

Alguns Exemplos do Uso da Intuição Humana na  
Busca por Soluções Analíticas

por

Rafael Assimos Martins.

UFRJ

Agosto de 2019

*O Funk não é modismo é uma necessidade  
É pra calar os gemidos que existem nessa cidade  
E todo mundo devia nessa história se ligar  
Porque tem muito amigo que vem pro baile dançar  
Esquecer os atritos, deixar a vida pra lá  
E entender o sentido quando o DJ detonar  
Era só mais um Silva que a estrela não brilha  
Ele era funkeiro, mas era pai de família*

*by: MC Bob Run*

# Alguns Exemplos do Uso da Intuição Humana na Busca por Soluções Analíticas

por

**Rafael Assimos Martins**

**Orientador: Marisa Beatriz Bezerra Leal**

Dissertação de Mestrado submetida, em 22 de Agosto de 2019, ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

---

Dra. Marisa Beatriz Bezerra Leal

IM - UFRJ - Orientador.

---

Dra. Walcy Santos

IM - UFRJ.

---

Mestre Diego Macieira Belay

FME - UFRJ.

---

Dr. Helvécio Rubens Crippa

IME - UERJ.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, pelo suporte que me tem dado por todos esses anos, além da educação, carinho, respeito, coragem e apoio nos momentos mais difíceis! Sem eles, nem mesmo essas palavras iniciais seriam possíveis.

Gostaria de agradecer ao IM-UFRJ, que recebeu de braços abertos uma turma inteira de professores que decidiram se aventurar por terrenos mais abstratos e literalmente menos concreto. Em especial e em ordem cronológica, gostaria de agradecer aos professores Nei e Walcy. Estes me ensinaram, com muita paciência, a provar desde  $a \cdot 0 = 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$  ao Teorema Fundamental do Cálculo, passando pelas belas demonstrações pelo princípio de indução. Não menos importante, gostaria de agradecer a professora Marisa Leal, que foi minha orientadora no presente trabalho e me fez mergulhar no mundo da geometria e nas conjecturas propostas por alunos do ensino básico, devido ao seu ótimo curso de Práticas Educativas. Gostaria de agradecer também a professora Monique Carmona, pelo excelente curso de geometria analítica que abriu minha mente para problemas envolvendo conceitos de lugar geométrico.

Agradei ao IM-UFRJ no parágrafo anterior pois foi em sua estrutura física que eu conheci parte dos amigos que hoje habitam a minha lista dos melhores. Dedico portanto esse parágrafo aos amigos do mestrado, que compartilharam comigo momentos quase sempre divertidos, de muita cerveja, muita matemática e muuuuita conversa. Seria injusto e frio não citar nomes aqui, então gostaria de mandar um abraço aos amigos: Alex Sander, Cassius, Cid, Daneil, Thamyres, Thiago, Luiz Cesar, Saulo, Denilson e Fábio.

Fugindo do mundo da matemática e adentrando um outro mundo que faz parte da minha vida pessoal, quero agradecer a minha esposa Mariana Neves de Castro, por todo o apoio nos momentos mais difíceis, por compreender tantas noites sem dormir, finais de semana sem poder sair e um verão sem poder viajar. Não posso esquecer de agradecer muito a minha querida mãe, Regina Celia Assimos Martins, a quem devo minha entrada neste programa de mestrado e quase tudo que sou na vida. Gostaria também de agradecer ao meu irmão Renan Assimos Martins, pelo apoio nos momentos de dificuldade com as disciplinas e, em especial, pelas dicas para escrever uma dissertação nos moldes ideais.

Agradeço aos amigos de infância João Paulo de Freitas Pires (risos), pela ajuda com o tratamento das imagens, Otto Barcellos, Rodrigo Sales, Diego Ferreira da Silva e as suas respectivas famílias atuais (esposa, filhos, etc.), pelos eternos churrascos lá em casa, resgates do João no Natal, futebol na quadra, no campo ou no quintal, quando ainda tínhamos tamanho para isso! À vocês, meu muito obrigado.

Finalmente agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é investigar a capacidade de um grupo de jovens entre 14 e 17 anos de conseguirem, através da intuição, propor soluções aproximadas para problemas clássicos de geometria e comparar com as soluções analíticas determinadas pelo método dedutivo. Mais adiante, apresentamos um dos problemas mais curiosos da matemática, o problema da braquistócrona, que confunde a intuição humana com facilidade.

Como a solução do problema da braquistócrona é obtida através de uma equação diferencial e, neste caso, o apelo intuitivo não foi suficiente para resolvê-lo, fica então uma dúvida. Seriam as equações diferenciais um tópico que sempre confunde a intuição humana? Para esclarecer esse questionamento, apresentamos uma demonstração diferente para os teoremas de existência e unicidade das soluções de equações diferenciais. Tais demonstrações buscam uma proximidade maior com o método indutivo.

Buscamos com isso mostrar como os método indutivo e dedutivo se complementam na resolução de diversos problemas e para tornar o texto razoavelmente auto-suficiente, fez-se necessário uma apresentação prévia de definições e resultados “básicos” de geometria Euclidiana, análise, cálculo vetorial e cálculo das variações.

Palavras Chaves: Arco capaz. Braquistócrona. Curvas minimizantes. Cálculo Vetorial. Intuição na Matemática. Euler-Lagrange. Cálculo Variacional, Teorema de Peano, Método Indutivo, Método Dedutivo, Poligonal de Euler-Cauchy.

# Abstract

The main purpose of this work is to investigate the ability of a group of 14 to 17 year old students to propose, through intuition, approximate solutions to classical geometry problems and to compare with analytical solutions determined by the deductive method. Later, we present one of the most curious problems in mathematics, the brachistochron problem, which easily confuses human intuition.

Since the solution of the brachistochron problem is obtained through a differential equation and, in this case, the intuitive appeal was not sufficient to solve it, there is a doubt. Are differential equations a topic that always confuses human intuition? To clarify this question, we present a different demonstration for the theorems of existence and uniqueness of the solutions of differential equations. Such demonstrations seek greater proximity to the inductive method.

We seek to show how the inductive and deductive methods complement each other in solving several problems and to make the text reasonably self-sufficient, it was necessary to provide a prior presentation of definitions and “ basic ” results of Euclidean geometry, analysis, vector calculus and calculation of variations.

Key words: Braquistócrona. Curvas minimizantes. Cálculo Vetorial. Intuição na Matemática. Euler-Lagrange. Cálculo Varicinal, Teorema de Peano, Método Indutivo, Método Dedutivo, Poligonal de Euler-Cauchy.

# Conteúdo

<b>0</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1	Considerações sobre os métodos indutivo e dedutivo . . . . .	6
1.2	Conceito de lugar geométrico . . . . .	8
1.3	Resultados fundamentais de análise, cálculo vetorial e cálculo das variações	12
<b>2</b>	<b>Um Problema Básico de Navegação - Localização no Plano</b>	<b>17</b>
2.1	A proposta de atividade . . . . .	18
2.1.1	Análise das respostas de acordo com a intuição dos alunos . . . . .	20
2.1.2	Arco capaz . . . . .	27
2.1.3	Solução analítica utilizando o Software GeoGebra . . . . .	30
<b>3</b>	<b>O Problema da Braquistócrona e a Intuição Humana</b>	<b>35</b>
3.1	Apresentação do problema . . . . .	36
3.2	Formulação do problema . . . . .	39
3.3	Solução do problema . . . . .	40
<b>4</b>	<b>A Poligonal de Euler-Cauchy e o método indutivo</b>	<b>44</b>

4.1	Definições de Equações Diferenciais . . . . .	45
4.2	Uma Prova Elementar para o Teorema de Peano . . . . .	46
4.3	A Prova Usual para o Teorema de Peano . . . . .	53
4.4	Teorema da Unicidade . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>58</b>

# Capítulo 0

## Introdução

Um dos caminhos possíveis para serem seguidos ao nos depararmos com um problema de matemática, tanto no campo da álgebra como no da geometria, é buscarmos, antes de tudo, soluções aproximadas ou particulares provenientes de simples intuições para começarmos a tentar observar relações possíveis de serem usadas para em fim conseguirmos uma solução analítica para o problema.

Esse processo pode ser ainda incrementado, de forma que é muito comum que usemos casos particulares e suas soluções analíticas para depois tentarmos uma generalização de casos mais gerais. Chamamos isso de método indutivo e seguimos esses caminhos muitas vezes sem perceber.

Em lógica, método indutivo é uma forma de raciocínio no qual as premissas são fornecidas por algumas evidências; isto está em contraste com o raciocínio dedutivo. Enquanto a conclusão de um argumento dedutivo é certa, a verdade da conclusão de um argumento indutivo é apenas provável, baseada nas evidências dadas.

Embora para os matemáticos o método indutivo não pareça algo assertivo, ele é de fundamental importância para que o sujeito saiba que caminhos deve tomar e o que pretende concluir, ou seja, por onde e para onde o método dedutivo o levará. Portanto é de importância relevante para resolução de exercícios, desde os mais simplórios até os mais intrigantes que já apareceram ao longo da história.

Observe que o princípio da indução matemática, uma das mais poderosas técnicas de demonstração, usa justamente o complemento desses dois métodos de raciocínio. Primeiro é preciso verificar, empiricamente uma determinada propriedade do conjunto dos números naturais, criar uma conjectura (hipótese de indução) e, em seguida, usar o método dedutivo para provar que a propriedade é válida para todo natural.

O objetivo deste trabalho é, além da investigação da capacidade de um grupo de jovens em propor soluções aproximadas para um problema de geometria Euclidiana plana, é mostrar como estes métodos são de fundamental importância nas soluções de exercícios propostos e como se complementam na resolução de problemas.

Para tal, foram propostas duas atividades com alunos com faixa etária de 14 a 17 anos de uma turma de 9<sup>o</sup> ano do ensino fundamental de uma escola localizada na zona oeste do Rio de Janeiro. Uma delas feita em um encontro de 100 minutos com registro e outra muito mais curta e direta, apenas para observar como funciona a intuição dos mesmo alunos que participaram da primeira atividade.

Essa dissertação está dividida em 4 capítulos. No capítulo 1 trataremos dos resultados e conceitos fundamentais utilizados que serão enunciados ou até mesmo demonstrados para que o trabalho fique o mais autossuficiente possível. No capítulo 2 apresentamos uma proposta de atividade de localização no plano, com intuito de investigar como jovens de uma turma do ensino básico conseguem propor soluções aproximadas para o problema e depois comparamos essas aproximações com a solução analítica. No capítulo 3 nos debruçaremos sobre um dos problemas mais intrigantes da matemática, o problema da braquistócrona, observando como ele pode confundir a intuição humana. No capítulo 4 mostraremos que, apesar das observações sobre o problema da braquistócrona, os problemas de equações diferenciais tem ainda forte apelo intuitivo. Por fim, fechamos a dissertação com as considerações finais sobre os resultados obtidos e observações sobre como os métodos indutivo e dedutivo se complementam na obtenção de resultados importantes em matemática.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, explicarei o significado dos termos que serão utilizados com frequência e apresentarei conceitos fundamentais para tornar a leitura o mais autossuficiente possível.

O termo *imaginação* será usado durante o trabalho para expressar, de acordo com Leivas, “[...] uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo [...], com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito.” (LEIVAS, 2009, p. 9) [8].

Utilizarei também com frequência o termo *intuição*, bastante explorado tanto na Psicologia quanto na Matemática no final do século XX e início do século XXI por diversos autores, dentre os quais podemos destacar, Fischbein (1987) [6], Tall (1991) [14], Skemp (1993) [12], quase sempre relacionado à geometria.

Segundo Fischbein (1987) [6], intuição ou conhecimento intuitivo é conhecimento imediato, ou seja, formas de cognição que se apresentam como triviais ou auto-evidentes, sem a necessidade de prova para sua existência.

Segundo Leivas (2009), “Entende o autor por cognição as componentes estruturais de qualquer comportamento adaptativo”. E ainda acrescenta que “[...] o principal atributo do conhecimento intuitivo é o sentimento de uma certeza direta e este é produzido, em primeiro lugar, pela impressão de auto-evidência.” (LEIVAS, 2009, p. 20).

Fischbein apresenta a definição do termo da seguinte forma, “[...] intuição é uma

idéia que possui as duas características fundamentais de uma realidade concreta, dada objetivamente; evidência imediata e certeza.” (FISCHBEIN, 1987, p. 21).

Por outro lado, Skemp (1993) [12] considera que o uso da intuição favorece a comunicação e transmissão de conceitos, tarefa que o autor considera como difícil de ser feita.

Para o autor, a inteligência pode funcionar de duas formas, intuitiva ou reflexiva, sendo que na primeira forma, são os sentidos da audição e da visão que tornam o indivíduo consciente.

Tall (1991, p. 108) [14] define intuição como uma ressonância global no cérebro que varia de acordo com a estrutura cognitiva do indivíduo o que, por sua vez, depende se sua própria ou vivência.

Neste trabalho, o termo intuição tem o significado sintetizado em (LEIVAS, 2009) [8] e foi fundamentado por esses autores:

[...]intuição é um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto. O conceito deve ser formado de forma reflexiva, consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da auto-evidência.(LEIVAS, 2009, p.21).

Esse conceito tem tamanha relevância pelo fato de parte do trabalho ter sido realizado com jovens de 14 a 17 que fazem parte de uma geração que está inserida num contexto digital e da qual fazem parte os chamado leitores virtuais ou leitores fragmentados, definidos por Lúcia Santaella como

[...]o leitor apressado de linguagens efêmeras, híbridas, misturadas. Mistura que está no cerne do jornal, primeiro grande rival do livro. A impressão mecânica aliada ao telégrafo e à fotografia gerou esse ser híbrido, testemunha do cotidiano, fadado a durar o tempo exato daquilo que noticia. Nasce com o jornal um tipo novo de leitor, o leitor fugaz, novidadeiro, de memória curta, mas ágil. Um leitor que precisa esquecer, pelo excesso de estímulos, e na falta do tempo de retê-los. Um leitor de fragmentos, leitor de tiras de jornal e fatias de realidade. (SANTAELLA, 2004, p.20) [11].

É utilizado também neste trabalho o termo *elementar* cuja definição clássica dos dicionários é de algo que é composto ou funciona de modo primário, básico, simples, fácil, claro. Neste caso, e no caso da matemática em si, algo que funciona de modo primário ou

básico não necessariamente é mais simples ou mais fácil, mas sim algo que não necessita de resultados muito fortes. O que é curioso é que, em geral, quanto mais elementar pretendemos ser ao demonstrar um teorema, por exemplo, maior será a dificuldade de seguir com a demonstração, uma vez que não temos os resultados que a tornariam mais imediata. Pelo contrário, quando dispomos de resultados mais fortes, a maior parte das demonstrações ou resoluções de problema tornam-se mais curtas ou fáceis.

Ademais utilizaremos algumas definições de geometria como a de lugar geométrico, de extrema importância tanto no campo da geometria analítica como no campo das construções geométricas. O termo em inglês equivalente a “lugar geométrico” na língua portuguesa é “lucus”, palavra de origem no latim que significa lugar ou localização. Adiante veremos a definição formal do termo.

## 1.1 Considerações sobre os métodos indutivo e dedutivo

Ao pensar em como resolver problemas de uma maneira formal, fatalmente nos deparamos com os conceitos de raciocínio indutivo e dedutivo.

Tanto indução como dedução são muitas vezes referidas como um tipo de inferência, que basicamente significa apenas chegar a uma conclusão baseada em evidências e raciocínio.

Primeiro, indução e dedução são maneiras de aprender mais sobre o mundo e convencer os outros sobre a consistência dessas aprendizagens. Nenhum desses termos significaria algo para qualquer pessoa que não estivesse acostumado a fazer algo útil, como determinar quem cometeu um crime ou ensinar algum conceito de matemática para alguém. Indução e dedução servem para nos ajudar a lidar com problemas do mundo, sejam concretos ou abstratos.

