ÉRIKA DA COSTA SANT'ANA

Estratégia Didática para o Ensino de Geometria Analítica com o auxílio do Aplicativo GeoGebra

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

05 de dezembro de 2019

ÉRIKA DA COSTA SANT'ANA

Estratégia Didática para o Ensino de Geometria Analítica com o auxílio do Aplicativo GeoGebra

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof°. Nelson Machado Barbosa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

05 de dezembro de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pela autora.

S231 Sant'Ana, Érika da Costa.

ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA COM O AUXÍLIO DO APLICATIVO GEOGEBRA / Érika da Costa Sant'ana. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

161 f. : il.
Bibliografia: 121 - 122.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2019.
Orientador: Nelson Machado Barbosa.

1. Geometria Analítica. 2. GeoGebra. 3. Dispositivos móveis. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

ÉRIKA DA COSTA SANT'ANA

Estratégia Didática para o Ensino de Geometria Analítica com o auxílio do Aplicativo GeoGebra

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 05 de dezembro de 2019.

Profª Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF

Profº Marcus Vinicius da Silva Sales
D.Sc. - UFF

Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UENF

Profº. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Este trabalho é dedicado à minha mãe, Glória, por me ensinar o caminho do bem e da honestidade; ao meu pai, Zildo; às minhas sobrinhas Maria Luisa e Yasmin, pela presença, apoio e amor em todos os momentos. Sem vocês nenhuma conquista valeria a pena.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, pela força, coragem e luz que me transmite em todos os momentos.

À minha família, por tanta dedicação e apoio, e por acreditarem sempre em mim. Em especial à minha mãe e minhas sobrinhas, Maria Luisa e Yasmin, por estarem sempre ao meu lado, mesmo na minha ausência, e por compreenderem essa ausência.

Aos meus amigos, pelo incentivo e apoio. E às minhas amigas Ana Caroline e Karla, pelo carinho, abrigo e hospitalidade.

Aos meus colegas de classe, principalmente aos grandes amigos de jornada, Carolini e Jonatas. Sem vocês o caminho teria sido mais árduo.

Ao professor Doutor Nelson, pela orientação prestada.

À todos os professores, pelo conhecimento transmitido e por todos os ensinamentos.

À sociedade Brasileira de Matemática-SBM, pelo oferecimento deste curso.

À UENF, pelo oferecimento deste curso.

À todos aqueles que de alguma forma estiveram próximos a mim, e que fazem a vida valer a pena.

Muito obrigada!

"Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina".

Cora Coralina

Resumo

O estudo da geometria analítica é de grande importância para os alunos, pois possibilita a análise de propriedades e elementos geométricos por meio de processos algébricos. Mediante esse estudo, espera-se que o estudante participante perceba que um mesmo problema pode ser abordado com diferentes recursos, dependendo da sua característica. Porém, a defasagem dos alunos no aprendizado da geometria e da álgebra em anos anteriores pode gerar sérias dificuldades no estudo da geometria analítica, o que os desmotiva a prosseguir com o mesmo e a obter uma aprendizagem significativa. Com o intuito de minimizar essas questões e facilitar o aprendizado, esta pesquisa inseriu as tecnologias digitais no estudo da geometria analítica, utilizando o aplicativo GeoGebra para dispositivos móveis. A escolha pelo aplicativo foi feita, pois é uma ferramenta de fácil acesso e manipulação, e gratuita . Uma sequência didática utilizando o aplicativo e algumas atividades do Projeto Reforço Escolar, da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro/ CECIERJ, foi aplicada no Colégio Estadual Luiz Reid para uma turma de 3º ano do Ensino Médio, entre os meses de março e julho no ano de 2019. Buscou-se incentivar a participação dos alunos na construção dos conceitos e possibilitar dessa forma, a reflexão de significados. A sequência didática propõe atividades que abordam, segundo a visão da geometria analítica plana, os conteúdos de ponto, distância entre pontos, ponto médio, condição de alinhamento de três pontos, equação geral e reduzida da reta e posição relativa entre retas. Ao final da aplicação das atividades foi feita análisedos dados obtidos a partir do objetivo de cada atividade da sequência didática. Foi feita assim, a observação e análise da contribuição para a aprendizagem dos conteúdos estudados por meio de atividades com uso do aplicativo GeoGebra. Pôde-se constatar que o uso do aplicativo facilitou o aprendizado, tornando-o significativo e estimulando a participação dos alunos nas atividades, pois ao mesmo tempo que favoreceu o conhecimento de uma forma mais dinâmica e interativa, o aluno fez uso de uma ferramenta presente em seu cotidiano: o celular. O objetivo geral desse estudo é construir o conhecimento dos conteúdos de geometria analítica plana, utilizando o aplicativo GeoGebra no celular e as dinâmicas investigativas do Projeto Reforço Escolar.

Palavras-chave: Geometria Analítica, GeoGebra, Dispositivos móveis.

Abstract

The study of analytical geometry is of great importance for students, as it enables the analysis of properties and geometric elements through algebraic processes. Through this study, it is expected that the participating student realizes that the same problem can be addressed with different resources, depending on its characteristic. However, students' lag in learning geometry and algebra in previous years can create serious difficulties in the study of analytical geometry, which discourages them from pursuing it and obtaining meaningful learning. In order to minimize these issues and facilitate learning, this research inserted digital technologies in the study of analytical geometry, using the GeoGebra application for mobile devices. The application was chosen because it is a tool that is easy to access and manipulate, and free of charge. A didactic sequence using the application and some activities of the School Reinforcement Project, of the Education Secretariat of the State of Rio de Janeiro / CECIERJ, was applied at Colégio Estadual Luiz Reid for a class of 3rd year of High School, between the months of March and July in the year 2019. We sought to encourage student participation in the construction of concepts and thus enable the reflection of meanings. The didactic sequence proposes activities that approach, according to the view of flat analytical geometry, the point contents, distance between points, midpoint, three point alignment condition, general and reduced equation of the line and relative position between lines. At the end of the application of the activities, data obtained from the objective of each activity of the didactic sequence was analyzed. Thus, the observation and analysis of the contribution to the learning of the studied contents was done through activities using the GeoGebra application. It was found that the use of the application facilitated learning, making it meaningful and stimulating student participation in activities, because at the same time that it favored knowledge in a more dynamic and interactive way, the student made use of a present tool in your daily life: the cell phone. The general objective of this study is to build knowledge of the contents of flat analytical geometry, using the GeoGebra application on the cell phone and the investigative dynamics of the School Reinforcement Project.

Key-words: Analytical Geometry, Geogebra, Mobile devices.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
SEEDUC-RJ	Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
CAS	Cálculos Simbólicos
CECIERJ	Centro de Ciências e Educação do Rio de Janeiro
SD	Sequência Didática

Lista de símbolos

$+$	Adição
$-$	Subtração
$\times$	Multiplicação
$\parallel$	Retas Paralelas
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\rightarrow$	Implicação
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\rightarrow$	Implicação

Sumário

Introdução

Os alunos, em sua maioria, apresentam grande dificuldade em matemática, o que aumenta com o decorrer do avanço nas séries estudadas. Ela é uma das responsáveis pelo alto índice da reprovação escolar, os alunos apresentam uma deficiência na aprendizagem. Segundo Druck (2005), a dificuldade em matemática com o passar dos anos vai aumentando, pois os alunos no ensino fundamental não têm dúvidas sobre a utilidade do conteúdo estudado no seu cotidiano. O autor ainda afirma:

> Ninguém pode se considerar verdadeiramente inserido na sociedade se não tiver alguma familiaridade com as quatro operações aritméticas, as frações, as unidades de medida e os conhecimentos básicos de Geometria. Ao nos aproximarmos do Ensino Médio, fica mais difícil identificar a utilidade imediata da Matemática (DRUCK, 2005, p.3).

Sendo assim, é necessário repensar novas estratégias no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Uma das estratégias é envolver o aluno nesse processo como protagonista na construção do aprendizado, aliado a uma postura diferenciada do professor. Dessa forma, o professor não exercerá o papel de detentor do saber e sim o papel de mediador do conhecimento. Complementando essa mudança de postura em sala de aula, pode-se ainda associar o uso de tecnologias digitais. Sobre a autonomia do aluno, que deve ser incentivada pelo professor, Cunha, Oliveira e Ponte (1995) afirmam:

> Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem.(CUNHA; OLIVEIRA; PONTE, 1995, p.23)

Dessa forma, o papel do professor deixa de ser o de detentor da informação e de formação dos alunos e passa a ser visto de forma diferenciada. Não menos importante, ao contrário, pois vai intermediar a interação entre os alunos e o processo de se obter o conhecimento (REGO, 2013).

Para Costa (2014), conseguir integrar o uso de novas tecnologias com os saberes, de forma a construir um ambiente de aprendizagem no qual esses recursos sejam potencializadores, e venham a promover uma aprendizagem interessante e significativa, é um grande desafio para os professores.

Porém, o uso da tecnologia não deve ser feito somente como uma troca de quadro, giz, papel e caneta pelo computador ou celular, pois não significa que com a tecnologia digital o aluno passará a compreender todo o conteúdo. Recursos digitais podem facilitar o processo ensino e aprendizagem tanto para aluno quanto para o professor. Para isso, faz-se necessário um bom plano de aula e uma sequência didática diferenciada. Para Valente et al. (1996), a inserção da tecnologia se faz necessário, pois a mudança na condição de vida ocorreu e a natureza do conhecimento mudou.

Sobre o uso das tecnologias, d'AMBRÓSIO (2007) diz:

> A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciência e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e nas expectativas da sociedade. Isso será impossível de atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro. (D'AMBRÓSIO, 2007, p.74)

Com o intuito de minimizar essas questões e facilitar o aprendizado e reconhecendo a importância que a tecnologia tem no processo de ensino-aprendizagem, esta pesquisa visa introduzir as tecnologias digitais no estudo da geometria analítica por meio do uso do aplicativo GeoGebra no dispositivo móvel. Além de associar o projeto Reforço Escolar em Matemática da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro/CECIERJ, que aborda questões investigativas, para que o aluno construa e formalize o conhecimento. O intuito é levar aos alunos uma maneira interessante e atual de aprender um pouco mais sobre o conteúdo, utilizando uma ferramenta tão constante e presente em seu dia a dia: o celular. Busca-se, assim, torná-lo um aliado de trabalho e não um concorrente, como ocorre em muitas aulas em que a atenção dos alunos fica completamente voltada para ele.

> Na era da tecnologia, a geração atual tem acesso disponível a uma gama de recursos tecnológicos onde aprendem de forma prazerosa, divertida e dinâmica. A tela é atrativa para as crianças, os adolescentes e os adultos, pois dá uma sensação de concretude do conteúdo exposto.(COSTA, 2014, p.16)

O estudo da geometria analítica possibilita a análise de propriedades e elementos geométricos por meio de processos algébricos. O aluno do ensino médio tem a oportunidade de pensar algebricamente sobre os problemas geométricos. Além disso, deve perceber que um mesmo problema matemático pode ser abordado com diferentes instrumentos de acordo com as suas características (BRASIL, 2002). Porém a defasagem no estudo da geometria e da álgebra em anos anteriores podem gerar sérias dificuldades no estudo da geometria analítica, o que desmotiva o aluno a prosseguir com o estudo e obter uma aprendizagem significativa. Para Costa (2014, p.17), "O aluno precisa estar motivado para aprender. A motivação é algo intrínseco ao ser humano, já nascemos com essa característica. Agora, para podemos exercitá-la, é necessário determinados estímulos".

A geometria analítica geralmente é trabalhada nos anos finais do Ensino Médio. No currículo mínimo o conteúdo é apresentado no 3º ano, e sugerido que se trabalhe no 3º e 4º bimestres do ano letivo. Essa pesquisa foi realizada com uma turma, do Colégio Estadual Luiz Reid, localizado no município de Macaé- RJ. As atividades desenvolvidas no aplicativo Geogebra foram aplicadas pela pesquisadora e professora regente da turma.

Por ser um aplicativo gratuito, de fácil manipulação e compreensão e por mostrar a representação algébrica e geométrica de um mesmo elemento, o aplicativo GeoGebra foi escolhido como instrumento facilitador e motivador desse trabalho. Além disso, esse aplicativo não requer o uso de internet após feito o seu download.

Sobre o software, Bastos (2014) diz:

> Acreditamos que o melhor software é o GeoGebra, para trabalhar com Geometria Analítica, pois além de ser gratuito e ter atualizações periódicas, o modo como ele relaciona geometria e álgebra é apropriado ao estudo da Geometria Analítica. A correspondência objeto-equação acontece em mão dupla. O programa tanto permite esboçar gráficos a partir das equações, assim como define as equações do que é traçado geometricamente. (BASTOS, 2014, p.28).

Questão de pesquisa: O Uso do Aplicativo GeoGebra e das atividades do Projeto Reforço Escolar podem facilitar o processo de ensino- aprendizagem da Geometria Analítica?

Nesse contexto, *objetivo geral* deste trabalho é construir o conhecimento dos conteúdos de geometria analítica plana, utilizando o aplicativo GeoGebra no celular e as dinâmicas investigativas do Projeto Reforço Escolar a fim de auxiliar no processo ensino- aprendizagem e promover a construção de conhecimentos.

Para atingir o objetivo geral desse trabalho, foram considerados os seguintes *objetivos específicos*:

1. Apresentar e mediar o aprendizado das ferramentas do aplicativo GeoGebra para a execução de algumas atividades;

2. Investigar formas de elaboar atividades com apoio do aplicativo GeoGebra que contribuam para a aprendizagem da geometria analítica plana.

Por meio desses objetivos, espera-se tornar as aulas de matemática mais atraentes e motivar os professores a usarem novas tecnologias no ensino da matemática.

A *motivação para desenvolver este tema* foi pela grande dificuldade que os alunos têm em relacionar a geometria com a álgebra, por uma defasagem nos anos anteriores, principalmente em álgebra. Com o uso do aplicativo Geogebra, relacionar os conteúdos, de forma que os alunos possam compreender de uma forma mais significativa.

O desenvolvimento deste trabalho está estruturado em quatro capítulos e foi organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresenta-se o referencial teórico, no qual é abordada a história da geometria analítica. Além disso, aborda-se o uso das tecnologias digitais na educação relacionando-o com o aplicativo GeoGebra. É feita também a apresentação do Projeto Reforço Escolar em Matemática da SEEduc- RJ/ CECIERJ.

O Capítulo 2 discorre sobre o ensino da geometria analítica e os conteúdos abordados nesse trabalho.

No Capítulo 3, é apresentada a metodologia de ensino adotada, detalhando cada um dos momentos da pesquisa, tais como: elaboração e aplicação do teste diagnóstico, com o propósito de verificar os conhecimentos prévios que os alunos tinham, e do questionário socioeconômico, além da análise dos dados oriundos desses instrumentos, para que a sequência didática pudesse ser definida e elaborada.

No Capítulo 4, é apresentada a sequência didática e realizada a análise dos resultados após a aplicação das atividades e das observações da professora pesquisadora.

Na parte final, nas conclusões, é apresentado um resumo das atividades realizadas, tais como os objetivos alcançados e dificuldades encontradas e, por fim, as propostas para trabalhos futuros. Ainda é apresentada ao final, a referência bibliográfica utilizada nesse trabalho e os apêndices.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Neste capítulo serão abordados os aspectos históricos da Geometria Analítica, desde o seu surgimento, com os seus primeiros pensadores, até o seu ensino nos dias atuais. Além de abordar como o uso da tecnologia, pode facilitar o aprendizado do conteúdo, integrando o uso do aplicativo GeoGebra com a metodologia aplicada no Projeto Reforço Escolar da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro/ CECIERJ.

1.1 Breve histórico da Geometria Analítica

A história da geometria analítica teve o seu marco inicial com Apolônio de Perga (262 a 190 a.C.) em sua obra "As cônicas", que trata dos eixos cartesianos como um par de diâmetros conjugados. Segundo Boyer e Merzbach (2019, p.116), "Apolônio mostrou que os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de elipse ou hipérbole formarão um segundo diâmetro, os dois sendo chamados de diâmetros conjugados.".

Boyer e Merzbach (2019) destacam:

> Os métodos de Apolônio, em As Cônicas, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1800 anos. A aplicação de retas de referência em geral, e de um diâmetro e uma tangente em sua extremidade em particular, não difere essencialmente, do uso de sistemas de coordenadas, sejam sistemas retangulares, sejam oblíquos. As distâncias medidas ao longo do diâmetro a partir do ponto de tangência são as abscissas, e os segmentos paralelos à tangente e cortado entre o o eixo e a curva são as ordenadas. (BOYER; MERZBACH, 2019, p.114)

Para Boyer e Merzbach (2019), o motivo de Apolônio não ter desenvolvido a geometria analítica não foi por falta de ideias e sim devido à pobreza de curvas.

Por volta de 1628, René Descartes levou a geometria analítica ao conhecimento através de sua obra *La géométrie*.

O objetivo de Descartes com a geometria cartesiana, agora tida como geometria analítica, era a aplicação da álgebra à geometria, a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica (BOYER; MERZBACH, 2019)

Sobre a obra de Descartes, Boyer e Merzbach (2019) dizem:

> O título *La géométrie* não deve levar ao engano de pensar que a obra é primariamente geométrica[...] O objetivo de seu método, portanto, era duplo: (1) por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e (2) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas. (BOYER; MERZBACH, 2019, p.249)

Embora a obra *La gémétrie* seja uma aplicação da álgebra à geometria e da geometria à algebra, há pouco que se assemelha ao que se considera a geometria analítica atualmente.

> Não há fórmulas para distâncias, inclinação, ponto de divisão, ângulo entre duas retas, ou outro material introdutório semelhante. Além disso, em toda obra não há uma única curva nova traçada diretamente a partir da equação, e o autor se interessava tão pouco por esboçar curvas que nunca entendeu completamente o significado de coordenadas negativas. (BOYER; MERZBACH, 2019, p.251)

Foi então que em 1629, Fermat se propôs a fazer reconstrução de umas das obras de Apolônio, Lugares Planos. E, como fruto de seu esforço, em 1936, descobriu o princípio fundamental da geometria analítica: "Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva". (BOYER; MERZBACH, 2019, p.245)

Ao comparar o trabalho dos dois estudiosos que deram forma à geometria analítica, pode-se perceber que enquanto Descartes partia de sua representação gráfica e encontrava sua equação algébrica, Fermat, por sua vez, partia de uma equação e encontrava o seu lugar geométrico. (OLIVEIRA, 2014)

Sobre a geometria analítica de Fermat, Boyer e Merzbach (2019) consideram que "era um tanto mais próxima da nossa no fato de serem as ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas."(BOYER; MERZBACH, 2019, p.246)

Danyluk e COMIM (2012) afirmam que Lagrange, no século XVIII, também contribuiu para o avanço da Geometria Analítica ao levar a aplicação da álgebra a problemas de geometria elementar, com o trabalho sobre soluções analíticas de problemas relacionados à área de um triângulo e ao volume de um tetraedro, expressos por determinantes de terceira e quarta ordem.

Segundo Soares (2013), no século XIX, ocorre a consolidação da geometria analítica por meio do trabalho do Professor Gaspard Monge [1], a partir de então a geometria analítica

[1] Gaspard Monge (1746-1818): Matemático Francês considerado o criador da Geometria Descritiva

passou a ser disciplina nas escolas. Lacroix (aluno do Monge), juntamente com o professor, após tornarem-se colegas, deram um "toque final"à geometria analítica, aproximando-a da que temos atualmente.

1.2 Tecnologia na Educação e o Projeto Reforço Escolar

As tecnologias da informação e comunicação, as TIC, estão disponíveis ao homem desde que eles começaram a escrever. Essas tecnologias foram avançando com o decorrer do tempo e a sociedade vive em constante evolução com toda essas invenções que mudam a vida de todos. As TIC são todas as formas de criar, guardar e reproduzir a informação.

É notável as mudanças que as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) trazem principalmente para o espaço escolar, pois é uma maneira que o professor tem de inovar suas aulas, tornando-as mais interessantes e atrativas, proporcionando aos alunos um ambiente onde ele terá uma participação ativa na construção do seu conhecimento.

> As mudanças são rápidas, profundas e silenciosas. Elas assinalam descontinuidades e o aparecimento de novos paradigmas. A educação não fica imune às novas condições sociais. O processo de globalização aponta para novas possibilidades de estar no mundo e para novas formas de ensinar e aprender. (TOLEDO, 2004, p.1)

Embora essa mudança e evolução das tecnologias venham ocorrendo, as escolas não estão acompanhando-as significativamente, pois o uso dessas ferramentas como recurso de ensino ainda é desconhecido por muitos educadores. Os professores percebem a necessidade da inserção desses recursos na educação, mas por muitas vezes não sabem como fazê-lo, pois falta ser oferecido cursos aos profissionais que o integrem a esse novo ambiente, e também por falta de apoio do governo, que não oferece os recursos necessários para tal desenvolvimento.

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (BRASIL, 2002, p.41)

Os PCN apontam a importância dos professores terem conhecimento sobre o uso das tecnologias como recurso para facilitar o processo de ensino e aprendizagem, pois caso contrário não é possível o auxílio de tais recursos. Porém não significa que os professores devam tornar-se especialistas, mas é necessário conhecer e saber utilizar as potencialidades das ferramentas em sala de aula. Brasil (2002)

O professor deve ter clareza sobre a escolha dos objetivos e da tecnologia a ser utilizada, e assim conseguir identificar se o aluno estará inserido de forma participativa no processo de aprendizagem e ainda se este será satisfatório. Para isso, é necessário que além da escolha adequada da tecnologia, o ambiente favoreça a participação, a interação e o compartilhamento de ideias, pois assim o aluno desempenhará um papel ativo na construção do seu conhecimento.

> A mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma Educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento. Essa mudança acaba repercutindo em alterações na escola como um todo: na sua organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos na relação com o conhecimento. (VALENTE et al., 1996, p.29)

A mudança educacional deve ocorrer e ela passa pela tecnologia, pois está inserida no dia a dia de todos, inclusive dos alunos, mas não deve-se esquecer que o objetivo maior nessa busca é o de ensinar e educar. Ensinar com qualidade demanda um processo de mudança e renovação, e Moran, Masetto e Behrens (2000) ponderam:

> Nosso desafio maior é caminhar para um ensino e uma educação de qualidade, que integre todas as dimensões do ser humano. Para isso precisamos de pessoas que façam essa integração em si mesmas no que concerne aos aspectos sensorial, intelectual, emocional, ético e tecnológico, que transitem de forma fácil entre o pessoal e o social, que expressem nas suas palavras e ações que estão sempre evoluindo, mudando, avançando. (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2000, p.15)

O uso da tecnologia não deve ser atribuída como uma ferramenta diferente de trasmissão de conhecimento. E sim como um recurso que motive o aluno e também permita construir um conhecimento significativo, e não se torne apenas para repetição como nas aulas tradicionais. A metodologia deve se adequar a uma forma em que o professor não seja o detentor da informação e assuma um papel de transmissor de conhecimentos e sim que promova a construção do conhecimento pelos próprios alunos, tornando-se assim, agente ativo e obtendo uma aprendizagem significativa. "[...]ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção."(FREIRE, 2014b, p.47)

> O professor deixa de ser o transmissor de informações e passa a atuar como mediador, promotor, facilitador, desafiador e consultor. Cabe a ele criar uma situação de parceria e cooperação com os alunos e entre os alunos, considerar os assuntos emergentes no contexto, propor desafios ou eleger coletivamente um tema de estudo, questionar os alunos, convidá-los a verbalizar suas dificuldades e descobertas, provocar a formalização de conceitos e a tomada de consciência da evolução individual e grupal em relação às metas atingidas. (ALMEIDA, 2008, p.29)

Para Costa (2014), quando o professor utiliza algum recurso tecnológico em sua aula como fim pedagógico, deve ser com a finalidade do uso de uma ferramenta de transmissão e construção do conhecimento. Com isso a desmistificação da escola como um ambiente monótono ocorrerá e passará a ser visto como um ensino interessante, dinâmico e com o intuito de preparar seu aluno para o futuro, pois capacita o aluno para ser um usuário independente da informação.

Moran, Masetto e Behrens (2000) ressaltam:

> Não se trata de simplesmente substituir o quadro negro e o giz por algumas transparências, por vezes tecnicamente mal elaboradas ou até maravilhosamente construídas num power point, ou começar a usar um data show. As técnicas precisam ser escolhidas de acordo com o que se pretende que os alunos aprendam. [...] Não podemos ter esperança de que uma ou duas técnicas, repetidas à exaustão, deem conta de incentivar e encaminhar toda a aprendizagem esperada. (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2000, p.143)

Além de ser importante um bom planejamento e metodologia para inserir novas tecnologias digitais na educação, ela não deve ser motivada pelo fato de utilizar a tecnologia por moda ou simplesmente por que a escola vê a necessidade de estar atualizada com tais inovações, mas sim para facilitar a construção e produzir conhecimento. E para isso, é fundamental que o professor tenha conhecimento e domínio das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, pois são recursos pedagógicos riquíssimos, que podem vir a colaborar no processo ensino-aprendizagem quando o seu uso é feito de forma adequada. E para que o uso das TDIC seja ainda mais frequente, além da capacitação do professor, é importante que a escola tenha uma infraestrutura adequada.

Segundo Brasil (2002), a matemática deve ser mais que memorização, deve ser um saber pensar matematicamente. E a presença da tecnologia nas aulas permite o desenvolvimento de tais habilidades.

Costa (2014) ressalta que se as aulas se baseiam em métodos do passado, não basta utilizar recursos tecnológicos. O importante é utilizar as NTIC para reforçar conceitos, dinamizar e promover com mais ênfase o processo ensino aprendizagem. Assim, o uso das tecnologias em sala de aula, e especificamente nas aulas de matemática, pode ser um grande aliado nesse processo.

Para Costa (2014):

> Mesmo que a escola não ofereça subsídios para a inserção das novas tecnologias, o professor tem o dever, como agente de transformação e formador de opinião, de oferecer para seus educandos conhecimentos e interações com essas tecnologias, tendo em vista que fazem parte do cotidiano de muitos deles.(COSTA, 2014, p.39)

E é nesse sentido que esse trabalho se apresenta. Mesmo com a ausência de uma sala de informática que atendesse a todos os alunos, ou ainda uma rede de internet que permitisse aos alunos navegar na internet para fins educacionais, a tecnologia foi inserida nas aulas de matemática, utilizando no dispositivo móvel de cada aluno o aplicativo GeoGebra, onde a maioria utilizou o seu *smartphone* ou o seu *tablet*. Dessa forma, ao oportunizar aos alunos o acesso à informação e à construção do conhecimento, o estudante é motivado a aprender e a comprometer-se com a aprendizagem.

> Se o meu compromisso é realmente com o homem concreto, com a causa de sua humanização, de sua libertação, não posso por isso mesmo prescindir da ciência, nem da tecnologia, com as quais me vou instrumentando para melhor lutar por esta causa. (FREIRE, 2014a, p.22-23)

1.2.1 O smartphone como recurso pedagógico

A tecnologia está a disposição da humanidade e colabora para a sua evolução. Porém quando se trata do espaço escolar, principalmente as unidades escolares públicas, o uso da tecnologia torna-se mais restrito por falta de um ambiente adequado, como laboratórios de informática. É nesse momento que o celular *smartphone*, hoje tão presente no dia a dia de quase toda a população, torna-se um aliado e um substituto dos computadores, para que seja possível a integração e utilização da tecnologia durante as aulas. Costa (2014, p.93) diz: "O educador deve aproveitar as potencialidades do celular, como recurso pedagógico, tendo em vista que é uma realidade presente na vida de todos os educandos."Costa (2014, p.93)

Os celulares *smartphones*, hoje, não são utilizados somente para receber e efetuar ligações. Eles têm funções diversas, dentre as quais o uso de redes sociais, que facilita a comunicação em tempo real por meio de aplicativos como *WhatsApp*, que não está diretamente ligado a esse trabalho, mas que para Prado, Júdice e Friede (2016, p.07), "Os aplicativos de celulares e *tablets* permitem uma enorme interação com o ambiente e as pessoas ao redor."E ainda têm funcionalidades que podem auxiliar no processo educativo: registros pertinentes às aulas; assistir vídeo-aulas que ajudem na assimilação do conteúdo; realização de pesquisas sobre o conteúdo trabalhado; utilização de aplicativos educativos que favoreçam e estimulem a aprendizagem, entre outras.

Com o uso do celular tão presente na vida dos alunos, é importante criar um ambiente transformador frente a essa tecnologia, para que a escola se atualize e construa assim, uma aprendizagem inovadora, dinâmica e motivadora, desenvolvendo nos alunos, estratégias investigativas que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem.

Nesse trabalho, o uso de celulares *smpartphones* e *tablets* como ferramenta pedagógica foi feito e será apresentado a análise de como essa utilização pode ser benéfica ao ambiente de aprendizagem.

1.2.2 O GeoGebra

Com o intuito de permitir a interação e a ampliação dos conteúdos matemáticos a serem estudados, os *softwares* educativos são apropriados para promover um ambiente facilitador para o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem. Sobre o uso de *softwares*, Costa (2014) diz:

> Os *softwares* educativos são muito importantes no trabalho com informática educativa, eles dão uma ênfase maior nos conteúdos vistos e dinamizam o processo ensino-aprendizagem, estimulando, na maioria dos casos, os alunos a pensarem sobre os conceitos apreendidos nas ministrações das aulas. (COSTA, 2014, p.81)

Desenvolvido por Markus Hohenwarter e programadores internacionais para o ensino e aprendizado da matemática, o GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que junta vários recursos da matemática: Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos; para vários níveis de ensino, do fundamental ao superior, em um único ambiente. Ele está disponível para ser instalado no Windows, Linux, Mac OS e Android, o que permite a instalação em tablets e celulares e assim a facilidade para o uso do professor em sala de aula, sem a necessidade de um laboratório de informática. Ele permite a construção de vários objetos como pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, gráficos de funções e curvas parametrizadas

O *GeoGebra* é um software gratuito, que permite o estudo da relação entre os aspectos geométricos e algébricos de um mesmo objeto, o que se adequa ao estudo da Geometria Analítica, pois ao mesmo tempo, pode-se ver as características geométricas na Janela de Visualização e a sua representação algébrica na Janela de Álgebra. A interação que há entre os objetos algébricos e geométricos, ajudam consideravelmente na assimilação dos conteúdos, pois o aluno pode observar as várias representações de um mesmo modelo matemático.

Bastos (2014) considera o GeoGebra como o melhor *software* para se trabalhar com Geometria Analítica, por ser gratuito, contar com atualizações periodicamente e também pela maneira que ele relaciona a geometria e a álgebra.

> A correspondência objeto-equação acontece em mão dupla. O programa tanto permite esboçar gráficos a partir das equações, assim como define as equações do que é traçado geometricamente. Também possui a vantagem da geometria dinâmica, que permite mover objetos e aplicar diversas transformações e automaticamente enxergar a mudança nas equações, assim como com áreas, ângulos, rotações, translações, etc. (BASTOS, 2014, p.28)

Esse trabalho considera o uso do aplicativo GeoGebra em celulares. Segundo Nogueira (2018), o aplicativo para o uso em *smartphones* (com características do *software* para computadores) foi criado em 2013 . E somente em 2015, a Calculadora Gráfica

GeoGebra foi lançada. O aplicativo está disponível para *download* gratuitamente para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. Os aplicativos disponíveis para *download* nas lojas virtuais são:

- Calculadora gráfica GeoGebra: permite que gráficos de funções sejam traçados, que equações sejam resolvidas e possibilita representação de dados gratuitamente; funções de plotagem, curvas polares e paramétricas;
- GeoGebra Geometria: permite a construção de círculos, ângulos, figuras geométricas interativas, transformações e muito mais.
- GeoGebra Realidade Aumentada: permite a introdução da matemática 3D ao mundo real.
- GeoGebra 3D Calculadora: permite representar funções 3D, criar sólidos, esferas, planos de forma dinâmica e interativa.
- GeoGebra CAS Calculadora: CAS é a sigla para Cálculos Simbólicos. Essa calculadora permite resolver equações ou encontrar derivadas e integrais.

