apesar do trabalho de Euler, a maioria dos matemáticos não confiava nos trabalhos com números imaginários. Isso só mudou quando se chegou a sua representação geométrica com Caspar Wesseu em 1797, primeiro, depois com Argand (1806) e, finamente, com Gauss em 1831, quando este publicou um tratado com uma representação geométrica que já havia obtido em 1811.

Passaram-se dois séculos, desde o trabalho de Viète até as descobertas de Niels Abel e Galois que, introduzindo a ideia de grupo, demonstraram que uma equação polinomial de grau maior que quatro não admite uma solução algébrica genérica.

1.10 **O desenvolvimento do conceito de grupo**

Apesar de Abel e Galois terem sido os primeiros a introduzir a ideia de grupo em seus trabalhos, o conceito não emergiu de súbito com eles. Nas palavras do autor:

> O período entre 1600 e 1800 assistiu a desenvolvimentos como a invenção dos logaritmos por John Napier (1614) e Henry Briggs (1615); o trabalho de Pierre de Fermat sobre probabilidade e teoria dos números (1635) e, contemporaneamente, com Descartes, sobre geometria analítica (1637); o início da teoria das probabilidades com Pascal (1653), numa troca de correspondências com Fermat; trabalhos sobre a série binomial com James Gregory e Isaac Newton (1670); a fundação do cálculo por Newton e Leibniz (1680); trabalhos iniciais sobre matemática atuarial com Abraham De Moivre (1720); o prolífico trabalho de Euler em análise (1750); e a matemática versátil e notável produzida por Joseph Louis Lagrange (1780), Pierre Simon Laplace (1805), Adrien Marie Legendre (1805), Cauchy (1820) e Gauss (1820). No trabalho de algum desses homens já se encontra implícita uma percepção do conceito de grupo. (BAUMGART, 1992, p. 17)

1.11 **Álgebra booleana e álgebra matricial**

> Foram criadas outras álgebras em que; por exemplo; era possível $xy = 0$ com $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Uma aplicação interessante dessa ideia se acha na álgebra da lógica de George Boole, onde se representa por x a classe de homens, por y a classe dos não-homens (que é indicada por 1 - x) e 0 a classe vazia. (...). Os princípios estabelecidos por Boole em suas *Leis do pensamento* (1854) seguem as linhas da "característica universal"- de Leibniz, e seu desenvolvimento por Gottlob Frege (1884) e outros culminou no *Principia mathematica* (1910-13) de Bertrand Russell e Whitehead e em toda a atual lógica matemática. (BAUMGART, 1992, pp. 27-28)

Anice Seybold (1992), autora do capítulo *Álgebra booleana* do livro organizado por Baumgart, acredita que a ideia de estabelecer postulados para o uso de símbolos abstratos ocorreu na Inglaterra, com George Boole, onde, em 1847, publicou um livro de nome *Mathematical analisys of logic*. Em geral, o termo “álgebra booleana” é usado para denominar a álgebra dos conjuntos, mas por muito tempo deu nome ao que se chama hoje de “cálculo proposional”. Hoje chamado de A, B e C, os conjuntos eram chamados de x, y e z por Boole. Outra diferença na notação vem com o conjunto vazio, que o matemático representava por um 0 (zero), enquanto hoje nós representamos com Ø.

A teoria das matrizes se iniciou com Arthur Cayley por volta de 1958. Cayley desenvolveu uma álgebra das matrizes observando propriedades das transformações em equações lineares. Além disso, ele mostrou que um quartênion poderia ser representado em forma de matriz. Um exemplo dado por Baumgart (1992, p. 28) diz que: “se os quartênions unitários 1, i, j, k são representados por $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}i & 0\\0 & -i\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0 & i\\i & 0\end{bmatrix}$, o quartênion 4+5i+6j+7k pode ser escrito da seguinte maneira: $\begin{bmatrix}4+5i & 6+7i\\-6+7i & 4-5i\end{bmatrix}$.”

Por causa dessa maneira de representar os quartênions, Peter Tait concluiu erroneamente que estes motivaram Cayley a apreender a ideia de matriz. Outro feito de Cayley foi, em colaboração com James Sylvester, iniciar os trabalhos com a teoria dos invariantes algébricos.

Até a segunda metade do século XIX a matemática havia gerado tantos frutos que uma conferência promovida por Felix Klein, em 1872, de nome *Erlanger Programm*, foi muito bem recebida. Nela, Klein mostrou que o conceito de grupo poderia ajudar na classificação de diversos ramos da matemática. Depois de Klein, a matemática se proliferou muito mais.

Por fim, segundo Baumgart, o estudante de matemática de hoje está no mesmo patamar que os pioneiros citados anteriormente, e a história dos estudos levantados por nomes como Cardano podem inspirar novas mentes a começar do desconhecido.

2 **A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL**

Para uma melhor compreensão de todo o contexto que ajudou a produzir a disciplina matemática como é conhecida e reproduzida hoje, no dia a dia e dentro das salas de aula, a proposta desse capítulo é lançar olhar para a história que a compôs.

É fundamental observar os trajetos que a matéria percorreu e as motivações que a levaram a se transformar diante das adversidades e se modernizar para atender melhor as necessidades da população em cada tempo, inclusive as diversas reformas que modificaram a metodologia de ensino e as políticas públicas que somam ao objetivo de construir um sistema educacional funcional e acessível.

Para isso, a história do ensino da matemática no Brasil será descrita a partir de uma estrutura cronológica e que contará com uma divisão por subitens que visa destacar aspectos principais dessa análise.

A ideia da composição metodológica do capítulo se deu através da leitura de um dos trabalhos usados como base de dados e conceitos para essa visita histórica, a obra *História da Matemática no Brasil: Uma visão panorâmica até 1950*, de Ubiratan D`Ambrósio (1999), na página 3:

> Os países periféricos não participaram do progresso da matemática antes do final do século XIX. Até então se deu apenas a recepção do conhecimento matemático e não sua elaboração. Portanto a periodização usual faz pouco sentido para estudarmos a história da matemática nos países periféricos. Além de ser necessária uma outra periodização, é importante uma revisão epistemológica, incluindo prioridades e avanços que não são considerados ao se fazer a história da matemática dos países centrais.

Sendo, o primeiro subitem (2.1) correspondendo ao período entre 1549 e 1750; o segundo subitem (2.2) corresponde ao período entre 1750 e 1900; o terceiro subitem (2.3) conta a história do período entre 1900 e 2000; e o quarto subitem (2.4) se refere aos últimos 19 anos de história da matemática, de 2000 a 2019. A classificação foi definida pensando as características próprias e as circunstâncias políticas e sociais do próprio período para um melhor entendimento do cenário exposto.

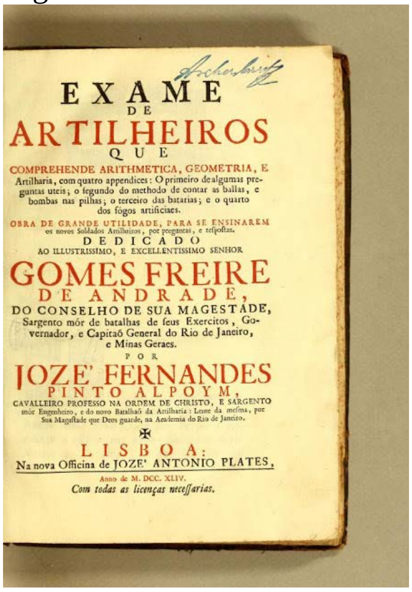
2.1 **Os 200 anos de Jesuítas**

A prática da educação enquanto transmissão de conhecimentos, instrução e disciplinamento chegou ao Brasil com a conquista do território, até então indígena, pelos portugueses. Em 1549, quase 50 anos após a descoberta, Portugal iniciou o processo de colonização das novas terras. Os jesuítas chegaram ao país naquele ano e logo criaram a primeira escola do Brasil em Salvador e, em 1554, a segunda escola do país em São Paulo – no mesmo ano da fundação da cidade.

As aulas nessas primeiras escolas se restringiam ao ensino do novo idioma, a matemática e a doutrina cristã. Isso se deu pelas necessidades apresentadas pelo processo de colonização e desenvolvimento das novas terras. A educação no Brasil era a base para aprimorar o contato entre portugueses e indígenas, inserir a cultura e os costumes ocidentais nos habitantes originais das novas terras e para instruir melhor os trabalhadores e os militares que lutavam nas batalhas territoriais pela expansão do território conquistado.

Nesse sentido, a maior parte dos materiais e conteúdos usados para as aulas era trazido de Portugal. Segundo o teórico Ubiratan D'Ambrósio (1999), os primeiros livros de matemática essencialmente brasileiros foram escritos pelo militar e engenheiro português José Fernandes Pinto Alpoim, que chegou ao Brasil em 1738 e teve grande significância para a formação educacional de militares e também na construção arquitetônica do Rio de Janeiro daquele século. Alpoim escreveu em 1744 o "Exame de Artilheiro" e em 1748 o "Exame de Bombeiro", ambos eram considerados na época livros elementares de auxílio na preparação para os exames de admissão à carreira militar e de características inovadores do ponto de vista metodológico. Os dois livros foram impressos na Europa, por não ter na época imprensa no Brasil, respectivamente em Lisboa e Madrid.

Figura 6 – Exame de Artilheiro



EXAME
DE
ARTILHEIROS
QUE
COMPREHENDE ARITHMETICA, GEOMETRIA, E
Artilharia, com quatro appendices: O primeiro de algumas preguntas uteis; o segundo do methodo de contar as ballas, e bombas nas pilhas; o terceiro das batarias; e o quarto dos fógos artificiaes.
OBRA DE GRANDE UTILIDADE, PARA SE ENSINAREM os novos Soldados Artilheiros, por preguntas, e respostas.
DEDICADO
AO ILLUSTRISSIMO, E EXCELLENTISSIMO SENHOR
GOMES FREIRE
DE ANDRADE,
DO CONSELHO DE SUA MAGESTADE,
Sargento mór de batalhas de seus Exercitos, Governador, e Capitaõ General do Rio de Janeiro, e Minas Geraes.
POR
JOZE' FERNANDES
PINTO ALPOYM,
CAVALLEIRO PROFESSO NA ORDEM DE CHRISTO, E SARGENTO mór Engenheiro, e do novo Batalhaõ da Artilharia: Lente da mesma, por Sua Magestade que Deos guarde, na Academia do Rio de Janeiro.
LISBOA:
Na nova Officina de JOZE' ANTONIO PLATES,
Anno de M. DCC. XLIV.
Com todas as licenças necessarias.

Fonte: CAMPOS, 2018.

Figura 7 – Exame de Bombeiro

EXAME
DE
BOMBEIROS,
QUE COMPREHENDE DEZ TRATADOS; O PRIMEIRO DA GEOMETRIA, O SEGUNDO de huma nova Trigonometria, o terceiro da Longemetria, o quarto da Altimetria, o quinto dos Morteiros, o sexto dos Pedreiros, o setimo dos Obuz, o oitavo dos Petardes, o nono das Batterias dos Morteiros, com dous Appendix: o primeiro do methodo mais facil, que se póde inventar, para saber o numero de bálas, e bombas nas Pilhas: o segundo, como dado hum numero de bálas, ou bombas, se lhe pódem achar os lados das pilhas, que se quizerem formar, ou sejaõ triangulares, ou quadrangulares, o decimo da Pyrobolia, ou fógos artificiaes da guerra, com dous Appendix: o primeiro dos fógos extraordinarios, o segundo dos Fogaréos, e Candieiros de muralha.
OBRA NOVA, E AINDA NAM ESCRITA DE AUTHOR Portuguez, utilissima para se ensinarem os novos Soldados Bombeiros, por preguntas, e respostas.
DEDICADO
AO ILLUSTRISSIMO, E EXCELLENTISSIMO SENHOR
GOMES FREIRE
DE ANDRADA
Do Concelho de Sua Magestade, Sargento Mór de Batalha de seus Exercitos, Governador, e Capitaõ General do Rio de Janeiro, e Minas Geraes.
POR
JOZE FERNANDES
PINTO ALPOYM,
CAVALLEIRO PROFESSO NA ORDEM DE CHRISTO, TENENTE DE MESTRE DE CAMPO GENERAL, com exercicio de ENGENHEIRO, e de Sargento Mayor, no Batalhaõ da Artelharia, de que he Mestre de Campo André Ribeiro Coutinho, Lente da mesma, por Sua Magestade, que Deos guarde, na Academia do Rio de Janeiro.
EN MADRID,
En la Officina de FRANCISCO MARTINEZ ABAD.
Año de M. DCC. XXXXVIII.
Com todas as licenças necessarias.

Fonte: SILVA, 2013.

Em 1739, o 4º Bispo do Rio de Janeiro, Dom Antônio de Guadalupe, fundou o Colégio Órfãos de São Pedro, o qual em 1766 transformou-se no Seminário de São Joaquim, localizado no Centro do Rio de Janeiro. Porém, em 2 de dezembro 1837 o ministro do Império apresentou a assinatura do Regente e, desta forma, o antigo Seminário de São Joaquim foi totalmente remodelado e passou a se chamar Imperial Collegio de Pedro Segundo, com o objetivo de homenagear o jovem Imperador que completava 12 anos de idade nesta data. A fundação do Colégio foi de grande importância para a história do ensino no

Brasil, pois mais tarde na história viria a protagonizar capítulos importantes para o desenvolvimento da educação, principalmente na área da matemática.

Durante o Brasil colônia, principalmente seus primeiros dois séculos de existência (Séculos XVI a XVIII), a população brasileira passa por um forte processo de miscigenação. Causado pela falência do projeto da metrópole Portugal de escravizar os nativos indígenas, o que causou uma grande diminuição da população originária do país; pela grande imigração involuntária proveniente da África para a escravização dos povos; pela vinda voluntária de populações de nações europeias.

2.2 **A nova educação do Brasil**

Um clima de transformações em torno da educação que repensava os métodos ortodoxos de ensino crescia na Europa enquanto o Brasil desenvolvia seu sistema de ensino exclusivamente sob o controle da companhia de Jesus dos padres jesuítas, que justamente pelos seus objetivos catequistas davam menos importância ao ensino da matemática e focavam no idioma português e na base doutrinária cristã.

Apenas após duzentos anos de Brasil colônia que a educação brasileira começou a caminhar com mais independência e foco no desenvolvimento pessoal do cidadão, e não mais com o objetivo de aculturar e converter. Com a população mais plural e numerosa que nos séculos anteriores, a escolarização começou a fazer parte da rotina das famílias mais abastadas e os conteúdos / disciplinas também se desenvolveram.

Na segunda metade do século XVIII os jesuítas foram expulsos do reino de Portugal devido a problemas políticos e deixaram as escolas e o ensino do Brasil. Sem os jesuítas, a educação no país desacelerou de forma drástica e deixou o Brasil em uma situação de abandono educacional. A companhia de Jesus era a única fonte de profissionais da educação no Brasil e um sistema educacional bem estruturado para os parâmetros da época funcionava nas principais cidades do Brasil Colônia mantido e orquestrado pelos padres.

Seguindo o curso de desenvolvimento educacional no período do século XVIII, no ano de 1792, foi criada a escola de ensino superior Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho, no Rio de Janeiro. É considerada como a precursora do ensino de engenharia em todo o continente americano. Ao longo dos anos foi ganhando diversos cursos e especialidades e veio a se tornar a Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, nome recebido já em 1920 – 200 anos após sua criação.

Só após a chegada da família real ao Brasil, em 1808, que a identidade educacional e cultural do país voltou a ganhar força e incentivo. Esse ano se apresentou como um marco na história do Brasil, principalmente no ponto de vista sócio cultural. Com a vinda da corte portuguesa naquele ano, em um translado incentivado pela política expansionista do império napoleônico, o Brasil entrou em um processo de desenvolvimento social, cultural e de economia individual. Na época o país representava uma das menos desenvolvidas colônias do continente – não havia nenhuma produção industrial, nenhuma universidade e nenhuma estrutura de lazer e cultura.

