



Universidade Federal de  
São João del-Rei – UFSJ  
Departamento de Matemática e  
Estatística – DEMAT  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional – PROFMAT



**UMA ABORDAGEM SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA VIA  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

JÚLIO CÉSAR MIRANDA MARTINS

São João del-Rei  
2020

JÚLIO CÉSAR MIRANDA MARTINS

**UMA ABORDAGEM SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA VIA  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Ensino de Matemática

**Orientador:** Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

São João del-Rei  
2020



**JÚLIO CÉSAR MIRANDA MARTINS**

**UMA ABORDAGEM SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA VIA  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

Aprovado em \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2020.

---

**Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira**

Universidade Federal de São João del-Rei – UFSJ  
Orientador

---

**Profa. Dra. Viviane Pardini Valério**

Universidade Federal de São João del-Rei – UFSJ  
Examinadora

---

**Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche**

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF  
Examinador

São João del-Rei, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2020.

*A Deus, que tem realizado grandes projetos em  
minha vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus pela dádiva da vida, por ter guiado meus passos até aqui, pela proteção e direção diante de tantos desafios.

À minha mãe Marlene pela educação e apoio em todas as etapas da minha vida.

À Universidade Federal de São João del-Rei, pela oportunidade de realizar esta Pós-Graduação.

Ao Prof. Dr. Francinildo Nobre, pela preciosa orientação, apoio, incentivo e paciência.

Agradeço a todos os professores, que tanto somaram para o sucesso do PROFMAT na UFSJ.

Agradeço também aos colegas das turmas 2017 e 2018 do PROFMAT pelas partilhas, tanto de conhecimento como de momentos de descontração. Não tenho palavras para descrever o quão bom foi passar esses últimos anos com vocês.

Enfim, a todos que me sustentaram no ombro para que eu pudesse ir mais adiante!

*Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esqui ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom “resolvedor de problemas” tem que resolver problemas.*

*(George Polya)*

## RESUMO

MARTINS, J. C. M. **Uma abordagem sobre o ensino de Matemática via Resolução de Problemas**. 2020. 82 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT/UFSJ), São João del-Rei – MG.

A Resolução de Problemas tem sido objeto de reflexão ao longo das últimas décadas. Assim, este trabalho tem como objetivo principal discutir o ensino de Matemática via Resolução de Problemas. Nos apoiamos, principalmente, em Polya (2006), considerado pela literatura o “pai da Resolução de Problemas”, e nos documentos oficiais que regem o ensino de Matemática no Brasil (BNCC, CBCs e PCNs). Queremos “incentivar a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para examinar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base na interdisciplinaridade” (BRASIL, 2018) e, nesse contexto, ratificar que “problema algum fica completamente esgotado” (POLYA, 2006). Por fim, incentivamos a utilização de recursos computacionais como forma de oferecer mais significado aos problemas e novos argumentos para as discussões já existentes sobre o tema.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática; Informática; Resolução de Problemas.



## ABSTRACT

MARTINS, J. C. M. **Uma abordagem sobre o ensino de Matemática via Resolução de Problemas**. 2020. 82 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT/UFSJ), São João del-Rei – MG.

Problem Solving has been the subject of reflection over the past few decades. Thus, this work has as main objective to discuss the teaching of Mathematics through Problem Solving. We rely mainly on Polya (2006), considered by literature as the “father of Problem Solving”, and on the official documents that govern the teaching of Mathematics in Brazil (BNCC, CBCs and PCNs). We want to “encourage research, reflection, critical analysis, imagination and creativity, to examine causes, develop and test hypotheses, formulate and solve problems and create solutions (including technological ones) based on interdisciplinarity” (BRAZIL, 2018) and, in this context, ratify that “no problem is completely exhausted” (POLYA, 2006). Finally, we encourage the use of computational resources as a way to offer more meaning to problems and new arguments for existing discussions on the theme.

**Key-words:** Mathematics Teaching; Computing; Problem Solving.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema do elevador .....	24
Figura 2 – Paralelepípedo .....	27
Figura 3 – Cercado retangular.....	30
Figura 4 – Construção parcial (1) .....	31
Figura 5 – Construção parcial (2).....	32
Figura 6 – Construção parcial (3).....	32
Figura 7 – Construção parcial (4).....	33
Figura 8 – Construção parcial (5).....	34
Figura 9 – Construção parcial (6).....	34
Figura 10 – Construção parcial (7).....	35
Figura 11 – Construção parcial (8).....	36
Figura 12 – Construção parcial (9).....	36
Figura 13 – Construção final com o valor máximo da área .....	37
Figura 14 – Expressão algébrica.....	39
Figura 15 – Expressão algébrica simplificada .....	39
Figura 16 – Gráfico da função $f$ .....	40
Figura 17 – Tela do WolframAlpha.....	41
Figura 18 – Link “ <i>Examples</i> ” .....	42
Figura 19 – Utilização do WolframAlpha .....	43
Figura 20 – Informações fornecidas pelo WolframAlpha .....	43
Figura 21 – Tela do OA “Pentaminós” .....	45
Figura 22 – Tela do OA “Gincana da Probabilidade”.....	45
Figura 23 – Tela do OA “Ciclo Trigonométrico” .....	46
Figura 24 – Retângulo ABCD .....	48
Figura 25 – Retângulo ABCD preenchido .....	49
Figura 26 – Desenho referente ao problema 5.2.....	50
Figura 27 – Desenho referente ao problema 5.3.....	50
Figura 28 – Construção geométrica .....	55
Figura 29 – Circunferência com centro $C$ .....	57
Figura 30 – Gráfico referente à desigualdade da solução alternativa .....	58
Figura 31 – Cubo referente ao problema 5.9.....	60
Figura 32 – Cubo referente à solução do problema 5.9 .....	61

Figura 33 – Gráficos das funções $b$ e $t$ .....	63
Figura 34 – Teste 1 (1º Trimestre).....	66
Figura 35 – Resultado final do 1º Trimestre .....	67
Figura 36 – Teste 3 (2º Trimestre).....	68
Figura 37 – Decoração do cilindro.....	69
Figura 38 – Triângulo retângulo .....	70
Figura 39 – Resultado final do 2º Trimestre .....	71
Figura 40 – Resolução de Problemas em sala de aula (1).....	72
Figura 41 – Resolução de Problemas em sala de aula (2).....	72
Figura 42 – Resolução de Problemas em sala de aula (3).....	73
Figura 43 – Resolução de Problemas em sala de aula (4).....	73

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>2</b>	<b>UM POUCO DE HISTÓRIA</b> .....	13
2.1	Problemas de Matemática e o currículo .....	13
2.2	A mudança de papel da Resolução de Problemas .....	14
2.3	A Matemática do mundo contemporâneo .....	15
<b>3</b>	<b>RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM FOCO</b> .....	17
3.1	O que é um problema matemático? .....	17
3.2	A Resolução de Problemas e o ensino de Matemática .....	19
3.3	A Resolução de Problemas sob o crivo dos principais documentos que regem a educação básica no Brasil .....	20
3.4	Metodologia de Polya – “o pai da Resolução de Problemas” .....	21
<b>4</b>	<b>A INFORMÁTICA A SERVIÇO DO ENSINO DE MATEMÁTICA</b> .....	28
4.1	O computador na sociedade do conhecimento .....	28
4.2	O <i>software</i> Geogebra .....	29
4.3	O <i>site</i> WolframAlpha .....	41
4.4	Objetos de aprendizagem (OA) .....	44
<b>5</b>	<b>RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM PRÁTICA</b> .....	47
5.1	Uma elegante ideia japonesa .....	47
5.2	Praticando a Resolução de Problemas: PAPMEM e OBMEP .....	51
5.3	Alguns problemas motivadores .....	53
<b>6</b>	<b>NO DIA A DIA COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</b> .....	65
6.1	Fatos e atitudes na sala de aula de Matemática .....	65
6.2	Alguns resultados e reflexões .....	67
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	75
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	76
	<b>APÊNDICES</b> .....	80

## 1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área do conhecimento que surgiu e tem se desenvolvido a partir dos problemas vivenciados pelo homem. Nesse universo, dentre as várias formas de tratar o ensino de Matemática, nas últimas décadas uma metodologia que ganhou destaque como objeto de estudo e pesquisa é a Resolução de Problemas. Vários autores têm se debruçado nessa empreitada, dentre eles Butts, o qual destaca que “estudar Matemática é resolver problemas” (1997 *apud* DANTE, 1999). A Resolução de Problemas “ajuda os alunos a desenvolverem a capacidade de aprender a aprender, habituando-os a determinarem, por si próprios, respostas às questões que os inquietam, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana” (SOARES & PINTO, 2011).

Nesse viés, Polya (2006) afirma que quando o aluno resolve um problema por seus próprios meios, experimenta a tensão e goza o triunfo da descoberta. Segundo ele, experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

As novas diretrizes para o ensino de Matemática sinalizam para a importância da formação humana. Elas apontam que “o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da educação básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais” (BRASIL, 2018, p. 265).

Nesse contexto, apresentamos uma reflexão sobre a metodologia de Resolução de Problemas. Na seção 2, elaboramos uma breve abordagem histórica desse tema. Na seção 3, iniciamos com o conceito de problema matemático e, em seguida, avaliamos o tema sob o ponto de vista dos principais documentos que regem a educação básica no Brasil, além de detalhar a proposta de Polya. Na seção 4, exploramos algumas ideias acerca da Resolução de Problemas enquanto proposta de ensino incrementada a partir da inserção do computador nas aulas de Matemática. Na seção 5, exibimos uma antiga ideia de construção de ambientes de problemas de Matemática e sugerimos uma proposta para promover a Resolução de Problemas dentro da escola. Ainda nessa seção, apresentamos e discutimos vários problemas com base no método de Polya (2006). Por último, na seção 6, expomos alguns aspectos sobre a aplicação da Resolução de Problemas na sala de aula.

## 2 UM POUCO DE HISTÓRIA

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), os problemas sempre representaram o foco principal nos currículos de Matemática desde a antiguidade, mas a Resolução de Problemas é um conceito relativamente novo. De acordo com esses autores, só recentemente apareceram estudiosos aceitando e reforçando a viabilidade dessa proposta de ensino. Assim, na abordagem da Resolução de Problemas, diferentes visões do que é a educação, a escolaridade, a Matemática e, em particular a resolução de problemas, vieram à tona. A seguir comentamos, simplificada, esses fatos.

### 2.1 Problemas de Matemática e o currículo

Segundo a literatura, como apontam Stanic e Kilpatrick (1989), os problemas de Matemática aparecem nos currículos, pelo menos, tão longe como as antigas civilizações egípcias, chinesas e gregas. Segundo esses autores, do mesmo modo, técnicas muito particulares de Resolução de Problemas também têm uma longa história. Vários desses problemas e técnicas aparecem no Papiro de Rhind<sup>1</sup>. Uma técnica famosa à época, encontrada nesse documento, trata da “Regra da Falsa Posição”, a qual consistia em:

1. supor uma resposta;
2. verificar;
3. ajustar à resposta encontrada.

Com base nos princípios de Stanic e Kilpatrick (1989), vamos resolver, através da Regra da Falsa Posição, o seguinte problema: “A soma de um número com o seu sétimo é 24. Que número é esse?”

É claro que, hoje, esse problema pode ser facilmente resolvido por meio de uma equação do primeiro grau, como por exemplo,

$$x + \frac{x}{7} = 24.$$

---

<sup>1</sup> Documento egípcio de cerca de 1650 a. C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de vários problemas.

No entanto, com a Regra da Falsa Posição, o problema era resolvido da seguinte maneira:

1. supor um número conveniente, digamos  $x = 7$ ;
2. com esse valor computa-se a expressão:  $7 + \frac{7}{7} = 8$ ;
3. Deste modo, o fator de correção deve ser  $\frac{24}{8}$ , pois, esse vezes 8 resulta o lado direito da equação original (24), ou seja, o valor correto de  $x$  deve ser  $\frac{24}{8} \times 7 = 21$ .

Como podemos perceber, de longa data os problemas estão inseridos nos currículos de Matemática. A questão importante, a qual devemos destacar, é que o conhecimento a respeito da Resolução de Problemas não estava estruturado e assim se manteve ao longo do tempo. Até muito recentemente, conforme sinalizam Stanic e Kilpatrick (1989), trabalhar a Resolução de Problemas estava, frequentemente, relacionado a apresentar uma coleção de problemas.

## 2.2 A mudança de papel da Resolução de Problemas

Vimos que os problemas sempre ocuparam posição privilegiada no que tange o ensino e a aprendizagem de Matemática. No entanto, para Stanic e Kilpatrick (1989), especialmente no último século, a visão sobre a Resolução de Problemas foi estendida para além de uma mera lista de problemas. Ainda assim, os matemáticos e educadores matemáticos buscam esclarecer vários questionamentos acerca das razões pelas quais deveríamos ensinar a resolução de problemas.

Ainda de acordo com Stanic e Kilpatrick (1989), o principal motivo para a maior ênfase dada pelos pesquisadores da área ao ensino da Resolução de Problemas reside no fato de que, até este século, o estudo da Matemática, enquanto ciência do raciocínio e da criatividade, levaria à melhoria do pensamento das pessoas. Essa visão está alinhada com os pensamentos de Platão, conforme aponta Grube (1974, p. 18). Segundo esse autor, Platão afirmava que “aqueles que são por natureza bons em cálculo são, pode-se dizê-lo, naturalmente argutos em todos os outros estudos, e (...) aqueles que são lentos nisso, se são educados e exercitados nesse estudo, melhoram e tornam-se mais competentes do que eram”. Nesse

contexto, estudando Matemática melhoramos a nossa capacidade de enfrentar os problemas do mundo real.

Olhando novamente o que dizem Stanic e Kilpatrick (1989), até o início do século XX, o ensino de Matemática tinha como apoio a repetição, a fim de que os conhecimentos básicos fossem memorizados. Posteriormente, como descrevem esses autores, os alunos deveriam aprender matemática com “compreensão” e entender o que faziam. Com o advento da “era da informação e do conhecimento”, era preciso cada vez mais que as pessoas soubessem Matemática.

Assim, os documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática passaram por diversas mudanças e, dessa forma, a Resolução de Problemas começou a ser discutida. Segundo Onuchic e Allevato (2011), ela foi, de fato, tratada como metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, a partir da publicação dos *Standards 2000*<sup>2</sup>.

Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo (ONUCHIC & ALLEVATO, 2011).

Para esses autores, o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas favorece a fixação de conceitos e a compreensão de técnicas estudadas dentro de cada uma das unidades temáticas.

### **2.3 A Matemática do mundo contemporâneo**

A história das civilizações mostra que várias delas alcançaram o progresso sob a chancela da Matemática; ela foi criada e vem sendo aperfeiçoada pelo homem em função de seus interesses e necessidades.

Nos dias atuais, a Matemática comporta um vasto campo de conexões e padrões que instigam a nossa capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, promovendo a estruturação do raciocínio e o desenvolvimento do pensamento

---

<sup>2</sup> Segundo Onuchic e Allevato (2011), os *Standards 2000*, oficialmente chamados *Principles and Standards for School Mathematics*, são diretrizes para o ensino de Matemática. Essas diretrizes foram reunidas em um documento publicado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) no ano 2000. Nesse documento, são enunciados seis Princípios (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia), cinco Padrões de Conteúdo (Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de Dados e Probabilidade) e cinco Padrões de Procedimento, entre os quais o primeiro é Resolução de Problemas, seguido por Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexões e Representação.



criativo. Os conhecimentos de Matemática constituem um patrimônio que a humanidade adquiriu, desenvolve e usufrui incessantemente.

A Matemática possibilita ao homem desenvolver e criar novas e cada vez mais sofisticadas tecnologias. Os computadores, os celulares e as TVs, por exemplo, se modernizaram, e é inegável que, para tanto, a Matemática como ciência mãe impulsionou as demais ciências e áreas, como a Engenharia, a Física, a Economia, a Computação, etc.

A Matemática é o saber em movimento; ela configura-se como uma das ciências que estão em crescimento e desenvolvimento contínuos. Estudiosos e pesquisadores de todo o mundo, geralmente nas universidades e centros de pesquisas, formulam e aperfeiçoam os mais variados modelos através da Matemática e de suas ramificações, tais como: Análise, Álgebra, Equações Diferenciais e Estatística. Esses profissionais publicam os seus artigos científicos, resultados de suas pesquisas, para as mais diversas revistas especializadas. Os artigos, uma vez lidos por pares ou por pesquisadores de áreas afins, geram novos trabalhos de cunho teórico e prático.

### 3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM FOCO

De acordo com Pereira e Borba (2016), durante várias décadas a Matemática foi tratada como uma ciência imutável, pronta, acabada. O ensino resumia-se em repetição e reprodução de conteúdos por parte do professor, o qual era detentor do saber. Ao estudante restava provar a sua capacidade de memorização de fórmulas e algoritmos através de uma avaliação metódica e de cunho quantitativo.

Com o avanço das tecnologias, a informação tornou-se disponível em diversos espaços e, diante dessa realidade, surgiu a necessidade de se repensar o ensino. Com base nas ideias de Pereira e Borba (2016), notamos que cresceu e tem se desenvolvido o entendimento de que a Matemática é uma ciência viva, que pode e deve ser questionada, discutida e reformulada em relação ao tempo. Nessa perspectiva, acreditamos que a Resolução de Problemas pode ajudar na aprendizagem de Matemática.

#### 3.1 O que é um problema matemático?

O advento da “era da informação” e o clamor por mudanças, conforme já comentamos, impactaram diretamente no ensino. Nesse sentido, Silveira (2001) lamenta que a Resolução de Problemas, enquanto tendência metodológica, tenha se transformado em um modismo dentro do ambiente escolar. Segundo esse autor, os “oportunistas de plantão” conseguiram desfigurar de tal modo o assunto que hoje podemos encontrar atividades descabidas rotuladas de “Resolução de Problemas Matemáticos”. Assim, é pertinente consultarmos fontes seguras e quem tem propriedade para falar dessa temática: os cientistas, produtores e estudiosos de Matemática.

A priori, “um problema matemático é toda situação que exige a descoberta de informações desconhecidas para o indivíduo que deseja resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado” (SILVEIRA, 2001)<sup>3</sup>. Para Dante (1999), um problema é qualquer circunstância que leve o indivíduo a pensar para resolvê-la. Ele reitera que um problema matemático não

---

<sup>3</sup> SILVEIRA, J. F. P. *O que é um problema matemático?* Site: <<http://athena.mat.ufrgs.br>>.

exige apenas o pensar, mas, também, conhecimentos e maneiras de raciocinar matematicamente para solucioná-lo.

Nessa discussão, Polya (2006) garante que “uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema”.

O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (POLYA, 2006).

A partir das concepções anteriores, entendemos que um problema matemático configura-se como situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, “a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la” (BRASIL, 1997).

Por outro lado, oportunamente, Silveira (2001) destaca a diferença entre problema e exercício: “o problema tem a ver com criação, enquanto que o exercício envolve o treinamento de alguma habilidade”. De acordo com a linha de raciocínio desse autor, para exemplificar as diferenças citadas anteriormente, consideremos para um aluno que esteja cursando os anos finais do Ensino Fundamental:

- exercício: resolva a equação  $x^2 - 5x + 4 = 0$  (supõe-se que tal aluno conheça a fórmula de Bhaskara)<sup>4</sup>;
- problema: deduza a fórmula resolutive da equação do segundo grau – fórmula de Bhaskara (supõe-se que tal aluno nunca tenha visto a demonstração, mas conheça a fórmula).

Além de conhecer as diferenças entre problemas e exercícios, é conveniente avaliar o quão bom e útil é um problema matemático à medida que ele desenvolve o conhecimento matemático. Nesse sentido, de acordo com Pereira *et al* (2001), é importante que o problema:

- tenha enunciado acessível e de fácil compreensão;
- exercite o pensar matemático do aluno;
- exija criatividade na resolução;

---

<sup>4</sup> A resolução desse problema pode ser encontrada na seção 5.

- possa servir de “trampolim” para a introdução ou consolidação de importantes ideias e/ou conceitos matemáticos; e sobretudo,
- não seja muito fácil ou muito difícil e sim natural e interessante.

De acordo com Silveira (2001), um problema é mais valioso à medida que o aluno seja instigado a criar estratégias e buscar ideias. Na visão desse autor, tal aluno pode até conhecer o objetivo a ser atingido, mas ainda estará enfrentando um problema se ele, até então, não dispõe dos meios para alcançar esse objetivo.

### **3.2 A Resolução de Problemas e o ensino de Matemática**

O conhecimento matemático tem se desenvolvido a partir dos problemas que inquietam o homem e impactam em suas atividades. Conhecer e buscar novas estratégias pode ser o caminho para o enfrentamento das mais diversas situações que desafiam a vida humana. Com base nessas premissas, acreditamos que a Resolução de Problemas desponta-se como metodologia viável para as aulas de Matemática.

De acordo com os PCNs (BRASIL, 1998), a Resolução de Problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Segundo Dante (1999), ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, fórmulas e algoritmos matemáticos. O professor deve instigar a curiosidade e o interesse dos alunos, de tal modo que a sala de aula de Matemática seja transformada em um ambiente de discussão, interação e partilha de conhecimentos.