O aplicativo utilizado nessa pesquisa foi a Calculadora gráfica GeoGebra, que além das características citadas, ainda permite transformações com controles deslizantes; a obtenção de pontos especiais de funções tais como as raízes, mínimos, máximos e as interseções. A calculadora gráfica é interativa e dinâmica. O aplicativo é uma ferramenta simples e útil, e não gera grande dificuldade ao aluno para manuseá-lo, além de ser completamente gratuito (desde a obtenção até o uso de todas as suas ferramentas). Para a utilização não há necessidade da internet, somente para fazer o *download* do aplicativo.

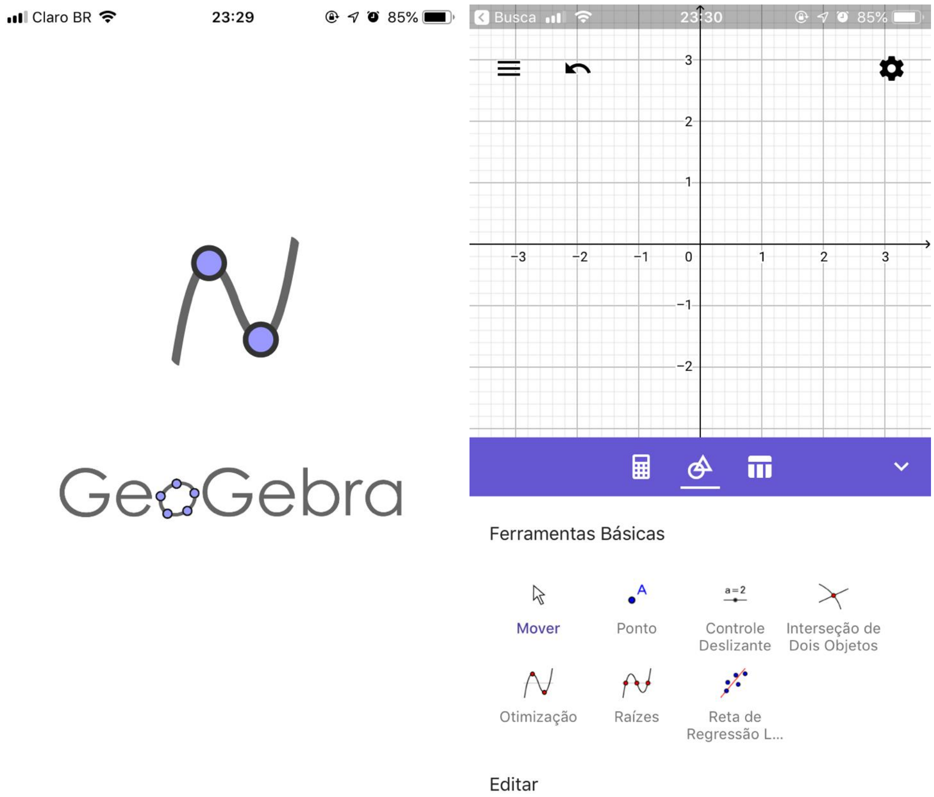
A escolha pela utilização do aplicativo GeoGebra para *smartphone* foi feita, por que na Unidade Escolar em que a pesquisa foi realizada, embora haja um espaço adequado, não há material tecnológico suficiente para todos os alunos. E também por que a tecnologia escolhida em questão, faz parte do cotidiano dos alunos e por isso é importante que os professores utilizem tal instrumento à favor da educação, uma vez que o celular, na maioria das vezes, se torna mais atraente aos alunos e na competição professor x celular, o celular tem mais a atenção e foco do aluno. Com o intuito de diminuir essas questões, o uso do celular juntamente com a metodologia do Projeto Reforço Escolar (será apresentado no próximo subcapítulo) foi inserido nesse trabalho.

A Figura 1 mostra a interface do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra.

1.2.3 Projeto Reforço Escolar

O Projeto Reforço Escolar realizado entre os anos de 2012 e 2015, pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro em parceria com a Fundação CECIERJ, teve como

Figura 1 – Composição de telas do celular com o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra



Fonte: Autoria Própria.

objetivo a melhoria da qualidade de ensino na rede estadual. O Reforço, segundo CECIERJ (2012), "Oportuniza a recuperação de aprendizagem, priorizando ações qualitativas na educação, com foco no letramento em Leitura e Escrita e Letramento Matemático."CECIERJ (2012, p.5)

O Projeto foi destinado a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. O material didático foi organizado pela fundação CECIERJ e é composto de dinâmicas de Língua Portuguesa e Matemática. As dinâmicas foram organizadas para períodos de 100 minutos, o que contabiliza dois tempos de aulas por semana. (CECIERJ, 2012)

Com o intuito de melhorar o desempenho acadêmico dos alunos, a Secretaria de Educação investiu no Projeto, de forma que eles eram antendidos em grupos menores e sempre no contraturno das aulas do ensino regular. O Projeto contava com professores qualificados para conduzir as aulas. Porém, o seu sucesso dependia também da participação ativa dos alunos.

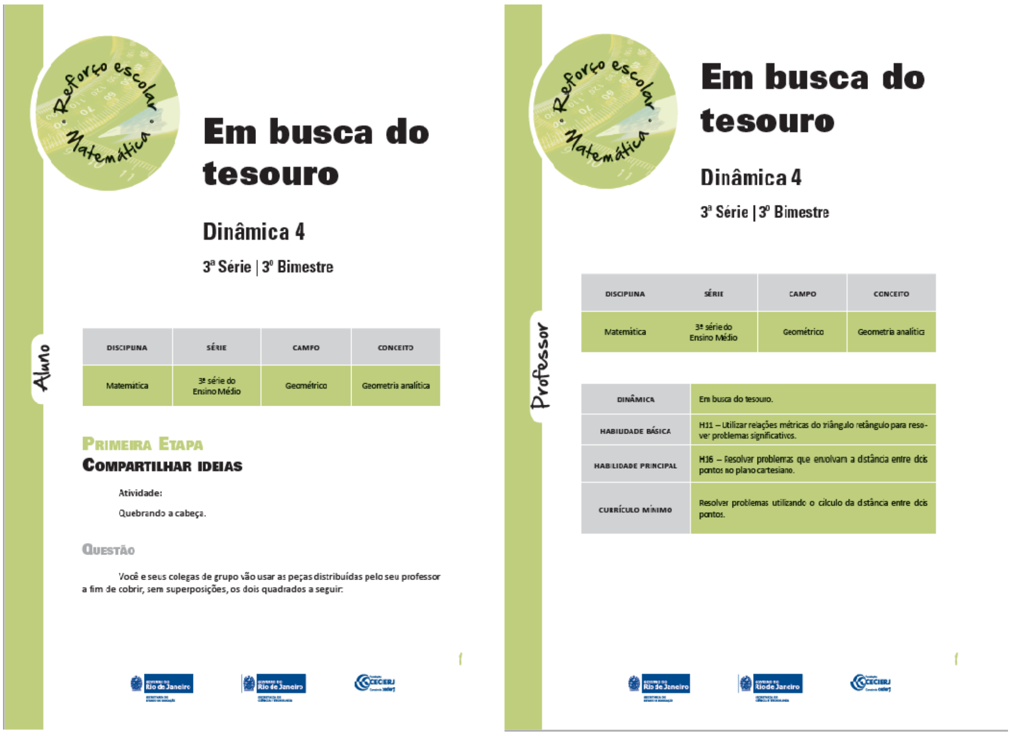
O conteúdo das dinâmicas foram selecionados a partir do resultado das provas diagnósticas da SEEDUC, e foram tomadas as habilidades não desenvolvidas ou em desenvolvimento pelos alunos. Os conteúdos contemplados foram os contidos no Currículo

Mínimo. Os alunos selecionados para integrarem o Projeto eram os que tinham baixo desempenho na prova Saerjinho, no qual o objetivo era avaliar o aprendizado bimestralmente, em Português e Matemática.

O Projeto Reforço Escolar foi desenvolvido e contava de maneira articulada com três frentes: o material didático, a formação e a estrutura. O material didático produzido especificamente para uso do aluno e professor participantes. Aos professores foi oferecida a formação continuada à distância e presencialmente. E por fim, a Estrutura que foi a implementação e o acompanhamento das turmas no Projeto.

Todo o material desenvolvido era entregue às escolas participantes no formato com a versão para aluno e professor, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Capas do Material do Projeto Reforço Escolar



Fonte: Autoria Própria.

Para CECIERJ (2012, p.7), "A dinâmica do professor conta com orientações específicas e materiais complementares para apoiar o docente em sua prática pedagógica.". Além dos materias oferecidos aos professores com as devidas orientações, o Projeto ainda contava com a Formação Continuada dos professores responsáveis, que foram encaixados em dois perfis: o **professor formador**, professor bolsista da fundação CECIERJ responsável pela formação e acompanhamento dos trabalhos; e o **professor dinamizador**, professor da Rede responsável pela implementação das dinâmicas com os alunos. (CECIERJ, 2012)

As aulas ocorriam na Unidade Escolar em que o aluno estava matriculado e contava com duas aulas semanais para as disciplinas de Português e Matemática, no contraturno, durante os quatro bimestres. O uso do material didático oferecido pelo Projeto era obrigatório.

O Projeto está pausado desde 2015 e não há previsão de retorno.

O principal diferencial nas dinâmicas, é o papel que atribui aos alunos de protagonismo na construção do seu aprendizado. Essa pesquisa visa utilizar algumas dinâmicas do Projeto Reforço Escolar e realizar as atividades no aplicativo GeoGebra. Dessa forma, as atividades do Projeto serão vistas não somente algebricamente no papel, como também graficamente no aplicativo, proporcionando aos alunos uma estratégia que desperte o seu interesse e seja motivadora, ao mesmo tempo que tenha uma ação eficiente no que diz respeito ao conhecimento obtido pelo aluno.

Capítulo 2

O Ensino da Geometria Analítica: Conteúdos Abordados

A leitura, interpretação e utilização das várias representações matemáticas e o uso das tecnologias são algumas das habilidades requeridas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

> Habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações. (BRASIL, 2002, p.41)

A matemática no Ensino Médio, juntamente com a inserção da tecnologia digital, não deve mais estar associada a memorização de fórmulas e de resultados, e sim a um saber pensar matemático, no qual há a construção do conhecimento. É um processo lento e trabalhoso, mas que na busca por regularidades, generalização de padrões, argumentação e então a formalização do conhecimento matemático, desenvolve habilidades que os alunos poderão usar não somente na matemática, como também em outras áreas de conhecimento (BRASIL, 2002).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio indicam que para o desenvolvimento das habilidades exigidas na matemática, três eixos devem ser trabalhados nos três anos de ensino: a álgebra (números e funções); a geometria e medidas; e a análise de dados. A geometria analítica, em geral, é trabalhada na 3ª série, ou seja, no ano final, e está inserida no segundo tema estruturador, juntamente com as geometrias plana, espacial e métrica. A geometria analítica aparece como um eixo importante pois trabalha a geometria de forma algébrica.

A Geometria Analítica, objeto desse trabalho, segundo os Brasil (2002), tem como papel relacionar as propriedades algébricas à representação geométrica de um mesmo elemento. Ela transforma questões geométricas em resoluções de equações, sistemas e inequações. E o aluno então poderá perceber que um mesmo problema tem suas várias representações e podem ser abordados com vários instrumentos. E para isso, não há necessidade da memorização. Pode-se investir em novas formas de compreensão do que a geometria analítica propõe. (BRASIL, 2002)

As habilidades e competências que o aluno deve atingir no estudo da Geometria Analítica para os Brasil (2002) são:

> Representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras; Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos; Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características; Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa; Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2002, p.125)

No Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro, no qual a SEEDUC-RJ definiu as orientações curriculares de Matemática para o Ensino da Rede Estadual, em 2012. A geometria analítica está presente nos 3º e 4º bimestres do 3º ano do Ensino Médio. As habilidades e competências que os alunos devem desenvolver, segundo esse documento, são:

> Resolver problemas utilizando o cálculo de distância entre dois pontos; Identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta; Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações; determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio. (RIO DE JANEIRO, 2012)

De forma geral, os conteúdos de Geometria Analítica abordados no Ensino Médio da rede Estadual do Rio de Janeiro estão relacionados aos elementos algébricos e geométricos do ponto, da reta e da circunferência.

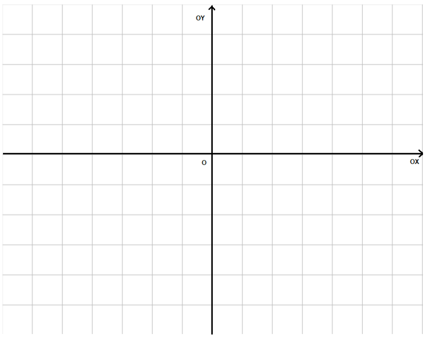
2.1 Conteúdos Abordados

Essa subseção apresenta os conteúdos abordados nas atividades propostas: pontos e retas.

2.1.1 O Ponto: Coordenadas Cartesianas no Plano

Dado um sistema de eixos ortogonais, que se intersectam em um ponto *O*, chamado de sistema *OXY* e determinam um plano π, é chamado de **plano cartesiano**. Os eixos determinados *OX* e *OY* são perpendiculares, e seu ponto de intersecção *O*, é chamado de origem. O eixo *OX* é chamado de eixo horizontal e o eixo *OY* é o eixo vertical, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Sistema de coordenadas (cartesiana)



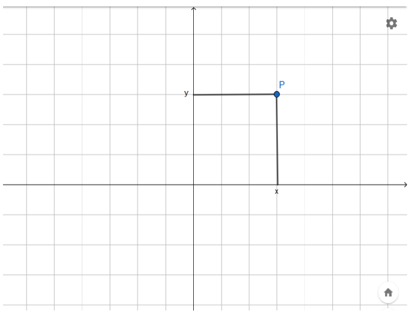
Fonte: Autoria Própria.

Chama-se:

- *OX* eixo das abscissas
- *OY* eixo das ordenadas
- *O* origem

Uma correspondência biunívoca pode ser estabelecida entre o conjunto dos pontos do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados dos reais $\mathbb{R}^2 = (x, y); x, y \in \mathbb{R}$. Sendo assim, ao ponto P do plano π faz corresponder o par ordenado (x, y), no qual x é a abscissa do pé da perpendicular ao eixo OX por P e y é a ordenada do pé da perpendicular ao eixo OY por P, conforme representação do ponto $P = (x, y)$ na Figura 4.

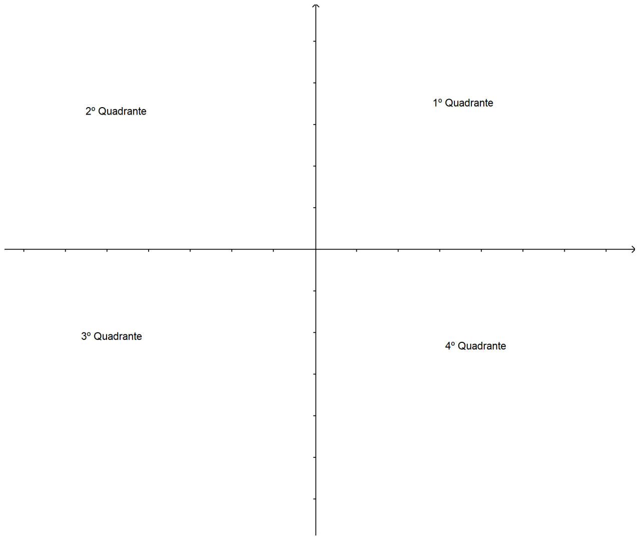
Figura 4 – Ponto no Plano



Fonte: Autoria Própria.

Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões angulares chamadas quadrantes, que recebem os nomes indicados na Figura 5.

Figura 5 – Quadrantes



Fonte: Autoria Própria.

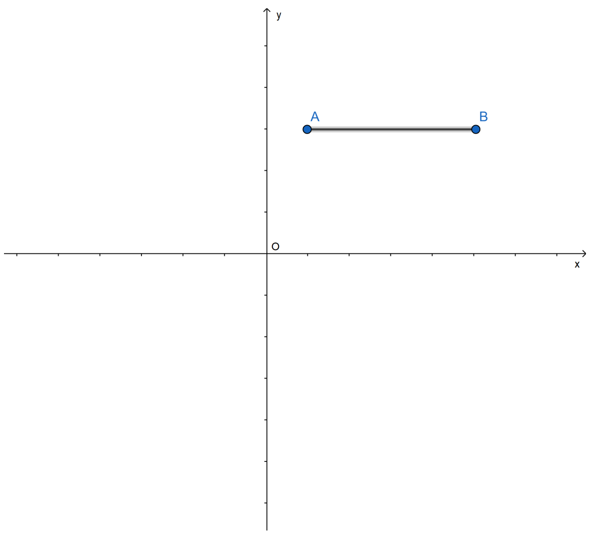
2.1.2 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, representa-se a distância entre eles por $d(A, B)$ e para calcular a distância entre eles, serão consideradas três possibilidades:

1. $x_A \neq x_B$ e $y_A = y_B$

   Graficamente, temos a Figura 6:

Figura 6 – AB paralelo a OX



Fonte: Autoria Própria.

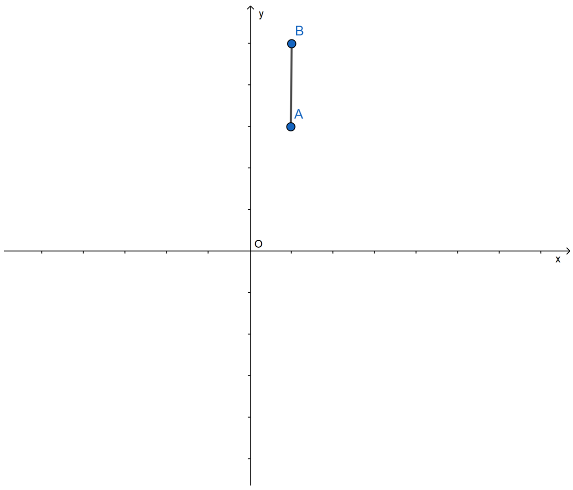
e a distância será dada por:

$$d(A,B) = |x_B - x_A|$$

2. $x_A = x_B$ e $y_A \neq y_B$

   É representado graficamente pela Figura 7:

Figura 7 – AB paralelo a OY



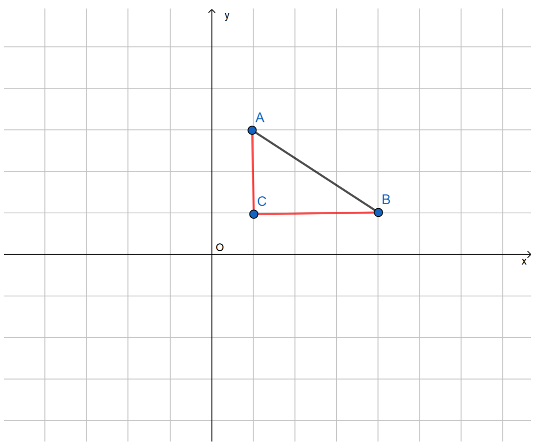
Fonte: Autoria Própria.

e a distância é dada por:

$$d(A,B) = |y_B - y_A|$$

3. $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, tem-se a Figura 8:

Figura 8 – AB não paralelo a OX e OY



Fonte: Autoria Própria.

De acordo com os casos iniciais, tem-se:

$$d(A, C) = |y_C - y_A|$$

e

$$d(B, C) = |x_C - x_B|$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(d(A, B))^2 = (d(A, C))^2 + (d(B, C))^2$$
$$(d(A, B))^2 = (y_C - y_A)^2 + (x_C - x_B)^2$$

então,

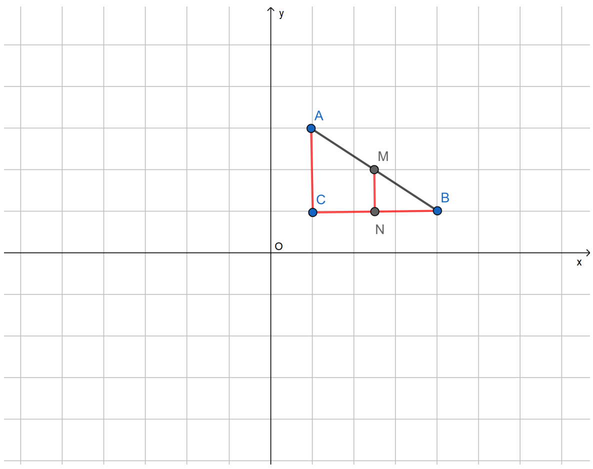
$$d(A, B) = \sqrt{(y_C - y_A)^2 + (x_C - x_B)^2}$$

2.1.3 Ponto médio de um segmento

Dado um ponto M pertencente ao segmento $\overline{AB}$, M será ponto médio se, e somente se, $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Seja M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Na figura 9, note que os triângulos BMN e BAC são semelhantes, pois possuem os três ângulos respectivamente congruentes.

Figura 9 – Ponto Médio de um segmento



Fonte: Autoria Própria.

Então,

$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} \tag{2.1}$$

Mas

$$BA = 2.(BM) \tag{2.2}$$

Logo, substituindo a Equação 2.2 na Equação 2.1:

$$\frac{BM}{2.BM} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2.BN$$

$$|x_B - x_C| = 2.|x_B - x_N| \tag{2.3}$$

Mas, $x_N = x_M$ e $x_C = x_A$ e ainda como $x_B > x_C$ e $x_B > x_N$, podemos reescrever a Equação 2.3 como:

$$x_B - x_A = 2.(x_B - x_M) \Rightarrow 2.x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente, prova-se que:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Portanto, o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é:

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$$

2.1.4 Condição de alinhamento de três pontos

Três pontos estão alinhados, ou são colinerares, quando pertencerem à mesma reta.

Observando a Figura 10, tem-se os triângulos ABD e BCE semelhantes.

Então,

$\frac{AD}{BE} = \frac{DB}{EC} \Rightarrow \frac{x_D - x_A}{x_E - x_B} = \frac{y_B - y_D}{y_C - y_E}$

Mas,

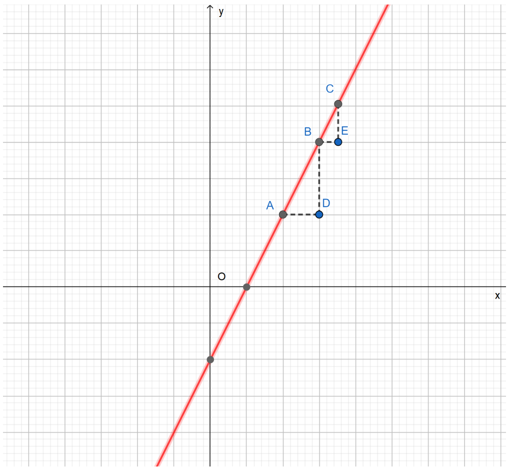
$x_B = x_D$, $x_C = x_E$, $y_A = y_D$ e $y_B = y_E$

Portanto:

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}$$

$$(x_B - x_A).(y_C - y_B) = (x_C - x_B).(y_B - y_A)$$

Figura 10 – Pontos colineares



Fonte: Autoria Própria.

Desenvolvendo os produtos, temos:

$$x_B y_C - x_B y_B - x_A y_C + x_A y_B = x_C y_B - x_C y_A - x_B y_B + x_B y_A$$

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0 \tag{2.4}$$

A Equação 2.4 pode ser escrita como o resultado do determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

.

Desenvolvendo o determinante, obteremos:

$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0.$

Portanto, três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, serão colineares caso:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

.

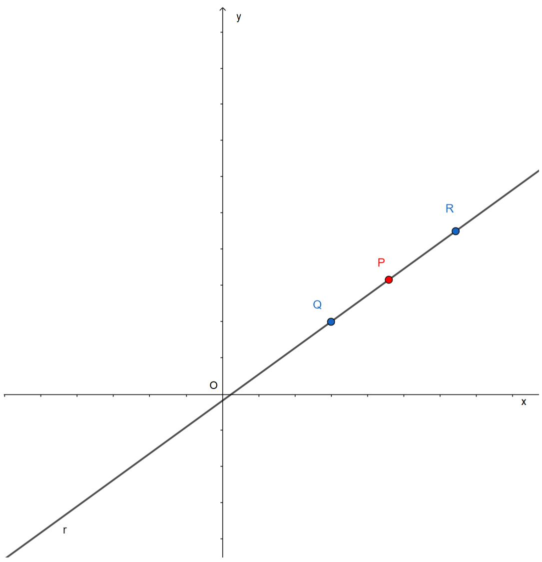
2.1.5 A Reta: Equação Geral da Reta

Axioma 1 (Euclides)**.** *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém estes pontos. Barbosa (1995, p.1)*

Teorema 2.1. *A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ na qual a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico de r (IEZZI, 1997).*

Considerando $Q(x_1, y_1)$ e $R(x_2, y_2)$ dois pontos distintos no plano conforme Figura 11. Seja a reta r definida por Q e R e $P(x, y)$, um ponto que percorre r. Como P, Q, R estão alinhados, tem-se:

Figura 11 – Reta r



Fonte: Autoria Própria.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

.

Desenvolvendo o determinante, tem-se:

$$xy_1 + yx_2 + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0$$

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

Tomando $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1y_2 - x_2y_1 = c$:

$$ax + by + c = 0 \tag{2.5}$$

E todo ponto $P \in r$ deve verificar a Equação 2.5, que é chamada *equação geral da reta r*.

2.1.6 Equação Reduzida da Reta

Sendo r uma reta cuja equação geral é dada por $ax + by + c = 0$ e supondo $b \neq 0$, pode-se determinar a sua equação reduzida, isolando o valor de y em função de x. Ou seja,

$ax + by + c = 0$

$by = -ax - c \Rightarrow y = -(\frac{a}{b})x - \frac{c}{b}$.

Considerando $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$, podemos escrever:

$$y = mx + n \tag{2.6}$$

A Equação 2.6 é denominada *equação reduzida da reta*, na qual $m \in \Re en \in \mathbb{R}$. Nessa equação:

- m é o *coeficiente angular* da reta.
- n é a ordenada do ponto em que r intersecta o eixo das ordenadas e é chamado *coeficiente linear* de r

2.1.7 Coeficiente angular de uma reta

Num sistema cartesiano, o ângulo formado pela reta r, não vertical, com o eixo OX das abscissas, tem medida α. O ângulo α é convexo e forma-se no sentido anti-horário. Essa reta r tem como coeficiente angular um número real m dado por $\tan \alpha$, conforme Figura 12. BARRETO FILHO e Silva (2000)

$$m = tg\alpha \tag{2.7}$$

Portanto, caso seja conhecido o ângulo de inclinação α, o coeficiente angular m poderá ser calculado por meio da Equação 2.7.

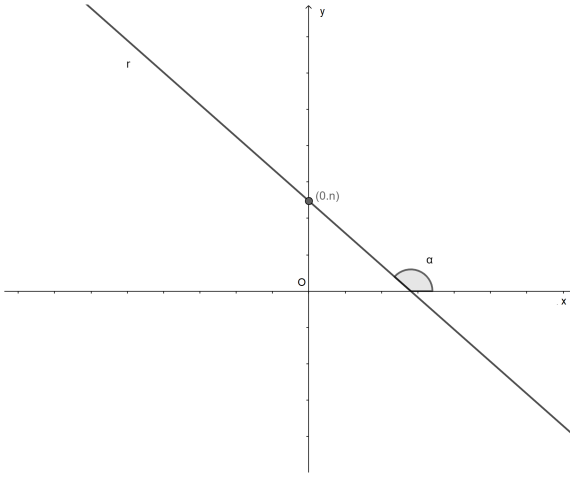
Caso sejam conhecidos dois pontos distintos da reta r, $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ conforme Figura 13, o coeficiente angular será calculado por:

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

E no caso do conhecimento apenas da equação geral da reta, que foi determinada a partir da condição de alinhamento de 3 pontos:

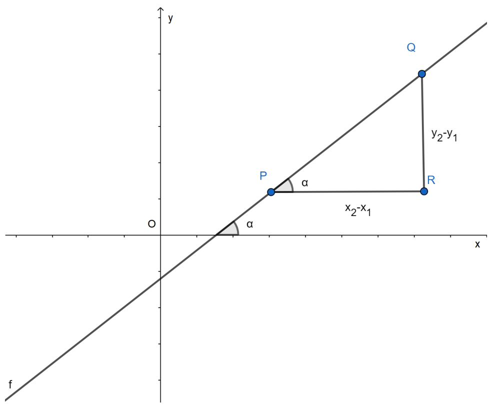
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Figura 12 – Coeficientes



Fonte: Autoria Própria.

Figura 13 – Coeficiente angular conhecidos dois pontos



Fonte: Autoria Própria.

.

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

No qual:

$(y_1 - y_2) = a$, $(x_2 - x_1) = b$ e $(x_1y_2 - x_2y_1) = c$:

Como $m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{a}{b}$$

2.1.8 Posições relativas de duas retas

Dadas duas retas r e s, elas podem assumir três posições relativas no plano, dependendo do número de pontos comuns que tenham.

1. r e s serão *paralelas e distintas* ($\|$) se, e somente se, não tiverem ponto comum;

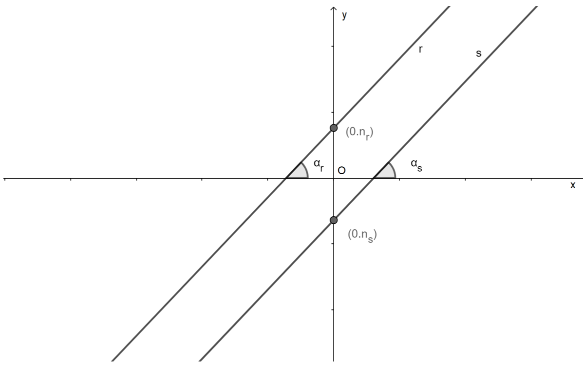
   Como pode ser visto na Figura 14, os ângulos de inclinação das retas r e s são iguais e os coeficientes lineares são diferentes, pois intersectam o eixo das ordenadas em pontos distintos. Portanto:

   $\alpha_r = \alpha_s; \tan \alpha_r = \tan \alpha_s; m_r = m_s$

   Logo,

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

Figura 14 – Retas Paralelas



Fonte: Autoria Própria.

2. As retas r e s serão *concorrentes* se, e somente se, tiverem um único ponto comum;

   Conforme Figura 15, os ângulos de inclinação das retas r e s são diferentes. Portanto:

   $\alpha_r \neq \alpha_s; \tan \alpha_r \neq \tan \alpha_s; m_r \neq m_s$

   Logo,

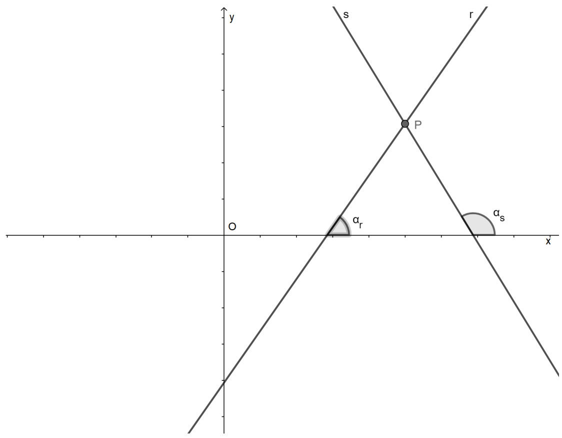
$$r \times s \Leftrightarrow m_r \neq m_s$$

3. r e s serão *coincidentes* se, e somente se, tiverem infinitos pontos comuns (Figura 16).