Em decorrência da transferência da corte e da nobreza portuguesa para o Brasil, o "Estado do Brasil", nome que correspondia ao país desde 1621, foi elevado a Reino Unido e recebeu o nome de "Reino Unido de Portugal, Brasil e Algarves". Com isso, foi estabelecida a criação de instituições fundamentais para o funcionamento de uma capital na época, respeitando o padrão e o gosto europeu, como: a Imprensa Régia, o Jardim Botânico, o Museu Real, a Biblioteca Real, o Observatório Astronômico e o Banco do Brasil.

Logo no início do século XIX surgiu o primeiro teatro, as primeiras universidades e uma estrutura sofisticada de lojas, livrarias, cafés, com muita influência francesa tanto nas estruturas, quanto nas modas e no comportamento social. A chegada de inúmeras famílias portuguesas junto com a corte, o comércio e os novos investimentos nas cidades, principalmente na então capital Rio de Janeiro, criaram uma nova ordem social e a necessidade latente de acesso a um maior e mais sólido sistema escolar.

Muitos livros chegaram ao Brasil e as discussões que estavam acontecendo nos países mais desenvolvidos da Europa com os avanços científicos e grandes descobertas tecnológicas chegaram ao acesso dos brasileiros de maior condição econômica.

As primeiras escolas superiores do Brasil foram criadas em 1808, assim que a família real chegou ao Brasil. Tendo sido a Escola de Medicina do Rio de Janeiro e da Bahia as primeiras e, logo depois, a Academia Real Militar – que em 1839 se transformou em Escola Militar da Coroa e em seguida, em 1842, criou-se o grau de Doutor em Ciências Matemáticas. Essa foi a instituição precursora da Escola de Engenharia do Rio de Janeiro.

Houve pouca inovação científica e matemática no Brasil durante o período que ficou conhecido como República Velha, que corresponde aos 41 anos entre a proclamação da república em 1889 e o início do Governo Vargas em 1930. O viés vigente e que se consolidou no período foi o positivismo de Auguste Comte que se introduziu ainda durante o império.

Apenas no início do século XX o desenvolvimento da pesquisa e da educação na área da matemática voltou a caminhar.

2.3 **Os últimos 100 anos do século XX**

A conjuntura social e política tem grande influência no desenvolvimento do sistema educacional de uma sociedade ao longo da história. No Brasil, o século XX foi marcado pela instabilidade do processo de democratização política do país. O primeiro governo de Getúlio Vargas, entre 1930 e 1934, é considerado como o início da instauração da democracia, encerrando o conturbado período da República Velha. A Era Vargas chegou trazendo grandes possibilidades de modernização para a cultura e a educação no Brasil, rompendo com características de manutenção do império que ainda se encontrava como resquícios na República Velha. O espaço e o incentivo para uma grande modernização da matemática brasileira foi um dos efeitos da política adotada por Vargas.

O sucesso da revolução Varguista deu origem a um governo trabalhista, mas já em 1937 a democracia perdeu espaço para as características fascistas do próprio Vargas que deu origem ao período do Estado Novo, que se estendeu até 1945.

Outra interrupção se contrapôs ao estado democrático em 1964 quando se iniciou mais um período ditatorial, dessa vez implantado por uma intervenção militar no país, dessa vez com 25 anos de duração. Apenas em 1989 o Brasil começou a reestabelecer um sistema político democrático, enquanto buscava soluções para diversos problemas econômicos gerados pelos anos de instabilidade política e para o sentimento de vulnerabilidade e insegurança que acometia a população de todo o país.

O contexto histórico descrito acima foi o cenário para o desenvolvimento dos principais componentes sócio culturais que compõem uma sociedade civilizada ao longo do século XX no Brasil. Nesse mesmo período uma era de grande crescimento nos debates acerca da educação e das ciências e tecnologia percorria os países ocidentais. Desse modo, entende-se que os momentos históricos enfrentados pela matemática brasileira geraram impacto em seu avanço e na aplicabilidade de métodos de ensino.

Inspirada na Universidade de Berlim, a Universidade de São Paulo foi criada em 1933 reunindo diversas escolas superiores já existentes no estado – como a Faculdade de Direito, a

Faculdade de Medicina e a Escola Politécnica, e dando origem ainda a uma nova escola denominada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras.

2.4 **Reformas e o Movimento da Matemática Moderna**

Apenas a partir de 1920 que uma possível reforma educacional ganhou espaço no país. As ideias pedagógicas da Escola Nova que focava na psicologia e na ideia de que o aluno era o centro do aprendizado, um ser autônomo e capaz de buscar o conhecimento, sendo reservada ao professor a função de conduzir esse processo, contrastavam com uma pedagogia tradicionalista cuja manutenção era defendida com fervor pelas instituições católicas.

Nesse cenário o Positivismo de Auguste Comte começou a ser questionado por grandes nomes da área, principalmente jovens formandos da Escola de Engenharia que clamavam por modernização. Na ocasião destacou-se a breve visita de Albert Einstein pelo Brasil, em 1925, que gerou conflito entre os conservadores cientistas positivistas e a corrente modernizadora que era crescente e ganhou muito espaço pelas consequências e publicidade geradas após a palestra de Einstein na Academia Brasileira de Ciências.

Em 1927, Euclides Roxo, o então diretor do Colégio Pedro II, propôs à congregação do referido colégio uma mudança expressiva na prática do ensino da matemática. Unificar as três matérias: Aritmética, Álgebra e Geometria, que até então eram oferecidas separadamente, e passar a ensinar a matemática como uma disciplina nova e única. Tal transformação se baseou na reforma dirigida pelo importante matemático Felix Klein na Alemanha e foi amplamente apoiada pelo Departamento Nacional de Ensino (DNE) e pela Associação Brasileira de Educação (ABE). Em 15 de janeiro de 1929 o decreto 18.564 regularizou a proposta de Roxo e lançou a ideia para a escala nacional.

Segundo Nívia Martins Berti, o sistema metodológico para o ensino da matemática vigente até a mudança que unificou a disciplina contava com o seguinte esquema: o aluno passava por um exame de admissão para ingressar no ensino secundário e, uma vez aprovado, tinha o acesso ao conteúdo matemático dividido ao longo dos quatro primeiros anos, sendo a Aritmética nos dois primeiros, Álgebra no segundo e Geometria e Trigonometria no quarto ano.

Os manifestos favoráveis do DNE e ABE à proposta considerada modernizadora gerou interesse a nível nacional, principalmente por parte do Ministro da Educação e Saúde, Francisco Campos, que de forma autoritária implantou tais mudanças em um programa nacional de reforma do ensino aplicando todas as ideias de Roxo para o Colégio Pedro II de forma automática em todo o sistema educacional brasileiro, em vez de respeitar o plano inicial, que tinha o objetivo de promover essa implementação de forma gradual e progressiva. A Reforma Francisco Campos, como ficou conhecida, é considerada a primeira grande reforma educacional do Brasil, tendo acontecido a partir do decreto 19.890 de 18 de abril de 1931, apenas dois anos após a efetivação do plano no Colégio dirigido por Euclides Roxo.

Em 1930, a matemática passou por uma revolução particular. O educador Anísio Teixeira, cujo papel foi fundamental para as transformações da educação brasileira ao longo do século XX, inclusive por defender profusamente a ideia de escolas públicas democráticas e acessíveis como responsabilidade do Estado, defende no Distrito Federal novas soluções para um obstáculo metodológico no ensino da matemática causado pela natureza abstrata dos problemas aritméticos. Para Teixeira, os problemas deveriam ser apresentados aos estudantes levando em consideração os interesses particulares de cada classe e principalmente o contexto sócio cultural dos alunos, elaborando questões que se aproximem da vida real dos indivíduos. Como contas cotidianas que a criança está acostumada a vivenciar na prática, a exemplo de mercado, feira, remédios e jogos, tendo como objetivo oferecer ao aluno possibilidade de aprender o conteúdo movido por verdadeiro interesse, sentindo vontade de resolver tais problemas e percebendo a aplicabilidade da matemática em sua vida prática.

Na década de cinquenta do século XX começa a surgir no Brasil a difusão das primeiras ideias do movimento internacional que ficou conhecido como matemática moderna. Com foco nos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra, baseava-se em metodologias mais formais e rigorosas para o ensino da matemática.

Foi durante o primeiro Congresso Nacional de Ensino que aconteceu em 1955, na Bahia, que as primeiras manifestações de defesa das ideias da matemática moderna que ganhavam o mundo começaram a ser apresentadas e discutidas entre professores da área no Brasil. Outros Congressos Nacionais de Ensino foram organizados em 1957, no Rio Grande do Sul, 1959, no Rio de Janeiro e em 1962 no Pará e também apresentaram debates acerca do assunto, mas foi apenas através do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) fundado em 1961 por professores do Estado de São Paulo que desencadeou o movimento da Matemática Moderna dentro do Brasil.

O V Congresso Nacional de Ensino da Matemática foi direcionado inteiramente para o debate sobre a Matemática Moderna e houve a participação de inúmeros nomes importantes para o ensino da matemática na época, inclusive professores estrangeiros trazido especialmente para o evento que teve o apoio do MEC e da Secretaria do Estado. Com o desencadeamento da ditadura militar em 1964 não houve possibilidade de realização de outros congressos dessa natureza, ficando o diálogo sobre os caminhos da educação da matemática no Brasil para grupos de estudo menores e regionalizados – como o GEM de São Paulo e o GEMPA de Porto Alegre.

Segundo Maria Gomes, em seu livro: *História do Ensino da Matemática: uma introdução* cita os objetivos do Movimento da Matemática Moderna.

> O Movimento da Matemática Moderna tinha, como um de seus principais objetivos, integrar os campos da aritmética, da álgebra e da geometria no ensino, mediante a inserção de alguns elementos unificadores, tais como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e o estudo das relações e funções. Enfatizava-se, ainda, a necessidade de conferir mais importância aos aspectos lógicos e estruturais da Matemática, em oposição às características pragmáticas que, naquele momento, predominavam no ensino, refletindo-se na apresentação de regras sem justificativa e na mecanização dos procedimentos. (GOMES, 2013, p. 24).

O Movimento da Matemática Moderna é considerado como uma das reformas mais efetivas na área dessa disciplina no Brasil. Isso se dá principalmente pelo fato de que a amplitude alcançada por suas ideias não foram implementadas por vias de lei ou decreto, como o caso da Reforma Campos e Capanema, mas sim pela divulgação e adoção dos próprios profissionais da área seguindo um fluxo internacional de mudança na metodologia de ensino dos determinados conteúdo.

A falta de preparo e de capacitação de grande parte dos professores de matemática para ensinar a matéria através do novo método gerou um agravamento do problema do ensino ao invés de funcionar como uma solução, que era o esperado. No início do movimento, diversos alertas ecoaram de professores insatisfeitos e temendo pelo caminho que a nova metodologia poderia seguir, mas ainda assim a matemática moderna ganhou força no Brasil.

Estima-se que principalmente pelo contexto sócio político de sua implementação: a realidade da ditadura militar que gerava receio de se promover oposição às ideias vigentes, quaisquer que fossem elas.

2.5 **Políticas Públicas**

Ao longo do século XX diversas políticas públicas, como leis e instituições governamentais, que são fundamentais para o desenvolvimento e o controle de qualidade do ensino atualmente foram criadas. Algumas dessas iniciativas levaram anos para serem finalizadas, principalmente devido aos conturbados períodos históricos que o Brasil já enfrentou. São algumas delas:

2.5.1 Lei de Diretrizes e Bases da Educação

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB tem como objetivo definir e regulamentar a educação brasileira seguindo os princípios da Constituição Federal. O caminho entre a sua primeira aparição enquanto lei e a forma como ela se constitui hoje foi longo e pode ser resumido por três momentos fundamentais que ajudaram em sua construção: Sua primeira citação foi na Constituição de 1934, sendo que a primeira LDB foi criada apenas em 1961 e, logo após, sua segunda versão surge em 1971 e permanece em vigor até a sua versão mais recente ser promulgada, em 1996.

Para permanecer ativa e alcançar seus objetivos ao longo de diversos governos e sistemas políticos diferentes durante sua vigência, a LDB transcendeu as barreiras governamentais e se apoiou em mecanismos criados para reforçar suas intenções e planos. Como por exemplo o Plano Nacional de Educação (PNE), que determina metas e estratégias a serem alcançadas no período de 10 anos – de 2014 a 2024.

Segundo o estudo *Achieving World-Class Education in Brazil*, publicado pelo Banco Mundial, a evolução da escolaridade no Brasil cresceu a um ritmo mais acelerado do que ao da China entre os anos de 1990 e 2010. Neste estudo os pesquisadores afirmam que o Brasil partiu de uma total falta de informação sobre o aprendizado de estudantes em 1994 para um dos mais impressionantes sistemas do mundo para medir resultados educativos construído nos governos de Fernando Henrique Cardoso e Lula.

2.5.2 O Ministério da Educação (MEC)

Em 1930, durante do governo de Getúlio Vergas, foi criado o Ministério dos Negócios da Educação e Saúde Pública, o primeiro formato do Ministério da Educação (MEC). Nele eram tratados assuntos referentes ao esporte, meio ambiente, saúde e educação. Em 1953 surge a sigla MEC para se referir ao ministério que cuidava da educação e cultura no Brasil, quando a saúde ganha autonomia, e apenas em 1995, durante o governo de Fernando Henrique Cardoso, que a educação passou a ser a atribuição exclusiva do Ministério que passou a se chamar Ministério da Educação, embora tenha mantido o uso da sigla MEC.

Em 1932 um grupo de 26 educadores e intelectuais lançaram um manifesto que se propunha a oferecer uma base para uma completa reforma no sistema educacional brasileiro – reforma esta que havia sido prometida por Getúlio Vargas em 1930 após a vitória da Revolução que motivou o fim da República Velha. Nomes importantes para a história da educação brasileira estavam entre os signatários, como Anísio Teixeira que foi Secretário de Educação do Distrito Federal entre 1932 e 1935, tendo sido responsável por diversas reformas significativas no ensino.

O objetivo do manifesto era contribuir com sugestões para as mudanças que seriam promovidas pelo novo governo. O manifesto propunha, entre muitas ideias, um ensino obrigatório e gratuito até os 18 anos custeado pelas entidades governamentais, a criação de Universidades públicas focadas em ciências e a criação de fundos escolares a partir da arrecadação de rendas pela União.

O manifesto se colocava a favor da democracia e defendia que a educação é um instrumento de reconstrução da democracia, tendo tido enorme repercussão na época de seu lançamento.

Em um momento em que a educação era dividida entre Estado e Igreja, os educadores falavam sobre construir um plano geral de escola pública, gratuita, laica e obrigatória.

Com a Constituição Federal de 1934, a educação se torna um direito de todos os brasileiros e sendo sua execução uma responsabilidade dos poderes públicos. O Ministro da Educação e Saúde Pública, Gustavo Capanema Filho, assume o cargo naquele ano e permanece nele até 1945, em razão do regime ditatorial implantado por Vargas em 1937. Capanema promove importantes reformas na educação durante esse período, principalmente nos níveis secundário e universitário.

Em 1961 a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) entra em vigor e gera um processo de descentralização do MEC, que até aquele momento ministrava o sistema educacional a partir de um modelo centralizado. Os órgãos estaduais e municipais ganharam autonomia.

A reforma universitária promovida pela LDB em 1968 gerou um avanço para as universidades brasileiras, tendo garantido a elas autonomia e mais independência administrativa e financeira, estabelecendo, ainda, um modelo único de organização para universidades públicas e privadas do país. Na LBD de 1971 passou a ser obrigatório o ensino escolar para crianças e adolescentes entre 7 e 14 anos.

Em 1985 a cultura ganhou autonomia ministerial com a criação no Ministério da Cultura, mas já em 1992 o MEC passou a responder por Ministério da Educação e do Desporto. Apenas em 1995 a área da educação passou a ser atribuição exclusiva do MEC.

É ainda importante citar uma nova reforma da educação que em 1996 trata sobre a formação adequada de profissionais da educação, além de mudanças significativas em leis anteriores para a implementação da educação infantil, inclusive creches.

2.5.3 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são um conjunto de documentos que foram elaborados com o objetivo de nortear a prática docente e servir como base para a construção do projeto político pedagógico de cada escola.