Estudar Matemática é resolver problemas. Portanto, a incumbência dos professores de Matemática, em todos os níveis, é ensinar a arte de resolver problemas. O primeiro passo nesse processo é colocar o problema adequadamente (BUTTS, 1997 *apud* DANTE, 1999).

Conforme discutido anteriormente, a Matemática é uma ciência viva; ela pode ser construída e reconstruída todos os dias dentro das salas de aula. A esse

respeito, Onuchic e Allevato (2011) avaliam que a Resolução de Problemas representa, da forma como trabalhamos, um contexto bastante propício à construção de conhecimento matemático a partir da observação e percepção de padrões, especialmente se considerada como metodologia de ensino, ou seja, se o problema for proposto como gerador de novos conceitos e conteúdos matemáticos.

### **3.3 A Resolução de Problemas sob o crivo dos principais documentos que regem a educação básica no Brasil**

De acordo com os principais documentos referentes ao ensino e à aprendizagem de Matemática no Brasil (CBCs, PCNs e BNCC), a Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino eficaz, pois propicia uma mobilização dos saberes em busca de soluções. Nessa busca, o estudante articula estratégias, raciocina logicamente e avalia a viabilidade de suas estratégias, o que colabora para a construção do conhecimento (Rodrigues e Magalhães, 2012).

Segundo os Conteúdos Básicos Comuns (CBCs, 2008), referentes ao estado de Minas Gerais, um dos principais objetivos do ensino de Matemática, em qualquer nível, é o de desenvolver habilidades para a solução de problemas. Esses problemas podem advir de situações concretas observáveis (“contextualizadas”) ou não. No primeiro caso, é necessária uma boa capacidade de usar a linguagem matemática para interpretar questões formuladas verbalmente. Por outro lado, problemas interessantes, que despertam a curiosidade dos estudantes, podem surgir dentro do próprio contexto matemático quando novas situações podem ser exploradas e o conhecimento aprofundado, num exercício contínuo da imaginação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998) estabelecem que o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

Por fim, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) estabelece que o Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do *letramento matemático*<sup>5</sup>, definido como as competências e habilidades de raciocinar,

---

<sup>5</sup> Segundo a Matriz do Pisa 2012, o letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos.

representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a Resolução de Problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

### 3.4 Metodologia de Polya – “o pai da Resolução de Problemas”

Nesta seção, apresentamos a metodologia da Resolução de Problemas proposta por George Polya (2006), considerado o “pai da Resolução de Problemas”. A proposta de Polya fundamenta-se em um estudo chamado Heurística, que a rigor, refere-se à arte de inventar, de fazer descobertas. Ele reitera que a Heurística é um campo do conhecimento que vem sendo disputado pela lógica, pela psicologia e pela filosofia.

Segundo Polya, o professor deve incentivar os seus alunos a praticarem a Resolução de Problemas, no sentido de que, assim como a natação se faz por imitação e prática, a resolução de problemas também deve ser ensinada e praticada.

Quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos (POLYA, 2006).

A Resolução de Problemas, de acordo com a proposta desse autor, é constituída de quatro etapas, a saber:

- compreensão do problema;
- estabelecimento de um plano;
- execução do plano;
- reflexão sobre a resolução completa.

A seguir, apresentamos um problema, destacando cada etapa citada anteriormente.

**Problema 3.1.** *Para reformar a cobertura de um edifício, são usados barrotes de madeira. Esses barrotes são transportados num elevador cujas dimensões internas são 1,20 m, 1 m e 2,10 m. Nessas condições, determine o comprimento aproximado do maior barrote que pode ser transportado nesse elevador. Note que o*

*comprimento do maior barrote representa o comprimento da diagonal do paralelepípedo, o qual dá a forma do elevador.*

### **Compreensão do problema**

Sob a visão de Polya, para discutir com proveito esse problema, os estudantes precisam conhecer o Teorema de Pitágoras e algumas das suas aplicações à Geometria Plana, mas basta-lhes um conhecimento sistemático muito superficial da Geometria Espacial. Além disso, vamos discuti-lo na perspectiva de que os alunos iniciem a resolução associando a forma do elevador a um paralelepípedo e a ideia de “maior barrote” à diagonal desse paralelepípedo.

Segundo Polya (2006), o diálogo entre o professor e seus alunos pode ser iniciado da seguinte maneira:

- *O que se deseja calcular nesse problema? Ou seja, qual é a incógnita?*

O comprimento da diagonal de um paralelepípedo, representado, neste caso, pela forma geométrica do elevador.

- *Quais são os dados?*

O comprimento, a largura e a altura do elevador.

- *Que letra deve denotar a incógnita?*

Usaremos a letra ***x***.

- *Que letras podem representar as medidas do comprimento, da largura e da altura do elevador?*

As seguintes letras: ***a***, ***b*** e ***c***.

- *Qual é a condição que relaciona ***a***, ***b*** e ***c*** com ***x***?*

A letra ***x*** representa a diagonal do paralelepípedo, representado pelo elevador, e as letras ***a***, ***b*** e ***c*** são, respectivamente, as medidas do comprimento, da largura e da altura.

- *Trata-se de um problema razoável? Ou seja, a condição é suficiente para determinar a incógnita?*

Sim, ele é razoável. Conhecendo os valores de ***a***, ***b*** e ***c***, teremos o paralelepípedo e, conseqüentemente, chegaremos à medida de sua diagonal.

## Estabelecimento de um plano

À luz de George Polya (2006), vamos comentar os fatos indispensáveis para o bom andamento desta etapa.

Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano.

Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: *conhece um problema correlato?*

A fim de evitar equívocos e confusões com outros problemas parecidos com o nosso, podemos, por exemplo, *pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante*. Ainda assim, persistindo alguma dúvida, precisaremos procurar, em torno, algum outro ponto de contato apropriado e examinar os diversos aspectos do nosso problema. Algumas indagações passíveis de VARIAÇÃO DO PROBLEMA, nos levam a meios específicos, tais como a GENERALIZAÇÃO, a PARTICULARIZAÇÃO, o recurso à ANALOGIA e outros.

Ao tentarmos aplicar vários problemas ou teoremas conhecidos, cogitando de diversas modificações, podemos distanciarmo-nos tanto do nosso problema original que corremos o risco de perdê-lo por completo. Há, no entanto, uma boa indagação que pode nos trazer de volta a ele: *utilizou todos os dados? Utilizou toda a condição?*

Voltando ao nosso problema, se o professor, tendo observado atentamente, e não notar qualquer sinal de iniciativa, terá de repetir cuidadosamente todo o seu diálogo com os estudantes. Ele deve estar preparado para apresentar de novo, com modificações, as indagações não respondidas. Deve também estar preparado para encontrar, muitas vezes, o silêncio desconcertante de seus alunos (o qual será abaixo indicado por reticências...).

- *Conhece um problema correlato?*

...



- *Considere a incógnita! Conheça um problema que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante?*

...

- *Então, qual é a incógnita?*

A diagonal de um paralelepípedo.

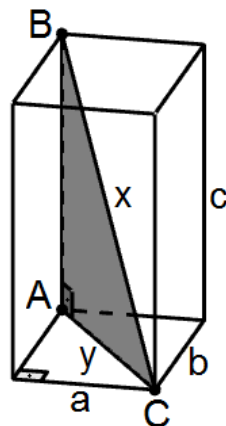
- *Conhece algum problema que tenha a mesma incógnita?*

...

Nessa etapa, o professor pode questionar o aluno a respeito da possibilidade da construção de um desenho que represente a situação proposta (como a que está representada pela figura 1). Além disso, pode perguntar a esse aluno se ele já se deparou com um problema como o que está sendo apresentado, onde apareça um triângulo retângulo, do qual a diagonal pedida é a hipotenusa. O professor deve estar preparado para usar toda uma gama de indicações mais ou menos explícitas, como as que seguem.

- *É possível traçar um triângulo nessa figura? (Como o triângulo ABC, destacado abaixo)*
- *Que tipo de triângulo você traçou?*
- *Você poderia calcular a diagonal, se ela fosse o lado desse triângulo?*

Figura 1 – Esquema do elevador.



Fonte: Autor.

Quando afinal, com ajuda maior ou menor, os estudantes conseguirem introduzir o elemento auxiliar decisivo, que é o triângulo retângulo em destaque na

figura 1, o professor deverá estar convicto de que seus alunos veem bastante adiante, antes de encorajá-los a passar aos cálculos.

- Acreditamos que foi uma boa ideia traçar aquele triângulo. Agora temos um triângulo, mas e a incógnita?
- A incógnita é a hipotenusa do triângulo. Podemos calculá-la pelo Teorema de Pitágoras.
- Muito bem! Agora temos um plano.

### Execução do plano

Executar o plano é muito mais fácil; paciência é a maior necessidade. Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno *verifique cada passo*.

A questão principal é que o estudante fique honestamente convicto da correção de cada passo. Em certos casos, pode o professor realçar a diferença entre “perceber” e “demonstrar”: *É possível perceber claramente que o passo está certo? Mas pode também demonstrar que o passo está certo?*

Retomemos ao problema proposto. Agora, o aluno tem a ideia da resolução. Ele percebe o triângulo ABC, do qual a incógnita  $x$  é a hipotenusa e a altura dada  $c$  é um dos catetos; o outro cateto é a diagonal da base. Deve-se, possivelmente, insistir para que o estudante adote uma notação apropriada. Ele pode escolher  $y$  para denotar o outro cateto, que é a diagonal da face cujos lados são  $a$  e  $b$ . Assim, conseguirá perceber com maior clareza a ideia da resolução, que consiste em introduzir um problema auxiliar cuja incógnita será  $y$ . Por fim, aplicando o Teorema de Pitágoras, primeiramente no triângulo da base do paralelepípedo e, em seguida, no triângulo ABC, ele poderá chegar a

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + c^2 \\ y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

e daí, eliminando a incógnita auxiliar  $y$ , temos:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

E, por fim, como  $x > 0$ , podemos escrever que

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

A seguir, analisaremos a última etapa da proposta de Polya.

### Reflexão sobre a resolução completa

Segundo Polya (2006), assim que a solução do problema é encontrada, os alunos (mesmos aqueles notáveis) tendem a fechar os livros e buscar outros assuntos. Assim, eles perderiam uma etapa importante do processo, que corresponde a reconstruir o problema, ratificando e consolidando o resultado final.

Na visão do autor, um dos primeiros deveres do professor é levar os seus alunos a perceberem que os problemas matemáticos sempre guardam alguma relação entre si e que essa relação é verificada quando se faz uma reflexão acerca do que foi feito para se chegar à solução.

Voltando ao problema, o nosso foco agora é determinar a resposta, uma vez que o caminho para tal é conhecido. Assim, sendo  $a = 1,20$  m,  $b = 1$  m e  $c = 2,10$  m, a diagonal tem medida  $x$  dada por

$$x = \sqrt{(1,20)^2 + (1)^2 + (2,10)^2} \cong 2,6 \text{ metros.}$$

De acordo com Polya, são várias as indagações a serem apresentadas pelo professor, entre elas, a seguinte:

- *O nosso problema é da Geometria Espacial: em simples linhas, nos levou a calcular a diagonal de um paralelepípedo de dimensões dadas, **a**, **b** e **c**. Ele é análogo a outro problema, agora da Geometria Plana: calcular a diagonal de um retângulo de dimensões dadas, **a** e **b**. O resultado do nosso problema “espacial” será análogo ao resultado do problema “plano”?*

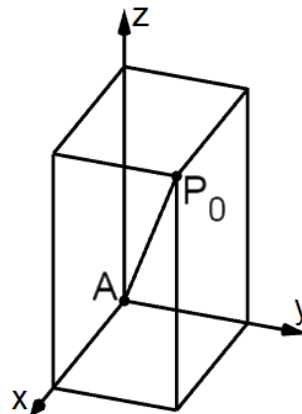
Polya acredita que questionamentos como esse produzem bons resultados. Para ele, primeiro porque o aluno deduziu, cuidadosamente, a fórmula que o levou a obter a solução pretendida; segundo porque potencializa a capacidade do aluno para resolver problemas semelhantes.

Finalmente, podemos refletir sobre a generalização do problema proposto, motivados pelas ideias de Polya:

um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer (POLYA, 2006).

Nesse sentido, uma generalização “rápida” para o nosso problema reside no seguinte questionamento: *Fixado o vértice A, qual é o ponto do paralelepípedo (ou interno a ele) mais distante de A?* Ressaltamos que problemas dessa natureza são abordados em disciplinas mais avançadas (como o Cálculo Diferencial), estudadas em diversos cursos de graduação. Uma forma de resolver esse problema consiste em definir uma função, digamos  $f$ , que é a distância do ponto  $A(0, 0, 0)$  fixado até um ponto  $P(x, y, z)$  do espaço, dada por  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , com  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  e  $0 \leq z \leq c$ . Em seguida, encontra-se o ponto  $P_0$  (figura 2).

Figura 2 – Paralelepípedo.



Fonte: Autor.

Um problema ainda mais geral, também tratado no Cálculo Diferencial, pode ser formulado do seguinte modo: “*Dado um ponto A do espaço, exterior a uma esfera, encontre os pontos que pertencem à esfera e estão mais próximo e mais distante de A*”.

## 4 A INFORMÁTICA A SERVIÇO DO ENSINO DE MATEMÁTICA

Nesta seção discutimos sobre a nossa preocupação a respeito do papel que a escola pode desempenhar no sentido de preparar os estudantes para enfrentar a revolução tecnológica instalada no mundo contemporâneo. Propomos a inserção contínua do computador e de outros meios na sala de aula de Matemática para criar ambientes favoráveis à construção do conhecimento. Esses procedimentos implicam não somente em uma mudança de mentalidade, mas, também, em reconstruir os métodos de ensino existentes ou criar novos.

### 4.1 O computador na sociedade do conhecimento

Segundo Valente (1999, p. 29) a Educação, enquanto atividade [essencial] de um povo, sofre e se adequa às concepções paradigmáticas que vive a sociedade. Portanto, ela passa pelas mesmas transformações que outros segmentos da sociedade passam. Logo, há muitas indagações a respeito de como a revolução tecnológica instalada no mundo contemporâneo deverá afetar a Educação.

De acordo com Hirsch (1997) a mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento. Ainda segundo o autor, embora tudo indique que a escola deverá sofrer ajustes para se adequar aos novos tempos, o quanto ela deverá mudar é polêmico. Ele acredita que, nesse intervalo de tempo, a escola deve oscilar entre o ensino tradicional e a aquele que busca romper com esse modelo.

Para Valente (1999, p. 1), hoje, a utilização de computadores na educação é muito mais diversificada, interessante e desafiadora, do que simplesmente a de transmitir informação ao aprendiz.

Quando o aluno usa o computador para construir o seu conhecimento, o computador passa a ser uma máquina para ser ensinada, propiciando condições para o aluno descrever a resolução de problemas, usando linguagens de programação, refletir sobre os resultados obtidos e depurar suas idéias por intermédio da busca de novos conteúdos e novas estratégias. Nesse caso, o *software* utilizado pode ser os *softwares* abertos de uso geral, como as linguagens de programação, sistemas de autoria de multimídia, ou aplicativos como processadores de texto, *software* para criação e manutenção de banco de dados. Em todos esses casos, o aluno

usa o computador para resolver problemas ou realizar tarefas como desenhar, escrever, calcular, etc. (VALENTE, 1999, p. 2).

O autor afirma que, por outro lado, o uso do computador na criação de ambientes de aprendizagem que enfatizam a construção do conhecimento, apresenta enormes desafios. Ele justifica que, primeiro, implica em entender o computador como uma nova maneira de representar o conhecimento, provocando um redimensionamento dos conceitos já conhecidos e possibilitando a busca e compreensão de novas idéias e valores. Segundo, a formação desse professor envolve muito mais do que provê-lo com conhecimento sobre computadores.

O seu preparo não pode ser uma simples oportunidade para passar informações, mas deve propiciar a vivência de uma experiência que contextualiza o conhecimento que ele constrói. É o contexto da escola, a prática dos professores e a presença dos seus alunos que determinam o que deve ser abordado nos cursos de formação. Assim, o processo de formação deve criar condições para o docente construir conhecimento sobre as técnicas computacionais, entender porque e como integrar o computador na sua prática pedagógica, e ser capaz de superar barreiras de ordem administrativa e pedagógica, possibilitando a transição de um sistema fragmentado de ensino para uma abordagem integradora de conteúdo e voltada para a resolução de problemas específicos do interesse de cada aluno (VALENTE, 1999, p. 2).

Finalmente, ainda sob a análise de Valente (1999, p. 2), esse autor destaca que a implantação da informática, como auxiliar do processo de construção do conhecimento, não depende apenas da formação do professor, mas que toda a comunidade escolar suporte as mudanças educacionais necessárias para a formação de um novo profissional. Nesse sentido, ele aponta que a informática é um dos elementos que deverão fazer parte da mudança, porém essa mudança é muito mais profunda do que simplesmente montar laboratórios de computadores na escola e formar professores para a utilização desses laboratórios.

Ressaltamos que, embora as referências mencionadas nesta seção não sejam de datas recentes, elas continuam atualizadas de acordo com a realidade de muitas escolas.

## **4.2 O software Geogebra**

Existem programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos. Esses programas apresentam recursos que provocam o “pensar matemático”, ou seja, os alunos fazem

experimentos, testam hipóteses, criam estratégias para resolver problemas (BRASIL, 2006).

Um programa muito interessante de Geometria Dinâmica é o Geogebra. Ele é viável por ser gratuito e possuir ferramentas de fácil manuseio, permitindo manipular as construções mais comuns e os elementos fundamentais da geometria, como ponto, reta e plano. É uma ferramenta didática e interativa para o ensino-aprendizagem da Matemática.

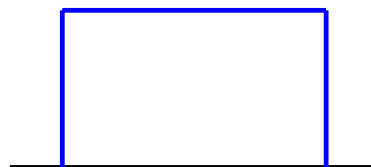
O Geogebra reúne recursos da Geometria e da Álgebra, possibilitando que as atividades promovam, naturalmente, a articulação entre as várias representações que, em geral, são apresentadas de forma isolada nos livros didáticos do ensino básico.

Os recursos dinâmicos do *software* Geogebra permitem explorar relações entre as propriedades algébricas e o comportamento qualitativo de gráficos. Os recursos gráficos possibilitam o controle de valores numéricos por meio de uma ferramenta chamada "controle deslizante". Essa ferramenta traz uma nova perspectiva de exploração de vários conteúdos. Desse modo, sugerimos o Geogebra como um excelente instrumento para ajudar a resolver os problemas de Matemática.

Agora, reunindo as informações apresentadas, queremos exemplificar a utilização desse programa de computador para a Resolução de Problemas. As atividades a seguir devem ser desenvolvidas com o auxílio do *software* Geogebra.

**Atividade 4.1.**<sup>6</sup> *Imagine que você dispõe de 24 metros lineares de tela de arame. Com essa tela, você pretende construir um cercado retangular apoiado em uma parede que já faz parte da sua propriedade, como se vê a seguir:*

Figura 3 – Cercado retangular.



Fonte: Autor.

---

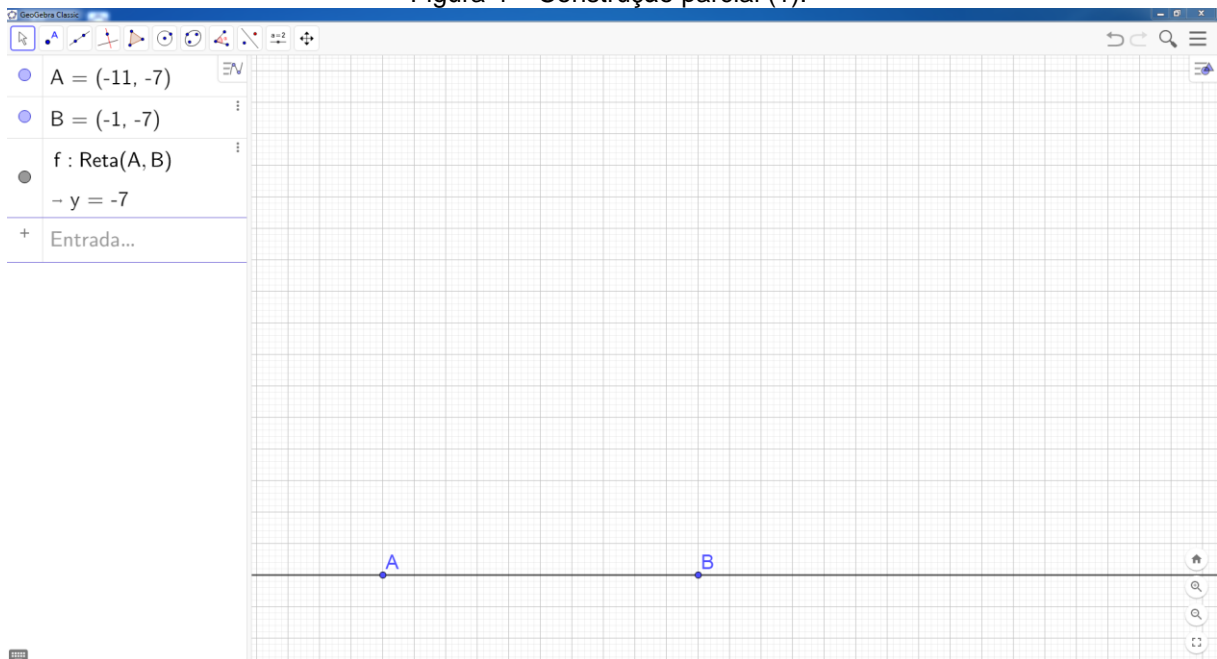
<sup>6</sup> Adaptada de Barichello (2012).

