



**Universidade Federal do Rio de Janeiro**  
**Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza**  
**Instituto de Matemática da UFRJ**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT**

**Marcelo da Silva Gomes**

**USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:  
UMA PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO COGNITIVO**



Rio de Janeiro - RJ  
2019

## CIP - Catalogação na Publicação

S633u Silva Gomes, Marcelo da  
Uso de materiais manipuláveis na resolução de problemas: uma proposta para o desenvolvimento cognitivo. / Marcelo da Silva Gomes. -- Rio de Janeiro, 2019.  
87 f.

Orientador: Angela Cassia Biazutti.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.

1. Educação matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Materiais manipuláveis. 4. Desenvolvimento cognitivo. 5. Adolescente. I. Biazutti, Angela Cassia, orient. II. Título.

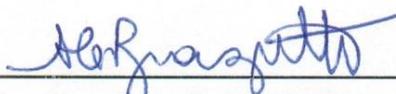
**Marcelo da Silva Gomes**

**USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:  
UMA PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO COGNITIVO**

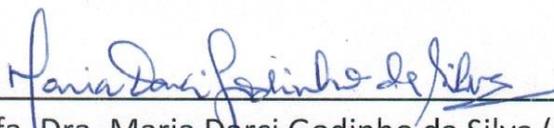
Trabalho de Conclusão de Curso do  
Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional, apresentado a Universidade  
Federal do Rio de Janeiro como requisito  
final para a obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

**Orientadora: Profa. Dra. Angela Cássia Biazutti**

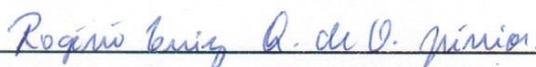
**Membros da Banca**



\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Angela Cassia Biazutti (IM-UFRJ)



\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Maria Darci Godinho da Silva (IM-UFRJ)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rogério Luiz Quintino de Oliveira Jr. (IME-UERJ)

*Dedico essa obra à minha esposa e filhos  
que estiveram ao meu lado, me sustentando  
e suportando minhas ausências.*

*“Tudo quanto te vier à mão para fazer,  
faze-o conforme as tuas forças,  
porque na sepultura, para onde tu vais,  
não há obra nem projeto,  
nem conhecimento, nem sabedoria alguma”.*

*Eclesiastes 9:10*

## **AGRADECIMENTOS**

À minha orientadora, professora Angela Biazutti, pela confiança, paciência, colaboração e por todo seu apoio na elaboração deste trabalho.

A esta universidade, com seu espetacular corpo docente, direção e administração que me deram a oportunidade de expandir meu horizonte.

À minha amada esposa, Denise Gomes, por me compreender e estar ao meu lado todo tempo.

Aos meus filhos Pedro Gomes e Miguel Gomes, por serem as principais motivações de meus esforços.

Aos meus amigos, por todo o apoio, incentivo, companheirismo e colaboração nos momentos necessários.

A todos os meus alunos que permitem que eu me entusiasme diariamente.

E a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte de minha formação e contribuíram para essa dissertação.

Agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) para a realização deste trabalho.

## Resumo

O tema deste trabalho foi motivado por uma reflexão pessoal sobre o ensino da Matemática para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. As propostas educacionais tradicionais não priorizam o pensamento criativo dos alunos, nem o desenvolvimento de argumentação lógica. Por outro lado, as avaliações envolvem demonstrar capacidade para resolver problemas, utilizando o conhecimento matemático de forma lógica. É desta forma que se verifica que a aprendizagem de Matemática realmente ocorreu. O que poderia ser feito para ajudar os alunos a atingir este objetivo?

Neste trabalho, foi inicialmente averiguada, através de um teste, a existência de condições cognitivas favoráveis ao desenvolvimento das habilidades indispensáveis aos alunos para a resolução de problemas, em sinergia com o uso de recursos diversificados. A partir daí, foram desenvolvidas atividades de resolução de problemas com objetivo de melhorar a capacidade dos alunos no enfrentamento deles, tanto sozinhos como em grupos, numa perspectiva inovadora, através do uso de materiais manipuláveis e integrada com o conhecimento da neurociência. Os problemas escolhidos foram selecionados dentre os da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Públicas), para o nível adequado aos alunos do 6º ano, pelo seu caráter desafiador.

Antes e depois da realização das atividades, foi aplicado um teste, cujos resultados permitiram concluir que este tipo de atividades é realmente positivo para ajudar os alunos no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, tornando possível a eles exercer de forma completa, consciente e responsável sua cidadania.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Ensino Fundamental; adolescente; resolução de problemas; materiais manipuláveis; desenvolvimento cognitivo.

## **Abstract**

The theme of this work was motivated by a reflection about the teaching of Mathematics to students of the 6th grade of Elementary School. The traditional educational proposals prioritize neither students' thinking and creative ability nor the development of logical argumentations. On the other side, evaluations are designed to demonstrate problem-solving capabilities, using the mathematical skills in a logical way. This verifies if the knowledge of Mathematics really happened. What could be done to help the students to achieve this aim?

In this work, it was first verified the existence of cognitive conditions favorable to the development of indispensable problem-solving skills in the students, in synergy with the use of diversified resources.

From this point on, there were developed activities, with the aim of improving the problem-solving ability of the students, both alone and in groups, in an innovative perspective, by making use of manipulable materials, and an integrated one with the knowledge of neuroscience. The problems were chosen from the OBMEP ones, for the 6<sup>th</sup> grade student level, because of their challenging features.

Before and after the activities, it was applied a test, whose results allowed the conclusion that these activities are really positive to help the students in the teaching-learning of Mathematics, enabling them to exercise their citizenship fully in a responsible, conscious and balanced manner.

**Keywords:** Mathematical education; Elementary School; problem solving; manipulable materials.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Questão 12 – OBMEP 2016 .....	48
Figura 02: Questão 05 – OBMEP 2015.....	48
Figura 03: Questão 07 – OBMEP 2015.....	48
Figura 04: Questão 06 – OBMEP 2017.....	49
Figura 05: Escala de Cuisenaire.....	56
Figura 06: Cartas numeradas.....	56
Figura 07: Questão 14 – OBMEP 2018.....	56
Figura 08: Geoplano .....	57
Figura 09: Quadrículas dupla face.....	58
Figura 10: Questão 13 – OBMEP 2016.....	58
Figura 11: Bolinhas coloridas.....	58
Figura 12: Questão 20 – OBMEP 2017.....	58
Figura 13: Questão 12 – OBMEP 2016.....	60
Figura 14: Questão 07 – OBMEP 2015.....	60
Figura 15: Questão 05 – OBMEP 2015.....	60
Figura 16: Questão 06 – OBMEP 2017.....	60
Figura 17: Aplicação do teste diagnóstico.....	60
Figura 18: Aplicação do teste diagnóstico.....	60
Figura 19: Aplicação do teste diagnóstico.....	61
Figura 20: Aplicação do teste diagnóstico.....	61
Figura 21: Oficinas de resolução de problemas.....	61
Figura 22: Oficinas de resolução de problemas.....	61
Figura 23: Oficinas de resolução de problemas.....	62
Figura 24: Oficinas de resolução de problemas.....	62
Figura 25: Oficinas de resolução de problemas.....	62
Figura 26: Oficinas de resolução de problemas.....	62
Figura 27: Oficinas de resolução de problemas.....	63
Figura 28: Oficinas de resolução de problemas.....	63
Figura 29: Oficinas de resolução de problemas.....	64
Figura 30: Oficinas de resolução de problemas.....	64

Figura 31: Dinâmica de resolução de problemas.....	65
Figura 32: Dinâmica de resolução de problemas.....	65
Figura 33: Oficinas de resolução de problemas.....	65
Figura 34: Oficinas de resolução de problemas.....	65
Figura 35: Oficinas de resolução de problemas.....	66
Figura 36: Aplicação do teste de avaliação.....	67
Figura 37: Aplicação do teste de avaliação.....	67
Figura 38: Aplicação do teste de avaliação.....	67
Figura 39: Aplicação do teste de avaliação.....	67
Figura 40: Comparativo de respostas dos alunos.....	74
Figura 41: Comparativo de respostas dos alunos.....	74
Figura 42: Comparativo de respostas dos alunos.....	74
Figura 43: Comparativo de respostas dos alunos.....	74
Figura 44: Comparativo de respostas dos alunos.....	75
Figura 45: Comparativo de respostas dos alunos.....	75
Figura 46: Comparativo de respostas dos alunos.....	76
Figura 47: Comparativo de respostas dos alunos.....	76
Figura 48: Comparativo de respostas dos alunos.....	76
Figura 49: Comparativo de respostas dos alunos.....	76
Figura 50: Comparativo de respostas dos alunos.....	77
Figura 51: Comparativo de respostas dos alunos.....	77
Figura 52: Comparativo de respostas dos alunos.....	78
Figura 53: Comparativo de respostas dos alunos.....	78
Figura 54: Comparativo de respostas dos alunos.....	79
Figura 55: Comparativo de respostas dos alunos.....	79
Figura 56: Comparativo de respostas dos alunos.....	80
Figura 57: Comparativo de respostas dos alunos.....	80

## LISTA DE GRÁFICOS E TABELAS

Gráfico 01: Reclassificação das questões.....	68
Gráfico 02: Resultado do teste diagnóstico – Questão 01.....	69
Gráfico 03: Resultado do teste de avaliação – Questão 01.....	69
Gráfico 04: Resultado do teste diagnóstico – Questão 02.....	70
Gráfico 05: Resultado do teste de avaliação – Questão 02.....	70
Gráfico 06: Resultado do teste diagnóstico – Questão 03.....	71
Gráfico 07: Resultado do teste de avaliação – Questão 03.....	71
Gráfico 08: Resultado do teste diagnóstico – Questão 04.....	72
Gráfico 09: Resultado do teste de avaliação – Questão 04.....	72
Gráfico 10: Comparativo de acertos dos alunos .....	73
Tabela 01: Referencial BNCC Questão 12 OBMEP 2016.....	48
Tabela 02: Referencial BNCC Questão 05 OBMEP 2015.....	48
Tabela 03: Referencial BNCC Questão 07 OBMEP 2015.....	48
Tabela 04: Referencial BNCC Questão 06 OBMEP 2017.....	49
Tabela 05 – Cronograma de execução .....	68

## SUMÁRIO

<b>Introdução .....</b>	<b>11</b>
<b>1. O aluno do 6º ano .....</b>	<b>14</b>
1.1 – <i>O aluno adolescente .....</i>	15
1.2 - <i>Condições cognitivas para resolver problemas .....</i>	20
<b>2. A Resolução de Problemas .....</b>	<b>27</b>
2.1 – <i>A leitura na Resolução de Problemas.....</i>	27
2.2 – <i>A Resolução de Problemas como estratégia de ensino .....</i>	37
2.3 – <i>Os Problemas nas provas da OBMEP .....</i>	46
<b>3. Os materiais manipuláveis .....</b>	<b>51</b>
3.1 – <i>Os materiais manipuláveis escolhidos para as atividades.....</i>	54
<b>4. Atividades experimentais e seus resultados.....</b>	<b>59</b>
4.1 – <i>O Teste Diagnóstico .....</i>	59
4.2 – <i>As Oficinas de Resolução de Problemas.....</i>	61
4.3 – <i>O Teste de Avaliação .....</i>	66
4.4 – <i>Análise quantitativa dos resultados.....</i>	68
4.5 – <i>Análise qualitativa dos resultados.....</i>	73
<b>5. Considerações Finais .....</b>	<b>82</b>
<b>Referências .....</b>	<b>86</b>

## INTRODUÇÃO

Na escola, os alunos passam a maior parte do tempo fazendo atividades obrigatórias sem ter qualquer interesse nestas atividades. É fácil observar que essas condições não garantem motivação suficiente para que os alunos aprendam de forma eficiente, principalmente quando se trata de alunos na fase da adolescência.

Normalmente, nos livros didáticos as atividades propostas não favorecem o protagonismo dos alunos para que possam promover capacidades básicas para o seu crescimento na Matemática como inferir, conjecturar, argumentar e, portanto, não provocam um interesse genuíno por essa ciência.

Para uma grande parcela dos alunos, o processo de escolarização não tem efeito sobre o seu cotidiano. Neste contexto, eles não percebem a relação entre o que é apresentado na escola e o que eles vivem fora deste universo.

Os alunos cumprem o que se manda, fazem coisas sem sentido, que acreditam estarem certas porque receberam tais informações de fonte segura, ou seja, do professor, em geral.

Neste contexto, o estudante não exerce, devidamente, sua capacidade de decisão, ainda que essa seja uma capacidade essencial para a realização de atividades matemáticas com compreensão.

Vale ressaltar que, quando os alunos são avaliados com testes para averiguação dos resultados do processo educacional e formativo dos indivíduos, devem demonstrar capacidade para resolver problemas e de pensamento lógico matemático que nem sempre são priorizados durante a sua vida escolar.

Pesquisas diversas da área de ensino da Matemática apontam que os conteúdos de aprendizagem devem ir além dos domínios dos conceitos e devem atingir meios de ampliar as capacidades e atitudes.

Os PCN afirmam que:

O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.  
(BRASIL,2000 P.19)

Nesse sentido, o aluno adolescente deve aprender a montar estratégias, raciocinar logicamente e ser capaz de estabelecer conexões sistêmicas que favoreçam um amadurecimento de suas estruturas cognitivas.

Pensando desta forma, é possível inferir que um ambiente lúdico pode ser o ideal para que o aluno adolescente experimente uma vivência de aprendizagem com leveza.

Com o objetivo de proporcionar melhores condições para ocorrer aprendizagem de Matemática entre alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola de uma cidade no interior do Rio de Janeiro sem muitos recursos disponíveis, da forma mais suave e empolgante possível, passamos a investigar outras maneiras de ensinar e de treinar o cérebro para atingir um desenvolvimento com um menor índice de frustrações, o que nos levou a considerar o grande potencial de materiais manipuláveis, por serem baseados em vivências mais realistas, permitindo novas experimentações e ampliando as possibilidades de abordagens no ensino de Matemática.

Observamos que os materiais manipuláveis eram utilizados por uma professora que trabalhava com treinamento para as provas da OBMEP, mas não havia sido feita uma experimentação baseado nos métodos científicos.

No capítulo 1 deste trabalho, foram pesquisados os alunos do 6º ano, sob o ponto de vista social, educacional, físico e mental, de modo a escolher uma boa estratégia com vistas a ampliar o índice de aprendizagem entre esses alunos.

No capítulo 2, apresentamos a resolução de problemas como a abordagem pedagógica de ensino da Matemática mais adequada ao objetivo proposto. Observamos em diversas literaturas que este tipo de abordagem tem por característica ser provocadora do pensamento lógico dedutivo, do desenvolvimento da leitura proficiente para resolução de problemas e, conseqüentemente, traz uma condição ideal para trabalhar o pensamento autônomo do estudante.

Numa análise bem detalhada, comparamos as questões da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBMEP) com os objetivos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para o ensino da Matemática destinados aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e concluímos que os problemas apresentados nestas provas são adequados e apresentam-se plenamente dentro da estratégia de resolução de problemas, do ponto de vista de serem intrigantes e desafiantes. Neste sentido, elegemos as questões da OBMEP como aquelas que vão trazer o desafio na dose ideal para o aluno do 6º ano do Ensino Fundamental.

No capítulo 3, detalhamos a proposta de utilização de materiais manipuláveis como auxílio na resolução de problemas das provas da OBMEP e descrevemos os materiais selecionados para as atividades experimentais.

No capítulo 4, apresentamos as atividades experimentais, que consistiram de um teste diagnóstico, oficinas de resolução de problemas com auxílio de materiais manipuláveis e um teste avaliativo com as mesmas questões do teste diagnóstico para comparar o resultado dos alunos antes e depois da realização das oficinas. Finalmente, são apresentadas as análises quantitativa e qualitativa dos resultados dos alunos nos dois testes.

Buscamos responder de uma forma positiva se o uso de materiais manipuláveis trazem benefícios relevantes para o ambiente pedagógico, ou seja, obter recursos que possibilitem às escolas públicas promover o desenvolvimento cognitivo dos alunos, nesta fase escolar, de modo que estes possam atingir o grau de maturidade em resolução de problemas apontado como objetivo da aprendizagem pelos PCN e BNCC e, além disso, construir um ambiente funcional necessário para um bom resultado nas provas da OBMEP.

Nas considerações finais, são apresentadas algumas conclusões preliminares extraídas do resultado das atividades experimentais, que apontam fortemente para que o uso dos materiais manipuláveis se torne ferramenta de apoio ao ensino da Matemática para que os alunos evoluam em sua capacidade de resolver problemas.

## **CAPÍTULO 1**

### **O ALUNO DO 6º ANO**

Para favorecer o desenvolvimento de habilidades em técnicas e argumentações matemáticas nos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, turma 601, de uma escola localizada no Sul Fluminense do Estado do rio de janeiro, no contexto de resolução de problemas, surgiu a ideia de usar materiais manipuláveis como elementos facilitadores da compreensão dos problemas e de suas soluções. Seriam instrumentos capazes de ampliar a percepção desta turma nesse contexto.

No entanto, era de suma importância ter mais conhecimento acerca das condições sociais e cognitivas dos alunos que se encontram nessa fase de escolaridade para que pudéssemos nos aproximar da realidade desses indivíduos.

Dessa forma, este capítulo se dedica à caracterização do aluno alvo da pesquisa que foi o ponto de partida deste trabalho, pois assim todas as propostas aqui apresentadas adquirem maior validade.

Para dar sustentação à pesquisa é necessário observar o universo destes adolescentes pelas mais variadas situações que impactam direta e indiretamente no processo de formação dos indivíduos. Pensando desta maneira, trouxemos para este capítulo algumas considerações originárias de observações do ambiente escolar, da vida em sociedade e descobertas do campo da neurociência na formação cognitiva do indivíduo, tanto nas aplicações no processo de educação quanto na formação da pessoa humana como um todo.

No campo educacional e social, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, a Base Nacional Curricular Comum- BNCC, e as estruturas legais, Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA, que tratam especificamente das relações sociais destes indivíduos, trazem considerações relevantes sobre o universo adolescente que nortearam uma parte significativa do trabalho.

Mais adiante apresentamos as condições cognitivas baseadas em pesquisas do campo da neurociência que ampliam o conhecimento acerca do aluno adolescente por uma ótica de estruturas cognitivas.

Buscamos embasamento em obras como as de COSENZA (2011) e WILLINGHAM (2011), que tratam do assunto por óticas diferentes, porém ambas

voltadas para produzir uma melhor compreensão acerca do funcionamento do cérebro humano, visando uma transformação do fazer pedagógico em sala de aula.

Partindo do princípio de que esta dissertação teve como proposta apresentar estratégias para auxiliar no ensino de Matemática por meio de resolução de problemas, todos os esforços são para apresentar as condições cognitivas dos adolescentes e de seu ambiente visando uma melhor adaptação das estratégias pretendidas.

Passamos a analisar o ambiente escolar onde encontramos diversos desafios para o estudante nesta etapa de sua vida acadêmica.

## **1.1- O ALUNO ADOLESCENTE**

Uma das questões de extrema relevância que impacta fortemente no comportamento dos alunos nessa fase de sua vida social e acadêmica se deve à diversidade encontrada em uma sala de aula. Esta turma constitui um ambiente de convivência entre alunos com idades entre 10 e 12 anos, estes em idade própria, com características muitas vezes ainda bastante infantis, e alunos mais velhos, que já passaram por uma ou várias experiências de reprovação ou de interrupção dos estudos.

Nesta etapa da vida, ocorrem diversas transformações comportamentais motivadas pelas alterações de ordem fisiológicas das mais variadas origens que, à medida que o tempo passa, geram, dentro do ambiente da sala de aula, uma diversidade comportamental de tamanho difícil de mensurar.

Cabe ressaltar que, em paralelo às mudanças do organismo, a passagem para essa fase da escolarização marca o início da convivência do aluno com uma nova organização escolar à qual não está habituado, na qual deverá se adaptar às diferentes concepções impostas pela nova realidade. Uma das modificações importantes é a organização curricular em que os conhecimentos passam a ser divididos em disciplinas abordadas de forma isolada por professores especialistas, que trazem suas concepções de ensino, abordagens de conteúdo de acordo com as perspectivas de cada docente, com temperamentos distintos para lidar com a indisciplina, entre outras diferenças inerentes ao próprio fazer pedagógico. Essas mudanças trazem, para os alunos, um aumento crescente de pressões e exigências.

A relação dos alunos com os conteúdos abordados nessa fase escolar também requer uma observação mais detalhada. No caso da Matemática, de acordo com os PCN,

os livros didáticos fazem uma abordagem de conteúdos que já foram experimentados em séries anteriores pelos alunos e são comumente apresentados como se fosse uma revisão de tudo que o aluno já viu no Ensino Fundamental I. Geralmente, constata-se que os alunos não possuem o domínio desejável desses conteúdos e acontece uma retomada dos objetos de estudo para suprir as carências encontradas. Essa retomada acontece na forma de uma revisão reiterada de tópicos com as mesmas estratégias já experimentadas com os alunos. Normalmente, as estratégias são apontadas pelos livros didáticos e pouco diferem uns dos outros mesmo que sejam recomendadas para séries diferentes.

De acordo com os PCN, isso causa grande desinteresse nos alunos de modo que o estudo repetitivo da maioria dos conteúdos com aulas reiteradas, contribui para o fracasso escolar comprovado pelos elevados índices de retenção que aparecem nessa fase de escolaridade.