Os PCNs são diretrizes para orientar a elaboração curricular, capacitação e formação de profissionais da educação, avaliação do sistema educacional e demais temas relacionados a qualidade de ensino e agir como referência comum para todas as escolas do país. Foram criados em 1997 pelo governo federal e são separados por volumes disciplinares.

O objetivo principal dos PCNs era oferecer uma base para que todos os alunos, estudantes de qualquer escola do país, pudessem ter acesso a um conjunto básico de conhecimento oferecido pela instituição de ensino. Tais parâmetros não são uma regra para escolas e professores, funcionam exatamente como diretrizes para construir uma base na educação brasileira.

Fica definido nos PCNs que os conteúdos devem ser passados a partir de práticas docentes que encaminhem os alunos rumo a aprendizagem com uma metodologia bem definida, e não apenas trabalhados como transmissão de conhecimentos.

Os PCNs foram divididos para auxiliar a construção os projetos político pedagógicos das escolas, respeitando uma separação por área de conhecimento em diversos volumes, sendo eles:

a) Volume 01 - Introdução aos PCNs;
b) Volume 02 - Língua Portuguesa;
c) Volume 03 – Matemática;
d) Volume 04 - Ciências Naturais;
e) Volume 05.1 - História e Geografia;
f) Volume 05.2 - História e Geografia;
g) Volume 06 – Arte;
h) Volume 07 - Educação Física.

E ainda uma categoria de volumes definida como temas transversais, sendo eles:

a) Volume 08.1 - Temas Transversais - Apresentação
b) Volume 08.2 - Temas Transversais - Ética
c) Volume 09.1 - Meio Ambiente
d) Volume 09.2 - Saúde
e) Volume 10.1 - Pluralidade Cultural
f) Volume 10.2 - Orientação Sexual

2.6 **A atualidade da educação matemática**

A educação atualmente é orientada por órgãos governamentais que norteiam diretrizes, definem formação de profissionais, incentiva a capacitação profissional, a inclusão nas escolas e fiscalizam a aplicação das regras nas escolas e universidades brasileiras. Para manter o fluxo de modernização do sistema educacional e buscar novas soluções para os problemas e adversidades que surgem no caminho da educação, o Brasil participa de diversos projetos, comitês e encontros para manter um diálogo afinado com todo o conteúdo que está sendo produzido e pesquisado no Brasil e no mundo.

Com o objetivo de integrar países das Américas no debate sobre a educação matemática, foi fundado no ano de 1961 o Comitê Interamericano de Educação Matemática (CIAEM) que reunia profissionais e especialistas na área para pensar soluções e desenvolvimento do ensino da matemática nas Américas, principalmente na América Latina. O comitê é ativo até os dias atuais e suas reuniões acontecem sem frequência fixa nas cidades dos países que integram o CIAEM, já tendo passado pelo México, Uruguai, Brasil, EUA, Chile, Venezuela e República Dominicana.

Um dos grandes encontros para discussão da matemática e seu ensino ativo no Brasil é o Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM). O primeiro encontro aconteceu em 1990 e acontece anualmente no Brasil e se propõe a reunir estudantes e especialistas para dialogar sobre os trabalhos que estão sendo produzidos nessa área e compartilhar experiências e resultados.

2.6.1 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC é um documento de referência para a elaboração do currículo específico de cada escola, considerando as necessidades e as particularidades de cada instituição, inclusive do ponto de vista sócio regional. É um norteador que contém os objetivos de aprendizagem de cada etapa de formação, englobando todas as fases do ensino básico, da educação infantil ao ensino médio.

A iniciativa surge pela necessidade de neutralizar as grandes diferenças entre as propostas pedagógicas de escolas nas diferentes regiões do país, fazendo-se necessário o esforço para unificar as referências das instituições de ensino, oferecendo definições básicas que conectam e uniformizam um pouco mais os sistemas e os conteúdos oferecidos para o desenvolvimento escolar das crianças e jovens do país.

A constituição de 1988 já havia previsto uma grade de conteúdos fixos para o ensino fundamental com o objetivo de uma formação básica comum em seu artigo 210. “Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.”

A BNCC não foi a primeira iniciativa governamental para criar diretrizes para o ensino regular no Brasil. Entre 1997 e 2000, após a LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, criaram-se os PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais. Esses parâmetros eram mais amplos e menos exigentes quanto aos objetivos apresentados na intenção de tornar a educação nacional mais unificada.

A BNCC foi elaborada em 2015 e contou com a contribuição do público através do portal BNCC durante o período entre setembro de 2015 e março de 2016. O portal recebeu mais de doze milhões de contribuições e, após revisado, teve sua segunda versão divulgada. O passo seguinte foram 27 seminários estaduais realizados um em cada unidade federativa do país, organizados pelo CONSED - Conselho Nacional de Secretários de Educação e pela UNDIME - União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação, entre junho e agosto de 2016, que tinha como objetivo reunir as opiniões mais especializadas de professores, coordenadores pedagógicos e alunos. O documento contendo as contribuições desses seminários foi entregue ao então ministro da educação, Mendonça Filho, e após ajustes e a decisão de separar a BNCC em duas partes: uma para a educação infantil e ensino fundamental e outra para o ensino médio, em abril de 2017 foi divulgada a terceira versão da Base da Educação Infantil e Ensino Fundamental. E um ano após, em abril de 2018, foi divulgada a do Ensino Médio.

Na BNCC a álgebra se mostra importante no desenvolvimento do raciocínio lógico.

> O trabalho com a álgebra, no início da escolaridade, contribui para que os/as estudantes desenvolvam um tipo de raciocínio específico, denominado pensamento algébrico. Essa ideia, atualmente considerada, diferencia-se de uma ideia de álgebra escolar como um processo de manipulação de símbolos. Nessa perspectiva, algumas dimensões do trabalho com a álgebra estão presentes nos processos de ensino e de aprendizagem, desde os anos iniciais, como as ideias de regularidade, de generalização e de equivalência. (BRASIL 2016, p. 270)

Nesse sentido a BNCC mostra a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico e aprendizado de álgebra para aplicabilidades externas a Matemática, como é o exemplo da computação, onde se trabalham linguagens algorítmicas.

> [...] a aprendizagem de Álgebra [...] contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. (BRASIL 2016, p. 271)

A BNCC propõe ainda o uso de aplicativos de álgebra ou geometria dinâmica na resolução de problemas, mas pesar dessa contextualização da Matemática com áreas afins, Computação e Engenharia a Base carece de interdisciplinaridade com outras áreas.

3 A ANÁLISE DE ERROS

3.1 A importância do erro no processo pedagógico

Segundo os PCNs (1997) qualquer área do ensino necessita que se dialogue com a bagagem trazida pelo estudante, e isso não pode ser diferente na matemática, uma vez que todo o saber trazido pelo estudante dialoga com sua cultura e a diversidade do meio em que vive e isto deve ser levado em consideração ao longo do processo de ensino por parte dos educadores. Por muitas vezes esses conhecimentos são deixados de lado levando a falhas no processo de aprendizagem como no ensino da álgebra onde nota-se na maioria dos estudantes a falta de interpretação nas situações problemas, deste modo pode-se utilizar meios lúdicos na tentativa de sanar as dificuldades do aluno em relacionar o meio aritmético ao meio algébrico. (Ojose, 2015). Com base nas argumentações expostas, a BNCC traz o seguinte trecho:

> Atenta a culturas distintas, não uniformes nem contínuas dos estudantes dessa etapa, é necessário que a escola dialogue com a diversidade de formação e vivências para enfrentar com sucesso os desafios de seus propósitos educativos. A compreensão dos estudantes como sujeitos com histórias e saberes construídos nas interações com outras pessoas, tanto do entorno social mais próximo quanto do universo da cultura midiática e digital, fortalece o potencial da escola como espaço formador e orientador para a cidadania consciente, crítica e participativa. (BNCC, 2017)

Desse modo, fica evidente a necessidade da escola enxergar os alunos como sujeitos da sua própria aprendizagem, de modo que suas ações conduzam à reflexão constante acerca de suas práticas, tanto no que diz respeito ao aluno quanto ao professor. Para tanto não se pode simplesmente categorizar os estudantes em grupos opostos, dos alunos bons ou ruins, dos que acertam ou erram e para tanto deve-se atentar ao que afirma Pinto (1998, p.16):

> Ao privilegiar a cultura do acerto, acentuada pelos livros didáticos, a escola acaba por não reconhecer o erro como elemento importante na construção do conhecimento pelo aluno. Nesta concepção, ele é tido como um "vírus a ser eliminado" e, portanto, sempre indesejável. O aluno é sempre punido ao errar. Nunca lhe é permitido refletir sobre ele sem sentir medo e culpa. Isso implica diálogos, cada vez mais precários, entre o professor e o aluno e, por extensão, entre a escola e a família. (PINTO, 1998, p. 16)

Assim surge a curiosidade pelo tema dos erros dos estudantes, pois é necessário que se questione todo e qualquer meio de exclusão, e para buscar estes questionamentos devemos verificar o que a literatura diz sobre o tema. Para tanto será necessário consultar os estudos que conversam sobre o tema, como de Helena Cury e Rafaela Borasi e Bobby Ojose.

3.2 **Por que analisar os erros dos estudantes?**

No processo de ensino de matemática temos a álgebra como um conjunto de conteúdos que amedronta os alunos, esta evidência se tornou cultural e o seu principal problema a ser estudado está no erro do aluno, pois caso o erro não seja trabalhado como ferramenta pedagógica pode acarretar em sentimento de fracasso por parte do aluno e recair sobre outras consequências como, por exemplo, o desgosto por estudar matemática. Nesse sentido, Vitti (1996) afirma que:

> [...] a Matemática tem sido considerada, em demasia, como uma matéria detestada pela maioria dos alunos, ou como uma área que só pode ser bem compreendida por uma minoria dos mesmos. Desde que um aluno passe a temer a Matemática, começa esse ciclo crescente e vicioso, de ansiedade Matemática e de deficiência no seu aprendizado. Não é mais compreensível presenciarmos professores que parecem sentir prazer em dar à Matemática uma impressão de algo difícil de ser entendido. (VITTI, 1996, p.26 *apud* FRAGOSO, 2001, p. 99)

Desse modo enuncia o que a maioria dos professores de matemática constata em suas classes e um dos motivos é pelo sentimento de fracasso que fica evidente, principalmente quando o aluno se esforça.

De acordo com Pinto (1998, p. 25),

> O erro, queiramos ou não, é o componente mais arraigado do processo educativo, mais do que qualquer outro elemento. Pais, professores e alunos aceitam uma qualificação negativa quando esta vem acompanhada pela correção dos erros, sem mesmo questionar a adequação dos conhecimentos exigidos aos sujeitos e, se apesar dos erros, há melhora significativa da aprendizagem.

Essa qualificação negativa do aluno por conta do seu erro poderia ser evitada com correções diferenciadas por parte do professor, tendo em vista que existem diferentes tipos de erros para uma mesma questão, e colocar todos na mesma categorização não auxilia no aprendizado dos estudantes, portanto é necessário procurar responder se o erro do estudante poderia contribuir com seu aprendizado.

Brousseau responde ao questionamento do seguinte modo:

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos. (BROUSSEAU, 1983, p. 171 *apud* CURY, 2007, p. 33).

Cury argumenta ainda que: “o que é registrado como “erro” do aluno na verdade poderia ser uma resposta para outro problema” (grifo do autor), ou seja, o problema foi resolvido nos moldes em que foi entendido pelo estudante, geralmente de forma lógica, porém incorreta.

Assim, por muitas vezes, o aluno esquece a forma que foi decorada e no momento de resolver o problema acaba por utilizar uma “sobregeneralização”, termo utilizado para designar uma “falsa generalização” ou como tradução de “*overgeneralization*” segundo Cury (2007).

A seguir temos alguns exemplos de “sobregeneralização” que serão discutidos em outro tópico:

i) $\frac{x+5}{5} = x$

ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}$

iii) $2x + 4 + 3x + 5 = 14x$

iv) $\pi y^2 + 4y^2 = 4\pi y^2$

v) $Y^4 + Y^4 = Y^8$

Para evitar estes tipos de erros durante o processo do ensino é necessário que o estudante compreenda o significado dos termos algébricos e que consiga interpreta-los de acordo com seus conhecimentos aritméticos prévios

Segundo (Carraher, 1995) quando o estudante se envolve diretamente na resolução do problema as chances do estudante cometer algum erro são baixas, por outro lado quando lhe é apresentado o mesmo problema de forma algébrica, sem envolvimento direto, o mesmo não consegue resolver. Segundo Piaget:

> A compreensão matemática não é questão de aptidão da criança. É um erro supor que um fracasso em matemática obedeça a uma falta de aptidão. A operação matemática deriva da ação: resulta que a apresentação intuitiva não basta, a criança deve realizar por si mesma a operação manual antes de preparar a operação mental. (...) Em todos os domínios da matemática, o qualitativo deve preceder ao numérico. (PIAGET, 1950, pp.79 e 80, *apud* MUNARI, 2010, p. 19).

Portanto é necessário que o estudante realize a experiência por ele mesmo com orientação do professor. Se o aluno não entende o motivo do seu fracasso não poderá pular esta etapa para fazer novas tentativas uma vez que o processo de aprendizagem deve ser natural ao tempo do estudante.

Figura 8 – Imposição do entulho do conhecimento matemático a um estudante

Fonte: Ceccon et al. - 1992. (*apud* BARALDI, 1999, p.72) (FRAGOSO, T. O Medo da Matemática. 2001, p. 98).

De acordo com José Maria Puig Rovira:

> Há fracasso na escola quando o rendimento é baixo, quando a adaptação social é deficiente e, também, quando se destrói a autoestima dos alunos. Deve-se aprender na escola conhecimentos e deve-se aprender a viver de acordo com um mínimo de normas compartilhadas, mas a escola também deve inculcar em seus alunos confiança neles mesmos, deve lhes dar um vivo sentimento de valor, de capacidade, de força, de certeza que podem conseguir muitas das coisas a que se propõem. A escola não deve criar indivíduos apáticos, desanimados ou desmoralizados [...] Não há pior fracasso escolar que produzir alunos com tão baixa autoestima. (ROVIRA, 2004, p.83, *apud* MEDALÓZ et al 2012, p. 7).

Assim, analisando a fala de Rovira podemos dar mais um sentido a pesquisa no fato de que o estudante pode ser ensinado a compreender o seu erro como estratégia de aprendizagem não permitindo que o estudante sinta-se fracassado.

Gaston Bachelard em seu livro, *A formação do espírito científico*, traz algumas perspectivas acerca do erro.

> Juntos, vamos acabar com o orgulho das certezas gerais e com a cupidez das certezas particulares. Preparemo-nos mutuamente a esse ascetismo intelectual que extingue todas as intuições, que torna mais lentos os prelúdios, que não sucumbe aos pressentimentos intelectuais. E murmuraremos, por nossa vez, dispostos para a vida intelectual: o erro, não és um mal.(...) Ao longo de uma linha de objetividade, é preciso pois dispor a série dos erros comuns e normais. Assim, seria possível sentir

> todo o alcance de uma psicanálise do conhecimento, se essa fosse um pouco mais extensa (BACHELARD, 1996, p.298).

Deste modo, a construção do conhecimento dá-se através do abandono das ideias sem reflexão. Os estudantes elaboram suas respostas a partir de conhecimentos prévios e intuitivos. Essas concepções espontâneas podem apresentar-se errôneas em alguns aspectos, no entanto, são essenciais para a racionalização do aluno (BORASI, 1996).

Sobre os educadores, Bachelard (1996) critica o despreparo em relação ao erro do estudante, por muitas vezes professores apenas repetem por mais de uma vez, explicando o conteúdo exatamente do mesmo modo já realizado.

> Não levam em conta que o adolescente entra na aula com conhecimentos empíricos já constituídos: não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana (BACHELARD, 1996, p. 23).

Portanto não é o suficiente que o professor mostre ao estudante a forma correta de resolução de um problema sem que os alunos compreendam o porquê de suas respostas estarem equivocadas.