   A Figura 16 mostra as retas r e s com coeficientes angulares iguais ($m_r = m_s$) e coeficientes lineares iguais ($n_r = n_s$).

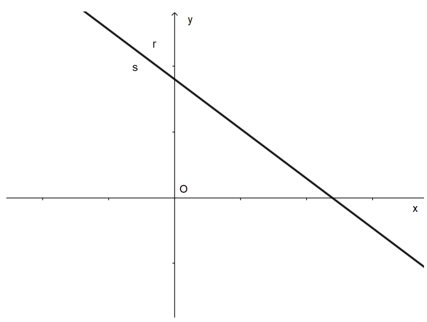
Todo o conteúdo contido nesse capítulo, foi abordado aos alunos de forma integrada utilizando o aplicativo GeoGebra e as dinâmicas do Projeto Reforço Escolar.

Figura 15 – Retas concorrentes



Fonte: Autoria Própria.

Figura 16 – Retas coincidentes



Fonte: Autoria Própria.

Capítulo 3

Aspectos Metodológicos

Com o propósito de apresentar a metodologia, que segundo Minayo, Deslandes e Gomes (2011, p.16), "inclui as concepções teóricas de abordagem, o conjunto de técnicas quepossibilitam a construção da realidade e o sopro divino do potencial criativo do pesquisador.", nesse capítulo serão abordados os métodos aplicados na investigação científica realizada.

> O conhecimento científico é produzido pela investigação científica, através de seus métodos. Resultante do aprimoramento do senso comum, o conhecimento científico, tem a sua origem nos seus procedimentos de verificação baseados na metodologia científica. É um conhecimento objetivo, metódico, passível de demosntração e comprovação. (FONSECA, 2002, p.11).

Quanto à natureza da pesquisa científica, pode ser caracterizada como uma pesquisa aplicada, pois tem como objetivo produzir conhecimento por meio de aplicações práticas (NEVES; DOMINGUES, 2007). E quanto a sua abordagem, a pesquisa é classificada como qualitativa. Para Fonseca (2002, p.20), "A pesquisa qualitativa se preocupa com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais."

De acordo com Neves e Domingues (2007), a pesquisa científica é um conjunto de ações que foram organizadas utilizando métodos e instrumentos, com o intuito de solucionar algum problema. E é dessa maneira que essa pesquisa se apresenta, houve a preparação das ações a serem aplicadas e a revisão bibliográfica; o seu desenvolvimento no qual se deu a aplicação da sequência didática; e a análise dos dados obtidos.

Os alunos que participaram da pesquisa foram nomeados por A_1, A_2, A_3

3.1 A escola

A escola em que a pesquisa foi realizada, Colégio Estadual Luiz Reid, situa-se no Município de Macaé- RJ e está localizada em sua área urbana na rua Teixeira de Gouveia, número 942. É uma escola em que funcionam os três turnos somente com o Ensino Médio. No turno matutino, também é oferecido o Ensino Médio profissionalizante em Formação de Professores.

Em sua dependência há dois prédios, com um total de 20 salas de aula, duas quadras poliesportivas, um auditório, salas dos professores, direção, coordenação pedagógica, secretaria, biblioteca, laboratórios de informática e de química, banheiros, cozinha, refeitório, cantina e um espaço de lazer para os alunos, com mesas de ping-pong. O laboratório de química tem equipamentos e é utilizado com frequência pelos professores da área. Porém o laboratório de informática está sem computadores disponíveis para utilização.

O espaço físico da escola é considerado bom. As salas são espaçosas, os prédios arejados, auditório amplo, com recursos computacionais para exposição e datashow disponível para instalação e utilização, o que é um facilitador, pois será de uso constante durante as aulas.

A Unidade Escolar foi escolhida para ser o campo de pesquisa, pois é o único local em que a pesquisadora é professora de matemática para a 3ª série do ensino médio ,tendo a oportunidade de fazer um trabalho contínuo, uma vez que o conteúdo abordado consta no currículo mínimo (RIO DE JANEIRO, 2012), elaborado em 2012 pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro- SEEduc-RJ.

3.1.1 Público alvo

A turma escolhida para a pesquisa ser realizada foi a turma do 3º ano noturno. A escolha foi feita baseado no turno em que a professora pesquisadora trabalha na escola. A turma escolhida, inicialmente, tinha 34 alunos matriculados, porém no decorrer da pesquisa, a matrícula de cinco alunos foi cancelada.

A turma tinha um perfil homogêneo, na qual a maioria é trabalhador, ou seja, durante o dia os alunos trabalham, e a noite vão para a escola, e com isso não têm tempo extra-classe para se dedicar às atividades escolares. A maioria dos alunos já era do turno da noite, o que caracteriza um perfil de alunos desmotivados com a disciplina, muitas vezes por falta de conteúdos básicos, tornando assim a eficácia do ensino um grande desafio. Dessa forma, o trabalho ganha mais uma justificativa ao se apresentar como um motivador no processo ensino- aprendizagem.

3.2 Autorizações e coletas de dados

A autorização à direção da escola para realização do projeto foi solicitada, Apêndice A, e não houve necessidade de autorização para os responsáveis, pois todos já haviam atingido a maioridade. A direção prontamente se mostrou favorável a pesquisa, autorizando assim, o ínicio da pesquisa.

Inicialmente, foram elaborados os questionários socioeconômico, Apêndice B, para que o perfil da turma fosse analisado, e ainda uma avaliação diagnóstica, Apêndice B, afim de verificar a base necessária que os alunos tinham, para que, então, o conteúdo pudesse ser nivelado para o bom andamento da pesquisa.

3.2.1 Questionário Socioeconômico

Para Neves e Domingues (2007), questionário é o instrumento de pesquisa no qual perguntas são organizadas com a finalidade de se obter dados para a pesquisa, sem que haja interferência direta ou orientação do investigador.

Sendo assim, foi elaborado o questionário contido no Apêndice B, que contém 11 perguntas com respostas fechadas, ou seja, o aluno chegará a apenas uma alternativa em sua resposta. A finalidade do questionário foi levantar dados que permitissem uma maior aproximação dos alunos com o pesquisador, uma vez que não havia um contato anterior. Além disso, a necessidade de saber a disponibilidade de tempo extra-classe e ainda a forma e frequência de acesso às tecnologias, também levou à realização do questionário, o que pôde então, dar uma direção inicial e solucionar problemas tais como a falta de celulares (que foi o instrumento tecnológico utilizado) de alguns alunos, para que todos pudessem participar da pesquisa.

Responderam ao questionário 24 alunos, sendo oito do sexo feminino e 16 do sexo masculino. A idade de 23 alunos varia de 18 a 22 anos e uma aluna possui mais de 28 anos. Todos os alunos concluíram o ensino fundamental em curso regular e desses, 15 integralmente em rede pública, sete alunos cursaram a maior parte em escola pública e dois a maior parte em escola particular. A maioria dos alunos não possui filhos, apenas sete alunos possuem, sendo seis menores de seis anos, ou seja, requerem uma atenção maior. E ainda, 14 alunos trabalham, sendo nove em horário integral.

Em relação ao uso da tecnologia, os resultados serão mostrados na tabela 1.

Tabela 1 – Uso das tecnologias pelos alunos

Possui computador em casa?	Não: 10	Sim: 14
Possui Smartphone?	Não: 3	Sim: 21
Possui serviço de internet?	Não: 3	Sim: 21

Fonte: Dados da Pesquisa

Portanto, o uso do celular enquanto recurso tecnológico foi possível. Os três alunos que não tinham celular realizaram a atividade com colega de classe que possuía.

3.2.2 Teste diagnóstico

O teste diagnóstico (Apêndice B) foi aplicado com o objetivo de verificar quais conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa pesquisa os alunos dominavam, e quais eles tinham mais dificuldade, para que uma revisão fosse realizada antes do início da aplicação da sequência didática.

Inicialmente, o alunos ficaram apreensivos na realização do teste. Porém, após a professora explicar o objetivo da atividade, eles ficaram mais a vontade. Na data em que o teste foi aplicado, tinham 17 alunos presentes. Com o seu resultado pode-se analisar e identificar as dificuldades mais significativas apresentadas, para então organizar o planejamento da sequência didática com os devidos ajustes para uma melhor abordagem do conteúdo abordado.

Cada uma das cinco questões do teste diagnóstico serão apresentadas a seguir, juntamente com seu objetivo. A análise dos resultados dos alunos poderá ser vista no Capítulo 4. As questões seguiram modelos utilizados em livros didáticos do ensino médio que os alunos têm acesso, com suas devidas adaptações.

QUESTÃO 1

Localize os seguintes pontos no plano cartesiano:
A(1,2), B(-2,4), C(3,-1), D(-4,-2), E(5,0), F(0,-3), G(-1,0), H(0,0), I(0,4), J(-3,4).

O **objetivo** da questão é identificar se o aluno tem a habilidade em manipular o plano cartesiano, reconhecer os eixos da abscissa e ordenada e localizar os pontos de forma correta.

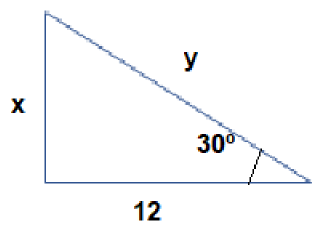
QUESTÃO 2

Determine a medida desconhecida em cada um dos triângulos abaixo.

Essa questão está contida no teste, com o **objetivo** de verificar o conhecimento prévio sobre o Teorema de Pitágoras.

QUESTÃO 3

Encontre os valores de x e y no triângulo abaixo.



O principal **objetivo** da questão foi verificar qual conhecimento de trigonometria no triângulo retângulo os alunos tinham, pois posteriormente esse conhecimento seria necessário, por exemplo para determinar o coeficiente angular de uma reta.

QUESTÃO 4

Considerando a função $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$, complete a tabela abaixo e, em seguida, construa o seu gráfico.

x	$f(x) = 2x - 3$	(x, y)
0		
1		
$\frac{3}{2}$		
2		
$\frac{5}{2}$		

Com o **objetivo** de analisar se o aluno conhece o conceito de função e sua representação gráfica, essa questão foi inserida nessa avaliação. É importante que o aluno associe a função afim, que tem como representação geométrica uma reta, ao estudo da geometria analítica.

3.3 A sequência didática

Após a análise do teste diagnóstico, pode-se concluir que o conhecimento que os alunos possuíam em relação aos conteúdos pré-requisitados, era precário. A deficiência foi não somente nos conteúdos mais avançados, mas também em conteúdos básicos, como as quatro operações com números inteiros, o que mostrou um nível de conhecimento muito baixo no rendimento da turma.

Dessa forma, fez-se uma sequência didática afim de se recuperar/relembrar esse conteúdo em paralelo com a aplicação da atividade com o conteúdo de geometria analítica, que é o objeto desse estudo. Segundo Zabala (2015), sequência didática é definida como

> Um conjunto de atividades ordenadas , estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores quanto pelos alunos.(ZABALA, 2015)

A sequência didática (SD) foi estruturada de forma a seguir uma ordem em que os conteúdos são apresentados no currículo mínimo (RIO DE JANEIRO, 2012) e também que seguissem uma ordem lógica de aprendizado, afim de que os objetivos dessa pesquisa fossem alcançados.

Um dos objetivos da sequência didática, segundo Zabala (2015), é:

> Introduzir nas diferentes formas de intervenção aquelas atividades que possibilitem uma melhora de nossa atuação nas aulas, como resultado de um conhecimento mais profundo das variáveis que intervême do papel que cada uma delas tem no processo de aprendizagem dos meninos e meninas. (ZABALA, 2015, p.54)

As atividades da SD foram seguidas, após a aplicação do teste diagnóstico, pela aula expositiva utilizando recursos como datashow para apresentação do aplicativo GeoGebra e aulas expositivas no datashow presentes nos Apêndices C, D, E. E as atividades contidas nos Apêndices: C, D, E, F, no qual todas as atividades tinham como objetivo proporcionar ao aluno um conhecimento mais profundo do conteúdo estudado por meio de algumas dinâmicas investigativas do Projeto Reforço Escolar (Figura 17), e à professora pesquisadora, uma observação e análise da aprendizagem obtida pelo aluno.

Figura 17 – Dinâmicas do Projeto Reforço Escolar

Fonte: Dados da pesquisa.

3.4 Etapas da Pesquisa

Após a análise dos questionários e a organização da SD, as atividades foram iniciadas e as etapas serão resumidamente apresentadas a seguir. A pesquisa foi desenvolvida num total de 26 aulas de 40 minutos cada, e divididas nas seguintes etapas:

- **Etapa 1** (2 horas/aula):
  - Conversa com a turma sobre o objetivo da pesquisa, a necessidade da participação de todos os alunos e ainda das autorizações pertinentes.
  - Aplicação do questionário socio-econômico e aplicação do teste diagnóstico.
- **Etapa 2** (5 horas/aula):
  - Momento destinado ao compartilhamento da internet para os alunos que não fizeram o *download* do aplicativo GeoGebra realizarem o *download* em sala de aula;
  - Criação do grupo no aplicativo *Whatsapp* para envio das atividades realizadas pelos alunos no aplicativo GeoGebra;
  - Apresentação de slides, preparada pela professora pesquisadora, mostrando as funcionalidades da ferramenta GeoGebra;
  - Atividade I realizada sobre pontos no plano cartesiano e distância entre dois pontos (Apêndice C). Ambos os assuntos foram abordados por meio das fichas de atividades e também da exposição de slides no datashow, para que os alunos se familiarizassem com a interface do aplicativo.
- **Etapa 3** (3 aulas):
  - Aula sobre Ponto Médio e alinhamento de três pontos realizada no datashow (Apêndice D), com os alunos acompanhando os procedimentos no aplicativo GeoGebra;
  - Atividade II sobre ponto médio e alinhamento de 3 pontos realizadas pelos alunos com a orientação da professora.
- **Etapa 4** (10 aulas):
  - Apresentação de slides (Apêndice E) tratando sobre a equação geral da reta, no qual os alunos realizavam os procedimentos junto com a professora, uma vez que toda a apresentação foi organizada utilizando o aplicativo GeoGebra;
  - Nessa etapa, foram incluídas nas atividades, questões utilizadas no Projeto Reforço Escolar da SEEduc- RJ, onde os alunos construíram e formalizaram alguns conceitos sobre as equações geral e reduzida da retas;
  - Uma gincana foi realizada da seguinte maneira: os alunos organizaram-se em grupos e responderam questões referentes ao conteúdo presente nessa etapa (Apêndice E), com a finalidade de se observar o aprendizado obtido. O grupo vencedor ganhou caixas de bombom.
- **Etapa 5** (6 aulas):

- Os alunos realizaram as atividades referentes a posição relativa entre duas retas. Nessa etapa, foi feita novamente a integração das questões do Projeto Reforço Escolar, junto com a construção no aplicativo GeoGebra, para formalização do conteúdo.

Após a aplicação das atividades, foi feita a análise dos resultados de cada etapa por meio das soluções dos alunos e da observação em sala de aula feita pela pesquisadora.

Capítulo 4

Atividades Propostas e Análise dos Resultados

Nesse capítulo serão abordados, de forma mais detalhada, os resultados do Teste diagnóstico (Apêndice B) e as atividades propostas durante a sequência didática, disponíveis nos Apêndices C, D, E, e F. Serão mostradas ainda as atividades realizadas pelos alunos no aplicativo para dispositivos móveis GeoGebra, que foi o suporte tecnológico no qual os alunos realizaram as atividades. Será feita ainda nesse capítulo, uma análise dos resultados obtidos, tais como as soluções esperadas pela pesquisadora e as apresentadas pelos alunos e as intervenções pedagógicas necessárias; a contribuição do uso do aplicativo GeoGebra no processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica.

As atividades foram aplicadas entre os meses de março a julho de 2019, e no início de cada atividade, foram apresentados aos alunos os objetivos de cada aula e também a orientação quanto à execução de cada trabalho.

4.1 Análise do Teste Diagnóstico

Na Tabela 2 são mostrados os números de acertos e erros dos alunos em cada questão, sendo considerado acerto somente quando é total. Nas questões em branco, ou com acertos parciais, ela foi considerada errada.

Questão 1:

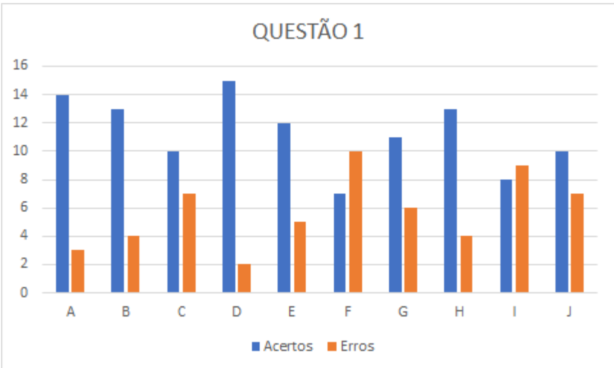
Embora seja um conteúdo estudado desde o ensino fundamental, houve um número muito grande de erros ao marcar os pontos no plano cartesiano, conforme é possível ver na Figura 18. O maior equívoco na localização dos pontos foi trocar a abscissa pela ordenada. E quando uma das coordenadas era zero, o índice de erros foi ainda maior. Nos casos em que a abscissa era zero (pontos F e I), maior parte dos alunos errou na marcação.

Tabela 2 – Resultados do Teste diagnóstico da turma

QUESTÃO	ACERTOS	ERROS
1A	14	3
1B	13	4
1C	10	7
1D	15	2
1E	12	5
1F	7	10
1G	11	6
1H	13	4
1I	8	9
1J	10	7
2a	1	16
2b	0	17
3	7	10
4	0	17
5	4	13

Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 18 – Resultados da Questão 1 do Teste diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

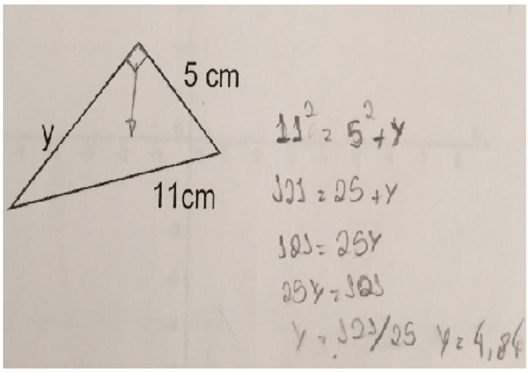
Questão 2:

A turma teve um desempenho muito baixonessa questão. Não lembravam do conteúdo, e somente após a exposição do mesmo no quadro, três alunos dos 17 que realizaram o teste, tentaram resolver a questão, e apenas um conseguiu resolver o item *a* da referida questão corretamente. No item *b*, o aluno que acertou o item *a* não conseguiu desenvolver de maneira adequada, como mostra a Figura 19. O aluno aplicou o Teorema de Pitágoras corretamente, mas não soube concluir a questão algebricamente. O restante deixou a questão em branco.

Questão 3:

Os alunos não recordoram os conceitos e aplicações da trigonometria no triângulo

Figura 19 – Resolução equivocada da Questão 2 item b, Teste Diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

retângulo. Foi necessária uma exposição do conteúdo e dos valores das razões trigonométricas para que relembrassem. E mesmo após essa breve revisão, apenas um aluno tentou responder a questão, mesmo que incorretamente. Os outros 16 deixaram a questão em branco, pois não souberam como realizá-lo.

Questão 4:

Dos 17 alunos que realizaram o teste, 12 alunos não fizeram a questão, deixando-a em branco. Dos cinco restantes que a realizaram, quatro responderam corretamente, porém não souberam escrever de forma correta as coordenadas (x, y). Nenhum aluno construiu o gráfico.

4.2 Atividade 1: Pontos no Plano cartesiano e distância entre dois pontos

Objetivos:

- Conhecer o plano cartesiano;
- Marcar pontos no plano cartesiano, a partir de suas coordenadas;
- Compreender através da visualização a distância entre dois pontos;
- Concluir a "fórmula"da distância entre dois pontos;
- Calcular distância entre dois pontos.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento prévio nos seguintes conteúdos: Coordenadas cartesianas e Teorema de Pitágoras.

Materiais e tecnologias:

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo Geogebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro branco e apagador.

Recomendações Metodológicas:

- É importante que os alunos estejam organizados em dupla, para que possam discutir melhor as questões propostas e chegar à conclusão do conteúdo.
- Solicitar aos alunos que façam, previamente, o *download* do aplicativo GeoGebra.
- O professor deve preparar slides com as telas do GeoGebra, afim de apresentar aos alunos o aplicativo, suas funções e como manuseá-lo.

Dificuldades Previstas:

Embora em outro momento já houvesse sido solicitado a instalação do aplicativo GeoGebra, muitos alunos não haviam feito e outros excluído. Foi necessário utilizar 10 minutos da aula para que eles fizessem o *download* do *software*. Nesse momento, a professora roteou a sua internet móvel, pois muitos não tinham como acessá-la naquele momento. Esse tipo de situação pode aumentar o tempo da atividade.

Tempo Estimado:

1 aula de 50 minutos.

Descrição Geral:

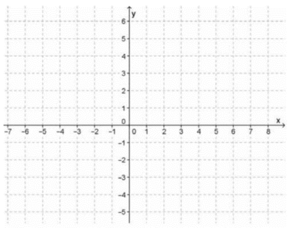
Realizaram a atividade 28 alunos, sendo que 25 estavam com o GeoGebra instalado. Os outros 3 estavam sem celular. A atividade foi realizada com os alunos em dupla, cada um manipulando no seu próprio aparelho. E os alunos que estavam sem celular, puderam observar com os outros alunos.

A atividade 1 (Apêndice C) é composta por três questões, cada uma delas desenvolvida para aplicação no geogebra.

QUESTÃO 1

Localize os seguintes pontos no plano cartesiano.
A(1,2), B(2,-2), C(-3,-1), D(-4,0), E(5,-2), F(-2,1), G(-1,0), H(0,-2), I(1,-3), J(-3,4).

Figura 20 – Gráfico da Questão 1 da Atividade 1



Fonte: Autoria Própria.

Resolução:

Na questão 1, espera-se que o aluno consiga localizar e marcar adequadamente, todos os pontos no plano cartesiano do aplicativo geogebra (Figura 21) e, em seguida, reproduzir a localização desses pontos no plano cartesiano, na folha de atividades.

A Figura 22 representa o número de acertos e erros cometidos pelos alunos na marcação dos pontos com o auxílio do GeoGebra.

Observa-se um avanço dos alunos na atividade, em relação à realizada na avaliação diagnóstica, como mostra o gráfico 18. Ao realizar a atividade no GeoGebra, o aluno consegue identificar na janela de álgebra as coordenadas do ponto. Dessa forma, ele consegue perceber e corrigir o erro quando marca os pontos de maneira indevida.

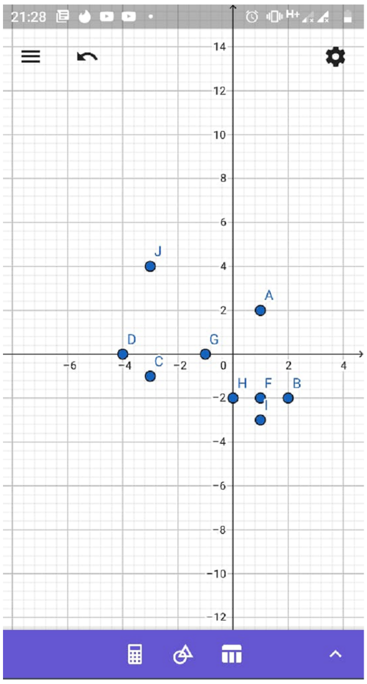
QUESTÃO 2

Determine as coordenadas dos pontos.

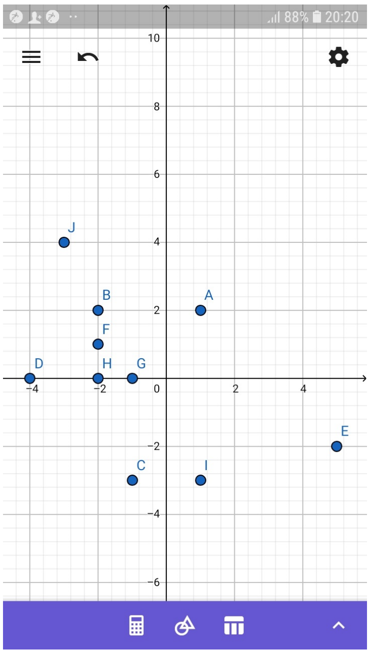
Resolução:

A questão 2 possibilita que o aluno visualize o ponto e que a partir disso, escreva as suas coordenadas.

Figura 21 – Pontos marcados no GeoGebra pelos alunos referente a Questão 1, Atividade 1

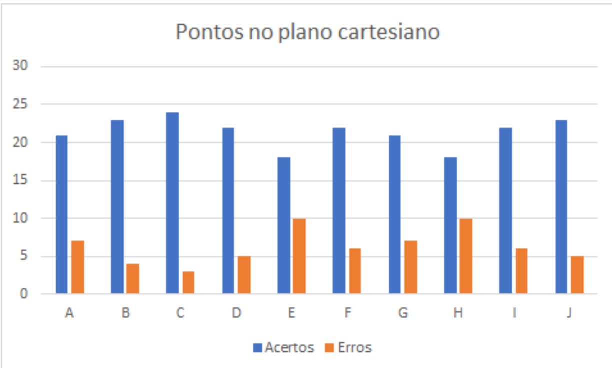


Fonte: Aluno A_1



Fonte: Aluno A_2.

Figura 22 – Número de acertos e erros dos alunos referente a Atividade 1- Questão 1



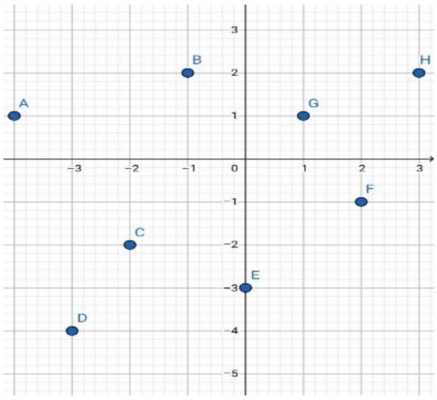
Fonte: Dados da pesquisa.

O Gráfico 24 mostra o número de acertos e erros dos alunos ao determinar as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J.

Embora pudessem utilizar o aplicativo no celular para a verificação dos pontos, os alunos optaram em não utilizá-lo pela facilidade de somente escrever as coordenadas na folha.

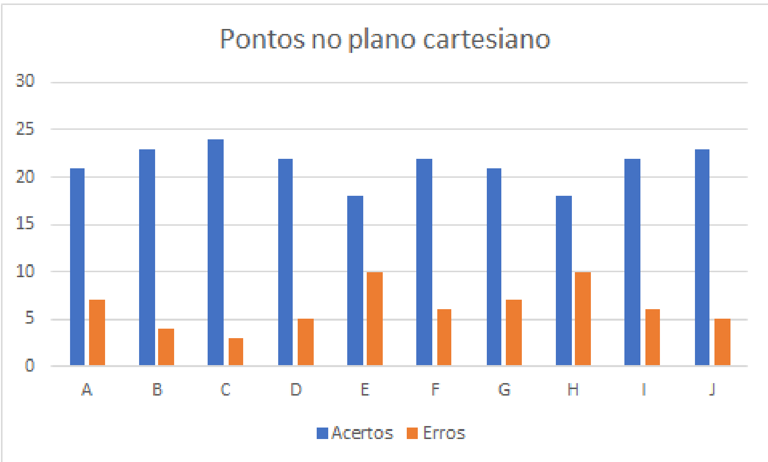
O maior número de erros nessa questão se deu por conta do esquecimento do sinal negativo, tanto na abscissa quanto na ordenada dos pontos.

Figura 23 – Gráfico da Questão 2 da Atividade 1



Fonte: Autoria Própria.

Figura 24 – Número de acertos e erros referente a Atividade 1- Questão 2

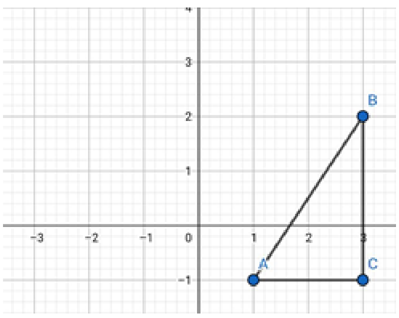


Fonte: Dados da pesquisa.

QUESTÃO 3

Após localizar os pontos abaixo no GeoGebra, complete as tabelas.

Figura 25 – Gráfico da Questão 3 da Atividade 1



Fonte: Autoria Própria.

Resolução: Após marcarem os pontos A, B e C no GeoGebra, os alunos devem:

Tabela 3 – Coordenadas do ponto

PONTO	ABSCISSA	ORDENADA
A		
B		
C		

Tabela 4 – Distância entre Pontos

	Distância
Comprimento de AC	
Comprimento de BC	
Comprimento de AB	

- Construir os segmentos AB, BC e AC.

- Na primeira tabela, escrever as suas coordenadas.

- Na segunda tabela, determinar, através do Geogebra, o comprimento dos segmentos que são paralelos aos eixos e anotar essas informações. E ainda, perceber que para encontrar o comprimento AB, será necessário aplicar o teorema de Pitágoras. A seguir, concluir a "fórmula"para encontrar a distância entre dois pontos.

Os alunos não acharam necessário marcar os pontos no GeoGebra para conseguir identificar as coordenadas dos pontos A, B e C. Dos 28 alunos que realizaram essa atividade, 22 marcaram corretamente os pontos A e B, e 20 alunos o ponto C devidamente.

Na resolução da Tabela 4, encontraram maior facilidade ao determinar o comprimento dos lados paralelos aos eixos. Aos comprimentos de AC e BC, 20 alunos responderam de forma satisfatória. Enquanto apenas 12 alunos conseguiram visualizar que para encontrar a medida do lado AB (hipotenusa do triângulo ABC), teriam que aplicar o Teorema de Pitágoras.

Formalizaram matematicamente a escrita para encontrar a distância entre pontos quando paralelos aos eixos, 11 alunos. Nenhum deles concluiu o caso em que não são paralelos.

Após o término da atividade, a professora expôs no quadro branco essa formalização do conteúdo.

4.3 Atividade 2: Distância entre pontos

Objetivos:

- Resolver situações problemas envolvendo distância entre pontos;
- Calcular distância entre dois pontos.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento prévio nos seguintes conteúdos: Figuras Espaciais, Teorema de Pitágoras e Distância Entre Dois Pontos.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que os alunos agrupem-se em duplas.
- O professor deve realizar uma revisão sobre o Teorema de Pitágoras e sobre as figuras geométricas espaciais e seus elementos, para que a aula tenha maior fluidez.

Dificuldades Previstas:

Os alunos podem ter dificuldade em realizar duas atividades que envolviam figuras espaciais, por não conhecerem os seus elementos básicos.

Tempo Estimado:

2 aulas de 50 minutos.

Descrição Geral:

Para a realização da atividade, segue a mesma descrição da atividade anterior sobre a quantidade de alunos presentes e que o GeoGebra esteja previamente instalado.

Como dito nas dificuldades previstas, os alunos tiveram dificuldade ao realizar as questões 1 e 2, por conta de defasagem em anos anteriores.