A Matemática começa, desse modo, a se configurar para os alunos como algo que foge à sua possibilidade de compreensão, que é de pouca utilidade prática, gerando representações e sentimentos que vão se concretizar muitas vezes no divórcio entre aluno e conhecimento matemático. (BRASIL, 2000 P.62)

De acordo com COSENZA (2011), o treino e a repetição favorecem a aprendizagem e podem levar à criação de novas sinapses e à facilitação do fluxo da informação dentro de um circuito nervoso.

No entanto, WILLINGHAM (2011) adverte que os professores devem reconsiderar o jeito pelo qual encorajam seus alunos a pensar, de modo a maximizar a probabilidade de que o façam de maneira que estes possam obter o prazer que vem do pensamento bem-sucedido, condição fundamental para garantir uma perspectiva de resultados satisfatórios.

Segundo o autor, a repetição ajuda na aprendizagem, mas não é possível colocar tal concepção em prática simplesmente fazendo com que os alunos repitam procedimentos até que o processo tenha sido dominado. A repetição beneficia a aprendizagem, porém prejudica terrivelmente a motivação. Com repetição demais, a motivação se esvai, os alunos param de tentar e nenhuma aprendizagem se realiza.

Do ponto de vista social, podemos observar que há uma grande preocupação quando o indivíduo atinge esta etapa de sua vida. Isso também ajuda a explicar o porquê

de se estabelecer um estatuto como legislação específica para regular a condição de vida deste grupo da sociedade.

De acordo com o Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA (1990), para o convívio social, “considera-se criança, para os efeitos desta Lei, a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade”. (BRASIL, 1990)

O aluno do 6º ano de escolaridade, se estiver na série própria, encontra-se exatamente na transição entre a infância e a adolescência, entre 10 e 12 anos de idade, e precisa de uma atenção especial por estar rompendo com uma condição infantil passando para uma condição mais próxima da vida adulta. Tal rompimento nem sempre se dá de forma tranquila, geralmente ocorrem algumas crises, principalmente no ambiente familiar, que podem ser extremamente prejudiciais ao desenvolvimento do indivíduo.

O ECA visa garantir à criança e ao adolescente direitos fundamentais, a proteção necessária capaz de assegurar todas as oportunidades e facilidades, com a finalidade de que estes obtenham um desenvolvimento físico, mental, moral, espiritual e social digno. Além disso atribui responsabilidades à família, ao poder público bem como à comunidade em que está inserido, ou seja, toda a sociedade é responsabilizada por assegurar a efetivação dos direitos à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao esporte, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária. (BRASIL, 1990)

É possível inferir que uma das motivações que levaram à criação de regras específicas para lidar com essa parcela da sociedade tenha sido o fato de que, a forma como os adolescentes são tratados influencia o desenvolvimento social e psicológico destes de maneira marcante, determinando a condição em que se dará sua inserção na sociedade na fase adulta.

As mudanças típicas da adolescência se iniciam, em média, em uma idade específica, como já apontado pela ECA, mas não há um padrão para que se possa definir estratégias comuns para lidar com essa situação. Embora seja possível observar características próprias da puberdade, em nenhuma outra fase da vida há uma variação tão grande entre pessoas da mesma idade como na adolescência. Isso acontece, principalmente, porque o desenvolvimento físico, o social e o cognitivo não ocorrem no mesmo ritmo.

Infelizmente isso não é de conhecimento comum, ou seja, de um modo geral as pessoas não têm um conhecimento razoável acerca das especificidades que atingem esses

indivíduos nessa fase da vida. Desta forma, a sociedade reage de forma diferente com cada indivíduo levando em conta o desenvolvimento visível da pessoa, aqueles que aparentam ou trazem características de mais velhos, tendem a ser tratados como mais velhos e vice-versa, ainda que tais características não definam a condição psíquica deste adolescente. Neste contexto, caso o acesso aos meios de aferir as condições psíquicas dos adolescentes fossem de conhecimento público, teríamos uma melhor compreensão desses indivíduos, uma compreensão que extrapola as aparências e estereótipos, fazendo emergir o conhecimento acerca destes e nos levando a perceber mais facilmente condições importantes como os casos de adolescentes com desenvolvimento retardado, com tendência a desenvolver certa instabilidade emocional, bem como insatisfações com a autoimagem, a não aceitação de responsabilidades incutidas, inseguranças em relacionamentos ou casos de desenvolvimento acelerado, que apresentam riscos de problemas com drogas e tendem a desafiar comportamentos sociais.

Por estes motivos, há uma quantidade significativa de trabalhos, como as cartilhas: “O ECA nas Escolas”, disponível no portal do MEC, que visam o esclarecimento dos atores da sociedade e dos próprios adolescentes para tentar reduzir os riscos inerentes dessa fase.

Como visto, esses adolescentes passam por significativas mudanças que interferem em seu desenvolvimento e impactam fortemente no seu comportamento, trazendo preocupações aos pais e educadores relacionadas ao futuro do educando do ponto de vista da convivência social.

Tais preocupações, de acordo com COSENZA (2011), decorrem principalmente porque, professores e pais, não são como psicólogos, neurologistas ou psiquiatras, apesar de trabalharem com o cérebro, pois não conhecem o funcionamento cerebral. Ainda que tenham a missão de intervir em sua formação, visando seu bom funcionamento e, naturalmente, contribuindo para a organização do sistema nervoso do aprendiz, sendo os principais responsáveis pelos comportamentos que ele apresentará durante a vida, não possuem um conhecimento razoável do assunto.

No ambiente social e escolar, é também nesta fase que se intensifica a capacidade para questionar, criticar, o que leva a colocar em dúvida a importância de certos valores, atitudes e comportamentos e, inclusive, a necessidade de certas aprendizagens. Normalmente, esse comportamento costuma ser interpretado como falta de respeito, gerando conflitos no relacionamento entre pais e filhos, professores e alunos. Tais comportamentos causam decepção aos adultos, que esperam dos adolescentes mais

autonomia, maior capacidade de organização e maturidade. Porém, nota-se que a fase da adolescência é um marco em que se abre uma janela de oportunidade para o desenvolvimento dos alunos, pois, neste período de vida ampliam-se as capacidades para estabelecer inferências e conexões lógicas, que auxiliam na tomada de algumas decisões, para construir significados e ideias de maior complexidade, desenvolvendo a capacidade de argumentar e de expressar ideias e pontos de vista com algum nível de clareza. Outro aspecto que se evidencia é a maior possibilidade de compreender e utilizar recursos tecnológicos. No entanto, ocorre muitas vezes que esses alunos não conseguem exprimir suas ideias usando a linguagem adequada.

De acordo com os PCN, é nesse contexto que pais e professores ganham um papel fundamental, sendo responsáveis por direcionar para a aprendizagem toda a ebulição desse espírito questionador, promover estímulos para buscar explicações e finalidades para as coisas que ensinam, discutindo questões relativas à utilidade da Matemática e de outros saberes, como foram construídos, como podem contribuir para a solução tanto de problemas do cotidiano como de problemas ligados à investigação científica. Desta forma, os professores de Matemática poderão contribuir para que os alunos adolescentes ampliem os significados que já possuem acerca dos números e das operações, para que busquem relações existentes entre eles, aprimorem a capacidade de análise e de tomada de decisões, extrapolando limitações que, motivadas pela puberdade, começam a se manifestar. Neste contexto, o professor poderá criar as condições ideais para estimular o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Tais condições devem contribuir para a construção de significados dos recursos matemáticos conhecidos, levando em conta que é nesta fase em que o aluno adolescente está mais propenso a desenvolver processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas.

Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração inerente à fase adolescente, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas que consolidam a razão do saber matemático.

Segundo os PCN, o ambiente de aprendizagem referente à construção de um espaço empático também deve receber atenção especial levando em conta que, para atingir resultados relevantes no processo ensino-aprendizagem, as relações de confiança entre o aluno e o professor e entre os próprios alunos devem nortear o fazer pedagógico, construindo um ambiente em que a aprendizagem seja vivenciada como uma experiência

progressiva, interessante e formativa, apoiada na ação, na descoberta, na reflexão e na comunicação.

Assim, o professor deve organizar seu trabalho de modo que os alunos adolescentes desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares, na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

De acordo com os PCN, é fundamental que o aluno adolescente perceba a Matemática como uma estrutura constituída de um conjunto de técnicas e estratégias que podem ser aplicadas nos mais diversos contextos inclusive em outras áreas do conhecimento. Estes precisam desenvolver a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes situações, usando-as adequadamente no momento oportuno, reconhecendo a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la.

## **1.2- CONDIÇÕES COGNITIVAS PARA RESOLVER PROBLEMAS**

Incentivar o aluno adolescente a buscar solução de problemas, ajustando seus conhecimentos sobre táticas utilizadas em problemas já experimentados para construir modelos capazes de gerar interpretações e investigações motivadas por iniciativa do próprio aluno tende a desenvolver habilidades permanentes que perpetuarão por toda a vida deste estudante. Portanto, durante o ensino de Matemática, é preciso garantir que o aluno adolescente seja exposto a uma diversidade significativa de problemas, com maneiras distintas de abordagens de um mesmo problema para promover a experiência necessária que poderá garantir uma condição ideal para lidar com diversas situações-problema que surgirão.

É necessário que desenvolva a capacidade de pensar heurísticamente e se torne capaz de descobrir e ou inventar caminhos quando estiver em busca de respostas para questões complexas. Segundo POLYA (1977), a heurística é uma técnica de pensamento e comportamento, praticamente automática nos humanos, que agem de modo intuitivo e inconsciente para achar prováveis respostas para aquilo que procuram, mas é necessário que sejam estimulados a isso como um caminho mental usado para se chegar aos resultados de questões mais complicadas de modo rápido e simples. Neste contexto, a imaginação, a criatividade, o pensamento lateral e divergente, aliados às experiências de

vida própria ou observada são responsáveis por ajudar a formar os processos cognitivos da heurística. O método heurístico auxilia os alunos adolescentes a encontrarem as respostas sobre determinado assunto de forma autônoma.

Investigar meios de proporcionar uma condição de aprendizagem da Matemática, via resolução de problemas, atacando as dificuldades comportamentais dos alunos adolescentes é um grande desafio, no entanto, é vital para que o aluno evolua em seu processo de construção cognitiva. Neste sentido, passamos a refletir sobre os elementos que influenciam ou, até mesmo determinam o processo de desenvolvimento cognitivo e, portanto, seguiremos discutindo dentro da ótica da interação entre o organismo e o meio ambiente, observando quais as condições orgânicas, os valores e atitudes que os alunos precisam apresentar para resolver problemas.

Há muito o cérebro é reconhecido como a fonte de sentimentos como tristeza ou alegria, e que é através de seu funcionamento que somos capazes de pensar, de elaborar processos mentais como a atenção e a capacidade de julgamentos que são itens imprescindíveis para que possamos aprender ou modificar nosso comportamento à medida que vivemos.

De acordo com COSENZA (2011), o sistema nervoso humano sofre alterações durante toda a vida do indivíduo, mas na infância e adolescência é que ocorrem as mudanças mais importantes. Na primeira infância ocorre um ajuste quanto ao número de neurônios e a construção dos circuitos neurais com as definições das diversas funções neurais. Já na fase da adolescência, ocorre um grande rearranjo, com um processo de eliminação de sinapses, culminando em um “desbastamento sináptico”, que ocorre em diferentes regiões do córtex cerebral. Além disso, há um notável aumento da mielinização das fibras nervosas em circuitos cerebrais, tornando-os mais eficientes.

Segundo COSENZA (2011), um outro fato a considerar é que existe um padrão cronológico para o aparecimento de muitas funções. A continuidade do desenvolvimento das habilidades segue ao longo dos anos apresentando características comuns para períodos de vida comuns, que são marcos do desenvolvimento da espécie. Esses marcos do desenvolvimento são etapas cumpridas regularmente pelo amadurecimento progressivo das conexões que se fazem entre os neurônios e também pela mielinização das fibras nervosas envolvidas na sua execução.

O autor afirma que as modificações que ocorrem na adolescência preparam o indivíduo para a vida adulta. O aumento da conectividade entre as células corticais é progressivo durante a infância, mas declina na adolescência até atingir o padrão adulto, o

que reflete, provavelmente, uma otimização do potencial de aprendizagem. Nessa fase da vida diminui a taxa de aprendizagem de novas informações, mas aumenta a capacidade de usar e elaborar o que já foi aprendido. A capacidade do organismo de fazer e desfazer ligações entre os neurônios é consequência das interações constantes com o ambiente externo e interno do corpo. Como consequência o processo de formação de novas ligações sinápticas entre as células no sistema nervoso vai permitindo o aparecimento de novas capacidades funcionais.

Desta forma, a interação com o ambiente define em que condições ocorrerá a formação de conexões nervosas na fase adolescente e, portanto, a aprendizagem ou o aparecimento de novos comportamentos que dela decorrem. De acordo com o autor, diferente dos demais animais, em sua imensa maioria, nossos comportamentos são aprendidos, e não programados pela natureza.

De acordo com COSENZA (2011), apesar da plasticidade cerebral, há capacidades que parecem depender de uma interação mais específica com o ambiente, como a linguagem falada, por exemplo. Na verdade, essa é uma capacidade já programada em nosso sistema nervoso. As crianças com um cérebro dentro dos padrões da normalidade irão aprender a falar e a compreender a linguagem de uma forma natural, sem necessidade de serem ensinadas. Contudo, que idioma vão dominar depende da sua interação social.

Neste sentido, a fase de transformações decorrentes da adolescência favorece um maior desenvolvimento da linguagem falada com a ampliação do vocabulário e, conseqüentemente, da linguagem escrita que permitirá adquirir segurança para fazer boa leitura e interpretação da realidade e para se comunicar de forma eficiente.

A apropriação da linguagem simbólica agregada a valores e atitudes manifestadas em iniciativas que se revelam na busca de informações, favorece o aluno adolescente a ganhar confiança para apresentar boas argumentações e demonstrações das propriedades exploradas, adquirindo confiança em suas formas de pensar, de fundamentar suas ideias. Estes valores promovem no aluno as condições ideais para que este aprimore a sua capacidade de aprender, bem como desenvolver a capacidade de utilizar conceitos e procedimentos para descrever modelos e validar argumentos.

Como visto anteriormente, queremos que nossos alunos adolescentes pensem de maneira crítica, e não simplesmente memorizem. Quando uma pessoa manifesta pensamento crítico, nós a consideramos inteligente e bem instruída, mas, quando uma

pessoa não é capaz de se manter utilizando fatos dentro de contexto, geralmente julgamos não haver instrução apropriada.

O ato de pensar, segundo WILLINGHAM (2011) deve se pautar em situações em que o indivíduo realiza atividades como solucionar problemas, raciocinar, ler algo complexo ou realizar qualquer trabalho mental que exija algum esforço.

Segundo o autor, em comparação com as capacidades de ver, se movimentar, detectar um sabor ou cheiro de algo, onde não há esforço cerebral considerável, o pensamento, por outro lado, requer concentração, tornando o ato de pensar vagaroso, cansativo e incerto. É possível realizar atividades paralelas quando se está executando qualquer das atividades citadas anteriormente, mas enquanto estiver trabalhando em um problema não é possível pensar em outra coisa. Por isso, nosso organismo, sempre que possível, evita o pensamento, ou seja, quando podemos evitar, nós não pensamos. Em vez disso, confiamos na memória. A maioria dos problemas que encontramos são situações já solucionadas antes, portanto, nós simplesmente fazemos aquilo que fizemos anteriormente. Apesar da memória apresentar falhas como esquecimentos, ainda assim, tende a ser muito mais confiável do que o raciocínio, a memória fornece respostas mais rápidas e com pouquíssimo esforço.

Pode-se observar que a manipulação de objetos voltados para solucionar problemas (os objetos de manipulação ou materiais manipuláveis serão tratados de forma mais abrangente no capítulo 3 deste trabalho) promove a convergência de diversos sentidos de regiões cerebrais diferentes, como visão, tato, percepção de espaço entre outros para compor junto com o pensamento uma abordagem estratégica para solucionar um problema mantendo o foco no objetivo.

WILLINGHAM (2011) afirma que a memória pode ser caracterizada como um arquivo de eventos pessoais e de fatos onde ficam armazenadas estratégias que guiam o que devemos fazer de modo que não é requerida muita atenção. Na maioria das decisões tomadas, nós não paramos para avaliar o que devemos fazer, o que fazemos é repetir ações que fazemos na maior parte do tempo como se estivéssemos no “piloto automático”, mesmo ao realizar algo um pouco mais complexo. Isso ocorre porque é a memória que está guiando o comportamento. Dessa forma, uma tarefa que inicialmente necessitava de uma grande quantidade de pensamento converte-se, com a prática, em algo que requer pouco ou nenhum pensamento.

WILLINGHAM (2011) ainda traz uma informação de extrema relevância para o fazer pedagógico quando afirma que, ao contrário do que é aceito pelo senso comum, o

cérebro não é projetado para pensar, ele foi projetado para evitar que se tenha que fazer isso. A menos que as condições cognitivas sejam favoráveis, pensar será evitado. Ainda assim, as pessoas gostam quando o trabalho mental é bem-sucedido. Elas gostam de resolver problemas, mas não de trabalhar em problemas sem solução. Se as tarefas escolares sempre são difíceis demais para um aluno, não deve surpreender que ele não goste da escola. As pessoas são naturalmente curiosas, mas não são naturalmente boas pensadoras.

Tais afirmações podem trazer a falsa sensação de que todos os organismos são iguais, no entanto, não existem dois cérebros iguais, mas todos possuem vias motoras e sensoriais que seguem o mesmo padrão previsto nas informações genéticas de nossas células e são construídas enquanto nosso organismo se desenvolve dentro do útero materno.

Segundo COSENZA (2011), o indivíduo ao nascer já traz todos os circuitos neurais prontos, ainda que eles não estejam funcionando em sua plenitude. Apesar da criança nascer com um sistema nervoso já bem parecido com o que terá na vida adulta, o que vai determinar o seu desenvolvimento é o meio em que ela estará inserida, ou seja, o que torna os cérebros diferentes é o fato de que as condições que determinam como os neurônios se interligam fazem com que vão adquirindo características próprias, podendo ocorrer mudanças de curso a medida que as pessoas seguem suas próprias histórias. A história de vida de cada um constrói, desfaz e reorganiza permanentemente as conexões sinápticas entre os bilhões de neurônios que constituem o cérebro.

Neste contexto, uma pessoa que é experimentada com resoluções de problemas ao longo de sua formação terá sua capacidade de fazê-lo aumentada ao longo de sua vida, justificando que, apesar da plasticidade neural existir por toda a existência do indivíduo, quanto mais cedo estiver exposto às técnicas e meios estratégicos de resolução de problemas mais amplo será a sua capacidade ao atingir a maturidade.

De acordo com o autor, comparada com as demais espécies, nosso cérebro, embora planejado para desenvolver certas capacidades que diferem das demais espécies, necessitará de um aprendizado mesmo para capacidades bem simples. No entanto, é exatamente isso que garante uma ampliação de comportamentos e a diversidade de formas de sua expressão.

COSENZA (2011) afirma que o córtex cerebral contém bilhões de neurônios organizados em circuitos bastante complexos que se encarregam de funções como a linguagem, a memória, o planejamento de ações, o raciocínio crítico, etc.

Essas capacidades, que são características próprias da espécie humana, são imprescindíveis para desenvolver uma capacidade de resolver problemas.

Segundo WILLINGHAM (2011), do ponto de vista neurológico, embora o cérebro não seja configurado para pensar de maneira eficiente, as pessoas realmente apreciam atividades mentais, pelo menos em determinadas circunstâncias. Ainda que pareça contraditório, o ser humano não apenas está disposto a pensar, como intencionalmente busca por situações que necessitam de pensamentos. O ambiente mais comum em que nos colocamos em situações que necessitam de pensamentos elaborados são jogos de estratégia ou, simplesmente, preencher uma folha de palavras cruzadas.

Embora as descobertas da neurociência tenham trazido uma contribuição de perspectiva negativa quanto ao comportamento cerebral, quando afirma que o cérebro está configurado para evitar pensar, o cérebro não se resume a isso. De acordo com WILLINGHAM (2011), são as modificações ocorridas pela aprendizagem pelo processo de repetição de uma tarefa que demanda um mesmo tipo específico de pensamento que fazem com que o cérebro seja capaz de realizar alterações para nos poupar de pensar, automatizando tal procedimento.

De acordo com o autor, é neste contexto que a formação da memória de longo prazo ganha um significado especial, funcionando como um vasto depósito no qual se encontra todo o conhecimento baseado em fatos a respeito do mundo, a partir de suas experiências sensoriais.

O conhecimento de fatos pode ser abstrato ou oriundo das experiências sensoriais. O autor afirma ainda que toda a informação na memória de longo prazo reside fora da consciência. Ela se mantém silenciosa até se fazer necessária, quando penetra na memória de trabalho e se torna consciente motivada pela questão que a fez relevante para o pensamento em curso se apresentar e trazê-la à memória de trabalho.

Neste contexto, conclui que o pensamento acontece quando se combinam informações no ambiente da memória de trabalho, resgatados do ambiente da memória de longo prazo associados a novas informações de novas maneiras. Essa descrição do pensamento evidencia que saber como combinar e reorganizar ideias na memória de trabalho é essencial para um pensamento bem-sucedido.

De acordo com WILLINGHAM (2011) a memória de longo prazo contém não apenas informação de fatos, mas também aquilo que chamaremos de conhecimento procedimental, que significa a informação a respeito dos procedimentos mentais necessários para executar tarefas. Se pensar é combinar informação na memória de

trabalho, então o conhecimento procedimental é uma lista do que combinar e quando, como uma fórmula para efetuar um tipo específico de pensamento. Afirma ainda que, geralmente, a informação oferecida pelo ambiente não é suficiente para solucionar um problema. É necessário complementar com informação vinda da memória de longo prazo.