3.3 **Método de análise de erros**

Para investigar os erros, precisaremos analisar os conteúdos produzidos pelos estudantes, e para isso utilizaremos os conceitos apresentados por Bardin (1979), que afirma que a análise deve ser dividida em três etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Inicialmente faremos uma separação entre as respostas certas e erradas e em seguida separaremos as totalmente erradas das parcialmente erradas seguindo um padrão semelhante ao apresentado por Helena Cury (2007).

Movshovitz-Hadar (1987) classifica o erro por código ou classe e baseado nesta classificação, as classes podem ser representadas como o modelo a seguir:

a) Classe A – Consideramos nesta categoria os alunos que acertam o problema das mais variadas formas distintas.
b) Classe B – Esta classificação inclui os erros que se relacionam às definições ou propriedades que não se aplicam no caso, como o uso da propriedade

distributiva para uma operação que não goza dessa propriedade. Ou seja, distorções na utilização de definições ou teoremas.

c) Classe C – Nesta classe, estão incluídos os erros computacionais, como os de manipulação algébrica e os que envolvem o uso de algoritmos. Erros técnicos, erros de procedimentos passo a passo, na retirada de informações de tabelas e até mesmo na manipulação de símbolos algébricos elementares.
d) Classe D – Consideramos nesta categoria os erros relacionados à discrepância entre os dados do problema e a forma como foram utilizados, ou seja, o aluno retira os dados do problema, mas os utiliza de forma incorreta.
e) Classe E – Neste caso, conforme os autores, “cada passo dado pelo aluno avaliado está correto em si, mas o resultado final, da forma como é apresentado, não é a solução para o problema proposto”. Em geral, isso acontece pelo fato de que o estudante não verifica a solução encontrada.
f) Classe F – Nesta categoria, são incluídos os erros que se relacionam com raciocínios falaciosos, como, por exemplo, tirar conclusões inválidas de um conjunto de dados do problema ou erros que se relacionam à tradução incorreta dos itens de uma para outra linguagem.

Incluímos ainda a classe G que corresponde aos erros não interpretados e a classe H para os alunos que optaram por não responder a questão.

Outro modelo também apresentado por Movshovitz-Hadar é exposto em seis categorias de erros na matemática para o ensino médio, conforme exemplo:

1. Dados mal utilizados
2. Idioma mal interpretado.
3. Inferência logicamente inválida.
4. Teorema ou definição distorcida.
5. Solução não verificada.
6. Erro técnico. (MOVSHOVITZ-HADAR, 1987, p. 8,9, tradução nossa)

A seguir apresentamos um exemplo de análise de erros em uma questão apresentada por Cury (2007).

Figura 9 – Equação

O conjunto-solução, em $\Re$, da equação

$$\frac{1}{x+5}+\frac{1}{2x+9}=\frac{2}{2x^2+19x+45} \text{ é:}$$

a) {-4, -5 } b) { -5 } c) { -4 } d) { 4 } e) { 5 }

Fonte: Cury, 2007.

Segundo Cury (2007, p. 55), nessa questão, apenas 63 alunos assinalaram a alternativa correta, sendo que 134 do total de 368 não assinalaram qualquer alternativa. Ao ler os testes do total da amostra, notou-se que apenas 78 alunos desenvolveram cálculos no espaço correspondente, e destes, apenas 13 acertaram. Assim, os 50 restantes, que assinalaram a alternativa correta ou fizeram apenas cálculos mentais (o que é difícil, em face do enunciado da questão) ou "chutaram" a resposta.

A questão analisada apontou grande variedade de respostas, e foi possível refinar a classificação, obtendo-se, ao final, sete categorias, a seguir descritas e exemplificadas:

a) Classe A: corresponde às 13 soluções corretas. De uma maneira geral, os estudantes encontraram o denominador comum do lado esquerdo da igualdade e empregaram um procedimento padrão, somando as frações algébricas e, depois, ao identificar a igualdade de denominadores dos dois lados da igualdade, trabalharam somente com os numeradores e obtiveram facilmente a solução da equação.
b) Classe B: corresponde às 31 respostas en1 que os alunos tentaram encontrar as raízes de um polinômio de segundo grau usando a fórmula de Bhaskara. Alguns deles multiplicaram os denominadores das frações do lado esquerdo e logo em seguida tentaram resolver a equação $2x^2 + 19x + 45 = O$, inserindo o "igual a zero" que não aparece no contexto. Outros, apenas reconheceram a expressão polinomial de segundo grau no denominador do lado direito e usaram o mesmo artifício. Outro, ainda, calculou corretamente as duas raízes, mas, ao encontrar, $x = \frac{-18}{4}$ escreveu "não existe”, evidenciando a dificuldade em reconhecer os elementos dos conjuntos numéricos.
c) Classe C: corresponde às 16 respostas em que os alunos tentaram resolver a questão por tentativa, substituindo os valores dados como elementos dos conjuntos-soluções, mas erraram os cálculos com racionais.

d) Classe D: corresponde às 14 soluções em que os alunos mostraram não saber adicionar frações algébricas. Neste caso, do lado esquerdo da igualdade, surgiram frações obtidas por: adição de numeradores e denominadores; adição de numeradores e multiplicação de denominadores; multiplicação de numeradores e de denominadores e adição de numeradores, simplesmente igualando a resposta ao numerador do lado direito.
e) Classe E: corresponde às seis respostas em que os estudantes tentaram multiplicar extremos e meios da "proporção". Evidentemente, se tivessem efetuado corretamente a adição das frações do lado esquerdo, poderiam ter usado esse artifício, ainda que demorado. No entanto, os alunos "criaram" regras para essa operação, tendo um deles, por exemplo, escrito: $2x + 10 + 4x + 18 - 4x^2 - 19x - 45 = 0$. Ou seja, multiplicou o número 2, numerador do segundo membro, por cada denominador do primeiro membro e, em seguida, somou os numeradores do lado esquerdo e multiplicou pelo denominador do direito, ainda "passando para o primeiro membro" e igualando a zero.
f) Classe F: corresponde às quatro soluções em que os alunos não souberam multiplicar polinômios, especialmente porque pareciam desconhecer a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. É o que se pode ver no exemplo em que o estudante multiplicou todos os denominadores (tendo, ainda, se enganado ao copiar o número 19), obtendo: $(x + 5)(2x + 9)(2x^2 + 9x + 45) = 2x^2 + 2x^3 + 10x^2 + 45$
g) Classe G: corresponde às 10 soluções para as quais não foi identificado um padrão; cada exemplo representa um caso a parte. Um dos alunos parece ter, também, pensado em multiplicar extremos e meios, porque começou escrevendo $2(-2x^2 + 19x + 45)$, talvez somando os numeradores das frações do lado esquerdo da igualdade e multiplicando pelo denominador do segundo membro, mas em seguida igualou essa expressão a zero e tentou usar a fórmula de Bhaskara. Quando não conseguiu uma resposta - porque não soube utilizar a referida fórmula - desenhou um boneco enforcado na ponta do símbolo da raiz quadrada.

Entre os principais trabalhos de Educação Matemática relacionados à Análise de erros estão as pesquisa realizadas por Raffaella Borasi (1996). Borasi questiona se as respostas dos estudantes estariam de fato incorretas, e estimula os professores a questionar as suas abordagens em sala de aula. A autora se questiona: “o que aconteceria se aceitássemos esse resultado? [ou] em que circunstancias esse resultado pode ser considerado correto?”. (CURY,2007)

Essas perguntas podem mudar a percepção do professor a respeito do conhecimento apresentado pelo aluno e assim o faz refletir sobre a sua pratica docente. Nesse sentido Borasi sugere que os professores abandonem a simples transmissão de conhecimento e tentem, através de experiências em sala de aula, encorajar os alunos a explorar e verbalizar suas ideias, raciocinar e argumentar seus resultados obtidos.

Borasi fundamenta um modelo de investigação baseado nas seguintes suposições sobre matemática, conhecimento, aprendizado e ensino:

> 1) Uma visão da matemática como disciplina humanística; isto é, a crença de que o conhecimento matemático é socialmente construído e falível, além de ser moldado por valores culturais e pessoais.
> 2) Uma visão do conhecimento mais geralmente construída através de um processo de investigação em que incerteza, conflito e dúvida fornecem a motivação para a busca contínua de uma compreensão cada vez mais refinada do mundo.
> 3) Uma visão da aprendizagem como um processo gerador de criação de significado, exigindo interação social e construção pessoal, e informado pelo contexto e propósitos.
> 4) Uma visão do ensino como estimulo e suporte à própria investigação dos alunos e estabelecendo um ambiente de aprendizagem propício a essa investigação. (BORASI, 1996, p. 23, 24, tradução nossa)

Uma sala de aula pautada por essas suposições apresentadas seria bastante diferente dos modelos tradicionais existentes.

Segundo Cury (2007, p. 37) uma das contribuições mais interessantes da autora é o que ela chama de "taxionomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa", que apresenta em um quadro sucessivamente reformulado (BORASI, 1996), reproduzido aqui com adaptações e última versão simplificada (Quadro 1).

Quadro 1 - Taxinomia de Borasi para os usos dos erros

	Nível de discurso matemático		
Objetivo da aprendizagem	**Realização de uma tarefa matemática específica**	**Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático**	**Compreensão sobre a natureza da Matemática**
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de conteúdos específicos.
Descoberta	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar potenciais enganos.	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a *insights* e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.

Fonte: (Borasi, 1996, *apud* Cury, 2007, p. 37).

Essas maneiras de utilizar os erros conforme (Quadro 1), se adaptam a situações diversas podendo ser utilizados de maneira individual ou combinada, dependendo das situações que possam surgir.

3.4 **Alguns erros comuns em álgebra do ensino fundamental**

Neste tópico serão discutidos alguns dos principais erros dos estudantes de nível fundamental e médio. Erros que costumam ocorrer devido a compreensões equivocadas das propriedades algébricas.

1 - Erro de simplificação comum entre os estudantes:

Exemplo:

$$\frac{x+\cancel{5}}{\cancel{5}} = x$$

Segundo Ojose (2015) para que essa simplificação ocorra são necessários fatores comuns no numerador e denominador da fração. Um dos motivos que pode levar o aluno a este erro é ideia de que toda fração é passível de simplificação e assim ter a necessidade de determinar uma resposta simplificada. Uma das formas de ajudar o aluno a compreender que a igualdade não se verifica é construindo uma tabela de valores para x e realizando algumas substituições para constatar que a simplificação não determina os mesmos valores atribuídos a x.

Tabela 1 – Tabela de valores para x

Valores para substituir	$\frac{X+5}{5}$	X
3	(3+5)/5 = 1,6	3
5	(5+5)/5 = 2	5
10	(10+5)/5 = 3	10
15	(15+5)/5 = 4	15

Fonte: Ojose (2015, p 66) – adaptada

Segundo o autor, pesquisadores identificaram a dependência excessiva de pistas visuais por parte dos alunos que pode ser um motivo para os erros comuns. Mas o uso de pistas visuais não é indesejável uma vez que os alunos podem utilizar pistas visuais de modo bem sucedido. Porém pistas visuais podem levar a diversos equívocos, como por exemplo, cancelar 3 e -3 aparecendo na expressão 2x - 3 + 3x porque eles são visualmente atraentes.

2 – Erro de soma ou subtração de frações algébricas.

Exemplo:

$$\frac{3x}{2} + \frac{4x}{3} = \frac{7x}{5}$$

Esse é um erro estrutural de generalização, pois falta entendimento de conceito do número racional. Este erro pode ser resolvido mostrando aos estudantes uma fração como parte de um todo, como por exemplo, 1/5 representando uma parte dentre cinco partes de um todo e pode ser pedido que o aluno resolva um problema aritmético como 1/5 + 1/6 e observar se este ainda cometerá o mesmo equivoco em responder 2/11. Uma vez que o aluno entenda o processo deve-se mostrar a ele que o mesmo processo é válido para frações algébricas.

Segundo Ojose (2015) este erro está associado as dificuldades na transição do aprendizado da aritmética para a álgebra. De acordo com Demby (1997, *apud* Ojose, 2015) em seus estudos sobre a transição da aritmética para a álgebra observou que as habilidades e o significado devem, de alguma forma, se desenvolver juntos e devem reforçar um ao outro. Cada aluno deve construir seu próprio significado de transformações algébricas, ainda que diferentes das dos matemáticos. Demby reforça que o conhecimento da criança não decorre de raciocínio dedutivo, mas ao reunir experiência, comparar resultados, generalizando e revisando regras anteriores uma vez que em geral os estudantes não conseguem lembrar tarefas especificas, mas conseguem se lembrar de algumas conclusões, principalmente aquelas que surpreendem suas ideias iniciais.

3 – Adição de termos distintos

Exemplo:

$2x + 4 + 3x + 7 = 16x$

Este é um erro de notação em operar termos distintos por não reconhecer uma resposta com símbolo de operação, no caso $(5x + 11)$ que é a resposta correta.

Para resolver este erro podem ser usados problemas da realidade do aluno, como por exemplo, somar 3 bananas com 2 laranjas dificilmente o aluno responderá 5 laranjas ou 5 bananas, assim pode-se associar as bananas aos termos que contém x e as laranjas aos termos que não contém e dar como resposta $(3x + 2)$. Caso necessário pode-se ainda desenhar a situação, isso facilita a visualização dos alunos.

Figura 10 – Soma de 3 bananas e 2 laranjas é igual a?

Fonte: (adaptado, acesso http://www.riaeduca.org/matematica-aula-02)

Para a tradução correta do problema é necessário que o aluno exponha suas experiências anteriores e assim desenvolver seu pensamento abstrato na resolução de problemas algébricos, para este desenvolvimento é necessário um professor mediador para que os alunos não criem falsas generalizações.

4 – Erro na propriedade distributiva
Exemplo:
$4(x + y) = 4xy$

Esse erro ocorre por uma generalização equivocada, o aluno sabe que o termo externo deve multiplicar os termos internos aos parênteses, porém acaba por ignorar a soma.

Segundo Ojose (2015), os trabalhos de Keiran(1989) e Booth(1989) concordam que grande parte das dificuldades dos alunos em álgebra decorre precisamente da falta de compreensão das relações aritméticas.

Para entender o conceito da propriedade distributiva, o professor pode aplica-la a um problema de aritmética e posteriormente avançar para problemas algébricos. O professor pode ainda estimular o aluno a atribuir valores as letras e verificar a validade da resposta, dessa forma o aluno constrói o conceito sobre a propriedade.

5 – Equações (erro de adição ou subtração)
Exemplo:
$X – 5 = - 5$
$X = 10$

Supondo que o aluno some 5 nos dois membros da equação, ele chegaria a x=0, e portanto há um erro conceitual na resolução da equação. O seguinte procedimento pode ser tomado pelo professor:

> Pergunte aos alunos como eles sabem que 12 + 27 = 27 + 12 sem fazer o cálculo. A explicação dos alunos deve mostrar algo relacionado à propriedade comutativa da adição. Como pode podemos mostrar que é verdade para todos os números, incluindo negativos, frações e decimais? Se os alunos não sugerirem, ofereça a ideia de que letras ou formas podem ser usadas assim: ◊ + Δ = Δ + ◊ ou x + y = y + x. (OJOSE, 2015, p. 97, tradução nossa).

Em muitos casos professores ensinam uma forma mecânica fazendo com que o aluno isole os termos com incógnitas em um membro e os termos independentes no outro membro, modificando o seu sinal após a transferência de membro, neste processo mecânico o aluno não consegue interpretar o que uma equação de fato representa e comete erros que fazem parte do processo de resolução mecânica.

É possível ainda explicar a resolução de equações do 1º grau através de jogos, pois segundo OJOSE (2015), estudos mais recentes em educação matemática como o de DUNCAN (1996) apontam que o uso de representações visuais concretas melhoram o desempenho dos estudantes.

6 – Erro nas propriedades das potências
Exemplo:
$x^2 + x^2 = x^4$

Essa é uma falsa generalização da propriedade da potência. O aluno conhece a propriedade da potência onde um produto de potencias de mesma base, basta repetir a base e somar os expoentes, porém comete o erro em perceber que esta propriedade só existe no produto de potências. Na realidade o aluno deveria somar os coeficientes dos dois termos e representar o resultado como $2x^2$.