A atividade 2 (Apêndice C) é composta por cinco questões, no qual quatro delas foram retiradas do Projeto Reforço Escolar da SEeduc - RJ / CECIERJ e a outra adaptada desse material.

QUESTÃO 1(Projeto Reforço Escolar SEeduc- RJ/ CECIERJ)

A pirâmide de Keops é uma pirâmide reta de base quadrada. Suas medidas são aproximadamente 140 m de altura e 230 m de aresta da base.

Figura 26 – Pirâmide de Keops

Fonte: Projeto Reforço Escolar SEeduc - RJ/CECIERJ.

Pergunta-se:

a Qual a altura de uma de suas faces?

Resolução:

Traçando-se um plano perpendicular à base da pirâmide e que passa por seu vétice e pelo ponto médio de uma das arestas da base, tem-se um triângulo retângulo, onde os catetos são a altura da pirâmide e a metade da aresta da base, e a hipotenusa é a altura da face da pirâmide. Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras e considerando a altura da face como H, temos:

$$H^2 = 140^2 + 115^2 = 19600 + 13225 = \sqrt{32825} \simeq 181m$$

Dos 28 alunos que participaram dessa atividade, 13 deixaram em branco, pois não conseguiram compreender o que o problema pedia. Fato esse que se deve à falta de conhecimento dos elementos básicos da pirâmide. Dos 15 alunos que elaboraram a resposta, apenas um chegou ao resultado corretamente, mesmo que por um caminho mais longo, como mostra a Figura 27.

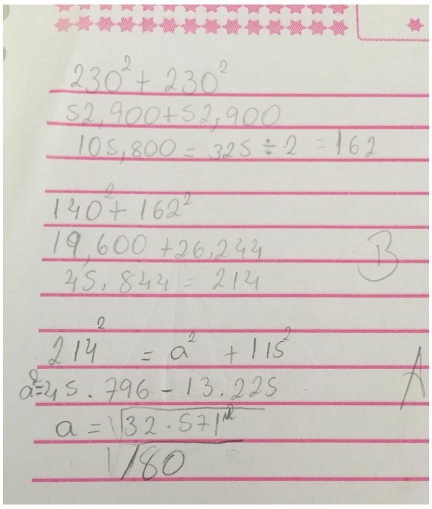
O aluno, na solução, calculou primeiramente, a medida da diagonal da base da pirâmide. Em seguida, encontrou a medida da aresta lateral, para que pudesse, assim, determinar a altura da face.

b Qual a distância entre um vértice da base e o centro da base?

Resolução:

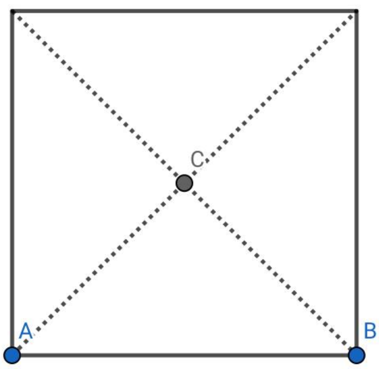
A distância entre um vértice da base e o seu centro é a metade da medida da diagonal da base, que é um quadrado de lado aproximadamente 230 m. Conforme a Figura 28, o que se pede para calcular, é a distância entre A e C (ou A e B), no qual ABC é um triângulo retângulo em C, BC e AC têm medidas iguais e AB é a hipotenusa com medida 230 m.

Figura 27 – Solução do aluno A_3 referente a questão 1-a, Atividade 2



Fonte: Autoria Própria.

Figura 28 – Base da Pirâmide de Keops



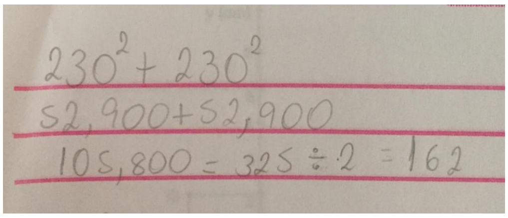
Fonte: Autoria Própria.

Portanto, considerando BC= d, tem-se:

$$d^2 + d^2 = 230^2$$
$$d = \sqrt{\frac{52900}{2}}$$
$$d \simeq 163m$$

Nesse item, 12 alunos responderam corretamente à questão, embora nenhum tenha feito como a solução acima. A resolução foi feita como mostra a Figura 29 . O aluno A_3 calculou a diagonal da base, que é um quadrado, e em seguida, dividiu por 2, encontrando assim, a distância entre o vértice e o centro da base. Do restante dos alunos, 7 não conseguiram resolver a questão, sendo que 3 deles calcularam a medida da diagonal da base, porém não concluíram por não entenderem que o que se pedia era a metade dessa medida. E 9 alunos deixaram a questão em branco.

Figura 29 – Solução do aluno A_4 referente a questão 1-b- Atividade 2

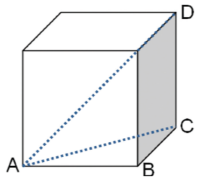


Fonte: Autoria Própria.

QUESTÃO 2 (Projeto Reforço Escolar SEeduc- RJ/CECIERJ)

Calcule a medida da diagonal de um cubo de aresta igual a 7.

Figura 30 – Cubo Questão 2, Atividade 2



Fonte: Projeto Reforço Escolar SEEduc- RJ/CECIERJ.

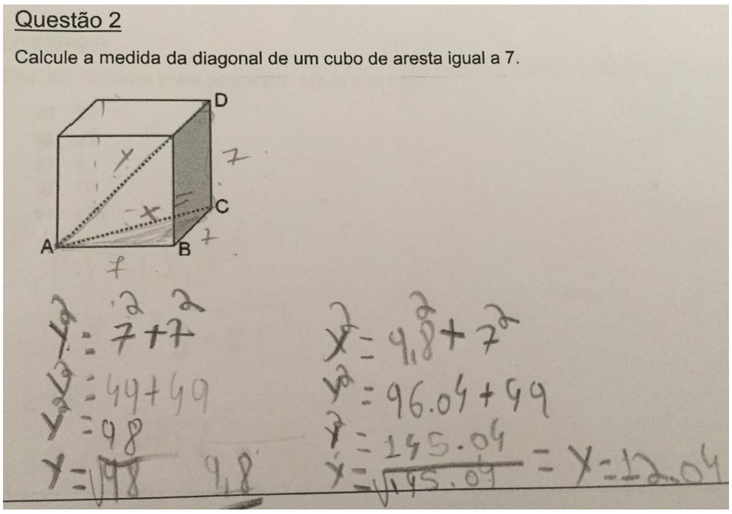
Resolução:

A questão pede o cálculo da medida do segmento AD da Figura 30, que é a diagonal do cubo de aresta 7. Para calcular AD, primeiramente tem-se que calcular a medida da diagonal da base que é o quadrado de lado 7. Então considerando o triângulo retângulo ABC, reto em B, temos: $AC^2 = AB^2 + AB^2$
$AC^2 = 7^2 + 7^2$
$AC^2 = 98$

Agora, como ACD é retângulo em C, vamos calcular a medida da hipotenusa AD, que é a diagonal do cubo. $AD^2 = AC^2 + CD^2$
$AD^2 = 98 + 49$
$AD = \sqrt{147}$
$AD \cong 12,1$

Embora essa questão seja de mais fácil interpretação que a anterior, os alunos não tiveram sucesso ao resolvê-la. Apenas cinco alunos conseguiram resolver e encontrar corretamente a medida da diagonal AD do cubo, conforme Figura 31. Deixaram em branco a questão, 21 alunos. Mesmo após a interpretação geométrica feita no quadro, os alunos não conseguiram visualizar os elementos do item.

Figura 31 – Solução do aluno A_5 referente a questão 2- Atividade 2



Fonte: Autoria Própria.

QUESTÃO 3 (Projeto Reforço Escolar SEeduc- RJ/ CECIERJ - Adaptada Saerjinho 2012)

O mapa a seguir (Figura 32) foi desenhado sobre um plano cartesiano graduado em centímetros. Nesse plano, a cidade de São Paulo encontra-se na origem dos eixos coordenados e Vitória no ponto de coordenadas $(6, 3)$.

Figura 32 – Mapa Questão 3- Atividade 2

Fonte: Projeto Reforço Escolar SEeduc- RJ

Dentre as opções a seguir, qual é a melhor aproximação da menor distância entre São Paulo e Vitória neste mapa?

(Considere: $\sqrt{5} \cong 2,2$)

a- 5,2 cm

b- 6,6 cm

c- 9,0 cm

d- 22,5 cm

e- 45,0 cm

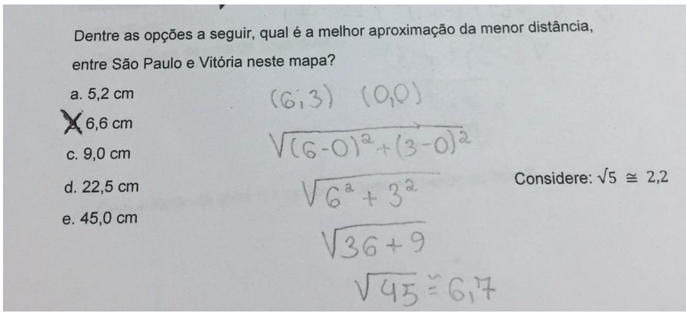
Resolução:

Para calcular a distância entre São Paulo e Vitória no mapa, basta calcular a distância entre os pontos $(0,0)$, que chamaremos de A e $(6,3)$, de B. Ou ainda, uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras, onde os catetos medem 6 e 3 centímetros, e a hipotenusa é a distância entre as duas cidades.

$$d_{(A,B)} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \Rightarrow d_{(A,B)} \cong 6,6$$

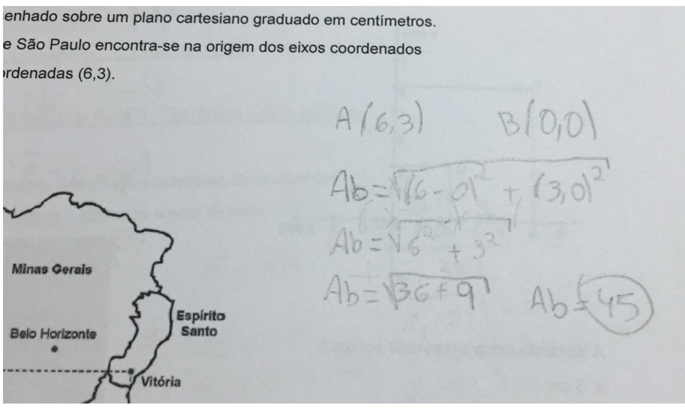
A essa questão, 22 alunos concluíram corretamente e todos fizeram aplicação direta da fórmula da distância entre dois pontos, conforme Figura 33. Apenas um aluno errou a questão, pois não resolveu a raiz quadrada de 45, como mostra a Figura 34 e marcou o item *e*, e 6 alunos deixaram a questão completamente sem fazer.

Figura 33 – Solução correta da questão 3- Atividade 2 do aluno A_6



Fonte: Autoria Própria.

Figura 34 – Solução incorreta da questão 3- Atividade 2 do aluno A_7



Fonte: Autoria Própria.

QUESTÃO 4

Qual é a distância entre os pontos A(5,8) e B(1,5)?

a- 25

b- $\sqrt{5}$

c- 5

d- 10

e- $\sqrt{14}$

Resolução:

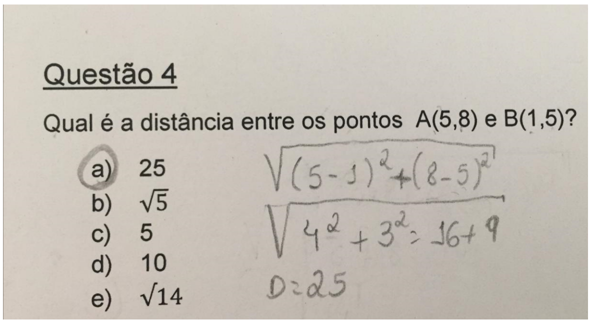
Para a resolução dessa questão, aplicar diretamente a fórmula da distância entre dois pontos.

$$d_{(}A,B) = \sqrt{(1-5)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{25}$$

$$d_{(}A,B) = 5$$

Como era uma questão mais simples, onde se fazia necessário apenas o uso e cálculo da fórmula, os alunos tiverem maior facilidade em resolvê-la e 20 encontraram o resultado corretamente. As Figuras 35 e 36 mostram os erros cometidos por 4 alunos em não calcular a raiz quadrada de 25 ou manter a raiz quadrada mesmo após calcular; os outros 4 alunos deixaram a questão em branco.

Figura 35 – Solução incorreta aluno A_8 - Atividade 2- Questão 4



Fonte: Autoria Própria.

QUESTÃO 5(Projeto Reforço Escolar SEeduc- RJ/CECIERJ- Saerjinho 2011)

Observe os pontos P e Q no plano cartesiano.

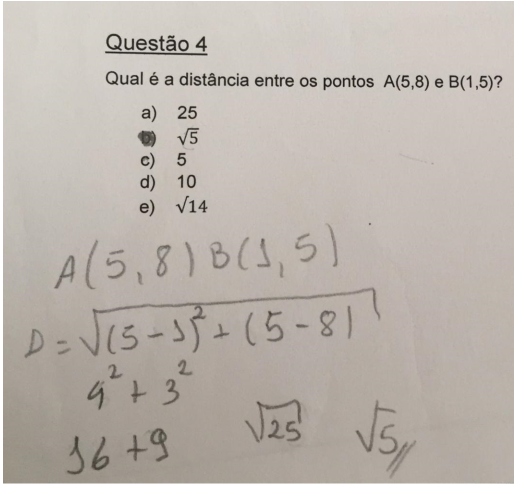
A distância entre esses dois pontos é:

a- 3 cm

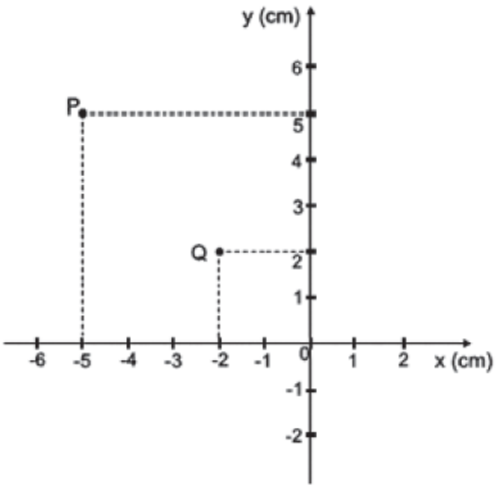
b- $\sqrt{12}$ cm

c- $\sqrt{18}$ cm

Figura 36 – Solução incorreta aluno A_9 - Atividade 2- Questão 4



Fonte: Autoria Própria.



Fonte: Projeto Reforço Escolar SEeduc- RJ/CECIERJ- Saerjinho 2011.

d- 9 cm

e- 18 cm

Resolução:

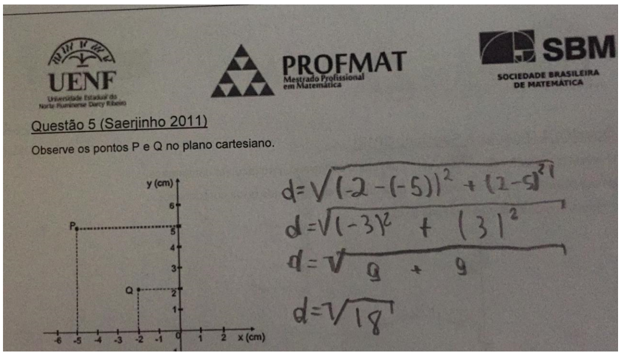
Calcular a distância entre P(-5,5) e Q(-2,2).

$$d_{(P,Q)} = \sqrt{(-2-(-5))^2 + (2-5)^2} = \sqrt{18}$$

Mais uma questão em que somente a aplicação da fórmula era necessária (Figura 37). Antes foi preciso escrever o ponto corretamente.

Dos alunos que resolveram a questão, nenhum teve dificuldade na localização dos pontos, porém dois erraram na conclusão da questão, três alunos deixaram em branco e os

Figura 37 – Solução correta Questão 5 - Atividade 2 do aluno A_9


UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática
SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Questão 5 (Saerjinho 2011)

Observe os pontos P e Q no plano cartesiano.

$d=\sqrt{(-2-(-5))^2+(2-5)^2}$

$d=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}$

$d=\sqrt{9+9}$

$d=\sqrt{18}$

Fonte: Autoria Própria.

outros 23 responderam corretamente.

4.4 Atividade 3: Ponto Médio e Condição de Alinhamento de 3 pontos

Objetivos:

- Compreender o conceito de ponto médio;
- Compreender a condição de alinhamento de 3 pontos.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento prévio nos seguintes conteúdos: pontos no plano cartesiano e média artimética.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo Geogebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que os alunos se organizem individualmente, pois como a atividade é para formalizar o conteúdo de ponto médio de dois pontos e ainda visualizar graficamente o alinhamento de pontos por meio da manipulação do aplicativo GeoGebra, é importante que cada um consigo realizar as devidadas conclusões.
- O docente deve organizar slides que mostrem todo o procedimento que o aluno vai realizar no aplicativo GeoGebra, com a finalidade de familiarizar e facilitar o uso do mesmo.

Dificuldades Previstas:

Os alunos não são pontuais ao início da aula, o que acaba dificultando e aumentando o tempo necessário para a realização da atividade.

Alguns alunos desinstalaram o aplicativo, com isso houve atraso de 10 minutos para início da aplicação.

Tempo Estimado:

1 aula de 50 minutos.

Descrição Geral:

A atividade que segue (Apêndice D), deverá ser realizada no aplicativo GeoGebra, para que os alunos cheguem à conclusão de como determinar o ponto médio de dois pontos e também que compreendam o alinhamento de 3 pontos, visualizando graficamente, antes de compreender algebricamente o seu conceito.

QUESTÃO 1 Determine as coordenadas do ponto médio dos segmentos abaixo:

a- A(-1,2) e B(-2,0)

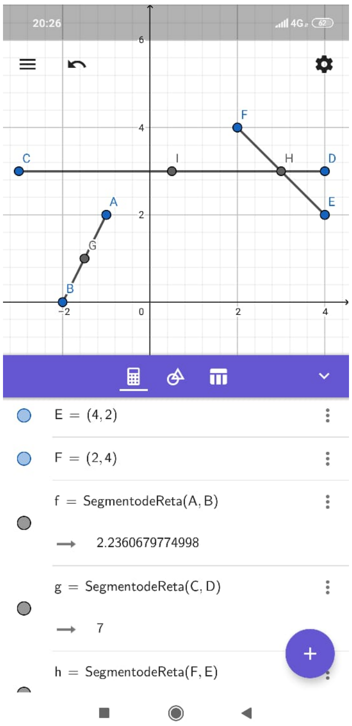
b- C(-3,3) e D(4,3)

c- E(4,2) e F(2,4)

Resolução:

A Figura 38 mostra a solução da questão do aluno C, que marcou os pontos e determinou seus pontos médios em um único plano cartesiano.

Figura 38 – Solução Questão 1, itens a, b e c referente à Atividade 3 do aluno A_10



Fonte: Autoria Própria.

Nenhum aluno deixou de realizar essa questão, embora dois estivessem sem o dispositivo móvel (fizeram com o colega que tinha o aplicativo devidamente instalado). No item *a*, somente dois alunos registraram o ponto médio na folha de atividade incorretamente, pois não colocou o sinal negativo. No item *b*, houve um erro na marcação de um dos pontos, gerando assim, um erro no resultado do ponto médio dos pontos C e D. E no item *c*, não houve nenhum erro. Todos alunos marcaram devidamente os pontos e conseguiram determinar seu ponto médio.

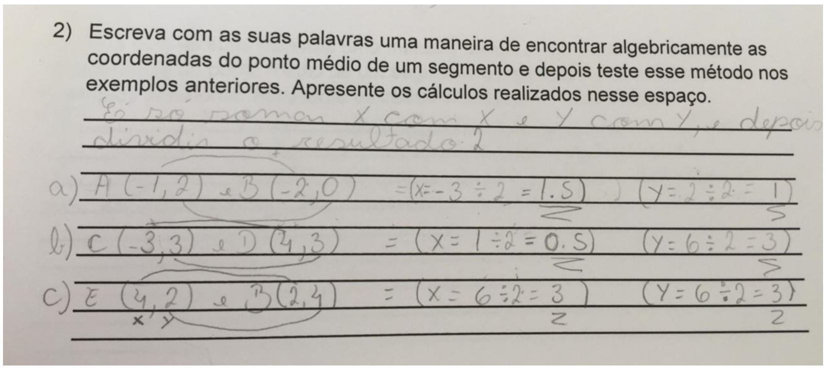
QUESTÃO 2

Escreva com as suas palavras uma maneira de encontrar algebricamente as coordenadas do ponto médio de um segmento e depois teste esse método nos exemplos anteriores. Apresente os cálculos realizados nesse espaço.

Resolução:

Esperava-se nessa questão, que os alunos conseguissem visualizar algebricamente, como determinar o ponto médio de dois pontos. Dos alunos que realizaram a atividade, 15 chegaram à conclusão que deve-se somar as coordenadas dos pontos e dividi-la por dois, como mostra Figura 39. A Figura 40 apresenta o erro de um aluno ao repetir o procedimento realizado no aplicativo GeoGebra, e 6 alunos não realizaram a tarefa.

Figura 39 – Solução Correta Questão 2- Atividade 3 do aluno $A_1 1$



2) Escreva com as suas palavras uma maneira de encontrar algebricamente as coordenadas do ponto médio de um segmento e depois teste esse método nos exemplos anteriores. Apresente os cálculos realizados nesse espaço.

É só somar X com X e Y com Y, e depois dividir o resultado:2

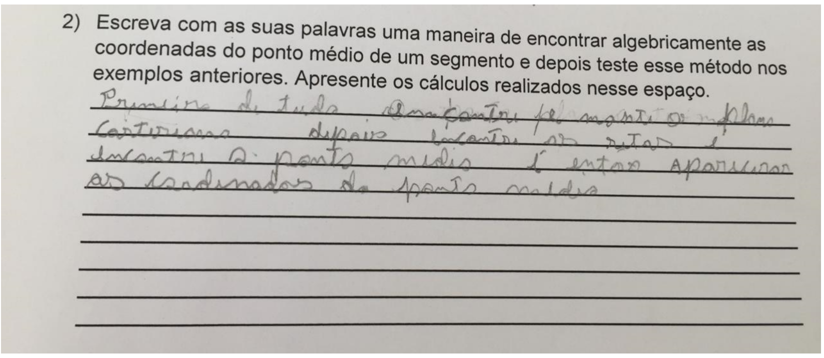
a) A(-1,2) e B(-2,0) = (X=-3÷2=1.5) (Y=2÷2=1)

b) C(-3,3) e D(4,3) = (X=1÷2=0.5) (Y=6÷2=3)

c) E(4,2) e B(2,4) = (X=6÷2=3) (Y=6÷2=3)

Fonte: Autoria Própria.

Figura 40 – Solução Incorreta Questão 2- Atividade 3 do aluno $A_1 2$



2) Escreva com as suas palavras uma maneira de encontrar algebricamente as coordenadas do ponto médio de um segmento e depois teste esse método nos exemplos anteriores. Apresente os cálculos realizados nesse espaço.

Fonte: Autoria Própria.

QUESTÃO 3

Em cada item, verifique se os pontos pertencem à mesma reta.

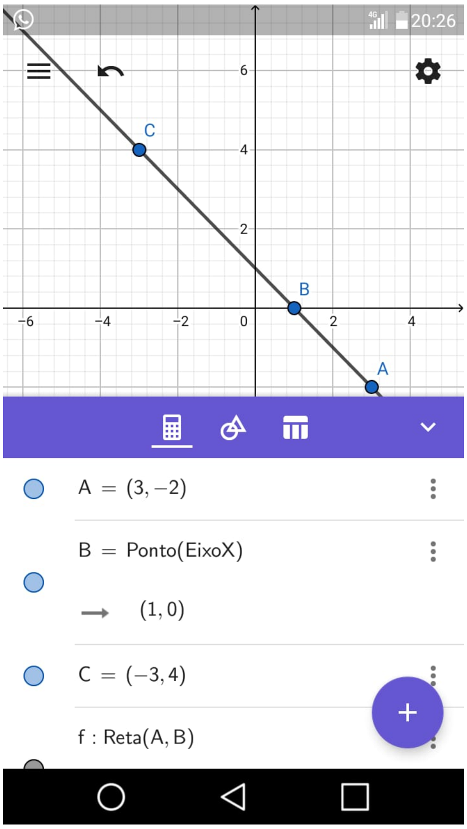
a- A(3,-2), B(0,1) e C(-3,4)

b- D(-3,-1), E(0,5) e F(1,-2).

Resolução:

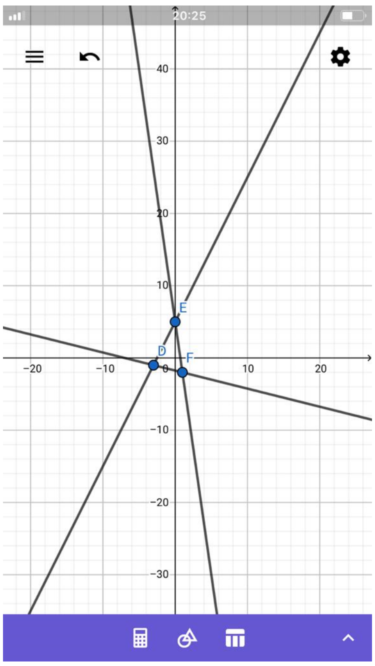
Como essa questão foi realizada no aplicativo GeoGebra, todos os alunos que a desenvolveram, chegaram a conclusão de alinhamento de três pontos corretamente. Somente 3 alunos não conseguiram concluir a tempo. As Figura 41 e 42 apresentam a solução no aplicativo GeoGebra de dois alunos.

Figura 41 – Solução Questão 3 item a- Atividade 3 do aluno A_13



Fonte: Autoria Própria.

Figura 42 – Solução Questão 3 item b- Atividade 3 do aluno A_14



Fonte: Autoria Própria

4.5 Atividade 4: Ponto Médio e Condição de Alinhamento de 3 pontos- 2ª Parte

Objetivos:

- Calcular o ponto médio de dois pontos;
- Verificar algebricamente a colinearidade de 3 pontos.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento prévio nos seguintes conteúdos: pontos no plano cartesiano, média artimética e determinantes.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo Geogebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que essa atividade seja realizada individualmente.
- O docente deve relembrar aos alunos o cálculo do determinante.

Dificuldades Previstas:

O aluno pode não se recordar como se calcula o determinante, por isso é importante fazer uma revisão breve com tal conteúdo.

Tempo Estimado:

2 aulas de 50 minutos.

Descrição Geral:

Na atividade anterior, os alunos verificaram o ponto médio e a colineridade entre pontos, utilizando o aplicativo GeoGebra. Ao final da Atividade 3, tais conteúdos foram formalizados no quadro branco, o que deu suporte para que essa atividade (Apêndice D) fosse realizada, a fim de que os alunos verifiquem e determinem algebricamente o ponto médio de um segmento e a condição de alinhamento entre pontos.

QUESTÃO 1

Determine as coordenadas do ponto médio dos segmentos com extremidades nos seguintes pontos:

a- A(5,2) e B(7,3)

b- C(-8,5) e D(4,3)

c- E(0,6) e F(1,-3)

Resolução:

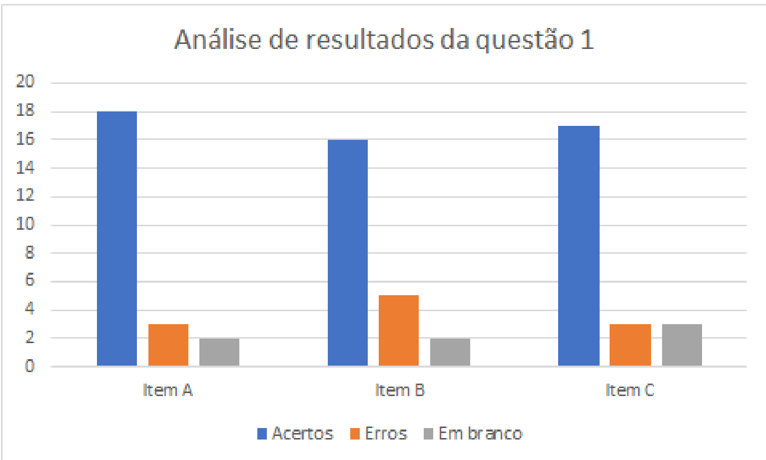
$$M_{AB} = (\frac{5+7}{2}, \frac{2+3}{2}) = (6, \frac{5}{2})$$

$$M_{CD} = (\frac{-8+4}{2}, \frac{5+3}{2}) = (-2, 4)$$

$$M_{EF} = (\frac{0+1}{2}, \frac{6+(-3)}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

Como pode-se analisar na Figura 43, os alunos tiveram um bom desempenho na questão. Apresentaram um número menor de erros, no item em que não se trabalhava com números negativos, pois tiveram dificuldades na soma de números positivos e negativos.

Figura 43 – Análise de resultados da questão 1- Atividade 4



Fonte: Autoria Própria.

QUESTÃO 2

Verifique se os pontos são colineares.

a- A(7,3), B(0,1) e C(-2,4)

b- D(0,5), E(1,3) e F(2,1)

c- G(2,5), H(3,7) e I(5,11)

Resolução:

Dados 3 pontos A, B e C, eles serão colineares caso:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

No item a, temos:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -25$$

Portanto, A, B e C não são colineares. No item b:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto D, E e F são colineares.

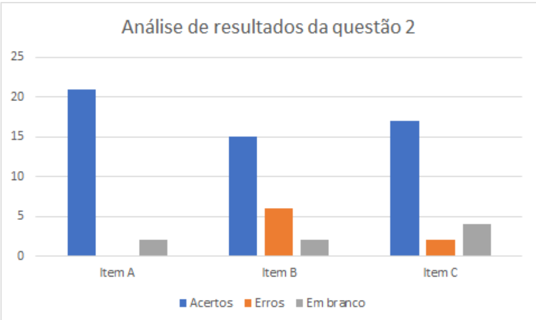
E no item c,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, G, H e I são colineares.

Como pode ser visto na Figura 44, embora todos os itens sejam para calcular diretamente o determinante, os alunos tiveram maior facilidade no item *a*. Nos outros itens, o erro básico foi cálculo, e não por não saber como resolver a questão.

Figura 44 – Análise de resultados da questão 2- Atividade 4



Fonte: Autoria Própria.

QUESTÃO 3

Determine o valor de *x* para que os pontos A(2,2), B(-3,-1) e C (-3,x) estejam alinhados.

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 7 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$-2 + 14 - 3x + 7 - 2x + 6 = 0$

$-5x = 25$

$x = -5$

Na questão 3, era necessário aplicar o determinante e resolver a equação, 15 alunos resolveram corretamente, 6 erraram a questão e o erro comum foi a troca dos sinais positivos e negativos, e 3 alunos não souberam como resolvê-la. Os alunos visualizaram geometricamente no aplicativo GeoGebra o alinhamento dos pontos e resolveram algebricamente.

4.6 Atividade 5: Equação geral e reduzida da reta

Objetivos:

- Identificar e determinar a partir de dois pontos, a equação geral da reta;
- A partir da equação geral da reta, determinar a equação reduzida.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento prévio nos seguintes conteúdos: pontos no plano cartesiano, equação, propriedade fundamental das proporções e a cálculo do determinante.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo Geogebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro, apagador e datashow.

