Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Ana Eliza da Silva Cordeiro

Material didático e o modelo de Van Hiele para a aprendizagem significativa de semelhanças

Rio de Janeiro

2019

Ana Eliza da Silva Cordeiro

Material didático e o modelo de Van Hiele para a aprendizagem significativa de semelhanças

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Dr. Fabio Luiz Borges Simas (orientador)

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Rio de Janeiro

2019

Cordeiro, Ana Eliza
Material didático e o modelo de Van Hiele para a aprendizagem significativa de semelhanças / Ana Eliza Cordeiro - 2019
97.p

Matemática, Ensino de Matemática, Geometria Plana. I.Título.
CDU 536.21

Ana Eliza da Silva Cordeiro

Material didático e o modelo de Van Hiele para a aprendizagem significativa de semelhanças

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 06 de setembro de 2019

BANCA EXAMINADORA

Dr. Fabio Luiz Borges Simas (orientador)

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Dr. Fabio Xavier Penna

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Dr. Diego Matos Pinto

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Dr. Wanderley Moura Rezende

Universidade Federal Fluminense

Resumo

Este trabalho[1] disponibiliza a análise crítica de 12 propostas didáticas já existentes para o ensino de semelhança de triângulos. Todas as propostas foram analisadas quanto a sua funcionalidade em levar o aluno a aprendizagem significativa. Esta análise foi fundamentada nos Níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele,levando a classificação de todas as atividades.

Os 12 módulos didáticos foram obtidos após uma ampla pesquisa em anais e Revistas voltadas para a educação matemática. Deu-se relevância as proposta que apresentavam o emprego de softwares de geometria dinâmica ou o uso de materias concretos para o ensino de semelhança de triângulos.

Palavras-chaves: Semelhança, semelhança de triângulos, ensino de semelhanças, Van Hiele.

[1]Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Projeto Livro Aberto de Matemática, uma iniciativa da OBMEP/IMPA, realizado pela Associação Livro Aberto, financiado pela Fundação Itaú Social.

Abstract

This work footnote This work was developed within the scope of the Open Book Project of Mathematics, an initiative of OBMEP / IMPA, carried out by the Open Book Association, funded by Fundação Itaú Social. It provides a critical analysis of 12 existing didactic proposals for the similarity teaching of triangles. All proposals were analyzed for their functionality in leading the student to meaningful learning. This analysis was based on Van Hiele's levels of development of geometric thinking, leading to the classification of all activities.

The 12 didactic modules were obtained after extensive research in annals and journals focused on mathematical education. The proposals that presented the use of dynamic geometry software or the use of concrete materials for the teaching of triangle similarity were relevant.

Keywords: Similarity, similarity of triangles, teaching of similarities, Van Hiele.

Agradecimentos

Escrever em poucas palavras agradecimentos de toda uma vida é uma tarefa muito árdua. A estrada que percorri até aqui, mesmo que pareça pequena, foi longa e com enormes curvas sinuosas. Todo trajeto só se fez possível porque Deus, em sua magnetude, colocou anjos a me guiarem.

Dessa forma, começo agradecendo a Deus, por nunca ter me deixado só e por manter sempre a minha fé.

Agradeço ao meu pai, Jorge Emílio Cordeiro, que sempre acreditou em mim. Ele participou de toda construção do presente estudo, me mantendo firme com palavras de admiração. E hoje, mesmo não estando mais fisicamente, tenho comigo toda sua coragem e garra. Ele é a minha maior inspiração.

Agradeço a minha mãe, Kátia, que com seu jeito "adolescente" me fez madura e me ensinou a ser forte. Agradeço a minha irmã, Letícia Cordeiro, que é a minha fonte de vida. Ela é a primeira a confiar em mim e a dizer: - Você consegue tudo que quiser.

A minha família é a minha base! Tudo que construí e construirei é para eles e por eles. Agradeço a minha vó, a tia Anita, a tia Esmeralda... todos os tios e primos que me entitularam "nerd" desde pequena e me fizeram acreditar nisso.

Agradeço também a família que conquistei ao longo da estrada percorrida. Eles tornaram o caminho mais divertido e contagiante. Um obrigada especial a melhor amiga do mundo, Camila vaz, que mesmo distante sempre se fez presente. A família "Bita" que esteve ao meu lado durante toda a vida acadêmica, tornando esse processo muito mais prazeroso. E ao Thiago Pellegrino, hoje meu marido, que foi um namorado compreensivo com as minhas ausências.

Não posso esquecer daqueles que me fizeram chegar até aqui. Agradeço a todos os meus professores, sou mesmo uma pessoa de sorte, durante toda minha vida escolar e acadêmica tive excelentes mestres. Durante a vida escolar, um agradecimento especial aos professores Fátima e Josimar por me inspirarem a seguir essa profissão. Aos anos que passei pela UFF, tive oportunidades incríveis de aprendizagem. Agradeço a todos os professores e em especial a professora Ana Kaleff, por me mostrar que sou mais capaz do que eu imaginava. Por me inspirar a seguir a linha da educação matemática e me ensinar a participar efetivamente da democratização do ensino de matemática.

Por último, e não menos importante, agradeço a todos os professores que participaram do meu período acadêmico na UNIRIO, em especial, agradeço ao querido orientador, professor e amigo Fabio Simas que esteve ao meu lado durante toda essa jornada, me fornecendo todo suporte acadêmico e emocional para chegar até aqui.

impa

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

livroaberto

Organização Organização Realização

CAPES Itaú Social

Financiamento

"A resposta certa não importa nada: o essencial é que as perguntas estejam certas."

Mario Quintana

Sumário

1 Introdução

Nos últimos dois séculos o mundo passou por transformações que alteraram de maneira profunda a relação da humanidade com o conhecimento e com o trabalho. Os jovens hoje têm hábitos de pensamento e necessidades diferentes daqueles de anos atrás. Portanto, novas formas de ensinar são necessárias. Precisamos desenvolver novas tecnologias que tenham significado para esses jovens.

O ensino tradicional com aulas expositivas, focado em procedimentos e em encontrar a resposta correta, afasta o estudante da percepção do que é matemática e não propicia um ambiente favorável ao desenvolvimento de bons hábitos de pensamento ([Boaler, 2018]). Nesse modelo, as definições ou são apresentadas por meio de exemplos ou são desconectadas do conceito do objeto matemático em questão. Quanto a isso, [Kaleff, 2008] p.42, afirma que:

> $(\cdots)$ o professor não deve confundir conceito de um objeto matemático com a sua definição. No entanto, ainda que o aluno possa criar conexões com temas matemáticos, é necessário ser enfatizado que uma definição matemática expressa uma ideia científica própria daqueles que fazem a ciência chamada Matemática, isto é, dos matemáticos. Ou seja, uma ideia independente de cada sujeito que dela se utiliza. Desta forma, de um ponto de vista da Educação Matemática, como os alunos não são matemáticos (embora muitos possam vir a sê-lo) no ensino da Matemática, é necessário que se leve em conta a construção do conhecimento matemático e do significado dos conceitos, ou seja, sua aprendizagem significativa, antes de serem apresentadas as definições.