Para que esse erro seja corrigido pode-se mostrar ao aluno uma decomposição dos termos, como $x.x + x.x = x^2 + x^2 = 2x^2$ e também o caso $(x.x).(x.x) = x^2.\ x^2 = x^4$. Desta forma o aluno compreenderá os casos em que pode ser aplicada a propriedade.

4 **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DE DADOS**

4.1 **Metodologia da pesquisa**

Para elaborar este trabalho foi utilizado como principal referência o livro *Investigação em educação matemática* de (Fiorentini & Lorenzato, 2006), onde foi possível verificar os muitos detalhes da realização de uma pesquisa.

Os passos da pesquisa devem ser expostos para que qualquer leitor possa analisar os casos observados, assim como as possíveis falhas ao longo do processo de análise das respostas dos alunos, portanto será descrito neste capítulo o processo da pesquisa que se realizou de acordo com as revisões de literatura apresentadas no capítulo anterior.

A pesquisa é de caráter qualitativo, foi realizada em 2019, durante duas semanas, que teve como objetivo analisar os principais erros dos estudantes ao responder questões de matemática ligadas à álgebra, para que com isso possa-se elaborar medidas na tentativa de sanar as principais deficiências dos estudantes. A análise pode ser realizada a partir da aplicação de uma atividade com questões discursivas, em que foi pedido aos alunos que justificassem suas respostas, ou seja, descrevesse o raciocínio que os fizeram chegar a tal resposta.

4.2 **Os participantes e o local da pesquisa**

A atividade foi aplicada em duas turmas de nono (9º) ano do ensino fundamental do Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho (IEPIC), escola da rede estadual do Rio de Janeiro, localizada na cidade de Niterói (Região metropolitana do Rio de Janeiro). A pesquisa contou com a participação de um total de 39 estudantes, sendo 14 do sexo masculino e 25 do sexo feminino.

O IEPIC foi fundado em 1835, sendo a primeira escola de curso normal do país, atualmente a escola oferece o Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) e Ensino Médio Normal e conta com cerca de 30 turmas nos turnos diurnos e vespertino. A escola possui ainda uma sala de atividades matemáticas, sala de jogos, além de laboratório de ciências e salas temáticas voltadas para o ensino de linguagens e ciências humanas, conta com refeitório, biblioteca, auditório, sala multimídia, duas quadras e um ginásio poliesportivo.

4.3 **A atividade**

O tema escolhido para análise se deu por conta das muitas dificuldades apresentadas pelos alunos nos conteúdos relacionados à álgebra, em que por muitas vezes os conceitos não são apresentados de forma que o aluno consiga interpretá-lo corretamente, ou seja, não consegue relacionar o conteúdo com a realidade de seu cotidiano gerando a desistência do aprendizado ou até a evasão escolar (Carraher, 1982). Os estudantes da rede pública de ensino são, em sua maioria, oriundos das classes menos favorecidas e contam com diversos empecilhos cotidianos que refletem claramente no seu desempenho escolar, dentre os quais podemos citar a residência fora do município, o que faz com que enfrentem desafios como a rotina no transporte coletivo, levando às vezes duas horas ou mais para chegar à escola, além do convívio com a violência observada por todos os veículos de comunicação nos últimos anos.

No livro “Na vida dez, na escola zero” Carraher et al (1982, p. 85) afirma que “existem múltiplas lógicas corretas na resolução de cálculos. A escola nos ensina como deveríamos multiplicar, subtrair, somar e dividir; esses procedimentos formais, quando seguidos corretamente, funcionam. Entretanto, as crianças e adolescentes [...] demonstraram utilizar métodos de resolução de problemas que, embora totalmente corretos, não são aproveitados pela escola”.

Seguindo essa lógica surge a necessidade de uma pesquisa investigativa que analise onde está a problemática para que assim a escola possa entender os processos que levam o indivíduo a cometer equívocos de todos os tipos.

Além das discussões anteriores se faz necessário, também, ressaltar a importância da análise de erros pelo educador matemático.

> a importância da pesquisa por ser uma opção como fonte de reflexão para educadores matemáticos e pelo fato de abordar uma questão universalmente aceita e que está posta no contexto da avaliação da disciplina de matemática que é a prova escrita. Sendo um instrumento de avaliação predominante, repleto de mitos e fator de tensão para os estudantes, essa proposta contribui para desmistificá-la

> convertendo-a em instrumento de aprendizado no qual o erro pode ser retomado, rediscutido, revisado e gerar novas aprendizagens. (SILVA, 2013, p. 16)

A escolha das turmas de 9º ano para a pesquisa foi feita com o objetivo de verificar o aprendizado dos estudantes relacionados à álgebra, uma vez que todo o conteúdo da atividade realizada, teoricamente, já tenha sido trabalhado.

A pesquisa foi planejada com os seguintes objetivos:

a) analisar e classificar os erros cometidos pelos estudantes em matemática;

b) mostrar aos estudantes os seus erros, assim como os dos colegas;

c) desenvolver atividades em sala de aula com o objetivo de explorar as dificuldades verificadas;

d) analisar os resultados da experiência e a possibilidade de aplicação em outras instituições de ensino.

A atividade abordou conteúdos de 5 temas da álgebra conforme descrito na tabela abaixo:

Tabela 2 – Questões e seus temas

Temas	**Número de questões**
Equação do 1º grau	3
Equação do 2º grau	1
Operações com frações algébricas	1
Produtos notáveis	1
Sistemas de equações do 1º grau	2

Fonte: O autor, 2019.

Foi solicitado que os alunos justificassem todas as questões para que posteriormente pudesse ser feita uma análise qualitativa das questões realizadas.

4.4 **A análise das questões**

Questão 1

Na primeira questão foi pedido que os estudantes resolvessem a seguinte equação:

$2x - 10 = 17 - x$

A partir dessas resoluções foram constatados 18 acertos e 21 erros, os quais foram analisados e separados de acordo com a seguinte classificação:

Classe A - corresponde às resoluções corretas. Neste caso, foram encontradas duas maneiras de se chegar ao resultado certo. A maior parte dos 18 estudantes que acertaram o desenvolvimento apresentou a seguinte correspondência:

$2x - 10 = 17 - x$

$2x + x = 17 + 10$

$3x = 27$

$x = \frac{27}{3}$

$x = 9$.

Apenas um aluno realizou pelo princípio aditivo, adicionando ou subtraindo valores em ambos os membros da equação.

$2x - 10 = 17 - x$

$2x - 10 + 10 + x = 17 - x + 10 + x$

$3x = 27$

$x = 9$

Desse modo, foi possível constatar que esses alunos de fato aprenderam a resolver uma equação de primeiro grau.

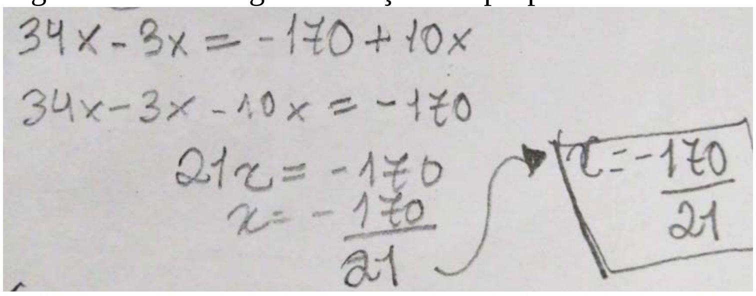
Classe B – corresponde às resoluções em que houve erro de sinal na mudança de posição do termo algébrico. Dentre os 21 que cometeram erro, 9 foram por causa do sinal.

Os estudantes estão acostumados aos métodos de resolução de equações transferindo os termos algébricos que têm letra para o primeiro membro e os termos numéricos para o segundo membro, desse modo “decorado” acabam esquecendo-se de alterar o sinal do termo.

Classe C – corresponde às resoluções com erro de “sobregeneralização”, ou seja, tirar conclusões de propriedades inexistentes. Nesse erro se encaixam 6 alunos.

Em destaque é possível citar os erros do aluno E1 que generaliza a propriedade distributiva:

Figura 11 – “Sobregeneralização" na propriedade distributiva

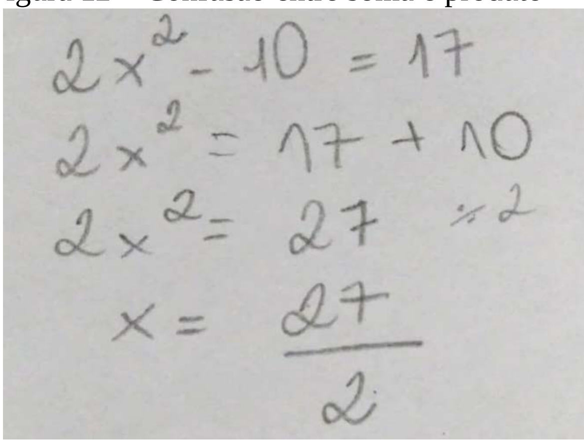


Fonte: O autor, 2019.

O estudante aplicou a propriedade distributiva onde não havia tal propriedade.

O aluno N ao resolver a questão deveria ter realizado a soma, entretanto não compreende que o x equivale a 1x e confunde a soma com produto ao realizar a operação 2x + x = 2x² ao invés de 3x.

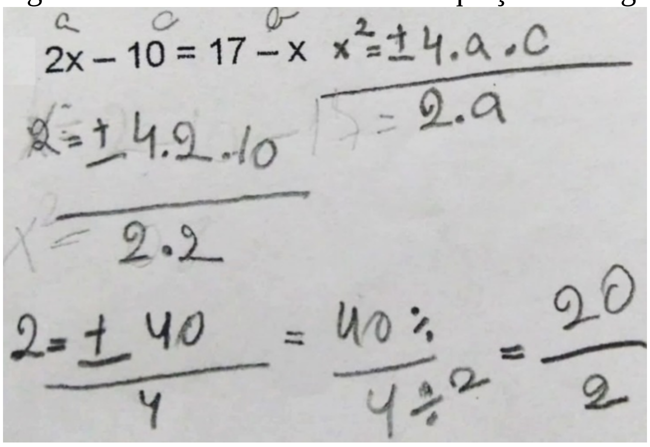
Figura 12 – Confusão entre soma e produto



Fonte: O autor, 2019.

O estudante F tentou resolver a equação de 1º grau como uma de 2º grau.

Figura 13 – Tentativa de resolver equação do 2º grau como do 1º grau



Fonte: O autor, 2019.

Verificou-se neste caso que o estudante decorou de forma mecânica o processo de resolução de uma equação do 2º grau e desse modo o erro não se restringiu ao tipo de equação, mas também no esquecimento da fórmula de Bhaskara.

Classe D – nesta classe estão 4 alunos que cometeram erros de interpretação do significado da equação, como o aluno E4 que resolve as operações entre os termos que têm x e os que não têm, como:

$2x – 10 = 17 – x$
$8x = 16x$

Classe E – corresponde às duas soluções sem um padrão de erro identificado. Pode-se citar, por exemplo, a solução do aluno V:

$2x – 10 = 17 – x$
$2x + 1x – 1x = 17 + 3$
$1x = 20$
$x = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{1}}$
$x = 5$

Questão 2

Nesta questão foi solicitado que os alunos resolvessem a equação:

$4(x + 3) – x = 24 + x$

A partir da análise das resoluções dessa questão foram constatados 12 acertos e 27 erros, a partir dos quais foi elaborada a seguinte classificação:

Classe A - corresponde às 12 resoluções corretas. Neste caso, foi encontrada somente uma forma de resolver o problema, segundo o modelo a seguir:

$4 . (x + 3) – x = 24 + x$
$4x + 12 – x = 24 + x$
$4x – x – x = 24 - 12$

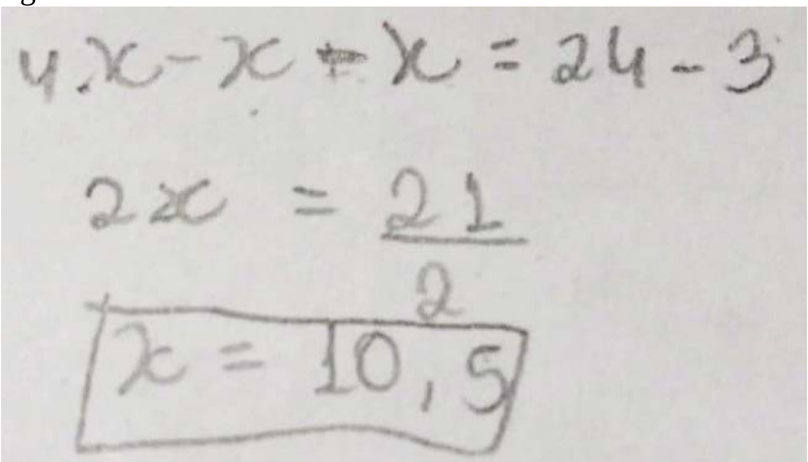
$2x = 12$
$x = \frac{12}{2}$
$x = 6.$

Classe B – corresponde às resoluções em que houve erro na resolução da propriedade distributiva. Dentre os 27 que cometeram erro, 11 foi por causa da propriedade.

Três dos estudantes durante a resolução colocaram como se 4(x + 3) fosse igual a 4x + 3. Erro frequente.

Houve, ainda, neste caso uma situação em que o estudante A trocou o termo (+3), que estava dentro dos parênteses em 4(x + 3), para o outro membro, conforme a figura.

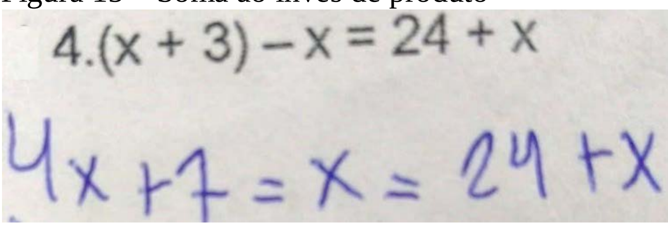
Figura 14 – Estudante A troca de membro o termo + 3 da distributiva



Fonte: O autor, 2019.

Desse modo, foi possível observar que o aluno A ao fazer a troca do membro (+3) que se encontrava dentro do parêntese para o outro membro demonstra falta de conhecimento da aplicação da propriedade distributiva.

Figura 15 – Soma ao invés de produto

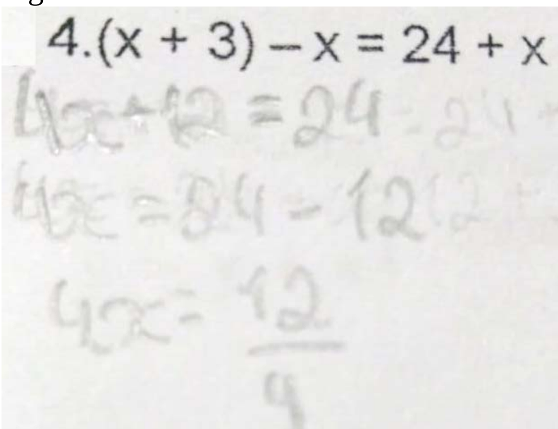


Fonte: O autor, 2019.

Já a aluna M ao resolver a propriedade distributiva soma o termo externo com o termo interno (4 + 3 = 7), enquanto o que deveria realizar seria o produto entre os termos, além de duplicar o sinal de igualdade.

Classe C – corresponde às resoluções com erro de sinal no processo de resolução da equação. Nesta classe aparecem 9 estudantes, que entendem o processo de resolução da propriedade distributiva, porém cometeram algum erro de sinal, conforme o exemplo abaixo.

Figura 16 – Aluno A2 falha no cancelamento de x

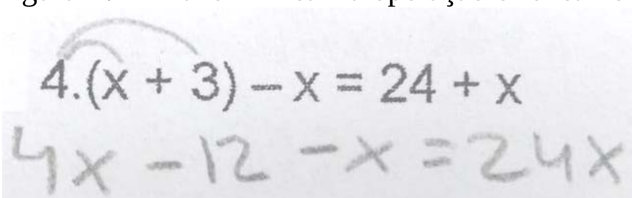


Fonte: O autor, 2019.