Para o autor, um pensamento bem-sucedido depende de quatro fatores: informação do ambiente, fatos na memória de longo prazo, procedimentos na memória de longo prazo e quantidade de espaço na memória de trabalho. Se qualquer um desses fatores for inadequado, o raciocínio será provavelmente falho.

De acordo com WILLINGHAM (2011), embora não seja adequado que se justifique a memorização pura como evidência de aprendizagem, e que não há dúvida de que manter os alunos memorizando listas de fatos avulsos não é enriquecedor, o conhecimento baseado em fatos deve preceder as habilidades, ou seja, tentar ensinar habilidades, como análise ou síntese, na ausência de conhecimento de fatos é impossível.

Segundo o autor, os fatos devem ser ensinados, idealmente no contexto das habilidades, na fase infantil e púbere.

Os tipos de habilidades que os professores consideram desejáveis, como analisar criticamente um cenário para resolver um problema, necessitam de extenso conhecimento de fatos. Isso somente é possível quando o pensamento crítico é manifestado e guiado pela interação entre o organismo e o meio ambiente, alinhado às condições orgânicas e cognitivas, que desencadeiam as construções de valores e atitudes necessárias para que o aluno adolescente possa se tornar um bom resolvidor de problemas.

Nota-se que, diferente da prática de ensino atualmente exercitada, o estudo genuíno da Matemática não está em memorizar porções de técnicas desconexas entre si utilizando métodos como repetições visando fixação puramente maquinal.

Portanto, é urgente que entendamos que o aluno adolescente possui as qualidades necessárias para que se possa conduzi-lo a uma condição de aprendizagem plena da Matemática. Pode-se concluir também que o desenvolvimento de habilidades dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental voltadas para resolução de problemas desafiadores, com auxílio de recursos diversificados, pode contribuir como elemento facilitador e enriquecedor para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

## **CAPÍTULO 2**

### **A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Todo ser humano se depara com problemas dos mais variados tipos durante a sua vida, portanto, desenvolver habilidades que proporcionem melhores condições de resolvê-los é fundamental para nossa sobrevivência. Através do ensino da Matemática é possível que tais habilidades sejam desenvolvidas e aperfeiçoadas.

A Matemática é reconhecidamente a disciplina que mais desafia os estudantes, porque os coloca diante de diversas situações-problema, forçando-os a mobilizar estruturas mentais de extrema importância para a vida em sociedade, enquanto outras disciplinas escolares não o fazem com a mesma intensidade.

Neste capítulo, são apresentadas justificativas para a utilização da resolução de problemas como abordagem pedagógica de ensino de Matemática. Também são apontadas razões para a escolha de questões das provas da OBMEP- Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Públicas, como problemas adequados dentro desta abordagem e reforçada a necessidade da habilidade de leitura para que esta abordagem seja bem sucedida.

#### **2.1- A LEITURA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dentre as competências e habilidades exigidas de um indivíduo no saber matemático que impacta na cotidianidade do indivíduo social está a necessidade de desenvolver a capacidade de comunicação por meio de leitura e interpretação de textos de origens diversas. Assim, espera-se que o indivíduo saiba utilizar diferentes formas de representação para comunicar-se com correção, clareza e com terminologias corretas através de elementos de comunicação incluindo aqueles utilizados no ensino da Matemática.

Espera-se ainda que este indivíduo seja capaz de extrapolar a língua materna, e mobilizar saberes para identificar variáveis relevantes em um determinado contexto e selecionar os procedimentos necessários para a resolução de um problema encontrado.

Valendo-se de uma análise crítica do contexto apresentado, o indivíduo deve ser capaz de formular questionamentos ou apresentar conclusões se baseando na interpretação dos dados encontrados.

A capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler ideias matemáticas, interpretar significados, pensar de forma criativa e desenvolver o pensamento indutivo/dedutivo, é o caminho que vai possibilitar a ampliação da capacidade para abstrair elementos comuns em diversas situações e torná-lo capaz de fazer conjecturas, generalizações e deduções simples.

A Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance vão além da própria Matemática, pois possui o diferencial de desenvolver no indivíduo a capacidade de resolver problemas genuínos, gerar hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, além de desenvolver a criatividade entre outras capacidades pessoais. (PCNEM/2000-Parte III pág. 40)

Na escola, o ensino da Matemática que visa o desenvolvimento das habilidades de leitura, compreensão e resolução de problemas deve ser um processo ativo de aprendizagem que não se configura numa técnica resultante de uma mecanização ou receita a ser seguida. Dessa forma, deverá ser constituída a partir da reflexão sobre a ação do aluno, levantando hipóteses e se apropriando de todas as percepções que envolvem o objeto de conhecimento.

Para resolver um problema o aluno deve interpretar uma sequência de ideias ou acontecimentos que estão implícitos em um enunciado.

De acordo com WILLINGHAM (2011), a compreensão da leitura depende de combinar as ideias em um texto, não somente compreender cada ideia de maneira isolada, mas avançar no contexto de modo a alcançar as lacunas que o escritor omite nas informações diretas, mas que são necessárias para compreender o fluxo lógico de ideias.

Segundo o autor, escritores presumem que o leitor terá conhecimento para preencher as lacunas pois, caso incluam todos os detalhes de fatos, o texto seria demasiadamente longo e tedioso. Desta forma, destaca que o conhecimento prévio em forma de vocabulário não só é necessário para compreender uma ideia isolada, como também é necessário para entender a conexão entre duas ou mais ideias e espera-se que o leitor relacione-as em um todo coerente. Para ele, captar o sentido do texto lido é absorver a essência do texto, é compreender o que o autor da questão pretendeu passar e ser capaz de resumir em duas ou três frases a essência do texto.

Essa condição se traduz como a habilidade de interpretar. Ao desenvolver esta habilidade, o aluno se torna capaz de compreender o que se quer dizer, ou seja, é possível

dizer a mesma coisa de uma outra forma, que tenha uma melhor aproximação daquilo que o aluno entende. Nesse sentido, interpretar é compreender plenamente o texto extrapolando as informações que constam no texto lido.

No entanto, o primeiro passo para atingir uma condição capaz de interpretar um texto é ter uma compreensão plena das informações constantes. A compreensão de um texto consiste em analisar o que realmente está escrito, trabalhar com as frases e ideias escritas no texto, com os aspectos visíveis, ou seja, ater-se aos dados do texto.

O aluno normalmente não encontrará solução para um problema se, na leitura do enunciado, não o compreendeu, pois só com uma boa compreensão ele conseguirá interpretar sentidos do texto que não estão escritos literalmente.

O papel do leitor é compreender o texto e o papel do texto é promover a interação entre leitor e o objeto de estudo constante no texto.

Segundo WILLINGHAM (2011), o que torna tão difícil entender uma sentença em algumas situações é a ausência do conhecimento prévio que pode ajudar na solução de um problema. Isto porque a quantidade de espaço na memória de trabalho não depende do número de letras, mas sim do número de objetos significativos apresentados no ato da leitura do enunciado. De acordo com o autor, diversos estudos mostram que as pessoas compreendem muito melhor o que leem se já tiverem algum conhecimento prévio sobre o assunto pois ele permite o agrupamento de fatos, que proporciona mais espaço na memória de trabalho, tornando mais fácil a relação entre ideias e, portanto, a compreensão.

Na Matemática, o aperfeiçoamento da leitura se dá na compreensão e observação da ação sobre a realidade que permite identificar, analisar e aplicar os conhecimentos adquiridos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas tornando o indivíduo capaz de realizar previsões de tendências e analisar qualitativamente dados quantitativos representados por recursos gráficos ou algebricamente relacionados a diversos contextos.

O papel do professor neste cenário está em reduzir a distância entre níveis de conteúdos para que não se tornem demasiadamente grande. Porquanto, como visto anteriormente, no processo de desenvolvimento cognitivo, se um assunto não tem nada a ver com um outro já experimentado, todo esforço em busca da compreensão é inútil.

A habilidade de leitura é essencial e dá suporte para todas as ações de quem pretende resolver algum problema. Essa habilidade é uma das mais importantes e fundamentais que podem ser desenvolvidas pelo ser humano. É a partir da leitura do

mundo que o aluno pode compreender a realidade em que ele está inserido e chegar a importantes conclusões sobre ele e os aspectos que o compõem.

Desta forma, fica nítido que a leitura é uma ferramenta imprescindível de que os alunos precisam para resolver problemas.

O aluno capaz de realizar uma leitura proficiente de um contexto poderá estabelecer paralelos sobre as técnicas experimentadas no ambiente escolar e a realidade que o cerca. Nesse sentido, as habilidades de leitura vão muito além de uma simples decodificação, na verdade, vão além da própria compreensão do que foi lido, extrapolando as letras para uma aplicação racional de um processo semântico das palavras.

Assim, a habilidade necessária para ter uma compreensão plena deverá ir muito além de traduzir signos linguísticos em sons isoladamente, ou seja, a mera decodificação não garante uma condição favorável para resolver um problema.

No processo de leitura, ocorrem, pelo menos, quatro etapas, segundo uma visão psicolinguística: decodificação, compreensão, interpretação e retenção. (CABRAL, 1986, apud. BARROS, 2007 – pág.1).

No ato da decodificação, deve ocorrer a ligação entre o reconhecimento do material linguístico e o significado que ele fornece. É comum encontrar leitores que conseguem fazer a relação de uma decodificação fonológica, mas não alcançam o nível do significado pretendido. Estes são conhecidos como analfabetos funcionais.

No Brasil, o Instituto Paulo Montenegro e a ONG Ação Educativa, com o apoio do IBOPE Inteligência, realizam uma pesquisa com o objetivo de mensurar o nível de alfabetismo da população brasileira entre 15 e 64 anos. Ela contempla residentes de zonas urbanas e rurais em todas as regiões do Brasil, quer estejam estudando ou não, avaliando suas habilidades e práticas de leitura, de escrita e de Matemática aplicadas ao cotidiano. Essa pesquisa estabeleceu o Indicador de Alfabetismo Funcional (INAF) cujos dados foram coletados no período de 2001 a 2015, alternando as habilidades pesquisadas: nos anos ímpares foram medidas as habilidades de leitura e escrita (letramento) e, nos anos pares, as habilidades matemáticas (numeramento). Desta forma, o INAF passou a medir simultaneamente as habilidades de letramento e numeramento ao longo de 15 anos.

De acordo com o INAF, é considerada analfabeta funcional a pessoa que, mesmo sabendo ler e escrever algo simples, não tem as competências necessárias para satisfazer as demandas do seu dia a dia e viabilizar o seu desenvolvimento pessoal e profissional.

Segundo a escala INAF, o grau de domínio das habilidades de leitura, escrita e matemática demonstrado pelos participantes do estudo permite a identificação de dois grupos: os analfabetos funcionais e os alfabetizados.

Os analfabetos funcionais se subdividem em dois outros grupos, os analfabetos plenos, que correspondem à condição dos que não conseguem realizar tarefas simples que envolvem a leitura de palavras e frases, ainda que uma parcela destes consiga ler números familiares (números de telefone, preços etc.) e os analfabetos funcionais com habilidade considerada rudimentar, que corresponde à capacidade de localizar uma informação explícita em textos curtos e familiares (como um anúncio ou um bilhete), ler e escrever números usuais e realizar operações simples, como manusear dinheiro para o pagamento de pequenas quantias ou fazer medidas de comprimento usando a fita métrica.

Os alfabetizados são subdivididos em três grupos. Os funcionalmente alfabetizados em condição elementar, que são pessoas que leem e compreendem textos de média extensão, localizam informações mesmo que seja necessário realizar pequenas inferências, resolvem problemas envolvendo operações na ordem dos milhares, resolvem problemas envolvendo uma sequência simples de operações e compreendem gráficos ou tabelas simples, em contextos usuais. Mostram, no entanto, limitações quando as operações requeridas envolvem maior número de elementos, etapas ou relações. Os intermediários são capazes de localizar informações em diversos tipos de texto, resolvem problemas envolvendo percentagem ou proporções ou que requerem critérios de seleção de informações, elaboração e controle de etapas sucessivas para sua solução. As pessoas classificadas nesse nível interpretam e elaboram sínteses de textos diversos e reconhecem figuras de linguagem. No entanto, têm dificuldades para perceber e opinar sobre o posicionamento do autor de um texto. Finalmente, o último grupo é o dos proficientes, cujos integrantes detêm desenvolturas que não mais impõem restrições para compreender e interpretar textos em situações usuais: leem textos de maior complexidade, analisando e relacionando suas partes, comparam e avaliam informações e distinguem fato de opinião. Quanto à Matemática, interpretam tabelas e gráficos com mais de duas variáveis, compreendendo elementos como escala, tendências e projeções.

Os testes avaliando as habilidades de leitura, escrita e matemática revelam que o domínio pleno da leitura vem sofrendo queda entre todos os entrevistados, tendo eles

concluído o Ensino Fundamental ou o Ensino Superior. Os dados mostram que o problema do analfabetismo funcional deve ser levado a sério, pois a dificuldade de compreensão dos gêneros textuais, mesmos os mais simples e mais acessados no cotidiano, prejudica o desenvolvimento intelectual, pessoal e profissional do indivíduo.

Embora o número de analfabetos plenos tenha diminuído no Brasil nos últimos anos, de acordo com o INAF, o analfabetismo funcional ainda é um fantasma que atinge até mesmo estudantes que frequentam o Ensino Superior, desfazendo o mito de que ele estaria intrinsecamente relacionado à baixa escolaridade.

O letramento é uma prática didática que deve estar presente em diversas situações do cotidiano, envolvendo não apenas a leitura tecnicista de textos, mas também o desenvolvimento da criticidade e capacidade de elaborar opiniões próprias diante dos conteúdos acessados.

Neste sentido, é necessário que a aprendizagem voltada para resolução de problemas seja universalizada, propiciando assim que todos os leitores atinjam o nível pleno da alfabetização funcional.

A leitura genuína deveria impactar na visão de mundo do leitor e vice-versa. No entanto, as práticas de leitura como decodificação, que se restringe apenas ao automatismo de identificação e pareamento das palavras de um texto com as palavras idênticas reconhecidas em outras experiências de leitura, não altera a visão de mundo do leitor.

Ocorre que a "leitura do mundo" precede a leitura da palavra e que a busca pela compreensão do objeto acontece no espaço em que o indivíduo está inserido. Nesse sentido, a leitura da palavra encontra suporte nas experiências acumuladas do leitor e, portanto, os objetos nela referidos o remetem à leitura anterior do mundo.

A leitura do mundo feita a partir da experiência sensorial deve estar conectada à leitura feita a partir do mundo abstrato dos conceitos e promover a conexão entre os pensamentos de generalização e as experiências de aspecto tangível.

A resiliência no processo de leitura é algo a ser trabalhado no processo de construção de um ensino voltado para resolução de problemas. Aquele que lê com intuito de resolver um problema não pode abandonar a leitura de um texto considerado difícil porque não entendeu o que significa uma palavra ou outra.

A ampliação do vocabulário torna-se imprescindível ao leitor como instrumento fundamental, sem o qual não pode ler ou escrever com eficácia. Este deverá ter conhecimento de palavras no sentido etimológico, filosófico, e suas aplicabilidades em

determinada área de conhecimento, bem como os verbos, substantivos e adjetivos, além de reconhecer a relação de sinônimos e de antônimos no contexto da leitura.

Em nossa cultura globalizada de pessoas letradas, o indivíduo sem leitura e sem escrita não pode ampliar sua capacidade de estudar, buscar conhecer e apreender a essência do objeto em estudo ou reconhecer criticamente a razão de ser do objeto.

O educando precisa internalizar a importância de uma aprendizagem da forma correta da leitura e da escrita e perceber que ler é engajar-se numa experiência criativa em torno da compreensão e da comunicação.

De acordo com COSENZA (2011), do ponto de vista neurobiológico, a aprendizagem é consequência de uma facilitação da passagem da informação ao longo das sinapses. Mecanismos bioquímicos entram em ação, fazendo com que os neurotransmissores sejam liberados em maior quantidade ou tenham uma ação mais eficiente na membrana pós-sináptica. Mesmo sem a formação de uma nova ligação, as já existentes passam a ser mais eficientes, ocorrendo o que já podemos chamar de aprendizagem.

Segundo o autor, a aprendizagem se traduz pela formação e consolidação das ligações entre as células nervosas, sendo fruto de modificações químicas e estruturais no sistema nervoso. Afirma ainda que as ações dos professores em sala de aula podem facilitar o processo, mas, em última análise, a aprendizagem é um fenômeno individual e privado e vai obedecer às circunstâncias históricas de cada aluno.

Para resolver problemas, o aluno deve ser capaz de reter as informações trabalhadas nas etapas anteriores e aplicá-las em situações-problema de outros contextos.

A retenção é caracterizada pelo armazenamento das informações mais importantes na memória de longo prazo e ocorre com o armazenamento da temática tratada em um determinado problema e de seus tópicos principais, após a interpretação em um nível mais elaborado.

A proposta de leitura voltada para solucionar problemas tem como objetivo formar leitores pensantes e críticos que sejam capazes de resolver problemas novos e jamais vividos, utilizando a similaridade de informações do problema atual com as informações retidas trabalhadas em problemas anteriormente enfrentados.

Para um resolvidor de problemas, ao se deparar com um enunciado, não basta reproduzir o que está nele, é necessário formular suas próprias ideias para defender ou criticar o que se lê no enunciado, ou captar novas informações e, por analogia, ser capaz de aplicar o novo conhecimento ao seu cotidiano.

Quando se espera que um aluno possa atingir um certo nível de maturidade em resolução de problemas, isto significa almejar que ele desenvolva habilidades de leitura a partir de um hábito de leitura próprio para esse fim.

Frequentemente, professores de Matemática se queixam com professores de Português que os seus alunos não estão sabendo compreender o problema de Matemática. No entanto, essa responsabilidade não deve recair apenas sobre o professor de Português, nem o professor de Português é inteiramente competente para desenvolver habilidades de leitura de um problema de Matemática, pois existe uma quantidade significativa de terminologias específicas e formas específicas de se apresentar uma circunstância matemática. Temos, por exemplo, que não é o professor de Português quem vai ensinar a ler um gráfico, isso são atribuições específicas dos professores que trabalham com essas formas de escrita, então cabe a eles desenvolver essas habilidades de leitura e de escrita também.

A Matemática possui um arcabouço com palavras próprias e, por vezes, se apropria de palavras da língua materna com significação específica, onde o aluno não letrado ou que não ampliou o seu vocabulário tanto na língua materna quanto na linguagem matemática não tem condições para traduzir uma situação apresentada para uma linguagem simbólica matemática e realizar as operações pertinentes para encontrar a solução do problema.

Desta forma, o aluno encontra a barreira na leitura e não nas operações matemáticas como pressupõem diversos observadores quando dizem que os alunos possuem grandes dificuldades em Matemática.

Devemos separar estas ideias. Dificuldades com as regras e procedimentos em operações matemáticas por meio de execução de procedimentos em algoritmos são mais facilmente superadas do que as dificuldades com compreensão de problemas e organização de ataque para solucioná-los.

Georg Polya (1977) em sua obra “A arte de resolver problemas” destaca a ação do professor no processo de desenvolvimento do aluno resolvido de problemas. O autor reuniu indagações e sugestões típicas para que o professor possa conduzir o pensamento do aluno para uma compreensão e motivação ideal no processo mental para resolução de problemas. Tais indagações são úteis para distinguir os problemas com os alunos e indicar os passos que auxiliam no ataque a inúmeros problemas.

De acordo com POLYA (1977), ao se deparar com um problema é necessário indagar: quais são os dados, o que é que se quer como objetivo, o que é que se deve

procurar como meio para atingir o objetivo, qual é a incógnita, qual é a condicionante e do que é que se precisa para alcançar o objetivo.

O autor afirma que a finalidade destas indagações é focalizar a atenção do aluno na incógnita. Mas é nítido que elas o conduzem para uma compreensão do cenário apresentado no problema a ser solucionado e, ao mesmo tempo, tendem a provocar as operações mentais necessárias para resolução do problema.

Com o tempo, o uso continuado destas indagações e ou sugestões, cuidadosamente selecionadas e dispostas estrategicamente, é naturalmente internalizado por aquele que procura resolver problemas por si próprio. Para o autor, se o leitor ficar suficientemente familiarizado com essa lista e conseguir perceber, por detrás da sugestão, a ação sugerida, verá que a lista enumera, indiretamente, operações mentais típicas, úteis para a resolução de problemas. Ressalta ainda que elas são de aplicação geral, podemos fazê-las com sucesso ao tratarmos de problemas de qualquer tipo e que sua utilização não está restrita a nenhum assunto em particular. Não há diferença, as indagações fazem sentido e podem auxiliar-nos a resolver problema de qualquer natureza.

A escola deve procurar desenvolver, com o estudante, a capacidade de entender e de empregar as ações mentais e procedimentais atreladas à argumentação do tipo lógico-matemático na linguagem apropriada.

Historicamente, o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos ocorreu paralelamente à criação de uma linguagem distinta da linguagem comum, com simbologia específica e “regras gramaticais” apropriadas para o discurso mais preciso, comumente conhecida como “linguagem formal da Matemática”.

Embora o aprofundamento da linguagem formal da Matemática e o da argumentação lógico-matemático não sejam requeridos na educação básica, eles têm lugar na descrição do processo de solução de um problema.

Tais competências contêm grande relevância na formação integral do aluno, tanto como parte de sua preparação, de competência escolar, visando continuidade de estudos em ciência pura ou aplicada, como para ampliar as possibilidades de participação com eficácia no mundo do trabalho e permitir o exercício pleno da cidadania.