Um estudante pode não aprender determinado tema em Geometria do modo esperado porque dele está sendo exigido um nível de desenvolvimento cognitivo para o qual ele ainda não está preparado. Ele possivelmente não foi exposto de maneira satisfatória a experiências mais elementares sobre aquele tema que o amparem no aprendizado. Isso é o que defende o casal Van Hiele, famosos criadores dos Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico (Capítulo 2). [Rodrigues, 2017] assegura que: "Esse modelo de pensamento geométrico pode proporcionar resultados satisfatórios para orientar a formação assim como para avaliar as habilidades dos alunos podendo fornecer-lhes um modelo útil para o uso em sala de aula.".

Durante a formação de professor de matemática o termo aprendizagem significativa aparece com frequência nas aulas teóricas, porém poucas são as oportunidades que o licenciando tem para aprender a promover este tipo de aprendizagem em seus futuros estudantes. Em um dos seus estudos sobre a licenciatura no Brasil, [Diniz-Pereira, 2000] salienta "a necessidade de superar algumas dicotomias e desarticulações existentes nesses cursos". Evidênciando o "complexo problema da dicotomia teoria-prática, refletido [$\cdots$] na desvinculação das disciplinas de conteúdo pedagógico e no distanciamento existente entre a formação acadêmica e as questões colocadas pela prática docente na escola" ([Diniz-Pereira, 2000] p.57)

Como acontece frequentemente, a autora deste trabalho começou a lecionar, na educação básica, em seu primeiro semestre no curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal Fluminense. Ao longo do curso, muito ouviu falar sobre a democratização do ensino de matemática, porém o acesso a ferramentas didáticas capazes de tal processo só foram trabalhados próximo à conclusão da licenciatura. Ao longo de sua formação acadêmica, nas aulas lecionadas, a literata apresentou dificuldades em suas práticas docentes, principalmente em levar o estudante a se interessar pela matemática, não conseguindo, eventualmente, que o mesmo construísse um conceito matemático. Nos dois últimos semestres do curso, a autora teve acesso as disciplinas "Laboratório de Educação Matemática" e "Educação Matemática - Geometria", ministrados pela professora Ana Kaleff, e começou a enxergar alternativas didáticas capazes de atuarem nas dificuldades da sua docência. Foram apenas nessas disciplinas que ela teve contato com os termos: habilidade de visualição; aprendizagem significativa; e com os Níveis do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico do casal Van Hiele. Por intermédio da professora Ana Kaleff, teve acesso a diversos materiais manipulativos ofertados pelo Museu de Matemática Interativo e Itinerante do LEG-UFF, pensado e coordenado pela mesma, desde 1988.

Sentindo a necessidade de ter acesso a mais materiais didáticos, de aperfeiçoar as suas práticas em sala de aula, devido ao seu encantamento com o projeto e à oportunidade oferecida pela professora Ana Kaleff, a autora iniciou seu período de bolsista no LEG-UFF no final do curso de licenciatura, continuando inclusive após a conclusão da licenciatura (a autoria continuou cursando o bacharelado em matemática). Essa experiência, a permitiu participar da elaboração e aplicação de diversos materiais concretos e seus cadernos de atividades orientadas, mudando significamente a sua prática em sala de aula e a percepção quanto o uso de recursos didáticos. Todo esse processo de formação acadêmica, mesmo que tardia, fomentou o aprofundamento nos estudos sobre uso de materiais manipulativos, habilidade de visualização e os níveis de Van Hiele no processo de obtenção da aprendizagem significativa.

Outros educadores matemáticos também defendem que o uso adequado de materiais concretos manipulativos e *softwares* de geometria dinâmica têm efeitos consideráveis no desenvolvimento intelectual dos estudantes, na habilidade de visualização favorecendo a aprendizagem significativa. [Lorenzato, 2006] é um desses educadores. Ele defende o uso de materiais manipuláveis para o ensino de conceitos matemáticos. Define material didático como "qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem" ([Lorenzato, 2006] p.18). E destaca que o material concreto pode ter duas interpretações: "uma delas refere-se ao palpável, manipulável, e outra, mais ampla, inclui também as imagens gráficas." ([Lorenzato, 2006] p.22-23). Sugere ainda que os materiais manipuláveis podem ser pontos de partida para o aluno construir o que ele chama de saber matemático.

> (···) convém termos sempre em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno. E o MD pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático. ([Lorenzato, 2006] p.21).

O material concreto passa a ser visto como um recurso didático quando tem um objetivo matemático, deixando de ser apenas um recurso lúdico.

Sobre o envolvimento emocional dos alunos para com as atividades, Vigotski destaca que:

> (···) As reações emocionais exercem a influência mais substancial sobre todas as formas do nosso comportamento e os momentos do processo educativo. Queremos atingir uma melhor memorização por parte dos alunos ou um trabalho melhor sucedido do pensamento, seja como for, devemos nos preocupar com que tanto uma como outra atividade seja estimulada emocionalmente. **A experiência e estudos mostraram que o fato emocionalmente colorido é lembrado com mais intensidade e solidez do que um fato indiferente. Sempre que comunicamos alguma coisa a algum aluno devemos procurar atingir o seu sentimento. Isso se faz necessário não só como meio para melhor memorização e apreensão, mas também como objetivo em si.** (VIGOTSKI, 2001b, p.143 - grifo nosso)

Para que se possa oferecer estratégias pedagógicas capazes de levarem o estudantes à aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos, é condição necessária, embora não suficiente, que os professores de matemática tenham acesso a práticas didáticas sólidas e testadas. Especialmente aquelas envolvendo materiais concretos manipulativos, sobre as dinâmicas de sala de aula, que promovam o envolvimento emocional dos estudantes com as atividades e auxiliem a consolidar os novos conhecimentos. Esse acesso deve ser facilitado não só em sua graduação como também em sua formação continuada.

Semelhança de triângulos e suas aplicações, aparecem com grande relevância no Exame Nacional do Ensino Médio. Os assuntos relações métricas no triângulo retângulo, relações métricas na circunferência e trigonometria no triângulo retângulo são aplicações diretas da semelhança de triângulos e estão sempre presentes nas avaliações escolares e nas provas de acesso às universidades. Com isso é possível perceber a relevância do assunto na educação básica e por esse motivo ele foi escolhido como tema central dessa pesquisa.

Este trabalho se dirige a professores da Educação Básica brasileira que ensinem Semelhança de Triângulos. Trazemos a reflexão sobre o uso dos níveis de Van Hiele e sobre a habilidade de visualização no ensino de semelhança de triângulos nas salas de aula. Apresentamos brevemente a fundamentação teórica no Capítulo 2. No Capítulo 3, compilamos e analisamos criticamente 12 alternativas didáticas sobre semelhanças disponíveis em artigos de periódicos acadêmicos, trabalhos de conclusão de curso do Profmat e no Portal do Professor do Ministério da Educação. As propostas didáticas selecionadas usam materiais concretos manipuláveis ou recursos digitais de geometria dinâmica. Este critério foi utilizado porque desejamos nos afastar do tradicional quadro e giz e porque acreditamos que o bom uso destes recursos favorecem a aprendizagem significativa. Para cada uma destas propostas didáticas discutimos a sua classificação em níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico atingido.