Como você já possui essa quantidade de cerca e pretende usá-la toda, a pergunta que colocamos é: quais devem ser as dimensões do cercado para que toda a tela seja utilizada e para que ele tenha a maior área possível?

**O passo a passo:** Esta atividade deve ser feita em um computador com o Geogebra instalado.

Inicie o *software*, comece ocultando os eixos (clique com o botão direito na janela de visualização e depois desmarque a opção “Exibir eixos”), pois nossa construção será puramente geométrica. Depois, crie uma reta passando por dois pontos quaisquer usando a terceira ferramenta da Barra de Ferramentas. Essa reta será a parede na qual apoiaremos o cercado. Sugerimos que essa reta seja posicionada na parte inferior da tela para facilitar a visualização da construção final. Observe a figura 4.

Figura 4 – Construção parcial (1).



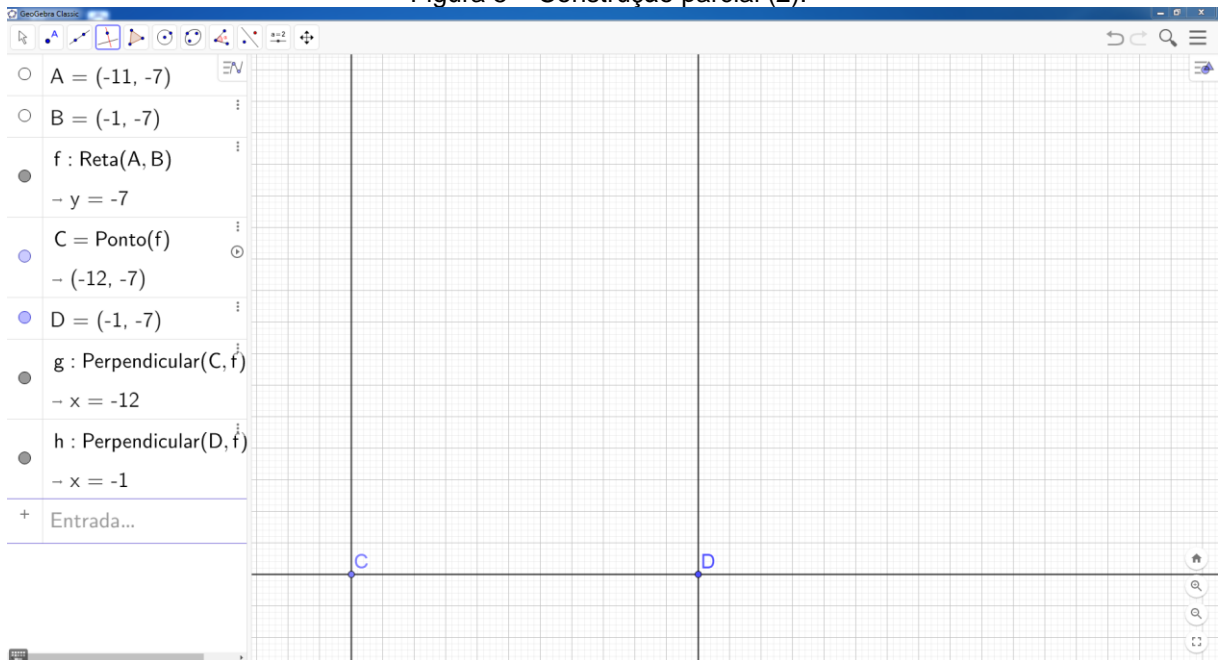
Fonte: Autor.

Agora, oculte os pontos (clique com o botão direito neles e depois em “Exibir objeto”) e crie outros dois sobre a parede (nomeie esses pontos por *C* e *D*). Eles servirão como ponto de contato do cercado com ela. Então, crie duas retas perpendiculares (usando o quarto botão da Barra de Ferramentas) à parede, passando por cada um desses pontos.

A configuração da sua tela deve estar semelhante à que segue, com exceção da variável *p*, que vamos criar agora. Observe a figura 5.



Figura 5 – Construção parcial (2).

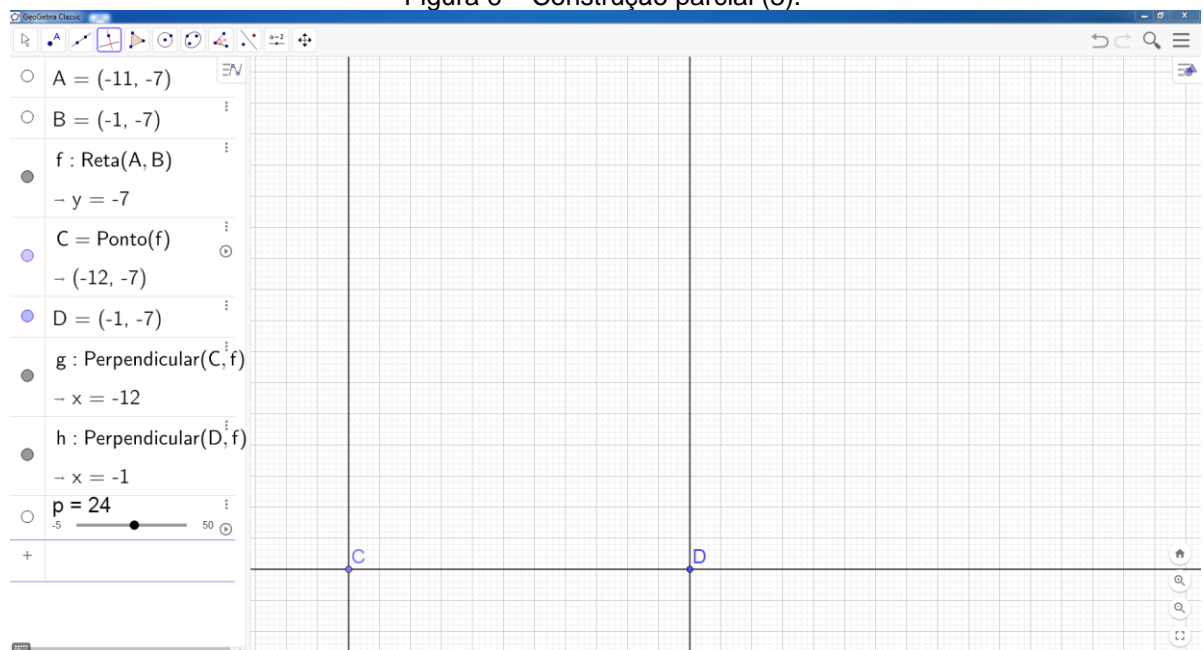


Fonte: Autor.

Essa variável deve conter a metragem total de cerca disponível, ou seja, 24. Para criá-la, digite  $p = 24$  na Barra de Entrada e aperte <ENTER>.

Note que, na janela de Álgebra, há 3 objetos na categoria “Objetos Livres” ( $p$  e os pontos  $A$  e  $B$ ) e outros na categoria “Objetos dependentes”. Isso significa que os três primeiros foram criados livres, sem restrições, enquanto que os outros dependem deles; por exemplo, a reta  $f$  está “presa” aos pontos  $A$  e  $B$ . Observe a figura 6.

Figura 6 – Construção parcial (3).

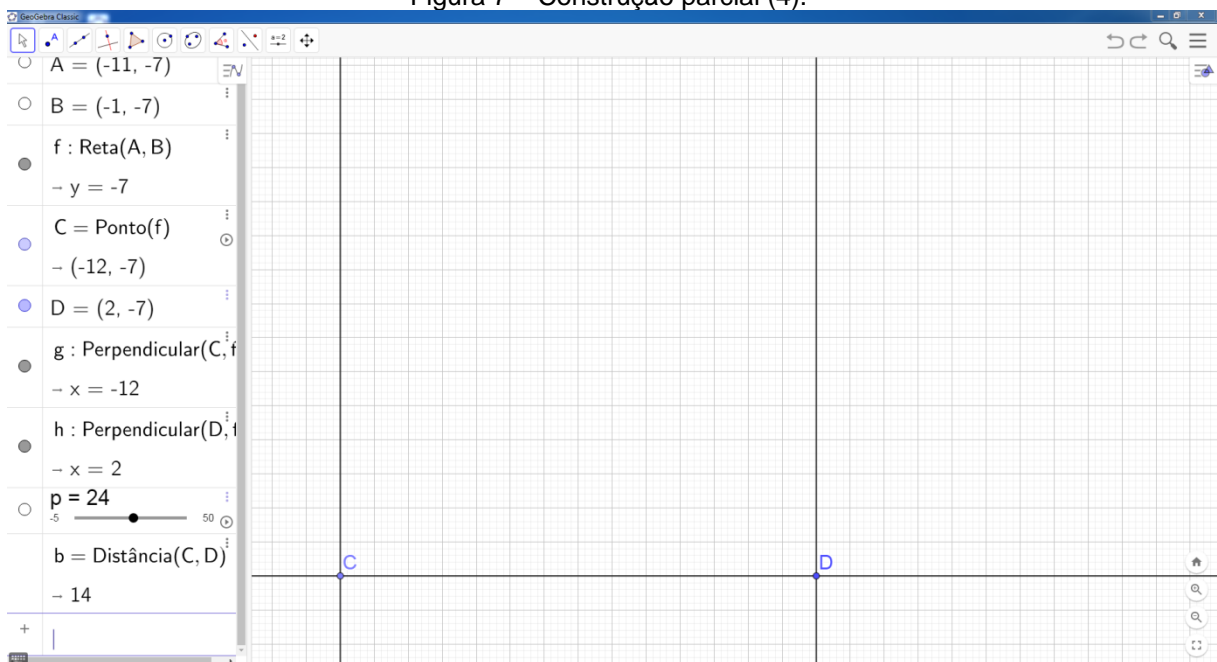


Fonte: Autor.

Agora, digite na Barra de Entrada o seguinte texto:  $b = \text{distância}(C, D)$  e aperte <ENTER>. Com isso, você vai criar uma variável chamada  $b$ , cujo valor será igual à distância entre os pontos  $C$  e  $D$ . Use a ferramenta “Mover” para movimentar o ponto  $C$  ou  $D$ . Veja que o valor da variável  $b$  se altera.

Para ter certeza de que nossa construção vai funcionar, deixe os pontos em uma posição tal que a variável  $b$  tenha valor próximo de 15. Talvez seja necessário utilizar a ferramenta “Zoom” (última da Barra de Ferramentas) para ajustar o espaço disponível na janela de Visualização. Observe a figura 7.

Figura 7 – Construção parcial (4).

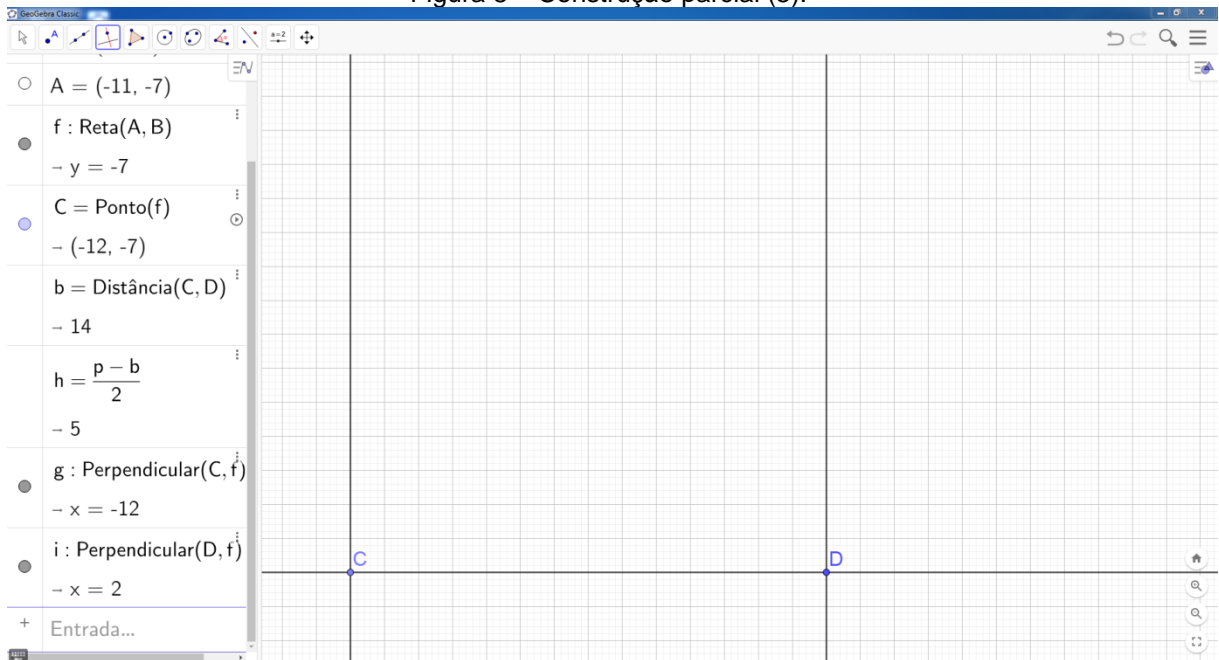


Fonte: Autor.

A última variável que vamos criar é  $h$ , que determinará a medida das laterais do cercado em função da variável  $p$ , que representa o total de tela disponível, e da variável  $b$ , que contém a distância entre os pontos  $C$  e  $D$ , ou seja, a medida da base do cercado.

Pelo enunciado do problema, sabemos que  $p = 2h + b$ , pois toda a tela disponível será usada para construir as duas laterais do cercado e uma das bases (a outra não precisa de tela, uma vez que estará apoiada no muro). Portanto,  $h = (p - b)/2$ . Crie a variável  $h$  no Geogebra digitando exatamente a equação anterior na Barra de Entrada e apertando <ENTER>. Observe a figura 8.

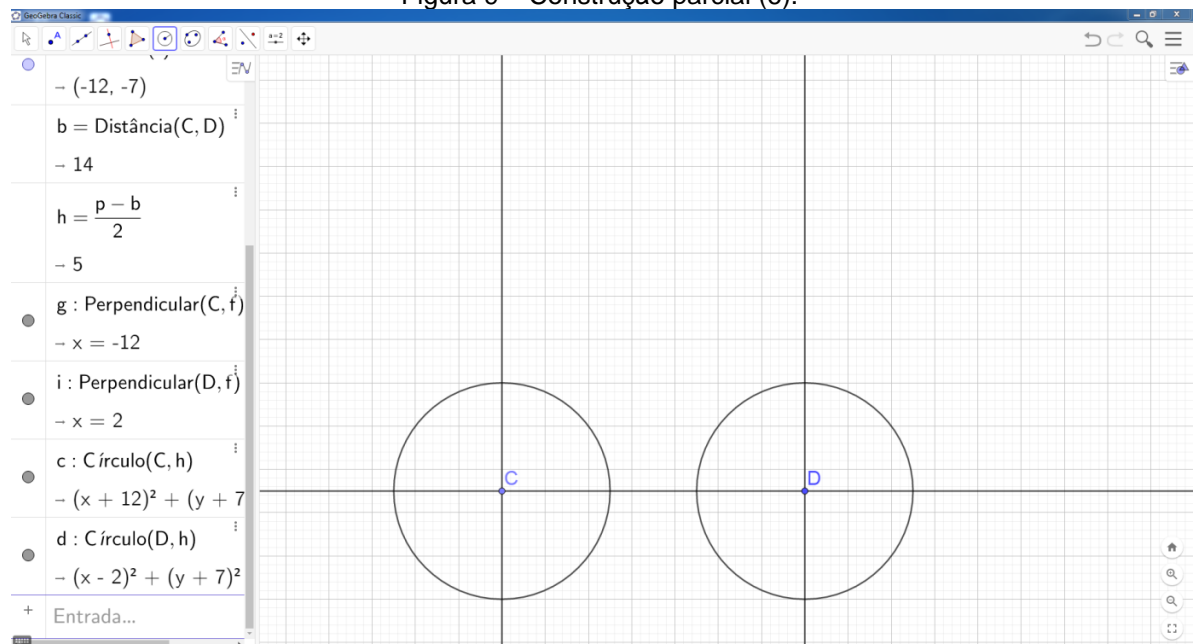
Figura 8 – Construção parcial (5).



Fonte: Autor.

Com a ferramenta "Círculo Dados Centro e Raio" (acessível ao clicar na seta para baixo do sexto botão da Barra de Ferramentas), vamos criar duas circunferências, uma com centro em  $C$  e outra em  $D$ . Para isso, após selecionar a ferramenta mencionada, clique em um dos pontos e depois digite apenas  $h$  na janela que vai se abrir solicitando o valor do raio. Observe a figura 9.

Figura 9 – Construção parcial (6).

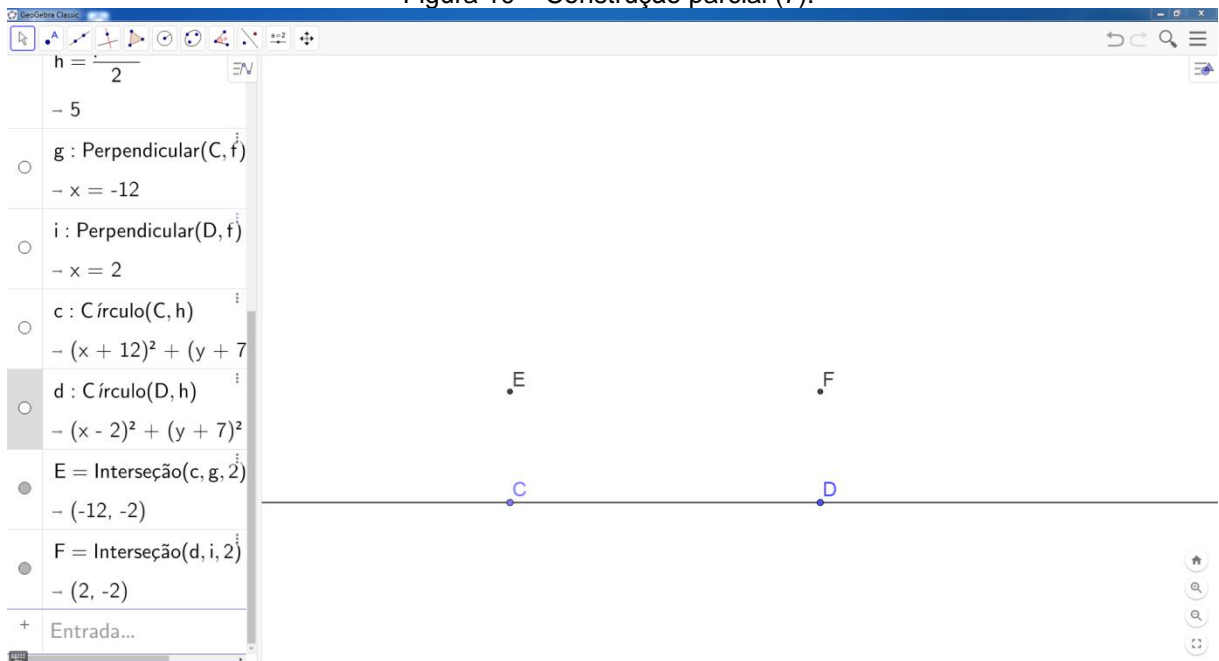


Fonte: Autor.

O encontro de cada uma dessas circunferências com a sua respectiva reta perpendicular representa um vértice (observe os pontos  $E$  e  $F$  na figura 9). Crie esses vértices, os quais delimitarão o cercado, selecionando a ferramenta “Ponto” e clicando bem na interseção de cada reta perpendicular com a circunferência. Certifique-se de ter clicado na interseção dos dois objetos, caso contrário, os pontos ficarão soltos. Para verificar isso, tente arrastá-los com a ferramenta “Mover”. Se você fez corretamente, eles não se moverão.

Agora, oculte as duas retas perpendiculares e os dois círculos. Com isso, você ficará apenas com a reta inicial e os 4 pontos visíveis. Observe a figura 10.

Figura 10 – Construção parcial (7).



Fonte: Autor.