Normalmente, o professor que não tem a consciência de que é responsável pela formação da leitura do aluno tende a se encontrar numa relação de dependência com o livro didático e não vai além do que contém este livro, sem contestá-lo quanto à sua eficácia ou sua suficiência para um bom ensino, principalmente no que diz respeito à leitura e interpretação.

O livro didático como instrumento orientador da prática do professor não propõe metodologias de abordagem para leitura, compreensão e organização para buscar soluções de problemas, na verdade, isso é um pressuposto que muito se distancia da realidade.

Uma análise dos exercícios e problemas (3462 questões analisadas) propostos nos 10 livros aprovados pelo MEC para o PNLD 2014 para o 8º ano do Ensino Fundamental constatou que 68% dos exercícios têm características de treinamento puro de aplicação de algoritmo, e dos problemas apresentados apenas 19% possuem algum nível de conexão com o cotidiano.

O processo de construção de leitores é uma caminhada lenta e cansativa. Não é possível formar um leitor sem que este seja estimulado e desafiado ao exercício da leitura continuamente.

Considerando que a leitura de mundo é um princípio que deveria orientar a prática pedagógica em Matemática, é razoável dar atenção especial ao fato de que o pensamento crítico, que deve ser desenvolvido no aluno, passa principalmente pelo reconhecimento de que a Matemática é uma linguagem universal e que nasce, principalmente, da necessidade de solucionar problemas que admitem a identificação de grandezas as quais naturalmente seja possível quantificar.

Desta forma, levar o aluno a compreender que a Matemática existe mesmo antes de ser formalizada em uma escrita com objetos simbólicos próprios ou pelo uso de elementos simbólicos da língua materna torna-se o verdadeiro ponto de partida para um ensino com a qualidade que se espera.

Neste contexto, foi pesquisado um instrumento que pudesse auxiliar alunos e professores no processo de ampliação da percepção das ferramentas matemáticas em resolução de problemas orientadas por dois processos: leitura significativa dos elementos envolvidos no problema e reconhecimento das estruturas lógicas que fundamentam as operações de elementos matemáticos envolvidos.

Surgiu então a proposta de escolher e elaborar materiais concretos que os alunos pudessem manipular em busca de melhor compreensão e intimidade com os elementos envolvidos nos problemas. Estes materiais serão descritos com mais detalhes no próximo capítulo deste trabalho.

## **2.2- A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO**

Estamos inseridos numa sociedade de informações rápidas e globalizada, onde tais informações, nos dias atuais, encontram-se à disposição de todos com um simples toque em algumas teclas de um computador ou na tela de um smartphone. Torna-se mais importante que a educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de cognição e comunicação de pensamentos. Esse novo formato de sociedade exige que o ambiente escolar se torne cada vez mais apropriado para desenvolver no educando a capacidade de elaborar inferências, de usar de criatividade, tomar decisões coerentes com a realidade, investigar conjecturas e possuir autonomia cognitiva para se aperfeiçoar continuamente em seus conhecimentos.

Nota-se que tais habilidades estão caracteristicamente atreladas a alguém que possui as condições ideais para resolver problemas.

Percebemos que, no ambiente escolar, a Matemática é a disciplina que mais desafia os alunos e que os expõe a inúmeras situações que se caracterizam como problemas a serem solucionados.

Há muitas concepções diferentes de problema. De acordo com ONUCHIC et. al. (2011), apoiadas em definições de diversos pesquisadores, um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Para as autoras é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para o ensino de Matemática, trazem orientações bem diretas quanto ao uso de resolução de problemas como estratégia de ensino. O documento afirma que, no contexto atual, com o avanço do uso das tecnologias de comunicação, há uma exigência de um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do ensino básico.

Portanto, os PCN apontam para a necessidade de adequação do currículo e de metodologias capazes de corresponder ao avanço tecnológico e social adequando novas concepções educacionais ao processo de ensino que valorizem cada vez mais o raciocínio em detrimento de memorização de procedimentos, valorizando a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem.

A meta do ensino sob esta perspectiva é desenvolver no educando a capacidade de avaliar limites, observar possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações que permitam utilizar o conhecimento matemático, além de desenvolver capacidades de abstração e do raciocínio lógico em todas as suas vertentes que favoreçam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas de qualquer tipo a partir de investigações. Nota-se que, de acordo com a percepção de mundo na atualidade, são habilidades de extrema importância que devem ser desenvolvidas no contexto de ensino da Matemática.

Neste contexto, o debruçar sobre as condições de ensino desta disciplina pela ótica da resolução de problemas ganha extrema relevância.

Portanto, refletir sobre o ensino de Matemática e sua contribuição para o desenvolvimento cognitivo de modo a buscar evidências do porquê ensinar resolução de problemas nas aulas de Matemática e quais as condições que favorecem a aprendizagem dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental torna-se o objetivo desta seção do capítulo.

Na história do uso dessa metodologia como estratégia de ensino, POLYA (1977) foi o precursor que desbravou a resolução de problemas e as iniciativas de considerá-la como uma metodologia para ensinar Matemática. Em seu trabalho, Polya preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas. Nesta obra, o autor destaca os passos primordiais para resolver problemas, que são aplicados a problemas de qualquer natureza, não se limitando ao contexto da matemática.

ONUCHIC et. al. (2011) enumeram boas razões para se fazer um esforço para que o ensino de Matemática seja ministrado a partir das estratégias de resolução de problemas. As autoras destacam que, entre as vantagens que essa abordagem de ensino traz, é possível destacar que, nesta concepção de ensino, o aluno encontra-se no centro das ações, os elementos envolvidos ganham maiores significados, desenvolvem-se a capacidade cognitiva do educando e o seu pensamento matemático, aumenta a compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos, ampliam-se a confiança e a autoestima do aluno,

transforma o fazer pedagógico no ambiente educacional e contribui para dar sentido às construções matemáticas a partir do pensamento autônomo.

Desta forma, passamos a estabelecer as condições que favorecem ou determinam a aprendizagem, pondo o uso da resolução de problemas como estratégia para aulas de Matemática, levando em conta as vantagens apontadas anteriormente pelas autoras.

A resolução de problemas é a metodologia que se apropria da curiosidade do aprendiz e trabalha a favor da formação de um cenário propício para a aprendizagem, promovendo uma autonomia de pensamento do educando que desafia o próprio educador. Esta autonomia é manifestada, principalmente, quando o aprendiz faz questionamentos que levam a desfechos como descobrir incertezas, acertos ou equívocos.

Para uma abordagem por via de resolução de problemas, deve-se levar em conta toda a bagagem cultural que o educando carrega, valorizando as experiências individuais, suas próprias reflexões, leituras de textos e experiências intelectuais induzidas pelo espaço educativo ou que sejam oriundas de curiosidades do próprio aprendiz.

O conhecimento prévio dos alunos é extremamente importante para o aprendizado matemático e, caso seja levado em consideração, a experiência da compreensão será a mais profunda possível, pois será capaz de associar os conceitos que surgem da experiência escolar aos que resultam do cotidiano.

De acordo com os PCN, acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos contextos e conteúdos abordados.

Para ONUCHIC et. al. (2011), a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido aos elementos envolvidos.

Segundo as autoras, a resolução de problemas desenvolve a capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.

De acordo ainda com os PCN, a aquisição do conhecimento matemático perpassa pelo domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, de modo a desenvolver e ampliar a capacidade de argumentação do educando.

Para ONUCHIC et. al. (2011), a resolução de problemas leva os alunos a perceber que são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido, de modo que a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.

Neste cenário, os alunos também adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções além do fato de desenvolver sua capacidade de raciocínio tendo como resultado a possibilidade de adquirir autoconfiança e sentido de responsabilidade, bem como ampliar sua capacidade de comunicação.

O processo de desenvolvimento das capacidades percebidas pelo próprio educando promove uma satisfação que pode ser expressa por sensações prazerosas.

De acordo com WILLINGHAM (2011) a atividade mental é atraente porque, quando bem-sucedida, oferece a oportunidade de uma sensação prazerosa.

Segundo o autor, do ponto de vista da neurociência, qualquer tarefa cognitiva bem-sucedida é prazerosa. Para o autor, existe um sentido de satisfação, de realização no pensamento bem-sucedido.

Nos últimos 10 anos, os neurocientistas descobriram que existe uma superposição entre áreas cerebrais e substâncias químicas que são importantes na aprendizagem e aquelas que são importantes no sistema de recompensa natural do cérebro. Muitos neurocientistas suspeitam que os dois sistemas são correlatos. Quando resolvemos um problema, nosso cérebro recompensa-se a si mesmo com uma pequena dose de dopamina, uma substância natural significativa para as funções de prazer do cérebro. Os neurocientistas sabem que a dopamina é importante nas duas funções, aprendizagem e prazer, mas ainda não identificaram a ligação específica entre elas. Ainda que a neuroquímica não esteja completamente entendida, parece inegável que as pessoas sentem prazer ao solucionar problemas. (WILLINGHAM, 2011. Pg.21).

De acordo com o autor, o prazer está na “solução do problema” e trabalhar em um problema que não oferece a sensação de que se está progredindo não é prazeroso, na realidade, é frustrante. Da mesma forma que saber a resposta de uma questão a priori retira a possibilidade da descoberta. Portanto, não haverá a mesma satisfação de um “estalo” mental.

A manutenção do foco e da atenção em um problema depende do grau de interesse do indivíduo no assunto abordado. De acordo com a neurociência, somos, curiosos a

respeito de algumas coisas e não somos a respeito de outras, o que leva a concluir que nem todos os tipos de pensamentos são igualmente atrativos.

WILLINGHAM (2011) afirma que trabalhar em problemas de nível de dificuldade adequado é recompensador, mas lidar com problemas simples demais ou complicados demais é desagradável.

Portanto, encontrar a “dose” adequada para desafiar a mente humana é uma tarefa para o educador que pretende fazer uso desta metodologia de ensino.

Se a estratégia estiver falhando e surgirem questionamentos tais como se o conteúdo é suficiente ou não para prender a atenção ou se a curiosidade tem ou não poder suficiente para que o aluno permaneça focado, a resposta pode estar na dificuldade da questão.

Para o autor, gostamos de pensar quando acreditamos que a atividade mental oferecerá em troca a sensação agradável que surge com a solução de um problema.

Afirma, ainda, que as pessoas são naturalmente curiosas e que a curiosidade induz a explorar novas ideias e novos problemas. No entanto, quando ocorre a exploração prévia de um problema, rapidamente é avaliado o quanto de esforço mental será necessário para chegar a alguma conclusão. Neste caso, se o esforço for demasiado ou mínimo o problema será abandonado, caso isso seja possível.

O autor conclui que a relação do aluno com o ambiente escolar está intimamente ligada aos desafios impostos neste ambiente.

Para ONUCHIC e ALLEVATO (2011), a resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a Matemática.

Desta maneira, refletir sobre qual seria a solução para manter o foco e a atenção dos alunos em resolução de problemas perpassa em questionar se ao oferecer atividades mais simples aos alunos, é preciso ficar atento para não propor trabalhos fáceis demais a ponto de aborrecê-los. E também, se isso de fato representa o melhor caminho para ampliar a capacidade desses alunos. No entanto, o professor, em vez de tornar a atividade mais fácil, pode refletir sobre a maneira que seria possível tornar o pensar mais fácil.

O ato de ensinar e estudar precisa ter um caráter crítico, o que leva, necessariamente, a uma forma crítica de compreender e de realizar a leitura do mundo e, conseqüentemente, do contexto no qual está inserido o problema a ser solucionado e como este se relaciona com o agente resolvidor do problema. Neste contexto, saber aprender e

como o cérebro humano se comporta no contexto de aprendizagem são as condições básicas para prosseguir aperfeiçoando-se.

A preparação do sujeito para aprender e estudar, é, em primeiro lugar, uma ação crítica, analítica, baseada em julgamentos com um caráter inventivo ou recriador.

De acordo com os PCN, os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar, dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições, criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar, valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas, desenvolvendo atividades lúdicas, nas quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento.

A Educação Matemática, pelo método de resolução de problemas, encontra desafios significativos quando se pretende ensinar e envolver os alunos num universo de diversidade inerente a uma sala de aula, experimentando estratégias de ensino que visam contemplar todos os alunos em um único ambiente. Neste contexto, o desafio real está em levar em conta a necessidade da sua adequação e promover as mudanças necessárias para o desenvolvimento e a promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades fazendo uso de estratégias diversificadas para abordagem no ensino.

Os PCN recomenda, que estas estratégias devem ocorrer em torno de temas mais amplos, como analisar estruturas mais próximas da realidade ou do interesse do aluno, ou observações e intervenções para o ambiente interno ou externo da escola, podendo avançar para questões políticas, produção e distribuição de recursos naturais, uso da energia, entre outros temas geralmente de cunho interdisciplinar. Estas estratégias são capazes de trazer uma vantagem de ordem comportamental, pois podem promover o apreço pela cultura e a alegria do aprendizado.

Reconhecer que promover uma nova postura didática é tão difícil quanto introduzir novos e mais significativos conteúdos é o primeiro passo para que se tenha a real noção do uso do tempo e dos recursos disponíveis visando uma caminhada menos frustrante no trabalho docente quando se pretende utilizar de metodologias que diferem do ensino tradicional.

A atividade docente para o contexto de ensino por via da resolução de problemas exige que a preparação, a capacitação e a formação ocorram de forma permanente

englobando sua experiência docente, deixando claro que ela requer uma formação permanente do educador. Esta formação deve se fundamentar principalmente na análise crítica de sua própria prática.

Nesse contexto, a participação do professor no processo de ensino de resolução de problemas torna-se imprescindível como mediador de um processo que se apresenta em um cenário controverso e, muitas vezes, inóspito para o trabalho docente.

No entanto, ONUCHIC et. al. (2014), afirmam que os professores que ensinam a partir de resolução de problemas se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.

O educador que assume o compromisso de promover tal mudança também precisa tomar consciência de que está assumindo uma postura metodológica difícil de implementar, pois exige a alteração de hábitos de ensino há muito tempo consolidados.

De acordo com os PCN, apesar de muitos professores reconhecerem a importância desta metodologia para as aulas de Matemática, a maioria não a utiliza de forma satisfatória, ficando restritos aos problemas propostos em livros didáticos, sem levar em conta as etapas propostas para a resolução de problemas descritas em obras como a de POLYA (1977).

Desta forma, os problemas são tratados como exercícios de fixação, ficando longe da prática autêntica de resolução de problemas, o que gera, muitas vezes, insatisfação no aluno, que encontra muitas dificuldades ao tentar resolver os problemas quando não conta com a intervenção do professor.

Vale expor que nem todos os professores reconhecem a abordagem na resolução de problemas como uma estratégia eficaz para o ensino da Matemática para os dias atuais.

Segundo WILLINGHAM (2011), alguns professores acreditam não terem visto muitas vantagens naquilo que os psicólogos chamam de “a revolução cognitiva”. Mesmo diante de diversas matérias sobre importantes achados em pesquisas relacionadas à aprendizagem e à resolução de problemas, não houve o impacto esperado, e nem a compreensão de como cada nova descoberta deveria mudar aquilo que um professor faz em suas práticas pedagógicas.

Para o autor, qualquer professor sabe que existem diversas razões para um aluno apreciar ou não a escola. De uma perspectiva cognitiva, um importante fator é se o aluno experimenta ou não, consistentemente, o prazer de solucionar um problema. Portanto, é

necessário que os professores reflitam sobre o que podem fazer para assegurar que cada aluno obtenha essa satisfação (WILLINGHAM, 2011 p.29).

O desafio real do educador é reconhecer que há sempre algo diferente a fazer na cotidianidade educativa e que, neste contexto, também está inserido como aprendiz.

ONUCHIC et. al. (2011) afirmam que, com o uso da metodologia de resolução de problemas, a formalização dos conceitos e teorias matemáticas feita pelo professor passa a fazer mais sentido para os alunos.

As autoras recomendam que, ao iniciar os estudos voltados para resolução de problemas, orienta-se começar pelos aspectos qualitativos e, só após uma compreensão razoável, introduzir tratamento quantitativo. Tal procedimento tem como finalidade a percepção, pelo aluno, das relações quantitativas sem a necessidade inicial de utilização de algoritmos memorizados, ou seja, a partir do entendimento do assunto os alunos poderão construir seus próprios algoritmos.

WILLINGHAM (2011) orienta que, durante a resolução de um problema, deve ser observado que ele consiste de um trabalho cognitivo, principal premissa do ensino, e representa um desafio moderado, incluindo atividades como compreender e pensar, esta última sendo o principal objetivo.

O autor ainda adverte que, num momento de planejamento de atividades, sem um pouco de atenção, ele pode se tornar uma longa série de explicações com pouca oportunidade para os alunos resolverem problemas. Ele orienta que cada atividade seja examinada em busca de garantir o trabalho cognitivo que os alunos irão desenvolver, respeitados os limites cognitivos deles. A avaliação das atividades propostas deve responder questionamentos tais como: com que frequência o trabalho cognitivo ocorre, se ele está mesclado nas tarefas cognitivas, se os alunos já possuem o conhecimento prévio necessário para resolver aquele problema. Ao identificar os desafios propostos, deve ser observado se eles estão abertos a resultados negativos, como, por exemplo, falta de compreensão do que é necessário fazer, improbabilidade de resolução do problema ou o fato dos alunos simplesmente tentarem adivinhar o que você gostaria que eles dissessem ou fizessem não gerando os resultados esperados.

É importante que os problemas a serem resolvidos sejam esclarecidos de modo a ganhar a atenção dos alunos. A questão a ser considerada nessa etapa é como fazer dos problemas algo interessante. Uma estratégia comum é tentar tornar o material “relevante” para os alunos a partir de uma aproximação por meio da curiosidade. No entanto, para alguns materiais, é difícil utilizar tal estratégia. Usar da curiosidade dos alunos se justifica

pelo fato de que ela é provocada quando eles percebem que são capazes de resolver o problema. Neste cenário, o desafio do professor está em descobrir qual a pergunta que fará os alunos se concentrarem e quererem saber a resposta.

Segundo WILLINGHAM (2011), na atividade a ser proposta, deve ser considerada qual deve ser a questão-chave e como pode ser formulada de modo a ter o nível exato de dificuldade. Assim o professor estará respeitando as limitações cognitivas de seus alunos.

Para manter o foco e não perder a atenção dos alunos, o professor deve alternar o ritmo do trabalho. É inevitável em algum momento perder a atenção dos alunos e é provável que isso aconteça quando eles se sentirem confusos. No entanto, WILLINGHAM (2011) traz um alento aos docentes quando afirma que é relativamente fácil recuperar a atenção deles. Promover mudanças ou alternâncias atraem a atenção dos estudantes. Quando muda de assunto, inicia uma nova atividade ou, de uma maneira ou de outra, mostra que está alterando as direções, a atenção de praticamente todos os alunos se volta ao professor e haverá uma nova chance de envolvê-los. O autor orienta que as mudanças sejam planejadas e utilizadas ao longo das aulas de acordo com a necessidade, baseadas no monitoramento da atenção da classe.

Segundo o autor, para encontrar o ponto ideal de dificuldade, experiência em sala de aula é o melhor guia para o professor. Portanto, tomar nota das práticas experimentadas permite que o professor tome decisões para ações futuras com base em uma observação simples: o que quer que funcione deve fazer de novo e aquilo que não funcionar deve ser descartado. Portanto, recomenda-se que tudo seja anotado, tentando fazer disso um hábito para recordar seu sucesso em medir o nível de dificuldade dos problemas que propuser aos seus alunos.

A resolução de problemas considerada como metodologia de ensino representa um contexto bastante propício à construção de conhecimento matemático e de desenvolvimento da mente humana.

Desta forma, o treinamento cerebral é imprescindível, pois, para que os problemas sejam resolvidos, é necessária informação adequada do ambiente, espaço na memória de trabalho e a exigência de fatos e procedimentos contidos na memória de longo prazo.

Portanto, não há formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula de Matemática, mas conhecer um pouco sobre como o pensamento acontece ajudará a entender o que coloca dificuldades no pensar. Isso, por sua vez, ajudará nas decisões dos professores para proporcionar meios de tornar o pensamento mais fácil

para os alunos e, conseqüentemente, permitirá que eles apreciem mais as atividades escolares.

Após a realização da pesquisa descrita nesta seção com objetivo de justificar a abordagem pedagógica por meio da resolução de problemas surgiu a questão da escolha de quais problemas seriam adequados. As questões das provas da OBMEP são uma fonte de problemas que abordam diversos tópicos de Matemática. As indagações a serem respondidas eram se estes problemas seriam, não apenas instigantes e desafiadores, mas adequados para alunos do 6º ano de uma escola pública municipal, numa cidade do interior, sem muitos recursos disponíveis.

Esta cidade está situada no sul fluminense do Estado do Rio de Janeiro, uma região de montanhas com clima ameno com extensa área de preservação ambiental.

A turma que participou das atividades é formada por alunos que ingressam nessa unidade escolar passando por um processo seletivo onde são submetidos a uma prova de conhecimento básico de língua portuguesa e Matemática, como requisito para permanecer na unidade.

As duas turmas existentes de sexto ano do Ensino Fundamental são formadas com os 50 melhores colocados formando assim turmas com, no máximo, 25 alunos cada turma.

Os alunos da turma 601 foram os únicos que participaram da pesquisa por ser a única turma desta etapa de escolaridade com a qual o autor trabalha regularmente.