Embora tratemos de propostas didáticas com *softwares* de geometria dinâmica o foco aqui é nos materiais concretos manipuláveis. Para propostas utilizando o *Geogebra* no ensino de semelhança, recomendamos [Monforte, 2017].

2 Fundamentação Teórica

As reflexões teóricas giram em torno da importância da aprendizagem significativa e de quais formas ela pode ser atingida. Serão apresentadas algumas considerações a respeito da habilidade de visualização, aprendizagem significativa, modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico e Base Nacional Comum Curricular. As mídias digitais e os materiais concretos aparecem como sugestões de recursos didáticos capazes de levar o estudante a atingir um dos níveis do Modelo de Van Hiele. Já a Base Nacional Comum Curricular destaca a importância e a relevância da escolha do tema. A discussão central é em torno das relações entre esses recursos didáticos e a habilidade de visualização, tendo como foco a aprendizagem significativa.

2.1 Habilidade de visualização

A importância da habilidade de visualização no ensino de geometria, vem ganhando um destaque significativo entre os pesquisadores de educação matemática. Por exemplo, tem-se [Velasco and Kawano, 2002] afirmando que a aptidão espacial junto com a aptidão verbal e a lógico-matemática explicam a maior parte da variância obtida por meio de testes que avaliam a inteligência.

A habilidade de visualização é um conjunto de operações cognitivas e ações mentais que devem ocupar seu lugar no ensino de geometria. Essa habilidade auxilia no desenvolvimento dos pensamentos geométricos, como pontua [Santos, 2009]:

> ($\cdots$)A base da construção do pensamento geométrico é a visualização do espaço e de suas formas. Após visualizar o espaço é possível atribuir-lhe características que permitam a criação da imagem mental do mesmo. Por meio dos conceitos, propriedades, intuição, dedução e solução de problemas, faz-se uma reflexão sobre as imagens visuais e mentais que dão condições de analisar, compreender, aceitar ou negar as proposições veiculadas. (p.20)

Em sala de aula, ela é capaz de levar os estudantes a dominarem conceitos elementares e fornecer, aos mesmos, autonomia a lidar com conceitos geométricos.

O uso do material concreto como recurso pra visualização é apontado por [Kaleff, 2008]:

> (· · ·) o desenvolvimento dessa habilidade acontece à medida que se coloca para o aluno um apoio didático baseado em materiais concretos que representam o objeto geométrico em estudo. (· · ·) O material concreto permite ao indivíduo efetivamente ver o objeto e ter uma imagem visual do que está estudando e não somente ver sua imagem. (p.20)

Deve se observar que a habilidade de visualização não ocorre de forma homogênea em uma sala de aula. Sendo assim, em um mesmo grupo de alunos é possível ter alunos visualizadores e alunos não visualizadores. [Adanéz, 2002] afirmam que:

> (· · ·)a incorporação de testes psicométricos de Visualização à metodologia de ensino-aprendizagem certamente facilita-ria a obtenção de dados importantes para o planejamento da mesma, otimizando seu desenvolvimento mediante novas e diversas estratégias didáticas que permitam superar os obstáculos que se apresentam atualmente.

Os mesmos autores, propõem um teste de visualização, denominado TVZ-2001, baseado em uma tarefa clássica de Visualização: o desenvolvimento de superfícies. A partir desse teste, o professor poderá indificar o desenvolvimento dos alunos quanto as sua habilidade de visualização. É responsabilidade, do professor, ter ciência da heterogeneidade quanto a habilidade de visualização e buscar recursos didáticos capazes de atuarem no desenvolvimento dessa habilidade.

2.2 Aprendizagem Significativa

Diz-se que a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação se ancora em conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Como é conhecido da literatura, Ausubel define estruturas cognitivas como estruturas hierárquicas de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo.

Nota-se que os educadores necessitam despertar interesse para os processos que levam ao conceito do tema abordado e possuam um conhecimento prévio do aluno. Ou seja, deixem o objeto de estudo mais interessante e relevante para o publico alvo, faça com que o corpo discente participe efetivamente.

[Gasparin, 2001] nos lembra que:

> (⋯)são jovens que vivenciam a paixão, o sentimento, a emoção, o entusiasmo, o movimento. Anseiam por liberdade para imaginar, conhecer, tudo ver, experimentar, sentir. O pensar e o fazer, o emocional e o intelectual, estão entrelaçados, de maneira que estão inteiros em cada coisa que fazem. (p.8)

A importância do conhecimento prévio do aluno, quanto aos conceitos aprendidos, é abordado por [Weingartner and Postman, 1969] traduzido por [Moreira, 2013].

> (⋯)que no final das contas, aprendemos somente em relação ao que já sabemos, o que significa, contrariamente ao senso comum, que se não sabemos muito nossa capacidade de aprender não é muito grande que esta ideia - por si só - implica uma grande mudança na maioria das metáforas que direcionam políticas e procedimentos das escolas. (p.62)

Um questionamento comum, entre os professores de matemática, é o de como levar seus alunos a uma aprendizagem significativa. O que deve ser feito em sala de aula, para que o aluno, de fato, aprenda um conceito matemático? Fornecer aos estudantes definições e demonstrações formais, nem sempre os levam a uma aprendizagem significativa.

[Kaleff, 2008] afirma que:

> (⋯)Ao fazer Geometria na sala de aula, o professor não deve confundir conceito de um objeto matemático com a sua definição. No entanto, ainda que o aluno possa criar conexões com temas matemáticos, é necessário ser enfatizado que uma definição matemática expressa uma ideia científica própria daqueles que fazem a ciência chamada Matemática, isto é, dos matemáticos. Ou seja, uma ideia independente de cada sujeito que dela se utiliza. Desta forma, de um ponto de vista da Educação Matemática, como os alunos não são matemáticos (embora muitos possam vir a sê-lo) no ensino da Matemática, é necessário que se leve em conta a construção do conhecimento matemático e do significado dos conceitos, ou seja, sua aprendizagem significativa, antes de serem apresentadas as definições. (p.42)

Apresentar atributos relevantes e não relevantes de uma figura geométrica é uma estratégia eficaz, de levar o estudante a construir um conceito geométrico. Esses atributos, podem ser interpretados como exemplo e não exemplo.

[Kaleff, 2008] relata que:

> (⋯)muitas vezes o processo de elaboração mental da construção de um conceito geométrico, como aqui considerado, parece ser complicado e até mesmo errôneo, para aqueles que estão acostumados a propor o ensino da Matemática partindo de sistemas axiomáticos, por meio de

> definições, exemplos e contraexemplos. No entanto, como muitas pesquisas em Educação Matemática têm mostrado, a maioria das crianças apresenta sucesso em tarefas que permitem a construção da definição e do significado do conceito, por meio de um procedimento didático que envolva seus atributos ou características relevantes do conceito. (p.42)

O trabalho com materiais concretos e mídias digitais em sala de aula são de fundamental importância, pois possibilitam ao estudante calcular, visualizar, modelar e gerar simulações do cotidiano, construindo assim um conceito e chegando a aprendizagem significativa.