Os termos iguais só podem ser cancelados (subtraídos) quando aparecem com mesmo sinal em membros distintos ou com sinais opostos no mesmo membro.

Classe D – nesta classe estão 3 alunos que cometeram erros de interpretação dos termos da equação, como o aluno K1 que resolve a soma entre os termos que 24 e x, obtendo 24x.

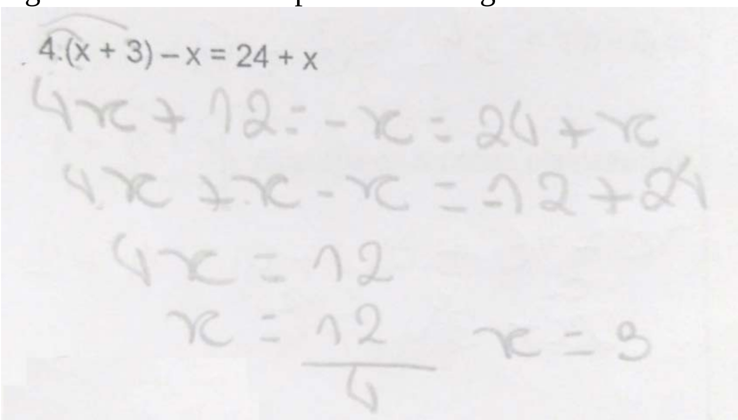
Figura 17 – Aluno K1 realiza operação erroneamente



Fonte: O autor, 2019.

Classe E – corresponde às duas soluções com erros relacionados à falta de atenção durante o processo de resolução, como é o caso do aluno J.

Figura 18 – Aluno J duplica sinal de igualdade



Fonte: O autor, 2019.

Observa-se que o aluno J entende o processo de resolução da propriedade distributiva, porém duplicou o sinal de igualdade o que o levou ao erro de sinais posteriormente.

Classe F – corresponde às duas soluções, as quais não apresentam um padrão de erro identificado, como no caso do aluno K2.

4(x+3) –x = 24 + x

16 + 24 = 40

Apesar de tentar compreender os erros dos alunos da classe F, não houve sucesso nessa busca, tendo em vista a falta de padrão.

Questão 3

Nessa questão foi pedido que os alunos resolvessem a seguinte equação:

$$\frac{9x + 75}{x} = 34$$

Nas resoluções dessa questão houve 2 acertos, 27 erros e 10 estudantes que optaram por não respondê-la.

Classe A - corresponde aos dois alunos que acertaram a questão. Ambos resolveram do seguinte modo:

$\frac{9x + 75}{x} = 34$
9x + 75 = 34x (passou o x multiplicando)
9x – 34x = -75
- 25x = -75
$x = \frac{-75}{-25}$
x = 3.

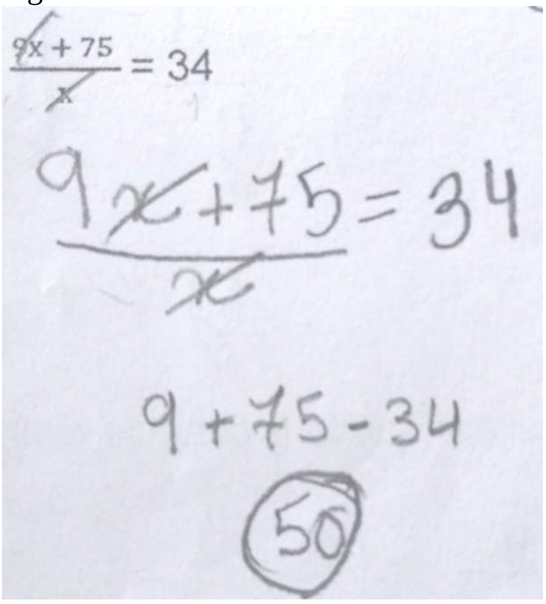
Classe B – corresponde aos 4 alunos que utilizaram a “lei do corte” indevidamente.

Para retirar o denominador da questão os alunos erroneamente imaginaram que sempre que aparecer outro valor idêntico no numerador fica autorizado a cancelar os termos como no exemplo a seguir:

$$\frac{9\cancel{x} + 75}{\cancel{x}} = 9 + 75 = 84$$

Na figura temos o exemplo do aluno W que cancela os termos do numerador e denominador como se pudesse fazer uma simplificação.

Figura 19 – "Lei do corte" usada indevidamente



Fonte: O autor, 2019.

Classe C – Corresponde aos 12 alunos que ignoraram o x do denominador.

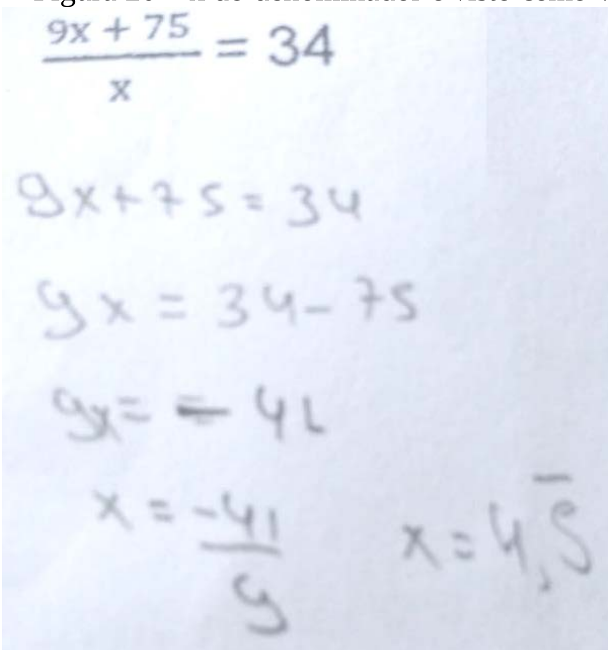
Como ocorreu um número bastante expressivo de alunos que cometeram este erro imagina-se que a maioria dos estudantes tenha entendido que o x do denominador vale 1, sem atentar que o x do numerador obrigatoriamente teria que apresentar o mesmo valor.

$$\frac{\mathbf{9x + 75}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{1}}$$

Já que o primeiro membro deve ter o mesmo valor que o segundo, então numerador e denominador teriam o mesmo valor, ou seja:

$9x + 75 = 34$ e $x = 1$ fossem problemas independentes.

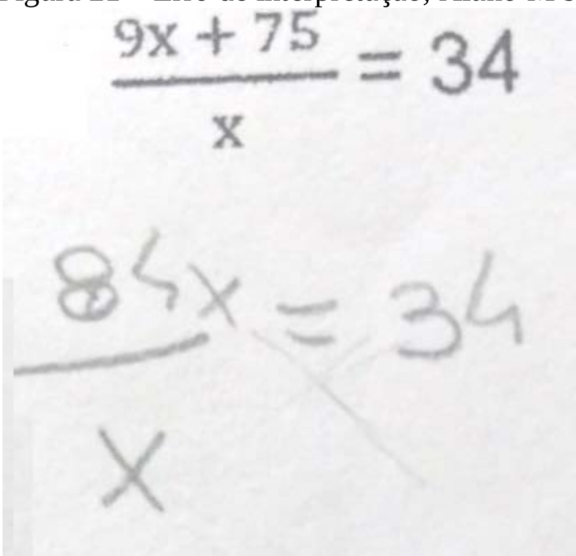
Figura 20 – x do denominador é visto como valor



Fonte: O autor, 2019.

Classe D – nesta classe estão 8 alunos que cometeram erros de interpretação dos termos da equação, resolvendo a soma entre os termos 9x e 75, obtendo 84x.

Figura 21 – Erro de interpretação, Aluno M soma 9x com 75



Fonte: O autor, 2019.

Classe E – corresponde a apenas um aluno, que cometeu erro de sinal na mudança dos termos de um membro para o outro.

Classe F – corresponde aos dois alunos cujas respostas não puderam ser classificadas em um padrão.

Questão 4

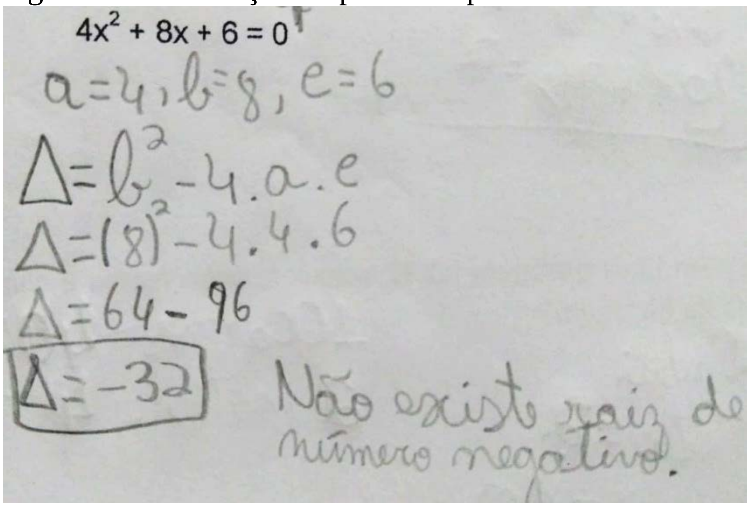
A questão 4 é referente ao tema: Equação do 2º grau. Na ocasião da aplicação não foi informado ao aluno que se tratava de uma equação desse tipo, foi pedido apenas a resolução da equação abaixo.

$$4x^2 + 8x + 6 = 0$$

Como resultado dessa aplicação observou-se que 13 alunos acertaram, 24 erraram e 2 não responderam.

Classe A - corresponde aos 13 alunos que acertaram a questão. Todos os alunos desta classe resolveram pelo mesmo método, como podemos citar o aluno I.

Figura 22 – Resolução do problema pela fórmula do discriminante



Fonte: O autor (2019).

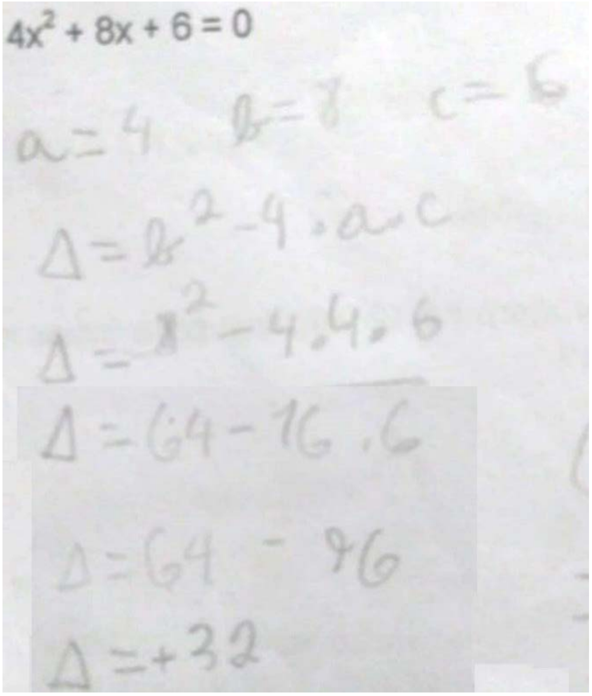
Há a possibilidade de resolução da questão pelo método de completar quadrados. O qual pode ser realizado da seguinte forma:

$$4x^2 + 8x + 6 = 0$$
$$(2x + 2)^2 - 4 + 6 = 0$$
$$(2x + 2)^2 + 2 = 0$$
$$(2x + 2)^2 = - 2$$
$$(2x + 2)^2 = \pm\sqrt{-2}$$

Como não existe uma solução real para $\sqrt{-2}$ conclui-se que não existe solução real.

Classe B – corresponde a três alunos que cometeram erro de sinal durante os cálculos. Dentre estes podemos citar a aluna M.

Figura 23 – A aluna M comete erro de sinal no cálculo do discriminante



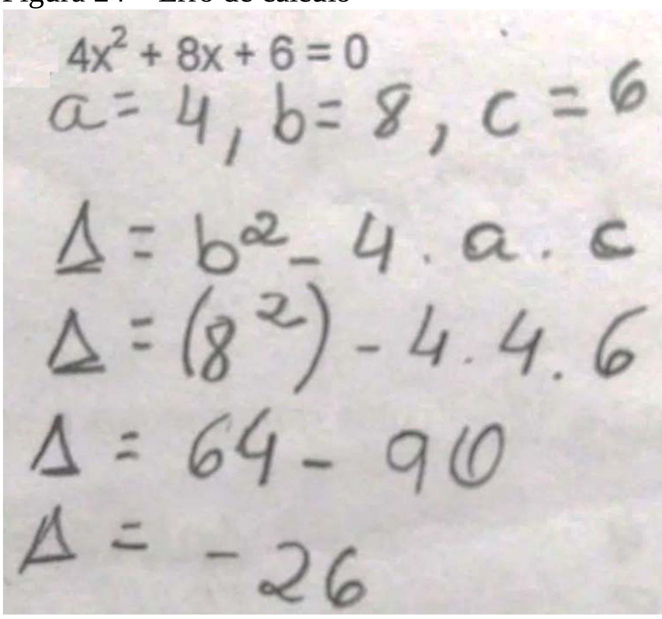
Fonte: O autor (2019).

Classe C – Corresponde aos 4 alunos que cometeram erro de cálculo em geral.

Um caso curioso ocorre com a aluna L durante a resolução do discriminante.

A aluna confunde a própria escrita ao escrever o número 96, este fica parecido com 90

Figura 24 – Erro de cálculo



Fonte: O autor (2019).

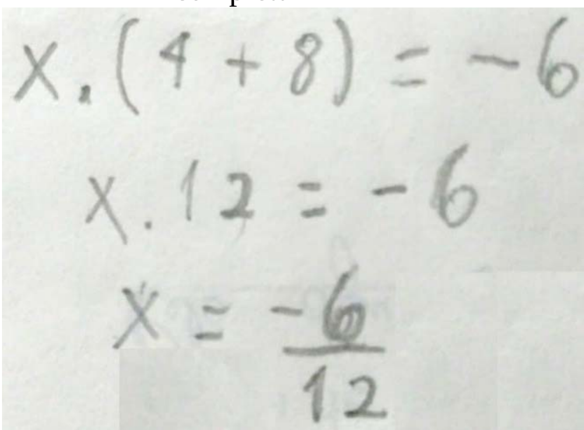
e com isso o erro é cometido no cálculo seguinte.

Classe D – nesta classe estão 5 alunos que entenderam que se tratava de uma equação do 2º grau, porém não lembravam uma forma de resolver e nem mesmo as fórmulas.

Classe E – corresponde a dois alunos que, apesar de entenderem que se tratava de uma equação do 2º grau, tentaram resolver deixando o x em evidência como no método de resolução de equações incompletas do 2º grau com coeficiente c = 0.

Classe F – este grupo corresponde aos 10 alunos que resolveram operações entre termos algébricos não semelhantes, ou seja, que possui a parte literal distinta.

Figura 25 – Aluno W resolve equação do 2º grau completa como incompleta

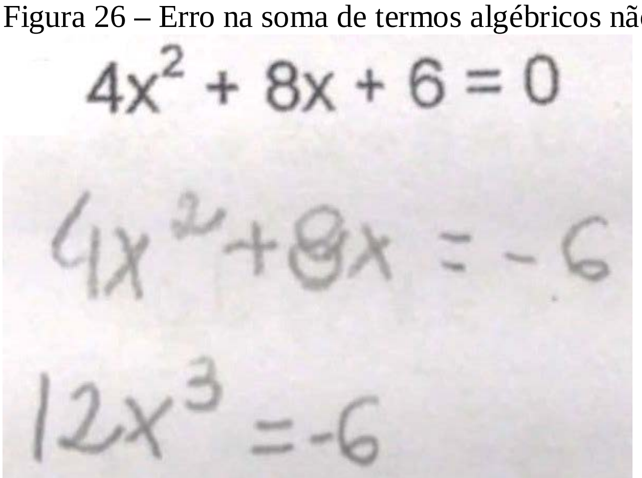


Fonte: O autor, 2019.

Questão 5

A questão 5 se refere ao tema operações com frações algébricas. Nesse caso foi pedido

Figura 26 – Erro na soma de termos algébricos não semelhantes



Fonte: O autor (2019).

que os alunos resolvessem a soma de frações a seguir.