A maior diferença entre raciocínio indutivo e dedutivo é que o primeiro começa pela observação, passa depois por uma generalização para, em fim, chegar a uma conjectura, provável constatação correta que pode dar origem a uma teoria mais geral. Já o segundo

parte de uma teoria geral e e através de hipóteses e argumentos faz observações que geram uma conclusão.



Figura 1.1: Indução X Dedução

Fonte: <https://danielmiessler.com/blog/the-difference-between-deductive-and-inductive-reasoning/>

Resumidamente, a indução passa da observação para a ideia, enquanto a dedução da ideia para a observação. Ou ainda, indução se move de mais geral para mais específica, enquanto a dedução se move da mais específica para a mais geral.

Em argumentos indutivos há simplesmente um grau de de probabilidade de que sejam verdadeiros, baseado na força destes argumentos e nas evidências para apoiá-lo. Por exemplo:

Eu tenho uma bolsa com muitas moedas, eu peguei 10 ao acaso e todas foram moedas de 1 centavo, portanto esta é, provavelmente, uma sacola cheia de moedas de 1 centavo.

Já argumentos dedutivos têm conclusões inatacáveis, claro, se todas as premissas são verdadeiras. Por exemplo:

Todos os jogadores da Seleção Brasileira de Voleibol Masculino são altos. Leandro é jogador da Seleção Brasileira de Voleibol Masculino. Portanto, Leandro é alto.

A terceira sentença, Leandro é alto, é absolutamente verdadeira apenas se as duas primeiras sentenças forem verdadeiras.

É importante lembrar que o termo “indução” pode ter dois significados neste trabalho. Pode ser o sinônimo de método indutivo, como explicado nesta seção ou pode aparecer como uma forma mais curta de se referir ao “princípio da indução matemática”, uma poderosa técnica de demonstração de propriedades ou teoremas que envolvem o conjunto dos números naturais. Apesar desta duplicidade de sentidos, ficará bem claro no texto em que momento estamos usando cada um destes significados

## 1.2 Conceito de lugar geométrico

Ainda se faz necessária a formalização do conceito de lugar geométrico, importante para a solução da proposta de atividade realizado na sala de aula com alunos, e raramente definido em livros de geometria do ensino básico.

Para (Whitehead, 1911) [16], lugar geométrico é um conjunto de pontos cuja localização satisfaça ou seja determinada por uma ou mais condições específicas.

Em outras palavras, o conjunto dos pontos que satisfazem alguma propriedade é chamado lugar geométrico de um ponto que satisfaz essa propriedade. Para (Whitehead, 1911) [16], o uso do singular nesta formulação é uma testemunha que, até o final do século XIX, os matemáticos não consideravam conjuntos infinitos. Em vez de visualizar linhas e curvas como conjuntos de pontos, eles os viam como locais onde um ponto pode estar localizado ou se mover.

Exemplos da geometria plana incluem:

O conjunto dos pontos equidistantes de um ponto  $O$  dado é a circunferência. O ponto  $O$  é chamado centro da circunferência e a distância  $r$  dos pontos até o centro  $O$  é chamada de raio. (Figura 1.2).

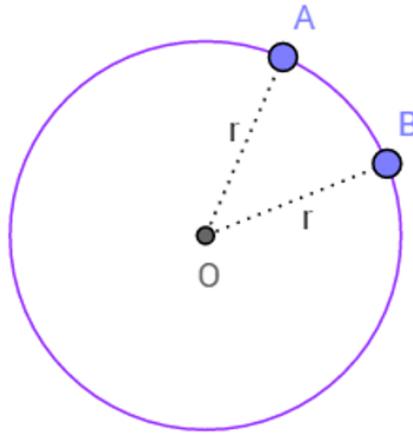


Figura 1.2: Circunferência

O conjunto de pontos equidistantes de dois pontos é uma mediatriz perpendicular ao segmento de reta que conecta os dois pontos.

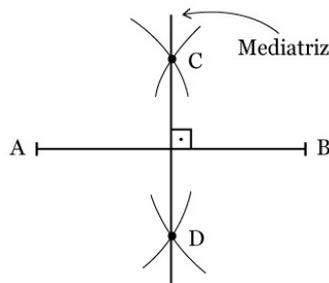


Figura 1.3: Mediatriz

Fonte: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>

O conjunto de pontos equidistantes de duas retas concorrentes é a bissetriz do ângulo formado por essas retas.

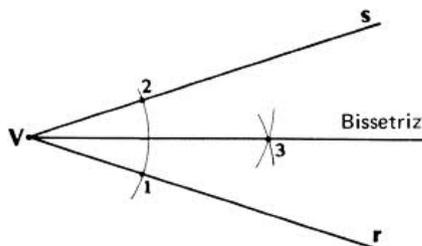


Figura 1.4: Bissetriz

Fonte: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>

Todas as seções cônicas são lugares geométricos.

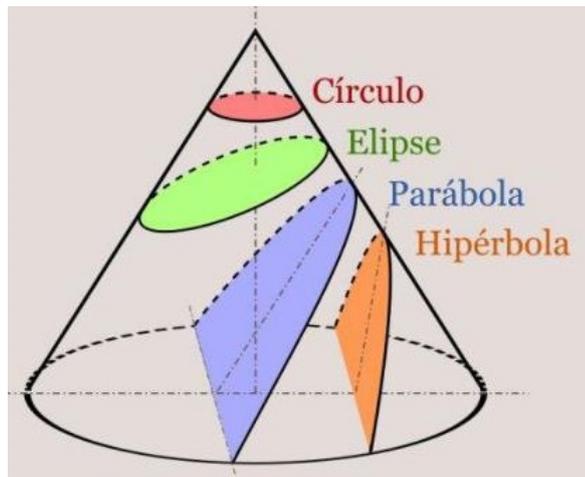


Figura 1.5: Seções cônicas

Fonte: <http://boltz.ccne.ufsm.br/st09/?q=node/47>

A parábola pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a uma reta fixa  $d$  e a um ponto fixo  $F$  são iguais. O ponto  $F$  chama-se foco da parábola e a reta  $d$  é a sua diretriz.

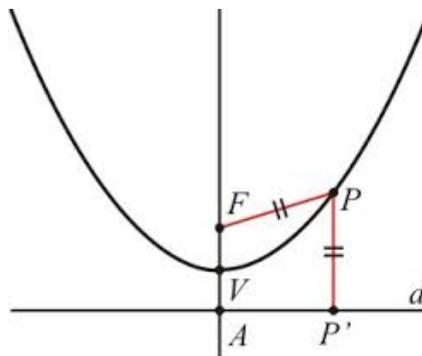


Figura 1.6: Parábola

Fonte: <https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-da-parabola-com.html>

Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos  $P$ , do plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é constante. O círculo é o caso especial, no qual os dois focos coincidem entre si. (Figura1.7).

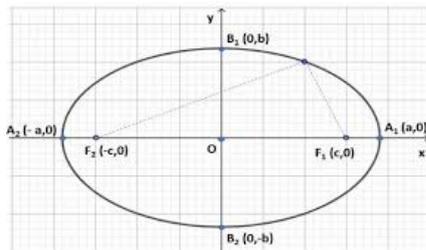


Figura 1.7: Elipse

Fonte: adaptado de <https://slideplayer.es/slide/4040337/>

O conjunto de pontos para cada um dos quais o valor absoluto da diferença entre as distâncias dos dois focos dados é uma constante é a hipérbole. (Figura 1.8).

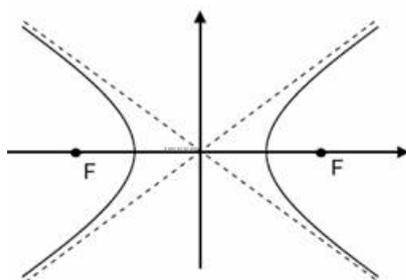


Figura 1.8: Hipérbole

Fonte: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>

Um lugar geométrico não precisa ser unidimensional ou bidimensional (como uma linha reta, um círculo, etc.). Por exemplo, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação  $2x + 3y - 6 = 0$  é um plano.

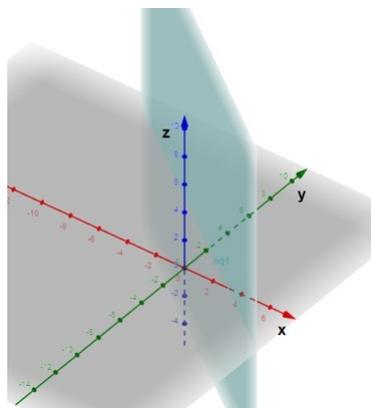


Figura 1.9: Plano  $2x + 3y - 6 = 0$

Outros exemplos de lugares geométricos aparecem em várias áreas da matemática. Por exemplo, em dinâmicas complexas, o conjunto de Mandelbrot, Figura 1.10 é um subconjunto do plano complexo que pode ser caracterizado como o lugar geométrico dos pontos  $c$  do plano complexo para os quais a sequência definida recursivamente  $z_0 = 0$  e  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  não tende ao infinito. figura 1.10.

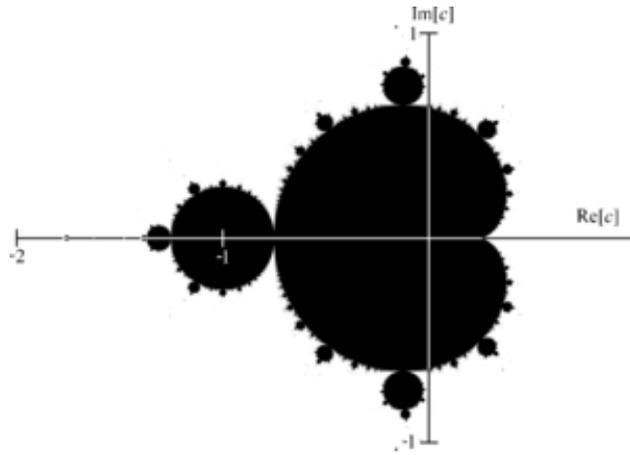


Figura 1.10: Conjunto de Mendelbrot

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>

### 1.3 Resultados fundamentais de análise, cálculo vetorial e cálculo das variações

Para discutirmos nos capítulos 3 e 4, a seguir, o problema clássico da braquistócrona e os teoremas de existência e unicidade de equações diferenciais, é preciso que alguns resultados importantes sobre o cálculo vetorial, análise e cálculo das variações, que serão utilizadas na resolução dos problemas, sejam apresentadas. São eles, a parametrização da cicloide, as definições de continuidade uniforme, função lipschitziana, sequência de funções convergente, uniformemente convergente, monotonicamente convergente, o Teorema de Dini, o Teorema da aproximação de Weierstrass, o Lema Fundamental do Cálculo Variacional e as Equações de Euler-Lagrange.

**1.3.1 Definição.** *Dado um sistema de coordenadas  $Oxy$ , a cicloide é o lugar geométrico*

descrito pelo ponto  $P$  da circunferência geradora, de raio  $a$  e centro  $C$  que rola sobre o eixo  $x$ .

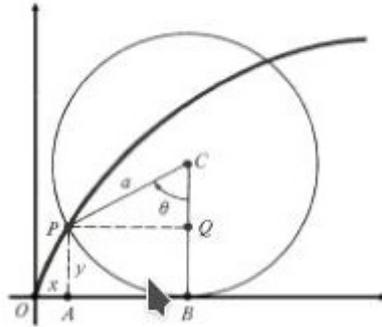


Figura 1.11: Cicloide

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Cicloide>

As equações paramétricas da cicloide são

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin(\theta)) \\ y = a(1 - \cos(\theta)). \end{cases}$$

O ângulo  $\theta$ , é o ângulo varrido pelo raio  $\overline{CP}$  quando a circunferência rola para uma nova posição. Se  $x$  e  $y$  são as coordenadas de  $P$ , então, considerando esse movimento, como  $OB = \widehat{BP} = a\theta$ , tem-se

$$x = OA = OB - AB = OB - PQ = a\theta - a \sin(\theta) = a(\theta - \sin(\theta))$$

e

$$y = AP = BC - QC = a - a \cos(\theta) = a(1 - \cos(\theta)).$$

**1.3.2 Definição.** Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é uniformemente contínua em  $A$  se para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que se  $x_1, x_2 \in A$  são números que satisfazem  $|x_2 - x_1| < \delta(\epsilon)$  então  $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$ .

**1.3.3 Definição.** Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se existe uma constante  $L > 0$ , tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1| \tag{1.1}$$

par todo  $x_1, x_2 \in A$ , então  $f$  é dita função Lipschitziana, com constante de Lipschitz  $L$ , em  $A$ .

**1.3.4 Observação.** Note que se  $f$  está definida em um intervalo  $I$ , a desigualdade 1.1 pode ser interpretada como segue. Se reescrevermos a condição 1.1, temos

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq L, \quad x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2.$$

Assim, o termo que está dentro do valor absoluto é a inclinação do segmento de reta que une os pontos  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$ . Deste modo, a função  $f$  é Lipschitziana se e somente se as inclinações de quaisquer segmentos unindo dois pontos do gráfico de  $f$  são limitadas por um número  $L$ .

Mais detalhes sobre essas definições podem ser encontrado em [2] ou [9].

**1.3.5 Definição.** Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) converge para a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  quando para todo  $x \in X$  a sequência de números  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  converge para  $f(x)$ .

Assim,  $f_n$  converge para  $f$  quando dado  $\epsilon > 0$  e  $x \in X$ , existe  $n_0(\epsilon, x)$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

**1.3.6 Definição.** Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  quando para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $n_0(\epsilon)$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  seja qual for  $x \in X$ .

**1.3.7 Definição.** Diz-se que uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge monotonicamente para a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  quando para cada  $x \in X$ , a sequência  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é monótona e converge para  $f(x)$ .

**1.3.8 Teorema** (Teorema de Dini). Se a sequência de funções contínuas  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge monotonicamente para a função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  no conjunto compacto  $X$  a convergência é uniforme.

A demonstração do Teorema de Dini pode ser encontrada em (ELON, 2004, p.155) [9].

**1.3.9 Teorema** (Teorema da aproximação de Weierstrass). *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  compacto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então  $f$  pode ser aproximada uniformemente por polinômios.*

A demonstração do teorema da aproximação de Weierstrass pode ser encontrada em (BARTLE, 1964, p.183) [1].

**1.3.10 Teorema** (Lema Fundamental do Cálculo Variacional). *Se  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são funções contínuas definidas no intervalo  $[x_0, x_1]$  e se*

$$\int_{x_0}^{x_1} \alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)dx = 0 \quad (1.2)$$

*para toda função  $h(x) \in C^1$ , tal que  $h(x_0) = h(x_1) = 0$ , então  $\beta(x)$  é diferenciável e  $\beta'(x) = \alpha(x)$  para todo  $x \in [x_0, x_1]$ .*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (GELFAND, 2000, p.11) [7].

**1.3.11 Teorema** (Equação de Euler-Lagrange). *Se  $y \in C^2([x_0, x_1])$  é um extremo do funcional  $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ , com  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$  então  $y = y(x)$  satisfaz a equação*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.3)$$

*Demonstração.* Seja  $F(x, y, y') \in C^2$  uma função com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas e  $\eta \in C^2$ , tal que  $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ . Considere a função  $y_\delta = y + \delta\eta$ , definida no mesmo intervalo de  $F$ , tal que  $\delta$  é um número real suficientemente pequeno, isto é,  $y + \delta\eta$  é uma espécie de perturbação na função  $y(x)$  que não altera seu valor nos extremos  $x_0$  e  $y_0$ .

Note que se  $\delta = 0$  então  $y_\delta = y$  e que  $y_\delta = y$  se nos extremos  $x_0$  e  $x_1$ .