[Sarmento, 2011] afirma que:

> $(\cdots)$A utilização dos materiais manipuláveis oferece uma série de vantagens par a aprendizagem $(\cdots)$ a) Propicia um ambiente favorável a aprendizagem; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacentes em cada material $(\cdots)$ (p.4)

[Macedo et al., 2007] p. 19, afirma que "o professor de matemática costuma utilizar apenas o livro didático como fonte de informação e resolução de problemas que, na maioria dos casos, apresentam exercícios descontextualizados, sem nenhum vínculo com o cotidiano dos alunos".

Uma maneira de aproximar o estudante ao ensino de matemática e sair do tradicional é utilizar recursos didáticos alternativos, como materiais concretos e softwares diâmicos. [Santos, 2011] enfatizam que:

> $(\cdots)$ O material manipulável pode ser utilizado no momento da introdução de certo conteúdo, vindo a ser um aliado para o professor em sua explicação. Seu uso é justificado pela possibilidade de tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e atrativas para os estudantes, o que contribui para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem. (p.51)

[Gravina et al., 2012] p.13, apontam que a tecnologia digital "disponibiliza, cada vez mais, ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos". Sendo assim, observa-se que a tecnologia é capaz de expandir o conhecimento, extrapolando o âmbito do que não se move, ou seja, o livro didático.

A tecnologia digital pode ampliar as possibilidades de recursos didáticos, os quais estão diretamente ligados com a habilidade de visualização do aluno e a compreensão do conceito em estudo.

2.3 O modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico

Dinah e Pierre Van Hiele, educadores matemáticos holandeses, observaram, na década de 1950, que o ensino de geometria não estava em comum acordo com o aprendizado. Pois, muitas dos problemas geométricos apresentados continham vocabulários, conceitos ou conhecimento de propriedades matemáticas além do nível de pensamento e compreensão do estudante. Cosntataram também que em uma mesma sala de aula, os estudantes raciocinam de maneiras diferentes, se expressam diferente um dos outro e apresentam representações simbólicas distintas. A partir desse estudo, elaboram um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico constituído pelo conceito de que o raciocínio dos alunos passa por uma série de níveis sequenciais e ordenados.

Esse modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico ficou conhecido como Modelo Van Hiele e é dividido em duas partes:

- A descrição da estrutura cognitiva, composta por níveis mentais a serem necessariamente desenvolvidos pelo aluno para a compreensão de um conceito geométrico.
- Uma metodologia de ensino, dividas em fases, para o desenvolvimento do conceito geométrico em cada nível da estrutura mental.

Será utilizado, nesse estudo, os Níveis do pensamento e as fases didáticas abordadas por [Kaleff, 2008]:

> $(\cdots)$A estrutura cognitiva que descreve as características do processo de pensamentodo aluno para o entendimento de um determinado conceito compõe-se obrigatoriamente de cinco níveis chamados de : visualização, anãlise, dedução informal, dedução formal e rigor. O Modelo também apresenta cinco fases facultativas de uma metodologia de ensino para o desenvolvimento cognitivo de cada um dos níveis, a saber: questionamento; orientação direta;explicitação; orientação livre e fechamento. (p.44)

Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:

- **Nível 0 - Visualização ou Reconhecimento:** Os estudantes raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são vistos como um todo, sem considerações explicitas das suas propriedades. Em semelhança, como exemplo, o aluno saberá reconhecer, pela aparência global, figuras que pareçam ser ampliação e/ou redução uma das outras. Um estudante, neste nível, pode aprender o vocabulário geométrico, pode identificar formas específicas, reproduzir uma figura dada etc.

- **Nível 1 - Análise:** Os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos por meio de uma análise informal de suas partes e atributos através de observações e experimentações. Em semelhança de triângulos, como exemplo, o estudante começa a verificar que triângulos semelhantes possuem ângulos correspondentes congruentes e/ou os lados dos triângulos semelhantes são proporcionais. Ou seja, nesse nível eles começam a estabelecer propriedades que são usadas para conceituarem classes e formas, mas não explicitam inter-relações entre figuras ou propriedades.

- **Nível 2 - Dedução informal ou ordenação:** Os estudantes formam definições abstratas, podendo estabelecer inter-relações das propriedades nas figuras e entre figuras. Como exemplo, reconhecem que se dois triângulos possuem os ângulos correspondentes congruentes então os seus lados correspondentes são proporcionais, ou seja, identificam os casos de semelhança de triângulos.

  Conseguem também, distinguir entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico. Reconhecem classes de figuras e entendem inclusões e interseções de classes. Porém, não compreendem o significado dos axiomas e/ou deduções. Até podem acompanhar provas formais, mas não compreendem sua construção.

- **Nível 3 - Dedução formal:** Os alunos desenvolvem sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de uma outra ou outras. Raciocinam formalmente no contexto de um sistema matemático completo, com termos indefinidos, com axiomas, com um sistema lógico subjacente, com definições e teoremas.

  Como exemplo, o aluno é capaz de provar, ou de realizar uma prova guiada, os casos de semelhança de triângulo utilizando o Teorema de Tales. Ele pode construir um prova, não apenas memorizá-las.

- **Nível 4 - Rigor:** Os estudantes entendem a estrutura de vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor. comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de modelos concretos. São capazes de se aprofundarem na análise de propriedades de um sistema dedutivo, tais como consistência, independência e completudo dos axiomas.

Fases didáticas:

- **Fase 1 - Questionamento:** O professor estabelece um diálogo abordando sobre o conceito em estudo neste nível. Neste diálogo serão levantadas questões e observações, al?e de introduzir o vocabulário específico. Nesta fase serão observados os conhecimentos p?evios dos alunos e qual direção os estudos tomarão.

- **Fase 2 - Orientação direta:** O professor deverá levar os alunos a explorarem o conceito em estudo pode meio de materias previamente selecionados. Estes materiais os levarão gradualmente a se familiarizarem com as caracteristicas cognitivas deste nível. As atividades propostas devem conter tarefas que possibilitem respostas específicas e objetivas.

- **Fase 3 - Explicitação:** Nesta fase, os estudantes refinam o uso do seu vocabulário, expressando verbalmente suas opniões vindas do que observaram. O professor deve deixar o aluno indepentente na busca da formação do sistema de relações sobre o conteúdo geométrico em estudo.

- **Fase 4 - Orientação livre:** O professor deverá apresentar, aos estudantes, atividades em multiplas etapas. Ou seja, que possibilitem várias maneiras de serem completadas. é fundamental que o aluno ganhe experiência na busca de sua forma individual de resolver as atividades, buscando sua própria orientação no caminho da descoberta de seus objetivos.

- **Fase 5 - Fechamento:** Neste momento, o professor fará uma revisão e síntese do que foi visto, visando uma integração global entre os materiasi didáticos, o conteúdo e as relações estabelecidas, com a consequente unificação e internalização em um novo domínio do pensamento.