Recomendações Metodológicas

- A turma deve organizar-se em duplas.
- O professor deve estar disponível para orientar e tirar todas as dúvidas que surgirão durante a atividade.
- Preparar e realizar uma aula presencial com uso do *datashow*, no qual os alunos acompanharão uma atividade sobre equação geral da reta e a conclusão de como determiná-la algebricamente (uma maneira). Os alunos devem realizar o passo a passo junto com o professor.

Dificuldades Previstas:

O aluno pode apresentar dificuldade com a manipulação de equação, portanto é importante revisar equação do 1º grau e a propriedade fundamental das proporções.

Tempo Estimado:

2 aulas de 50 minutos.

Descrição Geral:

Antes da atividade em questão ser aplicada à turma, uma introdução ao tópico sobre equação geral da reta foi realizada com o uso de *slides*, e o aluno pode acompanhar e realizar junto do professor o procedimento para se chegar a uma das maneiras do cálculo algébrico da equação geral da reta. As outras maneiras foram apresentadas ao término da apresentação *slides* no *datashow*.

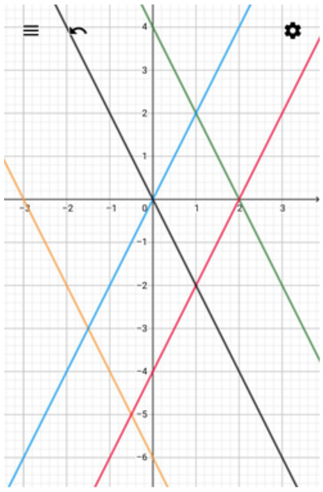
Na atividade 5 (E), embora não seja necessário o uso do GeoGebra é importante que se tenha o aplicativo disponível para o aluno poder perceber que uma mesma reta pode ter diversas representações.

A atividade se deu em sua maior parte de forma algébrica. Em cada item, o aluno calculou algebricamente a equação da reta, para que somente em seguida, pudesse fazer a sua verificação no aplicativo GeoGebra.

Os alunos que estiveram ausentes nas aulas anteriores, fizeram duplas com alunos presentes em todas as aulas, com o intuito de acompanhar a Sequência Didática de forma efetiva e retomar os conteúdos não obtidos.

QUESTÃO 1 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ/CECIERJ)

No réveillon de Copacabana, imagine que alguns raios de luz estão num mesmo plano e podem ser descritos pelo esboço gráfico a seguir.



a Complete a tabela abaixo adequadamente e escreva uma equação geral de cada uma dessas retas, a partir dos pontos em que cada uma delas corta os eixos coordenados e, um outro ponto, se for preciso:

COR DA RETA	ENCONTRO COM EIXO X	ENCONTRO COM EIXO Y	UM OUTRO PONTO, SE FOR PRECISO
r_1	(-3,0)	(0,-6)	
r_2			
r_3			
r_4			
r_5			

COR DO GRÁFICO	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	EQUAÇÃO GERAL DA RETA
r_1	(-3,0)	(0,-6)	
r_2			
r_3			
r_4			
r_5			

Resolução:

Na primeira tabela, esperava-se que os alunos identificassem as insterseções com os eixos, e ainda um outro ponto, caso necessário, como por exemplo na reta 3, de cor azul, onde as intersecções se deram na origem.

- Para r_2: (2,0) e (0,4).
- Para r_3: (0,0), (0,0) e (1,2), por exemplo.

- Para r_4: (2,0) e (0,-4).
- Para r_5: (0,0), (0,0) e (1,-2), por exemplo.

Nessa atividade, 30 alunos estiveram presentes durante a aula. Para o preenchimento da primeira tabela, houve um índice baixo de erro, totalizando em cinco, onde o erro mais comum foi a troca de sinal, principalmente na reta dois. Na reta 5, todos os alunos escreveram os pontos corretamente, porém 2 deles não identificaram a necessidade do 3º ponto.

Na segunda tabela, é necessário que o aluno determine algebricamente, a equação geral de cada uma das retas mostradas no gráfico, conhecendo dois de seus pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, por meio de:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e encontrando as seguintes equações:

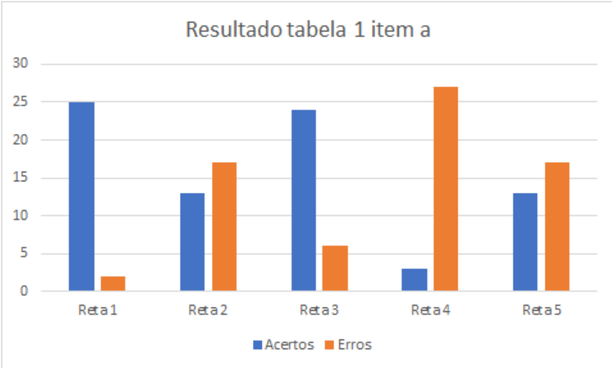
- $r_1 : 3y + 6x + 18 = 0$
- $r_2 : 2y + 4x - 8 = 0$
- $r_3 : y - 2x = 0$
- $r_4 : 2y - 4x + 8 = 0$
- $r_5 : y + 2x = 0$

Para o preenchimento dessa tabela, os alunos que optaram em determinar a equação da reta por meio do determinante tiveram maior sucesso na solução, como pode ser visto na Figura 45. Aplicando diretamente em $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, os erros com sinais foram bem numerosos.

b- Se você escrever essas mesmas equações, calculando y como uma função de x, você vai obter o que se chama equação reduzida de cada uma dessas retas. Vá em frente e complete a tabela:

Resolução:

Figura 45 – Análise de resultados da tabela 1 item a, Atividade 5



Fonte: Autoria Própria.

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO GERAL DA RETA	EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA
r_1		
r_2		
r_3		
r_4		
r_5		

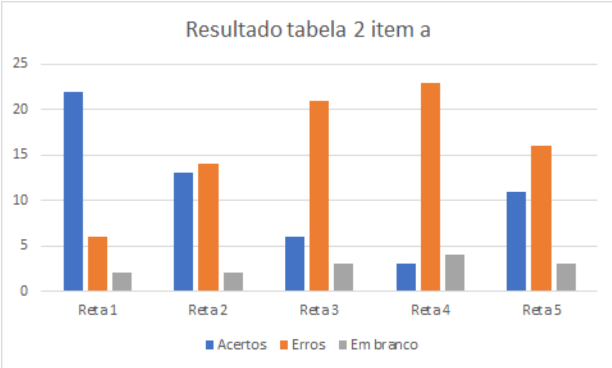
No item b, esperava-se que uma vez determinada a equação geral da reta, o aluno conforme o enunciado, encontrasse a sua equação reduzida.

- $r_1 : y = -2x - 6$
- $r_2 : y = -2x + 4$
- $r_3 : y = 2x$
- $r_4 : y = 2x - 4$
- $r_5 : y = -2x$

Embora essa questão fosse de simples manipulação algébrica, os alunos apresentaram uma dificuldade em um nível elevadíssimo. Com o resultado da tabela anterior, esperava-se que pelo menos se mantivesse o número de acertos, o que não ocorreu, como mostra a Figura 46. Em todas as retas, o número de acertos foi menor. E o resultado mais alarmante foi o da reta 3, em que o número de acertos caiu de 24 para 6, em uma equação simples, onde o único erro existente foi a troca de sinal.

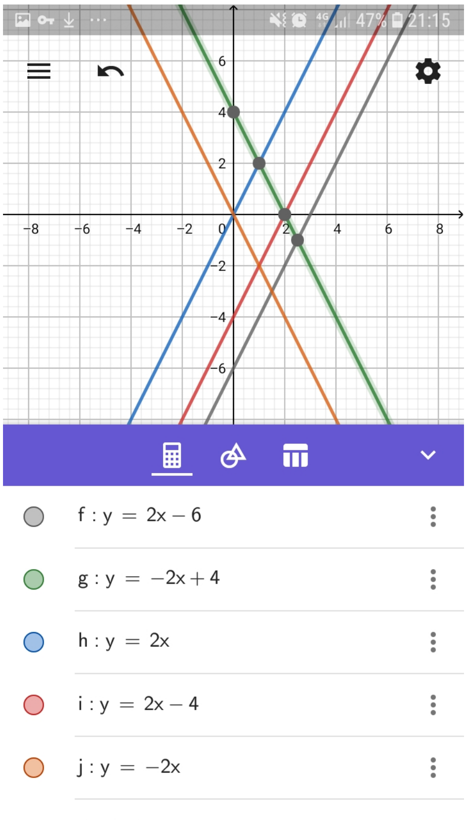
Adiante, na Figura 47, segue a solução no GeoGebra de um aluno. Tal verificação foi feita após a solução escrita e calculada algebricamente, com o intuito de visualizar os erros e, em seguida, anotar a equação correta, para uso em atividades futuras.

Figura 46 – Análise de resultados da tabela 2 item a- Atividade 5



Fonte: Autoria Própria.

Figura 47 – Verificação das equações reduzidas no GeoGebra- Atividade 5



Fonte: Autoria Própria.

c- E, agora, pense no seguinte: você já sabe que a equação geral da reta é $ax + by + c = 0$. Conhecendo uma equação geral de uma reta, você pode escrever a sua equação reduzida? Justifique sua resposta.

Resolução:

Nesse item, esperava-se que o aluno concluisse que para encontrar a equação reduzida da reta a partir da equação geral $ax + by + c = 0$, ele teria que isolar o *y* no primeiro membro e a partir daí, efetuar algebricamente até chegar à reta de equação:

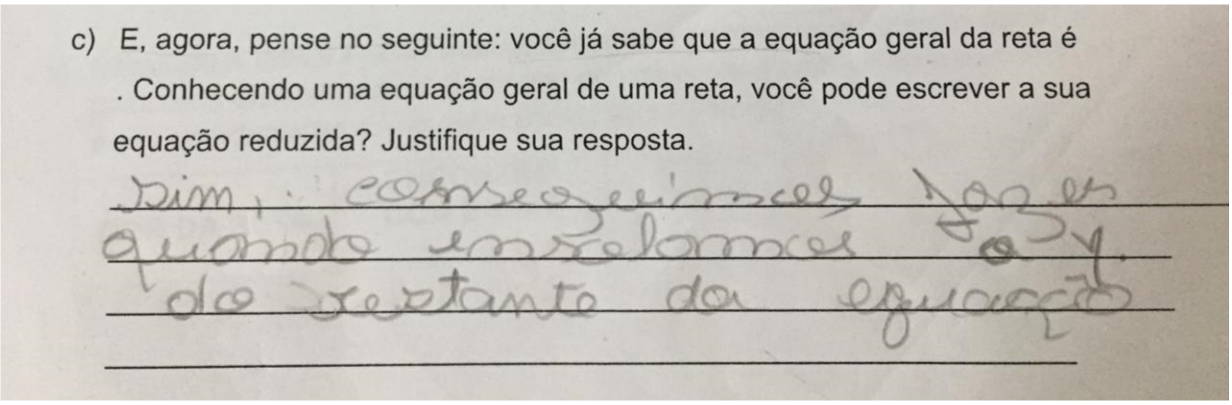
$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, onde $b \neq 0$.

Dos 30 alunos presentes em sala, sete não souberam responder a questão, deixando-a em branco.

Os outros 23 entenderam que a partir da equação geral da reta conseguiriam escrever a sua equação reduzida, porém somente cinco justificaram a resposta de maneira satisfatória.

A Figura 48 mostra a solução de um dos alunos que atenderam ao que a questão solicitava.

Figura 48 – Análise de resultados da tabela 2 item a- Atividade 5 do aluno $A_1 5$


c) E, agora, pense no seguinte: você já sabe que a equação geral da reta é . Conhecendo uma equação geral de uma reta, você pode escrever a sua equação reduzida? Justifique sua resposta.

Sim, conseguimos fazer quando isolamos o y do restante da equação

Fonte: Autoria Própria.

4.7 Atividade 6: Equação geral e reduzida da reta- Parte 2

Objetivos:

- Analisar os coeficientes da equação reduzida da reta.
- Identificar e determinar a equação de uma reta a partir de sua inclinação.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento prévio nos seguintes conteúdos: pontos no plano cartesiano, equação geral e reduzida da reta e trigonometria no círculo.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo GeoGebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que os alunos se organizem em duplas para conversar sobre a resolução, porém os cálculos e anotações devem ser feitas individualmente.
- Revisar com a turma o conceito de círculo trigonométrico.
- O professor deve fazer a correção e discussão da atividade ao final.

Dificuldades Previstas:

Os alunos podem apresentar dificuldade na manipulação algébrica nas equações. Porém a maior dificuldade apresentada foi a falta de conhecimento sobre o círculo trigonométrico.

Tempo Estimado:

2 aulas de 50 minutos.

Descrição Geral:

A atividade 6 (Apêndice E)é constituída de uma questão com nove itens para se concluir o estudo dos coeficientes da equação reduzida da reta. Tal atividade é uma continuação da atividade 5, no qual será utilizado o problema inicial proposto.

QUESTÃO 1(Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ/CECIERJ)

Você vai agora analisar o papel de cada um dos coeficientes m, n na equação reduzida, $y = mx + n$ e verificar as suas conclusões nas cinco retas estudadas na primeira etapa. Para isso, responda às seguintes perguntas:

a Fazendo $x = 0$ na equação $y = mx + n$, qual é o valor correspondente de y?

Resolução:

$y = m.0 + n \Rightarrow y = n$

Na aula em que essa atividade foi realizada, compareceram 31 alunos, e desses, todos responderam corretamente a questão. Fizeram a devida substituição no valor de x, para encontrar $y = n$.

b O que se pode dizer sobre a localização de um ponto $(0, y)$?

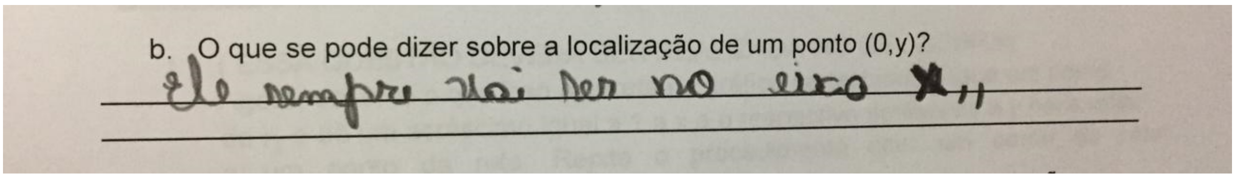
Resolução:

O ponto estará localizado sob o eixo y.

Os alunos foram estimulados a marcarem no GeoGebra, pontos do tipo $(0, y)$, atribuindo valores aleatórios pra y. Com isso, perceberam geometricamente, que todos esses pontos estavam localizados sob o eixo y. Apenas um aluno não respondeu corretamente ao questionamento. E outro aluno se expressou de maneira inadequada, dizendo que o ponto estava "entre o eixo y".

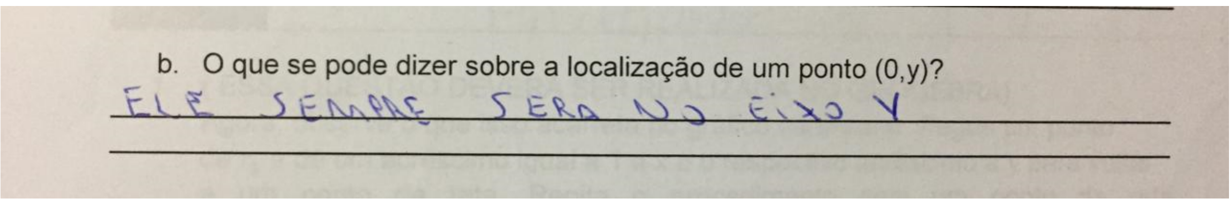
Na Figura 49 temos a conclusão incorreta a que o aluno do aluno A_16 chegou, e a resposta certa do aluno do aluno A_17 na Figura 50.

Figura 49 – Resposta Incorreta do aluno A_16 - Questão 1b- Atividade 6



Fonte: Autoria Própria.

Figura 50 – Resposta correta do aluno A_17 - Questão 1b- Atividade 6



Fonte: Autoria Própria.

O aluno que respondeu que o ponto $(0, y)$ é um ponto localizado sob o eixo x, não fez uso do aplicativo GeoGebra, pois não tinha celular, e como era um aluno infrequente as aulas, não quis sentar-se junto com outro colega, preferindo assim, fazer a atividade individualmente.

c- Quais são, portanto, as coordenadas do ponto em que a reta de equação $y = mx + n$ corta o eixo y?

Resolução:

Espera-se que o aluno compreenda com os itens anteriores, que o ponto sob o eixo y é o ponto no qual $x = 0$ e $y = n$, ou seja, $(0, n)$.

Os alunos concluíram facilmente, que o ponto em questão é o $(0, n)$. Alguns tiveram dificuldade na interpretação da questão, porém após intermédio da professora, apenas dois alunos não conseguiram concluir o raciocínio. E ainda um aluno respondeu que o ponto procurado era $(0, y)$, e não concluiu que nesse caso $y = n$.

d- Complete a tabela a seguir e confira suas respostas com os gráficos da Primeira Etapa:

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA	Se x = 0, y =	Ponto de encontro da reta com o eixo y	Verifiquei no gráfico
r_1	y = – 2x – 6	-6	(0,-6)	✓
r_2	y = – 2x + 4			
r_3	y = 2x			
r_4	y = 2x – 4			
r_5	y = – 2x			

Resolução:

Tabela 5 – Resolução da Tabela item d

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO DA RETA	Se x=0, y=	Intersecção com o eixo y
r_1	$y = -2x - 6$	-6	(0,-6)
r_2	$y = -2x + 4$	+4	(0,4)
r_3	$y = 2x$	0	(0,0)
r_4	$y = 2x - 4$	-4	(0,-4)
r_5	$y = -2x$	0	(0,0)

Autoria Própria.

Com a conclusão no item d, os alunos conseguiram completar a Tabela 5 sem maiores erros. Todos os alunos preencheram corretamente às duas colunas, em que temos $y = n$ e o ponto de encontro com o eixo y sendo $(0, n)$.

e- Observe que, na expressão $y = mx + n$, o valor de x está sendo multiplicado pelo número m. Então, se você parte de um valor de x e soma 1 a esse valor, o valor de y vai ficar modificado também. Complete a tabela a seguir, a partir desta observação:

Resolução:

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA	Somando 1 a x:	y vai sofrer um acréscimo igual a
r_1	y = – 2x – 6	y = – 2 (x + 1) – 6 = **(– 2x – 6)** – 2	– 2
r_2	y = – 2x + 4		
r_3	y = 2x	y = 2 (x + 1) = **(2x)** + 2	2
r_4	y = 2x – 4	y = 2 (x + 1) – 4 = **(2x – 4)** + 2	2
r_5	y = – 2x		

Tabela 6 – Resolução Tabela Questão item e- Atividade 6

RETA	EQUAÇÃO	Somando 1 a x	Acréscimo em y
r_1	$y = -2x - 6$	$y = -2(x+1) - 6 = (-2x-6) - 2$	-2
r_2	$y = -2x + 4$	$y = -2(x+1) + 4 = (-2x+4) - 2$	-2
r_3	$y = 2x$	$y = 2(x+1) = (2x) + 2$	2
r_4	$y = 2x - 4$	$y = 2(x+1) - 4 = (2x-4) + 2$	2
r_5	$y = -2x$	$y = -2(x+1) = (-2x) - 2$	-2

Autoria Própria.

Para o preenchimento da Tabela 6, os alunos deveriam perceber o que aconteceu com o acréscimo de 1 a *x*, o seu respectivo acréscimo em y. Embora 3 linhas da tabela já estivessem resolvidas, os alunos tiveram dificuldade em compreender a questão. Então, o primeiro exemplo já resolvido, foi também resolvido no quadro branco, para um maior entendimento da questão. Após a exposição, dos 31 alunos, 20 alunos conseguiram encontrar a equação da reta 2 após o acréscimo, e 28 alunos acertaram a equação da reta 5. E ainda um aluno não preencheu a tabela. E o acréscimo sofrido em y, todos os alunos que resolveram o item, conseguiram perceber que será sempre igual ao coeficiente m, em $y = mx + n$, multiplicado pelo acréscimo em x.

f- (ESSA QUESTÃO DEVERÁ SER REALIZADA NO APLICATIVO GEOGEBRA)

Agora, observe o que isso acarreta no gráfico cartesiano. Pegue um ponto de r_1 e dê um acréscimo igual a 1 a x e o respectivo acréscimo a y para voltar a um ponto da reta. Repita o procedimento com um ponto da reta r_3 e compare os dois casos.

Resolução:

Quando $m = 2$, com o acréscimo em x de 1, o acréscimo em y será de $2 \cdot 1$, o que graficamente mostra o novo ponto acima do anterior. E quando $m = -2$, o mesmo acréscimo em x, gera o acréscimo em y de $(-2) \cdot 1$, e nesse caso, o novo ponto fica abaixo do anterior.

Nenhum aluno conseguiu observar graficamente o que foi observado algebricamente, talvez por ser mais intuitivo, uma vez que o acréscimo foi de uma unidade em x. Alguns alunos ainda se referiam a valores da ordenada ou abscissa como pontos. Tal informação foi imediatamente corrigida. Houve, após a exposição, entendimento da questão, porém o tempo pra resolução já tinha se esgotado, o que não gerou nenhum acerto nesse item.

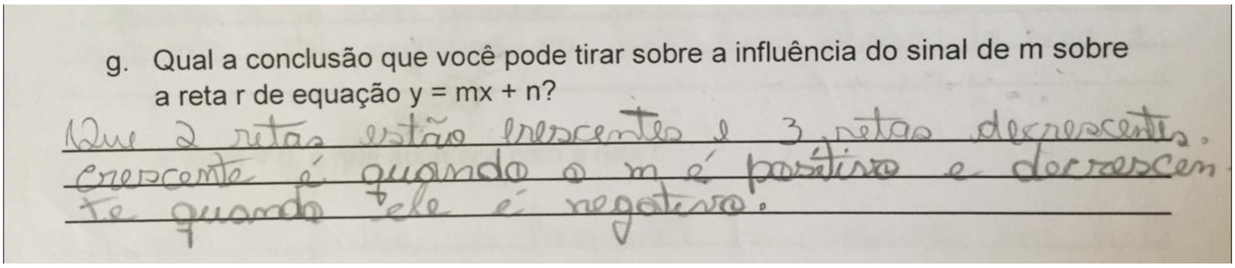
g- Qual a conclusão que você pode tirar sobre a influência do sinal de m sobre a reta r de equação $y = mx + n$?

Resolução:

Quando é dado um acréscimo a x, o acréscimo em y é o acréscimo de x multiplicado por m, como visto no item anterior. Então, se $m > 0$, o acréscimo a y será positivo e a função $mx + n$ é crescente, e se $m < 0$, o acréscimo a y será negativo e a função decrescente, ou seja, esse resultado só depende do sinal de m.

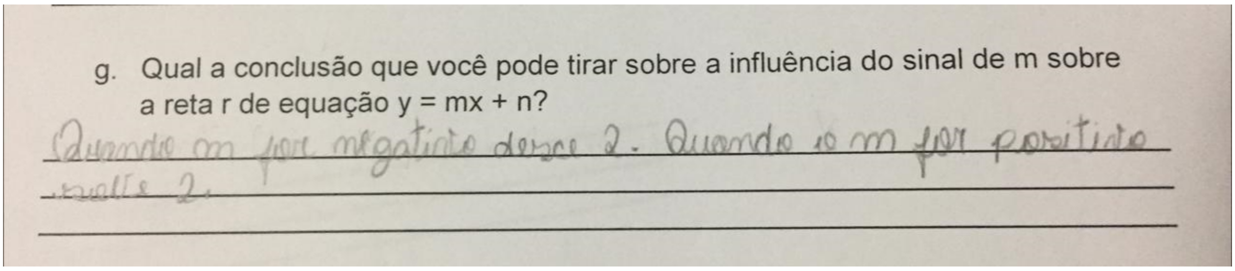
Dos alunos participantes da atividade,14 conseguiram perceber tal influência sobre a reta, oito alunos erraram a questão, em sua grande maioria por não conseguir formalizar a resposta e ainda nove alunos deixaram a questão em branco. As Figuras 51 e 52 mostram uma solução correta e outra incorreta respectivamente, onde o aluno não conseguiu perceber o crescimento e o decrescimento da reta.

Figura 51 – Resposta correta da questão 1- g- Atividade 6 do aluno A_18



Fonte: Autoria Própria.

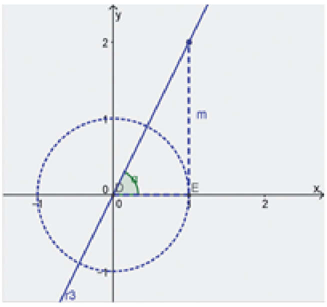
Figura 52 – Resposta incorreta da questão 1- g- Atividade 6 do aluno A_19



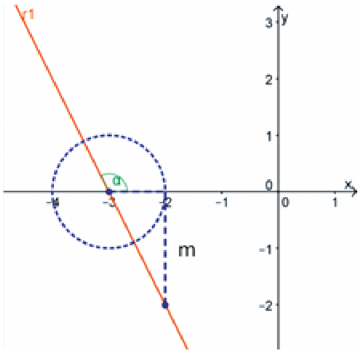
Fonte: Autoria Própria.

h- Se as unidades nos dois eixos são as mesmas e se $m \neq 0$, você pode calcular o valor de m observando a reta de equação $y = mx + n$ e o ângulo α, formado pela reta e pelo eixo x. O ângulo α é aquele com vértice no encontro da reta com o eixo x, formado pelo semieixo das abscissas maiores do que a abscissa do vértice e a parte da reta cujos pontos têm ordenadas positivas (a semirreta que fica acima do eixo x). Examine os casos em que $m > 0$ e $m < 0$, desenhados a seguir. Lembre-se da trigonometria no círculo e veja qual a relação entre *m* e o ângulo α.

Na reta r_3: **m>0**



E, na reta r_1: **m<0**



Resolução:

Espera-se, nesse item, que o aluno perceba que $\tan\alpha = m$.

Para isso, o aluno deverá recordar a definição de tangente de um ângulo no círculo trigonométrico. Mesmo após uma breve revisão sobre o ciclo trigonométrico e as razões trigonométricas, nenhum aluno conseguiu fazer a questão com sucesso. Dos 31 alunos presentes, 6 escreveram a resposta incorreta e 25 deixaram em branco. Após o término da atividade, essa questão foi devidamente resolvida e explicada no quadro. A maioria dos alunos ainda apontaram, durante a revisão, que não tinham conhecimento sobre o círculo trigonométrico.

i- E se $m = 0$, o que acontece com a reta?

Resolução:

Quando $m = 0$, $y = mx + n \Rightarrow y = n$, o que define uma reta paralela ao eixo x, onde ela coincidirá com o eixo x, caso $n = 0$, ou não coincidirá, quando $n \neq 0$.

Embora tivessem 31 alunos presentes durante as aulas em que essa atividade foi aplicada, 22 responderam a essa questão. E de todos que responderam, todos concluíram corretamente que a reta será paralela ao eixo x. Nenhum aluno citou a possibilidade da reta coincidir com o eixo x.

4.8 Atividade 7: Equação geral e reduzida da reta (Atividade referente a gincana

Objetivos:

- Revisar e reforçar todo o conteúdo sobre equação da reta estudado;
- Construir a reta no plano cartesiano a partir da sua equação;
- Determinar a equação da reta dados: um ponto e a sua inclinação, ou dados dois pontos;
- Analisar a intersecção de duas retas;
- Determinar a inclinação da reta dados dois pontos.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento prévio nos seguintes conteúdos: equação geral e reduzida da reta, coeficientes angular e linear da reta.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo Geogebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que os alunos se organizem em grupos compostos por 5 integrantes cada, para a discussão e resolução da atividade.
- O professor não deve interferir na discussão do grupo, até que encontrem a solução em cada caso.
- Um integrante do grupo deve apresentar a solução no quadro para a turma.

Dificuldades Previstas:

Os alunos apresentaram dificuldade nas questões que necessitavam da manipulação algébrica.

Tempo Estimado:

2 aulas de 50 minutos cada.

Descrição Geral:

A atividade 7 (Apêndice E) foi realizada com a finalidade de concluir e fixar o conteúdo de equação geral e reduzida da reta. Foi realizada uma gincana para estimular o envolvimento dos alunos na realização da atividade. Eles foram organizados em grupos de 5, de forma que pudessem discutir e apresentar a solução de cada uma das questões no quadro. Para cada questão, foi estipulado um tempo de resolução. E o grupo que terminasse a questão primeiro de maneira correta, ia ao quadro apresentar a questão para toda a turma. Ao término da atividade, o grupo que apresentou mais questões corretamente foi premiado.

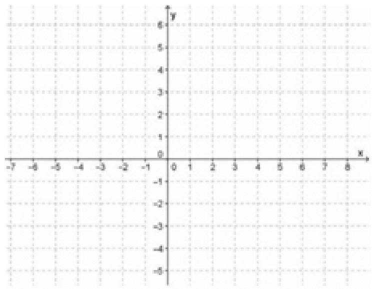
Figura 53 – Grupo premiado na gincana realizada na Atividade 7

Fonte: Autoria Própria.

A Figura 53 mostra o grupo que mais acertou questões e, com isso, venceu a gincana.

QUESTÃO 1 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ/CECIERJ)

Desenhe, no plano cartesiano a seguir, o esboço da reta de equação $y = 2x + 3$ e explique como você encontrou essa reta.



Resolução:

O aluno poderia nessa questão, para a construção do gráfico, determinar a interseção da reta com o eixo das ordenadas em $y = 3$, ou seja, no ponto $(0, 3)$. E em seguida, determinar a intersecção com o eixo das abscissas ($y = 0$), resolvendo a equação $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$. Portanto a intersecção será no ponto $(-\frac{3}{2}, 0)$. Ou ainda, o aluno poderia atribuir valores a x, para associar os valores de y correspondentes, e assim determinar os pontos necessários à construção da reta.

Embora tenha sido apresentado como resolução duas alternativas, todos os alunos fizeram pela atribuição de valores a x, para substituir e determinar os valores de y. Num total de 25 alunos que estiveram presentes durante a atividade, 18 responderam corretamente, seis erraram a questão, pois usaram os coeficientes da reta e marcaram indevidamente as intersecções com os eixos, ou ainda erraram o sinal. Apenas um deixou em branco. E ainda, dos 18 que responderam corretamente, três não justificaram a resposta. Somente traçaram o gráfico.

A Figura 54 representa a solução do aluno A_20 que determinou os pontos corretamente, porém não compreendeu que deveria marcá-los no plano cartesiano, e então marcou os coeficiente m e n (esse corretamente), nos eixos coordenados.

O aluno A_21, determinou corretamente dois pontos, marcou no plano cartesiano e desenhou o gráfico, como mostra a Figura 55.