Mas se  $y(x)$  é curva que minimiza o funcional  $J$  então  $J[y] \leq J[y_\delta]$ . Além disso, se  $\delta = 0$  então

$$\frac{dJ[y + \delta\eta]}{d\delta} = 0. \quad (1.4)$$

Derivando  $J[y + \delta\eta]$  em relação a  $\delta$ , temos

$$\frac{\partial J[y + \delta\eta]}{\partial\delta} = \frac{\partial}{\partial\delta} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta\eta, y' + \delta\eta') = 0 \quad (1.5)$$

Como  $F \in C^1$

$$\frac{\partial}{\partial\delta} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta\eta, y' + \delta\eta') = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\delta} F(x, y + \delta\eta, y' + \delta\eta') = 0. \quad (1.6)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\delta} F(x, y + \delta\eta, y' + \delta\eta') = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\delta} + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx = 0. \quad (1.7)$$

Mas como  $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\delta} = 0$ , temos que

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx = 0. \quad (1.8)$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional 1.3.10,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right).$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{dF}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

□

## Capítulo 2

# Um Problema Básico de Navegação - Localização no Plano

O avanço da matemática, durante a ascensão do império da grego antigo, foi auxiliado por três importantes instrumentos: régua, compasso e inteligência humana. A versatilidade desses instrumentos permitiram que sua utilização se estendesse desde os filósofos gregos até, mais recentemente, pedreiros e navegadores.

A consagração dessas ferramentas deu-se com a publicação, por volta do século III a.C., do livro conhecido por Elementos de Euclides. No ensino da matemática, até não muito tempo atrás, o livro era parte da bibliografia fundamental na formação de qualquer aluno. Porém, observamos hoje um certo esquecimento em relação à forma de pensar e produzir matemática a partir de construções com régua e compasso. Pensando nisso, este capítulo apresenta um interessante problema de navegação cuja solução vai mostrar uma aplicação bastante concreta das construções com essas ferramentas importantes, com uma abordagem moderna utilizando o software GeoGebra que simula o uso desses instrumentos.

As funcionalidades do software são simples e a proposta de atividade é uma adaptação da disponível em <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/996>, consultada em 19 de fevereiro de 2018.

## 2.1 A proposta de atividade

A proposta consiste em um desafio de localização no plano. Foi aplicada em uma turma de 9<sup>o</sup> ano de uma escola municipal na zona oeste da cidade do Rio de Janeiro, como alunos na faixa etária de 14 a 17 anos em um encontro de 100 minutos ocorrido em 19 de agosto de 2018. Pode ser feita individualmente, como foi feito para esta dissertação, ou em grupo. O material necessário é reduzido e não exige trabalhos manuais elaborados. São necessários apenas a carta náutica, entregue aos alunos, a folha do aluno com a proposta, uma sala equipada com um projetor e um computador com capacidade para executar o programa de geometria dinâmica GeoGebra.

Os alunos não tinham nenhuma familiaridade com as funcionalidades do GeoGebra e foi necessário realizar uma aula de 50 minutos no dia anterior ao da proposta, para que fossem explicadas as funcionalidades básicas do programa. Além disso, estávamos em pleno processo de ensino de ângulos e trigonometria, estando assim os alunos familiarizados com as noções de ângulo, segmento de reta, arco, etc. Cabe lembrar também que eles não tinham conhecimento formal algum sobre lugares geométricos e do teorema do ângulo inscrito no momento da aplicação.

A proposta também pode ser realizada com auxílio de régua, compasso, par de esquadros e transferidor em turmas que já tenham familiaridade com os instrumentos e conhecimentos significativos sobre construções geométricas e sobre o conceito de lugar geométrico.

Cabe lembrar que é importante explicar alguns termos utilizados na proposta para que o problema fique de fato contextualizado e conectado com a realidade. Tais termos foram discutidos no primeiro capítulo desta dissertação e cabe ao professor, no momento oportuno da atividade, explicar aos alunos o significado dessas expressões.

A ideia central da atividade é que de forma empírica, utilizando apenas a própria imaginação, os alunos tentem encontrar a solução do problema e em seguida aprimorem os resultados obtidos utilizando método indutivo para ao menos se aproximarem na solução do problema.

O prolema proposto e a pergunta a ser feita aos alunos são:

“Você está perdido no mar, mas consegue avistar três pontos que estão indicados na sua carta náutica: o farol 01, o rochedo e a boia. Pela escala da carta náutica você sabe a distância entre estes três pontos. Além disso, do ponto em que seu barco se encontra, você conseguiu mensurar um ângulo de  $70^\circ$  entre o farol 01 e o rochedo e  $60^\circ$  entre o rochedo e a boia. Com estas informações, qual é o local do seu barco na carta náutica?”

Propomos que cada aluno escolha quatro pontos na carta náutica que lhes pareçam bons candidatos para o local do barco. O material do aluno engloba a carta náutica em branco (ANEXO 1) e folha de proposta, composta pelo texto do problema e uma tabela para os alunos anotarem as coordenadas dos pontos e as medidas dos ângulos obtidas pelo software.

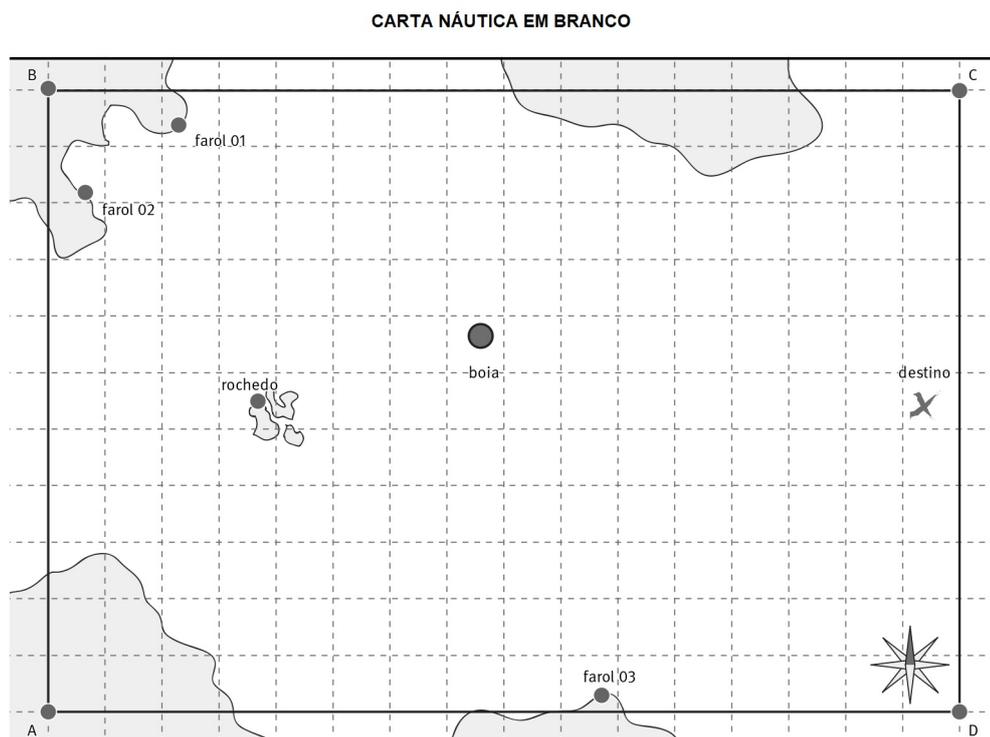


Figura 2.1: carta náutica em branco

Fonte: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/996>

	Coordenadas	Ângulo que enxerga farol 01–rochedo	Ângulo que enxerga rochedo–boia
Ponto 1			
Ponto 2			
Ponto 3			
Ponto 4			

Figura 2.2: Tabela do aluno

Adaptada de <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/996>

Para facilitar esse trabalho, oriente os estudantes a transformem a carta náutica em um plano cartesiano, considerando o ponto A como origem do sistema de coordenadas e que ele escreva os pares ordenados correspondentes aos pontos escolhidos para facilitar a identificação. Isso pode ser feito projetando a imagem da carta com um datashow na lousa branca.

Marcado o primeiro ponto, os alunos devem coletar a medida do ângulo sob o qual este enxerga o segmento de extremos *farol01* e *rochedo* (daqui pra frente denotado por *farol01 – rochedo*) e a medida do ângulo sob o qual este mesmo ponto enxerga o segmento de extremos *rochedo* e *boia* (daqui pra frente denotado por *rochedo – boia*). Isso pode ser feito facilmente traçando os segmentos que ligam o ponto sugerido para localização do barco a cada uma das referências e, então, usando o transferidor para medir os ângulos ou editando as coordenadas do ponto no Geogebra e em seguida clicando no menu ângulo e escolher os três pontos na ordem *farol01/barco/rochedo* e *rochedo/barco/boia*.

É natural que os primeiros palpites sejam ruins. Incentive seus alunos a refinarem a escolha dos pontos, mesmo que isso resulte em mais do que quatro pontos. Não se esqueça de pedir a eles para anotar os pontos na carta náutica, indicando as coordenadas e as medidas dos respectivos ângulos no espaço reservado na folha de proposta.

### 2.1.1 Análise das respostas de acordo com a intuição dos alunos

Para ajudarmos os alunos a encontrar as medidas dos ângulos sem o uso do transferidor ou refinar as suas escolhas, precisamos fazer uma adaptação da carta náutica para

o programa GeoGebra. Tais adaptações foram feitas de forma que a carta ficou como ilustra a imagem abaixo:

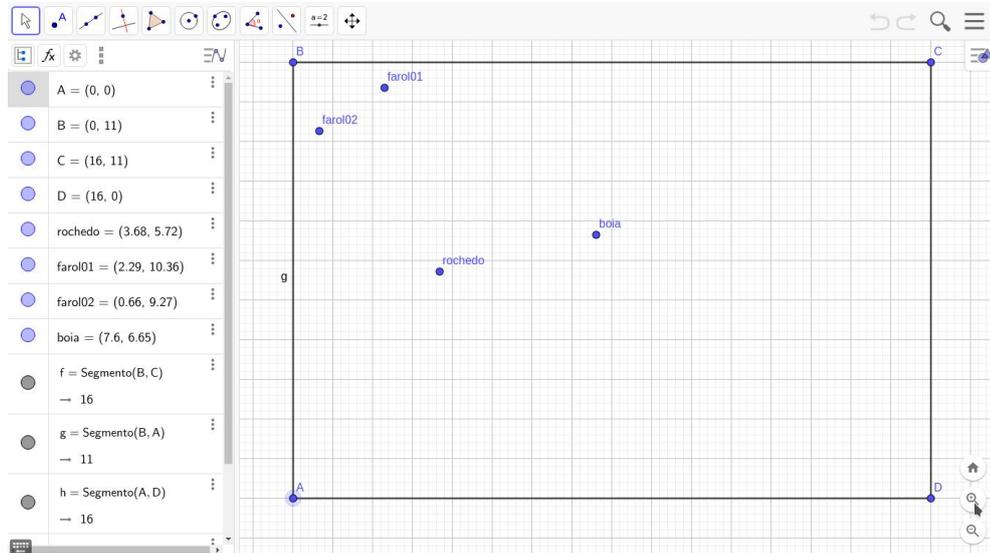


Figura 2.3: Carta náutica adaptada

Para reproduzir a mesma carta em branco (Figura 2.3), basta criar os elementos indicados na barra lateral do lado esquerdo do GeoGebra e, se preciso, editar as coordenadas dos pontos usando os recursos do software.

Observe a Figura 2.4 e veja como fica a indicação do ângulo no GeoGebra quando o programa exibe as medidas de um ponto escolhido pelo primeiro aluno a dar duas sugestões, os pontos (5, 2) e (1, 1).

Na figura 2.4, a medida exibida em verde corresponde ao ângulo no qual o barco enxerga o segmento farol01-rochedo e a exibida em vermelho ao ângulo no qual o barco enxerga o segmento rochedo-boia.

Analisando algumas das respostas do aluno, podemos verificar que a medida em que são feitos mais testes, as escolhas vão melhorando e as soluções ficando cada vez mais próximas.

Observe as sugestões apontadas por este aluno:

Note que, ao escolher o ponto (6, 10), apenas na quarta tentativa ele se aproxima das medidas dos ângulos procurados. Ver figuras 2.5 e 2.6.

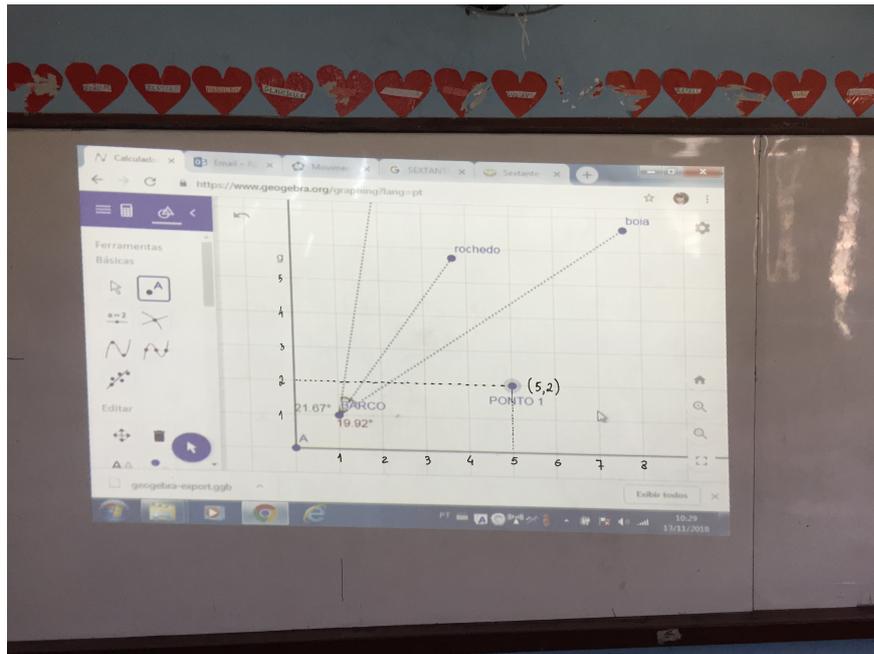


Figura 2.4: Primeira sugestão

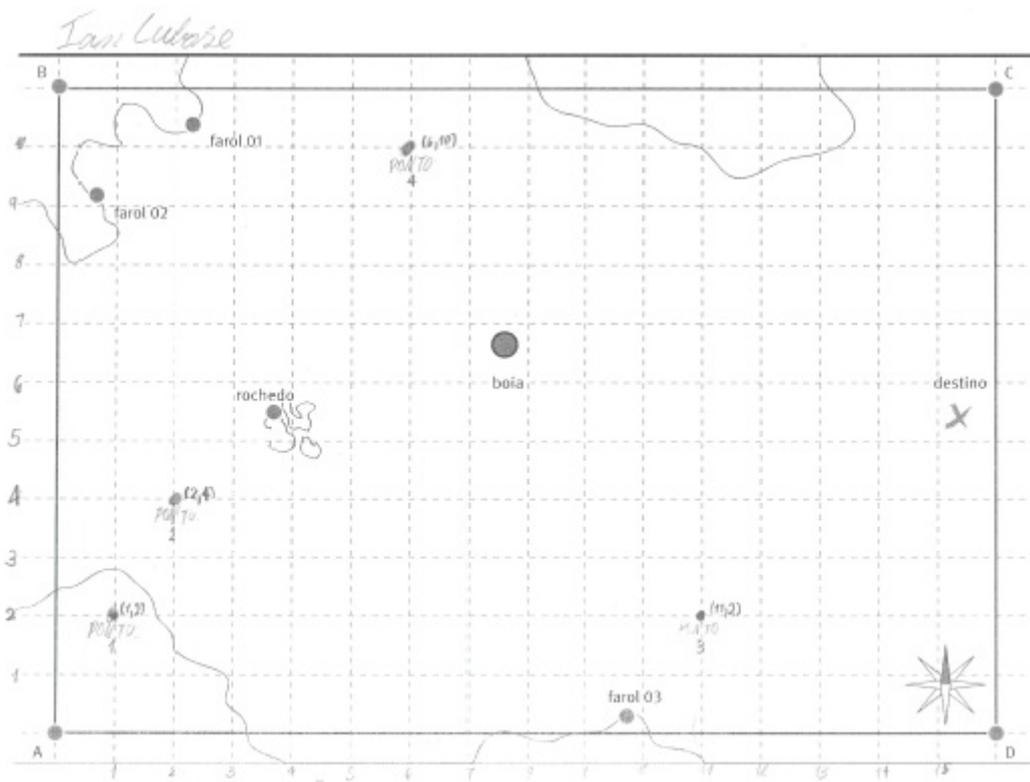


Figura 2.5: Mapa 1

	VERDE Ângulo que enxerga farol 01-rochedo	VERMELHO Ângulo que enxerga rochedo-boia
Ponto 1(1,2)	26,97°	19,14°
Ponto 2(2,4)	41,59°	20,47°
Ponto 3(11,2)	16,9°	26,91°
Ponto 4(6,10)	66,99°	54,97°

Figura 2.6: Pontos 1

Já este outro, conseguiu um resultado satisfatório, não tão próximo como o do anterior, achando o ponto (7, 10) na terceira tentativa. Ver figuras 2.7 e 2.8.