Observa-se que os Níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico não são facultativos, ou seja, não devem ser pulados. Já as Fases didáticas podem ser facultativas, ou seja, o professor pode verificar a importância e a necessidade de cada uma delas em sua aula. Porém, pede-se uma maior atenção na Fase didática 5, o Fechamento.

Esta fase deverá ser sempre feita pelo professor, pois sintetiza todo o conteúdo abordado. Sugere-se, que neste momento, o professor peça que seus alunos tomem notas dos principais tópicos abordados. O mesmo pode montar o quadro e solicitar cópia, ou então montar junto aos estudantes um mapa conceitual sobre o tema em estudo.

Uma atividade didática é dita de um determinado nível se a sua realização ajuda o aluno a adquirir este nível.

2.4 Base Nacional Comum Curricuar - BNCC

Na página [1] oferecida pelo Ministério de Educação e Cultura - MEC, obtem-se:

> $(\cdots)$A Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

O sistema educacional brasileiro separa o Ensino Básico em três ciclos: Anos iniciais do Ensino Fundamental (do 1° ao 5° ano), Anos finais do Ensino Fundamental (do 6° ao 9° ano) e Ensino Médio (da 1^a à 3^a série).

Das competências específicas de matemática, referentes aos Anos Finais do Ensino Fundamental, encontradas na última versão da BNCC, com relevância para o presente estudo, podem ser destacadas:

- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disoníveis, para modelar e resolver problemas cotidianos,sociaise de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

[1] http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Ao analizar as Habilidades de matemática, referentes aos anos finais do Ensino Fundamental, encontram-se os temas Semelhança e/ou Semelhança de triângulos nos Sexto, Sétimo e Nono anos, como detalhados a seguir.

No Sexto com a construção de figuras semelhantes, trabalhando com os termos ampliação e redução.

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

No sétimo, com a introdução das coordenadas dos vértices dos polígonos.

(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.

Observe que a exclusão da transformação do plano que multiplica as coordenadas por valores entre zero e um, impede o estudo das reduções com o uso de coordenadas. Ao se multiplicar por números negativos, insere-se a transformação reflexão em torno da origem composta com a ampliação.

No nono ano a semelhança é finalmente nomeada e, ao que parece, os autores da base não esperam que os casos de semelhança sejam justificados neste momento, apenas "reconhecidos".

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Por outro lado, neste momento são "estabelecidas" as relações métricas nos triângulos retângulos, ou seja, iniciam-se algumas demonstrações.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

É também no Nono ano que aparecem as relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secante, ou seja, o Teorema de Tales.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Os assuntos semelhança, semelhança de triângulo e Teorema de Tales não aparecem nas habilidades indicadas para os anos do Ensino Médio.

Nota-se que os temas semelhança de triângulos e Teorema de Tales, escolhidos para o presente estudo, tem grande relevância na Base Nacional Comum Curricular, aparecendo em mais de um ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Dessa forma, o docente de matemática terá que ministrar esses conteúdos visando a aprendizagem significativa do corpo discente. Nesse processo, faz importante o uso de recurso didáticos. Sendo assim, a BNCC justifica a necessidade de reunir diversas propostas didáticas para o ensino de Semelhança de Triângulos e /ou Teorema de Tales.

3 Recursos didáticos disponíveis

Neste capítulo serão apresentados diversos recursos didáticos, que apresentam materiais manipuláveis, existentes para o ensino de: Teorema de Tales e Semelhança de triângulos. De acordo com [de Souza and de Godoy Dalcolle, 2007], recurso didático é todo material utilizado como auxílio no ensino-aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado pelo professor a seus alunos.

A respeito dos materias manipulativos, Passos (2012, p.78) diz que:

> $(\cdots)$Reys (apud Matos Serrazina, 1996) define materias manipuláveis como ?objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia". Os materiais manipuláveis são caracterizados pelo desenvolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa.

[Caldeira, 2009] aponta que:

> $(\cdots)$os materiais manipulativos são facilitadores da aprendizagem matemática visto que: i) se baseiam na experiência; ii) a aprendizagem sensorial é a base de toda a experiência; iii) a aprendizagem caracteriza-se por estágios distintos de desenvolvimento; iv) a aprendizagem é facilitada pela motivação; v) a aprendizagem constrói-se do concreto para o abstrato; vi) a aprendizagem requer participação e envolvimento ativo do aluno.

Todos os recursos didáticos obtidos serão analisados e classificados quanto aos níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. Apresentarão também, sugestões quanto ao uso nas fases didáticas de Van Hiele.

Para a realização dessa análise, foi elaborada uma ampla pesquisa dos recursos disponíveis no Portal do Professor oferecido pelo MEC, nas Publicações, referentes ao tema em estudo, da Revista Professor de Matemática da Universidade de São Paulo, da Revista Cientifica do IFMG, do Arquivo Digital da UFRGS, dos Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática e das dissertações do Profmat.

No dia 24 de janeiro de 2017, foi realizada uma busca no Portal do Professor[1]

[1] `http://portaldoprofessor.mec.gov.br/sobre.html`

a fim de obter planos de aula que abordassem os temas Teorema de Tales e Semelhança de triângulos.

O ponto de partida, para obter as publicações, foram os periódicos nacionais encontrados no site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Esta é um fonte sólida de pesquisa na área, pois a SBEM é uma sociedade Civil, sem fins lucrativos que tem como missão buscar meios para desenvolver a formação matemática de todo cidadão do nosso país.

No dia 17 de março de 2017, foi realizada uma busca por periódicos nacionais na página da SBEM [2]. A pesquisa se manteve nos periódicos nacionais e os obtidos estão listados a seguir:

- Brasil Escola
- Só Matemática
- Boletim Gepem
- Revista Metáfora Educacional
- Educação Matemática Pesquisa
- Linhas críticas - Universidade de Brasília
- Eureka - Revista da Olimpíada Brasileira de Matemática
- Educação Matemática em Revista - SBEM Rio Grande do Sul
- Revista do Professor de Matemática - Universidade de Sâo Paulo
- Zetetiké - Revista de Educação Matemática - Universidade de Campinas
- Caminhos da Educação Matemática em Revista - Instituto Federal do Sergipe
- Modelagem na Educação Matemática - Universidade Regional de Blumenau FURB
- Investigações em Ensino de Ciências - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
- Bolema - Revista Boletim de Educação Matemática - Universidade Estadual Paulista

[2] http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/95-periodicos/117-periodicos

- Perspectivas da Educação Matemática - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
- Perspectivas de Educação Matemática - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
- RPEM - Revista Paranaense de Educação Matemática - Universidade Estadual do Paraná
- RBECT - Revista Brasileira de Ensino de Ciência - Universidade Tecnológica Federal do Paraná
- Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina
- Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia - Universidade Tecnológica Federal do Paraná
- Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia - Universidade Federal de Santa Catarina
- REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
- ULBRA - Acta Scientiae - Revista de Ensino de Ciências e de Matemática - Universidade Luterana do Brasil
- EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - Universidade Federal de Pernambuco
- Revista Educação Matemática Pesquisa, do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática - Pontifícia Universidade de São Paulo
- HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática

Em todas as revistas foram buscadas as palavras-chaves: Semelhança, semelhança de triângulo, Tales, Thales, ensino e geometria. Vale ressaltar que a busca foi feita nos periódicos nacionais, por esse motivo as palavras- chaves foram apenas em português. Pode-se pesquisar apenas por Tales/Thales, pois até o momento o Teorema de Tales é um assunto abordado no currículo brasileiro.