### **2.3 OS PROBLEMAS NAS PROVAS DA OBMEP**

Como justificado na seção anterior, a habilidade na resolução de problemas é muito importante no ensino-aprendizagem de Matemática. A Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas – OBMEP, criada em 2005, explora problemas com abordagens bem diversificadas com os objetivos principais de estimular o estudo de Matemática e de identificar alunos com alto potencial em Matemática para, posteriormente, investir no desenvolvimento desses alunos, incentivando o ingresso deles em universidades, de modo a promover a continuidade das pesquisas em Matemática no Brasil. (OBMEP, 2019)

O público-alvo da OBMEP é composto por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até o último ano do Ensino Médio e as provas são diferentes, de acordo com o nível de escolaridade dos alunos: N1, para alunos do 6º e 7º anos do Ensino

Fundamental; N2, para alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e N3, para alunos do Ensino Médio.

As vertentes exploradas nessas provas abrangem as áreas de aritmética, álgebra, geometria, medidas e grandezas, estatística e probabilidade além de avaliar as atitudes dos alunos frente a esses problemas.

Os problemas, normalmente, são organizados nas provas de modo que o grau de dificuldade seja crescente à medida que o aluno avance nas questões. Naturalmente, esse pressuposto é baseado, inicialmente, em habilidades e procedimentos essenciais, sendo estes elevados gradualmente ao longo da prova até atingir condições de uso de recursos matemáticos considerados mais avançados para aquela fase de estudos.

Isto fica claro na divisão da prova em duas fases, a primeira objetiva e a segunda discursiva. Nesta última, a utilização da “linguagem formal matemática” é importante para justificar o desenvolvimento lógico da solução dos problemas.

Uma simples observação da elevação do grau de dificuldade ao longo das provas nos remete a questionar se a instrução matemática nas escolas públicas possui recursos que possibilitem promover o desenvolvimento cognitivo dos alunos, nesta fase escolar, de modo que possam atingir o grau de maturidade em resolução de problemas necessário para um bom resultado nas provas da OBMEP.

Outra observação comum entre alunos e até mesmo entre professores da escola básica é que “as questões das provas da OBMEP nada têm a ver com os assuntos tradicionalmente tratados em sala de aula”.

Para comprovar ou refutar esta última afirmação, foi realizada para esta dissertação uma análise comparativa entre a Base Nacional Curricular Comum – BNCC para o Ensino Fundamental (6º ano) e as questões das provas da OBMEP (N1, isto é, alunos do 6º e 7º anos, fase 1, prova objetiva) aplicadas nos anos 2015-2017, procurando alguma correlação entre as habilidades e competências previstas no documento para a série/ano de escolaridade e as questões das provas.

O trabalho se desenvolveu com a análise de cada questão observando o assunto abordado, o campo de concentração, ou unidade temática, e quais as habilidades esperadas para que o aluno pudesse construir uma solução para o problema em questão. Em seguida, foi buscado, entre os discriminantes de habilidades nos documentos norteadores, alguma correspondência que estivesse de acordo com o que havia sido percebido inicialmente. Nestas provas analisadas, foi possível estabelecer uma correlação

em todas as 60 questões (20 de cada prova) com, pelo menos, um dos discriminantes do documento BNCC, como acontece nos quatro exemplos seguintes:

12. Carlos tem um tabuleiro mágico 3 x 3 com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

- A) 0  
B) 1  
C) 3  
D) 6  
E) 9

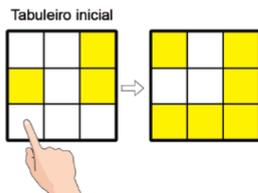


Figura 01 – Fonte: OBMEP 2016

REFERENCIAL BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
NÚMEROS	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
GEOMETRIA	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de régua, esquadros e softwares	(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Tabela 01 – Fonte: BNCC 2019

5. Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

- A) 8  
B) 9  
C) 10  
D) 12  
E) 16



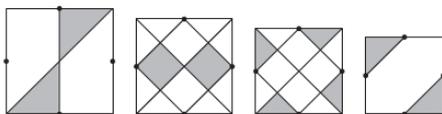
Figura 02 – Fonte: OBMEP 2015

REFERENCIAL BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
NÚMEROS	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.
PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	Coleta de dados, organização e registro. Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações	(EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.

Tabela 02 – Fonte: BNCC 2019

7. Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados.



Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a  $\frac{1}{4}$  de sua área?

- A) 0  
B) 1  
C) 2  
D) 3  
E) 4

Figura 03 – Fonte: OBMEP 2015

REFERENCIAL BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
NÚMEROS	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
GEOMETRIA	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
GEOMETRIA	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de régua, esquadros e softwares	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como régua e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
GRANDEZAS E MEDIDAS	Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Tabela 03 – Fonte: BNCC 2019

6. Na rede de distribuição de água representada abaixo, a água passa pelos canos como indicado pelas setas e se distribui igualmente em cada ramificação. Em uma hora passaram 200 mil litros de água pela saída X. Quantos litros de água passaram pela saída Y nessa mesma hora?

- A) 100 mil litros  
B) 130 mil litros  
C) 300 mil litros  
D) 450 mil litros  
E) 600 mil litros

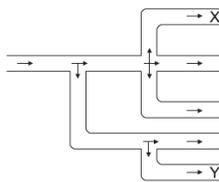


Figura 04 – Fonte: OBMEP 2017

REFERENCIAL BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
NÚMEROS	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
NÚMEROS	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
NÚMEROS	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

Tabela 04 – Fonte: BNCC 2019

É importante observar que os PCN – Matemática 3º ciclo (para 6º e 7º anos) era o documento norteador para o ensino de Matemática desde 1998. No entanto, no Plano Nacional de Educação de 2014, via trabalho realizado por especialistas, a BNCC foi preparada e, em abril de 2017, o Ministério da Educação (MEC) concluiu a sistematização e encaminhou a última versão ao Conselho Nacional de Educação (CNE). A BNCC pôde, então, receber novas sugestões para seu aprimoramento, por meio das audiências públicas realizadas nas cinco regiões do País e foi aprovada posteriormente. A BNCC é o documento que, atualmente, estabelece o conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis para que todos os estudantes, das redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares, tenham uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas.

Notoriamente, os PCN é um documento muito mais amplo do que a BNCC, uma vez que as diretrizes curriculares para o 3º ciclo abarcam dois segmentos, atualmente do 6º e 7º anos de escolaridade e, no entanto, a BNCC, que corresponde às orientações curriculares apenas para o 6º ano de escolaridade, foi suficiente para cobrir todas as questões.

Com isso, pudemos refutar a afirmação apresentada anteriormente. Quanto ao primeiro questionamento, pode-se concluir que, se os alunos não se encontram preparados para as provas da OBMEP, é porque não foram conduzidos adequadamente, no processo ensino-aprendizagem, de acordo com as orientações curriculares oficiais.

A utilização das questões de provas anteriores da OBMEP torna-se, então, um excelente referencial para conduzir as atividades formativas dos alunos, compreendendo que tais provas contêm um excelente parâmetro para orientação das condições ideais de aprendizagem de Matemática dos alunos que se deseja atingir já no início da segunda etapa do Ensino Fundamental.

Neste contexto, criar ou selecionar material de apoio para auxiliar o professor de Matemática, em particular, de turmas do 6º ano, de modo a que ele consiga trabalhar em sala de aula com resolução de problemas da OBMEP de forma prazerosa com seus alunos, foi um objetivo a ser perseguido neste trabalho. Levamos em conta que o uso de ferramentas diversificadas para o ensino de Matemática, seja com materiais concretos ou tecnológicos, ainda é pouco explorado e pode ser muito útil no processo de ensino.

O ensino baseado na manipulação do objeto de estudo tem como pressuposto tornar a aprendizagem um resultado da construção do conhecimento pelo aluno, processo em que se respeitam as ideias prévias dos alunos no processo de aprendizagem.

Portanto, o uso de material concreto pretende favorecer o surgimento de condições para que os alunos assumam o centro da atividade educativa, tornando-se agentes do aprendizado, articulando abstrato e concreto, para que encontrem satisfação em resolver problemas ao relacionar teoria e prática em um contexto que pode ser puramente abstrato.

Buscamos, assim, responder de uma forma positiva ao questionamento inicial, isto é, obter recursos que possibilitem às escolas públicas promover o desenvolvimento cognitivo dos alunos, nesta fase escolar, de modo que possam atingir o grau de maturidade em resolução de problemas apontado como objetivo da aprendizagem pelos PCN e BNCC e, além disso, necessário para um bom resultado nas provas da OBMEP.

## **CAPÍTULO 3**

### **OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS**

A apresentação da Matemática de maneira lúdica tende a estabelecer uma conexão emotiva e permite que os alunos adolescentes do 6º ano vivenciem novas experiências para que possam gostar mais de Matemática e realizem atividades que promovam estímulos para suas habilidades lógicas.

Para entender o papel que os estímulos de um ambiente lúdico representam nesse cenário, é necessário compreender a importância das emoções em todos os processos de aprendizagem.

No momento em que um aluno recebe uma instrução por meio de uma informação, antes que a informação seja absorvida de um modo intelectual, ela é processada pelo sistema límbico. O sistema límbico é o responsável basicamente por controlar as emoções e as funções de aprendizado e da memória (ESPERIDIÃO et. al., 2008 p.56)

Isso nos sugere que o aprendizado é condicionado pelas emoções positivas ou negativas que ocorrem no momento de aprender. Assim, a aprendizagem, antes de atingir um contexto de racionalidade, irá mexer com a emoção do aluno.

Portanto, a emoção abre as portas para o processo de aprendizagem e por isso é tão importante despertar a curiosidade e o interesse nos alunos. Os alunos tendem a prestar atenção naquilo que lhes proporciona uma recompensa emocional positiva e tendem a desprezar o que produz uma compensação emocional negativa.

O uso de recursos diferenciados para o ensino de Matemática tem como objetivo criar situações que causem impacto emocional positivo, isto é, uma busca em promover algum nível de motivação, excitação ou, até mesmo, um ambiente de diversão. Como esses recursos tendem a envolver vários sentidos, o ensino torna-se ainda melhor, pois deixará uma marca emocional mais eficaz, promovendo o aprendizado.

A neurociência vem trazer clareza para que possamos melhor compreender o organismo humano responsável pela aprendizagem e, dentre outras orientações, esclarece que o ser humano aprende através de experiências positivas e agradáveis e que estados emocionais negativos, como medo ou ansiedade, tornam o aprendizado difícil.

O uso de materiais manipuláveis para a resolução de problemas ganha mais positividade neste cenário, dado que as experiências sensoriais promovidas pela interação

do aprendiz com os objetos facilitadores do pensamento passam a compor a memória do estudante.

Com o auxílio de materiais manipuláveis é possível garantir uma nova perspectiva acerca de um objeto com o qual o aluno só teve contato mediante informações recebidas por parte de livros ou explicações teóricas dadas por professores, possibilitando uma experiência única deste aluno com este objeto, ampliando suas percepções e promovendo rearranjos de ideias na memória de trabalho.

É necessário que se compreenda que tudo que se faz em Matemática tem origem numa leitura de mundo e arquivamento de fatos capazes de mobilizar saberes e intervir no contexto no qual está inserido. Ler o mundo é uma operação inteligente, difícil, exigente, mas gratificante e ninguém lê ou estuda autenticamente se não assume, diante do texto ou do objeto da curiosidade, a postura crítica, de modo a se sentir sujeito da curiosidade, sujeito da leitura, sujeito do processo de conhecer. Nesse sentido, ler é procurar, buscar, criar a compreensão do lido.

Os materiais manipuláveis podem oferecer o ambiente favorável para que se possa ampliar a percepção, leitura e releitura do objeto de estudo promovendo uma visão crítica deste objeto.

O exercício do pensamento crítico perpassa pela leitura do universo do entorno e, através das experiências sensoriais, faz uma conexão entre a cotidianidade com a generalização que se opera na linguagem escolar, vinculada, sempre que possível, ao concreto sensível.

Portanto, a vivência ativa com materiais manipuláveis permite experiências sensoriais no concreto tangível e promove as componentes cognitivas fundamentais e comportamentais para que os alunos possam desenvolver um discernimento para aprender e compreender melhor a Matemática.

É necessário que o ensino conduza o aluno adolescente a se sentir capaz de construir ou selecionar modelo matemático adequado à resolução de um problema dado.

O uso de materiais manipuláveis pode promover o desenvolvimento da capacidade de modelar uma situação problema e aprimorar a fase de decisão crítica, para selecionar qual elemento matemático mais se adéqua à situação a ser modelada.

Do ponto de vista de um fazer pedagógico, o nível de dificuldade deve ser elevado gradativamente até atingir uma abordagem que integre diferentes tipos de conteúdo e desafie o estudante a encontrar os modelos apropriados por heurísticas, gerando, desta forma, uma continuidade de descobertas.

Contudo, há resistências por parte de um número significativo de pessoas quanto ao uso de recursos diferentes dos tradicionais. Muitos continuam acreditando que para aprender, deve se fazer como sempre foi feito, pois em dado momento da história “funcionou”.

Para a atual geração, exposta a diversos elementos atrativos fora do contexto escolar, é necessário encontrar meios para garantir que não percam por completo a motivação para estudar e mantenham uma confiança razoável em suas habilidades, aprendendo com seus sucessos e também com seus erros.

Uma pergunta que pais e professores devem se fazer é: “Como fazer as crianças terem prazer em aprender Matemática?”.

Professores determinados a mudar o ensino de Matemática entendem que pesquisar, manipular e jogar é a maneira ideal de aprender e se revelam como meios de evitar que os alunos adolescentes passem a odiar problemas por fazê-los mecanicamente, mas passem naturalmente a gostar de resolver desafios matemáticos e quebra-cabeças.

Existem diversos recursos que se pode usar para promover a aprendizagem em Matemática. Neste trabalho, daremos uma atenção especial para os materiais manipuláveis.

Estes materiais são projetados para que as crianças e adolescentes possam visualizar circunstâncias que revelam conceitos matemáticos. Neste sentido, podemos afirmar que a falta de materialização faz com que a Matemática seja demasiadamente abstrata e, em muitos casos, incompreensível para os alunos.

Os materiais manipuláveis contribuem para a aprendizagem de Matemática na escola e em qualquer outro espaço onde se proponha o desenvolvimento do indivíduo. Neste contexto, é possível que os alunos possam se divertir inventando estratégias mentais de cálculo. No lugar de memorizar uma infinidade de fórmulas, eles podem deduzir as fórmulas que possam existir, observando, testando, formulando hipóteses e verificando sua validade.

O uso do material escolar comum, como leitura de livros, escritas e contas realizadas em cadernos tendem a ser enfadonhos e são classificados como “chatos” pelos alunos, levando-os a ficarem entediados.

A construção do conhecimento matemático com auxílio de materiais manipuláveis possibilita que as atividades oferecidas aos alunos os façam questionar as coisas e, ao mesmo tempo, permite a experimentação do objeto tornando o ambiente de aprendizagem mais lúdico e, conseqüentemente, menos enfadonho.

O professor pode produzir materiais a partir de objetos reciclados e utilizá-los para criar atividades ou pode usar para elas objetos como cartas de baralho, dominó, dados entre outros.

É necessário ter a compreensão de que o material produzido nunca deve ser um fim em si mesmo, mas funcionar como uma ponte entre a Matemática e as mentes dos alunos adolescentes. Deve ser um recurso educativo capaz de ajudar a melhor compreender um cenário de problema matemático, se constituindo no ambiente escolar como um meio para favorecer a aprendizagem. A aprendizagem matemática exige que as propostas no fazer pedagógico estimulem o raciocínio lógico-matemático.

Neste contexto, não se trata de usar um recurso sem um propósito bem estabelecido, é necessário que este seja acompanhado de uma questão ou um desafio. Caso contrário, o cérebro se acomoda e não "se esforça" para aprender.

Neste sentido, ao compreender que um recurso educacional é uma ajuda ou um meio para promover a aprendizagem, entendemos que esses recursos matemáticos não são mágicos, mas facilitam muito o aprendizado da Matemática pelas crianças e pelos adolescentes.

### **3.1- MATERIAIS MANIPULÁVEIS ESCOLHIDOS PARA AS ATIVIDADES**

Os materiais em questão têm como proposta trazer algum tipo de significado concreto à investigação dos problemas selecionados para as atividades do capítulo 4 a partir da manipulação e da percepção de suas diversas aplicabilidades, com ênfase em uma estrutura lógica, sem perder a essência de que devem ser facilitadores para o desenvolvimento cognitivo e, ao mesmo tempo, desafiadores para os alunos.

A experiência sensorial resultante da manipulação de objetos se apresenta como alternativa para ampliar a segurança dos alunos de modo a promover uma atitude de representação tanto oral quanto escrita das condições e resultados de uma investigação Matemática, desenvolvendo no aluno adolescente um maior domínio da linguagem simbólica Matemática.

Neste contexto, um ambiente de experimentação com materiais manipuláveis pode fortalecer também as convicções dos alunos acerca de procedimentos ou resultados em uma vivência de constante contato com resolução de problemas o permitirá

estabelecer conexões nervosas próprias para esse fim de modo a ser um meio relevante para garantir uma aprendizagem significativa e duradoura.

De acordo com o tipo de problema selecionado das provas da OBMEP, que foi trabalhado nas oficinas e detalhado no capítulo 4, os materiais manipuláveis selecionados foram os seguintes:

### **Escalas de Cuisenaire**

O Material de Cuisenaire é utilizado desde 1961 como recurso facilitador para o ensino da Matemática, proporcionando aos alunos experiências que lhes possibilitam um crescimento na construção do número e das operações concretas. Permite o desenvolvimento da criatividade e serve para iniciar a criança na contagem e nas operações matemáticas. Foi idealizado pelo professor, músico e matemático Georges Cuisenaire, ampliado e propagado pelo matemático, psicólogo e educador Caleb Gattegno.

O material consiste de uma coleção de barrinhas de madeira que representam os números de 1 a 10. Cada número tem um comprimento e uma cor diferentes. São cinquenta e cinco peças sendo: quinze barrinhas de cor branca, dez barrinhas de cor vermelha, seis barrinhas de cor verde clara, cinco barrinhas de cor roxa, quatro barrinhas de cor amarela, quatro barrinhas de cor verde escura, três barrinhas de cor preta, três barrinhas de cor marrom, três barrinhas de cor azul, duas barrinhas de cor laranja.

Com esse material, pode-se desenvolver aprendizagem em Matemática direcionada para a Educação Infantil e níveis superiores. Com eles pode-se consolidar a noção de número, descobrir relações numéricas como fração, proporcionalidade, m.d.c., m.m.c., e também estudar medidas e geometria.

É um material multivalente que proporciona elaboração e permite à criança estabelecer relações entre as peças que o compõem, sugerindo uma multiplicidade de conceitos matemáticos. As crianças fazem descobertas dentro do seu próprio ritmo de aprendizagem e atingem níveis mais complexos.

O Material Cuisenaire, mostrado na figura 5 a seguir, constitui um dos exemplos mais significativos dos caracteres de multivalência e dinamismo exigidos em todo o material didático moderno. Leva o aluno a experimentar e a descobrir as verdades matemáticas por meio da investigação.

Este material pode ser adaptado para utilização por alunos com deficiência visual, aumentando o tamanho das barras e utilizando texturas diferentes no lugar da distinção por cor.



Figura 05 – Fonte: [www.edupp.com.br](http://www.edupp.com.br)

## Cartas Numeradas

São um conjunto com aproximadamente 120 cartas numeradas de 0 a 9, elaboradas em papel vergê e plastificadas, criadas pelo autor deste trabalho especialmente para facilitar a manipulação de formação numérica. Com elas é possível fazer simulação de resultados de vários tipos de problemas envolvendo contagem.

As cartas foram criadas com o objetivo de propiciar aos alunos uma forma de manipulação e organização decimal, facilitando as construções dos números envolvidos com quantidade de algarismos bem definida e posicionamentos estratégicos, como apresentado na figura 06.

Suas potencialidades ainda não foram totalmente exploradas por terem sido construídas pelo autor e não estão disponíveis no mercado para compra, mas se tornaram importantes na resolução de problemas em que havia correlações de números conectados por alguma de suas características como no caso do problema 14 da OBMEP 2018 destacado na figura 07.

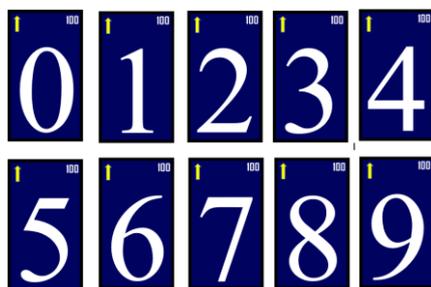


Figura 06 – Fonte: o autor

14. Na conta abaixo, cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo representado pela letra *P*?

- A) 0
- B) 2
- C) 5
- D) 7
- E) 9

$$\begin{array}{r}
 O B M E P \\
 + \quad O B M \\
 \hline
 2 0 0 0 0
 \end{array}$$

Figura 07 – Fonte: OBMEP 2018

No caso do problema da figura 07 a solução é facilmente encontrada quando fixado um algarismo correspondente a uma das da palavra OBMEP onde a letra O equivale ao algarismo 1, a letra B equivale ao algarismo 9, a letra M equivale ao algarismo 8, a letra E equivale ao algarismo 0 e a letra P equivale ao algarismo 2. A possibilidade de manipulação e de tentativas para garantir a equivalência entre as letras e os algarismos gerou o estímulo ideal para que os alunos chegassem à solução do problema. (ver figura 24 – Capítulo 4)

## Geoplano

Elaborado em uma placa de madeira, conforme mostra a figura 8, com pinos feitos de alfinetes coloridos simulando o plano cartesiano, permite construir segmentos de retas com elásticos coloridos.

Com ele é possível construir formas geométricas diversas, observar relações de posição, fazer observações de área e perímetro de regiões semelhantes, entre outras aplicações em que se possa usar a criatividade para construir.