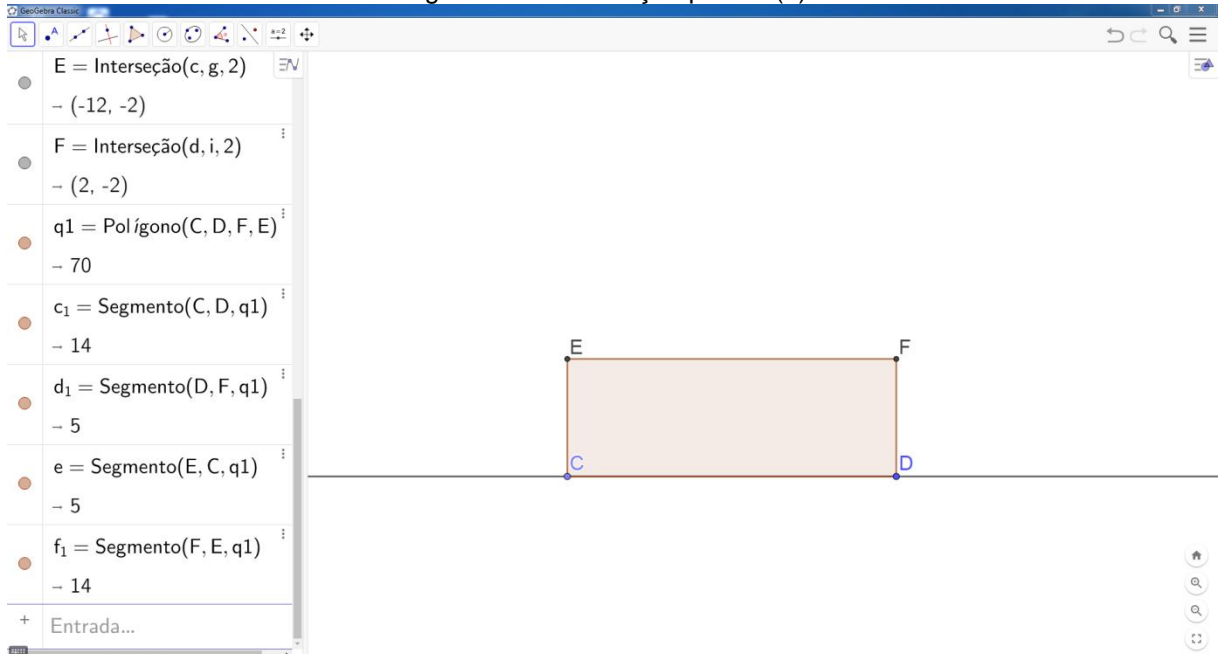
Para visualizarmos melhor o cercado, vamos criar um polígono ligando os 4 pontos visíveis. Clique no quinto botão da Barra de Ferramentas e, então, nos quatro pontos em ordem. É necessário clicar novamente no ponto onde você começou para “fechar” o polígono.

Pronto, com isso a sua construção está funcionalmente pronta! Selecione a ferramenta “Mover” e mova um dos pontos  $C$  ou  $D$  e veja o que acontece com o cercado.

As variáveis  $b$  e  $h$  indicam, respectivamente, a medida da base e das laterais do cercado, enquanto que a variável  $q1$  indica a área dele.

Note que  $2h + b$  será sempre igual a 24, pois utilizamos essa equação para determinar a medida de  $h$ . Observe a figura 11.

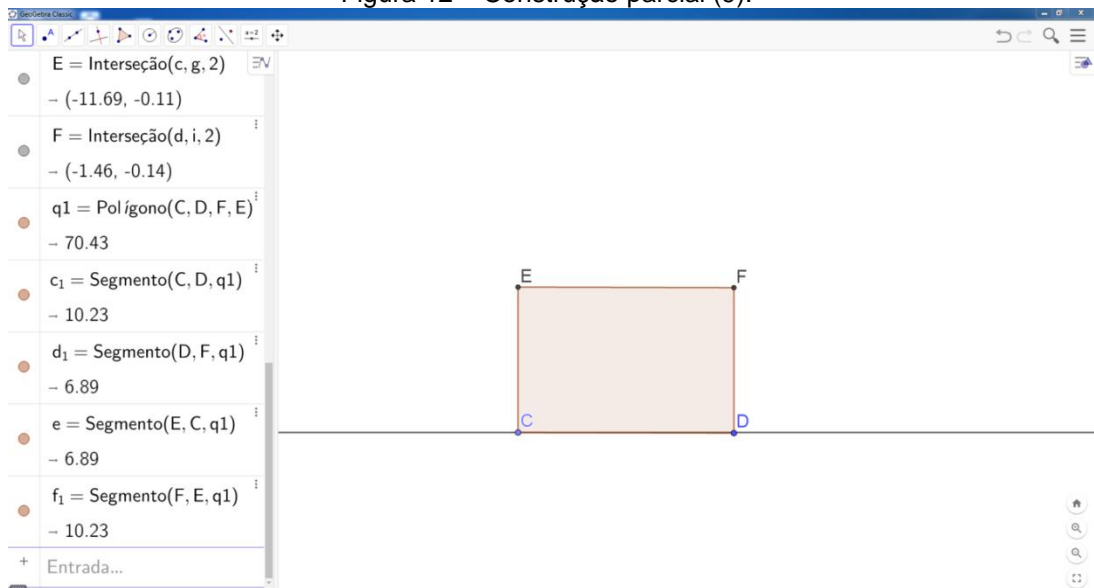
Figura 11 – Construção parcial (8).



Fonte: Autor.

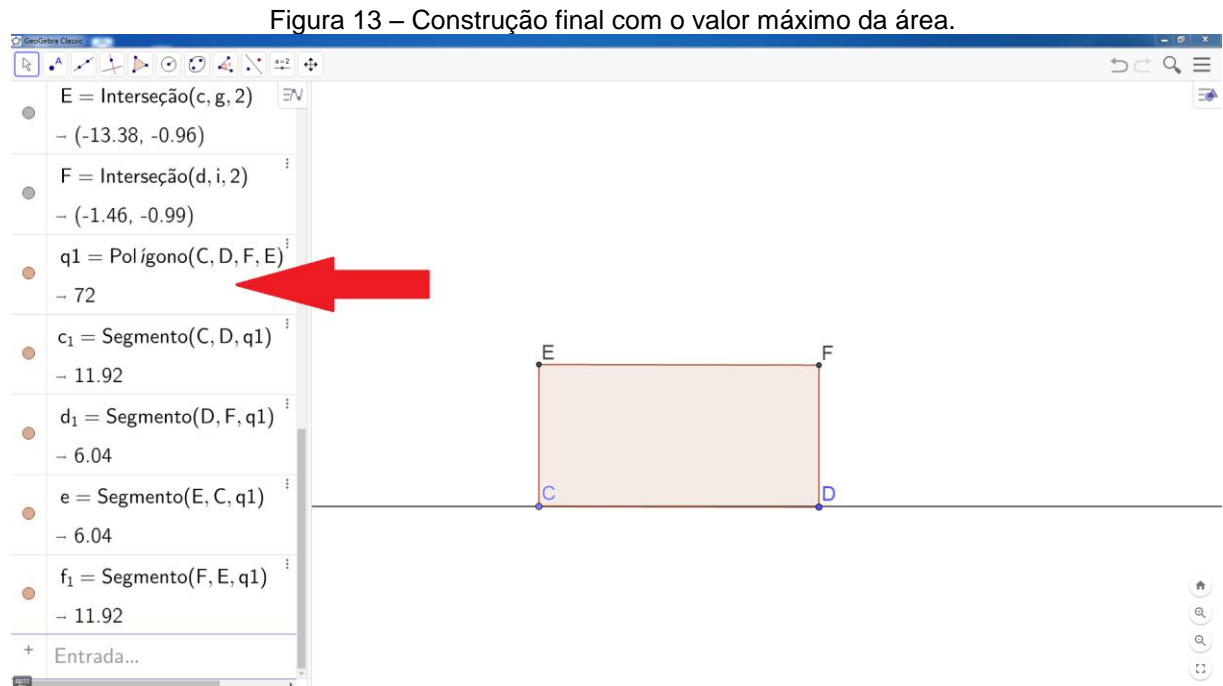
Agora, vamos usar a construção para encontrar uma solução aproximada para o nosso problema original: quais devem ser as dimensões do cercado para que a sua área seja a maior possível? Faça isso movendo os pontos sobre a reta que representa o muro e observando o valor da variável  $q1$ . Observe a figura 12.

Figura 12 – Construção parcial (9).



Fonte: Autor.

Quando você encontrar a posição do ponto que resulta, aproximadamente, na maior área possível, anote esse valor e também as medidas das dimensões do cercado, ou seja, das variáveis  $b$  e  $h$ . Observe a figura 13.



Fonte: Autor.

Observe que o uso do Geogebra permite que você modifique o retângulo (cercado), mantendo a quantidade de tela. A partir dessa modificação você terá uma ideia da solução. É importante destacar que tal procedimento contempla o método de Polya. Nesse momento, os alunos podem comparar os resultados obtidos individualmente.

**Comentários:** Com argumentos algébricos, você pode determinar os valores exatos das medidas obtidas empiricamente com a ajuda do Geogebra. Para tanto, denote a medida da base do retângulo por  $y$  e a da altura por  $x$ . Usando o comprimento total de tela disponível e a fórmula da área de um retângulo, você obterá uma função quadrática, na variável  $x$ , da seguinte forma: como denotamos por  $x$  a medida da altura do retângulo e por  $y$  a medida da sua base, podemos escrever que  $y + 2x = 24$  ou, equivalentemente,  $y = 24 - 2x$ . Por outro lado, a área  $A$  do retângulo é o produto da base pela altura, isto é,  $A = x \cdot y$ . Assim, substituindo o valor de  $y$ , escrito em termos de  $x$ , na fórmula da área, temos a função quadrática  $A(x) = -2x^2 + 24x$ . Para

encontrar as dimensões precisas do retângulo, calculamos a abscissa  $x_v$  do vértice da parábola, ou seja,  $x_v = -\frac{24}{2 \cdot (-2)} = 6$ . Então, a área máxima é  $-2(6)^2 + 24(6) = 72 \text{ m}^2$  e, portanto, o retângulo tem dimensões  $6 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ . O valor de  $x$  que maximiza a função quadrática também pode ser observado quando se constrói, com o auxílio do Geogebra, o gráfico da função  $A(x) = -2x^2 + 24x$ .

Esse problema pode ser abordado a partir da proposta de Polya (apresentada na seção 3); para tanto, execute as quatro etapas discutidas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e reflexão sobre a resolução completa. Acerca desse problema, alguns questionamentos que podemos fazer incluem:

- *E se o retângulo fosse completo (incluindo o outro lado), mas mantendo-se a quantidade de tela, quais as dimensões que maximizam a área?*
- *Se a medida do perímetro do retângulo for igual a “p”, quais são as medidas dos lados do retângulo que possui área máxima? Qual é a medida da área máxima desse retângulo?*

Para uma discussão mais aprofundada sobre as generalizações desse problema, veja Coura & Ferreira (2011).

Outro exemplo de utilização do Geogebra aponta para a simplificação de expressões algébricas, conforme mostraremos na atividade a seguir.

**Atividade 4.2.<sup>7</sup>** Simplifique a expressão  $\frac{(x+2)^3 - x^3}{2}$ .

**O passo a passo:** Do mesmo modo que no problema anterior, você precisará de um computador com o Geogebra instalado.

Uma vez iniciado o *software*, comece ocultando a malha e os eixos, conforme explicamos, também, no problema anterior.

Com o Geogebra, essa atividade torna-se muito fácil. Assim, para simplificar a expressão, digite  $f(x) = ((x + 2)^3 - x^3)/2$  na Barra de Entrada e, em seguida,

<sup>7</sup> Adaptada de Costa *et al.* (2016).

aperte <ENTER>. A figura 14 exibe a expressão digitada, a qual aparecerá na tela após esse comando.

Figura 14 – Expressão algébrica.

$$f(x) = \frac{(x+2)^3 - x^3}{2}$$

Fonte: Autor.

Agora, para simplificar essa expressão basta digitar o comando “Simplificar”, cuja sintaxe é dada por: **Simplificar [f(x)]**. Observe, na figura 15, a resposta que o *software* fornece.

Figura 15 – Expressão algébrica simplificada.

$$g(x) = \text{Simplificar}(f)$$

$$\rightarrow 3x^2 + 6x + 4$$

Fonte: Autor.

**Comentários:** Esse problema tem um contexto interessante quando resolvido com base nas ideias de Polya, se considerarmos que, a partir de um enunciado direto, várias situações podem ser exploradas.

Desse modo, uma vez encontrada a resposta, vamos começar os nossos comentários apresentando uma solução sem o uso do *software* Geogebra. Assim, para simplificar a expressão é necessário, primeiramente, desenvolver o cubo da soma, isto é,

$$\frac{(x+2)^3 - x^3}{2} = \frac{(x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3) - x^3}{2}$$

Reduzindo os termos semelhantes e dividindo por 2, obtemos

$$\frac{(x+2)^3 - x^3}{2} = \frac{6x^2 + 12x + 8}{2} = 3x^2 + 6x + 4,$$

que é a forma simplificada da nossa expressão.



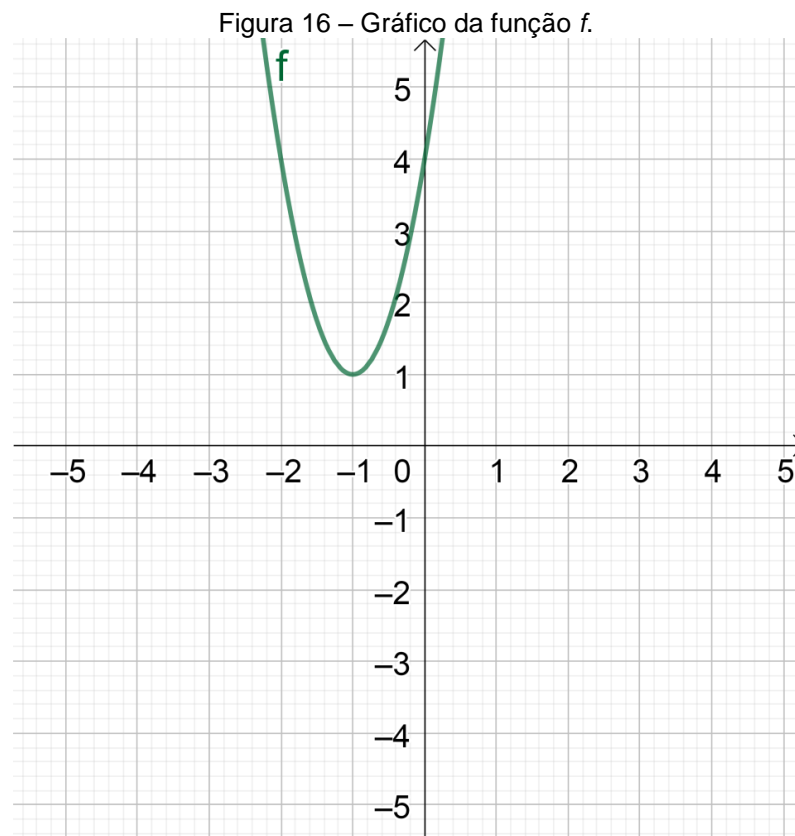
Podemos explorar esse problema fazendo questionamentos como os que seguem.

- *Sem o método utilizado, como você resolveria o binômio que aparece na expressão?*
- *Que interpretação você consegue extrair do polinômio da resposta final?*

Com esses questionamentos, o nosso objetivo é mostrar que o problema continua “aberto”, mesmo diante da resposta obtida. No entanto, uma resposta para o primeiro desses questionamentos consiste na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação ou, ainda, do Binômio de Newton, geralmente estudado em uma das etapas do ensino médio. O segundo item pode ser visto por uma função quadrática, isto é,

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 4,$$

cujo gráfico é uma curva chamada de “parábola”, conforme observamos na figura 16.



Fonte: Autor.

A seguir, apresentamos uma ferramenta valiosa, a qual também pode ser utilizada para resolver os problemas que acabamos de propor.

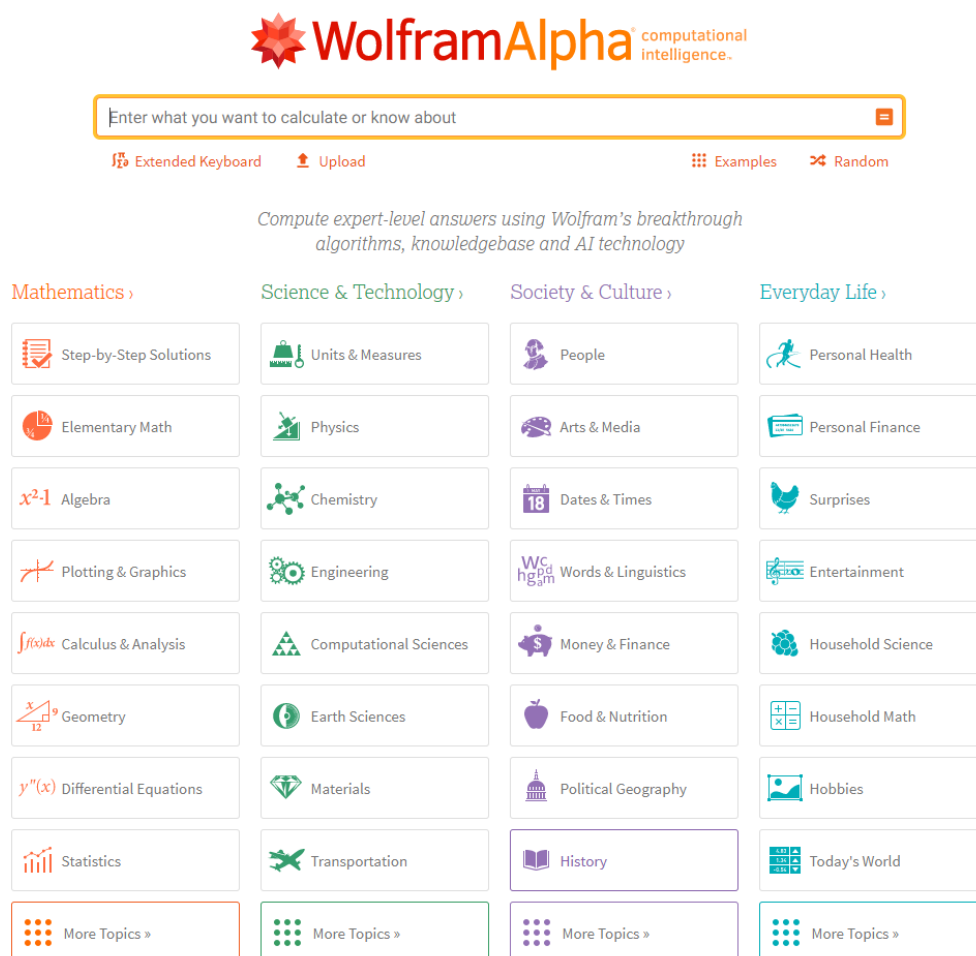
### 4.3 O site WolframAlpha

O WolframAlpha é uma ferramenta computacional que funciona *online*, isto é, em um endereço da internet: <www.wolframalpha.com>. Essa ferramenta possibilita, por exemplo, resolver ou contextualizar os problemas de Matemática.

Segundo Silva (2017), o físico britânico Stephen Wolfram, criador do WolframAlpha, descreve essa ferramenta como uma “máquina de conhecimento computacional” (*computational knowledge engine*).

Para Rodrigues (2011), o WolframAlpha é um mecanismo computacional de conhecimento baseado num motor de busca inovador que fornece respostas concretas às questões formuladas. Segundo ele, esse mecanismo calcula de forma dinâmica os resultados das consultas, científicas ou não, feita sem linguagem natural por aplicação de algoritmos de busca na sua extensa base de dados. Na figura 17, apresentamos a “página inicial” do WolframAlpha.

Figura 17 – Tela do WolframAlpha.



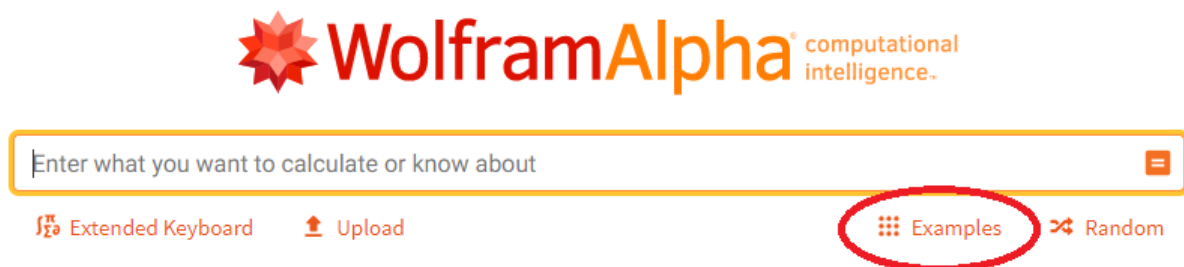
Fonte: Internet, <<https://www.wolframalpha.com/>>.

Uma das vantagens do WolframAlpha é a sua eficiência na oferta de respostas simbólica e gráfica.

A capacidade de fornecimento de respostas detalhadas motivou muita discussão sobre o impacto, tanto positivo como negativo, da sua utilização no processo ensino-aprendizagem, desde que foi lançado, em maio de 2009. No entanto, a experiência da sua utilização mostra a relevância do WolframAlpha no encorajamento dos alunos nos seus trabalhos dentro e fora da sala de aula (RODRIGUES, 2011).

Silva (2017) orienta que através do link “*Examples*” (observe a figura 18), do *site* <<http://www.wolframalpha.com/>>, é possível ter uma visão da abrangência desta ferramenta de busca nas áreas de Matemática, Química, Física, Arte, Astronomia, Geografia, etc.

Figura 18 – Link “*Examples*”.



Fonte: Internet, <<https://www.wolframalpha.com/>>.

A linguagem dentro do WolframAlpha requer a utilização de um “padrão computacional”, isto é, para buscar, por exemplo, respostas sobre questões de Matemática são necessários vários caracteres especiais, chamados de **sintaxe de comando**.