Muitas revistas não permitiram acesso para não associados, restringindo a quantidade de publicações obtidas. Após uma ampla pesquisa pelas palavras-chaves foram obtidas apenas publicações da Revista Professor de Matemática da Universidade de São Paulo.

Na busca, pelos artigos completos da revista citada, foram mencionados o Repositório digital da UFRGS[3] e a Revista Científica do IFMG[4]. Tanto no Repositório digital quanto na Revista Científica as palavras-chaves para busca foram as mesmas utilizada nos periódicos fornecidos pela SBEM.

Após a perquisição feita no site da SBEM sobre os periódicos nacionais, as buscas voltaram-se para os anais do Encontro Nacional de Educação Matemática[5] (ENEM).Foi realizada uma extensa leitura nos anais do ENEM com o objetivo de obter publicações que abordassem o tema da análise em questão. Por último, ainda no mesmo dia, foi feita uma pesquisa por dissertações do Profmat[6]. Os resumos dos anais do ENEM e as dissertações do Profmat, os quais foram lidos, são os que continham no título alguma das palavras-chaves a seguir: Semelhança de figuras, semelhança de triângulos, Teorema de Tales/Thales, ensino e geometria.

3.1 Portal do Professor - MEC

Professores que participam de comunidades educacionais sentem-se parte de uma classe docente, além de possuírem um espaço para produção de conhecimento e troca de experiência. De fato, [Levy, 2002] traduzido por [Costa, 2004] aponta que:

> $(\cdots)$Uma rede de pessoas interessadas pelos mesmos temas é não só mais eficiente do que qualquer mecanismo de busca, mas, sobretudo, do que a intermediação cultural tradicional. Que sempre filtra demais, sem conhecer no detalhe as situações e necessidades de cada um. (p.101)

Com o objetivo de proporcionar a participação dos professores em comunidades educacionais, foi criado, no ano de 2007, o Portal do Professor com a oferta de conteúdos digitais, espaços de comunicação e outros elementos. Na página do Portal[7], obtém-se a seguinte informação:

> $(\cdots)$O portal, lançado em 2008 em parceria com o Ministério da Ciência e Tecnologia, tem como objetivo apoiar os processos de formação dos

[3] https://www.lume.ufrgs.br/

[4] http://www2.formiga.ifmg.edu.br/forscience/index.php/forscience/search

[5] http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem

[6] http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?&pag=9

[7] http://portaldoprofessor.mec.gov.br/sobre.html acessada em 19 de janeiro de 2017

> professores brasileiros e enriquecer a sua prática pedagógica. Este é um espaço público e pode ser acessado por todos os interessados.

Dentre as possibilidades do portal, estão o compartilhamento de planos de aula, softwares e descrições de materiais concretos/manipuláveis. Também é possível deixar comentários sobre o material lá publicado, favorecendo um ambiente de discussão.

Na pesquisa realizada no Portal, foram obtidos cinco planos de aula sobre os temas Teorema de Tales e semelhança de triângulos, cada plano de aula contém um ou mais recursos didáticos. A seguir serão descritas as aulas encontradas, a análise crítica dos recursos utilizados e as classificações de acordo com os Níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. Alguns planos de aula apresentam sugestões de outros recursos didáticos disponíveis. É possível ter acesso aos links do plano de aula completo no rodapé de cada atividade.

3.1.1 Semelhança de Triângulos em três casos

Esta é uma proposta de aula de autoria da professora Priscila Marquezine Gomes[8] do Colégio de Aplicação da UFRJ, publicada em fevereiro de 2011. O objetivo da aula é:

> $(\cdots)$reconhecer o conceito de semelhança de polígonos, para entender semelhança de triângulos. Identificar o 1° caso AA (ângulo -ângulo), o 2° caso LAL (lado-ângulo-lado) e o 3º caso LLL (lado-lado-lado). Resolver questões de semelhança de triângulos em três casos

O ponto de partida da aula é o uso de espirais como tema motivador. Pede-se que o professor apresente espirais aos estudantes e os motivem a observar os triângulos isósceles que aparecem, como ilustra a figura a seguir.

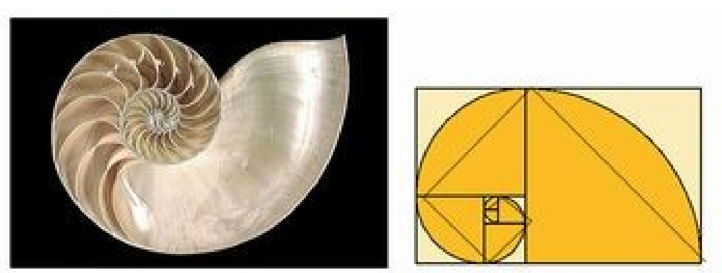


Figura 3.1: Tema motivador

Em seguida a professora recomenda enunciar o conceito de semelhança de triângulos e só então, introduzir o material concreto.

[8] http//portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27417

Esse material concreto é composto de triângulos confeccionados em material emborrachado. A autora pede que esses triângulos sejam construídos de forma que os alunos possam identificar os casos de semelhança. Ela disponibiliza a ilustração da figura a seguir como parâmetro para a confecção e não dá maiores detalhes sobre a construção ou as formas dos triângulos.

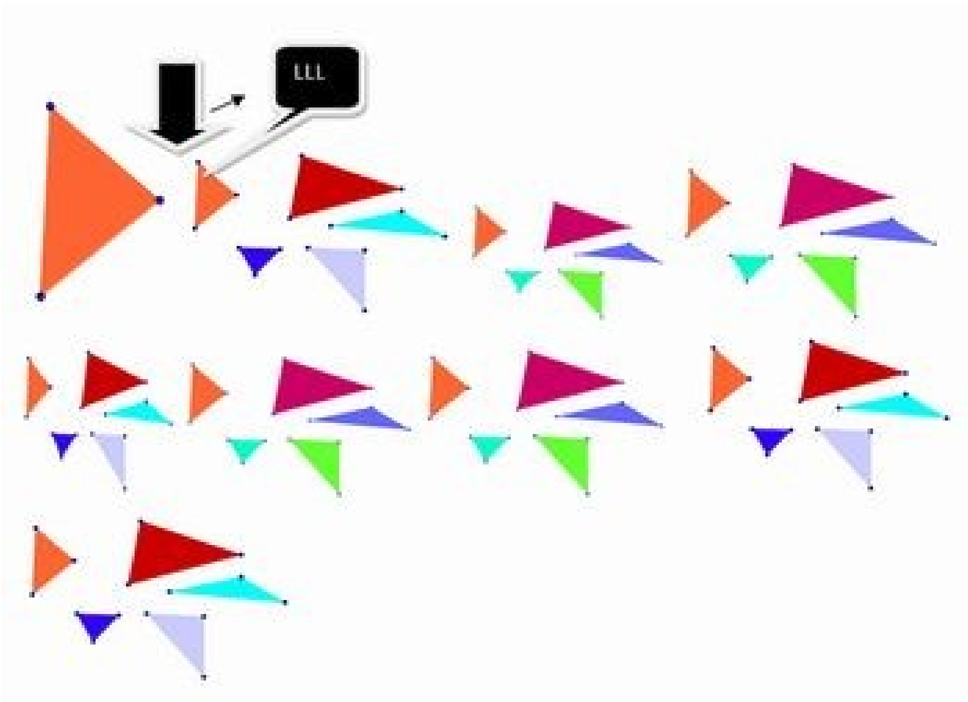


Figura 3.2: Recortes de triângulos semelhantes

Após definir semelhança de triângulos aos alunos, pede-se que o professor apresente, utilizando os recortes de triângulos, os casos de semelhança. Nota-se que a função do material concreto é levar o aluno a identificar os casos de semelhança de triângulos.