QUESTÃO 2 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ/CECIERJ)

A equação da reta na forma reduzida que passa pelo ponto (-2,-3) e tem inclinação igual a -2 é:

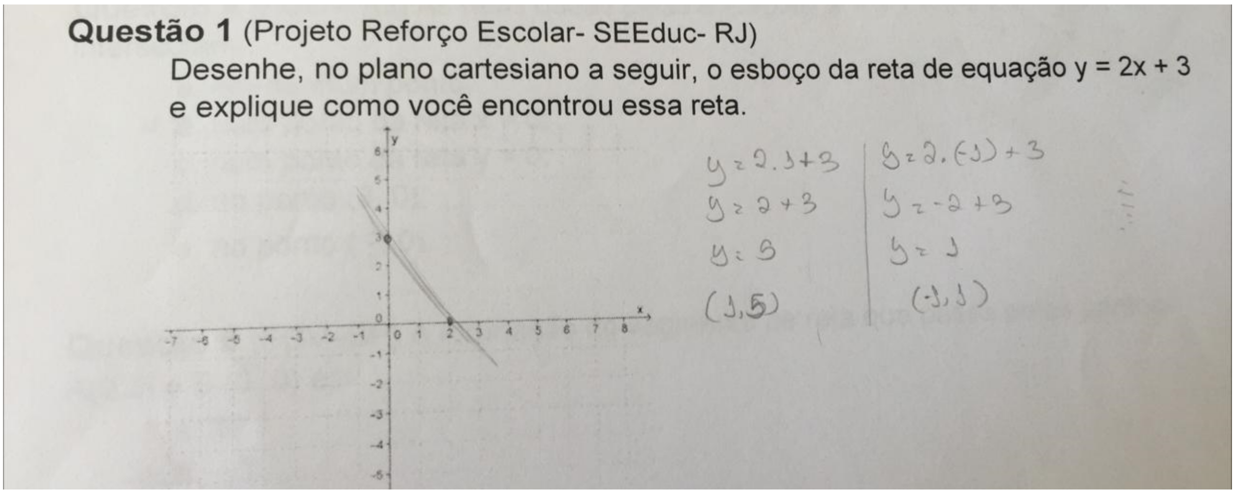
a- $y = -2x - 7$

b- $y = -2x - 3$

c- $y = -x - 5$

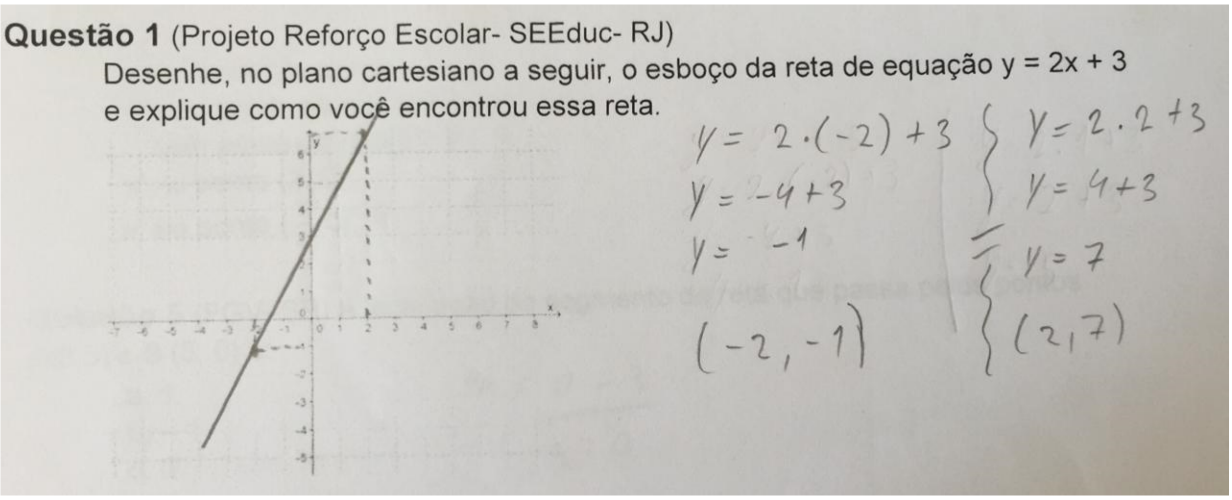
d- $y = -2x - 2$

Figura 54 – Resposta incorreta do aluno A_20 referente a questão 1- Atividade 7



Fonte: Autoria Própria.

Figura 55 – Resposta correta do aluno A_21 referente a questão 1- Atividade 7



Fonte: Autoria Própria.

e- $y = -2x + 7$

Resolução:

A equação reduzida da reta é da forma $y = mx + n$, no qual $m = -2$ e como a reta passa pelo ponto $(-2, -3)$, para o valor de $x = -2$, o valor de y deve ser -3. Substituindo em $y = mx + n$, tem-se:

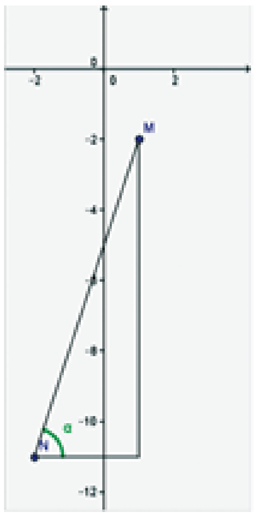
$$-3 = (-2) \cdot (-2) + n \Rightarrow n = -7$$

Portanto, a equação da reta é $y = -2x - 7$, opção a.

Responderam com sucesso a essa questão, um total de 17 alunos. Fizeram as devidas substituições para encontrar o valor de n, e reescreveram a equação da maneira correta. Erraram a questão quatro alunos. Os erros cometidos foram nas operações com números negativos e ainda um aluno achou o valor de $n = -7$, porém não não concluiu a questão, por não substitui-lo, juntamente com a inclinação da reta, na equação $y = mx + n$.

QUESTÃO 3 (Saerjiho, 3ª série, 3º bimestre de 2011)

A Expressão algébrica da reta que passa pelos pontos M(1,-2) e N(-2,-11) é:



a- $y = 3x - 5$

b- $y = -5x + 3$

c- $y = 3x + 1$

d- $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

e- $y = \frac{5x}{3} + \frac{1}{3}$

Resolução:

Para determinar a equação da reta, pode-se calcular por:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-(-2)}{-11-(-2)} \Rightarrow \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow y + 2 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 5$

Ou também pelo determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9x - 3y - 15 = 0 \Rightarrow y = 3x - 5$$

Ou ainda calcular através do coeficiente angular da reta.

$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11-(-2)}{-2-1} = 3$

E como a reta passa pelo ponto M(1,-2), tem-se:

$$-2 = 3 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -5$$

Portanto, a equação da reta é $y = 3x - 5$ e encontra-se na opção **a**.

Todos os 21 alunos que fizeram a questão, concluíram de maneira correta. E todos fizeram pela primeira opção de resolução exposta anteriormente.

QUESTÃO 4

(PUC-RJ) As retas dadas pelas equações $x + 3y = 3$ e $2x + y = 1$ se intersectam:

a- em nenhum ponto;

b- num ponto da reta $x = 0$

c- num ponto da reta $y = 0$

d- no ponto (3,0)

e- no ponto $(\frac{1}{2}, 0)$

Resolução:

Para determinar o ponto de intersecção das retas, será preciso resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Isolando x na primeira equação e substituindo na 2ª, tem-se:

$x = 3 - 3y$

$2(3 - 3y) + y = 1 \Rightarrow 6 - 6y + y = 1 \Rightarrow -5y = -5 \Rightarrow y = 1$

Fazendo a substituição desse valor em $x = 3 - 3y$, $x = 0$. Ou seja, o ponto de intersecção das retas é (0,1), resposta que consta no item b.

A esse item, 20 alunos acertaram, sendo que alguns realizaram método acima, resolvendo o sistema de equações. Alguns utilizaram o aplicativo GeoGebra, perceberam a intersecção e, em seguida, concluíram que a intersecção se deu no eixo y, ou seja, quando $x = 0$.

QUESTÃO 5 (FGV-SP) A inclinação do segmento de reta que passa pelos pontos A(0,3) e B(3,0) é:

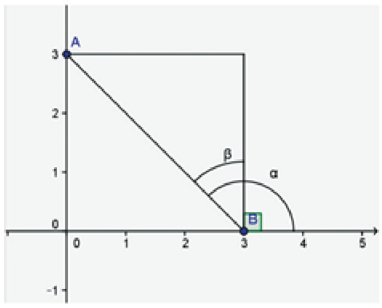
(a) 1

(b) -1

(c) 0

(d) 3

(e) -3



Resolução:

A inclinação do segmento de reta AB será:

$\tan\alpha = \tan(\beta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\beta} = -\frac{3}{3} = -1$

ou

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{3-0} = \frac{-3}{3} = -1$

A opção correta, dessa forma, é a letra b.

Os 18 alunos que fizeram a questão número 5, utilizaram a 2ª forma apresentada anteriormente. Sendo que desses 18, um errou a questão, pois não percebeu o sinal negativo no resultado final, e o restante deixou a questão em branco, pois não sabia como resolvê-la.

Ao fim da atividade, todas as questões foram resolvidas no quadro.

4.9 Atividade 8: Posição relativa entre duas retas

Objetivos:

- Identificar retas paralelas graficamente e a partir de suas equações na forma reduzida.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento de equação da reta na forma reduzida, retas no plano e o conceito de paralelismo entre duas retas.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo Geogebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que os alunos estejam com o aplicativo GeoGebra devidamente instalado no celular.
- A turma deve organizar-se de modo que os alunos estejam sentados em dupla para a discussão e maior compreensão do conteúdo.

Dificuldades Previstas:

Alguns alunos desinstalaram o aplicativo GeoGebra, o que dificultou o andamento da atividade.

Tempo Estimado:

2 aulas de 50 minutos.

Descrição Geral:

A atividade 8 (Apêndice F) contém quatro questões na qual é feita a análise, por meio da construção no GeoGebra, das retas paralelas, a fim que se conclua a condição de paralelismo a partir da sua equação na forma reduzida.

QUESTÃO 1

(Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ/CECIERJ) Numa caminhada pela Via Lagos, dois estudantes decidiram medir a distância que cada um percorreria, a partir do ponto inicial da vida. O tempo x seria contado a partir de um instante em que ambos já tivessem atingido a velocidade de percurso que seria mantida por algum tempo. Fred percebeu que, enquanto mantivesse essa velocidade, a distância ao ponto inicial podia ser descrita pela equação:

$y = 5x + 0,7$

Já seu amigo Hulk identificou que a equação relativa à sua caminhada nesse mesmo intervalo era:

$y = 5x + 1,2$, onde x é dada em quilômetros e y em horas.

Será que Fred e Hulk se encontraram nesse intervalo de tempo? Justifique sua resposta, esboçando no mesmo sistema de coordenadas (no aplicativo GeoGebra) o gráfico de y em função de x, definida em cada uma dessas equações.

Resolução:

As equações da reta na forma reduzida mostram que o coeficiente angular de ambas é igual 5. Ou seja, fazem ângulos iguais com o eixo das abscissas e portanto são paralelas. E são retas distintas, pois seus coeficientes lineares são distintos. Enquanto uma reta corta o eixo y no ponto $(0, 0.7)$, a outra intersecta no ponto $(0, 1.2)$. Portanto, enquanto permanecerem no ritmo inicial, andando em frente, não irão se encontrar.

Os alunos realizaram essa questão utilizando o aplicativo GeoGebra. Todos conseguiram visualizar que as retas são paralelas e que, portanto, eles não irão se encontrar.

QUESTÃO 2 No aplicativo GeoGebra, faça os seguintes procedimentos:

a- Marque os pontos A(-2,0), B(0,4), C(0,-4)e D(1,-2).

b- Em seguida trace as retas AB e CD.

c- Meça os ângulos formados por essas retas com o eixo das abscissas e anote.

d- Qual a posição relativa entre essas duas retas?

e- Escreva as equações das retas obtidas. O que elas têm em comum?

f- Digite a reta $r : y = 2x + c$ e utilizado o controle deslizante, anote o que observa.

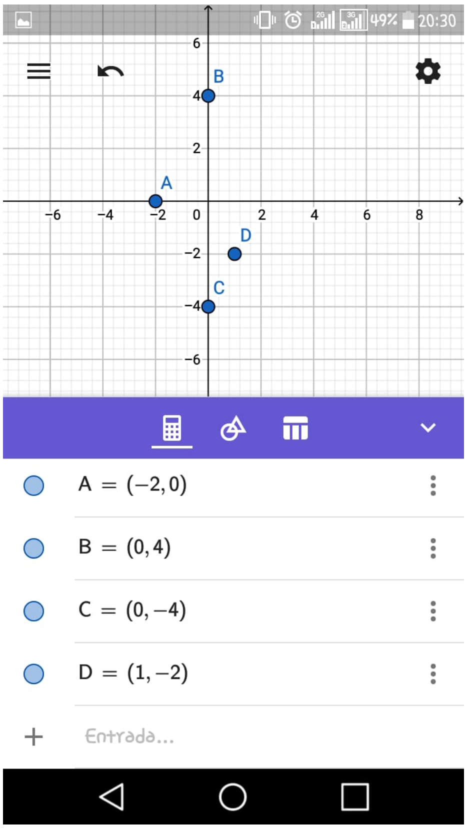
Resolução:

a- A Figura 56 representa a solução correta do aluno A_{22}.

b- A Figura 57 mostra a solução correta no aplicativo Geogebra do aluno A_{23}.

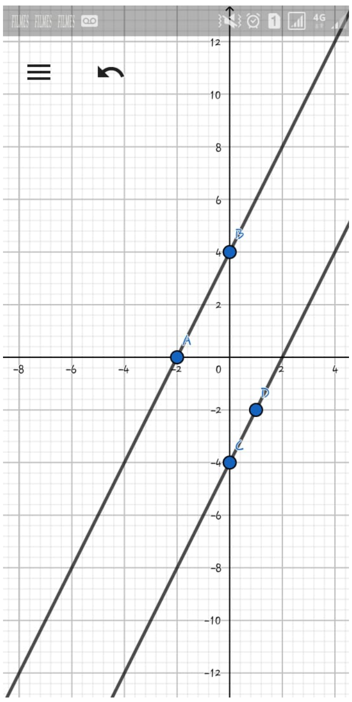
c- Considerando os ângulos formados por essas retas com o eixo das abscissas como

Figura 56 – Construção do aluno A_{22}, Questão 2 item a, Atividade 8



Fonte: Autoria Própria.

Figura 57 – Construção do aluno A_{23}, Questão 2 item b, Atividade 8

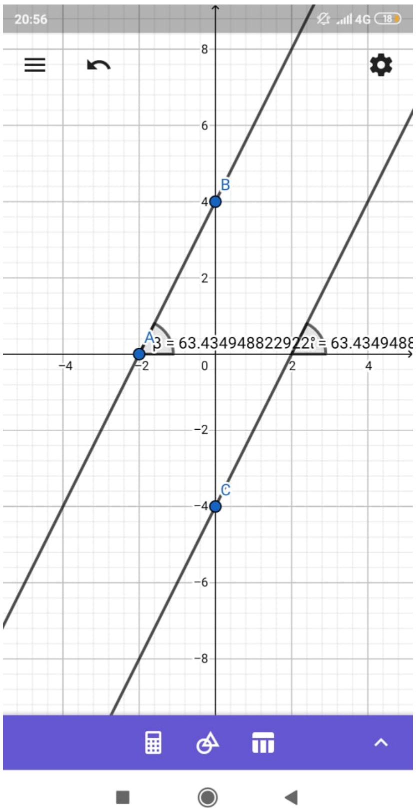


Fonte: Autoria Própria.

sendo α e β, temos que: $\alpha \cong 63,43°$ e $\beta \cong 63,43°$, ambos dados em graus. A Figura 58, representa a solução do aluno A_{12}.

Todos os alunos conseguiram responder à questão corretamente.

Figura 58 – Construção do aluno A_{24}, referente a questão 2, item c- Atividade 8



Fonte: Dados da pesquisa.

d- As duas retas são paralelas entre si.

Nesse item, mesmo os alunos que não fizeram o anterior, souberam responder à essa, pois viram no celular do colega a construção, e com isso chegaram ao entendimento que as retas são paralelas. Apenas um aluno errou à questão respondendo: "Eixo x".

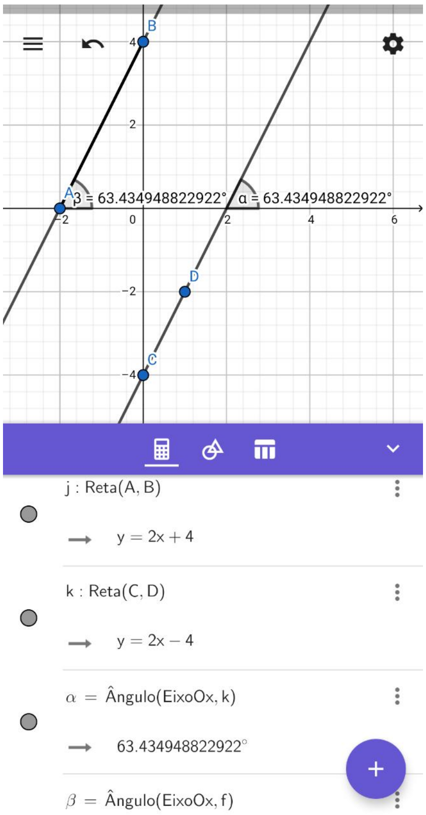
e- $y = 2x+4$ e $y = 2x-4$. As duas retas apresentam o mesmo coeficiente angular. Portanto, os ângulos formados com o eixo das abscissas serão iguais.

Como a questão foi construída no aplicativo GeoGebra e os alunos já conseguiam manipulá-lo com facilidade, todos chegaram às equações das retas corretamente, buscando-as na janela de álgebra do aplicativo.

Na Figura 59, a construção que o aluno A_{25} fez mostra, além das retas e os ângulos formados, as equações das retas solicitadas no item em questão.

Mesmo que todos os alunos tenham escrito corretamente as equações das retas, somente 15 conseguiram perceber que ambas tinham em comum o coeficiente angular.

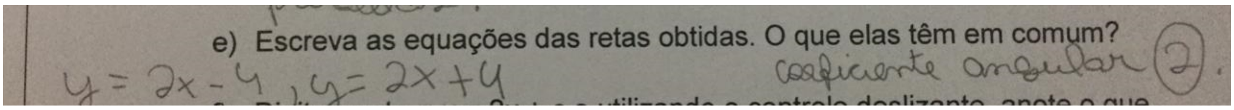
Figura 59 – Construção do aluno A_{25}- Questão 2, item e- Atividade 8



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 60 mostra a conclusão do aluno A_{26}.

Figura 60 – Resposta do aluno A_{26}, questão 2, item e- Atividade 8



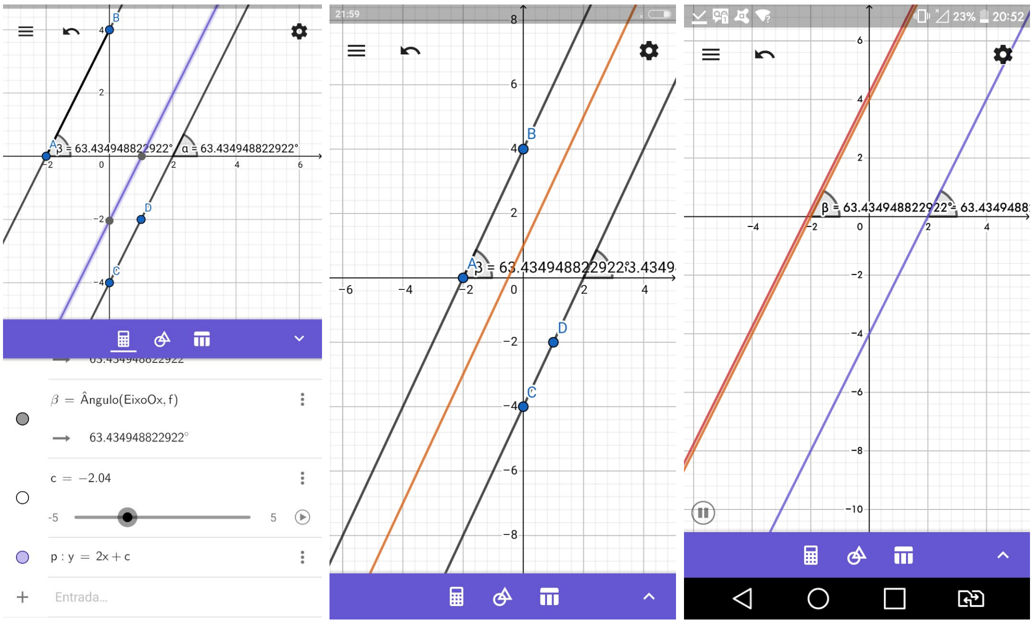
Fonte: Autoria Própria.

f- As retas serão sempre paralelas e distintas à reta r se $c \neq 4$ ou $c \neq -4$. Se c for igual a 4 ou -4, a reta r coincidirá com as retas que passam por AB ou CD, ou seja, serão as mesmas retas.

Os alunos fizeram a construção da reta $r : y = 2x + c$ e utilizaram o controle deslizante. Perceberam que r será paralela as outras duas retas. E mesmo visualizando que r coincidiu com ambas, quando $c = 4$ e $c = -4$, nenhum dos 21 alunos que concluíram que elas são paralelas, anotou essa observação.

A Figura 61 representa uma sequência da reta r se movendo, utilizando o controle deslizante no aplicativo GeoGebra.

Figura 61 – Imagens da reta r utilizando o controle deslizante referente a questão 2, item e- Atividade 8



Fonte: Dados da Pesquisa.

QUESTÃO 3 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

Analise agora, as várias equações de retas apresentadas a seguir e identifique aquelas que são paralelas entre si.

$f : y = \frac{1}{2}x;$

$g : y = 5;$

$h : y = x - 3;$

$r : y = -3;$

$s : y = 3 - x;$

$t : y = 2 + x;$

$u : y = -\frac{3}{5}x;$

$v : y = 5 + x;$

$w : y = \frac{x-3}{2}.$

Resolução:

São paralelas as retas que têm o mesmo coeficiente angular (m). Logo, são paralelas entre si:

- $m = \frac{1}{2}$

  $f : y = \frac{1}{2}x$ e $w : y = \frac{x-3}{2}$

- $m = 1$

  $h : y = x - 3; t : y = 2 + x$ e $v : y = 5 + x$

- $m = 0$

  $g : y = 5$ e $r : y = -3$

As retas $s : y = 3 - x$ e $u : y = \frac{3}{5}x + 5$ não são paralelas à nenhuma outra reta da lista.

Os alunos apresentaram uma dificuldade maior em observar que as retas f e w são paralelas, pois alguns confundiram o coeficiente angular por estar no formato de fração. Porém, um número considerável de alunos concluiu o paralelismo entre elas. Num total de 23 alunos, 19 acertaram, enquanto 3 erraram pois não sabiam o conceito de paralelismo e 1 aluno deixou em branco (toda a questão).

Em relação às retas h, t e v, 20 alunos visualizaram que as retas são paralelas. E o mesmo número de alunos acertou a posição relativa entre as retas g e r.

Na questão 2 os alunos já haviam relacionado o coeficiente angular com o paralelismo entre duas retas, o que tornou mais simples a resolução dessa questão. Porém, mesmo visualizando algebricamente, quais retas eram paralelas entre si, os alunos foram orientados a desenhar as retas no aplicativo GeoGebra, o que forneceu a conclusão gráfica da atividade. Foram orientados ainda, a ocultarem os outros grupos de retas paralelas entre si, pra melhor visualização.

Adiante a Figura 62 do aluno A_{26} mostra todas as retas construídas. O aluno, como dito anteriormente, ocultou na janela de álgebra, as retas para perceber quais eram paralelas.

QUESTÃO 4 (Saerjinho, 3ª série, 3º bimestre de 2011)

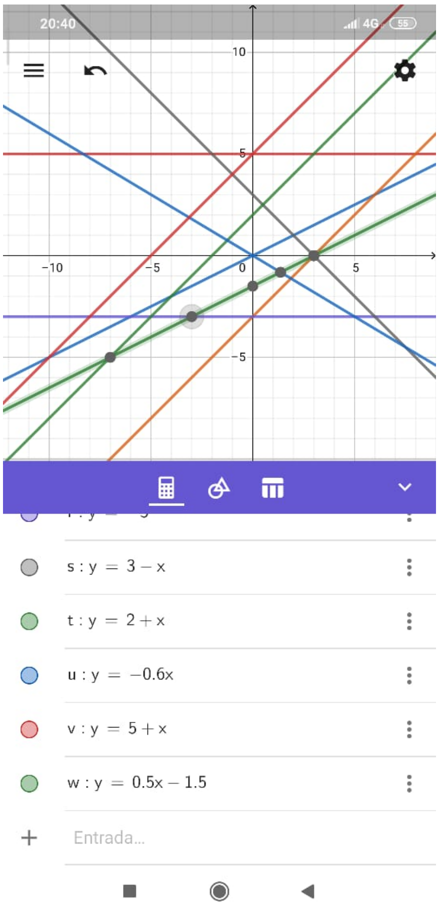
A exemplo das questões anteriores, como você enuncia a condição para verificar se duas retas são paralelas a partir de suas equações reduzidas $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$? Por quê?

Resolução:

Sabendo-se da propriedade dos ângulos formados por uma transversal a duas paralelas, os ângulos formados pelo eixo x com as retas $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ são iguais, ou seja, isso acontecerá quando os seus coeficientes angulares forem iguais, $m_1 = m_2$. Considerando $m_1 = m_2$, se $n_1 = n_2$, as duas retas coincidem, ou seja, são a mesma reta. E se $n_1 \neq n_2$, as retas têm a mesma inclinação, porém intersectam o eixo y em pontos distintos, o que significa que serão duas retas paralelas.

Apenas um aluno deixou a questão em branco e os outros 22 responderam corretamente que os coeficientes angulares devem ter o mesmo valor. Nenhum aluno escreveu tal

Figura 62 – Construção do aluno A_{26} referente a questão 3, Atividade 8



Fonte: Autoria Própria.

informação algebricamente, como também nenhum aluno considerou quando duas retas são coincidentes.

4.10 Atividade 9: Posição relativa entre duas retas- 2ª Parte

Objetivos:

- Analisar e identificar retas paralelas a partir de suas equações na forma geral.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

Espera-se que o aluno compreenda o conceito de paralelismo entre duas retas e reconheça equações da reta na forma geral e na forma reduzida.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo Geogebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas

- Os alunos devem estar organizados em dupla, com o intuito que a interação e a troca de ideias colabore na organização, resolução e compreensão de cada item.
- Espera-se ainda, que o aplicativo GeoGebra esteja instalado no celular dos alunos.

Dificuldades Previstas:

Os alunos ainda apresentaram dificuldades na manipulação algébrica das equações.

Tempo Estimado:

2 aulas de 50 minutos.

Descrição Geral:

Com as questões da atividade 9 (Apêndice F), espera-se que os alunos concluam, com a utilização do aplicativo GeoGebra e manipulação algébrica das equações, a condição de paralelismo a partir das equações na forma geral.

QUESTÃO 1 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ/CECIERJ)

Entusiasmadas com a experiência dos colegas, Marta e Érika resolveram estabelecer sua caminhada na mesma estrada, de modo que a relação entre a distância y e o termo x, definidos como na questão da atividade anterior, fosse também dada por equações. Marta afirmou que as equações permitiriam que elas não se encontrassem seriam: $2x - y + 1 = 0$ e $x - 2y + 4 = 0$. E Érika discordou, sugerindo as equações: $2x - y + 1 = 0$ e $2x - y + 4 = 0$ Pergunta: Qual das duas sugeriu equações de retas paralelas de modo que não haja mesmo perigo de encontro? Justifique sua resposta, esboçando no mesmo sistema de coordenadas (no aplicativo GeoGebra), o gráfico de y em função de x, definida em cada uma dessas equações.

Resolução:

É possível observar na construção das retas das equações que Marta estabeleceu que, elas se encontram em um ponto, em determinado momento. Enquanto que as equações sugeridas por Érika são paralelas, ou seja, não há ponto de encontro.

Conforme sugerido na questão, os alunos utilizaram o aplicativo GeoGebra pra construirem as retas e então poderem concluir sobre a sua posição relativa. Nessa atividade, 22 alunos estavam presentes durante a aula, e todos, com o aplicativo previamente instalado, conseguiram fazer a construção e, em seguida, observar que as equações das retas da Érika são paralelas, enquanto as da Marta têm um ponto de encontro.

As Figuras 63 e 64 apresentam gráficos construídos por alunos utilizando o aplicativo GeoGebra, representando as retas sugeridas por Marta e Érika, respectivamente.

QUESTÃO 2 Escreva as equações da questão 1 na forma reduzida, observe e anote o que elas têm em comum.

Resolução:

Escrevendo as equações sugeridas por Marta na forma reduzida, tem-se:

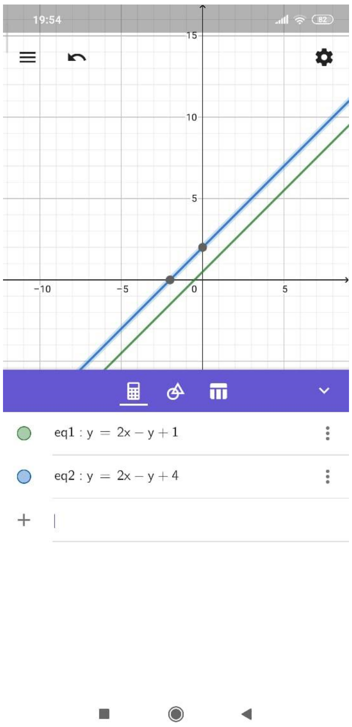
$2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$ e $x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 2$

Ou seja, o coeficiente angular da primeira reta é igual 2, enquanto o da segunda é igual a $\frac{1}{2}$. Portanto, as retas não podem ser paralelas pois têm inclinações diferentes.

E nas equações sugeridas por Érika $2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$ e $2x - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2x + 4$, ambas as retas têm o coeficiente angular igual a 2. Logo, têm a mesma inclinação. Portanto são paralelas e distintas, pois os coeficientes lineares são distintos.

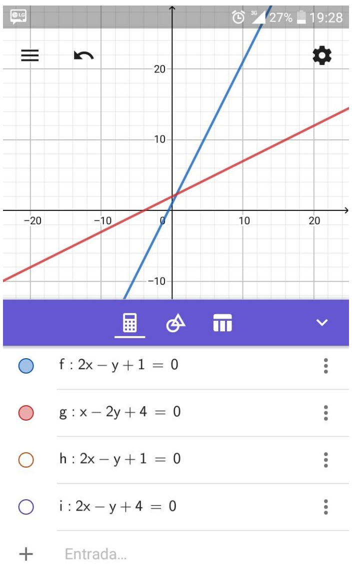
Todos os alunos compreenderam a questão, porém ao tentar escrever as equações na forma reduzida, cinco alunos não isolaram y devidamente, chegando em $-y = -2x - 1$ e $-y = -2x - 4$, e a partir desse ponto não conseguiram mais desenvolver o raciocínio. Após a conclusão da questão por parte dos alunos, a questão foi corrigida no quadro e então eles

Figura 63 – Retas sugeridas por Marta- Questão 1, atividade 9



Fonte: Autoria Própria.

Figura 64 – Retas sugeridas por Érika- Questão 1, atividade 9

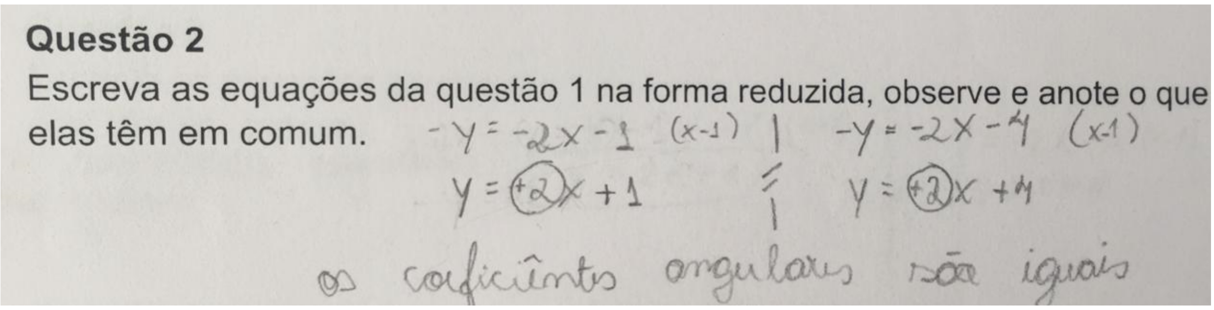


Fonte: Autoria Própria.

puderam perceber o que fazer para concluir e encontrar a equação reduzida. Os outros 17 alunos escreveram corretamente na forma reduzida e concluíram que as equações da Érika tinham o mesmo coeficiente angular. Nenhum aluno analisou as retas sugeridas por Marta, e também não foi feita a análise do coeficiente linear.