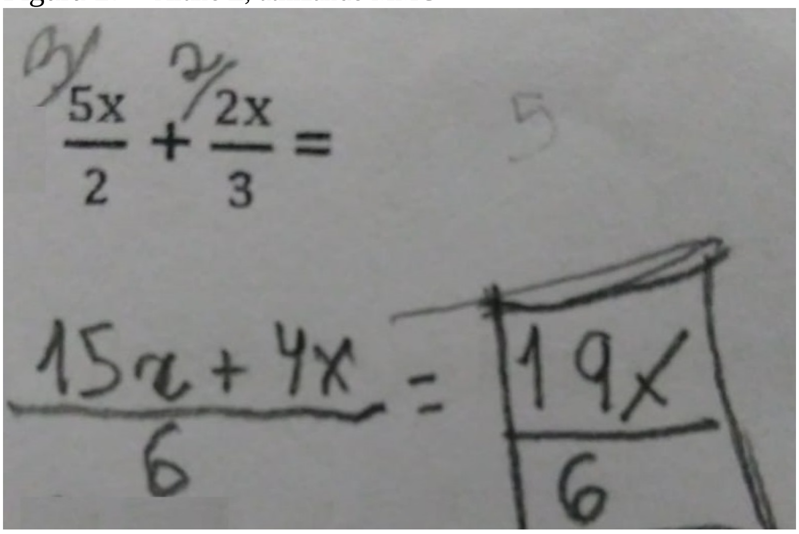
$$\frac{5x}{2} + \frac{2x}{3}$$

Nesta questão apenas 5 alunos acertaram, 30 alunos erraram e 4 preferiram não responder.

Classe A – corresponde aos 5 alunos que acertaram a questão. Para este caso houve dois tipos de resoluções, uma pelo calculo do MMC(mínimo múltiplo comum) e outro pelo método de frações equivalentes.

Na figura a seguir o aluno E resolve a soma de frações algébricas utilizando o Mínimo múltiplo comum entre 3 e 2 para encontrar um denominador comum. Esse método é mais comum de se encontrar nos livros didáticos propostos pelo PNLD.

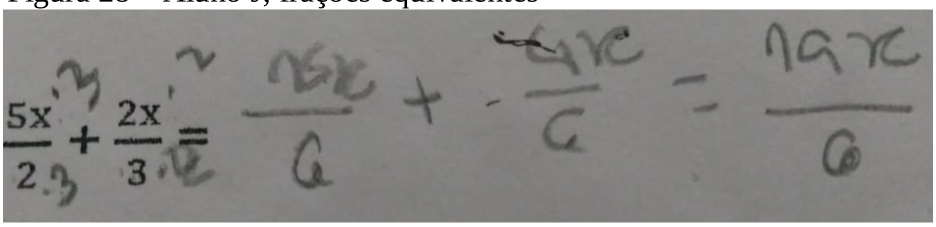
Figura 27 – Aluno E, utilizando MMC



Fonte: O autor, 2019.

O aluno J resolve a soma de frações algébricas pelo método de frações equivalentes igualando os denominadores e efetuando a soma.

Figura 28 – Aluno J, frações equivalentes

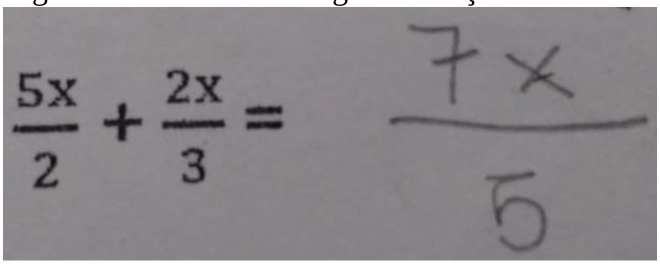


Fonte: O autor, 2019

Classe B – corresponde aos 22 alunos que cometeram erro de generalização.

Na figura vemos que o aluno N não recordava os procedimentos de adição e subtração de frações algébricas e resolveu os cálculos entre os numeradores e em seguida entre os denominadores.

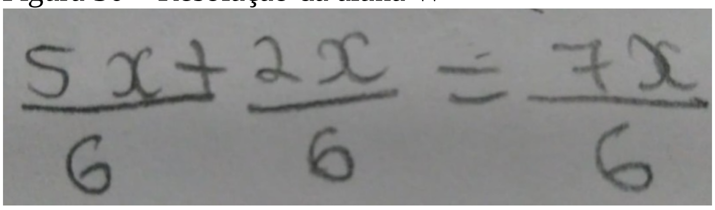
Figura 29 – Erro de falsa generalização



Fonte: O autor, 2019

A aluna W lembra que o denominador deve ser igualado, porém esquece o processo de resolução e comete uma falsa generalização.

Figura 30 – Resolução da aluna W



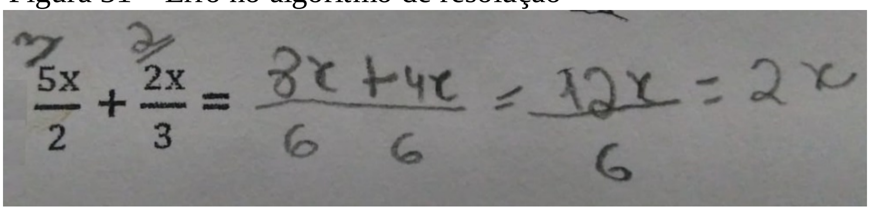
Fonte: O autor, 2019

Classe C – corresponde aos 3 alunos que cometeram erro nos modelos de resolução.

Os estudantes decoram um modelo mecânico de resolução e esquecem com pouco tempo, pois não entendeu como de fato os processos funcionam.

Sobre esse tipo de erro podemos citar a aluna K que resolveu o MMC, dividiu o resultado do MMC pelos denominadores, mas se equivocou no passo seguinte, onde deveria ser multiplicado foi adicionado, conforme a figura a seguir.

Figura 31 – Erro no algoritmo de resolução

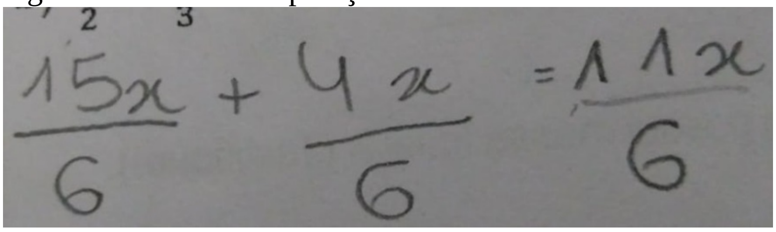


Fonte: O autor, 2019.

Classe D – correspondo aos 3 alunos que cometeram erros de cálculo, seja por falta de atenção ou por erro nos sinais.

O aluno D realiza o procedimento inicial, mas ao final comete um erro na operação que deveria ser realizada.

Figura 32 – Erro nas operações



Fonte: O autor, 2019.

Classe E – corresponde a dois alunos que não foi possível interpretar as respostas.

Questão 6

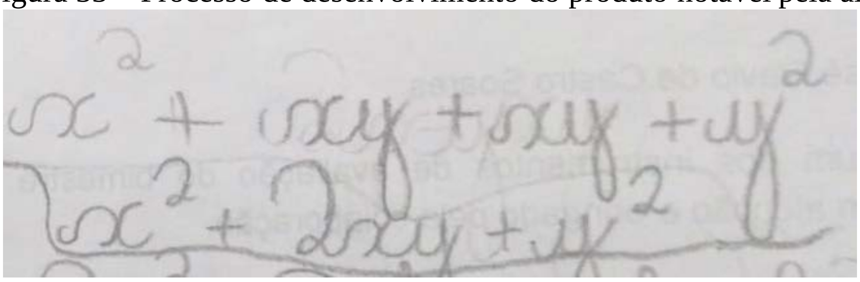
A questão 6 refere-se ao conteúdo algébrico conhecido como Produtos Notáveis. Os erros neste tema costumam estar relacionados a dificuldades do entendimento de Potenciação e do desconhecimento da propriedade distributiva. Foi pedido nessa questão que o aluno desenvolvesse o produto notável abaixo.

$(x + y)^2$

Nessa questão foram computados apenas 4 acertos, contra 26 erros e 9 não responderam.

Classe A – corresponde aos 4 alunos que acertaram a questão. Entre eles destacamos a aluna L.

Figura 33 – Processo de desenvolvimento do produto notável pela aluna L

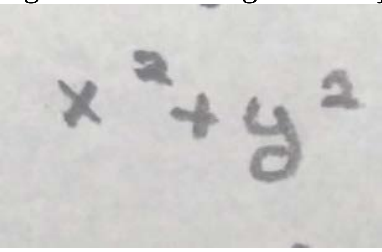


Fonte: o autor (2019)

Classe B – corresponde aos 13 alunos que generalizaram erroneamente o problema.

Nessa classe os alunos imaginam uma falsa propriedade, como se o quadrado da soma de dois termos fosse igual a soma de quadrados dos termos. Citamos o aluno M como exemplo.

Figura 34 – “Sobregeneralização” nos produtos notáveis

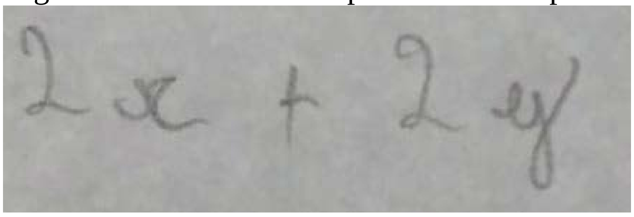


Fonte: O autor (2019).

Classe C – corresponde aos 6 alunos que erraram ao passar o expoente multiplicando os termos, como na propriedade distributiva.

Podemos citar o aluno R:

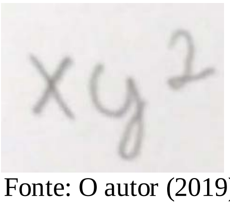
Figura 35 – Aluno R multiplica os termos pelo expoente



Fonte: O autor (2019).

Classe D – corresponde aos 5 alunos que ao multiplicaram os termos internos do parênteses e mantiveram o expoente, como o aluno B.

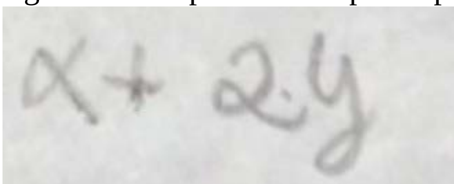
Figura 36 – Aluno B multiplica erroneamente os termos internos



Fonte: O autor (2019).

Classe E – corresponde a uma aluna que passou o expoente multiplicando apenas o ultimo termo. Possivelmente tenha interpretado que o expoente só valeria para o ultimo termo devido a proximidade que se vê na potencia $(x + y)^2$.

Figura 37 – Expoente multiplica apenas o ultimo termo



Fonte: O autor (2019).

Classe F – corresponde a um erro de um aluno que não teve sua solução interpretada.

O aluno R resolveu que a expressão era igual a 5, sem justificativa aparente, conforme modelo abaixo.

$$(x + y)^2 = 5$$

Questão 7

A questão sete refere-se ao conteúdo de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, neste problema foi pedido que os alunos resolvessem o sistema abaixo.

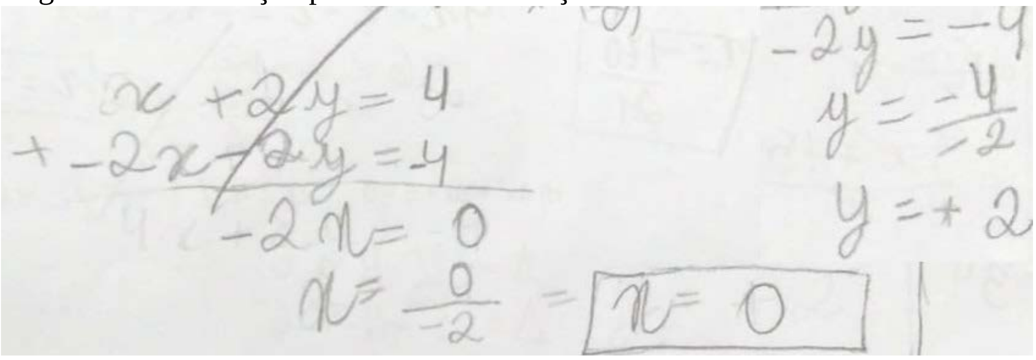
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Neste problema apenas 4 alunos acertaram a resposta, 26 erraram e 9 optaram por não responder.

Classe A – corresponde aos 4 alunos que resolveram o problema corretamente. Dentre as resoluções houve dois tipos apresentadas, uma pelo método da adição e outra por tentativa e erro (atribuindo valores a uma das incógnitas e verificando o valor encontrado na outra).

Podemos citar o aluno E que resolve o sistema pelo método conhecido como método da adição.

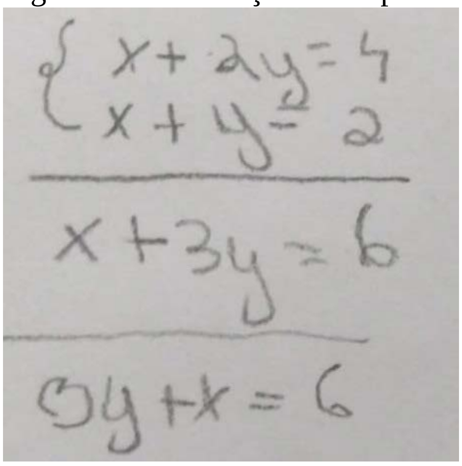
Figura 38 – Resolução pelo Método da adição



Fonte: O autor, 2019

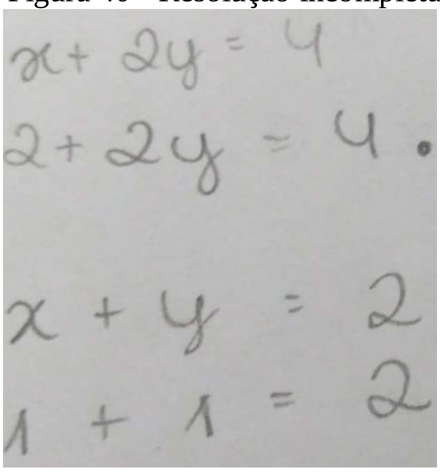
Classe B – corresponde aos 9 alunos que tentaram resolver, mas não recordavam os métodos, mas ainda assim persistiram na tentativa de conclusão do raciocínio.

Figura 39 – Resolução incompleta de um sistema de equações



Fonte: O autor, 2019.

Figura 40 - Resolução incompleta do aluno N



Fonte: O autor, 2019.

Classe C – corresponde aos 17 alunos que não sabiam ou não se recordaram do conteúdo e não entenderam nem mesmo como começar a resolver.

Questão 8

A questão número 8 foi uma questão retirada de uma prova de concurso do Colégio Pedro II, assim como a questão 7, esta também se refere ao conteúdo de sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, porem não foi informado aos alunos que se tratava de uma questão desse tema, foi apenas pedido para resolverem o seguinte problema:

Em uma garagem há 12 veículos, entre motos e carros, num total de 44 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesta garagem?

Esse foi o problema com o maior numero de acertos, 18 ao todo, além de 18 erros e 3 optaram por não responder.

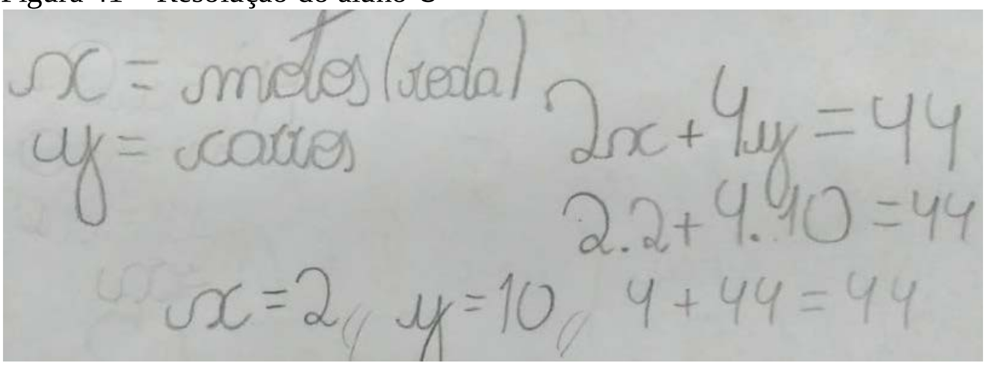
Classe A – corresponde aos 18 alunos que acertaram, dentre os 18, apenas um resolveu pelo método da adição de um sistema de equações e todos os demais por tentativa e erro, cada um utilizando sua própria logica a partir da interpretação do problema.