Para ilustrar a utilização desse *site* vamos voltar à atividade 4.2, onde propomos a simplificação da expressão  $\frac{(x+2)^3 - x^3}{2}$ . Para obter a forma simplificada dessa expressão no WolframAlpha a sintaxe é: ***simplify [(x + 2)^3 - x^3]/2***. Observe que, diferentemente do Geogebra, que possui versão em Língua Portuguesa, as palavras que constituem a sintaxe de comando do WolframAlpha devem ser digitadas em Língua Inglesa, haja vista que esse é o idioma padrão do *site* e que, além disso, ainda não há uma versão em Português. Assim, após enviar o comando através do link “*Examples*”, obteremos a expressão simplificada (figura 19).

## Título 19 – Utilização do WolframAlpha.



simplify  $[(x + 2)^3 - x^3]/2$

Extended Keyboard Upload Examples Random

Input interpretation:

simplify  $\frac{1}{2}((x + 2)^3 - x^3)$

Results:   Step-by-step solution

$3x^2 + 6x + 4$

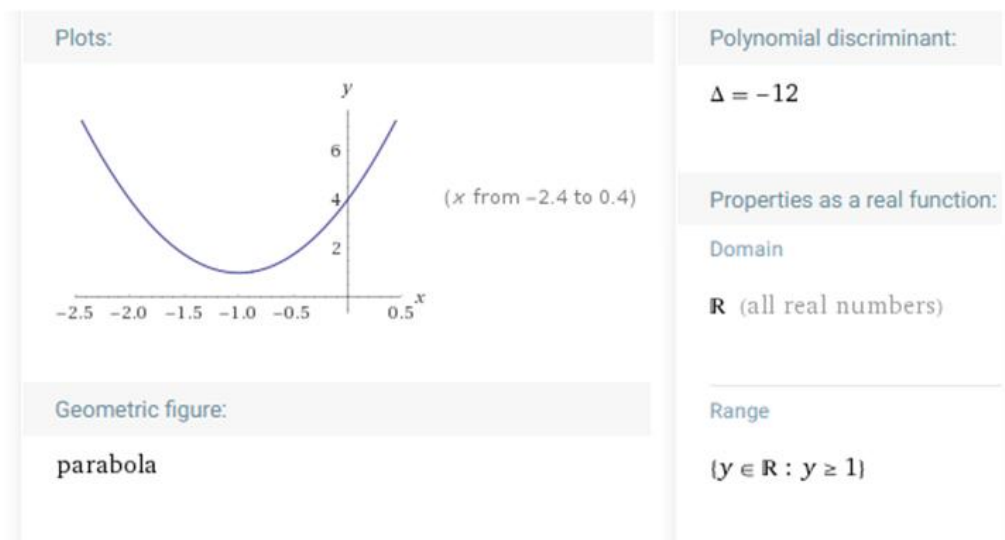
$x(3x + 6) + 4$

$3x(x + 2) + 4$

Fonte: Internet, <<https://www.wolframalpha.com/>>.

Podemos destacar dois fatos interessantes: o WolframAlpha fornece uma mesma resposta sob diferentes formas (figura 19). Por outro lado, há uma diversidade de informações complementares sobre essas respostas (algumas delas apresentamos na figura 20), inclusive o gráfico, o qual foi construído na atividade 4.2 com o auxílio do Geogebra.

Figura 20 – Informações fornecidas pelo WolframAlpha.



Fonte: Internet, <<https://www.wolframalpha.com/>>.

Acreditamos que o WolframAlpha pode oferecer uma nova perspectiva para o ensino de Matemática. Esse recurso computacional apresenta alto potencial de sucesso para o professor em suas incursões dentro da sala de aula.

#### 4.4 Objetos de aprendizagem (OA)

Nesta seção, queremos discutir a utilização de Objetos de Aprendizagem (OA) nas aulas de Matemática. Com eles, é possível contextualizar os problemas, despertar o interesse do aluno e dinamizar a abordagem dos conteúdos que serão estudados. Mas, o que são Objetos de Aprendizagem? Não se tem um conceito muito bem estabelecido sobre Objetos de Aprendizagem. Sua definição possui várias versões e não há um consenso universalmente aceito a partir delas.

De acordo com Sá Filho e Machado, Objetos de Aprendizagem são definidos como:

recursos digitais que podem ser usados, reutilizados e combinados com outros objetos para formar um ambiente de aprendizado rico e flexível. [...] podem ser usados como recursos simples ou combinados para formar uma unidade de instrução maior (SÁ FILHO & MACHADO, 2003, p. 3-4).

Para Wiley (2000), os Objetos de Aprendizagem podem ser entendidos como “qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para o suporte ao ensino”. Os Objetos de Aprendizagem podem ser criados em qualquer mídia ou formato, podendo ser simples como uma animação ou uma apresentação de *slides* ou complexos como uma simulação. Eles utilizam-se de imagens, animações e *applets*, documentos VRML (realidade virtual), arquivos de texto ou hipertexto, dentre outros.

Um exemplo de OA é o jogo intitulado de “Pentaminós”<sup>8</sup>. Nele, o objetivo é que o estudante forme retângulos. Esse recurso digital pode ser utilizado com alunos de diferentes séries ou ciclos e, embora esteja relacionado com a Geometria, ele é indicado para trabalhar outros conteúdos de Matemática, porque explora a criatividade e o raciocínio, elementos frequentes dentro da disciplina. Além disso, é possível planejar o uso desse OA em outras disciplinas, pois habilidades cognitivas, como a concentração, a memória e a recreação, também estão conectadas com a proposta do jogo. Observe a disposição inicial das peças desse jogo na figura 21.

---

<sup>8</sup> Fonte:

<[www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/pentaminos/pentamino64/index.html](http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/pentaminos/pentamino64/index.html)>.

Figura 21 – Tela do OA “Pentaminós”.



Fonte: Internet, <[www.projetos.unijui.edu.br](http://www.projetos.unijui.edu.br)>.

Outro exemplo de OA é a “Gincana da Probabilidade”<sup>9</sup>. Esse Objeto de Aprendizagem representa um jogo de perguntas e respostas a respeito de Probabilidade. A figura 22 mostra uma das telas desse jogo.

Figura 22 – Tela do OA “Gincana da Probabilidade”.

A partir desse caso vamos estudar situações em que nos interessa descobrir o número de possibilidades que um fato tem de acontecer e como fazer para indicá-los com frações e porcentagens.

Por exemplo, quando lançamos um dado, são seis (6) as possibilidades de sair um número na face voltada para cima. Dessas seis possibilidades, três (3) são as de se obter um valor que seja número par, por isso dizemos que a possibilidade de sair número par no lançamento de um dado é  $\frac{1}{2}$  ou 50%, pois  $3 \text{ em } 6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$ .

Agora responda as questões, em relação à explicação anterior, colocando o valor correspondente na forma de fração e porcentagem:

- Qual a probabilidade de sair um número ímpar no lançamento de um dado?
 

Fração:  **VERIFICAR**

Porcentagem:  **VERIFICAR**
- No lançamento de um dado há mais chance sair um número maior do que 4 ou um número menor do que 4?
 

**VERIFICAR**
- No lançamento de um dado qual a chance de cada um dos seis números sair?
 

Fração:  **VERIFICAR**

Porcentagem:  **VERIFICAR**

**VOLTAR** **AVANÇAR**

Fonte: Internet, <[www.projetos.unijui.edu.br](http://www.projetos.unijui.edu.br)>.

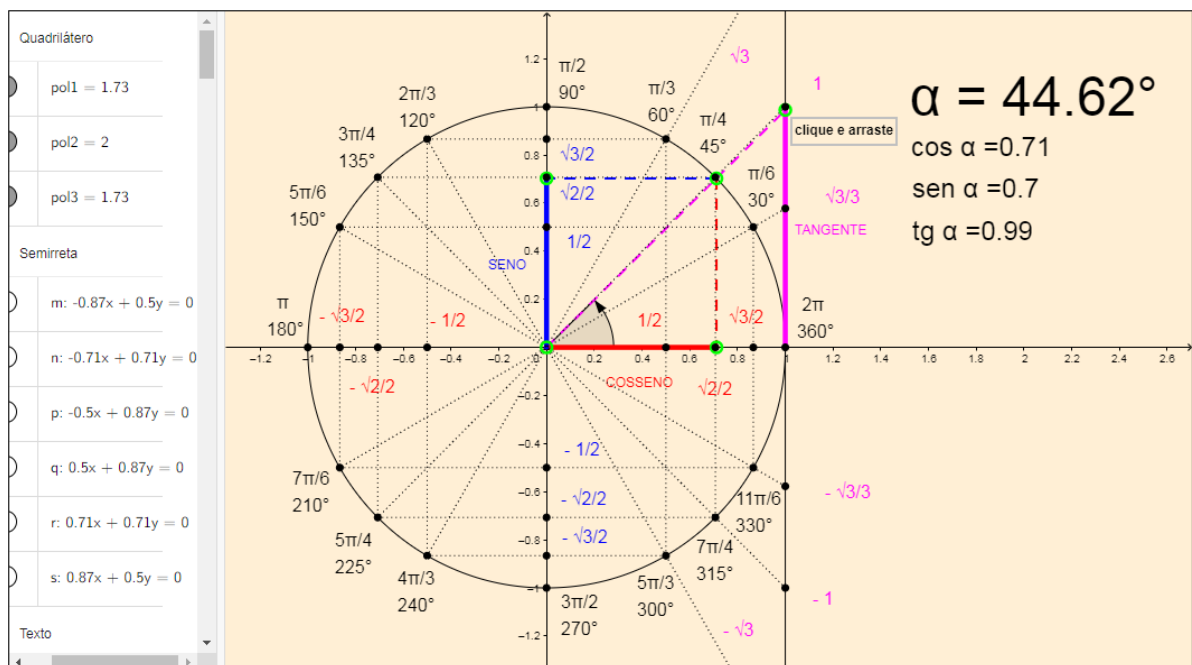
Observe a simplicidade das perguntas. Essa atividade pode auxiliar o professor no sentido de despertar o interesse do aluno, não apenas introduzindo o computador nas aulas, mas diversificando-as. Os conceitos podem ser construídos a

<sup>9</sup> Fonte: <[www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica\\_virtual/daniele/index.html](http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/daniele/index.html)>.

partir de problemas simples, aplicados de tal maneira que o estudante seja tomado de curiosidade, buscando vencer as etapas do jogo e, ao mesmo tempo, aprendendo Probabilidade.

Para finalizar, destacamos o “Ciclo Trigonômétrico”<sup>10</sup>, o qual representa uma montagem *online* da circunferência trigonométrica com os seus arcos. Esse OA facilita o trabalho do professor no momento em que ele vai ensinar Trigonometria. Como essa montagem foi feita através do *software* Geogebra, os arcos podem ser rapidamente construídos e modificados com a ferramenta “controle deslizante”, a qual o programa oferece. A figura 23 exibe a tela inicial desse OA.

Figura 23 – Tela do OA “Ciclo Trigonômétrico”.



Fonte: Internet, <[www.univates.br/roau/download/102/index.html](http://www.univates.br/roau/download/102/index.html)>.

Os Objetos de Aprendizagem apresentados anteriormente servem de referência para o professor. O nosso objetivo é incentivar a utilização desses recursos nas aulas de Matemática, para resolver problemas ou expor os conteúdos. Desse modo, ressaltamos que há outros OAs disponibilizados nos diversos canais da Internet, os quais podem ser pesquisados e consultados pelo professor. Por fim, queremos destacar que o *software* Geogebra é uma excelente ferramenta para a criação de materiais digitais, conforme vimos no OA “Ciclo Trigonômétrico”.

<sup>10</sup> Fonte: <[www.univates.br/roau/download/102/index.html](http://www.univates.br/roau/download/102/index.html)>.

## 5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM PRÁTICA

Nesta seção, vamos propor e/ou discutir problemas de Matemática no contexto das ideias apresentadas na seção 3. Iniciamos com uma proposta japonesa para o estudo da Matemática e, também, para identificar talentos na área.

### 5.1 Uma elegante ideia japonesa

O Japão é um país incrível. Afirmamos isso com base nas características sabidamente notáveis desse país, como a sua cultura milenar, potencial tecnológico e índice de desenvolvimento humano. O Japão representa, atualmente, a terceira maior economia do mundo<sup>11</sup>.

Neste momento, destacaremos um ente singular da cultura japonesa, o qual tem forte relação com a geometria euclidiana: o *Sangaku*. Segundo, Horiuchi (2010, p. 30), os *Sangakus* são placas retangulares, em madeira, que, discretamente penduradas nos alpendres dos templos budistas e dos santuários do xintoísmo, traziam enunciados de problemas, os quais eram propostos, com ou sem a solução. A autora afirma que a maioria dessas placas encontradas em nossos dias remonta ao século XIX, mas que, no entanto, essa prática já era corrente em meados do século XVII.

Para Horiuchi (2010, p. 30), o conteúdo e a forma dos *Sangakus* mudaram pouco desde época em que surgiram.

Os *Sangakus* são relativamente sucintos e inspirados, na maioria dos casos, em composições geométricas complexas, nas quais quadrados, círculos e elipses (ou ainda esferas e cubos) se imbricam ou se cruzam harmoniosamente proporcionando um grande deleite visual (HORIUCHI, 2010, p. 30).

Ainda de acordo com essa autora, as placas tinham vários objetivos, entre eles:

- divulgar os jovens talentosos isolados e desprovidos de recursos;
- colocar desafios e, com isso, submeter-se à crítica;

---

<sup>11</sup> Segundo dados da Fundação Alexandre de Gusmão (FUNAG). Disponível para consulta em: <[http://www.funag.gov.br/ipri/images/analise-e-informacao/01-Maiores\\_Economias\\_do\\_Mundo.pdf](http://www.funag.gov.br/ipri/images/analise-e-informacao/01-Maiores_Economias_do_Mundo.pdf)>. Acessado em 28 de dezembro de 2019.

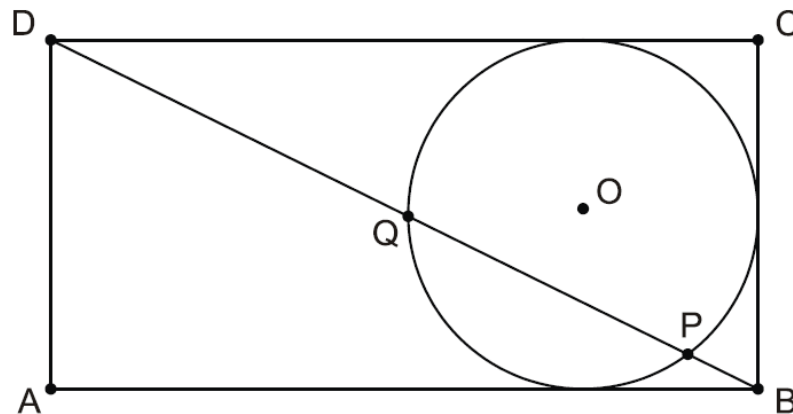


- fazer a propaganda das escolas (tal propaganda acabava divulgando o nome do mestre e sua filiação).

Entre os objetivos principais das placas, percebemos uma semelhança com a OBMEP: a busca por jovens talentos. Assim, tanto a OBMEP quanto a proposta japonesa são projetos significativos baseados na Resolução de Problemas. A seguir, destacamos um exemplo de *Sangaku* presente no Vestibular da UFMG no ano de 2013.

**Problema 5.1. (Vestibular UFMG/2013 – Adaptado)** Considere  $ABCD$  um retângulo com  $\overline{AB} = 160$  cm e  $\overline{AD} = 80$  cm; tome uma circunferência de centro  $O$  tangente aos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$  do retângulo, e seja  $BD$  uma de suas diagonais, interceptando a circunferência nos pontos  $P$  e  $Q$ , como na figura 24.

Figura 24 – Retângulo  $ABCD$ .



Fonte: Autor, baseado no Vestibular UFMG 2013.

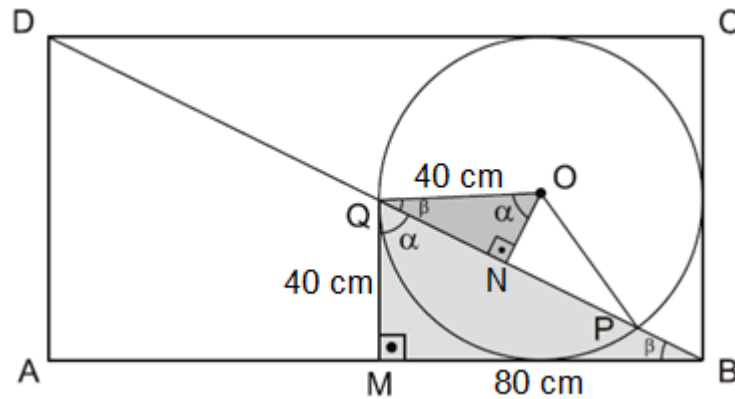
Considerando essas informações, determine:

- a) o raio  $QO$  da circunferência;
- b) o comprimento do segmento  $PQ$ .

**Uma solução:** Considerando as informações dadas no enunciado e a figura 24, construímos a figura 25. Assim, denotamos por  $M$  o ponto médio de  $AB$  e por  $N$  o ponto médio de  $PQ$ . Observe que o ângulo  $M\hat{Q}B$ , de medida  $\alpha$ , é um ângulo de segmento, correspondente ao arco menor  $PQ$ , de medida  $2\alpha$ . Essa medida corresponde ao ângulo central  $P\hat{O}Q$ . Então, a medida do ângulo  $P\hat{O}Q$  é igual a  $2\alpha$ .

Como  $ON$  é a altura (e também a bissetriz) do triângulo isósceles  $POQ$ , a medida do ângulo  $\widehat{NÔQ}$  vale  $\alpha$ . Por fim, denotamos por  $\beta$  a medida do ângulo  $\widehat{M\hat{B}Q}$ .

Figura 25 – Retângulo ABCD preenchido.



Fonte: Autor, baseado no Vestibular UFMG 2013.

a) O raio da circunferência mede  $80 \div 2 = 40$  cm.

b) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $MQB$ , temos:

$$\overline{BQ}^2 = 40^2 + 80^2,$$

e, fazendo as contas,

$$\overline{BQ} = 40\sqrt{5} \text{ cm.}$$

Assim, como os triângulos  $NOQ$  e  $MQB$  são semelhantes (caso AA), segue que:

$$\frac{\overline{MQ}}{80} = \frac{40}{40\sqrt{5}},$$

donde,

$$\sqrt{5} \cdot \overline{MQ} = 80,$$

e,

$$\overline{MQ} = 16\sqrt{5} \text{ cm.}$$

Agora, podemos escrever

$$\overline{PQ} = 2 \cdot 16\sqrt{5},$$

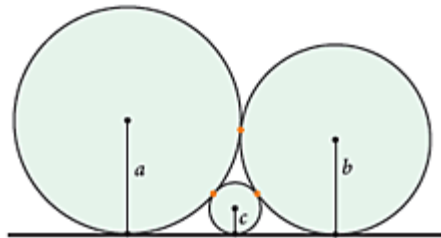
que, multiplicando, encontramos

$$\overline{PQ} = 32\sqrt{5} \text{ cm.}$$

Os *Sangakus* são desafios, geralmente complexos, conforme podemos verificar nos problemas 5.2 e 5.3 a seguir.

**Problema 5.2.**<sup>12</sup> Na figura 26, as três circunferências de raios  $a$ ,  $b$  e  $c$  são simultaneamente tangentes duas a duas e a uma reta.

Figura 26 – Desenho referente ao problema 5.2.

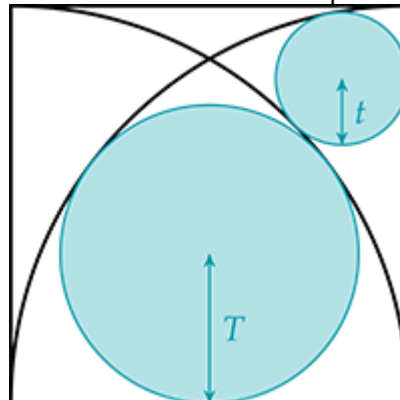


Fonte: Internet, <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/83/7.html>>.

Prove que  $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ .

**Problema 5.3.**<sup>13</sup> Considere a figura 27.

Figura 27 – Desenho referente ao problema 5.3.



Fonte: Internet, <<https://www.maths.ed.ac.uk/school-of-mathematics/outreach/contours-magazine/2014-15-edition>>.

Assim, mostre que  $4T = 9t$ .

**Um projeto de Resolução de Problemas para a escola:** apresentamos a proposta japonesa para mostrar que ideias simples podem despertar nos alunos o gosto e o prazer pela Matemática. Assim, sugerimos a criação de um projeto dentro da escola, com base nessa proposta. Acreditamos que ela pode contribuir para quebrar alguns

<sup>12</sup> Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/83/7.html>>. Acessado em 28 de dezembro de 2019.