Este material é também uma ferramenta importante para a aprendizagem de geometria, principalmente no caso de alunos com deficiência visual.

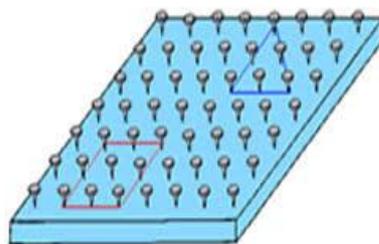


Figura 08 – Fonte: educador.brasilecola.uol.com.br

## Quadrículas de dupla face pintadas

Foram confeccionados 75 quadrados de tamanhos idênticos com dimensões de 4cmx4cm, em madeira, com espessura de aproximadamente 0,4cm, sendo um lado preto e o outro amarelo, conforme mostrado na figura 9. Esse material sugere unidade de área e auxilia na formação de formas poligonais irregulares.

Semelhante ao que ocorreu no caso das cartas numeradas não houve uma exploração ampla de suas potencialidades por ser algo construído pelo autor e que não

está disponível no mercado para compra, porém o material se mostrou relevante na resolução de problemas nas oficinas realizadas durante a pesquisa.

Com ele, foi possível fazer observações de unidades de área e perímetro de figuras geométricas diversas como no caso do problema 13 da OBMEP 2016, na figura 10.

Também pode ser utilizado por alunos com deficiência visual, após adaptação que permita distinguir os lados de cada quadrado, com o uso do tato, o que não ocorre com a mudança de cor.

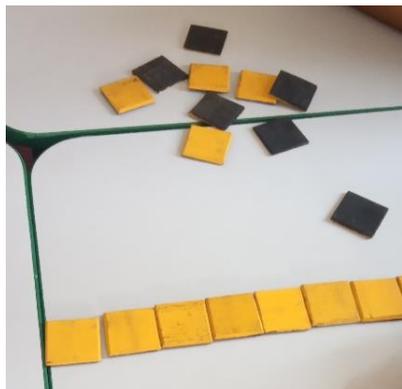


Figura 09 – Fonte: o autor

13. Abaixo temos uma sequência de figuras formadas por quadradinhos de 1 cm de lado. Cada figura da sequência, a partir da segunda, é formada acrescentando-se à figura anterior um retângulo igual ao da Figura 1, deslocando-o de um quadradinho, ora para cima, ora para baixo, como mostra a ilustração. Qual é o perímetro da figura com 1000 quadradinhos?

- A) 220 cm
- B) 380 cm
- C) 400 cm
- D) 414 cm
- E) 418 cm

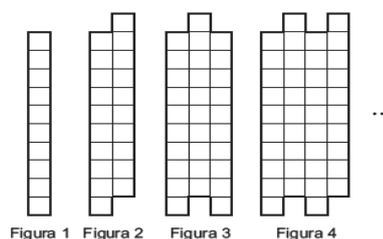


Figura 10 – Fonte: OBMEP 2016

## Bolinhas coloridas

Consiste em bolinhas coloridas confeccionadas de material leve e emborrachado. Este material também foi idealizado pelo autor deste trabalho. Com elas é possível trabalhar com noções de conjuntos e contagem das mais variadas formas.

O problema apresentado na figura 12 ilustra uma possibilidade de uso deste recurso. Observe que o problema 20 da OBMEP 2017 utiliza uma associação direta com este material.

A utilização dele por parte de alunos com deficiência visual necessita da escolha de bolas com tamanhos distintos, associando o tamanho à cor.



Figura 11 – Fonte: o autor

20. Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de sete bolas com três cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?

- A) 11
- B) 14
- C) 21
- D) 22
- E) 23

Figura 12 – Fonte: OBMEP 2017

## **CAPÍTULO 4**

### **ATIVIDADES EXPERIMENTAIS E SEUS RESULTADOS**

O objetivo de desenvolver a habilidade de resolução de problemas entre os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e a escolha de problemas das provas da OBMEP já estavam plenamente justificados pela pesquisa realizada anteriormente e apresentada no capítulo 2. A capacidade cognitiva dos alunos para trabalhar com esta proposta também já estava estabelecida, no capítulo 1. A proposta de utilizar materiais concretos manipuláveis para auxiliar os alunos a desenvolver raciocínios lógicos para resolver estes problemas, conforme descrita no capítulo 3, precisava ser experimentada. Os benefícios desta estratégia pedagógica poderiam ser comprovados (ou não), comparando a habilidade dos alunos na resolução de problemas, antes e depois da realização de oficinas de problemas de provas da OBMEP, com utilização dos materiais manipuláveis.

A seguir, serão descritas as três atividades realizadas (teste diagnóstico, oficinas de resolução de problemas, teste de avaliação) e, ao final do capítulo, será apresentada uma avaliação, quantitativa e qualitativa, dos resultados alcançados.

#### **4.1- O TESTE DIAGNÓSTICO**

No dia 04 de junho de 2019 foi aplicado um teste com 4 problemas de provas da OBMEP, no horário de aulas regulares, em um grupo de 22 alunos do 6º ano que foram voluntários para as atividades. O tempo de execução foi de 100 minutos, que corresponde a 2 tempos de aula de 50 minutos cada. A maioria dos alunos não usou todo o tempo disponível, mas usaram mais de 50% do tempo. Apenas 6 alunos usaram todo o tempo na execução da atividade.

Os problemas do teste foram aplicados após ter sido explicado aos alunos o motivo pelo qual estavam sendo avaliados e o objetivo a ser alcançado. Os alunos aceitaram participar do teste.

A seguir, temos os quatro problemas selecionados, um classificado como fácil (F), dois classificados como de nível de dificuldade média (M) e um classificado como difícil (D). Estes mesmos problemas já foram analisados no capítulo 3, sendo considerados adequados para alunos do 6º ano, segundo a recomendação dos PCN e da BNCC.

## 1. OBMEP 2016 Tipo: D

12. Carlos tem um tabuleiro mágico 3 x 3 com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

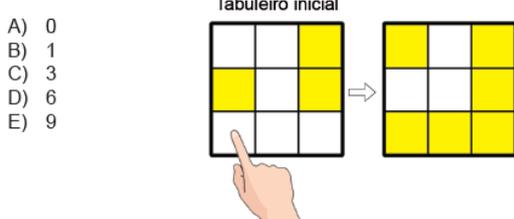


Figura 13 – Fonte: OBMEP 2016

## 2. OBMEP 2015 Tipo: F

5. Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

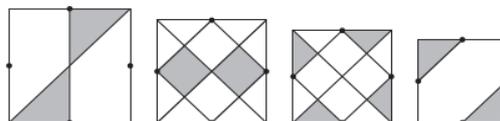
- A) 8  
B) 9  
C) 10  
D) 12  
E) 16



Figura 15 – Fonte: OBMEP 2015

## 3. OBMEP 2015 Tipo: M

7. Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados.



Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a  $\frac{1}{4}$  de sua área?

- A) 0  
B) 1  
C) 2  
D) 3  
E) 4

Figura 14 – Fonte: OBMEP 2015

## 4. OBMEP 2017 Tipo: M

6. Na rede de distribuição de água representada abaixo, a água passa pelos canos como indicado pelas setas e se distribui igualmente em cada ramificação. Em uma hora passaram 200 mil litros de água pela saída X. Quantos litros de água passaram pela saída Y nessa mesma hora?

- A) 100 mil litros  
B) 130 mil litros  
C) 300 mil litros  
D) 450 mil litros  
E) 600 mil litros

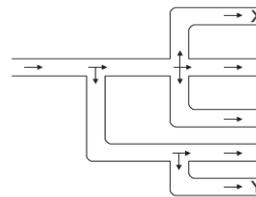


Figura 16 – Fonte: OBMEP 2017

Os alunos participantes, conforme as fotos a seguir nas figuras 17-20, demonstraram, em sua maioria, muita pré-disposição para executar a atividade.



Figura 17 – Fonte: o autor



Figura 18 – Fonte: o autor



Figura 19 – Fonte: o autor



Figura 20 – Fonte: o autor

## 4.2 AS OFICINAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No dia 27 de junho de 2019 foi realizada uma atividade no contraturno, ou seja, fora do horário de aulas regulares, sob a forma de oficina de resolução de problemas, para os 10 alunos que compareceram, onde foram disponibilizados 3 problemas de provas da OBMEP, que tinham como material de apoio as cartas numeradas, e 4 problemas de provas da OBMEP, que tinham como material de apoio a escala de Cuisenaire. Nenhum dos problemas fazia parte do teste diagnóstico realizado anteriormente. Todos os problemas são adequados a partir da análise comparativa com o recomendado pelos PCN e pela BNCC. Os alunos trabalharam com os problemas de forma colaborativa.

O tempo de execução foi de 100 minutos, que corresponde a 2 tempos de aula de 50 minutos cada.

O uso das cartas numeradas teve uma boa aceitação pelos alunos. Estes tiveram bastante entusiasmo e manifestaram satisfação com o material, como mostram as fotos 21-24 a seguir.



Figura 21 – Fonte: o autor



Figura 22 – Fonte: o autor



Figura 23 – Fonte: o autor



Figura 24 – Fonte: o autor

No entanto, o uso da escala de Cuisenaire foi bem mais difícil para a compreensão deles. Foi possível notar que os conceitos de fração e proporcionalidade não estavam muito bem compreendidos por eles, o que cria diversas barreiras para manipulação e até mesmo para compreensão dos enunciados.

Desta forma, o nível de intervenção do professor foi aumentado até o ponto de sentir a necessidade de resolver uma questão por indução, e mesmo assim, ao final, não foi possível dizer se eles estavam mais confiantes para tentar solucionar uma outra questão em contexto semelhante, pois, ao seguirem para esta outra questão, também não obtiveram um bom resultado.



Figura 25 – Fonte: o autor



Figura 26 – Fonte: o autor

No dia 4 de julho de 2019 foi realizada outra atividade, no contraturno, também sob a forma de oficina de resolução de problemas, para os 14 alunos que compareceram, sendo que destes, 8 tinham participado da atividade anterior.

Nesta oficina foram disponibilizados 5 problemas de provas da OBMEP que tinham como material de apoio o Geoplano e 2 problemas de provas da OBMEP que tinham como material de apoio os quadradinhos bicolores. Todos os 7 problemas não tinham sido utilizados no teste diagnóstico e, também, tinham sido considerados

adequados aos objetivos dos PCN e da BNCC. Os alunos trabalharam sempre de forma colaborativa.

O tempo de execução foi de 100 minutos, que corresponde a 2 tempos de aula de 50 minutos cada.

O Geoplano foi o material que mais chamou a atenção dos alunos, conforme mostram as fotos 27-28, pois os alunos ficaram encantados pelas possibilidades de manipulação dos objetos coloridos e pelas possibilidades de gerar formas geométricas diversas.



Figura 27 – Fonte: o autor



Figura 28 – Fonte: o autor

No entanto, levaram um tempo para determinar a medida de um segmento reto, determinado sobre o Geoplano, por um elástico colorido esticado entre os pinos associados aos pontos inicial e final dele. Para fazer isto, tiveram que elaborar uma relação de medida, a partir do número de segmentos entre pinos consecutivos. A princípio, fizeram confusões recorrentes, realizando a contagem dos pinos situados no segmento com objetivo de estabelecer as medidas dos segmentos entre eles.

A manipulação dos quadradinhos bicolores, apresentada nas fotos 29-30, foi bem compreendida por todos, que reproduziram as figuras com facilidade.



Figura 29– Fonte: o autor



Figura 30 – Fonte: o autor

De modo geral, foi perceptível que os alunos se sentem mais à vontade quando se trata de manipulação de materiais que traduzem situações geométricas.

Foi possível observar que o tempo disponibilizado para as oficinas pareceu pouco, levando em conta que a apropriação do manuseio destes materiais, por serem novidades, estava se tornando mais evidente sempre ao final de cada período de tempo.

Parece razoável concluir que, se houvesse uma frequência maior de utilização destes materiais manipuláveis com foco em resolução de problemas, haveria um ganho de tempo considerável, pois os alunos já estariam familiarizados com eles e concentrariam seus esforços apenas nos problemas a serem resolvidos.

No dia 8 de julho, foi aplicado um teste aos alunos da turma, no horário regular de estudos, ao qual compareceram 22 alunos dentre os que estiveram nas oficinas e dentre os que não estiveram.

O tempo de execução foi de 100 minutos, o que corresponde a 2 tempos de aula de 50 minutos cada.

Neste dia a dinâmica foi alterada radicalmente para observar o comportamento dos alunos diante dos problemas apresentados. Foram disponibilizados diversos problemas de provas da OBMEP, alguns deles experimentados nas oficinas com o uso dos materiais manipuláveis, nenhum deles do teste diagnóstico, dentre os quais os alunos poderiam escolher até dois para resolver sem auxílio dos materiais manipuláveis.

Os alunos que tinham participado das oficinas demonstravam mais interesse e muito entusiasmo em buscar soluções para os problemas do que aqueles que não tinham participado.



Figura 31 – Fonte: o autor



Figura 32 – Fonte: o autor

A percepção destes ao pegar um problema para solucionar e se dispor a auxiliar um colega que não sabia qual caminho seguir demonstrava aumento de confiança em propor soluções para os problemas. Alguns alunos não se contentaram com a limitação de dois problemas e quiseram fazer mais, o que foi permitido para que não se perdesse o estímulo.

No dia 22 de agosto de 2019 foi realizada a terceira e última oficina no contraturno, para os 14 alunos que compareceram. Deste total, 9 estiveram em pelo menos uma das oficinas anteriores. Para esta atividade, foram disponibilizados 5 problemas de provas da OBMEP que tinham como material de apoio a escala de Cuisenaire e 2 problemas de provas da OBMEP que tinham como material de apoio as cartas numeradas (os 7 não faziam parte do teste diagnóstico), mas todos eram adequados atendendo aos objetivos dos PCN e da BNCC.

O tempo de execução foi de 100 minutos, o que corresponde a 2 tempos de aula de 50 minutos cada.



Figura 33 – Fonte: o autor



Figura 34 – Fonte: o autor

Nesta oficina, levou-se em conta o resultado do problema 3 OBMEP 2015 Tipo: M no teste diagnóstico. Este resultado tinha mostrado que os alunos não possuíam uma base sólida dos conceitos que envolvem fração, apesar de alguns terem uma noção sobre o assunto. Tinha sido constatada a dificuldade dos alunos em trabalhar com as ideias referentes à fração e ao pensamento relacional de proporcionalidade. Estas constatações fizeram com que se desse ênfase ao uso do material que favorece essa aprendizagem, neste caso, a Escala de Cuisenaire.

Os alunos estavam atentos às construções e apresentaram boa receptividade aos procedimentos trabalhados. A maioria deles rapidamente compreendeu as relações entre as barras e tiveram mais proatividade em manusear os objetos.

Neste contexto, foi necessária a permanência constante do professor para conduzir as construções das estratégias de solução de cada problema e foi possível perceber que alguns conceitos que não estavam bem definidos passaram a ganhar uma ressignificação por parte dos alunos a partir das experimentações. Os alunos apresentaram sintomas de cansaço e solicitaram que se mudasse de material, no que foram atendidos prontamente pelo professor com as cartas numeradas e duas questões em que não foi necessário qualquer tipo de intervenção para que construíssem uma solução para os desafios.

Vale ressaltar que, apesar de haver nitidamente um melhor aproveitamento com o uso da escala de Cuisenaire, alguns alunos afirmaram que consideram o assunto de fração chato e, portanto, tendem a evitá-lo.



Figura 35 – Fonte: o autor

### 4.3 O TESTE DE AVALIAÇÃO

No dia 27 de agosto de 2019, foi aplicado um teste, no horário regular de aulas, com os mesmos 4 problemas de provas da OBMEP que fizeram parte do teste diagnóstico do dia 4 de junho.

O tempo de execução foi de 100 minutos, que corresponde a 2 tempos de aula de 50 minutos cada.

A maioria dos alunos não usou todo o tempo disponível e, neste caso, usaram menos de 50% do tempo. Apenas 2 alunos usaram todo o tempo na execução da atividade.

Foi explicado aos alunos, antes do teste, que era esperado que as oficinas realizadas pudessem auxiliar no modo de estabelecer uma estratégia para solucionar os problemas. Os alunos aceitaram participar do teste, sendo que um deles apresentou um leve descontentamento, não tendo participado do teste diagnóstico e de nenhuma oficina. Dos 25 alunos matriculados, 24 compareceram (fotos 36 a 39).

Os alunos participantes demonstraram, em sua maioria, muita pré-disposição para executar a atividade. Os alunos, em geral, demonstravam bastante interesse, muito entusiasmo e seriedade em buscar soluções para os problemas. Estavam determinados a acertar as soluções.



Figura 36 – Fonte: o autor



Figura 37 – Fonte: o autor



Figura 38 – Fonte: o autor



Figura 39 – Fonte: o autor

O cronograma de execução (Tabela 05) revela que as atividades da pesquisa se deram em condições que não favoreceram uma sequência com intervalo de tempo razoável por haver a necessidade de adequação ao calendário da unidade escolar e nem foi possível atingir uma quantidade significativa dos alunos da turma 601, pois dentre os 25 alunos da turma apenas 7 deles estiveram nas 3 oficinas, 6 estiveram em duas e 5

compareceram uma única vez em uma das oficinas que aconteciam no contraturno. No entanto nos testes e avaliações ocorridos no horário de aulas regular o número de colaboradores foi bem superior.

## CRONOGRAMA DE EXECUÇÃO

	TESTE DIAGNÓSTICO	OFICINA 1	OFICINA 2	TESTE PRELIMINAR	OFICINA 3	AValiação
<b>DATA</b>	04 de junho	27 de junho	4 de julho	8 de agosto	22 de agosto	27 de agosto
<b>TEMPO DE DURAÇÃO</b>	100 min	100 min	100 min	100 min	100 min	100 min
<b>QUANTIDADE DE ALUNOS PRESENTES</b>	22	10	14	22	14	24
<b>VOLUNTÁRIOS</b>	88%	40%	56%	88%	56%	96%
<b>TURNOS</b>	Regular	Contraturno	Contraturno	Regular	Contraturno	Regular

Tabela 05 – Fonte: o autor

## 4.4 ANÁLISE QUANTITATIVA DOS RESULTADOS

As questões aplicadas no teste diagnóstico (Figuras 13 – 16) foram repetidas no teste de avaliação de desempenho. Inicialmente as questões foram classificadas por grau de dificuldade pelo professor, de acordo com suas considerações sobre o desempenho da turma em suas aulas regulares. No entanto, após a conclusão da atividade, foi solicitado aos alunos que dessem uma nova classificação para cada uma das questões de acordo com suas percepções, cujo resultado encontra-se no gráfico abaixo.

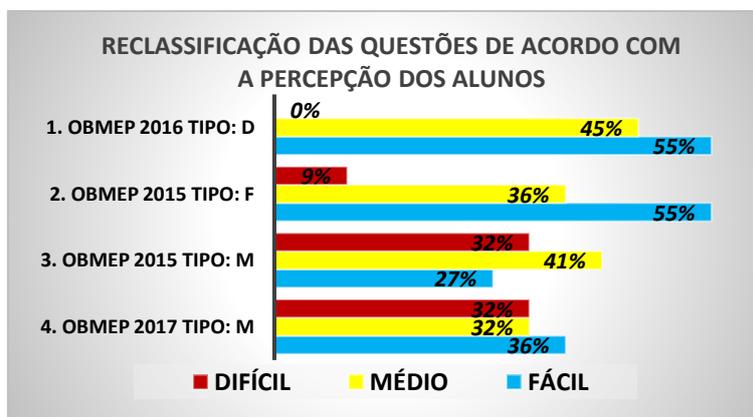


Gráfico 01 – Fonte: o autor

São apresentados, a seguir, os resultados obtidos pelos alunos, separados por questão, no teste diagnóstico e no teste de avaliação.

## 1. OBMEP 2016 Tipo: D

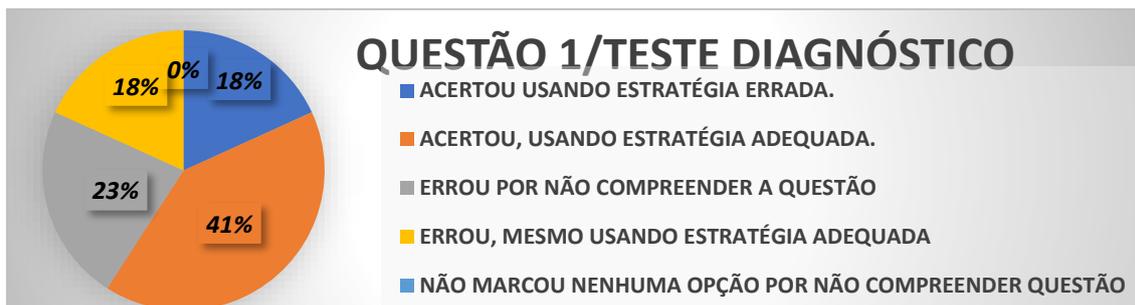


Gráfico 02 – Fonte: o autor

A questão foi considerada difícil pelo professor, mas a maioria dos alunos (55%) a considerou uma questão fácil e nenhum aluno afirmou que ela fosse difícil.

O desempenho dos alunos, nesta questão, na aplicação do teste diagnóstico, revela que a percepção dos alunos estava correta. Em sua maioria (59%) usaram estratégia correta) demonstrando assim, algum nível de compreensão do problema e nenhum deles deixou de optar por algum item.

Um dado relevante é o fato de que 18% dos participantes acertaram a questão, apesar de não terem compreendido plenamente a proposta da mesma e foi o mesmo índice (18%) para os que, apesar de aplicarem uma estratégia adequada, não escolheram opção correta.