A solução do aluno A_{16} representada na Figura 65, mostra a escrita na forma reduzida apenas de duas equações, como foi dito anteriormente. E ainda a conclusão sobre a igualdade dos coeficientes angulares.

Figura 65 – solução do aluno A_{27}, questão 2, atividade 9



Fonte: Autoria Própria.

QUESTÃO 3

E qual é a condição de paralelismo a partir de equações gerais de duas retas:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$?

Resolução:

Como b_1 e b_2 são diferentes de zero, é possível escrever a equação reduzida de cada uma delas:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$$

e

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$$

.

Onde as retas serão paralelas se:

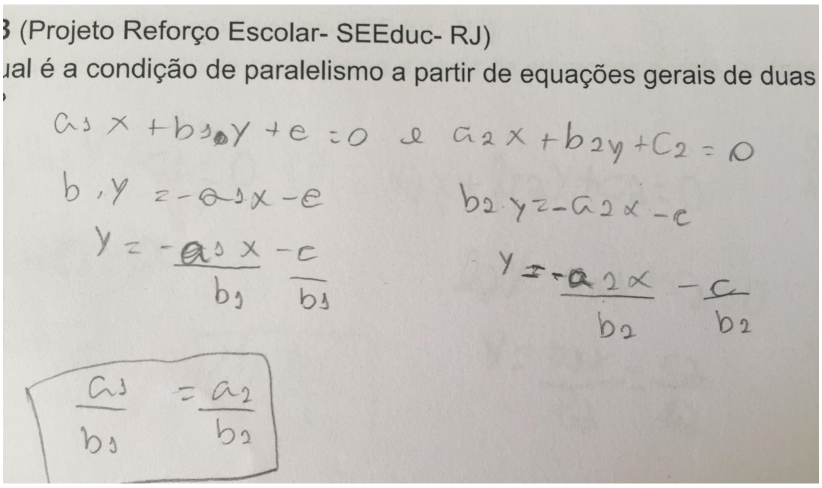
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

, ou seja, se forem proporcionais. E caso os termos independentes nas equações reduzidas forem também proporcionais, ou seja, $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$, as duas retas serão coincidentes.

Com a questão anterior exposta para toda a classe de maneira correta, a solução da questão 3 ficou mais evidente para os alunos. Todos os 22 conseguiram escrever as equações reduzidas e a condição de paralelismo, analisando somente os coeficientes angulares. Nenhum aluno fez a análise do coeficiente linear. Novamente, após o término da questão, a mesma foi exposta para a turma de forma completa.

A Figura 66 mostra a solução correta do aluno A_{17}.

Figura 66 – Solução do aluno A_{28}, referente a questão 3, atividade 9



Fonte: Autoria Própria.

4.11 Atividade 10: Posição relativa entre duas retas: Retas Perpendiculares

Objetivos:

Analisar e identificar retas perpendiculares a partir de suas equações na forma reduzida.

Público Alvo

Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

Como pré-requisito, espera-se que o aluno tenha conhecimento sobre o conceito de retas concorrentes perpendiculares e equação da reta na forma geral e reduzida.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, dispositivo móvel com o aplicativo Geogebra previamente instalado, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas É importante que os alunos estejam sentados em dupla, para que haja a discussão sobre o assunto.

Dificuldades Previstas:

Os alunos apresentaram dificuldade em analisar o coeficiente angular das retas paralelas aos eixos coordenados.

Tempo Estimado:

2 aulas de 50 minutos.

Descrição Geral:

A atividade 10 (Apêndice F) propõe ao aluno a visualização geométrica das retas perpendiculares, para que em seguida se possa estabelecer os critérios de perpendicularismo sobre as equações das retas.

QUESTÃO 1

(Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ/CECIERJ) "Seu"Badu deseja comprar um terreno de esquina para construir sua loja, mas ele quer um terreno que tenha os quatro ângulos retos. A região em que o "seu"Badu quer construir sua loja, tem ruas que podem ser descritas num sistema plano de coordenadas pelas seguintes equações:

$r : x = 4;$

$s : y = \frac{x}{5} + 4;$

$t : y = x;$

$u : y = -x + 5;$

$v : y = -5x - 4;$

$w : y = 3.$

a) Construa, no aplicativo GeoGebra, cada uma das retas e identifique as que atendem às exigências do "seu"Badu.

Resolução:

Os pares de retas que são perpendiculares entre si, são: $w : y = 3$ e $r : x = 4$; $t : y = x$ e $u : y = -x + 5$; $s : y = \frac{x}{5} + 4$ e $v : y = -5x - 4$.

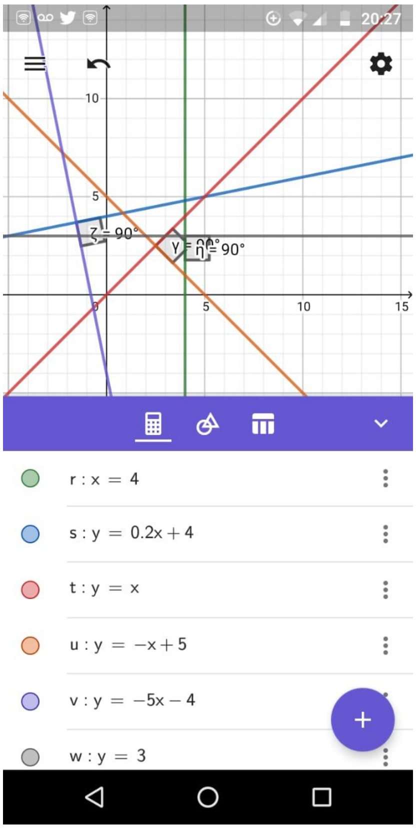
Para resolver esse item, como orientado no enunciado, os alunos construíram as retas no aplicativo GeoGebra e, em seguida, marcaram os ângulos entre as retas utilizando os comandos: Medições, ângulo, seleção de uma reta e depois a outra.

Os alunos tiveram mais dificuldade em perceber que as retas $w : y = 3$ e $r : x = 4$ são perpendiculares. Dos 22 discentes que realizaram a atividade, quatro não identificaram a perpendicularidade. Já nas retas $t : y = x$ e $u : y = -x + 5$, apenas um aluno não conseguiu visualizar que são perpendiculares. E nas retas de equações $s : y = \frac{x}{5} + 4$ e $v : y = -5x - 4$, todos os alunos chegaram à conclusão correta. A Figura 67 mostra a construção das retas que o aluno A_29 realizou no GeoGebra, juntamente com os ângulos formados entre as retas que são perpendiculares.

b- Agrupe as equações das retas perpendiculares entre si e analise os seus coeficiente angulares. Anote.

- Nas retas w e r, $m = 0$ em ambos os casos.

Figura 67 – Retas Perpendiculares- Questão 1, atividade 10



Fonte: Autoria Própria.

- A reta t tem o coeficiente angular igual a 1 e a reta u, -1.
- E as retas s e v, tem coeficientes angulares $\frac{1}{5}$ e -5, respectivamente.

Após a conclusão da questão anterior, foi mostrado no próprio aplicativo aos alunos, as retas que eram perpendiculares, para que os que não conseguiram concluir corretamente, pudessem continuar a atividade sem grandes problemas. Portanto, nesse item todos os alunos conseguiram agrupar as retas perpendiculares e escreverem seus coeficientes angulares. Apresentaram grande dificuldade em identificar os coeficientes das retas w e r, que é igual a zero. Quanto à análise dos coeficientes angulares, apenas dois alunos perceberam a relação existente. O aluno A_{30} concluiu a questão como mostra a Figura 68:

QUESTÃO 2

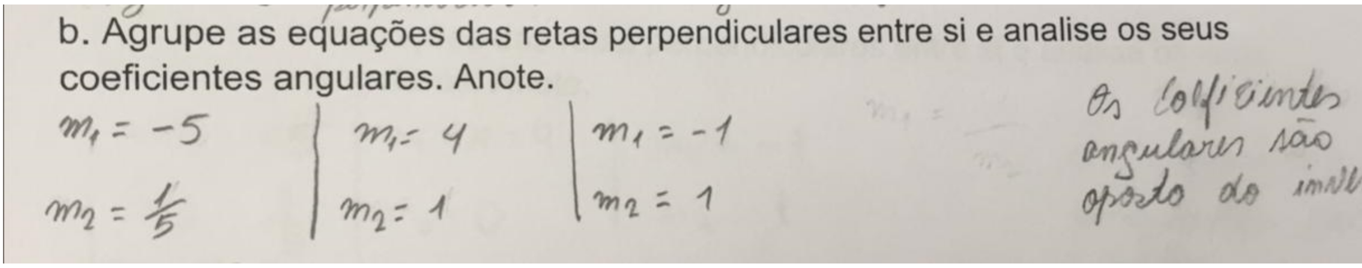
Combinando esses resultados, você terá as condições de perpendicularismo entre retas das por equações reduzidas num plano cartesiano. Considere as retas de equações:

$y = m_1x + n_1$ e $y = m_1x + n_1$ e escreva tais condições.

Resolução:

Com os resultados anteriores, espera-se que o aluno consiga deduzir algebricamente

Figura 68 – Solução da questão 1 item b- Atividade 10 do aluno A_30



Fonte: Autoria Própria.

que:

- Se $m_1 = 0$ ou $m_2 = 0$, $y = n$ é perpendicular à reta $x = k$.
- Se $m_1 \neq 0$, as retas de equações $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ são perpendiculares se, e somente se: $m_1.m_2 = -1$.

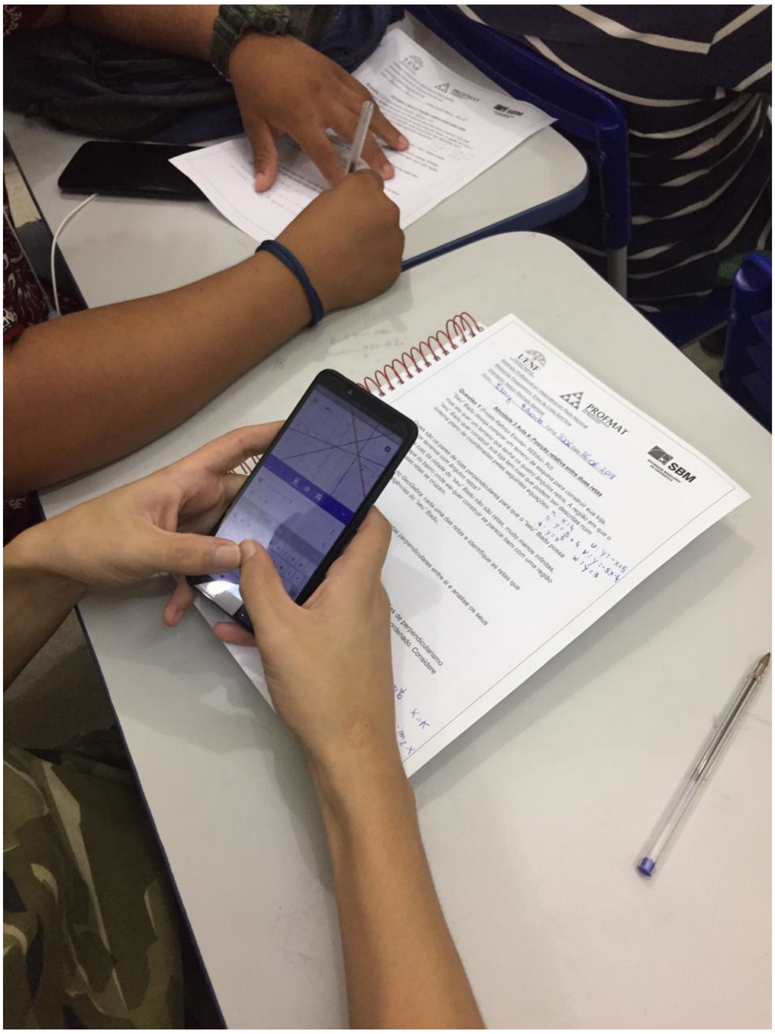
As Figuras 69 e 70 representam os alunos A e B realizando a Atividade 10.

Nessa etapa nenhum aluno deduziu o resultado teórico com autonomia. Portanto, foram expostas no quadro as devidas justificativas de perpendicularismo, afim de que os alunos percebam o fundamento e a lógica e então tenham uma compreensão mais ampla do conteúdo.

Figura 69 – Aluno A_{31} realizando a Atividade 10

Fonte: Autoria Própria.

Figura 70 – Aluno A_{32} realizando a Atividade 10



Fonte: Autoria Própria.

Considerações Finais

O presente trabalho propôs a realização de atividades sobre Pontos e Retas para o 3º ano do Ensino Médio do turno noturno, utilizando as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, as TDIC, por meio do aplicativo GeoGebra para dispositivos móveis, associado a questões do Projeto Reforço Escolar da Estado do Rio de Janeiro/CECIERJ.

Por meio da pesquisa bibliográfica e pesquisa aplicada, pode-se perceber o quanto a inserção das TDIC em sala de aula é importante. Mesmo que não seja simples, pois requer um planejamento de aula que atenda as necessidades do aluno e do professor, é necessária e tem um único objetivo: contribuir com o processo de ensino- aprendizagem. O uso da tecnologia associado a resolução das questões do Projeto Reforço Escolar, leva o aluno a desempenhar um papel ativo na construção do seu conhecimento. E ao professor, um papel de facilitador do acesso à essa aprendizagem. A escolha em se trabalhar com dispositivos móveis se deu por conta da facilidade ao acesso, todos os alunos possuem celular, não dependendo de laboratórios de informática, o que impossibilitaria o avanço da pesquisa.

Com base nessas constatações, foram apresentadas atividades simples que abordam os conteúdos de Geometria Analítica, no qual o aluno teve a oportunidade de participar da construção do conhecimento utilizando o aplicativo GeoGebra. O uso do aplicativo foi de fundamental importância, pois possibilitou a visualização geométrica dos elementos algébricos, facilitando a formalização e conceituação dos conteúdos.

Por ter sido aplicada em uma turma do turno da noite, as atividades levaram um tempo maior pra serem concluídas, pois além do horário da aula ser reduzido, os alunos têm o hábito de atrasar, o que diminui ainda mais o tempo de aula dado. O fato da pesquisadora ser a professora regente da turma, facilitou a contornar esse tipo situação e também no estímulo dado aos alunos para continuarem a utilizar o aplicativo, mesmo em outros conteúdos estudados durante o ano.

Os alunos tiveram um bom desempenho na atividade 1, conseguiram utilizar corretamente o aplicativo GeoGebra, e marcar os pontos devidamente. Pôde-se perceber um avanço nessa atividade em relação ao teste diagnóstico. Ainda nessa atividade, foi possível construir e formalizar o conceito da distância entre dois pontos.

Enquanto na atividade 1 os alunos utilizaram o aplicativo GeoGebra, na atividade 2, a distância entre dois pontos foi realizada algebricamente, após às conclusões obtidas na atividade 1. Os alunos tiveram mais dificuldade em realizar as questões que envolviam conceitos de geometria espacial. As questões que envolviam cálculo da distância entre dois pontos apenas por aplicação de fórmula, foi mais facilmente desenvolvida pelos alunos. Todas as questões dessa atividade foram retiradas do Projeto Reforço Escolar.

Na Atividade 3, os alunos compreenderam o conceito de ponto médio e alinhamento de pontos, construindo e visualizando graficamente no aplicativo GeoGebra. Ainda nessa atividade, os alunos conseguiram concluir corretamente como calcular algebricamente o ponto médio de um segmento. Após a conclusão da atividade, os conteúdos de ponto médio e condição de alinhamento foram formalizados junto aos alunos.

Com a atividade 4, os alunos calcularam o ponto médio algebricamente. Tiveram um bom desempenho nas questões, porém ao calcular com números positivos e negativos, apresentaram certa dificuldade. Nas questões de alinhamento de 3 pontos, os alunos conseguiram calcular algebricamente e, em seguida, visualizaram no aplicativo GeoGebra se os pontos eram mesmo colineares.

Para realizar a atividade 5, os alunos desenharam no aplicativo GeoGebra as retas, observando em quais pontos passava. Para encontrar a equação geral da reta, os alunos trabalharam algebricamente e, em seguida, conferiram no aplicativo se a equação estava certa. Ao determinar a equação reduzida a partir da sua equação geral, os alunos apresentaram dificuldade na manipulação algébrica. As questões do Projeto Reforço Escolar foi de fundamental importância nessa atividade, pois incentivaram os alunos a construir e concluir os conceitos presentes.

Os coeficientes da equação reduzida da reta foram analisados na Atividade 6. Nessa atividade, embora não fosse de uso obrigatório, os alunos foram estimulados a utilizar o aplicativo GeoGebra para que o aluno percebesse geometricamente sobre o comportamento dos coeficientes, para então, concluir algebricamente. Os alunos apresentaram dificuldade na questão que trabalhava com o círculo trigonométrico.

A atividade 7 foi realizada em forma de gincana, o que estimulou no envolvimento dos alunos para responder às questões. Todos os alunos participaram de forma ativa, e todas as questões foram expostas no quadro pelos mesmos. Os alunos utilizaram o aplicativo GeoGebra pra confirmar as respostas, porém todas as questões foram desenvolvidas algebricamente, afim de avaliar os conteúdos sobre equações geral e reduzida das retas, trabalhados nas atividadess anteriores.

As posições relativas entre duas retas foram trabalhadas nas atividades 8, 9 e 10. Na Atividade 8, o aluno revisou e concluiu a condição de paralelismo entre duas retas, utilizando questões do Projeto Reforço Escolar no aplicativo GeoGebra. Os alunos tiveram desempenho excelente nessa atividade. Os alunos conseguiram observar e escrever a condição de paralelimos entre retas, a partir da sua equação reduzida. Na atividade 9, os alunos escreveram a condição de paralelismo entre as retas, a partir da sua equação geral. Com a atividade 10, os alunos puderam relembrar e visualizar graficamente o conceito de retas perpendiculares. Fizeram as construções no aplicativo GeoGebra, medindo os ângulos e percebendo as retas perpendiculares. Os alunos apresentaram um bom desempenho nessa etapa. Porém não conseguiram concluir a condição de perpendicularismo entre as retas.

Conclui-se que este trabalho favoreceu consideravelmente a aprendizagem dos conceitos através da construção do conhecimento, ao relacionar o uso do aplicativo para dispositivos móveis e o Projeto Reforço Escolar. As aulas foram diferenciadas e os alunos se mantiveram mais envolvidos e motivados durante toda a aplicação.

Como contribuições futuras, pretende-se avançar o conteúdo de Geometria Analítica em circunferência, para que seja possível fazer animações utilizando o aplicativo GeoGebra. Espera-se que os professores utilizem ou adaptem as atividades disponibilizadas, juntamente com a tecnologia de mais fácil acesso, a fim de proporcionar ao aluno uma nova forma de acesso ao conhecimento.

Referências

ALMEIDA, M. E. B. de. *Tecnologia na escola*: criação de redes de conhecimentos. [S.l.: s.n.], 2008. Citado na página 25.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Plana Euclidiana*. [S.l.: s.n.], 1995. Citado na página 40.

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. d. *Matemática aula por aula*. [S.l.: s.n.], 2000. Citado na página 42.

BASTOS, D. d. O. *Estudo da circunferência no ensino médio*: sugestões de atividades com a utilização do software geogebra. Dissertação (Mestrado), 2014. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

BRASIL, P. Orientaçoes educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. *MEC–SEMTEC, Brasília*, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 19, 24, 26, 33 e 34.

CECIERJ, F. Manual do reforço escolar. 2012. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

COSTA, I. *Novas tecnologias e aprendizagem*. [S.l.: s.n.], 2014. Citado 7 vezes nas páginas 18, 19, 20, 25, 26, 27 e 28.

CUNHA, H.; OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P. da. Investigações matemáticas na sala de aula. Actas do ProfMat, 1995. Citado na página 18.

D'AMBRÓSIO, U. Educação matemática: da teoria à prática. Papirus Editora, 2007. Citado na página 19.

DANYLUK, O.; COMIM, A. História da educação matemática: escrita e reescrita de histórias. *Porto Alegre*, 2012. Citado na página 23.

DRUCK, S. Matemática não é problema. Boletim, v. 6, 2005. Citado na página 18.

FONSECA, J. J. S. Metodologia da pesquisa científica. 2002. Citado na página 46.

FREIRE, P. *Educação como prática da liberdade*. [S.l.]: Editora Paz e Terra, 2014. Citado na página 27.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia*. [S.l.: s.n.], 2014. Citado na página 25.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar, volume 7 (Geometria Analítica)*. [S.l.: s.n.], 1997. Citado na página 41.

MINAYO, M. C. de S.; DESLANDES, S. F.; GOMES, R. *Pesquisa social*: teoria, método e criatividade. [S.l.]: Editora Vozes Limitada, 2011. Citado na página 46.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. [S.l.]: Papirus Editora, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

NEVES, E. B.; DOMINGUES, C. A. Manual de metodologia da pesquisa científica. *Rio de Janeiro*, p. 204, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 48.

NOGUEIRA, E. L. P. O uso da calculadora gráfica geogebra no smartphone como ferramenta para o ensino das funções exponencial e logarítmica. 2018. Citado na página 28.

OLIVEIRA, F. D. M. O software geogebra como ferramenta para o ensino da geometria analítica. 2014. Citado na página 23.

PRADO, A.; JÚDICE, R.; FRIEDE, R. Por que os educadores precisam ir além do data show: e como fazer isso. *São Paulo: Geekie*, 2016. Citado na página 27.

REGO, T. C. *Vygotsky*: uma perspectiva histórico-cultural da educação. [S.l.]: Editora Vozes Limitada, 2013. Citado na página 18.

RIO DE JANEIRO. Currículo mínimo de matemática. *Secretaria Estadual de Educação Rio de Janeiro*, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 34, 47 e 51.

SOARES, S. R. *Um estudo histórico do ensino de geometria analítica no curso de matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970*. Dissertação (Mestrado), 2013. Citado na página 23.

TOLEDO, F. S. *Texto e contexto da educação a distância*. 2004. Citado na página 24.

VALENTE, J. A. et al. O professor no ambiente logo: formação e atuação. *Campinas*, Gráfica da UNICAMP, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 25.

ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. [S.l.]: Penso Editora, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

Apêndices

APÊNDICE A

Autorizações

A.1 Autorização Direção Escolar

AUTORIZAÇÃO

Prezado(a) Diretor(a),

Os alunos da turma do 3º ano do turno da noite, do C. E. Luiz Reid, serão convidados a participar de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da UENF, realizado pela mestranda e professora de matemática na referida turma, Érika da Costa Sant'Ana. A pesquisa será realizada no próprio colégio, durante algumas aulas de matemática, com o seguinte tema: ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA: O USO DO GEOGEBRA, onde os alunos irão obter de forma significativa através do lúdico, o entendimento de assuntos relacionados à Geometria Analítica.

Tendo como objetivo principal a melhoria no ensino aprendizagem dos alunos, gostaria de pedir sua autorização para que o Colégio e a turma 3005 possam participar da pesquisa, e que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e se estiver de acordo, peço que destaque e preencha o formulário a seguir:

\- -

Eu, ____, diretor(a) do Colégio Estadual Luiz Reid, autorizo a participação da turma 3005 na pesquisa ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA: O USO DO GEOGEBRA, desenvolvida pela professora de Matemática Érika da Costa Sant'Ana.

____

Assinatura

Macaé, 18 de fevereiro de 2019

A.2 Autorização Responsável

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Senhor(a) responsável,

Os alunos da turma do 3º ano do turno da noite do C. E. Luiz Reid, em que seu filho(a) se encontra matriculado, estão sendo convidados a participar de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da UENF, realizado pela mestranda e professora de matemática, Érika da Costa Sant'Ana.

A pesquisa será realizada na própria escola, em sala de aula, durante as aulas de matemática, com o seguinte tema: ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA: O USO DO GEOGEBRA, onde os alunos irão obter de forma significativa através do lúdico, o entendimento de assuntos relacionados à Geometria Analítica, tendo como objetivo principal a melhoria no ensino e aprendizagem do seu filho(a). Solicitamos sua autorização para que ele(a) possa participar das atividades, e que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e peço que a aprovando a participação do seu filho(a) destaque e preencha o formulário a seguir:

Eu, ____,
autorizo a participação de meu filho(a) na pesquisa desenvolvida pela mestranda na área profissional de matemática, Érika da Costa Sant'Ana.

Nome do aluno:

____

Macaé, 18 de fevereiro de 2019.

APÊNDICE B

Questionários

B.1 Questionário Socioeconômico

QUESTIONÁRIO SÓCIO-ECONÔMICO

1) Sexo
   a) Feminino
   b) Masculino

2) Qual a sua idade?
   a) Menos de 16 anos
   b) De 16 a 18 anos
   c) De 18 a 22 anos
   d) De 23 a 27 anos
   e) Mais de 28 anos

3) Você se considera:
   a) Branco (a)
   b) Preto (a)
   c) Pardo (a)
   d) Amarelo (a)
   e) Indígena

4) Caso possua filhos menores de 6 anos, quantos são?
   a) Não possuo filhos
   b) Um
   c) Dois
   d) Três
   e) Quatro
   f) Não possuo filhos menores de 6 anos

5) Possui computador em casa?
   a) Não possuo computador
   b) Possuo sem acesso à internet
   c) Possuo com acesso à internet

6) Qual a sua maior forma de acesso à internet?
   a) Não possuo acesso à internet
   b) Computador em casa
   c) Computador no trabalho
   d) Smartphone (rede móvel)
   e) Smartphone (outras redes)

7) Você possui serviço de internet?
   a) Não
   b) Sim, somente em casa
   c) Sim, somente

8) Você trabalha?
   a) Não
   b) Sim, em meio período
   c) Sim, em horário integral

9) Como fez seus estudos de ensino fundamenta?
   a) Integralmente em escola pública
   b) Integralmente em escola particular
   c) Maior parte em escola pública
   d) Maior parte em escola particular

10) Concluiu o ensino fundamental em:
   a) Curso regular
   b) Curso supletivo

11) Você pretende fazer algum curso superior?
   a) Sim
   b) Não
   c) Somente curso técnico

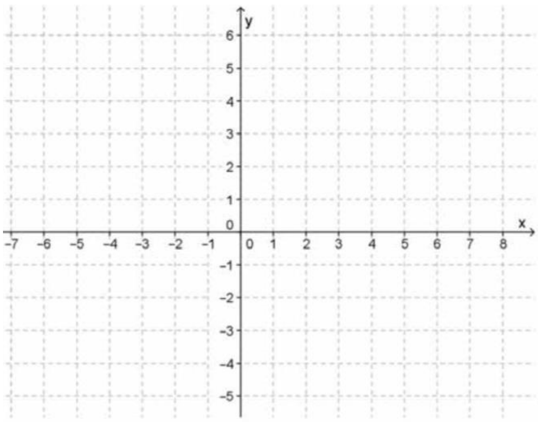
B.2 Teste Diagnóstico

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro   PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática   SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<u>AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA</u>

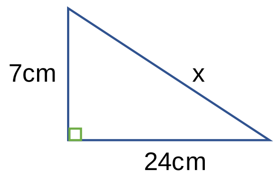
1) Localize os seguintes pontos no plano cartesiano:

A(1,2)	B(-2, 4)	C(3, -1)	D(-4, -2)	E(5,0)
F(0,-3)	G(-1,0)	H(0,0)	I(0,4)	J(-3,4)

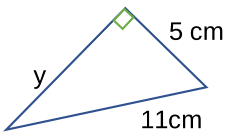


2) Determine a medida desconhecida em cada um dos triângulos abaixo.

a)



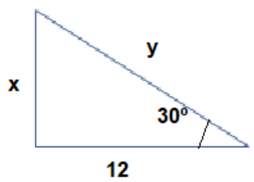
b)



3) Determine o valor de x na proporção $\frac{15}{13} = \frac{x}{65}$.

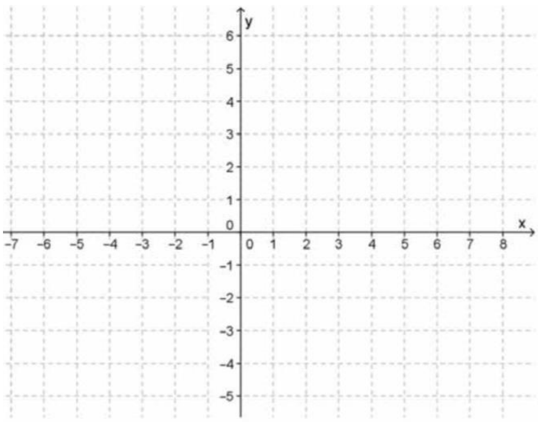
4) Fernando e César resolveram formar uma sociedade. Para tal, cada um aplicou R$ 2 960 e R$ 2500 respectivamente. Depois de alguns dias, obtiveram um lucro de R$163,80. Que parte do lucro coube a cada sócio?

5) Encontre os valores de x e y no triângulo abaixo.



6) Considerando a função $f: R \rightarrow R$ definida por f(x) = 2x -3, complete a tabela abaixo e em seguida construa o seu gráfico.