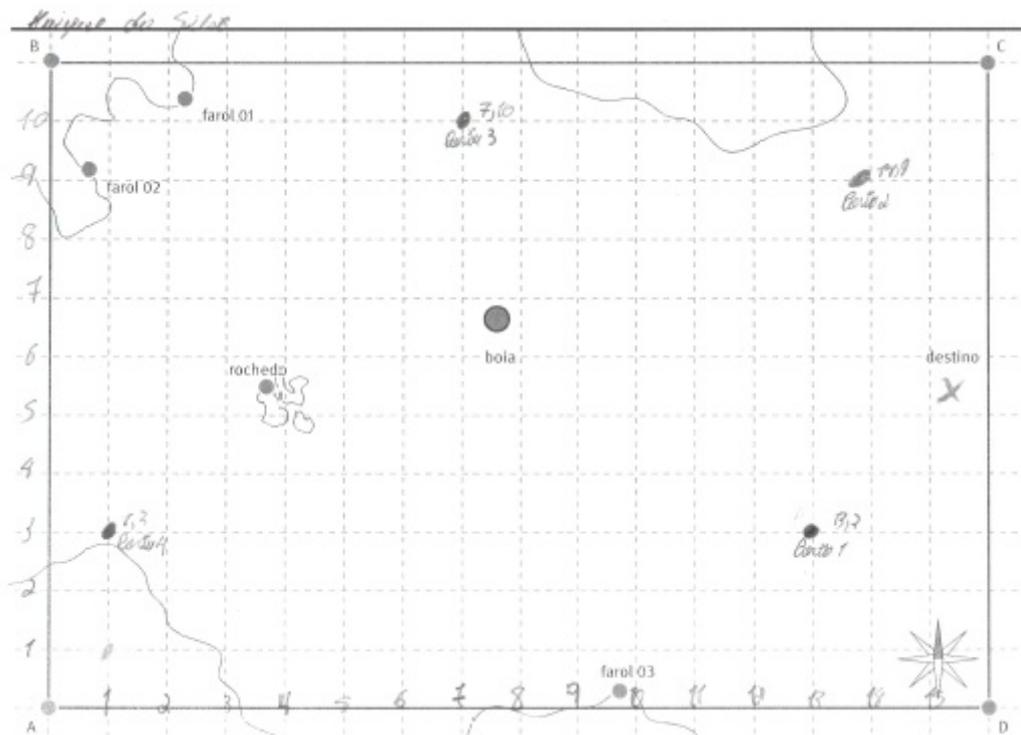


Figura 2.7: Mapa 2

É claro que ele aguardou um pouco para ouvir as sugestões de outros colegas de classe, por isso conseguiu na terceira tentativa. E aqui eu o questionei, quando ele mostrou as suas sugestões, sobre o motivo pelo qual ele não tentou um ponto próximo de (7, 10) na

	<i>rodo</i> Ângulo que enxerga farol 01-rochedo	<i>rochedo</i> Ângulo que enxerga rochedo-boia
Ponto (1,3)	18.23'	14.79°
Ponto (4,9)	24.23°	2.58°
Ponto (4,16)	56.49°	48.08°
Ponto (1,3)	34'	16.56°

Figura 2.8: Pontos 2

4ª tentativa. O aluno argumentou que queria saber quais seriam as medidas dos ângulos caso o barco estivesse localizado mais próximo do eixo vertical.

Agora, esta conseguiu encontrar o ponto (6,9) na segunda tentativa. Ver figuras 2.9 e 2.10.

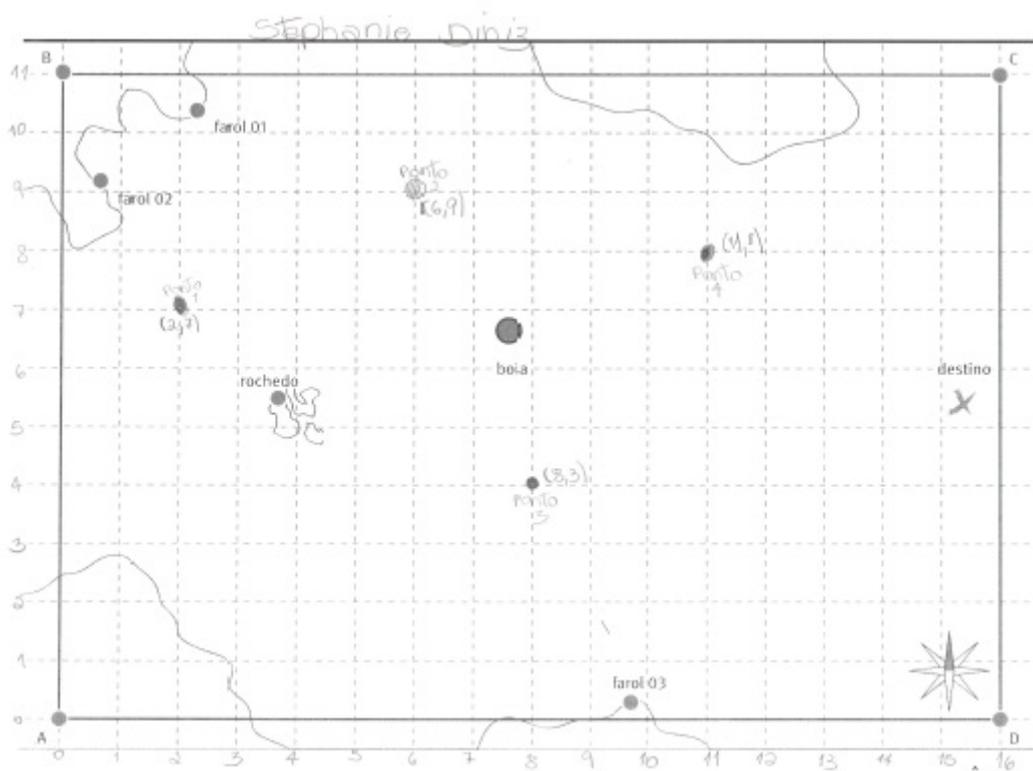


Figura 2.9: Mapa 3

Também questionei o motivo de não ter tentado pontos próximos do ponto (6,9) e

	Verde Ângulo que enxerga farol 01-rochedo	Vermelho Ângulo que enxerga rochedo-boia
Ponto 1 (2,7)	122.37°	33.77°
Ponto 2 (6,9)	74.77°	69.6°
Ponto 3 (8,3)	20.03°	51.6°
Ponto 4 (11,8)	32.43°	4.41°

Figura 2.10: Pontos 3

ela me respondeu que não acreditava poder se aproximar mais dos ângulos procurados e resolveu tentar outros pontos do plano pra observar as medidas.

Para encerrar esta análise, temos a resposta apresentada por este aluno:

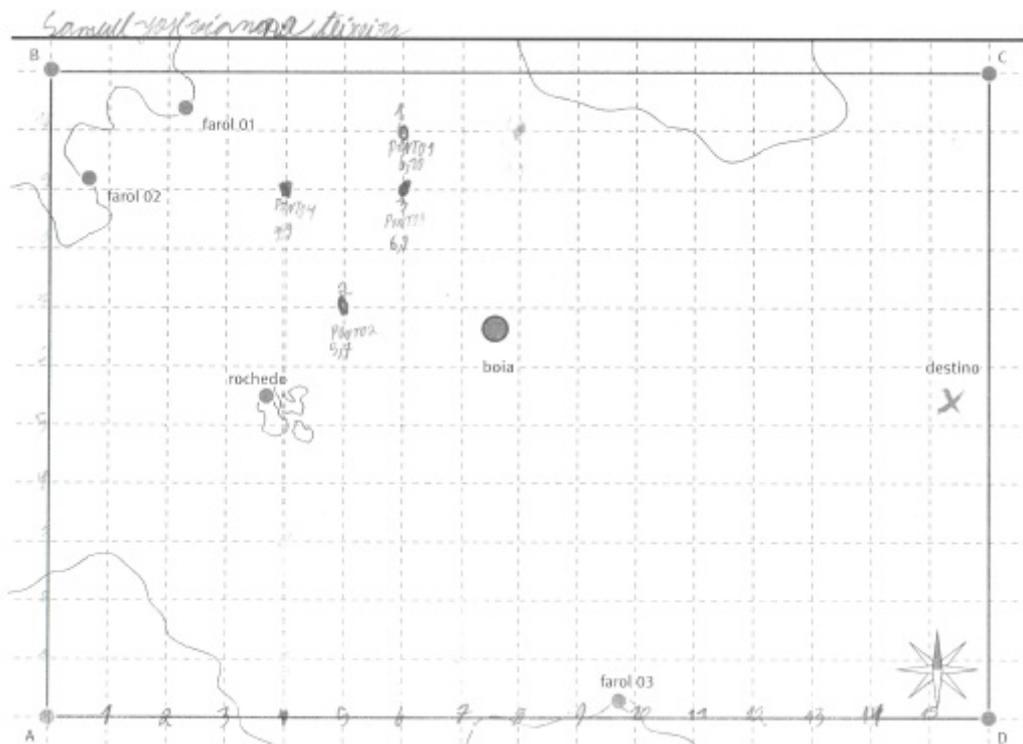


Figura 2.11: Mapa 4

Note que suas melhores sugestões, os pontos (6, 10) e (6, 9), foram na primeira e na terceira tentativa, respectivamente. Ver figuras 2.11 e 2.12.

	VERDE Ângulo que enxerga farol 01-rochedo	VERMELHO Ângulo que enxerga rochedo-boia
Ponto 1	66,99	54,07
Ponto 2	95,72	128,37
Ponto 3	74,67	69,6
Ponto 4	122,83	62,52

Figura 2.12: Pontos 4

Quando o questionei sobre como encontrou esses pontos ele respondeu que, ao observar as sugestões de outros colegas, percebeu que o ponto procurado só poderia estar naquela região do mapa. Deste modo, ele deu um palpite para o primeiro ponto, entendeu que deveria aproximar mais o ponto dos segmentos para aumentar os ângulos e deu um palpite para o segundo ponto, notou que os ângulos acabaram aumentando muito e resolveu voltar para mais próximo do ponto (6, 10). Por fim, disse ele ter escolhido o quarto ponto para ver o que aconteceria isoladamente com o ângulo em que enxergaria o segmento *rochedo – boia*. Ver figuras 2.12 e 2.11.

Utilizando o software Geogebra é possível movimentar o ponto escolhido para a localização do barco e exibir os ângulos em que esse ponto enxerga os segmentos *farol01-rochedo* e *rochedo-boia*. Esta construção é muito interessante para que os alunos aprimorem seus resultados, buscando em todo o plano da carta possíveis candidatos a ponto de localização do barco.

Ao movimentar o ponto correspondente ao barco, de forma empírica, pelo plano da carta náutica adaptada para o Geogebra, o melhor resultado que, junto com os alunos, fui capaz de encontrar foi o ilustrado pela Figura 2.13.

Como podemos ver, os pontos de coordenadas cartesianas inteiras que mais se aproximam da solução exata são os pontos (6, 9) e (6, 10).

Para concluir esta etapa, questione os alunos sobre as estratégias utilizadas para obtenção dos possíveis pontos de localização exata do barco. Pergunte se alguém conhece

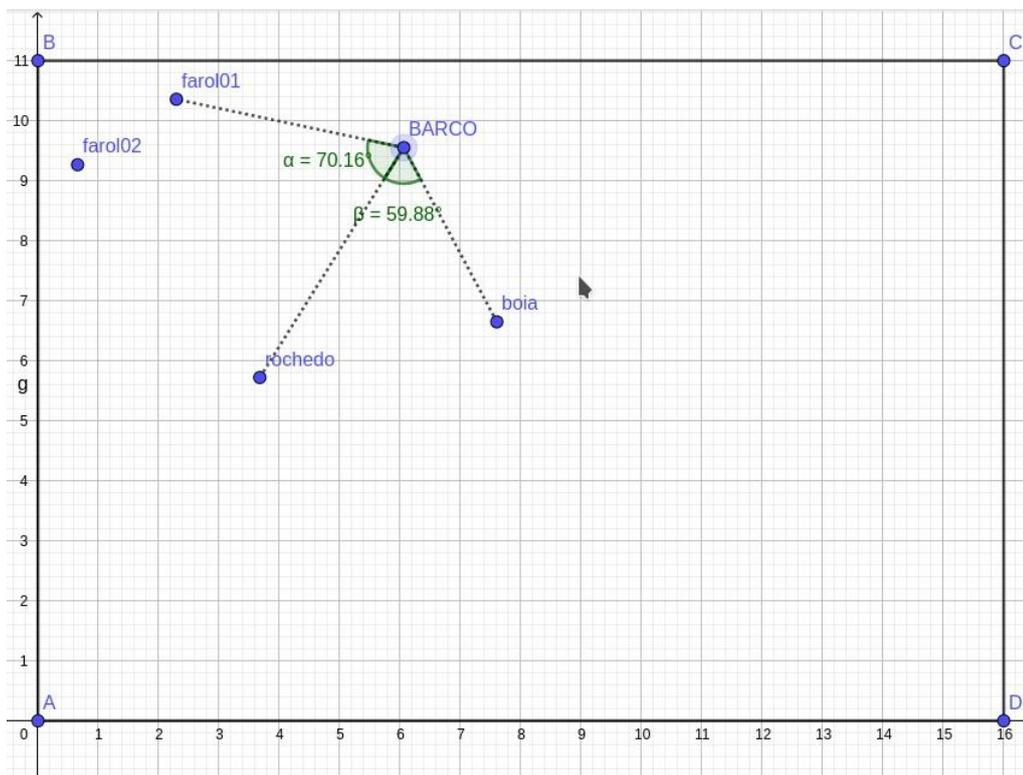


Figura 2.13: Solução aproximada

algum método para obter a localização precisa e finalize dizendo que para encontrar a solução do problema é necessário aprender mais sobre lugar geométrico e, em particular, sobre arco capaz.

Deste modo, encerramos o processo que usa a intuição dos alunos e o método indutivo e passamos para a construção de uma teoria que nos levará a uma solução inatacável do problema. No entanto, para alcançar o ponto em que está localizado o barco de forma analítica, precisamos definir outro lugar geométrico, o arco capaz.

### 2.1.2 Arco capaz

Em geometria plana euclidiana, o conceito de arco capaz como lugar geométrico é caracterizado pela seguinte problema:

Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , qual é o conjunto dos pontos  $M$  do plano tais que o ângulo  $\widehat{AMB}$  é igual a um dado valor constante  $\alpha$ ?