São sugeridas as atividades abaixo:

Atividade 01: Elabore vários pares de triângulos que possam representar os casos de semelhança de triângulos. Crie um jogo onde os alunos, em grupos, possam identificar os casos e representar os elementos de semelhança.

Atividade 02: Apresente sobre folhas de cartolinas alguns triângulos. Solicite que os alunos representem triângulos semelhantes aos dados utilizando os três casos de semelhança.

Atividade 03: Solicite um painel resumo aos alunos, sobre este conteúdo para a sala de aula. Incentive a criatividade com uso de materiais, liberdade e criação.

Níveis de Van Hiele e as fases didática: As atividades aqui presentes, levam o aluno a estabelecer propriedades e utilizá-las para identificar os casos de semelhança. Sendo assim, elas são capazes de levarem o estudante a atingir os níveis 0 e 1 de Van Hiele, ou seja, a visualização e a análise.

É importante destacar que as atividades levam o aluno a estabelecer inter-relações entre as propriedades, mas não pode-se dizer que elas levam o aluno a atingir o nível da dedução informal, pois não orienta o professor a apresentar uma demonstração. No nível da dedução informal, ou seja, o nível 2 de Van Hiele o aluno deve ser capaz de acompanhar uma demonstração.

Quanto às fases didáticas, a proposta da professora Marquezine sugere que a aula comece na primeira fase, chamada questionamento, com a abordagem das espirais. A fase 2, chamada de orientação direta, aparece na atividade 01, quando há o uso do material concreto de forma livre, em forma de jogo. As fases didáticas três e quatro, que tratam da Explicitação e da Orientação Livre, poderão aparecer de acordo com a aplicação do professor. A atividade 03 parece ter sido incluída justamente para que o professor, em sala de aula, tenha a oportunidade de apresentar um fechamento dos casos de semelhança de triângulos, a fim de evitar que os estudantes não permaneçam com mal-entendidos.

Comentários e sugestões: Algumas questões, sobre a aplicação das atividades, ficam em aberto. É citado um jogo, porém o mesmo não está muito orientado. Quanto ao recurso didático utilizado nesse jogo, encontram-se também algumas dúvidas em sua construção e utilização. Algumas das dúvidas são referentes aos lados desses triângulos e como os estudantes irão medi-los para perceberem os casos lado-lado-lado e lado-ângulo-lado.

O objetivo desse plano de aula é apresentar os casos de semelhança de triângulos, porém nas atividades sugeridas, o caso em destaque é o caso ângulo-ângulo.

A autora destaca o caso lado-lado-lado, mas esse caso e o caso lado-ângulo-lado só poderão ser observados com o uso de uma régua ou então é necessário que os triângulos confeccionados possuam os lados correspondentes proporcionais, de modo que um deles seja a unidade de medida. Dessa forma o aluno poderá sobrepor as peças e verificar a razão entre os lados.

Como as atividades parecem estar em aberto, pode-se sugerir que o professor aplique a atividade 01 criando um jogo em que os alunos identifiquem os triângulos semelhantes sobrepondo os recortes de triângulos. Num segundo momento, esses alunos seriam solicitados a verbalizarem quais comdições explicam a semelhança. Vale ressaltar que o aluno já foi apresentado à definição de semelhança de triângulos.

Na atividade 02 eles irão construir os triângulos semelhantes e tentar justificar o porquê de serem semelhantes. É função do professor orientar essa construção e questionar as condições necessárias para que dois triângulos sejam semelhantes.

Assim como a professora Marquezine coloca, a atividade 03 será o fechamento da aula. É interessante que nesse momento os alunos possam discutir sobre suas respostas e destacarem as observações feitas. Só assim o professor estabelece os casos de semelhança e conclui o raciocínio feito pelos alunos.

Dessa forma as atividades levarão os alunos a identificarem os casos de semelhança e o material concreto passa a ser peça fundamental desse processo, uma vez que é manipulando os recortes de triângulos emborrachados que os alunos começam a identificar as condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhante.

É possível ter acesso, no plano de aula, a todas atividades. Até o momento, ele não apresenta comentários nem avaliação.

3.1.2 Aferição de distâncias inacessíveis

Esta é uma proposta de aula de autoria do professor Guilherme Erwin Hartung[9], do Colégio Estadual Embaixador José Bonifácio, publicada em outubro de 2010. O aluno poderá aprender com esta aula a:

> (⋯)Usar conceitos como proporção, semelhança de triângulos e trigonometria para aferir distâncias inacessíveis, trabalhar conceitos de grandezas e medidas e experimentar de maneira prática os conteúdos citados. Ele ainda destaca a importância de assuntos previamente consolidados, sendo eles: Sistemas de medidas, proporção, semelhança de figuras e trigonometria básica.

Esta aula não tem por objetivo introduzir o conceito de semelhança de triângulos nem abordar os casos de semelhança. São apresentadas três situações problemas, envolvendo o tema semelhança de triângulos, as quais o professor poderá construir em ambiente físico com os alunos.

Os materiais concretos utilizados são para a construção do cenário da situação problema. O autor não determina como as situações problemas devem ser abordadas,

[9]http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22970

antes deixa o professor livre para criar a situação em seu ambiente escolar, sendo em sala de aula com lápis e papel, espaço ao ar livre ou até mesmo construindo uma maquete junto aos alunos.

As situações problemas citadas estão associadas às perguntas a seguir:

Situação Problema 01: Como podemos calcular a distância entre dois arbustos, considerando a existência de um obstáculo entre eles?

Situação Problema 02: Como podemos calcular a distância entre as margens de um rio sem termos que atravessá-lo?

Situação Problema 03: Como podemos calcular a altura de um longo pinheiro?

Níveis de Van Hiele e as fases didática: Não se pode classificar as atividades, quanto aos níveis de Van Hiele, sem saber como serão abordadas em sala de aula. Se elas aparecerem como tema motivador no início da aula, podem levar o estudante a atingir o nível 0 de Van Hiele. Neste nível os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais, considerando os conceitos geométricos como um todo. Quanto a fase didática, nessa situação, temos a fase didática 1 de Van Hiele, o Questionamento.