<sup>13</sup> Extraído e adaptado de: UNIVERSIDADE DE EDIMBURGO. **Sangaku problems**. Disponível em: <<https://www.maths.ed.ac.uk/school-of-mathematics/outreach/contours-magazine/2014-15-edition>>. Acessado em 28 de dezembro de 2019.

tabus e preconceitos, especialmente aqueles que traduzem a “aversão” que muitos alunos têm pela Matemática. Uma vantagem desse projeto é a facilidade de sua aplicação, que, resumidamente, consiste em criar ambientes de estudos e discussões dentro da escola através da Resolução de Problemas. Nesse contexto, a proposta japonesa pode ser uma referência para os professores, podendo ser adotada com a sua configuração original ou adaptada. Os problemas podem ser colocados, por exemplo, em murais ou quadros de recados. Podem, ainda, ganhar mais destaque, ocupando tarefas dentro de gincanas e/ou grêmios estudantis. Enfatizamos esse projeto porque uma vez instituído, promoverá a discussão, a curiosidade e a reflexão, elementos indispensáveis no universo escolar.

## **5.2 Praticando a Resolução de Problemas: PAPMEM e OBMEP**

Neste item, elencamos dois eventos sabidamente relevantes no que diz respeito à Matemática no Brasil: PAPMEM, uma proposta de formação continuada para os professores e OBMEP, uma Olimpíada de Matemática para os estudantes. Esses eventos modelam, razoavelmente, a metodologia de Resolução de Problemas, exatamente a nossa proposta dentro deste trabalho.

O Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio<sup>14</sup> – PAPMEM – consiste em treinamento gratuito para professores de Matemática de todo o Brasil. É realizado desde 1990 abordando assuntos relativos ao Ensino Médio. O programa é realizado durante uma semana em tempo integral, das 9 às 17 horas, de modo independente nos meses de janeiro e julho, durante o recesso escolar. Cada um dos módulos do programa é realizado simultaneamente no IMPA e em instituições parceiras de todo o país. Conta atualmente com cerca de 70 polos e de 3.000 professores participantes. As aulas expositivas são ministradas pela manhã e transmitidas ao vivo, via Internet, do IMPA para as instituições participantes em outros estados, utilizando a infraestrutura da Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (RNP). No período da parte da tarde são realizados estudos dirigidos supervisionados por professores de cada polo.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas<sup>15</sup> – OBMEP – é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo

---

<sup>14</sup> Fonte: <<https://impa.br/ensino/programas-de-formacao/linha-do-tempo-dos-cursos/>>.

<sup>15</sup> Fonte: <<http://www.obmep.org.br>>.

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC. Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a OBMEP tem como objetivos principais:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

O público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio. A partir de 2018 foi estendida para alunos do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental e essa nova versão recebeu o nome de “Nível A”.

A OBMEP e o PAPMEM são projetos que visam promover e aprofundar a Matemática no país. Dentro desses projetos, são disponibilizados materiais (geralmente coleções de problemas), cursos e encontros. Assim, professores e alunos têm a oportunidade de adquirir e aperfeiçoar o conhecimento matemático através da discussão e/ou resolução de problemas e, nesse contexto, não apenas a formação continuada está em pauta, mas temos aqui uma proposta pedagógica que pode ser desenvolvida dentro da escola como instrumento de aprendizagem de Matemática. Nessa perspectiva, destacamos o PIC<sup>16</sup> e o Banco de Questões da OBMEP, ambos abordados na página da própria OBMEP na Internet. A seguir,

---

<sup>16</sup> O Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) é um programa que propicia ao aluno premiado em cada edição da OBMEP entrar em contato com interessantes questões no ramo da Matemática, ampliando o seu conhecimento científico e preparando-o para um futuro desempenho profissional e acadêmico. Fonte: <<http://www.obmep.org.br/pic.htm>>.

vamos tratar de alguns problemas no contexto dos projetos que acabamos de apresentar.

### 5.3 Alguns problemas motivadores

Para finalizar esta seção, selecionamos alguns problemas que aparecem nas provas dos projetos de Matemática citados neste trabalho, bem como em exames e processos seletivos. Ressaltamos que esses problemas não foram separados por anos (séries), mas construímos uma miscelânea, haja vista que eles podem ser solucionados por meio de diferentes conteúdos, os quais são organizados sistematicamente entre as etapas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. O professor e/ou o aluno interessado em utilizar essa miscelânea pode escolher as questões de acordo com o seu interesse ou pode, também, buscar mais problemas nas fontes que consultamos:

- Provas e soluções da OBMEP (<[www.obmep.org.br/provas.htm](http://www.obmep.org.br/provas.htm)>);
- Banco de questões da OBMEP (<[www.obmep.org.br/banco.htm](http://www.obmep.org.br/banco.htm)>);
- Apostilas do PIC (<[www.obmep.org.br/apostilas.htm](http://www.obmep.org.br/apostilas.htm)>);
- Revista “Eureka!” (<[www.obm.org.br/revista-eureka/](http://www.obm.org.br/revista-eureka/)>);
- ENQ – PROFMAT (<[www.profmat-sbm.org.br/](http://www.profmat-sbm.org.br/)>).

Acreditamos que os problemas a seguir atendem as definições e metodologias apresentadas nas seções anteriores. Além disso, eles podem ser resolvidos de acordo com a proposta de Polya. Para simplificar o nosso estudo, voltaremos as nossas atenções à última etapa dessa proposta, a qual trata da “reflexão sobre a resolução completa”, onde Polya (2006), afirma que “problema algum fica definitivamente resolvido”.

**Problema 5.4.** *Deduza a fórmula resolutiva da equação do segundo grau (conhecida como fórmula de Bhaskara).*

**Uma solução:** Esse problema foi proposto na seção 3 e, conforme indicamos, vamos apresentar agora uma solução. Para tanto, considere a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais, com  $a \neq 0$ .

Assim, podemos fatorar o polinômio, colocando o coeficiente  $a$  em evidência, isto é,

$$a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = 0.$$

Completando quadrados, podemos escrever:

$$a \left[ x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = 0$$

e, organizando os termos, temos

$$a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0.$$

Agora, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos que:

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0,$$

ou, ainda,

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Daí, considerando  $b^2 - 4ac \geq 0$ , segue que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|},$$

e, novamente organizando os termos, temos

$$x = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}.$$

Finalmente, escrevendo convenientemente a equação, temos a fórmula resolutive da equação do segundo grau,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

como queríamos demonstrar.

**Questionamentos:** Note que quando  $b^2 - 4ac \geq 0$ , as soluções são números reais.

O que acontece quando  $b^2 - 4ac < 0$ ? Nesse caso, as soluções não são números reais. Entretanto, há um conjunto, chamado de Conjunto dos Números Complexos,

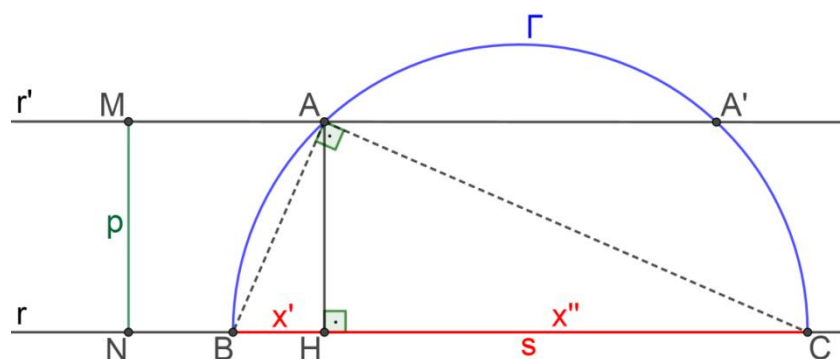
no qual a equação admite soluções. Aprofundando os nossos questionamentos, podemos perguntar: equações da forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  (conhecidas como equações polinomiais do terceiro grau), com  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  constantes reais e  $a \neq 0$ , sempre têm soluções? Como podemos encontrá-las? E equações dessa forma, com o maior expoente sendo 4, 5, ...,  $n$ , sempre têm soluções? Questões dessa natureza são estudadas em cursos superiores de graduação, como Matemática e Engenharia.

A equação do segundo grau pode ser resolvida geometricamente sob determinadas condições, conforme aponta Neto (2013, p. 135). Segundo ele, o problema deve ser formulado da seguinte maneira: “Dados dois segmentos de comprimentos  $s$  e  $p$ , tais que  $s > 2p$ , construa com régua e compasso as raízes da equação do segundo grau  $x^2 - sx + p^2 = 0$ , cujas raízes são positivas”.

Ainda de acordo com esse autor, a solução para esse problema consiste em uma construção geométrica cujos passos são os seguintes:

1. Trace uma reta  $r$  e marque sobre a mesma pontos  $B$  e  $C$  tais que  $\overline{BC} = s$ . Em seguida, construa um semicírculo  $\Gamma$  de diâmetro  $BC$ .
2. Trace a reta  $r'$ , paralela à reta  $r$  e à distância  $p$  de  $r$ , a qual intersecta  $\Gamma$  nos pontos  $A$  e  $A'$  (uma vez que  $p < s/2$ ).
3. Se  $H$  é o pé da perpendicular baixada de  $A$  a  $BC$ , então  $\overline{BH} + \overline{CH} = s$  e, utilizando uma das relações métricas do triângulo retângulo (já que o triângulo  $ABC$  determinado é retângulo em  $A$ ), podemos escrever que  $\overline{BH} \cdot \overline{CH} = p^2$ . Logo,  $\overline{BH}$  e  $\overline{CH}$  são as raízes  $x'$  e  $x''$ , respectivamente, da equação do segundo grau do problema proposto. Na figura 28, apresentamos a construção que acabamos de descrever.

Figura 28 – Construção geométrica.



Fonte: Autor.



**Problema 5.5.**<sup>17</sup> Sabemos que 24 é múltiplo de 4 e também de 6, já que esse número é o produto entre 4 e 6. Assim, 24 é o menor múltiplo comum entre 4 e 6?

**Uma solução:** A resposta é não. Para encontrar o mínimo múltiplo comum (mmc) entre os números 4 e 6, podemos avaliar os múltiplos de cada um desses números, isto é,

- $M(4) = \{0, 4, 8, \underline{12}, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots\}$ ;
- $M(6) = \{0, 6, \underline{12}, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \dots\}$ .

Observe, em destaque, que o mmc entre os números 4 e 6 é 12.

**Questionamentos:** Podemos generalizar esse problema, acrescentando, também, a ideia de máximo divisor comum (mdc). Dados dois números naturais quaisquer, como podemos encontrar o menor múltiplo comum entre eles? Por outro lado, dados dois números quaisquer, como podemos encontrar o máximo divisor comum entre eles?

Os problemas anteriores são resolvidos a partir da decomposição de números naturais em fatores primos. Esses problemas são tratados pela Aritmética, que segundo Hefez (2016), representa a parte elementar da Teoria dos Números.

**Problema 5.6. (PAPMEM – Janeiro de 2013)** Sabendo que  $x$  e  $y$  são números reais tais que  $x^2 + y^2 = 8x + 6y - 16$ , qual é o maior valor possível de  $x$ ?

**Uma solução:** Uma maneira de solucionarmos este problema consiste, principalmente, em mostrar que  $x^2 + y^2 = 8x + 6y - 16$  é a equação de uma circunferência centrada no ponto  $C = (4, 3)$ .

De fato, a equação

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y = 0,$$

pode ser reescrita, completando quadrados, como

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 0.$$

Então,

---

<sup>17</sup> Fonte: Autor.

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 9,$$

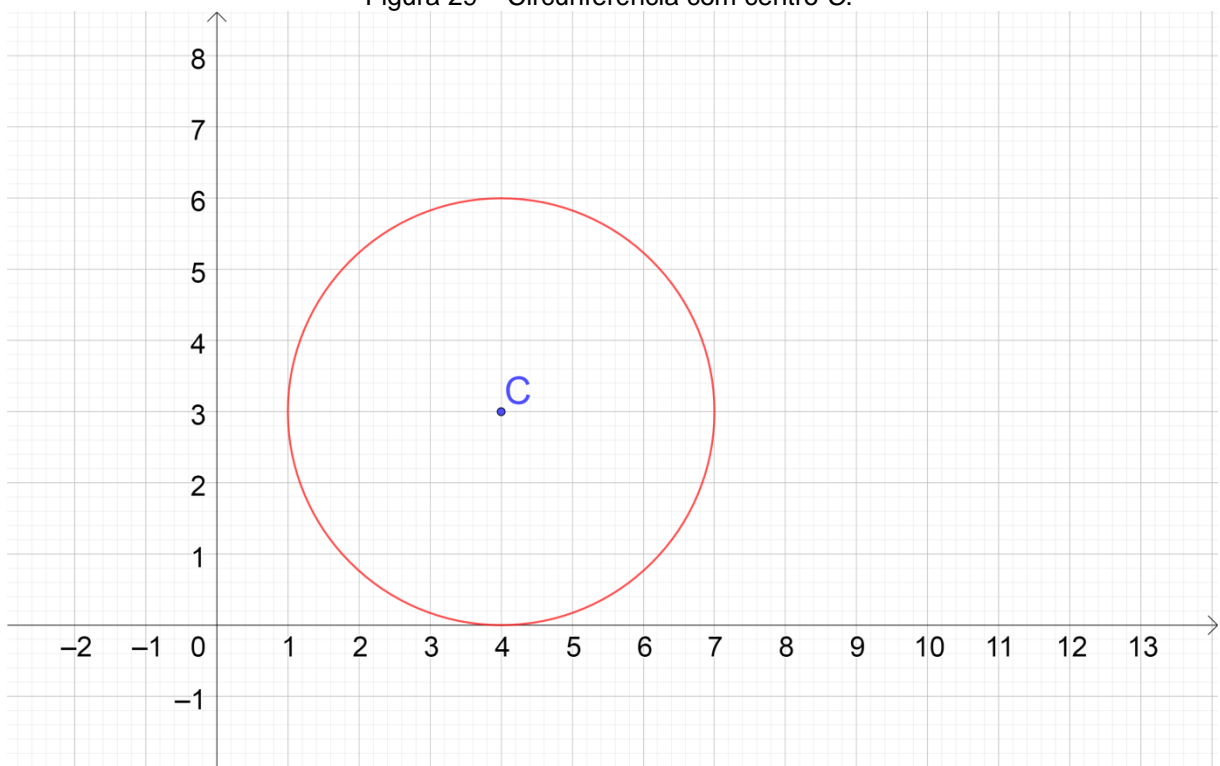
obtendo, finalmente,

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2,$$

que é a equação de uma circunferência de centro  $C = (4, 3)$  e raio igual a 3.

Assim, note que o maior valor possível para  $x$  ocorrerá quando o termo  $(y-3)^2$  for zero, ou seja, para  $y = 3$ . Logo, o maior valor de  $x$  é 7, o que pode ser observado ao construir-se graficamente a circunferência. Observe a figura 29.

Figura 29 – Circunferência com centro C.



Fonte: Autor.

**Questionamentos:** *Há uma solução alternativa para esse problema? Qual é o maior valor de  $y$ ?*

De acordo com a nossa proposta, queremos deixar os questionamentos para alunos e professores que se interessem pelas atividades. No entanto, no caso do primeiro questionamento, a resposta é sim.

Para tanto, considere a equação

$$y^2 - 6y + (x^2 - 8x + 16) = 0.$$

Como  $x$  e  $y$  são números reais, podemos interpretá-la como uma equação do 2º grau com os coeficientes constantes, sendo  $a = 1$ ,  $b = -6$  e  $c = x^2 - 8x + 16$ , que possui solução. Daí,  $\Delta \geq 0$ , ou seja,

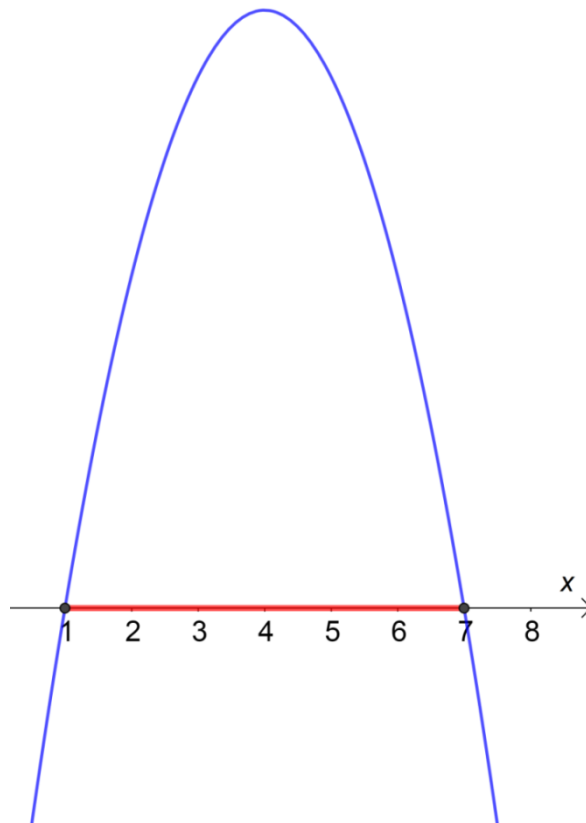
$$6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 8x + 16) \geq 0,$$

que, dividindo por 4 e organizando, vem

$$-x^2 + 8x - 7 \geq 0.$$

Assim, o maior de  $x$ , de acordo com a desigualdade anterior, é 7, o que pode ser observado, também, graficamente (figura 30).

Figura 30 – Gráfico referente à desigualdade da solução alternativa.



Fonte: Autor.

De modo análogo, encontramos o maior valor para  $y$ .

**Problema 5.7. (OBMEP/2010 – Adaptado)** Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

**Uma solução:** Temos dois casos a analisar: (a) Ana recebe dois presentes ou (b) Ana recebe apenas a boneca. No caso (a), Ana recebe a boneca e Tio João deve distribuir os quatro presentes restantes de modo que cada criança, inclusive Ana, receba exatamente um desses presentes. Para isso, ele pode numerar os presentes (que são distintos) e escolher qual das crianças vai ganhar o primeiro presente (4 escolhas), depois qual vai ganhar o segundo (3 escolhas), depois qual vai ganhar o terceiro (2 escolhas) e finalmente qual vai ganhar o último (1 escolha). Isso pode ser feito de  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  maneiras diferentes. No caso (b), Tio João deve distribuir os presentes entre as outras três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos um presente. Desse modo, uma das crianças vai receber dois presentes e as outras duas apenas um. O Tio João deve escolher quem vai receber dois presentes (3 escolhas). Depois disso ele dá um presente para cada uma das crianças que vão receber apenas um presente ( $4 \times 3 = 12$  escolhas) e entrega os presentes restantes à criança que vai ganhar dois presentes (1 escolha). Isso pode ser feito de  $3 \times 12 \times 1 = 36$  maneiras diferentes. No total, Tio João pode distribuir os presentes de  $24 + 36 = 60$  maneiras diferentes.

**Questionamentos:** *A expressão “pelo menos” foi decisiva para o aparecimento dos dois casos na solução? Qual é a interpretação matemática para essa expressão? Sempre que ela aparecer em um problema, teremos dois (ou mais) casos a considerar? Por outro lado, generalizando, e se o Tio Paulo trouxesse mais brinquedos (6, 7, 8, ...)?*

**Problema 5.8.**<sup>18</sup> *Diversas bactérias estão colocadas em um vidro. Um segundo depois, cada bactéria se divide em duas; no próximo segundo, cada bactéria se divide novamente em duas, e assim por diante. Depois de um minuto o vidro está cheio. Em que momento o vidro estava pela metade?*

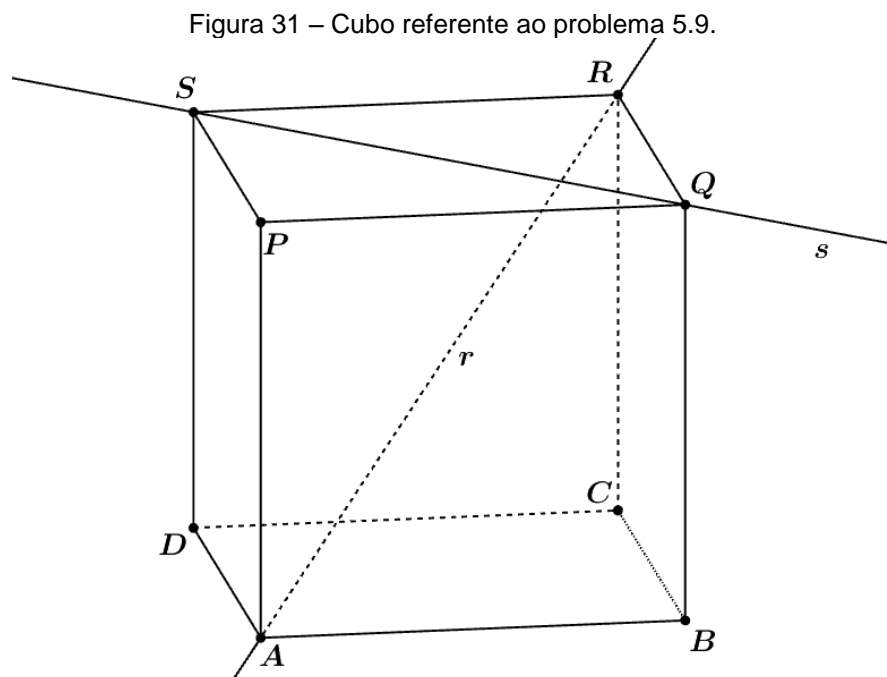
**Uma solução:** Pensando a partir do final, vemos que, se o vidro está cheio depois de 60 segundos, ele tinha que estar pela metade um segundo antes. Resposta: depois de 59 segundos.