De fato, exceto no caso em que  $A$ ,  $B$  e  $M$  estão alinhados (e neste caso o lugar geométrico pesquisado é a reta que liga os pontos  $A$  e  $B$ ), o lugar geométrico dos pontos  $M$  é um arco do qual o segmento de reta  $\overline{AB}$  é uma corda, chamado o arco capaz do segmento  $\overline{AB}$  de ângulo  $\alpha$ .

Dizemos que  $\overline{AB}$  é visto a partir do arco sob o ângulo  $\alpha$  ou que qualquer ponto do arco  $\widehat{AB}$  enxerga  $\overline{AB}$  sob um ângulo de medida  $\alpha$ .

A solução do problema de localização do barco da proposta de atividade pode então ser obtida se construirmos dois arcos capazes. O primeiro é o lugar geométrico dos pontos  $M$  cujo ângulo formado pelo segmento que une os pontos *farol01* e  $M$  e pelo segmento que une os pontos *rochedo* e  $M$  tenha medida igual a  $70^\circ$ . O segundo é o lugar geométrico dos pontos  $M$  cujo ângulo formado pelo segmento que une os pontos *rochedo* e  $M$  e pelo segmento que une os pontos *boia* e  $M$  tenha medida igual a  $60^\circ$ . O ponto no qual o barco está localizado é a interseção desses dois lugares geométricos, o arco capaz de  $70^\circ$  do segmento de extremos *farol01* e *rochedo* e o arco capaz de  $60^\circ$  do segmento de extremos *rochedo* e *boia*.

O conceito de arco capaz está muito relacionado ao teorema do ângulo inscrito que pode ser considerado como o recíproco.

Os passos para a obtenção do arco capaz de um segmento de reta  $\overline{AB}$  de ângulo  $\alpha$  são os seguintes:

- 1) Desenhe a mediatriz de  $\overline{AB}$ . (Figura 2.14).

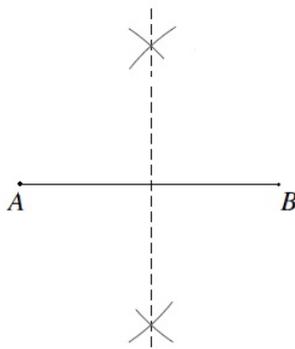


Figura 2.14: Passo 1

Adaptado de <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>

2) Trace a semirreta  $\overrightarrow{AX}$  tal que  $B\hat{A}X = \alpha$ . (Figura 2.15).

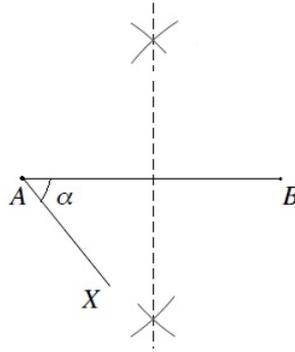


Figura 2.15: Passo 2

Adaptado de <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>

3) Trace por  $A$  a semirreta  $\overrightarrow{AY}$  perpendicular a  $\overrightarrow{AX}$ . (Figura 2.16).

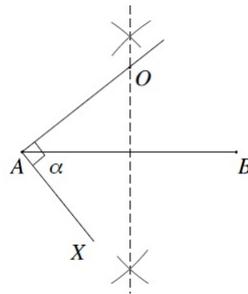


Figura 2.16: Passo 3

Adaptado de <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>

4) A interseção de  $\overrightarrow{AY}$  com a mediatriz é o ponto  $O$ , centro do arco capaz de  $\alpha$  do segmento  $\overline{AB}$ . (Figura 2.17).

Justificativa:

Note que  $B\hat{A}X = \alpha$ , então  $B\hat{A}Y = 90 - \alpha$  e sendo  $M_0$  o ponto médio de  $\overline{AB}$ , temos que  $A\hat{O}M_0 = \alpha$ . Assim,  $A\hat{O}B = 2\alpha$  e, pelo teorema do ângulo inscrito, para qualquer  $M$  pertencente ao arco  $\hat{A}B$ , temos que  $A\hat{M}B = \alpha$ .

Note que se traçarmos  $\alpha$  no outro semiplano definido pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$  teríamos outro arco capaz de  $\alpha$  do segmento  $\overline{AB}$ , que nada mais é que a reflexão do arco  $\hat{A}B$  em relação

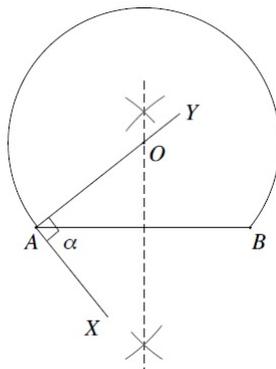


Figura 2.17: Passo 4

Fonte: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>

ao segmento  $\widehat{AB}$ . O centro deste arco é dado pela reflexão do ponto  $O$  também em relação ao segmento  $\overline{AB}$ .

A construção de arcos capazes era uma técnica usada historicamente para determinar a posição dos navios. É um dos métodos anteriormente utilizados pelos navegadores na navegação costeira. O sextante ou octante, quando usado no plano horizontal, é um instrumento que permite medir o ângulo entre dois pontos de referência. Assim, observando no horizonte dois marcos marítimos identificados, como faróis, rochedos, etc., podemos medir o ângulo entre esses dois marcos (pontos), e então traçar, no mapa, o arco capaz corresponde a estes dois pontos do ângulo medido. Repetindo a operação com outros dois pontos de referência, obtemos a posição do navio na intersecção dos dois arcos capazes.

### 2.1.3 Solução analítica utilizando o Software GeoGebra

Para encontrarmos a solução do problema de navegação proposto, partimos novamente da carta náutica adaptada para o GeoGebra, Figura 2.3.

Em seguida, seguimos com a construção dos arcos capazes para determinar a localização do barco. O ponto procurado é a intersecção dos arcos capazes de  $70^\circ$  e  $60^\circ$  dos segmentos *farol01 – rochedo* e *rochedo – boia*, respectivamente.

Trace os segmentos *farol01 – rochedo* e *rochedo – boia* e em seguida suas mediatrizes.

Ver Figura 2.18.

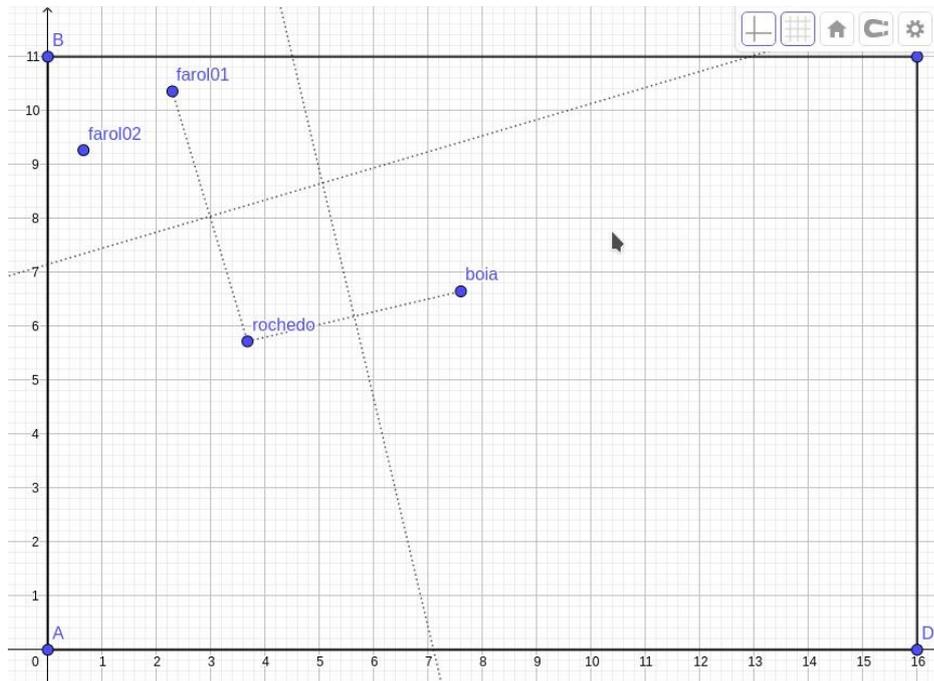


Figura 2.18: Passo 1

Rotacione o ponto *rochedo*  $70^\circ$  em torno do ponto *farol01*. Para fazer isso, vá ao menu ângulo do GeoGebra e selecione a opção rotação em torno de um ponto. Assim, determinamos o ponto *rochedo'*. Faça o mesmo com o ponto *boia*, mas para um ângulo de  $60^\circ$  em torno do ponto *rochedo*. Deste modo, determinamos o ponto *boia'* e para exibir sua medida basta selecionar a opção ângulo do menu no software e clicar nos três pontos *rochedo* – *farol* – *rochedo'* e *boia* – *rochedo* – *boia'*, nesta ordem. Ver Figura 2.19.

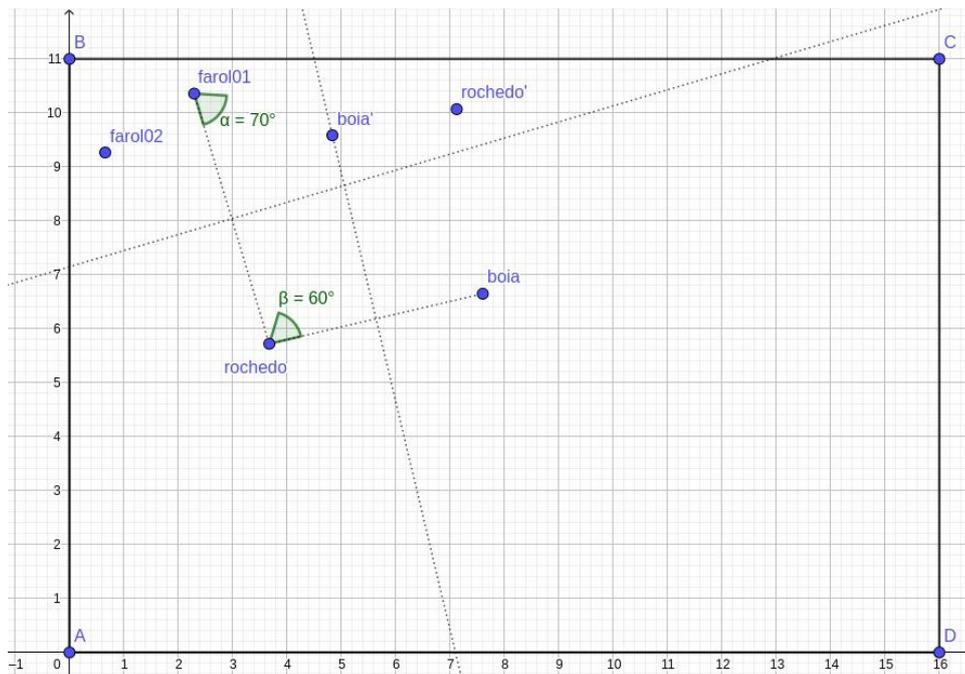


Figura 2.19: Passo 2

Para que a solução fique mais fácil de ser observada, podemos fazer algumas adaptações no GeoGebra para que a alguns elementos sejam suavizados, simulando um traçado fraco ou linhas pontilhadas do desenho geométrico clássico que usa os instrumentos régua, compasso, etc. Deste modo vamos obter o que chamo aqui de uma solução mais limpa para o problema.

Trace os segmentos  $farol01 - rochedo'$  e  $rochedo - boia'$ , depois suas perpendiculares que passam pelos pontos  $farol01$  e  $rochedo$ , respectivamente. A interseção entre essas perpendiculares e as mediatrizes determina os pontos  $E$  e  $F$  da Figura 2.20, centros dos arcos capazes.

Faça a reflexão dos pontos  $E$  e  $F$  com relação aos segmentos  $farol01 - rochedo$  e  $rochedo - boia$ , respectivamente, para determinar os pontos  $E'$  e  $F'$ , que também são centros dos arcos capazes. Trace os círculos de centro em  $E'$  e raio  $E' - rochedo$  e de centro em  $F'$  e raio  $F' - rochedo$  para determinar os arcos capazes. Por fim, determine o ponto  $H$  de interseção entre esses dois círculos. Figura 2.21.

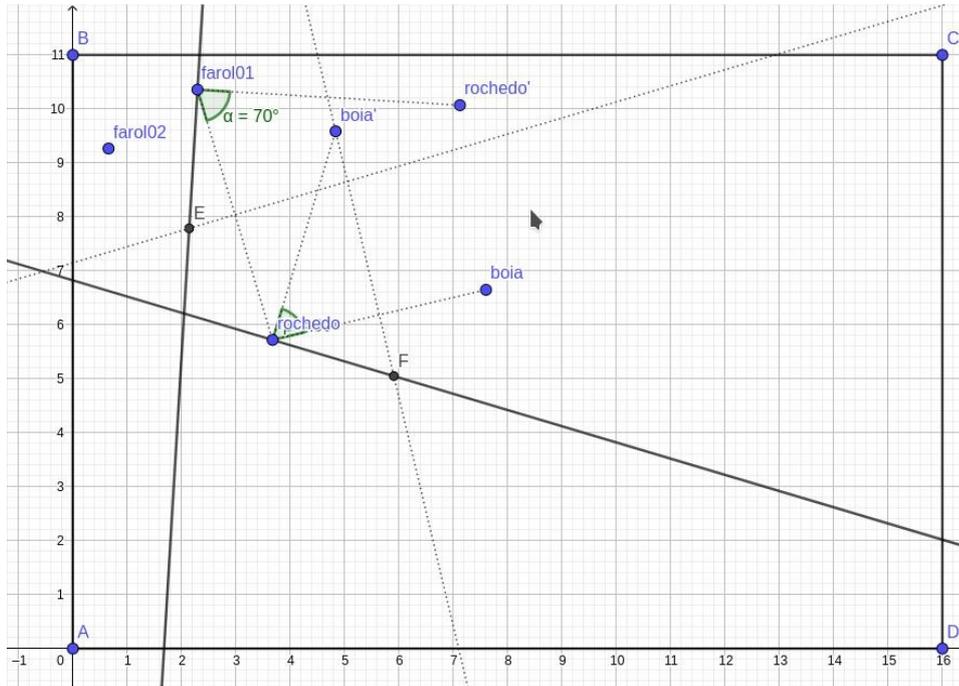


Figura 2.20: Passo 3

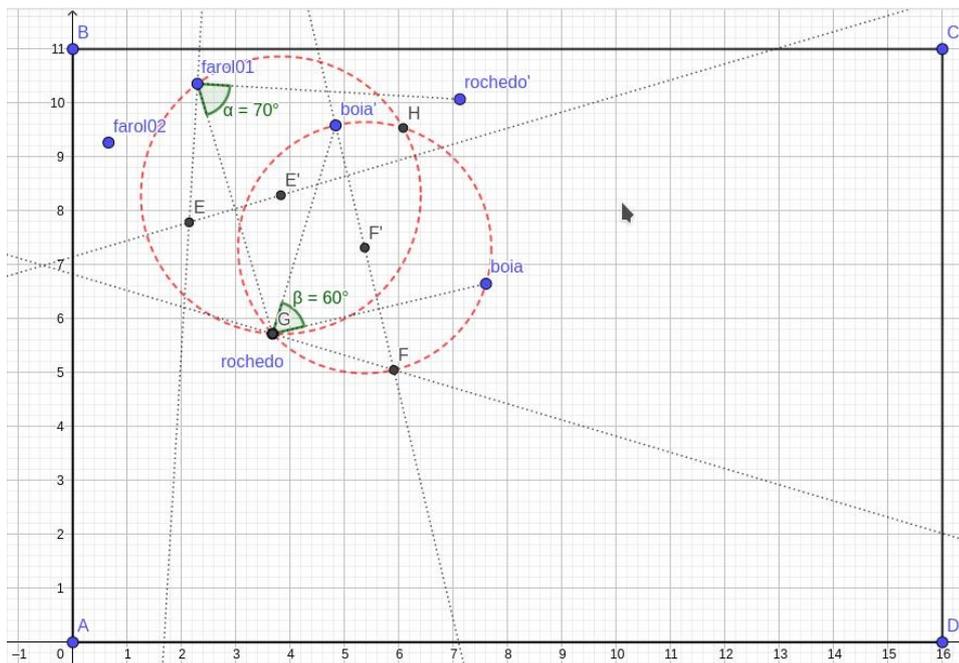


Figura 2.21: Passo 4

Por fim, reflita os arcos capazes em relação aos segmentos *farol01 – rochedo* e *rochedo – boia* para ter certeza de que não há outro ponto possível para a localização do barco. Trace os ângulos para ter certeza de que o ponto *H*, agora renomeado para

BARCO, enxerga os segmentos sob os ângulos dados. Figura 2.22.