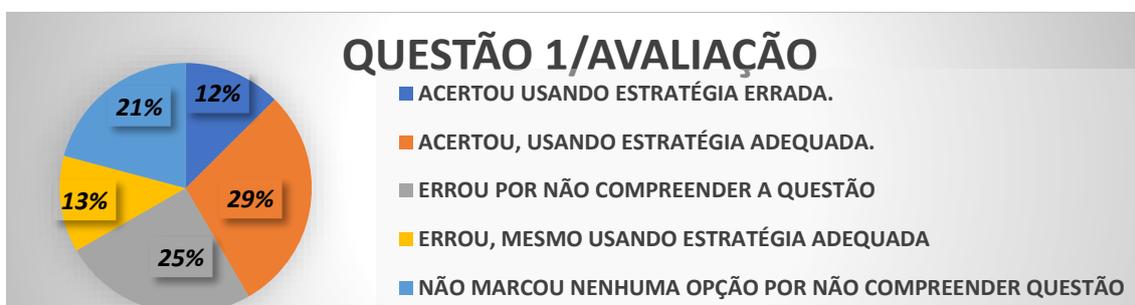


Gráfico 03 – Fonte: o autor

No teste de avaliação o desempenho dos alunos na questão comparado ao teste diagnóstico demonstra uma queda de rendimento no que diz respeito ao nível de compreensão da questão (42% usaram estratégia adequada).

O percentual de alunos que acertaram anteriormente usando estratégia errada também caiu de 18% para 12%.

O que chama muito a atenção é que o número de alunos que não optaram por marcar nenhuma opção saltou de 0% para 21% contrariando a primeira impressão que tiveram da questão no teste diagnóstico.

## 2. OBMEP 2015 Tipo: F

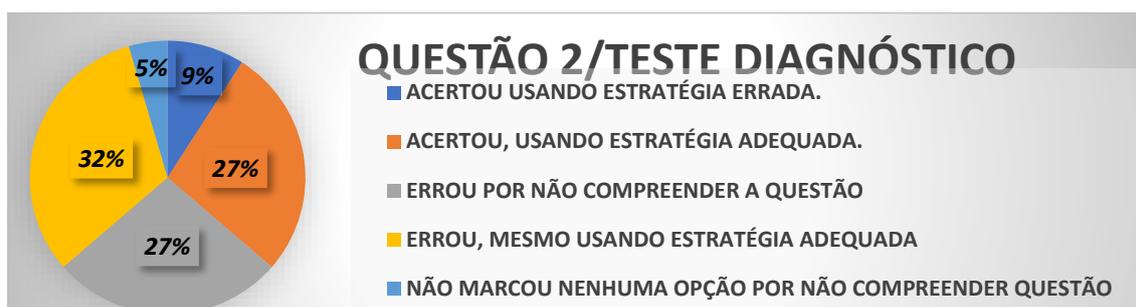


Gráfico 04 – Fonte: o autor

A questão foi considerada fácil pelo professor, e a maioria dos alunos (55%) considerou uma questão fácil realmente. No entanto alguns alunos (9%) afirmaram que esta era difícil.

O desempenho dos alunos demonstra que houve de fato uma compreensão da questão pela maioria deles (59% usou estratégia adequada). No entanto, o número de alunos que não tiveram uma compreensão da questão e nem mesmo optaram por uma das alternativas representa 5% do total de participantes.

Um dado relevante foi que 32% dos alunos que aplicaram estratégia adequada e não concluíram com a alternativa correta foi superior àqueles que concluíram com a alternativa correta (27%).

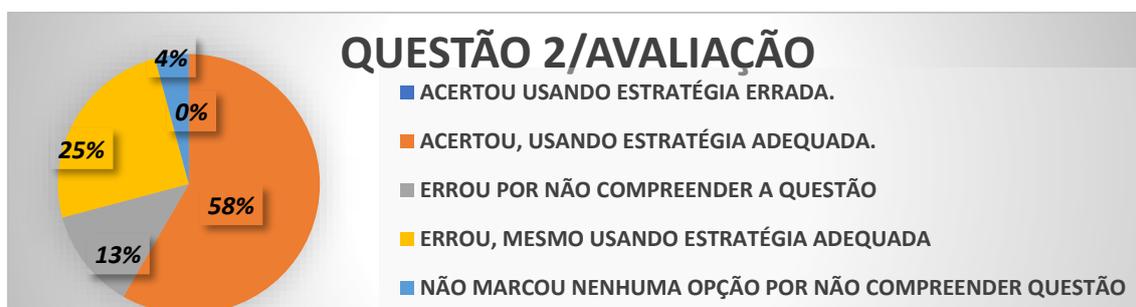


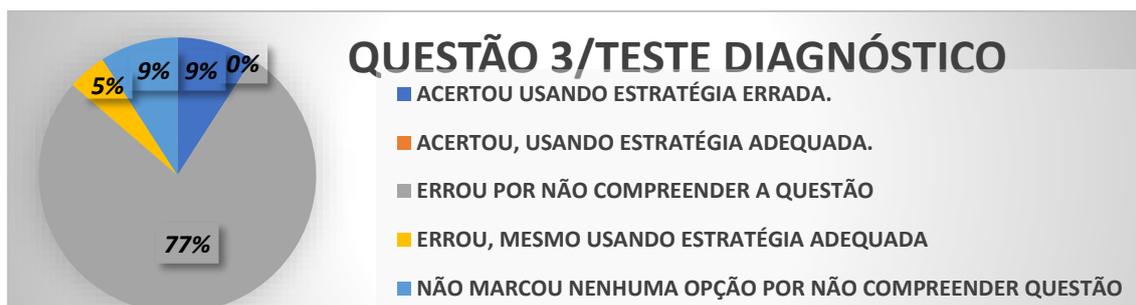
Gráfico 05 – Fonte: o autor

Corroborando com o teste diagnóstico, o desempenho nesta questão permaneceu alto e houve um aumento significativo dos alunos que tiveram uma compreensão da questão, saindo de 59% para 83%.

Todos os alunos que acertaram a questão usaram de estratégia adequada para obter a solução.

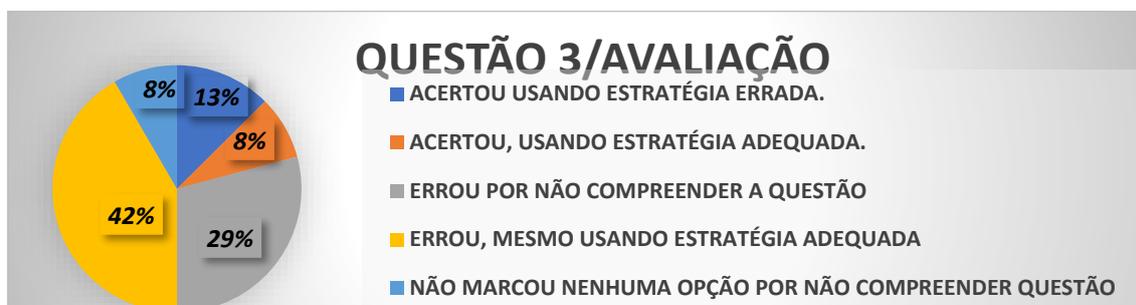
O percentual dos alunos que não compreenderam a questão reduziu de 41% para 17%.

### 3. OBMEP 2015 Tipo: M



A questão foi considerada de grau médio de dificuldade pelo professor. 41% dos alunos consideraram a questão com o grau de dificuldade previsto e o índice de alunos que afirmaram que esta era difícil (32%) foi superior àqueles que a consideraram fácil (27%).

Nesta questão ficou evidente que a compreensão do conceito de fração não está consolidada entre os alunos, apesar de alguns deles demonstrarem um conhecimento ainda que superficial sobre o assunto. A maioria absoluta não compreendeu a questão e nenhum aluno que acertou a alternativa correta usou uma estratégia adequada à solução da questão. Apenas 5% dos alunos utilizaram de estratégia adequada, porém, sem acertar o item que seria resposta do problema.



No teste de avaliação, pôde ser observado uma mudança significativa com relação ao teste diagnóstico. Nesta questão, o uso de estratégia adequada saiu de 5% para 50% e o índice de erros por incompreensão caiu de 77% para 29%.

O índice de acertos ao item subiu de 9% para 21%, ainda que o maior volume esteja concentrado naqueles que acertaram a questão mesmo usando estratégia equivocada.

Algo que chama bastante a atenção é o aumento de 0% para 8% dos alunos que acertaram o item com o uso de estratégia adequada para a resolução do problema.

#### 4. OBMEP 2017 Tipo: M

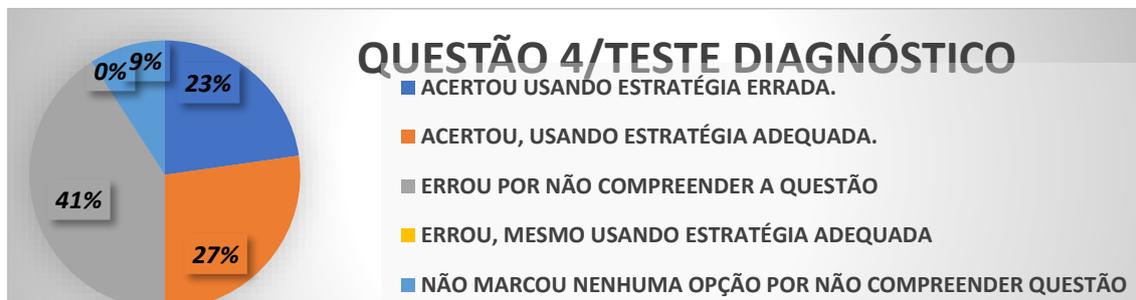


Gráfico 08 – Fonte: o autor

A questão foi considerada de grau médio de dificuldade pelo professor e os alunos ficaram bem divididos em suas considerações. O índice de alunos que afirmaram que esta era difícil foi o mesmo daqueles que afirmaram ter grau médio de dificuldade (32%), sendo a percepção daqueles que a consideraram fácil superior (36%).

O desempenho dos alunos não confirma a percepção destes sobre a questão, pois 73% destes não compreenderam a questão, apesar de que todos os alunos que aplicaram a estratégia correta acertaram a questão (27%).

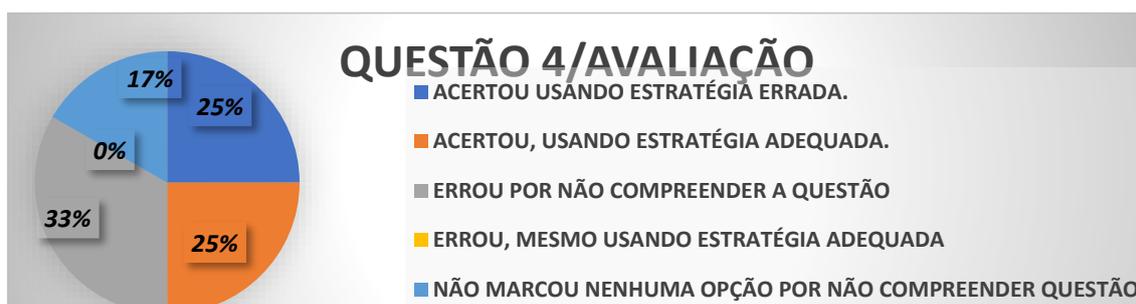


Gráfico 09 – Fonte: o autor

Nesta questão, nota-se que, se o aluno compreende a questão, ele acerta o item, pois nem no teste diagnóstico e nem no teste de avaliação houve casos de erro aplicando estratégia adequada.

Observa-se que o percentual de alunos que errou por não compreender a questão caiu de 41% para 33%.

O índice de alunos que acertaram o item permaneceu inalterado, porém houve um aumento entre aqueles que acertaram a questão por vias alternativas, de 23% para 25%.

No gráfico abaixo temos os resultados específicos dentre os alunos que acertaram as questões no teste avaliativo e que fizeram pelo menos duas das oficinas (oficineiros) comparados com os demais alunos (não oficineiros).

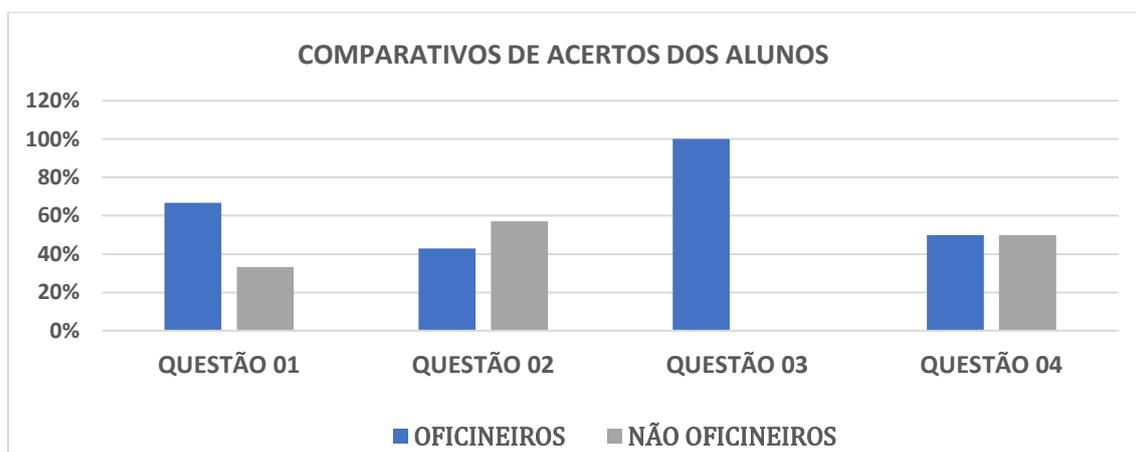


Gráfico 10 – Fonte: o autor

Observe que os resultados foram bastante satisfatórios, na questão 1 e, em especial, na questão 03 (Figura 15) em que o resultado do teste diagnóstico tinha sido muito ruim. Após as oficinas, todos os alunos que acertaram o item da questão tinham participado das oficinas com os materiais manipuláveis. Nas questões 2 e 4 os resultados quantitativos não parecem a princípio corroborar que as oficinas com materiais manipuláveis ajudaram os alunos, mas deve-se observar que o teste era objetivo (múltipla escolha), então pode ter havido acerto sem real capacidade de solucionar os problemas. Portanto foi feita análise qualitativa dos resultados para de cada aluno para dirimir estas dúvidas.

## 4.5 ANÁLISE QUALITATIVA DOS RESULTADOS

### 1. OBMEP 2016 Tipo: D

Nesta questão 52% dos alunos tiveram algum tipo de melhoria no desenvolvimento da argumentação para justificar a solução apresentada. Nesta análise, não estamos levando em conta a resposta ao item, mas a capacidade de argumentação apresentada pelo aluno. Em diversos casos os alunos não marcaram a resposta correta, mas apresentaram mais clareza na resposta apresentada.

O material manipulável indicado para essa questão era formado pelos quadradinhos bicolores que permitiam aos alunos a materialização das situações previstas nos problemas, assumindo um protagonismo no desenvolvimento pela manipulação. Este comportamento se revela na forma de argumentar deles.

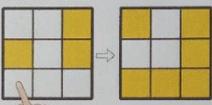
Alguns exemplos estão destacados, como o caso na figura abaixo em que o aluno no teste diagnóstico não fez distinção entre as cores das quadrículas e na avaliação faz uma releitura e apresenta uma mudança sutil, mas que acaba sendo o suficiente para uma resposta correta ao item. Neste caso, percebe-se que o aluno faz uma análise muito mais detalhada da questão, avaliando as possíveis modificações que ocorrem a cada toque, apresentando uma visão ampla do processo e da dinâmica envolvida.

OBMEP 2016 Tipo: D

12. Carlos tem um tabuleiro mágico 3 x 3 com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

A) 0  
B) 1  
C) 3  
D) 6  
E) 9

Tabuleiro inicial



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Quadrados de tamanhos idênticos, Cartas numeradas e Quadro com tabela de organização lógica.

*Marquei a letra "E", porque tem 9 casas no tabuleiro, e acho que ele tocou todas as casas, e conforme ele foi tocando, todas as casas elas foram mudando de cor.*

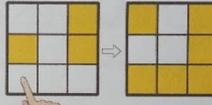
Figura 40 – Fonte: o autor

OBMEP 2016 Tipo: D

12. Carlos tem um tabuleiro mágico 3 x 3 com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

A) 0  
B) 1  
C) 3  
D) 6  
E) 9

Tabuleiro inicial



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Quadrados de tamanhos idênticos, Cartas numeradas e Quadro com tabela de organização lógica.

*6 casas, porque a cada casa branca que ele toca, as casas verticais e horizontais ficam amarelas, e o tabuleiro é 3x3.*

Figura 41 – Fonte: o autor

O destaque nas figuras a seguir demonstra que a aluna adquiriu mais segurança na argumentação, neste caso, saindo da condição de tentativas de cálculos às cegas para uma argumentação com sentido lógico dedutivo.

OBMEP 2016 Tipo: D

12. Carlos tem um tabuleiro mágico  $3 \times 3$  com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

A) 0  
B) 1  
C) 3  
D) 6  
E) 9

Tabuleiro inicial

PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Quadrados de tamanhos idênticos, Cartas numeradas e Quadro com tabela de organização lógica.

$3^0 \rightarrow \frac{3}{9}$      $2^0 \rightarrow \frac{6}{9}$

Figura 42 – Fonte: o autor

OBMEP 2016 Tipo: D

12. Carlos tem um tabuleiro mágico  $3 \times 3$  com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

A) 0  
B) 1  
C) 3  
D) 6  
E) 9

Tabuleiro inicial

PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Quadrados de tamanhos idênticos, Cartas numeradas e Quadro com tabela de organização lógica.

*Se ele tocou 9 vezes no quadrado de cada uma uma vez quer dizer que tem que contar todas as amarelas de cada uma uma vez*

Figura 43 – Fonte: o autor

O aumento do protagonismo dos alunos em se colocar na condição de quem executa a ação na resolução do problema também foi uma marca interessante na forma de abordagem de uma parte significativa deles, conforme os destaques nas figuras abaixo.

OBMEP 2016 Tipo: D

12. Carlos tem um tabuleiro mágico  $3 \times 3$  com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

A) 0  
B) 1  
C) 3  
D) 6  
E) 9

Tabuleiro inicial

PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Quadrados de tamanhos idênticos, Cartas numeradas e Quadro com tabela de organização lógica.

*Eu me esqueci por tabela*

Figura 44 – Fonte: o autor

OBMEP 2016 Tipo: D

12. Carlos tem um tabuleiro mágico  $3 \times 3$  com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

A) 0  
B) 1  
C) 3  
D) 6  
E) 9

Tabuleiro inicial

PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Quadrados de tamanhos idênticos, Cartas numeradas e Quadro com tabela de organização lógica.

*Se ele tocou uma vez em cada casa as cores vão se inverter então vão ficar 6 amarelas e 3 brancas.*

Figura 45 – Fonte: o autor

## 2. OBMEP 2015 Tipo: F

Nesta questão, 60% dos alunos tiveram algum tipo de melhoria no desenvolvimento da argumentação justificando a solução apresentada. Apesar disso, alguns alunos exibiram uma execução direta pela construção da sequência dos números e

não justificaram por meio de uma argumentação. Possivelmente, isso se deve pela clareza na compreensão do problema.

O material manipulável indicado para o problema era formado por cartas numeradas, e este material foi o que obteve a melhor aceitação pelos alunos durante as oficinas.

Neste contexto, podemos afirmar que a relação afetiva dos alunos com este material específico pode ter sido determinante para o resultado positivo apresentado.

As figuras abaixo representam bem o que aconteceu com boa parte dos alunos, que saíram de uma condição de não compreensão para uma condição de domínio da questão apresentando clareza e organização no raciocínio utilizado.

OBMEP 2015 Tipo: F

5. Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

A) 8  
B) 9  
C) 10  
D) 12  
E) 16



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Cartas numeradas com os algarismos de tamanhos idênticos.

*Não entendi essa, porque Maria está fazendo uma lista de todos os números de dois algarismos, usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. O número 20 e 22 estão na lista dela, mas o número 22 não aparece no número 2015.*

Figura 46 – Fonte: o autor

OBMEP 2015 Tipo: F

5. Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

A) 8  
B) 9  
C) 10  
D) 12  
E) 16



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Cartas numeradas com os algarismos de tamanhos idênticos.

15  
10  
05  
25  
21  
20  
51  
50  
55  
11  
52  
12

Figura 47 – Fonte: o autor

No caso seguinte, podemos observar que, no teste diagnóstico, o aluno compreendeu a questão, mas não conseguiu cobrir todas as possibilidades, apresentando uma solução desorganizada com justificativas confusas, já na avaliação apresenta um nível de organização e coerência que passou a garantir o resultado positivo com acerto ao item.

OBMEP 2015 Tipo: Fácil

5. Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

A) 8  
B) 9  
C) 10  
D) 12  
E) 16



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Cartas numeradas com os algarismos de tamanhos idênticos.

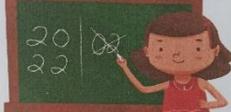
20 25 Foi fazendo o que eu acho que  
22 das per, juntando os números e fazendo  
15 combinações diferentes com os algarismos  
51 que tenham nos números 2015  
11  
12  
21  
52

Figura 48 – Fonte: o autor

OBMEP 2015 Tipo: Fácil

5. Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

A) 8  
B) 9  
C) 10  
D) 12  
E) 16



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Cartas numeradas com os algarismos de tamanhos idênticos.