---

<sup>18</sup> Extraído e adaptado de Fomin, Genkin, Itenberg (2010, p. 1).

**Questionamentos:** Observe que a ideia principal foi pensar “de trás para frente”. Essa estratégia foi intuitiva para você? É possível conjecturar o problema para outras frações da capacidade do vidro?

**Problema 5.9. (PROFMAT – ENQ/2018.1)** Dadas duas retas reversas  $r$  e  $s$  no espaço, definimos o ângulo entre  $r$  e  $s$  como sendo o menor ângulo entre  $r$  e  $s'$ , onde  $s'$  é qualquer reta paralela a  $s$  e concorrente com  $r$ . Pode-se provar que este ângulo não depende da reta  $s'$  escolhida. Na figura 31, as retas reversas  $r$  e  $s$  são suporte, respectivamente, de uma diagonal do cubo e de uma diagonal de uma de suas faces.

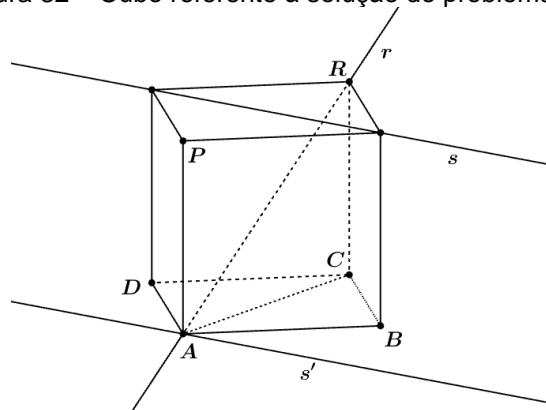


Fonte: Exame Nacional de Qualificação (ENQ) 2018.1 do PROFMAT.

Calcule, de acordo com a definição acima, o cosseno do ângulo entre  $r$  e  $s$ .

**Uma solução:** De acordo com a definição lembrada no enunciado, precisamos determinar o ângulo entre  $r$  e  $s'$ , com  $s'$  paralela a  $s$  e concorrente com  $r$ . Ainda de acordo com o enunciado, pode-se escolher qualquer reta  $s'$  com tais propriedades. Vamos, então, tomar  $s'$  como sendo a paralela a  $s$  que concorre com  $r$  em um dos vértices do cubo, que chamaremos de  $A$ , conforme a figura 32.

Figura 32 – Cubo referente à solução do problema 5.9.



Fonte: Exame Nacional de Qualificação (ENQ) 2018.1 do PROFMAT.

Note que  $s'$  é perpendicular a  $AP$ , pois está contida no plano da face da base do cubo, que é perpendicular à aresta vertical  $AP$ . Além disso, como  $s$  é paralela à diagonal  $BD$  da face  $ABCD$  do cubo,  $s'$  também é paralela a  $BD$ ; por fim, como  $BD$  é perpendicular a  $AC$ ,  $s'$  é também perpendicular a  $AC$ . Então,  $s'$  é perpendicular ao plano  $(ACP)$ , que é o mesmo plano  $(ACR)$ , que por sua vez contém  $r$ . Logo,  $s'$  é perpendicular a  $r$  e, portanto, o cosseno do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é zero.

**Questionamentos:** É possível encontrar uma solução alternativa para esse problema? Outras questões: qual é a medida do ângulo entre as retas determinadas  $\overleftrightarrow{AR}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$ ? E entre  $\overleftrightarrow{QS}$  e  $\overleftrightarrow{PC}$ ?

**Problema 5.10. (PROFMAT – ENQ/2018.1)** Isótopos radioativos de um elemento químico estão sujeitos a um processo de decaimento radioativo. Com o passar do tempo, uma amostra de tais isótopos vai se desintegrando, isto é, emitindo radiação e se transformando em uma amostra de átomos mais estáveis. Sabe-se que este decaimento é de tipo exponencial, isto é, denotando por  $m(t)$  a massa de um determinado isótopo radioativo no instante  $t$ , tem-se

$$m(t) = m_0 \cdot b^t,$$

para algum  $0 < b < 1$ , sendo  $m_0 > 0$  a massa inicial. A **meia vida** deste isótopo, denotada  $T$ , é o tempo necessário para que a massa  $m$  se reduza à metade de seu valor inicial.

a) Determine  $b$  em função de  $T$ .

b) Determine, em função de  $T$ , o tempo necessário para que  $m$  se reduza a um terço de seu valor inicial.

**Uma solução:**

a) Considere  $t_0$  o tempo inicial, isto é,  $m(t_0) = m_0$ . Segue que  $m_0 \cdot b^{t_0} = m_0$ , logo  $t_0 = 0$ .

Se  $T$  é o tempo necessário para que caia à metade a massa  $m$  de uma amostra de isótopos radioativos, a partir do instante  $t_0 = 0$ , temos

$$m(T) = \frac{m_0}{2},$$

logo,

$$m_0 \cdot b^T = \frac{m_0}{2};$$

com isso,

$$b^T = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}.$$

Outra forma de escrever a última relação acima é  $b = 2^{-\frac{1}{T}}$ .

b) Seja  $t$  o tempo necessário para que a massa de uma amostra decaia a um terço.

Temos que

$$m(t) = \frac{m_0}{3},$$

logo,

$$m_0 \cdot b^t = \frac{m_0}{3};$$

portanto,

$$b^t = \frac{1}{3}$$

e, com isso,

$$\left(2^{-\frac{1}{T}}\right)^t = \frac{1}{3}.$$

Assim,

$$2^{\frac{t}{T}} = 3^{-1}$$

ou, ainda,

$$2^{\frac{t}{T}} = 3.$$

Finalmente,

$$\frac{t}{T} = \log_2 3,$$

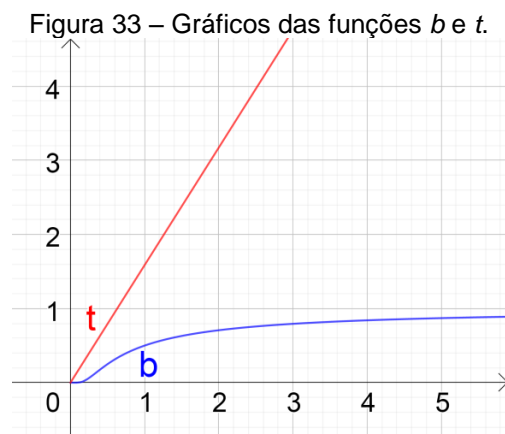
de sorte que

$$t = T \cdot \log_2 3.$$

Assim, o tempo necessário para que a massa de uma amostra decaia a um terço é  $T \cdot \log_2 3$ .

**Questionamentos:** *Outras situações cotidianas têm comportamento exponencial. Assim, generalize o problema a partir dessas situações. Por outro lado, sabendo que as nossas respostas são funções na variável  $T$ , que análise poderíamos fazer se essas funções fossem representadas graficamente?*

A respeito dos questionamentos anteriores, esperamos que os alunos falem sobre outros modelos que apresentam comportamento exponencial. Alguns desses modelos que podem ser citados incluem: juros compostos, cultura de bactérias e crescimento populacional. Sobre o último questionamento, o gráfico da função  $b$  é uma curva. Por outro lado, o gráfico da função  $t$  é uma reta, a qual representa uma função polinomial do primeiro grau crescente, uma vez que  $\log_2 3 > 0$ . Na figura 33, apresentamos os gráficos das funções  $b$  e  $t$ .



Fonte: Autor.



O professor pode estender um pouco mais a discussão referente ao problema 5.10, aprofundando os conteúdos do seu plano de aula, conforme sugere Polya (2006). Desse modo, ele pode falar, por exemplo, a respeito da função exponencial e da função logarítmica, apresentando-as, inclusive, como funções inversas.

Frisamos que vários outros questionamentos podem (e devem) ser feitos acerca dos “problemas motivadores”, os quais sugerimos nesta seção. No âmbito da sala de aula, o estudante deve sempre encontrar um ambiente de interação e discussão. Assim, “quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas idéias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos” (POLYA, 2006).

Por fim, gostaríamos de destacar que ao final deste trabalho, no “Apêndice A”, deixamos uma coletânea de problemas dedicada a professores, estudantes e interessados em resolver problemas de Matemática. Sugerimos que eles sejam resolvidos de acordo com a proposta que estamos apresentando, isto é, deixando-os “abertos”, no sentido de que sempre é possível construir um novo conhecimento, mesmo que o aluno disponha da resposta ou da estratégia de solução.

## **6 NO DIA A DIA COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Para finalizar os nossos estudos exporemos algumas situações e reflexões advindas da sala de aula e vivenciadas pelo autor. Neste final de trabalho, apresentamos, sucintamente, alguns fatos e resultados que, na percepção de Polya, constituem um ambiente favorável.

Queremos mostrar que a Resolução de Problemas é prazerosa e eficiente não apenas nas linhas que erguem este trabalho, mas, assim como a própria Matemática, enquanto ciência mutável, ela pode ser construída e reconstruída dentro da escola.

### **6.1 Fatos e atitudes na sala de aula de Matemática**

As situações descritas a seguir foram observadas em uma escola da rede particular de ensino da cidade de Divinópolis, MG. Essa escola oferece todas as etapas da educação básica. Em particular, o nosso relato refere-se às aulas de Desenho Geométrico de uma das turmas do 9º ano do Ensino Fundamental.

A turma em questão é composta por 32 alunos, a maioria deles com idades de 13 e 14 anos. Essa turma (e as demais) é avaliada semanalmente, através de oito testes, e mensalmente, através de duas avaliações aplicadas durante cada trimestre. Essas atividades são divididas em duas etapas, as quais ocorrem ao longo de três trimestres durante o ano letivo.

Indicados esses aspectos, passamos agora a tratar das questões pedagógicas. Assim, conforme destacamos no início desta seção, o nosso objetivo é mostrar que a Resolução de Problemas configura-se como uma proposta viável; para tanto, basta que o professor esteja motivado a romper com o “tradicionalismo”. Não obstante, esperamos encorajar o professor a rever conceitos, práticas e atitudes no que tange a sua atuação dentro do ambiente escolar.

Iniciando a nossa abordagem, destacamos as práticas pedagógicas adotadas ao longo do primeiro trimestre. Ministramos aulas expositivas, com resolução de exemplos, sempre utilizando uma linguagem clara e objetiva. Ainda assim, em todas as aulas, a nossa proposta fundamentou-se em esgotar completamente os conteúdos planejados, haja vista as recomendações institucionais. Desse modo, ao estudante bastava a reprodução de todas as

informações recebidas, sem muitos questionamentos, afinal, o conteúdo era “entregue” a ele como se estivesse encerrado, não restando qualquer incremento ou observação. Sobre isso, Ribeiro, afirma:

na metodologia tradicional o educador é o ator principal e no seu monólogo, o aluno como ouvinte, só consegue ser um mero repetidor do que ouviu, não sendo capaz de criar sua própria peça (RIBEIRO, 2019).

Acreditamos que faltava espaço para o aluno desenvolver o pensamento criativo, descobrir caminhos e criar estratégias por seus próprios meios. A figura 34 apresenta um dos testes semanais do primeiro trimestre. Nele é possível perceber atividades pouco contextualizadas, as quais exigem basicamente a aplicação direta dos conteúdos estudados em sala de aula. Além disso, percebemos, também, que a interpretação de imagens foi uma habilidade pouco explorada.

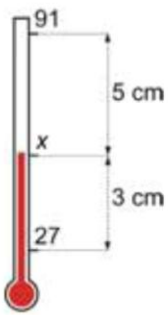
Figura 34 – Teste 1 (1º Trimestre).

**01-TESTE 1 DE DESENHO GEOMÉTRICO - JÚLIO CÉSAR**

1. Sabendo que os segmentos de reta  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{EF}$  e  $\overline{GH}$  são proporcionais, nessa ordem, e que  $AB = x$ ,  $CD = x + 2$ ,  $EF = 12$  cm e  $GH = 16$  cm, determine o valor de  $x$ . **Mostre os cálculos.**

2. Uma pessoa tem 1,80 m de altura, e sua sombra, 2,70 m. Obtenha a razão entre a altura da pessoa e a sua sombra. **Mostre os cálculos.**

3. Kátia encontrou um termômetro com marcação numa escala desconhecida. Havia apenas dois números com marcação legível. Para encontrar a temperatura marcada naquele momento, Kátia achou uma boa ideia fazer medições com sua régua, em cm, conforme a figura a seguir.



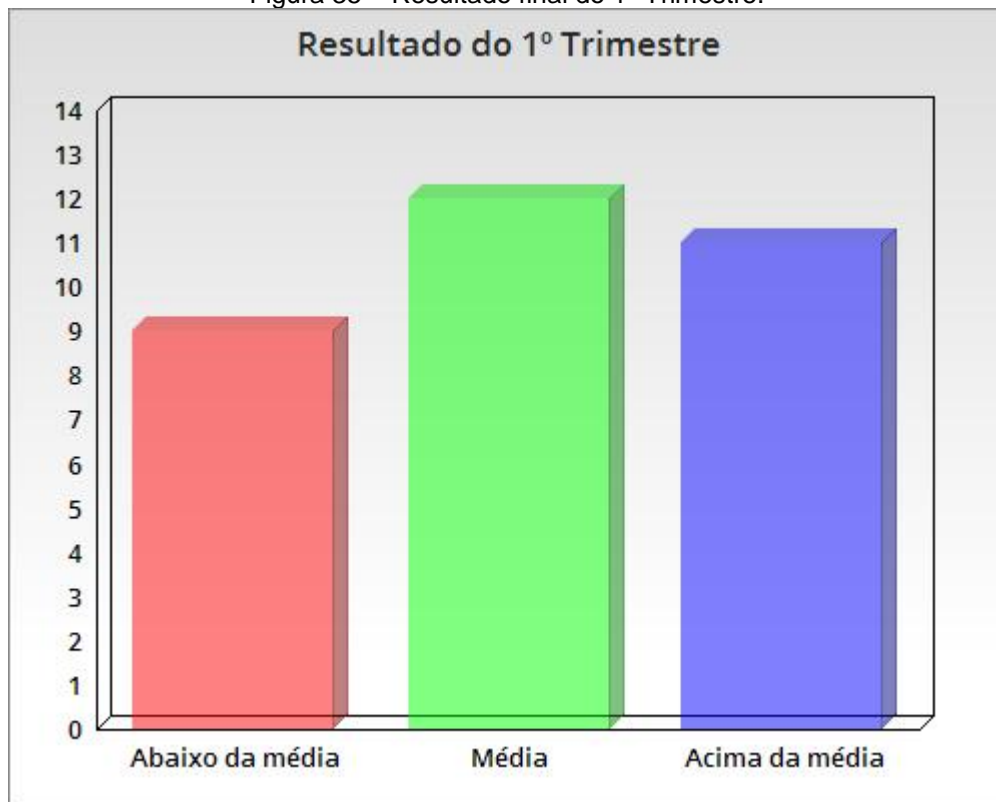
Qual o valor que Kátia encontrou para a temperatura  $x$ ? **Mostre os cálculos.**

Fonte: Autor.

O primeiro trimestre seguiu baseado nessa proposta, digamos “tradicionalista”, sempre buscando finalizar planos de aulas através da reprodução

dos conteúdos. O gráfico de notas da figura 35 serve como objeto de reflexão. Ele nos ajuda a entender que quando o aluno é avaliado a partir da repetição de conteúdos, sem ser instigado a pensar e a buscar estratégias, a aprendizagem pode ficar comprometida.

Figura 35 – Resultado final do 1º Trimestre.



Fonte: Autor.

Ao fim do período, percebemos a necessidade de mudança, no sentido de oferecer significado aos conteúdos, além de planejar aulas que oportunizem o pensamento criativo dos alunos. A seguir, detalharemos essas questões.

## 6.2 Alguns resultados e reflexões

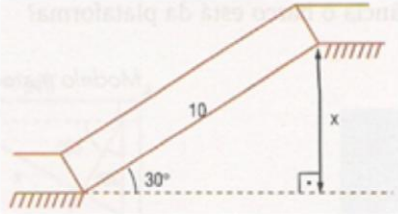
Os resultados do primeiro trimestre e as situações descritas anteriormente evidenciaram a necessidade de uma nova postura. Assim, adotamos uma proposta didática fundamentada na perspectiva de que o aluno é questionador e inventor. Levamos algumas ideias da Resolução de Problemas, discutidas nas seções 3, 4 e 5, para a sala de aula.

As primeiras mudanças ocorreram na confecção das atividades avaliativas, conforme mostra um teste semanal do segundo trimestre, apresentado na figura 36.

Figura 36 – Teste 3 (2º Trimestre).

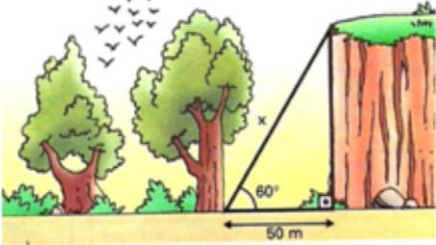
**01-TESTE 3 DE DESENHO GEOMÉTRICO - JÚLIO CÉSAR**

**1.** Uma rampa lisa de 10 m de comprimento faz um ângulo de  $30^\circ$  com o plano horizontal (observe a figura abaixo).



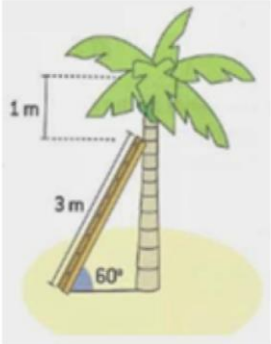
Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se verticalmente em quantos metros? **Mostre os cálculos.**

**2.** O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta mede  $60^\circ$  (observe a figura abaixo).



Sabendo-se que a árvore está distante 50 m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta? **Mostre os cálculos.**

**3.** Uma escada de 3 m de comprimento está apoiada 1 m abaixo do topo de um coqueiro, formando com o solo um ângulo de  $60^\circ$ .



Determine a altura do coqueiro. **Mostre os cálculos.**

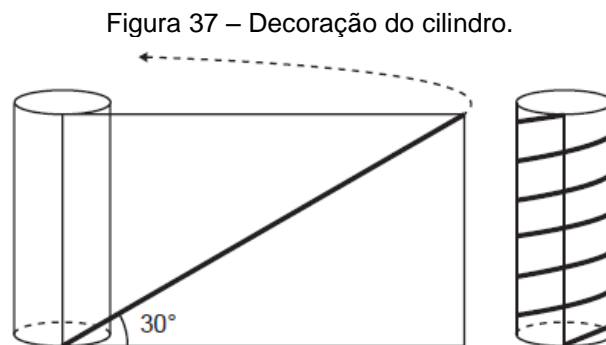
Fonte: Autor.

Observe, nesse teste semanal, a presença de atividades contextualizadas e, principalmente, de figuras. A interpretação da imagem ajuda o aluno a compreender o problema, promove o raciocínio e, desse modo, facilita a criação de estratégias.

Por outro lado, as atividades desenvolvidas em sala de aula foram escolhidas de modo a despertar no aluno o interesse pela Matemática, de tal modo que ele passou a ser confrontado com situações-problema do mundo real, desafiando e provocando a sua curiosidade. Aproveitando as características dos alunos da faixa etária em questão, no que se refere à necessidade de constante comunicação, escolhemos uma abordagem que favoreceu a interação entre eles. Preparamos atividades em grupos, visando incentivar o intercâmbio de signos entre os alunos, bem como entre professor e alunos.

As atividades em grupos foram desenvolvidas a partir de uma lista de problemas, os quais foram escolhidos de acordo com os aspectos que destacamos anteriormente. Observe, abaixo, um desses problemas (disponibilizamos a lista completa no “Apêndice B” deste trabalho).

**Problema 6.1. (ENEM/2018)** Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em **negrito** uma diagonal que forma  $30^\circ$  com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede  $\frac{6}{\pi}$  cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura 37.



Fonte: ENEM 2018.

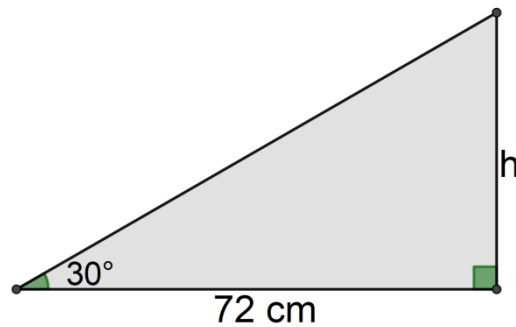
O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

- a)  $36\sqrt{3}$ .                      b)  $24\sqrt{3}$ .                      c)  $4\sqrt{3}$ .                      d) 36.                      e) 72.

**Uma solução:** De acordo com a figura, a medida do comprimento da circunferência da base do cilindro de raio  $\frac{6}{\pi}$  cm é  $2\pi \cdot \frac{6}{\pi}$  cm = 12 cm.

A segunda parte da figura sugere que o papel transparente deu *seis* voltas no cilindro e, portanto, a medida do comprimento do retângulo é de  $6 \cdot 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}$ . Assim, podemos construir o triângulo retângulo a seguir, no qual,  $h$  é a altura procurada.

Figura 38 – Triângulo retângulo.



Fonte: Autor.