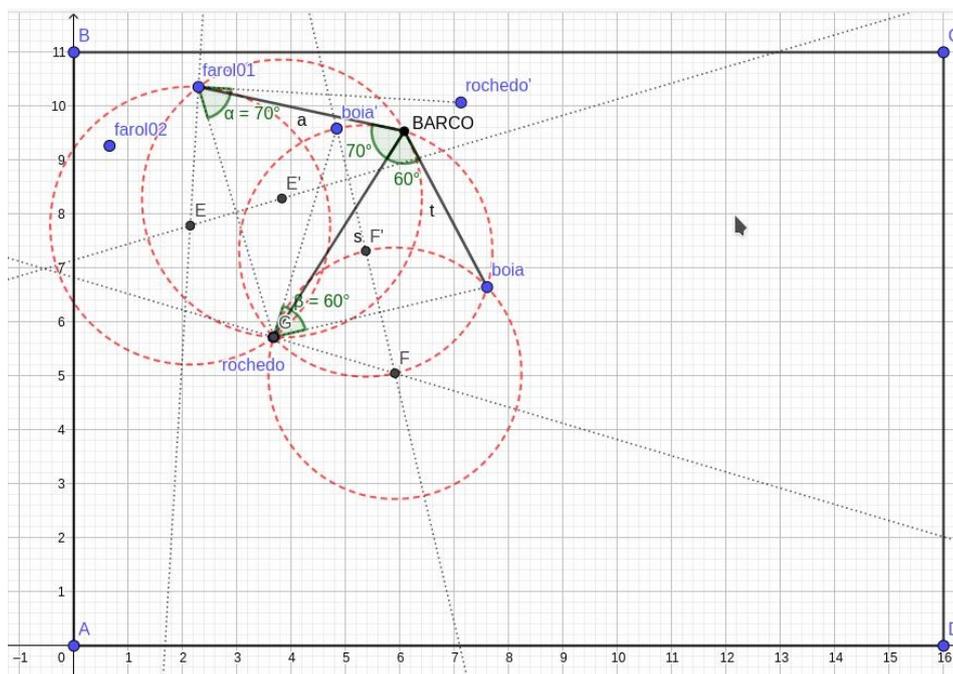


Figura 2.22: Passo 5

Deste modo, encontramos o ponto de localização do barco, cujas coordenadas dadas pelo próprio GeoGebra são (6.08, 9.54).

Como pudemos observar, conseguimos muitas respostas próximas da solução do problema. Claro que, pelo fato do ponto de localização do barco não ter coordenadas inteiras, é inviável pensar que algum estudante ou mesmo um professor conseguiria encontrar a solução por tentativa e erro.

Se o problema fosse montado de forma a possibilitar que a solução fosse um ponto do plano cartesiano de coordenadas inteiras, seria muito provável que um aluno encontrasse rapidamente a localização do barco, dando assim por encerrado qualquer discussão para uma geração que vive dentro de uma cultura imediatista.

Deste modo, entende-se o motivo pelo qual a localização do barco não pode ser um ponto tão simples de se encontrar, para convencer os alunos da importância do método dedutivo e da sua utilização para resolver problemas concretos.

## Capítulo 3

# O Problema da Braquistócrona e a Intuição Humana

No capítulo anterior vimos que o empirismo pode nos ajudar a refinar as soluções do nosso problema e fazer com que fiquemos cada vez mais próximos da solução. Mas será que todo problema tem tal apelo intuitivo?

O problema da braquistócrona consiste em encontrar a curva de menor tempo para uma partícula que se desloca entre dois pontos apenas pela ação da gravidade. A resposta dada pela maior parte dos alunos quando questionados sobre este problema é que o caminho mais curto, ou seja, a linha reta, é a curva que a partícula conseguirá percorrer no menor tempo ligando os pontos extremos do percurso.

Apesar de intuitivamente razoável, a linha reta não é a curva que minimiza o tempo de deslocamento sob a ação da gravidade. Como demonstrado de forma brilhante pelos irmãos Johann (1667-1748) e Jakob Bernoulli (1654-1705).

A solução apresentada por Johann baseou-se em uma analogia com o problema em determinar o caminho percorrido por um raio de luz em um meio com índice de refração variável, método este de difícil aplicação a outros problemas. Já o método utilizado por Jakob na resolução do problema da Braquistócrona, possibilitou a resolução de uma série de problemas, inclusive a de um problema isoperimétrico - em que o perímetro é mantido fixo, proposto como réplica ao problema de seu irmão.

Motivado pelo trabalho dos irmãos Bernoulli, Leonhard Euler (1701-1783), discípulo de Johann, começou a estudar e aprimorar o método utilizado por Jakob e, em 1726, publicou *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente* [4], que apresentava outra versão para o problema da braquistócrona. Mas foi em 1744 que publicou *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* [5], que se tornaria o livro básico para o estudo do cálculo das variações e cujo principal resultado foi a equação (3.1).

$$\frac{\partial F}{\partial F} - \frac{dF}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (3.1)$$

Com o passar dos anos, os matemáticos começaram a sugerir problemas cada vez mais complexos e o método de Euler tornava suas resoluções ainda mais complicadas. Impulsionado pela necessidade de resolvê-los de maneira mais simples, Joseph-Louis Lagrange publicou, em 1762 e 1770, um método geral que tinha desenvolvido para tratar problemas de isoperimetria e de natureza física - problemas de mais rápida queda, que consistia basicamente em trocar a função  $y(x)$ , presente nas integrais que se desejavam minimizar, pela função  $y(x) + \delta y(x)$ . Posteriormente, Euler adotou a notação apresentada por Lagrange e nomeou  $\delta y(x)$  de variação da função  $y(x)$  e  $\delta I$  de variação da integral, originando assim, o Cálculo das Variações. Com esta e muitas outras contribuições à matemática, Lagrange tornou-se um dos mais notáveis matemáticos do século XVIII.

### 3.1 Apresentação do problema

Façamos então uma nova experiência com a mesma classe de estudantes que participou da proposta de atividade vista no capítulo anterior. Esta bem mais simples, inclusive utiliza bem menos recursos, consiste apenas em mostrar uma imagem aos alunos e em seguida exibir um vídeo para comprovar que neste caso a intuição humana pode falhar miseravelmente, de modo que fica evidente a necessidade de utilização ou construção de uma teoria para alcançarmos a solução de um problema mais complexo como este.

Como dito anteriormente a classe de estudantes é a mesma da proposta de atividade

do capítulo 2 e foi realizada um dia após a atividade de localização no plano. Os alunos presentes na classe eram exatamente os mesmos. O tempo para esta atividade é mais curto, pode ser realizado em apenas 10 minutos. A ideia é mostrar para os mesmos estudantes que não podemos confiar cegamente em nossa intuição, pois há momentos em que ela pode nos enganar, daí a importância da utilização do método dedutivo para a obtenção das soluções analíticas.

ObsERVE a Figura 3.1 do problema proposto aos alunos:



Figura 3.1: Problema

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=9SyWDWgf2RU>

A pergunta a ser feita e o comando são bem simples:

Ao deslizar pelas curvas da imagem, em qual delas a bola atingirá o final do percurso no menor tempo? Podem levantar a mão aqueles que pensam ser a linha reta.

Conforme podemos observar, a resposta é quase unânime.

No entanto, ao observar a realização do experimento no vídeo, nos deparamos com uma nítida contradição entre o processo empírico e a construção intuitiva da solução do problemas. Isso demonstra a importância do empirismo e da observação, fatores predominantes no método indutivo.



Figura 3.2: Resposta



Figura 3.3: Curva de menor tempo

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=9SyWDWgf2RU>

Deste modo, apesar do método indutivo não nos fornecer a solução do problema em si, mas é sim este método o chamariz para a busca dos conceitos previamente estabelecidos e a construção do caminho para a aplicação do método dedutivo para encontrarmos a resposta definitiva.

## 3.2 Formulação do problema

Dados dois pontos  $A(x_0, y_0)$  e  $B(x_1, y_2)$  do plano  $Oxy$  (Figura 3.4), qual a curva que uma partícula de massa  $m$  deve percorrer apenas sob a ação da gravidade, sem atrito, para que o tempo de deslocamento entre os pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  seja mínimo?

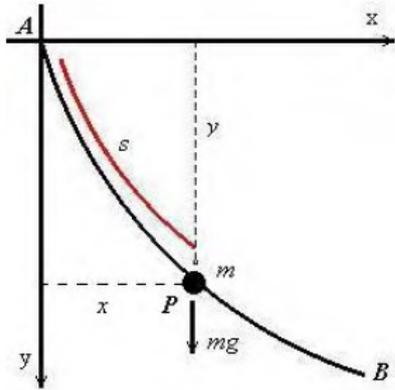


Figura 3.4: Esquema no plano

Adaptado de <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/szani/bra/node5.html>

Pelo lei de conservação de energia temos que

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.2)$$

ou seja,

$$v^2 = 2gy. \quad (3.3)$$

Mas  $v = \frac{dS}{dt}$ , onde  $S$  é o comprimento da curva. Portanto, substituindo 3.3 em 3.2, temos que

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = 2gy. \quad (3.4)$$

Logo,

$$\frac{dS}{\sqrt{2gy}} = dt. \quad (3.5)$$

Mas sabemos que

$$dS = \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3.6)$$

Daí, substituindo na equação (3.5) e integrando em ambos os lados, temos que

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \int_{x_0}^{x_1} dt. \quad (3.7)$$

e conseqüentemente

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (3.8)$$

Como queremos minimizar o tempo  $t$ , temos que o nosso funcional a ser minimizado é

$$J[x, y, y'] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (3.9)$$

Para resolver esse problema temos a equação de Euler-Lagrange (Teorema 1.3.11).

### 3.3 Solução do problema

Note que, neste caso, o integrando não depende de  $x$ , mas  $y$  e  $y'$  dependem. Assim, usando a regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{dF}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot y' - \frac{\partial F}{\partial y'} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot y'' = 0 \quad (3.10)$$

Multiplicando (3.10) por  $y'$  temos

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' - \frac{\partial F}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot (y')^2 - \frac{\partial F}{\partial y'} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot y'' y' = \frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Integrando em ambos os lados, temos que a equação de Euler-Lagrange tem a forma

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = k \quad (3.12)$$

onde  $k$  é uma constante.

Usando (3.12) no integrando de  $J[y]$  temos

$$\sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{(1 + (y')^2)(2gy)}} = k.$$

Multiplicando ambos os lados por  $\sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$ , temos

$$1 + (y')^2 - (y')^2 = k \cdot \sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Eliminando  $(y')^2$  e elevando ao quadro ambos os lados, temos

$$1 = k^2(1 + (y')^2)2gy.$$

$$\frac{1}{k^2 2g} = (1 + (y')^2)y.$$

Se fazemos  $\frac{1}{k^2 2g} = k_1$ , então

$$k_1 = (1 + (y')^2)y$$

Isolando  $y'$ , temos

$$y' = \sqrt{\frac{k_1 - y}{y}} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k_1 - y}{y}}$$

Fazendo  $dx = \sqrt{\frac{y}{k_1 - y}} dy$  e integrando ambos os lados, temos

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{k_1 - y}} dy$$

Fazendo a substituição trigonométrica  $y = k_1 \sin^2(\theta/2)$  e  $dy = k_1 \cdot \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta$ , temos

$$x = \int \sqrt{\frac{k_1 \sin^2(\theta/2)}{k_1 - k_1 \sin^2(\theta/2)}} \cdot k_1 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta$$

Passando a constante para fora e simplificando o integrando, temos

$$x = k_1 \int \sqrt{\frac{\sin^2(\theta/2)}{1 - \sin^2(\theta/2)}} \cdot \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta = k_1 \int \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \cdot \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta$$

$$x = k_1 \int \sin^2(\theta/2) d\theta = k_1 \cdot \frac{1}{2}(\theta - \sin(\theta)) + k_2$$

Se a curva parte da origem do sistema, como na Figura 3.4,  $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ , a constante  $k_2 = 0$ .

Usando a identidade trigonométrica  $\sin^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\theta))$  e fazendo  $k_1 \cdot \frac{1}{2} = K$ , concluimos que a curva  $y$  que otimiza o funcional de tempo em uma queda livre tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = K(\theta - \sin(\theta)) \\ y = K(1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

A curva é um arco de cicloide, que apesar de estar invertido, tem as mesmas equações paramétricas de 1.3.1, pois orientamos o eixo das ordenadas para baixo como seu sentido positivo.

Para completar, devemos notar que além de satisfazer as equações de Euler-Lagrange, que nos fornecem uma condição necessária para que uma certa curva  $y$  seja extremo de

um funcional  $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ , a curva parametrizada por 1.3.1 satisfaz condições suficientes de Weierstrass para que seja mínimo de um funcional. Para mais detalhes sobre as condições de Weierstrass o leitor pode consultar [7].

Deste modo, concluímos que o arco de cicloide é a solução do problema da braquistócrono, ou seja, é a curva que minimiza o tempo de deslocamentos de uma partícula que se desloca entre dois pontos apenas sob a ação da gravidade.

Para convencer os alunos de que esse é um problema concreto, pergunte a eles qual deve ser a curva feita por uma pista de halfpipe para uma competição de skate ou snowboard, a fim de que o desportista atinga o ponto mais baixo da pista no menor tempo possível.

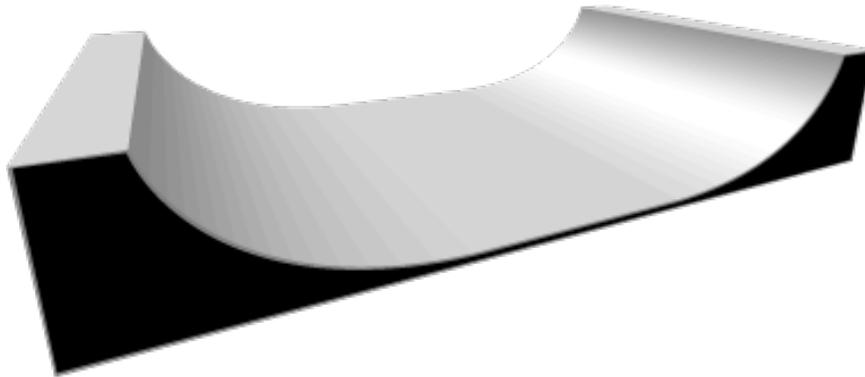


Figura 3.5: Formato de uma pista de halfpipe  
Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Half-pipe>

## Capítulo 4

# A Poligonal de Euler-Cauchy e o método indutivo

Como vimos no capítulo anterior, um problema como o da braquistócrona, pode contrariar a intuição humana, tornando assim o método indutivo capaz apenas de indicar que nossa imaginação pode falhar, mas sendo incapaz de trazer boas respostas ou indicativos fortes para a solução do problema. Vimos também que a curva que minimiza o tempo de deslocamento de uma partícula sob a ação da gravidade é um arco de cicloide, resposta essa obtida através da equação de Euler-Lagrange, uma equação diferencial.