20 50 10 Foi fazendo as combinações  
22 51 11 diferentes e depois contei quantos  
25 52 12 eram.  
21 55 15

Figura 49 – Fonte: o autor

Algo que chamou a atenção, como já mencionado anteriormente, foi o nível de afinidade dos alunos com o material apresentado durante as oficinas, o que acreditamos ter sido um fator que garantiu um crescimento significativo no desenvolvimento dos alunos. Esta conjectura se baseia nas informações coletadas nos referenciais de neurociência, onde afirmam que o desenvolvimento cognitivo ocorre em melhores condições quando o objeto de conhecimento é bem recebido pelo sistema límbico.

### 3. OBMEP 2015 Tipo: M

Nesta questão, 52% dos alunos tiveram algum tipo de melhoria no desenvolvimento da argumentação para justificar a solução apresentada.

Ainda que o índice de acertos ao item não tenha tido uma mudança tão expressiva, é possível perceber que a capacidade de análise e argumentação apresentou um avanço significativo. O caso destacado abaixo demonstra bem o impacto do material manipulável na capacidade de reelaborar uma estratégia de ataque ao problema, a partir de uma visão promovida pela experimentação e materialização do raciocínio. Um dado importante que ocorreu nas soluções apresentadas nas figuras a seguir, e que outros alunos também utilizaram, foi a estratégia de subdividir as figuras em partes menores e, em alguns casos, observar a composição das partes e sua representação para o todo nas figuras.

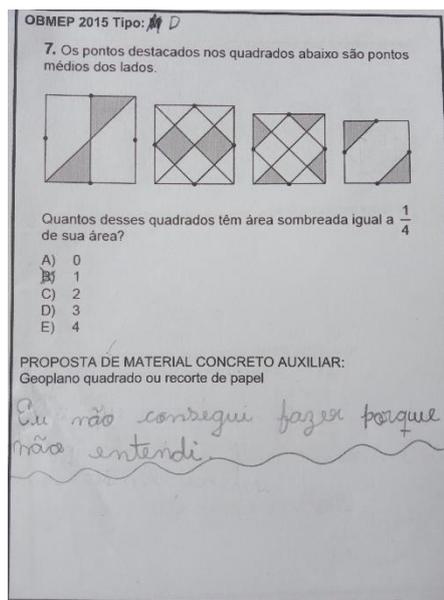


Figura 50 – Fonte: o autor

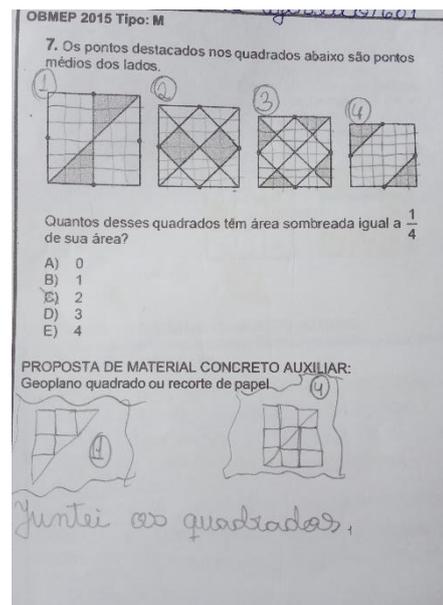


Figura 51 – Fonte: o autor

A análise das respostas apresentadas mostrou que somente 4 alunos no universo dos 15 que apresentaram melhoras significativas na argumentação mantiveram a mesma resposta dada no teste diagnóstico. Isso faz pensar que houve uma releitura da questão com estratégias mais convincentes que permitiram aos alunos optar por uma releitura agora utilizando os conceitos de fração como, por exemplo, frações equivalentes.

As estratégias utilizadas no teste de avaliação foram as mais diversas, no entanto, a coerência destas estratégias revela um crescimento importante na comparação com o teste diagnóstico. Os casos apresentados nas figuras a seguir mostram que os alunos acertaram o item da questão modificando a abordagem ao problema.

Apesar da falta de conhecimento prévio do conteúdo abordado na questão, no caso, ausência de conceitos de frações e proporcionalidades, os alunos atacaram o problema buscando meios de conectar as figuras por regularidades comuns de modo a supor que representavam áreas pintadas proporcionais. Naturalmente, não era a forma ideal de ataque, mas, para as condições em que estavam foi um avanço significativo.

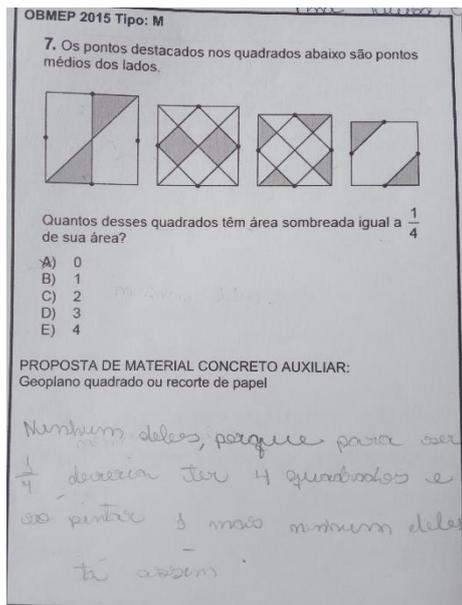


Figura 52 – Fonte: o autor

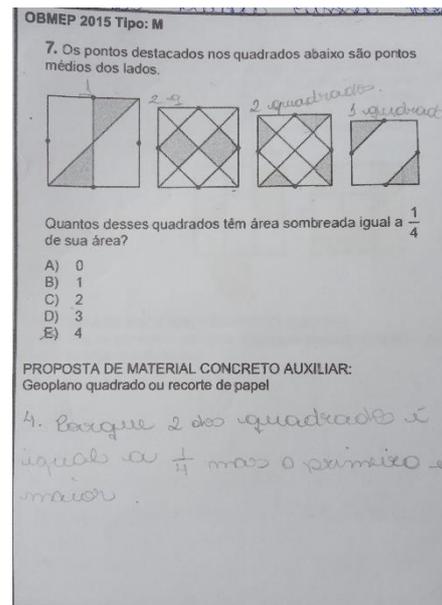


Figura 53 – Fonte: o autor

#### 4. OBMEP 2017 Tipo: M

Nesta questão, 48% dos alunos tiveram algum tipo de melhoria no desenvolvimento da argumentação na solução apresentada.

Alguns alunos utilizaram um recurso alternativo para apresentar uma solução do problema que garantiu o acerto ao item da questão. De certa forma, neste contexto, apesar de inferir que não houve uma compreensão plena da questão, foi possível perceber que a capacidade dos alunos de analisar um processo dinâmico em um problema se mostrou relativamente amadurecida.

Por outro lado, dois alunos saíram de um contexto de resposta correta com estratégia inadequada para uma condição de erro com estratégia alternativa, porém apresentando um argumento muito mais convincente. Podemos inferir que tal situação tenha ocorrido pela falta de convicção na escolha do item durante o teste diagnóstico e, posteriormente, em uma reavaliação da questão. As oficinas com materiais manipuláveis permitiram uma nova abordagem fazendo com que redirecionassem sua tentativa de acerto ao item.

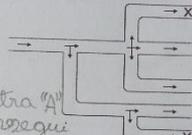
Cabe ressaltar que o material indicado para a solução deste problema era a escala de Cuisenaire, ou seja, o material em que os alunos demonstraram maior grau de dificuldade nas oficinas.

Os casos destacados a seguir demonstram um crescimento real onde os alunos saem de uma condição de não compreensão para uma condição analítica do problema observando e descrevendo a dinâmica.

OBMEP 2017 Tipo: M

6. Na rede de distribuição de água representada abaixo, a água passa pelos canos como indicado pelas setas e se distribui igualmente em cada ramificação. Em uma hora passaram 200 mil litros de água pela saída X. Quantos litros de água passaram pela saída Y nessa mesma hora?

A) 100 mil litros  
B) 130 mil litros  
C) 300 mil litros  
D) 450 mil litros  
E) 600 mil litros



R: Marquei a letra "A" porque eu comuniquei mal o caso.

PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Escala de Cuisenaire.

$$\begin{array}{r} 200.000 \\ \times 2 \\ \hline 400.000 \end{array}$$

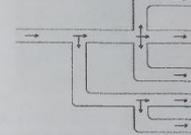
100.000 litros.

Figura 54 – Fonte: o autor

OBMEP 2017 Tipo: M

6. Na rede de distribuição de água representada abaixo, a água passa pelos canos como indicado pelas setas e se distribui igualmente em cada ramificação. Em uma hora passaram 200 mil litros de água pela saída X. Quantos litros de água passaram pela saída Y nessa mesma hora?

A) 100 mil litros  
B) 130 mil litros  
C) 300 mil litros  
D) 450 mil litros  
E) 600 mil litros



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Escala de Cuisenaire.

$$\begin{array}{r} 200 \quad 600 \\ \times 3 \quad 200/300 \\ \hline 600 \end{array}$$

R: letra C, pois 3 canos passa 200 mil litros de água que resulta 600, sobra 2 canos e sobra divide para 600 e aí resulta 300 mil litros.

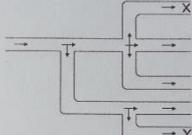
Figura 55 – Fonte: o autor

O caso nas figuras a seguir mostra uma evolução na argumentação do aluno com um nível de organização e escrita consistente que denota uma melhor compreensão do problema em pauta.

OBMEP 2017 Tipo: M antes

6. Na rede de distribuição de água representada abaixo, a água passa pelos canos como indicado pelas setas e se distribui igualmente em cada ramificação. Em uma hora passaram 200 mil litros de água pela saída X. Quantos litros de água passaram pela saída Y nessa mesma hora?

A) 100 mil litros  
B) 130 mil litros  
C) 300 mil litros  
D) 450 mil litros  
E) 600 mil litros



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Escala de Cuisenaire.

$$\begin{array}{r} 200 \\ \times 3 \\ \hline 600 \end{array}$$

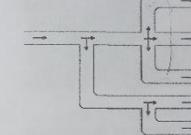
Eu multipliquei, pois achei que a água foi dividida para 3 tubos e para saber quanto de água foi para a Y eu precisei saber qual foi a primeira quantidade de água, para depois dividir para 2.

Figura 56 – Fonte: o autor

OBMEP 2017 Tipo: M após

6. Na rede de distribuição de água representada abaixo, a água passa pelos canos como indicado pelas setas e se distribui igualmente em cada ramificação. Em uma hora passaram 200 mil litros de água pela saída X. Quantos litros de água passaram pela saída Y nessa mesma hora?

A) 100 mil litros  
B) 130 mil litros  
C) 300 mil litros  
D) 450 mil litros  
E) 600 mil litros



PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO AUXILIAR:  
Escala de Cuisenaire.

$$\begin{array}{r} 200 \text{ mil} = 5X \quad 300 = 5Y \\ \hline \end{array}$$

Cheguei a essa conclusão porque no total de água da saída X é 600 e a metade de 600 é 300 então na saída Y vai 300 mil litros de água.

$$\begin{array}{r} 200 \quad 600 \\ \times 3 \quad 200/300 \\ \hline 600 \end{array}$$

Figura 57 – Fonte: o autor

De um modo geral o desempenho dos alunos nos testes apresentou uma melhora de 53% no teste de avaliação com relação ao teste diagnóstico, o que sugere uma eficácia do uso dos materiais manipuláveis para auxiliar os alunos na resolução de problemas.

Essa melhora nos leva a crer que o uso destas ferramentas impulsiona o desenvolvimento do aluno adolescente, estabelecendo uma crescente maturação cognitiva evidenciada pelas argumentações apresentadas e pelas mudanças de postura no ataque aos problemas.

De acordo com TINOCO (2004), o desenvolvimento para o estágio de uma argumentação formal avança de acordo com a experiência e maturidade dos alunos, e, portanto, as justificativas informais compõem um estágio desse desenvolvimento.

Segundo ONUCHIC et. al. (2011), o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas exige novas posturas e atitudes e tem como consequência o desenvolvimento de um pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz.

PAIS (2007) afirma que, o uso de material concreto possibilita aulas mais dinâmicas, amplia o pensamento abstrato e possibilita a construção de diferentes níveis de elaboração dos conceitos envolvidos de modo que os estudantes estabeleçam novas relações entre as situações experienciadas na manipulação de tais materiais e a abstração dos conceitos estudados.

Portanto o sucesso expresso nesta experiência remete a uma perspectiva animadora quanto ao uso desta abordagem pedagógica no cotidiano escolar.

## **CAPÍTULO 5**

### **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A análise comparativa dos resultados dos alunos que participaram das atividades nas oficinas de resolução de problemas com auxílio dos materiais manipuláveis mostrou melhora sensível na parte de compreensão dos problemas e de argumentação lógica, que são condições necessárias para conseguir realmente resolver cada questão. Em diversos casos, os alunos não marcaram a resposta correta, mas apresentaram mais clareza na resposta apresentada, utilizando estratégias com algum nível de coerência. Pôde ser observado que, em sua maioria, esses alunos demonstraram mais segurança na argumentação, muitas vezes, saindo da condição de tentativas de cálculos às cegas para uma argumentação com sentido lógico dedutivo. Foi possível perceber que, mesmo com poucas oficinas e espaçamento temporal amplo entre as atividades, o uso dos materiais manipuláveis ampliou a capacidade dos alunos de analisar um processo dinâmico em um problema e de propor soluções com relativa maturidade.

O desenvolvimento de uma nova abordagem realizado pelos alunos, evidenciado pelas argumentações apresentadas e as mudanças de postura no ataque aos problemas, nos dá condições para fazer alguns apontamentos acerca dos resultados alcançados.

A educação tradicional não favorece o pensamento crítico dos alunos. Apesar da escolarização ter como proposta a formação integral do cidadão atuante e pronto para tomada de decisões, as propostas educacionais tradicionais não priorizam o pensamento criativo dos alunos, nem o desenvolvimento de argumentação lógica.

O conhecimento acerca do cérebro humano, órgão responsável pela estruturação cognitiva, ainda é muito rudimentar entre os principais atores no contexto educacional.

As avaliações que são tradicionalmente aplicadas para medir o índice de desenvolvimento dos alunos, organizadas com problemas que exigem o pensamento elaborado, estão de acordo com a própria razão de existência do saber matemático. Na escola, as ações formativas não poderiam ser diferentes, posto que têm como meta garantir a formação plena do indivíduo. Além disso, resolver problemas é amplamente recomendado para qualquer contexto em que se tenha como objetivo o desenvolvimento da mente humana.

Normalmente, as avaliações envolvem demonstrar capacidade para resolver problemas, utilizando o conhecimento matemático de forma lógica e não se pode negar que é desta forma que se verifica que a aprendizagem de matemática realmente ocorreu.

Os estudos da neurociência apontam para uma janela de oportunidade na fase da vida do aluno adolescente e garantem que os incentivos dados nesta época de vida perduram por toda a vida. De acordo com estes estudos, na infância e adolescência é que ocorrem as mudanças mais importantes no sistema nervoso humano apresentando, então, as condições orgânicas e cognitivas que desencadeiam as construções necessárias para que o aluno adolescente possa se tornar um bom resolvidor de problemas.

Portanto, buscar conhecer o ambiente escolar, o convívio social e o ambiente pedagógico, é fundamental para que se possa aplicar as orientações advindas da neurociência para compor a prática pedagógica.

A neurociência esclarece que o ato de pensar se caracteriza por um trabalho mental que exija esforço, ou seja, um problema a ser resolvido, e as construções cognitivas ocorrem por meio da interação com o meio ambiente onde, naturalmente surgem os problemas a serem solucionados.

Curiosamente, resolver problemas produz satisfação quando estes estão de acordo com a condição daquele que se propõe a resolvê-los. Assim, a neurociência garante que aquele que resolve desbravar um bom problema encontra-se diante de algo que gera prazer.

Dialogando com a neurociência, os autores que se debruçaram em suas pesquisas sobre propostas de ensino da Matemática utilizando como metodologia a resolução de problemas, garantem que o aluno exposto às condições ideais, com problemas adequados de acordo com a maturidade alcançada pelo estudante, desenvolve sua capacidade de pensar e tomar decisões, favorecendo um desenvolvimento continuado das suas estruturas cognitivas.

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, evidenciado pelas competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente.

Nossos alunos adolescentes, em sua maioria, se encontram entre os funcionalmente alfabetizados em condição elementar e muitas vezes não conseguem ir além da decodificação dos elementos gráficos da escrita. A importância do letramento matemático está, principalmente, em permitir que os indivíduos reconheçam o papel que a Matemática exerce no mundo.

Neste sentido, o letramento do aluno é também um dos objetivos do ensino da Matemática, uma vez que, a leitura e compreensão do problema é ponto de partida para qualquer ação posterior em buscar solução para o problema.

Comprovamos que os problemas das provas da OBMEP estão de acordo com os documentos referenciais para o ensino da Matemática no Brasil e, portanto, se os alunos não se encontram preparados para eles é porque não foram conduzidos adequadamente de acordo com as orientações curriculares oficiais. Esses problemas, inclusive, são excelentes referenciais ou recursos pedagógicos para conduzir as atividades formativas dos alunos e transformar o fazer pedagógico para alcançar as condições ideais de aprendizagem de Matemática.

Os problemas da OBMEP são de fato excelentes referências para quem busca desafios no ponto ideal. Apesar de que, nas condições atuais de ensino, alunos e até mesmo professores acreditam que aqueles estão distantes das condições de desenvolvimento cognitivo adequadas para trabalhar com este tipo de problemas.

Neste contexto, um ambiente de experimentação com materiais manipuláveis pode fortalecer também as convicções dos alunos acerca de procedimentos ou resultados nas resoluções desses problemas permitindo estabelecer conexões nervosas próprias para esse fim de modo a serem relevantes para garantir uma aprendizagem significativa e duradoura.

A exemplo do que foi feito neste trabalho, materiais manipuláveis podem ser quaisquer objetos que facilitem a compreensão do aluno durante o ataque a um problema, podendo ser algo já existente ou ser criação do próprio docente, dando liberdade ao professor no planejamento do seu trabalho.

Para este trabalho, as cartas numeradas e as quadrículas dupla face foram criadas especialmente para a execução dos experimentos, com produtos simples como papel e madeira. Os materiais foram criados observando apenas as características dos problemas a serem resolvidos. O mais interessante disso tudo é que estes materiais serviram de apoio para diversos problemas constante nas provas da OBMEP de diversos anos.

Ainda temos um longo caminho a percorrer. Esses experimentos ainda precisam de mais investigações e tempo para termos conclusões mais convincentes. No entanto, já foi possível perceber o potencial dos materiais manipuláveis no desenvolvimento dos alunos na perspectiva de resolvedores de problemas.

Pelos resultados obtidos nas atividades realizadas para este trabalho, é recomendável que a utilização de materiais manipuláveis seja realizada com uma frequência maior, para que se possam observar seus efeitos no processo ensino-aprendizagem a médio e longo prazo.

Desejamos com este trabalho contribuir para ajudar professores que querem trabalhar com resolução de problemas desafiadores mas cujos alunos encontram dificuldades com esta abordagem pedagógica de ensino-aprendizagem. É possível que recorram aos materiais manipuláveis como uma ferramenta poderosa para auxiliar a resolução de problemas e esperamos que suas experiências com eles sejam positivas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARROS, Mônica Garcia. As Habilidades de Leitura: Muito Além de Uma Simples Decodificação. Disponível em <https://www.profala.com/arteducesp84.htm> Acessado em 01/05/2018
- BRASIL, LEI Nº 8.069, DE 13 DE JULHO DE 1990. *Estatuto da Criança e do Adolescente*
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio): Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 2000.
- BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Banco Nacional Curricular Comum* /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 2019 <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acessado em 01/12/2019
- CABRAL, L. S. *Processos psicolinguísticos de leitura e a criança*. Porto Alegre: Letras de Hoje, v. 19, n. 1, pp. 7-20, 1986.
- COSENZA, Ramon. *Neurociência e Educação: Como o Cérebro Aprende*. Artmed. 2011
- ESPERIDIÃO, Antonio, COLOMBO, Marília Majeski, MONTEVERDE, Diana Toledo, MARTINS, Glaciele Moraes, FERNANDES, Juliana José, ASSIS, Marjorie Bauchiglioni, BATISTA, Rodrigo Siqueira. *Neurobiologia das emoções.*, V. et al. /Rev. Psiq. Clín 35 (2); 55-65, 2008 disponível em <http://www.scielo.br/pdf/rpc/v35n2/a03v35n2.pdf> acessado em 01/12/2018.
- INAF, *Indicador de Alfabetismo Funcional (Inaf)* <https://ipm.org.br/inaf> acessado em 07/01/2019
- OBMEP, disponível em <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm> acessado em 21/08/2019.
- ONUCHIC, Lourdes de la Rosa., ALLEVATO, Norma Suely Gomes., *Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*, BOLEMA, vol. 25, núm. 41, pp. 73-98, UNESP- Rio Claro, Brasil, dezembro de 2011.
- ONUCHIC, Lourdes de la Rosa, ALLEVATO, Norma Suely Gomes. NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner, JUSTULIN, Andressa Maria (Orgs), *Resolução de Problemas: Teoria e prática*, Paco Editorial, Brasil, 2014.
- PAIS, Luiz C., *Ensinar e Aprender Matemática*, Editora Autêntica, 1ª Ed, São Paulo, 2007.
- POLYA, Gean., *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1977.
- TINOCO, Lucia. *Argumentação no ensino de Matemática*, VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, P. Fundação/IM/UFRJ, 2004, disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/MC02128926734.pdf>, acesso em 27/09/2019.
- WILLINGHAM, Daniel T. *Por Que os Alunos Não Gostam da Escola? Respostas da Ciência Cognitiva Para Tornar a Sala de Aula Mais Atrativa e Efetiva*. 2011