X	f(x) = 2x -3	(x,y)
0		
1		
3/2		
2		
5/2		

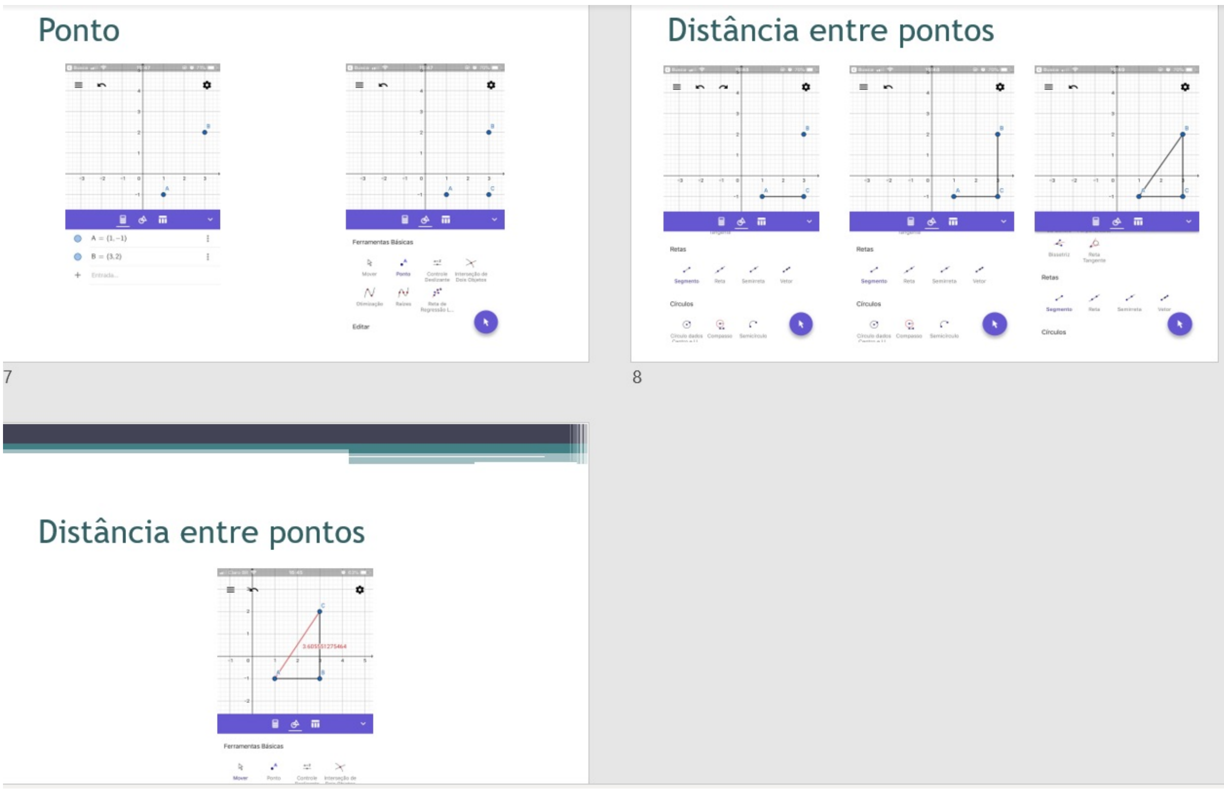


APÊNDICE C

Aula 1: Pontos no Plano Cartesiano e Distância entre dois pontos

C.1 Aula Expositiva 1

C.2 Aula Expositiva 1 Parte 2



C.3 Ficha de Atividades 1

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

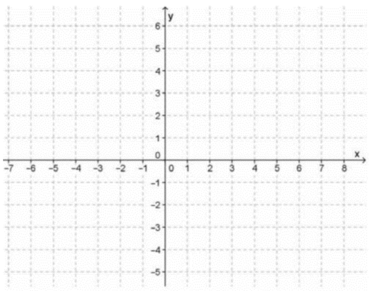
Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:______________________________Turma:_______Data:____/____/___

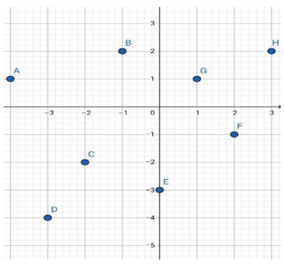
Atividades Aula 1- Ponto e distância entre pontos

1)Localize os seguintes pontos no plano cartesiano:

A(1,2) B(2, -2) C(-3, -1) D(-4, 0) E(5,-2) F(-2,1) G(-1,0) H(0,-2) I(1,-3) J(-3,4)

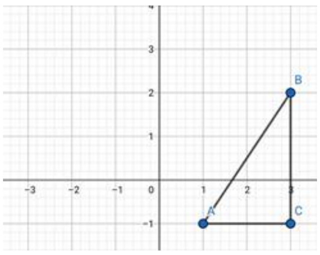


2)Determine as coordenadas dos pontos:



A=______ B=______ C=______ D=______ E=______ F=______ G=______H=______

3)Após localizar os pontos abaixo no GeoGebra, complete as tabelas.



PONTO	ABSCISSA	ORDENADA
A		
B		
C		

Comprimento de AC	
Comprimento de BC	
Comprimento de AB	

C.4 Ficha de Atividades 2

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:______________________________Turma:_______Data:___/___/___

2ª Atividade Aula 1- Distância entre pontos

Questão 1 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

A pirâmide de Keops é uma pirâmide reta de base quadrada. Suas medidas são aproximadamente 140 m de altura e 230 m de aresta da base.

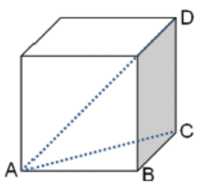
Pergunta-se:

a.Qual a altura de uma de suas faces?

b. Qual a distância entre um vértice da base e o centro da base?

Questão 2 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

Calcule a medida da diagonal de um cubo de aresta igual a 7.



Questão 3 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

O mapa a seguir foi desenhado sobre um plano cartesiano graduado em centímetros. Nesse plano, a cidade de São Paulo encontra-se na origem dos eixos coordenados e Vitória no ponto de coordenadas (6,3).

Dentre as opções a seguir, qual é a melhor aproximação da menor distância, entre São Paulo e Vitória neste mapa?

a. 5,2 cm

b. 6,6 cm

c. 9,0 cm

d. 22,5 cm

e. 45,0 cm

Considere: $\sqrt{5} \cong 2{,}2$

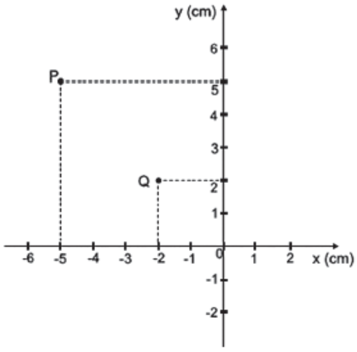
Questão 4

Qual é a distância entre os pontos A(5,8) e B(1,5)?

a) 25
b) $\sqrt{5}$
c) 5
d) 10
e) $\sqrt{14}$

Questão 5 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ -Saerjinho 2011)

Observe os pontos P e Q no plano cartesiano.



A distância entre esses dois pontos é

a. 3 cm

b. $\sqrt{12}$ cm

c. $\sqrt{18}$ cm

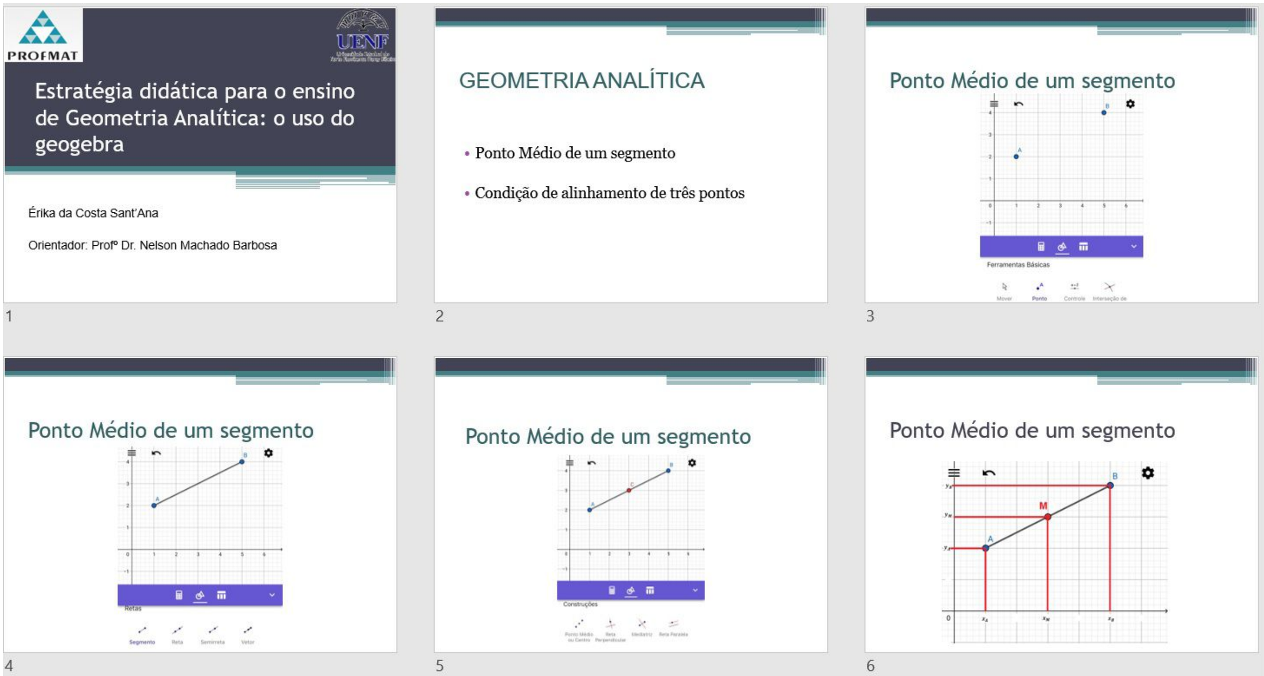
d. 9 m

e. 18 cm.

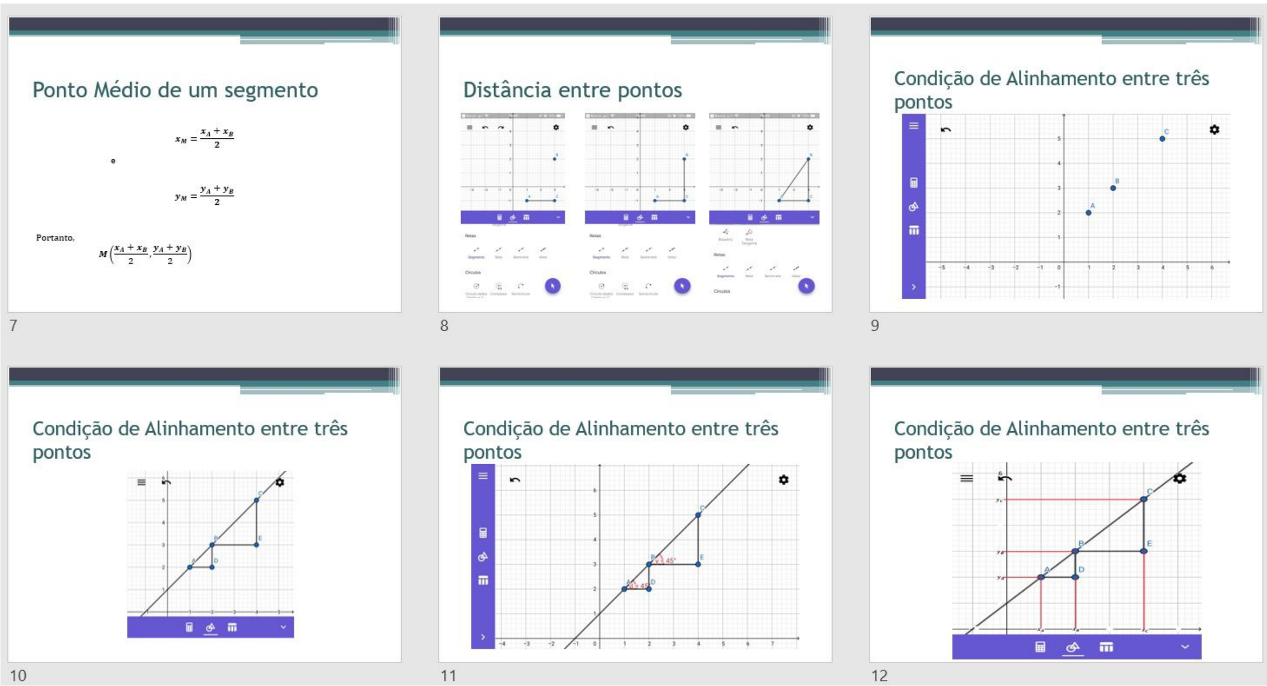
APÊNDICE D

Aula 2: Ponto Médio e Alinhamento de 3 pontos

D.1 Aula Expositiva 2



D.2 Aula Expositiva 2 Parte 2



D.3 Ficha de Atividades 1

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:______________________________ Turma:_______ Data:___/___/___

Atividades Aula 1- Ponto Médio e Alinhamento de 3 pontos

As seguintes atividades deverão ser realizadas no GeoGebra

1) Determine as coordenadas do ponto médio dos segmentos abaixo:
   a) A(-1,2) e B(-2,0)

   b) C(-3,3) e D(4,3)

   c) E(4,2) e F(2,4)

2) Escreva com as suas palavras uma maneira de encontrar algebricamente as coordenadas do ponto médio de um segmento e depois teste esse método nos exemplos anteriores. Apresente os cálculos realizados nesse espaço.
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

3) Em cada item, verifique se os pontos pertencem à mesma reta.
   a) A(3,-2), B(0,1) e C(-3,4)

   b) D(-3,-1), E(0,5) e F(1,-2)

D.4 Ficha de Atividades 2

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:______________________________ Turma:_______ Data:____/____/___

Atividade 2 Aula 2- Ponto Médio e Alinhamento de 3 pontos

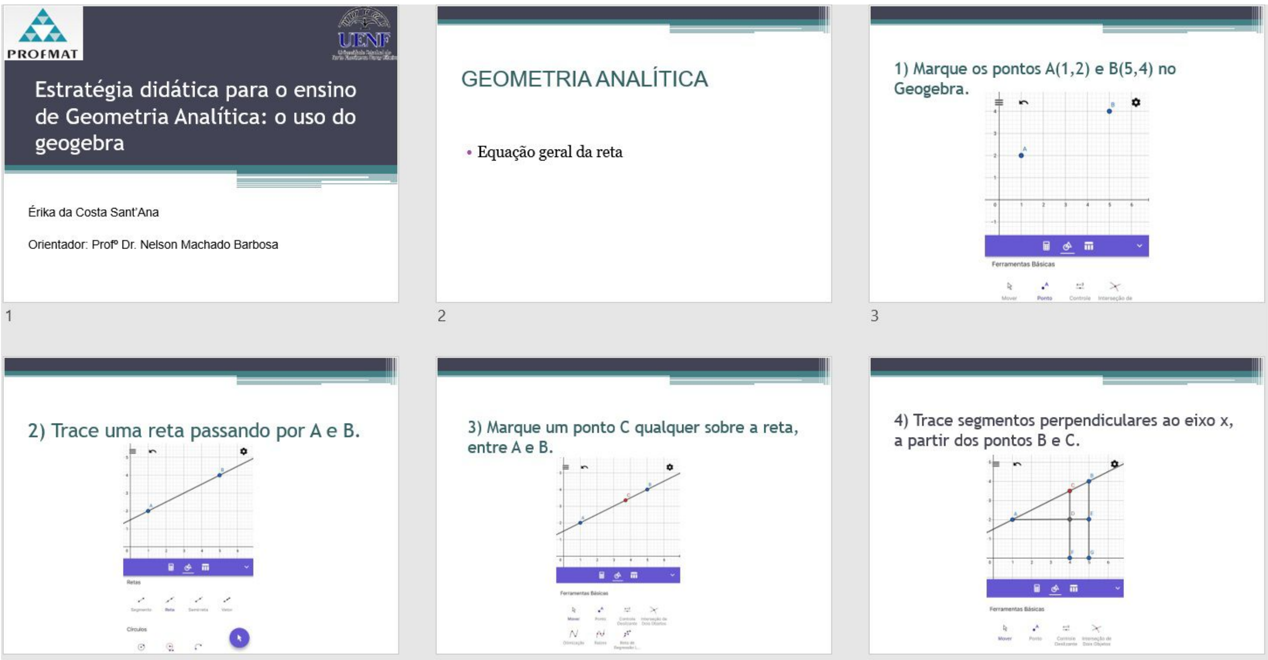
Agora sem utilizar o GeoGebra, resolva as questões abaixo.

1) Determine as coordenadas do ponto médio dos segmentos com extremidades nos pontos abaixo:
   a) A(5,2) e B(7,3)
   b) C(-8,5) e D(4,3)
   c) E(0,6) e F(1,-3)
2) Verifique se os pontos são colineares.
   a) A(7,3), B(0,1) e C(-2,4)
   b) D(0,5), E(1,3) e F(2,1)
   c) G(2,5), H (3,7) e I (5,11)
3) Determine o valor de x para que os pontos A (2,2), B (-3,-1) e C (-3,x) estejam alinhados.

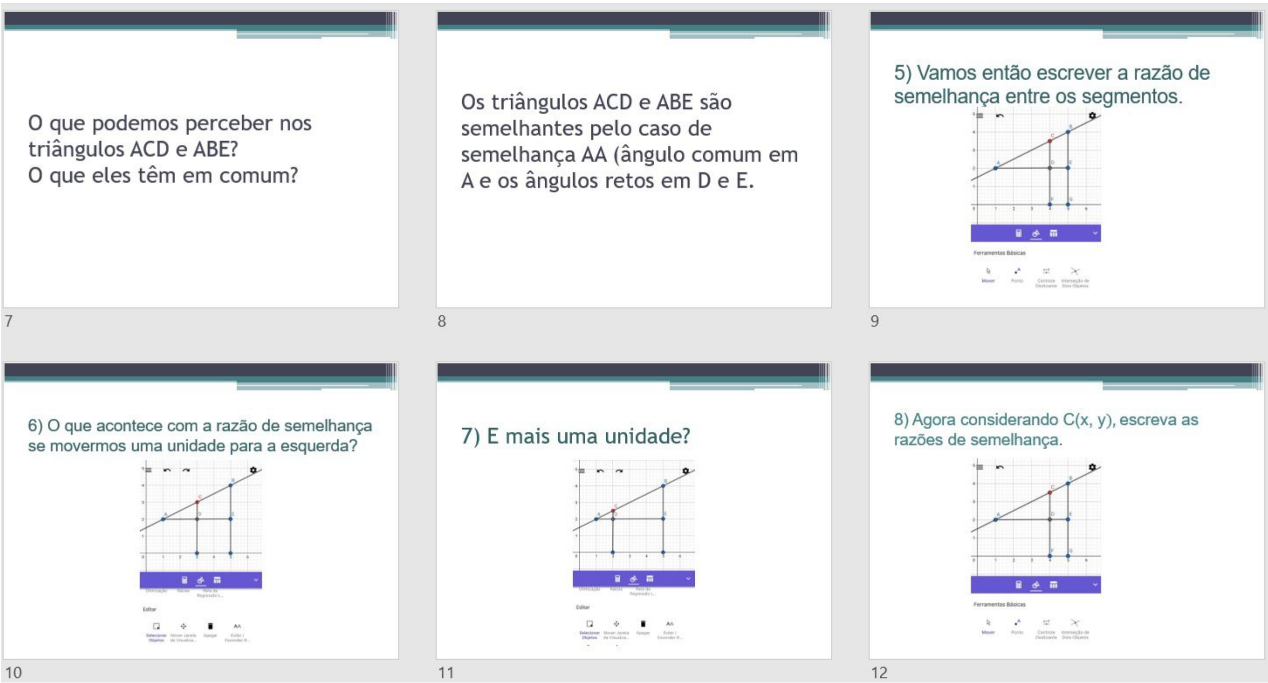
APÊNDICE E

Aula 3: Equação Geral e Reduzida da Reta

E.1 Aula Expositiva 3



E.2 Aula Expositiva 3 Parte 2



E.3 Ficha de Atividades 1

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

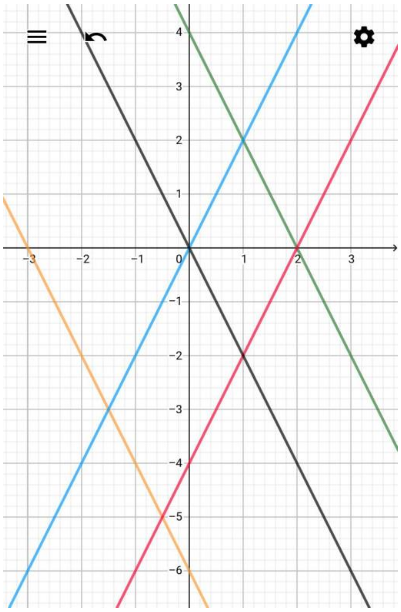
Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:______________________________ Turma:_______ Data:____/____/___

Atividades Aula 3- Equação geral e reduzida da reta

1) (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)
No réveillon de Copacabana, imagine que alguns raios de luz estão num mesmo plano e podem ser descritos pelo esboço gráfico a seguir.



a) Complete a tabela abaixo adequadamente e escreva uma equação geral de cada uma dessas retas, a partir dos pontos em que cada uma delas corta os eixos coordenados e, um outro ponto, se for preciso:

COR DA RETA	ENCONTRO COM EIXO X	ENCONTRO COM EIXO Y	UM OUTRO PONTO, SE FOR PRECISO
r_1	(-3,0)	(0,-6)	
r_2			
r_3			
r_4			
r_5			

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro — PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática — SBM Sociedade Brasileira de Matemática

COR DO GRÁFICO	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	EQUAÇÃO GERAL DA RETA
r_1	(-3,0)	(0,-6)	
r_2			
r_3			
r_4			
r_5			

____
____
____
____
____
____
____

b) Se você escrever essas mesmas equações, calculando y como uma função de x, você vai obter o que se chama equação reduzida de cada uma dessas retas. Vá em frente e complete a tabela:

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO GERAL DA RETA	EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA
r_1		
r_2		
r_3		
r_4		
r_5		

c) E, agora, pense no seguinte: você já sabe que a equação geral da reta é $ax + by + c = 0$. Conhecendo uma equação geral de uma reta, você pode escrever a sua equação reduzida? Justifique sua resposta.

____
____
____
____

E.4 Ficha de Atividades 2

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:______________________________Turma:________Data:____/____/____

Atividade 2 Aula 3- Equação geral e reduzida da reta

Questão (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

Você vai agora analisar o papel de cada um dos coeficientes m, n na equação reduzida, y = mx + n e verificar as suas conclusões nas cinco retas estudadas na primeira etapa. Para isso, responda às seguintes perguntas:

a. Fazendo x = 0 na equação y = mx + n, qual é o valor correspondente de y?

____

____

b. O que se pode dizer sobre a localização de um ponto (0,y)?

____

____

c. Quais são, portanto, as coordenadas do ponto em que a reta de equação y = mx + n corta o eixo y?

____

____

d. Complete a tabela a seguir e confira suas respostas com os gráficos da Primeira Etapa:

COR DO GRÁFICO	EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA	Se x = 0, y =	Ponto de encontro da reta com o eixo y	Verifiquei no gráfico
r_1	y = – 2x – 6	-6	(0,-6)	✓
r_2	y = – 2x + 4			
r_3	y = 2x			
r_4	y = 2x – 4			
r_5	y = – 2x			

e. Observe que, na expressão y = mx + n, o valor de x está sendo multiplicado pelo número m. Então, se você parte de um valor de x e soma 1 a esse valor, o valor de y vai ficar modificado também. Complete a tabela a seguir, a partir desta observação:

COR DO GRÁFICO	**EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA**	**Somando 1 a x:**	**y vai sofrer um acréscimo igual a**
r_1	y = – 2x – 6	y = – 2 (x + 1) – 6 = **(– 2x – 6)** – 2	– 2
r_2	y = – 2x + 4		
r_3	y = 2x	y = 2 (x + 1) = **(2x)** + 2	2
r_4	y = 2x – 4	y = 2 (x + 1) – 4 = **(2x – 4)** + 2	2
r_5	y = – 2x		

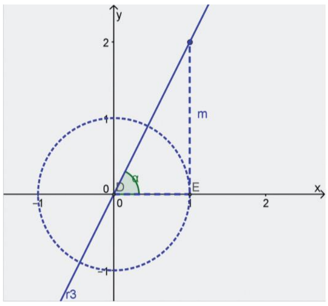
f. (ESSA QUESTÃO DEVERÁ SER REALIZADA NO GEOGEBRA)
Agora, observe o que isso acarreta no gráfico cartesiano. Pegue um ponto de r_1 e dê um acréscimo igual a 1 a x e o respectivo acréscimo a y para voltar a um ponto da reta. Repita o procedimento com um ponto da reta r_3 e compare os dois casos.

____
____
____
____

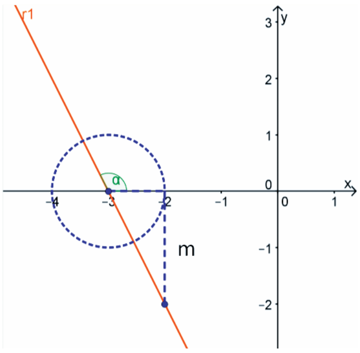
g. Qual a conclusão que você pode tirar sobre a influência do sinal de m sobre a reta r de equação y = mx + n?

____
____
____

h. Se as unidades nos dois eixos são as mesmas e se m ≠ 0, você pode calcular o valor de m observando a reta de equação y = mx + n e o ângulo α, formado pela reta e pelo eixo dos x. O ângulo α é aquele com vértice no encontro da reta com o eixo x, formado pelo semieixo das abscissas maiores do que a abscissa do vértice e a parte da reta cujos pontos têm ordenadas positivas (a semirreta que fica acima do eixo x). Examine os casos em que m > 0 e m < 0, desenhados a seguir, lembre-se da trigonometria no círculo e veja qual a relação entre m e o ângulo α.
Na reta r_3:
m > 0



E, na reta r1:
m < 0



i. E se m = 0, o que acontece com a reta?

E.5 Ficha de Atividades 3

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro — PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática — SBM Sociedade Brasileira de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

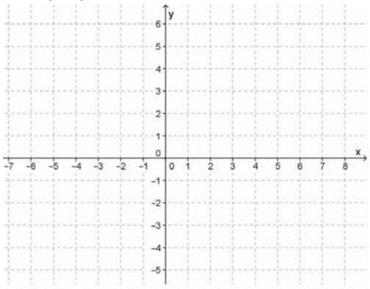
Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:____________________________ Turma:_______ Data:___/___/___

Atividade 3 Aula 3- Equação geral e reduzida da reta

Questão 1 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

Desenhe, no plano cartesiano a seguir, o esboço da reta de equação y = 2x + 3 e explique como você encontrou essa reta.



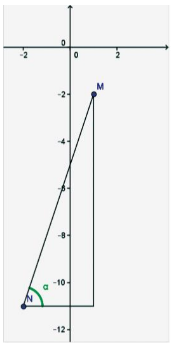
Questão 2 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

A equação da reta na forma reduzida que passa pelo ponto (– 2, – 3) e tem inclinação igual a – 2 é

a. y = – 2x – 7
b. y = – 2x – 3
c. y = – x – 5
d. y = – 2x – 2
e. y = – 2x + 7

Questão 3 (Saerjinho, 3ª série, 3º bimestre de 2011)

A expressão algébrica da reta que passa pelos pontos M (1, – 2) e N (– 2, – 11) é



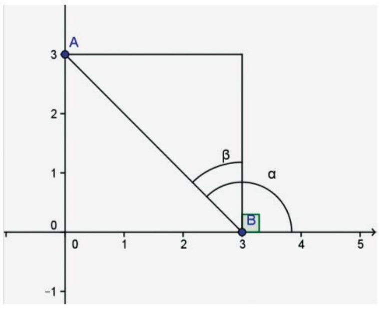
a. y = 3x – 5
b. y = – 5x + 3
c. y = 3x + 1
d. $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$
e. $y = \frac{5x}{3} + \frac{1}{3}$

Questão 4 (PUC – RJ) As retas dadas pelas equações x + 3 y = 3 e 2 x + y = 1 se intersectam:

a. em nenhum ponto;
b. num ponto da reta x = 0;
c. num ponto da reta y = 0;
d. no ponto (3, 0);
e. no ponto ($\frac{1}{2}$, 0).

Questão 5 (FGV–SP) A inclinação do segmento de reta que passa pelos pontos A(0,3) e B (3, 0) é:

a. 1
b. – 1
c. 0
d. 3
e. – 3



APÊNDICE F

Aula 4: Posição relativa entre duas retas

F.1 Ficha de Atividades 1

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro — PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática — SBM Sociedade Brasileira de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:_____________________________ Turma:_______ Data:___/___/___

Atividade 1 Aula 4- Posição relativa entre duas retas

Questão 1 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

Numa caminhada pela Via Lagos, dois estudantes decidiram medir a distâncias que cada um percorreria, a partir do ponto inicial da via. O tempo t seria contado a partir de um instante em que ambos já tivessem atingido a velocidade de percurso que seria mantida por algum tempo. Fred percebeu que, enquanto mantivesse essa velocidade, a distância ao ponto inicial podia ser descrita pela equação:

$s = 5t + 0,7$.

Já seu amigo Hulk identificou que a equação relativa à sua caminhada nesse mesmo intervalo era:

$s = 5t + 1,2$,

onde s é dada em kilômetros e t em horas.

Será que Fred e Hulk se encontraram nesse intervalo de tempo? Justifique sua resposta, esboçando no mesmo sistema de coordenadas (GeoGebra) o gráfico de s em função de t, definida em cada uma dessas equações.

Questão 2

No GeoGebra, faça os seguintes procedimentos:

a) A (-2,0), B (0,4), C(0,-4) e D(1,-2).
b) Em seguida trace as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.
c) Meça os ângulos formados por essas retas com o eixo das abscissas e anote.

d) Qual a posição relativa entre essas duas retas?

e) Escreva as equações das retas obtidas. O que elas têm em comum?

f) Digite a reta r: $y = 2x + c$ e utilizando o controle deslizante, anote o que observa.

Questão 3 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)
Analise agora, as várias equações de retas apresentadas a seguir e identifique aquelas que são paralelas entre si:

$$f: y = \frac{1}{2}x \qquad g: y = 5 \qquad h: y = x - 3 \qquad r: y = -3 \qquad s: y = 3 - x$$

$$t: y = 2 + x \qquad u: y = -\frac{3}{5}x \qquad v: y = 5 + x \qquad w: y = \frac{x - 3}{2}$$

Questão 4 (Saerjinho, 3ª série, 3º bimestre de 2011)
A exemplo das questões anteriores, como você enuncia a condição para verificar se duas retas são paralelas a partir de suas equações reduzidas
$y = m_1 x + n_1$ e $y = m_2 x + n_2$?
Por quê?

F.2 Ficha de Atividades 2

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro — PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática — SBM Sociedade Brasileira de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:____________________________ Turma:_______ Data:___/___/___

Atividade 2 Aula 4- Posição relativa entre duas retas

Questão 1 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

Entusiasmadas com a experiência dos colegas, Marta e Érika, resolveram estabelecer sua caminhada na mesma estrada, de modo que a relação entre a distância y e o tempo x, definidos como na questão da atividade anterior, fosse também dada por equações.

Marta afirmou que as equações que permitiriam que elas não se encontrassem seriam:

$2x - y + 1 = 0$ e $x - 2y + 4 = 0$.

E Érika discordou, sugerindo as equações:

$2x - y + 1 = 0$ e $2x - y + 4 = 0$.

Pergunta:

Qual das duas sugeriu equações de retas paralelas de modo que não haja mesmo perigo de encontro? Justifique sua resposta, esboçando no mesmo sistema de coordenadas (GeoGebra) o gráfico de y em função de x, definida em cada uma dessas equações.

Questão 2

Escreva as equações da questão 1 na forma reduzida, observe e anote o que elas têm em comum.

Questão 3 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

E qual é a condição de paralelismo a partir de equações gerais de duas retas:
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$?

F.3 Ficha de Atividades 3

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Mestranda Pesquisadora: Érika da Costa Sant'Ana

Orientador: Nelson Machado Barbosa

Aluno:______________________________Turma:_______Data:___/___/___

Atividade 3 Aula 4- Posição relativa entre duas retas

Questão 1 (Projeto Reforço Escolar- SEEduc- RJ)

"Seu" Badu deseja comprar um terreno de esquina para construir sua loja, mas ele quer um terreno que tenha os quatro ângulos retos. A região em que o "seu" Badu quer construir sua loja tem ruas que podem ser descritas num sistema plano de coordenadas pelas seguintes equações:

$$r: x = 4 \qquad s: y = \frac{x}{5} + 4 \qquad t: y = x \qquad u: y = -x + 5$$

$$v: y = -5x - 4 \qquad w: y = 3$$

Quais são os pares de ruas perpendiculares para que o "seu" Badu possa comprar terrenos com ângulos retos?

Nota: as ruas da cidade do "seu" Badu não são retas, muito menos infinitas, mas o mapa do bairro onde ele quer construir se parece bem com uma região em que essas retas se cruzam.

a. Construa, no GeoGebra, cada uma das retas e identifique as retas que atendem às exigências do "seu" Badu.

b. Agrupe as equações das retas perpendiculares entre si e analise os seus coeficientes angulares. Anote.

Questão 2

Combinando esses resultados, você terá as condições de perpendicularismo entre retas dadas por equações reduzidas num plano coordenado. Considere as retas
de equações

$$y = m_1 x + n_1 \ \ e \ \ y = m_2 x + n_2$$