Nesse triângulo, temos que

$$\text{tg}(30^\circ) = \frac{h}{72 \text{ cm}}.$$

Substituindo o valor da tangente de  $30^\circ$  na equação anterior,

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{72 \text{ cm}}.$$

Assim, efetuando os cálculos,  $h = 24\sqrt{3} \text{ cm}$ . A resposta é a alternativa *B*.

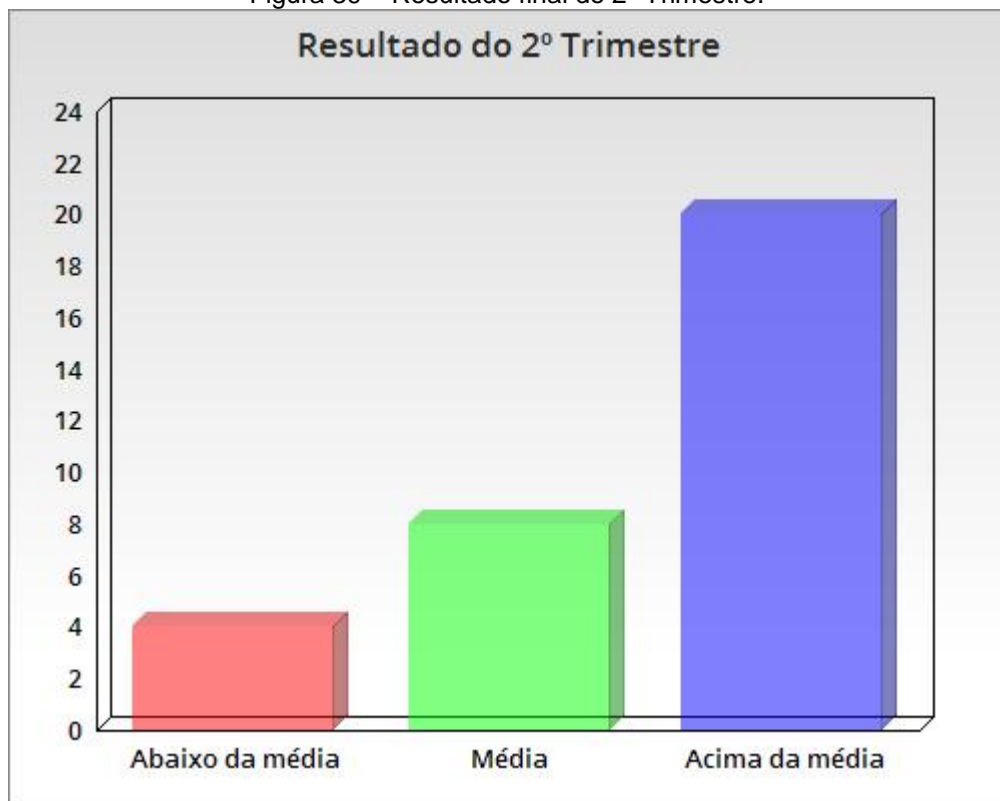
A nossa proposta com a lista de problemas apoiou-se, parcialmente (em virtude do tempo), nas recomendações de Polya. Em particular, a respeito do problema anterior e, aproveitando a divisão da sala em grupos, incentivamos a construção de estratégias de solução através da discussão e compartilhamento das ideias. Um ponto importante, o qual é pertinente destacar, tem a ver com o fato de os alunos apresentarem dúvidas quando perceberam que a medida do comprimento do retângulo é igual à medida do comprimento da circunferência da base do cilindro. Após esse entendimento, o problema foi resolvido sem dificuldades.

Não obstante, um questionamento que levantamos foi: *Caso tivéssemos um cone, o que mudaria em seu raciocínio?* Nesse momento, um dos alunos falou, corretamente, sobre a possibilidade de planificarmos o cone. Outro aluno argumentou que no lugar do retângulo, teríamos um setor circular. Diante dessas

conclusões, explicamos que o cone será estudado com aprofundamento no ensino médio e que, no momento oportuno, aprenderão que existe um elemento, chamado de *geratriz*, muito importante para a resolução do problema que surgiu a partir dos nossos questionamentos.

Acreditamos que esse modelo de atividade produziu bons resultados, haja vista a participação efetiva dos alunos, como também a melhora das notas, que pode ser observada, principalmente, ao fim do trimestre. Observe a figura 39.

Figura 39 – Resultado final do 2º Trimestre.



Fonte: Autor.

Entendemos que a partir do momento que colocamos o aluno como um indivíduo independente, que pratica, questiona, duvida e cria, ele começou a olhar a Matemática como ferramenta indispensável à sua vida, e não como mais uma disciplina escolar, a qual ele precisa livrar-se.

A seguir, apresentamos algumas fotos (figuras 40 a 43) da sala de aula no momento em que os alunos resolveram, em grupos, os problemas da lista que confeccionamos.



Figura 40 – Resolução de Problemas em sala de aula (1).



Fonte: Autor.

Figura 41 – Resolução de Problemas em sala de aula (2).



Fonte: Autor.

Figura 42 – Resolução de Problemas em sala de aula (3).



Fonte: Autor.

Figura 43 – Resolução de Problemas em sala de aula (4).



Fonte: Autor.

Exprimir com palavras os pontos positivos da nossa abordagem e mudança de atitude é uma tarefa quase impossível. Foi gratificante ver a dedicação dos alunos, pesquisando e aprendendo, absorvidos pelas descobertas que iam fazendo, sempre motivados. Mudar a forma de ensinar e aprender não é uma tarefa fácil. É preciso mudar hábitos, inovar sem perder de vista o objeto de estudo da Matemática, que é o conhecimento historicamente construído. Com essa proposta, os alunos entenderam que a Matemática faz parte do seu cotidiano e que, portanto, pode ser aplicada em diversas situações e momentos; mais ainda, que ela não é uma ciência cristalizada, imutável.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Resolução de Problemas, aliada ao uso de recursos computacionais, além de seguir as recomendações dos PCNs, encoraja o aluno a fazer conjecturas, organizar dados, realizar testes, avaliar um raciocínio e/ou resultados obtidos, propiciando ao próprio aluno a oportunidade de dar significado aos conteúdos estudados, e, assim, compreender com maior profundidade os conceitos trabalhados.

As atividades e metodologias propostas neste trabalho, as quais acreditamos serem prazerosas, possibilitam uma série de situações favoráveis ao aprendizado, a saber: o trabalho em grupo, a divisão de tarefas, o surgimento de dúvidas e os desafios desencadeados pelo processo de busca e descoberta do novo, do prático e tecnológico, além da necessidade de se resgatar conteúdos e ferramentas matemáticas indispensáveis ao dia a dia e aos aprendizados futuros. Percebemos daí que a apropriação dos conceitos ocorre de forma natural e com questionamentos ajustados em torno dos conteúdos.

A partir dos fatos e reflexões constatados dentro da sala de aula e relatados neste trabalho, estivemos abertos às mudanças e, desde então, observamos que os alunos que tinham dificuldades na aprendizagem dos conteúdos de Matemática, trabalhados a partir de aulas tradicionais, surpreenderam quando encontraram significado para os problemas e, assim, externaram a criatividade, buscaram estratégias, agregaram novas ideias e, enfim, alcançaram os objetivos pretendidos pelo professor. Nesse contexto, acreditamos que o interesse e o desempenho dos alunos nas aulas depende, em grande parte, de como o professor ministra as aulas.

Encerramos este trabalho na expectativa de que ele represente mais uma contribuição para o ensino de Matemática, no sentido de propagar a Resolução de Problemas, de incentivar a inserção do computador nas aulas e, num sentido mais amplo, de melhorar o conhecimento que o aluno necessita para enfrentar o mundo fora da escola, “comandando o processo exponencial de inovação, não correndo atrás, como se fora sucata” (DEMO, 1996, p. 32). Por fim, que este trabalho possa ser usufruído, expandido e melhorado. Esperamos que bons frutos sejam produzidos e colhidos a partir da semente que está sendo plantada.

## REFERÊNCIAS

BAHIA. Secretaria da Educação do Estado da Bahia. **EM-Ação: ensino médio em ação**. Salvador, 2012. v. 2. 157 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1997. 142 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998. 148 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação à Distância. **Objetos de Aprendizagem: Uma Proposta de Recurso Pedagógico**. Brasília, 2007. 154 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: Matemática**. Brasília, 2018. 600 p.

BUTTS, T. **Formulando Problemas Adequadamente**. In: *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*. KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997. p. 32–48.

NETO, A. C. M. **Geometria**. 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 428 p. (Coleção PROFMAT).

COSTA, Maria Laura Couto, *et al.* **Resolução de Problemas de Cálculo I Utilizando o Geogebra**. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016. 70 f. Apostila.

COURA, F. C. F.; FERREIRA, F. N. **Ensino de matemática via resolução de problemas**. São João del-Rei: Universidade Federal de São João del-Rei, 2011. 86 f. Apostila.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12ª Edição. São Paulo: Ática, 1999. 144 p.

DEMO, P. **Educação e qualidade**. 11ª Edição. Campinas: Papirus, 1994. 160 p.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 292 p.

GRUBE, G. M. A. (Trad.). **Plato's Republic**. Indianápolis: Hackett, 1974. 300 p.

GUBERT, A.; TROBIA, J. **A resolução de problemas aplicada no estudo das funções**. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1787-8.pdf>>. Acesso em: 29 dez. 2019.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 286 p. (Coleção PROFMAT).

HIRSCH, E. D. **Address to California State Board of Education**. (1997).

HORIUCHI, A. **Geometria a serviço dos deuses no Japão**. *Scientific American: Brasil*, São Paulo, n. 11, p. 30-35, 2010. Edição Especial Etnomatemática.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. Tradução de Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

MACHADO, E. S. **Modelagem matemática e resolução de problemas**. 2006. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

MAGINA, S. **O computador e o ensino da matemática**. *Tecnologia Educacional*, v. 26, n. 140, jan./fev./mar. 1998.

MELO, L. A. L.; PAZ, F. O. F.; SOUZA, C. B. **Resolução de Problemas segundo George Polya**: uma abordagem metodológica para solucionar problemas matemáticos. In: *Encontro Cajazeirense de Matemática*, 5., 2018, Cajazeiras. Disponível em: <[http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO\\_EV121\\_MD1\\_SA5\\_ID255\\_16082018190822.pdf](http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV121_MD1_SA5_ID255_16082018190822.pdf)>. Acesso em: 18 jul. 2019.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Conteúdos Básicos Comuns: Matemática**. Belo Horizonte, 2008. 80 p.

MISKULIN, S. G. R. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria**. 1999. 2 v. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: *Educação*

*Matemática: pesquisa em movimento*. Maria Aparecida Viggiani Bicudo; Marcelo de Carvalho Borba (Org.). 3 ed. São Paulo: Cortez, 2005. cap. 12, p. 213-231.

ONUCHIC, L. R. **Uma história da resolução de problemas no Brasil e no mundo** (palestra de encerramento). In: *Seminário em Resolução de Problemas*, 1. (I SERP), 2008, Rio Claro. Disponível em: <[http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos\\_completos/completo3.pdf](http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf)>. Acesso em: 29 dez. 2019.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PEREIRA, P. M.; BORBA, V. M. L. **A prática do professor de Matemática dos anos iniciais: da formação inicial ao cotidiano da ação educativa**. *Revista Educação Pública*. Disponível em: <<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/16/13/a-prtica-do-professor-de-matematica-dos-anos-iniciais-da-formao-inicial-ao-cotidiano-da-ao-educativa>>. Acesso em: 14 out. 2019.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p.

RIBEIRO, G. H. **Matemática, aprendizagem baseada em problemas: metodologia inovadora no 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública**. 2019. 120 p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás – UFG, Regional Catalão, Catalão, 2019.

RODRIGUES, J. A. **WolframAlpha: uma nova visão da Matemática**. Disponível em: <[http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/16208/1/CISTI\\_2011.pdf](http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/16208/1/CISTI_2011.pdf)>. Acesso em: 20 jul. 2019.

RODRIGUES, A.; MAGALHÃES, S. C. **A Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: diagnosticando a prática pedagógica**. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica\\_artigos/artigo\\_rodrigues\\_magalhaes.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_rodrigues_magalhaes.pdf)>. Acesso em: 29 mar. 2019.

SÁ FILHO, C. S.; MACHADO, E. C. **O computador como agente transformador da educação e o papel do Objeto de Aprendizagem**. Disponível em: <<http://www.abed.org.br/seminario2003/texto11.htm>>. Acesso em: 29 abr. 2019.

SANTOS, J. F. A.; MOITA, F. M. G. S. C. **Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática**: Análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade. Disponível em: <[http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic\\_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf](http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf)>. Acesso em: 20 jul. 2019.

SILVA, R. C. C. **WolframAlpha**. Disponível em: <<http://ritaccs.pro.br/site/wolfram-alpha/>>. Acesso em: 29 dez. 2019.

SILVEIRA, J. F. P. **Resolução de Problemas**. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu.html>>. Acesso em: 14 out. 2019.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. **Metodologia da resolução de problemas**. Disponível em: <[http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_24/metodologia.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf)>. Acesso em: 29 dez. 2019.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. **Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática**. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/stanic-kilpatrick.pdf>>. Acesso em: 14 abr. 2019.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Nied/Unicamp, 1999. 156 p.

WILEY, D. A. **Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy**. In: WILEY, D. A. (Org.) *The Instructional Use of Learning Objects*, 2000, Online Version. Disponível em: <<http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc>>. Acesso em: 29 abr. 2019.



## APÊNDICES

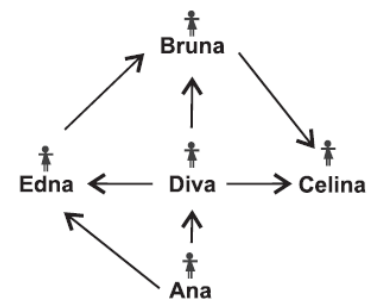
### APÊNDICE A – Miscelânea

1. (PROFMAT – ENQ/2016.2) Sejam  $x$  e  $y$  números reais positivos tais que  $x + y = 1$ . Prove que  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$ .

2. (PAPMEM – Janeiro de 2013) Determine o valor máximo de  $|z+1|$  quando  $|z-2|=1$ , ( $z \in \mathbb{C}$ ).

3. (PAPMEM – Janeiro de 2014) Determine o lugar geométrico dos pontos ocupados pelos vértices da parábola  $y = 5x^2 + mx + 3$ , quando  $m$  varia assumindo todos os valores reais.

4. (OBMEP/2007 – Adaptado) A figura mostra como comparar as idades de cinco irmãs, usando flechas que partem do nome de uma irmã mais nova para o nome de uma mais velha. Por exemplo, Edna é mais velha que Ana. Qual é a irmã mais velha?



5. (OBMEP/2005) A caminhonete de Beremiz pode carregar até 2 000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de açúcar de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

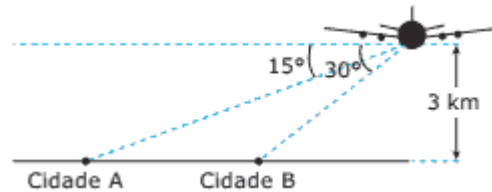
- Beremiz conseguirá fazer o serviço em cinco viagens? Por quê?
- Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

6. (OBMEP/2018 – Adaptado) Em uma loja, os preços dos produtos terminam sempre em 99 centavos. Por exemplo, R\$0,99, R\$1,99, R\$2,99, ... Juca pagou R\$41,71 por uma compra nessa loja. Quantos produtos Juca comprou?

7. (PIC-OBMEP/2015) O trecho a seguir foi obtido em um site de internet que se propõe a aumentar as chances de vitória no jogo da Sena (que consiste em sortear 6 dentre 60 dezenas). “Quando afirmamos, por exemplo, que as dezenas atrasadas são importantes, é porque já observamos, em nossos estudos, que todas as dezenas são sorteadas a cada quarenta testes, portanto, seria útil você acompanhar e apostar em dezenas atrasadas; você estaria assim aumentando muito suas chances.” Você concorda que apostar em uma dezena atrasada aumenta as chances de vitória na Sena?

## APÊNDICE B – Lista de problemas (Desenho Geométrico)

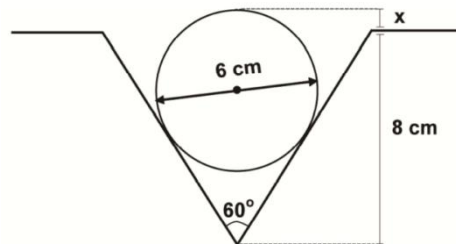
1. (UFV-MG/2006) Um passageiro em um avião avista duas cidades **A** e **B** sob ângulos de  $15^\circ$  e  $30^\circ$ , respectivamente, conforme a figura abaixo.



Se o avião está a uma altitude de 3 km, a distância entre as cidades **A** e **B** é

- a) 7 km.                      b) 5,5 km.                      c) 5 km.                      d) 6,5 km.                      e) 6 km.

2. (UFPR/2012) Num projeto hidráulico, um cano com diâmetro externo de 6 cm será encaixado no vão triangular de uma superfície, como ilustra a figura abaixo.

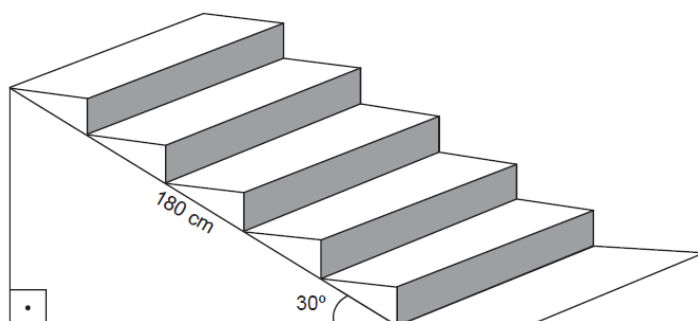


Que porção  $x$  da altura do cano permanecerá acima da superfície?

- a)  $\frac{1}{2}$  cm.                      b) 1 cm.                      c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  cm.                      d)  $\frac{\pi}{2}$  cm.                      e) 2 cm.

3. (Encceja-PPL/2017) O projeto de uma escada com 5 degraus apresenta as seguintes especificações: todos os degraus apresentam a mesma altura, o ângulo de inclinação da escada é de  $30^\circ$  com relação ao chão e o comprimento da escada é de 180 cm, conforme a figura.

(Considere  $\sin 30^\circ = 0,5$  e  $\cos 30^\circ \cong 0,87$ .)



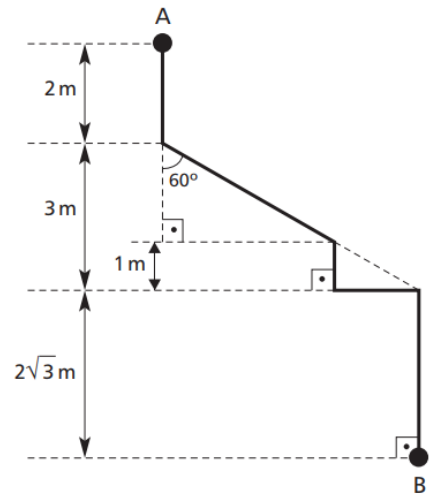
A medida, em centímetro, da altura de cada degrau é igual a

- a) 90.  
b) 36.  
c) 31.  
d) 18.

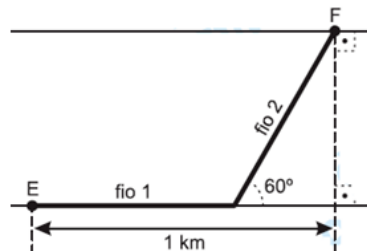
4. (Cefet-MG/2014) Uma formiga sai do ponto **A** e segue por uma trilha, representada pela linha contínua, até chegar ao ponto **B**, como mostra a figura.

A distância, em metro, percorrida pela formiga é

- a)  $1+2\sqrt{3}$ .
- b)  $3+3\sqrt{3}$ .
- c)  $5+2\sqrt{3}$ .
- d)  $7+3\sqrt{3}$ .



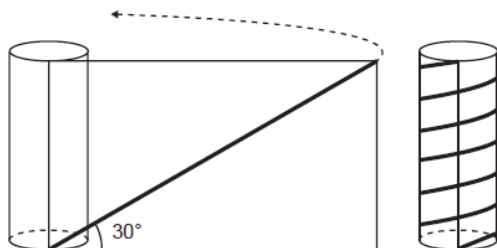
5. (Mack-SP/2005) Uma estação **E**, de produção de energia elétrica, e uma fábrica **F** estão situadas nas margens opostas de um rio de largura  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  km. Para fornecer energia a **F**, dois fios elétricos a ligam a **E**, um por terra e outro por água, conforme a figura.



Supondo-se que o preço do metro do fio de ligação por terra é R\$12,00 e que o metro do fio de ligação pela água é R\$ 30,00, o custo total, em reais, dos fios utilizados é

- a) 28.000.
- b) 24.000.
- c) 15.800.
- d) 18.600.
- e) 25.000.

6. (ENEM/2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma  $30^\circ$  com a borda inferior. O raio da



base do cilindro mede  $\frac{6}{\pi}$  cm, e ao enrolar a

faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura. O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

- a)  $36\sqrt{3}$ .
- b)  $24\sqrt{3}$ .
- c)  $4\sqrt{3}$ .
- d) 36.
- e) 72.