Seriam então as equações diferenciais um tema que sempre confunde a razão humana ou contraria nossa intuição, sendo assim um tópico onde o método indutivo seria inútil para bons indicativos de soluções? Seria o método indutivo algo que só surte efeito para problemas do ensino básico, visto que funcionou bem para obtermos boas aproximações para a proposta de atividade de localização no plano e não nos ajudou muito para a solução do problema da braquistócrona? Definitivamente não, como veremos a seguir.

Um método que utiliza um forte apelo intuitivo para obtenção de aproximações para a solução de algumas equações diferenciais. É o método da poligonal de Euler-Cauchy. Trata-se da construção de uma linha poligonal que se aproxima de uma curva, neste caso a solução do problema de valor inicial, conforme aumenta-se o número de pontos que a compõem. Neste caso, a construção da poligonal tem um grande apelo ao método indutivo

de raciocínio. Obtemos uma sequência de seguimentos de retas que são boas aproximações locais.

Visto isso, podemos fazer uma variação no método da poligonal de Euler-Cauchy para encontrarmos uma forma mais elementar de demonstrar o Teorema de Peano, que garante a existência das soluções de equações diferenciais com determinadas hipóteses. A demonstração que utiliza esse método tem um apelo indutivo muito maior que a demonstração usual que utiliza resultados muito fortes de análise matemática, como os Teoremas de Picard 4.3.1 e Arzelà–Ascoli 4.3.2.

Para estudarmos esse método faz-se necessário que algumas definições e teoremas sobre equações diferenciais sejam enunciado.

## 4.1 Definições de Equações Diferenciais

Sejam  $\Omega$  um subconjunto do espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ , onde  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais e  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  é um espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Denotaremos por  $(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $\mathbb{E}$  um ponto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ .

**4.1.1 Definição.** *Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  uma função contínua e  $I$  um intervalo da reta. Uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$  chama-se solução da equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

no intervalo  $I$  se:

(i) o gráfico de  $\varphi$  em  $I$ , isto é,  $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$  está contido em  $\Omega$  e

(ii)  $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ . Se  $t$  é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

A equação  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$  chama-se equação diferencial ordinária de primeira ordem e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x)$$



Ao invés dessa, usamos a forma

$$v_0 = u_0, \quad v_{i+1} = v_i + h \cdot \max\{f(t, x); t_i \leq t \leq t_{i+1}, v_i - 3Mh \leq x \leq v_i + Mh\}, \quad (4.2)$$

onde  $|f(t, x)| \leq M$  em  $J \times \mathbb{R}$ .

Como no método clássico da poligonal de Euler-Cauchy a solução aproximada  $v(t)$  é construída unindo os pontos  $(t_i, v_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) por uma linha poligonal. Essa construção feita com os parâmetros  $h, h/2, h/4, \dots$ , leva a uma sequência monótona decrescente de soluções aproximadas, o que iremos provar utilizando o princípio da indução matemática. Tal sequência converge uniformemente e seu limite é solução do problema de valor inicial (4.1).

Para provar que essa sequência de soluções aproximadas é monótona decrescente usaremos a seguinte notação:  $h = T/n > 0$  é fixado,  $t_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),  $(v_i) = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  é construída de acordo com (4.2) e com o parâmetro  $h$ ,  $(w_i) = (w_0, w_{1/2}, w_1, w_{3/2}, \dots, w_n)$  é construída similarmente, mas com o parâmetro  $h/2$ ,  $v(t)$  e  $w(t)$  são funções contínuas, poligonais (linear por partes), satisfazendo  $v(t_i) = v_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $w(t_i) = w_i$  para  $i = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, n$ .

Seja  $R(t, x, h)$  o retângulo  $[t, t+h] \times [x-3Mh, x+Mh]$ ,  $R_i = R(t_i, v_i, h)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) e  $S_i = R(t_i, v_i, h/2)$  ( $i = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, n$ ).

Nessa notação, as sequências  $(v_i)$  e  $(w_i)$  são definidas como segue

$$v_0 = w_0 = u_0, \quad v_{i+1} = v_i + h \cdot \max f(R_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad w_{i+1/2} = w_i + (h/2) \cdot \max f(S_i).$$

onde  $\max f(A) = \max\{f(t, x); (t, x) \in A\}$

Vamos provar por indução em  $i$  que  $w(t) \leq v(t)$  em  $J$ . E aqui fica claro o forte apelo indutivo desta demonstração. O uso do princípio da indução matemática, que conecta os métodos indutivo e dedutivo é a chave para esta prova.

Por definição, temos que  $v_0 = u_0 = w_0$ . Vamos assumir que  $i$  é um inteiro não negativo e que  $w(t) \leq v(t)$  para  $0 \leq t \leq t_i$  (hipótese de indução). Então existem dois

casos para serem considerados.

$$(a) w_i \leq v_i - Mh; \quad e \quad (b) v_i - Mh < w_i \leq v_i$$

$$(a) w_i \leq v_i - Mh$$

$$w_{i+1/2} = w_i + (h/2) \cdot \max f(S_i)$$

$$(h/2) \cdot \max f(S_i) \leq (h/2) \cdot M$$

$$\text{Assim, } w_{i+1/2} \leq v_i - (h/2) \cdot M.$$

Logo,  $w(t) \leq v(t)$  para  $t_i \leq t \leq t_{i+1/2}$ .

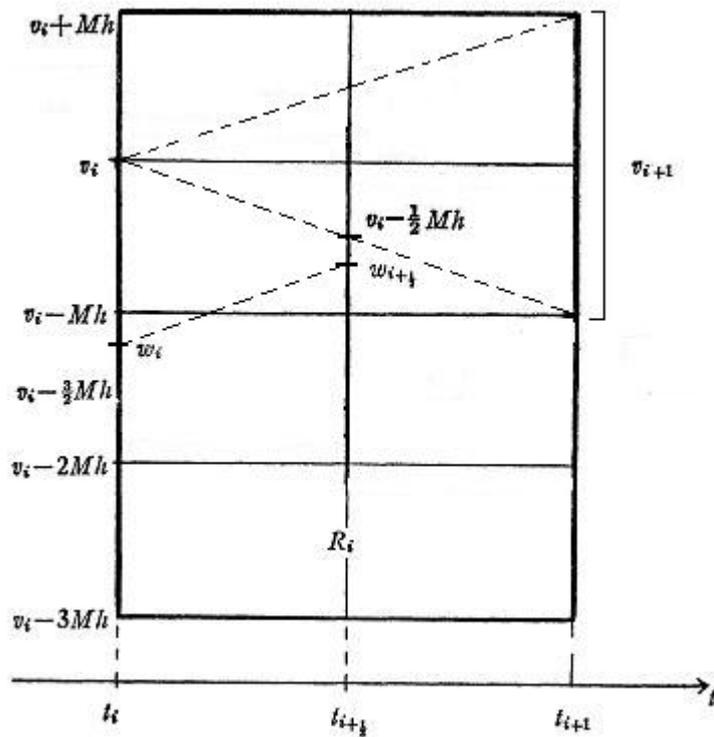


Figura 4.1:  $w_i \leq v_i - Mh$

Adaptada de [15]

(b)  $v_i - Mh < w_i \leq v_i$

$$w_{i+1/2} = w_i + (h/2) \cdot \max f(S_i)$$

$$w_{i+1/2} \leq v_i + (h/2) \cdot M$$

Como  $S_i \subset R_i$ , temos que  $\max f(S_i) \leq \max f(R_i)$ .

Portanto,  $w(t) \leq v(t)$  para  $t_i \leq t \leq t_{i+1/2}$ .

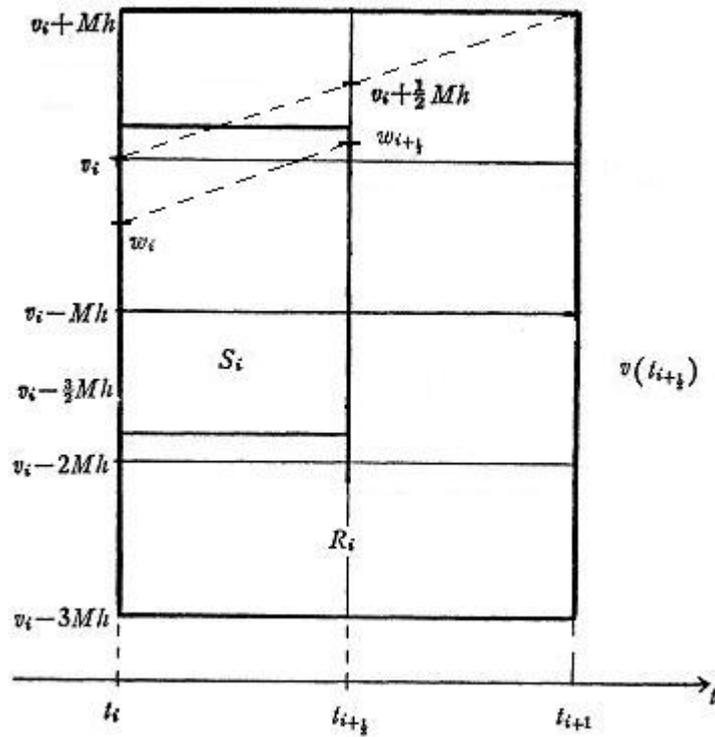


Figura 4.2:  $v_i - Mh < w_i \leq v_i$

Adaptada de [15]

O mesmo raciocínio mostra que  $w(t) \leq v(t)$  em  $[t_{i+1/2}, t_{i+1}]$ .

Como  $v(t_{i+1/2}) \leq v_i - (3/2)Mh$ , existem dois casos para serem considerados.

(a)  $w_{i+1/2} \leq v_i - (3/2)Mh$ ; e (b)  $v_i - (3/2)Mh < w_{i+1/2} \leq v_i + Mh/2$ .

(a)  $w_{i+1/2} \leq v_i - (3/2) \cdot Mh$

$$w_{i+1} = w_{i+1/2} + (h/2) \cdot \max f(S_{i+1/2})$$

$$w_{i+1} \leq v_i - (3/2) \cdot Mh + (1/2) \cdot Mh,$$

ou seja,  $w_{i+1} \leq v_i - Mh$

Logo,  $w(t) \leq v(t)$  para  $t_{i+1/2} \leq t \leq t_{i+1}$ .

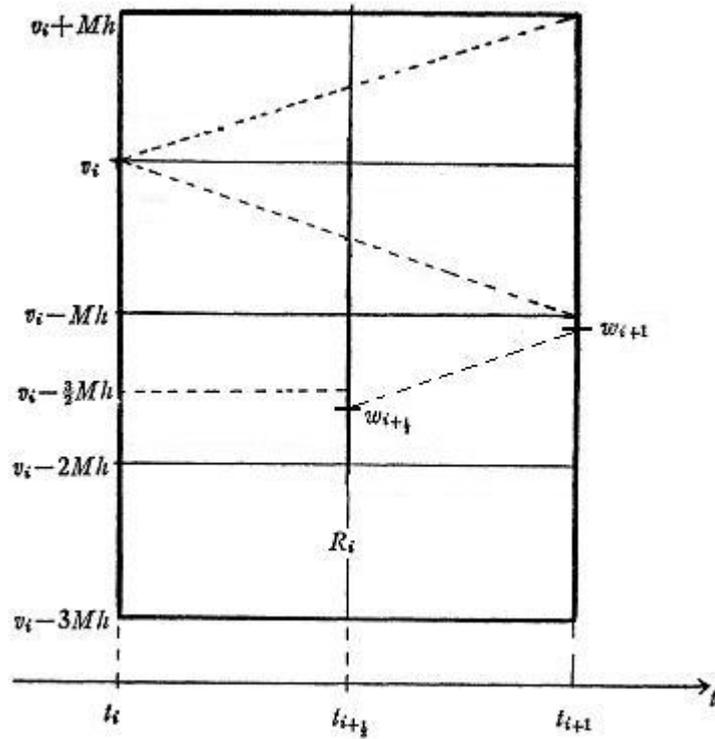


Figura 4.3:  $w_{i+1/2} \leq v_i - (3/2) \cdot Mh$

Adaptada de [15]

(b)  $w_{i+1/2} \leq v(t_{i+1/2})$

$$v(t_{i+1/2}) \leq v_i + (1/2) \cdot Mh$$

Como  $S_{i+1/2} \subset R_i$ , temos que  $\max f(S_{i+1/2}) \leq \max f(R_i)$ .

Portanto,  $w(t) \leq v(t)$  para  $t_{i+1/2} \leq t \leq t_{i+1}$ .

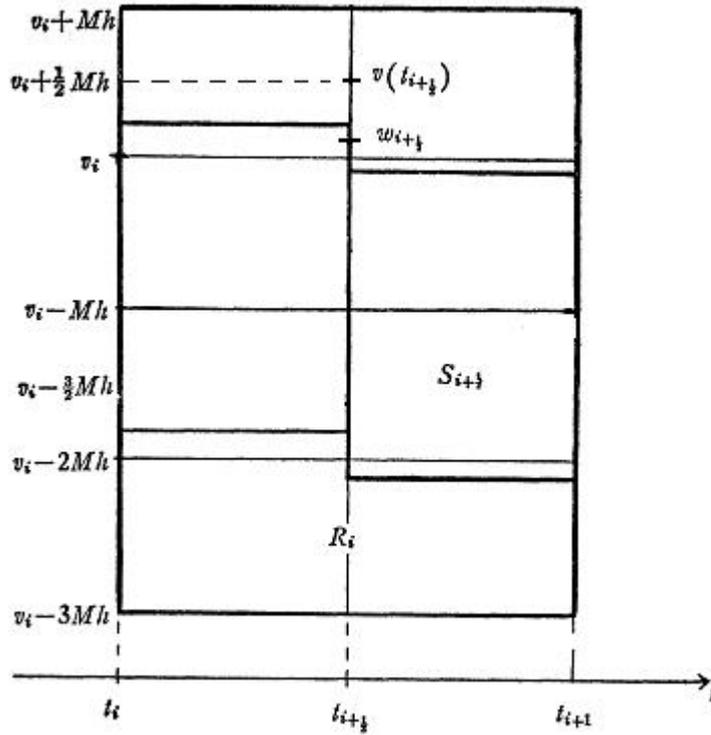


Figura 4.4:  $w_{i+1/2} \leq v(t_{i+1/2})$

Adaptada de [15]

Deste modo, provamos que  $w(t) \leq v(t)$  em  $[t_i, t_{i+1}]$ . Observe que construímos a sequência  $v_i$  com um parâmetro arbitrário  $h$  e a sequência  $w_i$  com o parâmetro  $h/2$ . Para completar a prova, consideremos  $h_k = T \cdot 2^{-k}$ ,  $k = 1, \dots, n$  e  $v_k(t)$  uma função linear por partes, contínua, construída de acordo com 4.2 com o parâmetro  $h = h_k$ . Provamos que  $v_{k+1}(t) \leq v_k(t)$  em  $J$ , já que  $h_{k+1} = h_k/2$ . Logo, pelo princípio da indução,  $w(t) \leq v(t)$  em  $J$ . Além disso,  $v_k$  é uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz  $M$  independente de  $k$  e  $v_k(t)$  é limitada inferiormente pela reta  $u_0 - Mt$ . Assim, a sequência de soluções aproximadas é monótona decrescente e limitada inferiormente, portanto converge e  $u(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(t)$  existe e, pelo Teorema de Dini (Teorema 1.3.8),

a convergência é uniforme em  $J$ .