Nos livros didáticos as formas de resolução são apresentadas em três métodos:

- Método da Adição
- Método da Substituição
- Método da Comparação

O aluno U apresentou esta resolução semelhante ao método da adição.

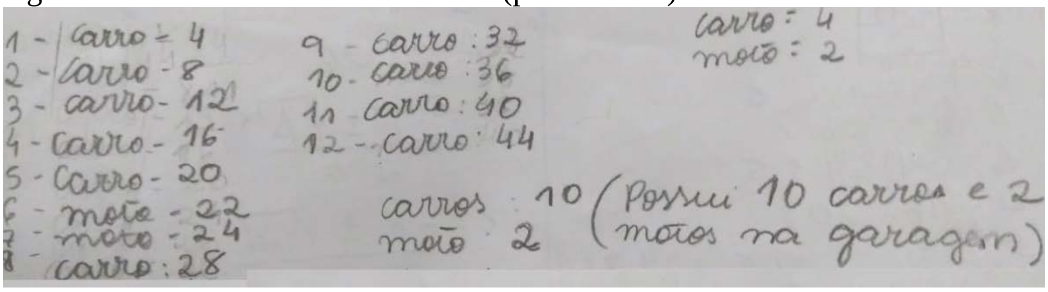
Figura 41 – Resolução do aluno U



Fonte: O autor, 2019.

O aluno L tem uma resolução por tentativa e erro, somando o quantitativo de rodas até obter valores correspondentes ao total de rodas e de veículos informados na questão.

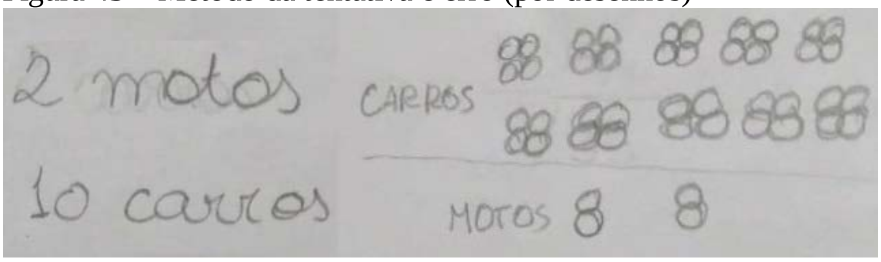
Figura 42 – Método da tentativa e erro (por cálculos)



Fonte: O autor, 2019.

Assim como o aluno L, a aluna I também apresenta um método de tentativa e erro desenhando as rodas dos veículos e fazendo a contagem.

Figura 43 – Método da tentativa e erro (por desenhos)

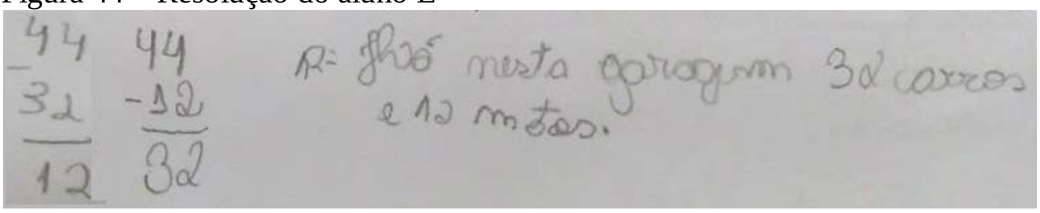


Fonte: O autor, 2019.

Classe B – corresponde aos alunos que acertaram valores para o número de *veículos*, porem erraram no quantitativo de *rodas*, ou vice-versa. Este erro está relacionado com a interpretação do problema, mas existe alguma coerência numérica com os valores associados a questão.

O aluno E apresenta o número total de veículos igual a 44 (32 carros mais 12 motos), porém não atenta que 44 cabe ao número de rodas e não de veículos.

Figura 44 – Resolução do aluno E

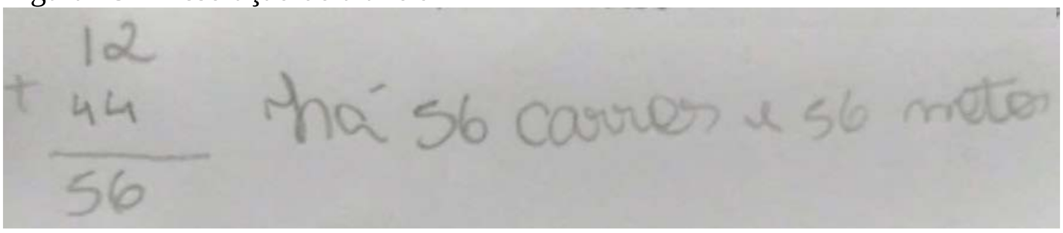


Fonte: O autor, 2019.

Classe C – corresponde aos 14 alunos que tiveram problemas na interpretação do enunciado, cometendo erro na quantidade de veículos e de rodas.

O aluno J não compreende a questão, pois está claro que no enunciado o número de veículos e de rodas. A operação de adição entre o número de veículos e o número de rodas, mostra uma extrema dificuldade de interpretação.

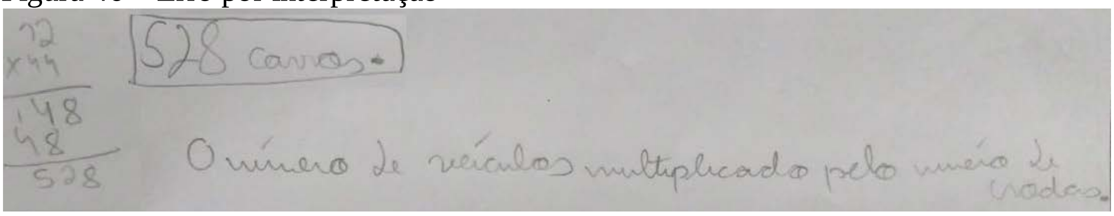
Figura 45 – Resolução do aluno J



Fonte: O autor, 2019.

O aluno M multiplica o número de rodas pelo número de veículos, o que mostra sua dificuldade com a interpretação.

Figura 46 – Erro por interpretação



Fonte: O autor, 2019.

Com base nas resoluções verificadas pode-se constatar as dificuldades apresentadas pelos estudantes e com isso a necessidade dos estudantes entenderem os equívocos cometidos. Após a análise das questões respondidas pelos estudantes foi realizada uma reunião para mostrar alguns dos erros cometidos por eles e estes puderam comparar seus erros com os erros dos colegas de classe, assim como entender, de uma ou mais maneiras de resolver os problemas e principalmente verificar as possíveis causas que o levaram a cometer tal erro.

CONCLUSÃO

É comum nas avaliações de Matemática o professor informar ao aluno apenas os erros e acertos, sem necessariamente identificar o porquê dos erros. O trabalho foi motivado pela busca da necessidade de reparar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e utilizar as respostas como metodologia de pesquisa e ensino, já que no ensino de matemática nos últimos anos do fundamental verificam-se as várias deficiências que diversos alunos arrastam, às vezes, por muitos anos.

Neste trabalho pode-se iniciar uma breve historia da matemática com a educação matemática no Brasil e buscou discutir as questões acerca do erro dos estudantes através da literatura sobre análise de erros, explorando os erros comuns que os alunos cometem na resolução de problemas de temas ligados a álgebra.

Analisando as respostas dos estudantes conforme estudos de Cury (2007) e Borasi (1996) pode-se verificar que as respostas não costumam surgir como invenções aleatórias, mas sim como “conhecimentos empíricos já constituídos” (BECHALARD, 1996, p. 23). Acredita-se que este trabalho colaborou com o avanço no desempenho dos estudantes que realizaram as atividades, uma vez que puderam perceber seus erros e utilizá-los como fator preponderante na elaboração de respostas.

Ao concluir este trabalho faço uma reflexão sobre a necessidade da exploração da análise das respostas dos alunos, uma vez que, este estudo buscou analisar os erros dos estudantes na resolução dos problemas a fim de que os alunos pudessem compreender seus equívocos. Apesar dos resultados alarmantes no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), sistema utilizado para verificar a qualidade do ensino no Brasil, pode-se ter alguma esperança de melhores desempenhos na qualidade do ensino brasileiro, uma vez que diversos pesquisadores e professores estão sempre desenvolvendo técnicas para melhorias na educação básica como é o caso deste trabalho.

De forma positiva é possível citar o avanço das pesquisas em educação matemática nos últimos anos, incluindo algumas que propiciaram os resultados presentes nesse trabalho.
Espera-se que este estudo possa estimular educadores, escolas e instituições de ensino a resolver os problemas de aprendizagem de muitos estudantes, e que colabore para a elaboração de estratégias no resgate do aluno, não importando se as respostas estarão corretas ou equivocadas, mas que estimule o aluno ao aprendizado.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico: contribuições para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALTAZAR, B. B. *Análise de Erros Comuns em Álgebra*. Porto Alegre: 2012. Disponível em: < https://lume.ufrgs.br/handle/10183/66858> Acesso em: 25 mai. 2019.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Tradução de Luís A. Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1979.

BAUMGART, John K. *Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula;* v. 4: Álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992.

BERTI, N. M. *O Ensino de Matemática no Brasil: buscando uma compreensão histórica.* Ponta Grossa: Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2005. Disponível em: <http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada6/trabalhos/617/617.pdf>. Acesso em: 25 mai. 2019.

BORASI, R. *Reconceiving mathematics lnstruction: a Focus on Errors.* Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BOYER, C.B. *História da matemática.* Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Congresso Constituinte. *Constituição da República Federativa do Brasil.* Brasília, 1988. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm> Acesso em: 27 mai. 2019.

______. Ministério da Educação. *Institucional.* Brasília: MEC, 2015. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/institucional/historia> Acesso em: 20 jun. 2019.

______. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais* / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEP, 1997. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> Acesso em: 20 jun. 2019.

______. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base> Acesso em: 15 jun. 2019.

CAMPOS, Paulo. *Arquivo Histórico (Madeira).* Madeira, PT, 2018. Disponível em: <http://arquivohistoricomadeira.blogspot.com/2018/02/exame-de-artilheiros-jose-fernandes.html> Acesso em: 15 jul. 2019. il. color.

CARRAHER, David William; CARRAHER, Terezinha Nunes; SCHLIEMANN, Ana lúcia Dias. *Na vida dez, na escola zero.* 10 ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

______. *Análise de erros e Formação de Professores: Sugestões para Ensino e Pesquisa em Cursos de Licenciatura em Matemática.* Editora Unijuí, ano 21 nº 76 Jul./Dez. 2006. Disponível em: <https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/1098/853> Acesso em: 15 mai. 2019.

______. *Pensamento algébrico e análise de erros: algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores.* Revista de Educação, Ciências e Matemática v.1 n.1 ago/dez. 2011. Disponivel em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/1594/773> Acesso em: 10 jun. 2019.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950*. Saber y tiempo. Buenos Aires, v. 2, n. 8, p. 7-37, 1999. Disponível em: < http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo_Docente/MAT/EJS/HISTORIA_DA_MATEMATICA_NO_BRASIL_ATE_1950.pdf> Acesso em: 12 jun. 2019.

EVES, H. *Introdução à história da matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora UNICAMP, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, Dario. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil.* Revista Zetetiké: Ano 3, nº 4. 16 p. 1995. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877/15035> Acesso em: 26 jun. 2019.

FRANÇA, Luísa. *BNCC: Tudo que você precisa saber sobre a Base Nacional Comum Curricular.* 2019. Disponível em: <https://www.somospar.com.br/bncc-base-nacional-comum-curricular/> Acesso em: 05 jun. 2019.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. *O Medo da Matemática.* Revista Educação UFSM, Santa Maria - RS: Editora da UFSM, v. 26, n. 2, p. 95-109, jul./dez. 2001. Disponível em: < https://periodicos.ufsm.br/reveducacao/article/view/3686/2084> Acesso em: 25 jul. 2019.

GOMES, Maria Laura Magalhães. *História do Ensino da Matemática: uma introdução.* Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2013. Disponível em: < http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/historia_do_ensino_da_matematica_CORRIGIDO_13MAR2013.pdf > Acesso em: 20 jun. 2019.

IVIC, I. *Lev Semionovich Vygotsky*. Trad. José Eustáquio Romão. Recife: Editora Massangana, 2010.

MADALÓZ, R. J.; SCALABRIN, I. S.; JAPPE, M. *O Fracasso Escolar sob o Olhar Docente: Alguns Apontamentos*. Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul, 2012. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/945/527> Acesso em: 16 jul. 2019.

MEMÓRIA HISTÓRICA DO COLÉGIO PEDRO II. Disponível em: <http://www.cp2.g12.br/images/comunicacao/memoria_historica/index.html> Acesso em: 20 jul. 2019.

MOVSHOVITZ-HADAR, N. ; ZASLAVSKY, O. ; INBAR, S. *An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics, Journal for research in mathematics education.* vol. 18, No. 1, jan., 1987. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/263926481_An_Empirical_Classification_Model_for_Errors_in_High_School_Mathematics> Acesso em: 12 ago. 2019.

MUNARI, A. *Jean Piaget*. Trad. Daniele Saheb. Recife: Editora Massangana, 2010.

OJOSE, B. *Common Misconceptions in Mathematics: Strategies to Correct Them.* Lanham: University Press of America, 2015.

PINTO, Neuza Bertoni. *O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar.* São Paulo, 1998. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-12022015-151819/publico/tese_neuzabertoni.pdf> Acesso em: 11 mai. 2019.

PRATT, Gertrud V. *A álgebra grega primitiva*. *In*: BAUMGART, John K. *Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula;* v. 4: Álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992. p. 68 – 71.

RADATZ, Hendrik. *Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey*. *FLM Publishing Co Ltd Montreal*, v. 1, n.1, p. 16-20, July 1980.

READ, Cecil B. *Álgebra arábica, 820 – 1250*. *In*: BAUMGART, John K. *Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula;* v. 4: Álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992. p. 75 – 79.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2012.

SEYBOLD, Anice. *Álgebra booleana*. *In*: BAUMGART, John K. *Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula;* v. 4: Álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992. p. 54 – 58.

SILVA, L. MEDEIROS, Z. CAMPOS, S. CARMO, L. FERREIRA, A. *Da Colônia a Reino Unido e Império.* 2013. Disponível em: <https://alfamat.webnode.com/historia-da-matematica-no-brasil/da-colonia-a-reino-unido-e-imperio/> Acesso em: 15 jul. 2019. il. color.

SILVA, André Gustavo Oliveira. Aprendizagem consciente: o relatório de reflexão dos erros (RRE) como alternativa pedagógica. Londrina, 2013. Disponível em: < http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UEL_d9f0a687ef281313a4b83dcdad534527> Acesso em: 19 mai. 2019.

SLOYEN, M. Stephanie. *Álgebra na Europa 1200 – 1850. In*: BAUMGART, John K. *Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula;* v. 4: Álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992. p. 80 – 82.

WERNECK, Arlete Petry Terra. *Euclides Roxo e a Reforma Francisco Campos: a gênese do primeiro programa de ensino de matemática brasileiro*. 2003. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11192> Acesso em: 05 jun. 2019.

WORLD BANK. *Achieving World Class Education in Brazil: The Next Agenda.* Washington, D.C., The World Bank, 2010. Disponível em: <http://www.anped11.uerj.br/Banco_mundial/achieving_world.pdf> Acesso em:15 jun. 2019.

WRESTLER, Ferna E. *Álgebra hindu*. *In*: BAUMGART, John K. *Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula;* v. 4: Álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992. p. 71 – 75.