Exceto para um número finito de pontos,  $v'_k(t)$  existe e de acordo com construção da sequência (4.2). (Figura 4.5)

$$v'_k(t) = f(t^*, x^*), \text{ onde } |t - t^*| \leq h_k, |v_k(t) - x^*| \leq 3Mh$$

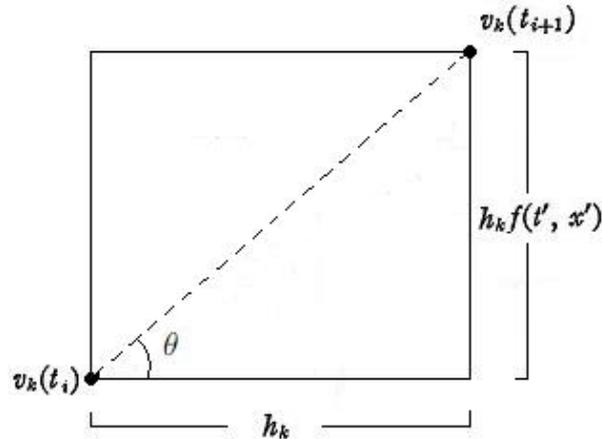


Figura 4.5: Derivada de  $v_k(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$

**4.2.2 Definição.** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função uniformemente contínua em  $A$ . O módulo de continuidade de  $f$  é definido por

$$d(\delta, f) = \sup_{|x-x^*| \leq \delta} |f(x) - f(x^*)|, \quad \delta \geq 0.$$

**4.2.3 Observação.** Note que, como  $f$  é uniformemente contínua, temos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} d(\delta, f) = 0.$$

**4.2.4 Observação.** Para que uma função  $d$  não negativa definida para  $\delta > 0$  seja módulo de continuidade de alguma função contínua é necessário e suficiente que tenha as seguintes propriedades:  $d(0) = 0$ ,  $d$  é não decrescente,  $d$  é contínua e  $d(\delta+\eta) \leq d(\delta)+d(\eta)$ ,  $\delta, \eta > 0$ . Note que quando fica claro que estamos falando de uma função  $f$ , não é necessário escrever o módulo de continuidade de  $f$  como  $d(\delta, f)$ , mas simplesmente  $d(\delta)$ .

Mais detalhes a definição de módulo de continuidade podem ser encontrados em [3].

Deste modo, se  $d(\delta)$  denota o módulo da continuidade de  $f$ ,

$$|f(t, x) - f(t^*, x^*)| \leq d(|t - t^*| + |x - x^*|) \quad \text{em } J \times [u_0 - MT, u_0 + MT].$$

Logo,  $v'_k(t) = f(t, v_k(t)) + \alpha_k(t)$ , onde  $|\alpha_k(t)| \leq d(h_k + 3Mh_k)$  e segue que

$$v_k(t) = u_0 + \int_0^t f(s, v_k(s)) ds + \beta_k(s), \quad |\beta_k(s)| \leq d(h_k + 3Mh_k)T.$$

Como  $f$  é uniformemente contínua em  $J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , temos que  $h_k \rightarrow 0$  e  $\lim d(h_k + 3Mh_k) = 0$

Portanto

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds \quad \text{em } J,$$

isto é,  $u$  é uma solução do problema de valor inicial (4.1).

### 4.3 A Prova Usual para o Teorema de Peano

Diferentemente da prova apresentada na seção anterior, a prova usual para o Teorema de Peano utiliza dois resultados muito fortes de análise matemática, o Teorema de Picard e o Teorema de Arzelà–Ascoli. Assim, fica claro que na demonstração usual o apelo dedutivo é muito maior e segue a ordem TEORIA - HIPÓTTESE - OBSERVAÇÃO - CONFIRMAÇÃO. Estes dois teoremas serão enunciados e em seguida será feita a demonstração do Teorema de Peano. A notação desta seção é a mesma utilizada em [13].

**4.3.1 Teorema** (Teorema de Picard). *Seja  $f$  contínua e lipschitziana em  $\Omega = I_a \times B_b$ , onde  $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , existe uma única solução de*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.3}$$

em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min\{a, b/M\}$

**4.3.2 Teorema** (Teorema de Arzelà–Ascoli). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Seja  $F$  uma família equicontínua de funções  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Isto é, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) < \delta$  então  $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$  para toda  $\varphi \in F$ . Se  $F$  é*

uniformemente limitada (isto é, existe  $M > 0$  tal que  $|\varphi| < M$  para todo  $\varphi \in F$ ), então toda sequência  $(\varphi_n)$  de elementos de  $F$  tem uma subsequência uniformemente convergente em  $X$ .

Mais detalhes sobre a definição de família equicontínua e a demonstração do Teorema de Arzelà-Ascoli podem ser encontrados em [10]

**4.3.3 Teorema** (Teorema de Peano). *Seja  $f$  contínua em  $\Omega = I_a \times B_b$ . Se  $|f| < M$  em  $\Omega$ , (4.3) tem pelo menos uma solução em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .*

Note que este é o mesmo Teorema do apresentado em 4.2.1, mas com algumas adaptações na notação para utilizarmos com mais facilidade os Teoremas 4.3.1 e 4.3.2. E utilizamos com base para sua demonstração o texto encontrado em [13].

*Demonstração.* Pelo Teorema da aproximação de Weierstrass (Teorema 1.3.9), existe uma sequência  $(f_n)$  de polinômios que converge uniformemente para  $f$ . Para  $n$  suficientemente grande,  $f_n$  satisfaz as hipóteses do teorema de Picard.

De fato, como  $f_n$  é um polinômio, temos que  $f_n$  é derivável e sua derivada parcial em relação a  $x$ ,  $\frac{\partial f_n}{\partial x}$  também é um polinômio e

$$|f_n(t, x) - f_n(t, y)| = \left| \int_y^x \frac{\partial f_n}{\partial x}(t, s) ds \right| \leq M_n |x - y|.$$

Seja  $\varphi_n$  solução de  $x' = f_n(t, x)$ ,  $x(0) = x_0$  em  $I_\alpha$ , cuja existência e unicidade são garantidas pelo Teorema de Picard. A família  $\varphi_n$  é equicontínua e uniformemente limitada.

De fato,

$$|f_n(t, x)| = |f_n(t, x) - f(t, x) + f(t, x)| \leq |f_n(t, x) - f(t, x)| + |f(t, x)| < \epsilon + M = \widetilde{M},$$

já que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente e  $|f| < M$ .

Além disso,

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)| = \left| \int_{t_0}^t f_n(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq \widetilde{M} |t - t_0|$$

e  $|\varphi_n - x_0| < b$ , ou seja,  $\varphi_n$  é lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua para  $n$  suficientemente grande. E

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &= |\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0) + \varphi_n(t_0)| \\ &\leq |\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)| + |\varphi_n(t_0)| \\ &\leq \widetilde{M} |t - t_0| + |\varphi_n(t_0)| \\ &\leq \widetilde{M} 2a + |x_0|. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Arzelà–Ascoli existe uma subsequência  $\varphi_{n_k}$  que converge para uma função  $\varphi$  uniformemente em  $I_\alpha$ , isto é, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n_{k_0}; n_k > n_{k_0} \Rightarrow |\varphi_{n_k} - \varphi| < \epsilon$ .

Fixado  $n_{k_1} > n_{k_0}$ , temos que

$$\begin{aligned} |f_n(s, \varphi_{n_{k_1}}(s)) - f(s, \varphi(s))| &= |f_n(s, \varphi_{n_{k_1}}(s)) - f(s, \varphi_{n_{k_1}}(s)) + f(s, \varphi_{n_{k_1}}(s)) - f(s, \varphi(s))| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Deste modo,  $f_n(s, \varphi_n(s))$  converge para  $f(s, \varphi(s))$  uniformemente em  $I_\alpha$ .

Portanto, fazendo  $n$  tender a  $\infty$  em ambos os membros de  $\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_n(s, \varphi_n(s)) ds$ , temos que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall t \in I_\alpha.$$

□

## 4.4 Teorema da Unicidade

As demonstrações usuais para o Teorema da Unicidade são baseadas em inequações que envolvem integrais como o Lema de Bellman e suas generalizações. Nesta seção será feita uma prova, baseada em inequações que envolvem derivadas, o que é mais intuitivo, já que se trata de um problema que envolve derivadas.

Consideremos o problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y = 0 \quad \text{quando} \quad x = a \tag{4.4}$$

A hipótese mais usada para garantir a unicidade da solução de (4.4) é a de  $f$  ser lipschitziana:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq k |y_2 - y_1|. \quad (4.5)$$

Note que  $y = y_0$  quando  $x = a$  quer dizer que  $y(a) = y_0$

Suponhamos que  $f$  seja lipschitziana e que  $u$  e  $v$  sejam duas soluções de (4.4) no intervalo  $[a, b]$ , isto é,  $u'(x) = f(x, u(x))$ ,  $u(a) = y_0$  e  $v'(x) = f(x, v(x))$ ,  $v(a) = y_0$ .

A ideia aqui é mostrar que as duas soluções  $u$  e  $v$  são iguais.

Se  $w(x) = u(x) - v(x)$ , temos que  $w'(x) = u'(x) - v'(x)$ , para cada  $x \in [a, b]$ , isto é,

$$w'(x) = f(x, u(x)) - f(x, v(x)), \quad (4.6)$$

e  $w(a) = u(a) - v(a) = y_0 - y_0 = 0$ .

Multiplicando ambos os lados de (4.6) por  $2w(x)$ , obtemos

$$2w(x)w'(x) = 2w(x)[f(x, u(x)) - f(x, v(x))].$$

Note que  $2w(x)w'(x) = \frac{dw(x)^2}{dx}$ . Portanto,

$$\frac{dw(x)^2}{dx} = 2w(x)[f(x, u(x)) - f(x, v(x))]. \quad (4.7)$$

Além disso,  $2w(x)[f(x, u(x)) - f(x, v(x))] \leq 2 |w(x)| |f(x, u(x)) - f(x, v(x))|$  e  $2 |w(x)| |f(x, u(x)) - f(x, v(x))| \leq 2 |w(x)| k |u(x) - v(x)| = 2k |w(x)|^2 = 2kw(x)^2$ .

Portanto,

$$\frac{dw(x)^2}{dx} \leq 2kw(x)^2 \quad (4.8)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.8) por  $e^{-2kx}$ , obtemos

$$e^{-2kx} \frac{dw(x)^2}{dx} \leq e^{-2kx} 2kw(x)^2,$$

ou seja,

$$e^{-2kx} \frac{dw(x)^2}{dx} - e^{-2kx} 2kw(x)^2 \leq 0 \quad (4.9)$$

Note que  $e^{-2kx} \frac{dw(x)^2}{dx} - e^{-2kx} 2kw(x)^2 = \frac{d[w(x)^2 e^{-2kx}]}{dx}$

Logo, substituindo em 4.9, temos que  $\frac{d[w(x)^2 e^{-2kx}]}{dx} \leq 0, \forall x \in [a, b]$ .

Assim, se integramos de  $a$  até um ponto arbitrário  $t \in [a, b]$ , obtemos

$$\int_a^t \frac{d[w(x)^2 e^{-2kx}]}{dx} ds \leq 0 \Rightarrow w(t)^2 e^{-2kt} - w(a)^2 e^{-2ka} \leq 0 \quad (4.10)$$

Mas  $w(a) = 0$ , logo  $w(t)^2 e^{-2kt} \leq 0$

Mas como  $w(x)^2 \geq 0$  e  $e^{-2kx} > 0$ , temos que  $w(t) = 0, \forall t \in [a, b]$ .

Deste modo,  $u(x) = v(x)$  em  $[a, b]$ .

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Ao longo dessa dissertação, vimos que a intuição humana é de importância relevante para a solução de problemas tanto no campo da geometria básica como em universos mais complexos, como o das equações diferenciais. Ressaltamos a importância do método indutivo, que mesmo não sendo a base para o desenvolvimento da matemática ao longo do tempo, ainda é de fundamental importância para a criação de conjecturas que só podemos garantir que sejam incontestáveis sob a luz do método dedutivo.

Esses dois métodos de raciocínio podem se complementar de duas formas diferentes, sendo tal complementação útil tanto para propor soluções aproximadas em determinados casos como para apontar as possíveis falhas da nossa intuição humana e despertar o desejo de se construir uma teoria para explicar o motivo pelo qual nossas percepções imediatas podem nos enganar.

Vimos na prática, no capítulo 2, como a intuição humana, através do empirismo, pode nos guiar por caminhos assertivos ao verificarmos os resultados do experimento realizado em sala de aula com o problema de navegação e localização no plano. Uma turma de alunos um pouco mais experiente ou que tivesse um pouco mais de familiaridade com construções geométricas, poderia ter uma maior facilidade para propor soluções ainda melhores para o problema, mesmo sem o domínio do conceito de arco capaz. Deste modo, a intuição humana foi perfeitamente capaz de apontar os caminhos corretos e as soluções apontadas de acordo com as percepções imediatas de alunos do ensino básico.

Entretanto, no capítulo 3, tivemos a chance de verificar que nem sempre a intuição humana é planamente confiável e pode nos levar a erros grosseiros se não verificada de forma concreta. O problema da braquistócrona, assim como outros problemas clássicos da matemática, foi uma das peças chaves para a criação do cálculo das variações. Como neste caso, a percepção humana imediata falha e não é capaz de nos fornecer respostas adequadas, verificadas através de empirismo, faz-se necessário a construção de toda uma teoria para servir de base para a solução definitiva do problema. Surge assim o cálculo das variações, cujo principal resultado, a equação de Euler-Lagrange, foi utilizada neste trabalho para apresentar a solução do problema da braquistócrona.

Para finalizar, mostramos no capítulo 4, que mesmo o método indutivo não sendo eficiente em casos como o problema da braquistócrona, que envolve equações diferenciais, ele ainda pode ser muito útil em tópicos que não se restringem ao ensino básico. Tal método ainda pode nos ajudar muito e fornecer uma demonstração mais elementar, e isso não quer dizer mais fácil, para um dos teoremas mais importantes de equações diferenciais, o Teorema de Peano. Tal demonstração, para evitar a utilização de resultados como o Teorema de Picard e Arzelà–Ascoli, faz uso do princípio da indução matemática para se obter uma sequência de soluções aproximadas de uma forma similar a utilizada no método da poligonal de Euler-Cauchy. Por fim, apresentamos uma demonstração também com um apelo indutivo maior para o teorema de unicidade da solução de uma equação diferencial.

O princípio da indução, utilizado para demonstrar resultados importantes no universo do conjunto dos números naturais, exemplifica que a união desses dois métodos de raciocínio pode ser o fio condutor de diversas demonstrações e propostas de solução de problemas. A formulação da hipótese de indução depende apenas da intuição humana e a sequência do princípio é onde utilizamos o método dedutivo, com todo o seu rigor. Ficando claro que estes dois métodos podem se complementar.

# ANEXO 1

”

## Bibliografia

- [1] Robert Gardner Bartle and Robert G Bartle. *The elements of real analysis*, volume 2. Wiley New York, 1964.
- [2] Robert Gardner Bartle and Donald R Sherbert. *Introduction to real analysis*. Hoboken, NJ: Wiley, 2011.
- [3] AV Efimov. Modulus of continuity, encyclopaedia of mathematics, 2001.
- [4] Leonhard Euler. Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente. *Acta Eruditorum*, pages 361–363, 1726.
- [5] Leonhard Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1952.
- [6] H Fischbein. *Intuition in science and mathematics: An educational approach*, volume 5. Springer Science & Business Media, 1987.
- [7] Izrail Moiseevitch Gelfand, Richard A Silverman, et al. *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000.
- [8] José Carlos Pinto LEIVAS. Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. *Paraná: UFPR*, 2009.
- [9] Elon L Lima. Análise real, vol. 1. *Publicações IMPA*, 2004.
- [10] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-hill education, 2006.

- [11] Lucia Santaella. *Navegar no ciberespaço: o perfil cognitivo do leitor imersivo*. Paulus, 2004.
- [12] Richard R Skemp. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, volume 15. Ediciones Morata, 1980.
- [13] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [14] David Tall. Thinking through three worlds of mathematics. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2004.
- [15] Wolfgang Walter. There is an elementary proof of peano's existence theorem. *The American Mathematical Monthly*, 78(2):170–173, 1971.
- [16] Alfred North Whitehead. *An introduction to mathematics*. Courier Dover Publications, 2017.