Se as atividades aparecerem após a definição de semelhança de triângulos, podem ter como obtivo levar o estudante ao nível 2 de Van Hiele, a Dedução Informal. Neste nível o aluno é capaz de distinguir entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico. Quanto à fase didática, nessa situação, temos a fase didática 4 de Van Hiele, a Orientação Livre .

É possível ter acesso, no plano de aula, à sequência completa de atividades. Até o presente momento a atividade possui três avaliações incluindo comentários. Todas as avaliações dão nota máxima a aula e os comentários são para parabenizar o autor pela iniciativa. Não apresenta comentário colaborativo, ou seja, nenhum comentário fala sobre possíveis aplicações e resultados.

3.1.3 Proporcionalidade no Cap UERJ: Teorema de Tales

Esta é uma proposta de aula de autoria da professora Rita Maria Cardoso Meirelles[10] do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, publicada em dezembro

[10] http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12736

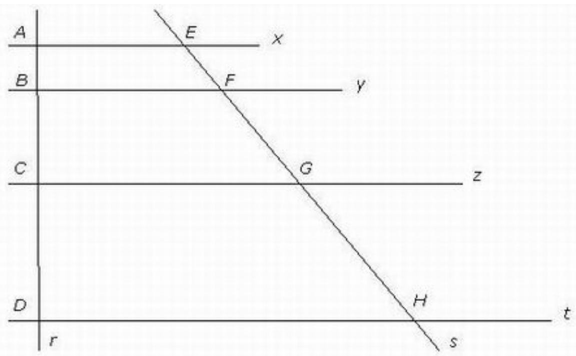
de 2009. O objetivo principal é:

"Apresentar o Teorema de Tales e sua utilização em resoluções de problemas."

As atividades consistem em medir segmentos formados pelas retas paralelas em suas transversais, obter a razão entre esses segmentos da mesma transversal e comparar as razões obtidas. Para isso são dadas ilustrações contendo feixe de retas paralelas e duas transversais, régua e uma calculadora. Em seguida o aluno é apresentado a uma consequência do Teorema de Tales.

São apresentadas as atividades à seguir:

Atividade 01: Determine as medidas dos segmentos formados pelas retas transversais r e s compreendidos entre o feixe de retas paralelas x, y, z e t da figura abaixo, completando a tabela de medidas. *Nota: Apresente aos alunos o significado de um feixe de retas paralelas. Um feixe de retas paralelas é um conjunto de três ou mais retas paralelas.*



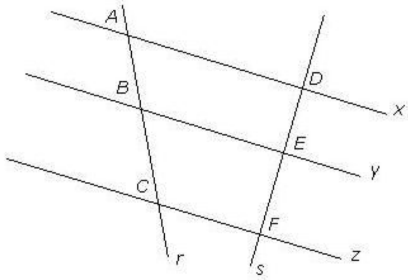
Medidas	
$\overline{AB} = 1$	$\overline{EF} = 1{,}3$
$\overline{BC} = 2$	$\overline{FG} = 2{,}6$
$\overline{CD} = 3$	$\overline{GH} = 3{,}9$

Figura 3.3: atividade 01

Atividade 02: Determine as medidas dos segmentos formados pelas retas transversais r e s compreendidos entre o feixe de retas paralelas x, y e z da figura abaixo, completando a tabela.

Se achar conveniente, proponha a mesma atividade, agora feita em uma folha de papel quadriculado, onde os próprios alunos criarão o desenho das retas paralelas cortadas por duas transversais. Nessa atividade os segmentos terão medidas variadas e há necessidade do uso de calculadoras e de aproximações das medidas.

A partir das conclusões tiradas nas atividades, enuncie o Teorema de Tales,



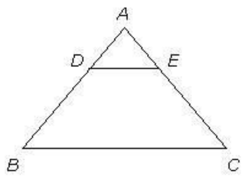
Medidas	
$\overline{AB} = 1{,}5$	$\overline{EF} = 1{,}35$
$\overline{BC} = 2{,}0$	$\overline{FG} = 1{,}75$

Figura 3.4: atividade 02

caso julgue interessante, conte um pouco de sua história.

Atividade 03: Apresente uma aplicação como: Determine o valor de x, sabendo que o segmento DE é paralelo a base BC do triângulo ABC.

$\overline{AD} = 12$; $\overline{DB} = 36$; $\overline{AE} = 15$ e $\overline{EC} = x$



Uma solução:

$$\frac{12}{36} = \frac{15}{x} \Rightarrow 12x = 36 \times 15 \Rightarrow x = \frac{36 \times 15}{12} \Rightarrow x = 45$$

Figura 3.5: aplicação do Teorema de Tales

Níveis de Van Hiele e as fases didática: As atividades 01 e 02 propõem que o estudante construa o conceito do Teorema de Tales, pois eles investigam as razões dos segmentos nas transversais, comparam os resultados obtidos e discutem sobre o que foi observado. Dessa forma, elas fazem com que os alunos visualizem a estrutura geométrica, passando pelo Nível 0 de Van Hiele e os levam a discernir características geométricas da figura estabelecendo propriedades, atingindo então a Análise, o nível 1 de Van Hiele.

Na atividade 03 o aluno precisa identificar as características geométricas e aplicar uma sequência de atividades, ou seja, ele já é capaz de distinguir entre a necessidade e a suficiência do conjunto de propriedades no estabelecimento de propriedades geométricas. Sendo assim, esta atividade pode levar o aluno ao nível 2 de Van Hiele, a

Dedução Informal. Como a atividade 03 não faz com que o estudante cumpra todas as características cognitivas do nível 2, diz-se então que este plano de aula tem como objetivo atingir o Nível 1 de Van Hiele.

Quanto às fases didáticas, a proposta da professora Meirelles sugere iniciar pela fase 2, a orientação direta, onde os alunos irão explorar o conceito em estudo por meio de materiais previamente selecionados. As atividades 01 e 02, além de serem da fase didática 2 também fazem parte da fase didática 3, a explicitação. Pois os alunos são levados a expressarem verbalmente o que estão observando e refinam o vocabulário com o auxílio do professor. Ainda na atividade 02, a autora sugere que o professor, após os comentários dos alunos, nomeie o Teorema de Tales. Nesse momento tem-se a fase didática 5, o Fechamento. A atividade 03 é um exercício para introduzir uma consequência de Tales, para a execução desse exercício o aluno terá que estabelecer o melhor caminho para resolver o problema, além de fazer uso das propriedades. Dessa forma essa atividade faz parte da fase didática 4, a Orientação Livre.

Comentários e sugestões: Na atividade 02 a autora sugere o uso de papel quadriculado para construção das retas paralelas das duas retas transversais. Como os estudantes participam do processo, ou seja, não apenas recebem a ilustração, obtêm uma aprendizagem significativa. O uso de materiais concretos e softwares podem auxiliar a interação entre o aluno e o objeto em estudo.

Um recurso concreto, para a atividade, é o geoplano. O estudante pode construir as retas a paralelas e as duas retas transversais no geoplano, com o auxílio de elásticos. As figuras a seguir são exemplos das ilustrações das atividades 02 e 03.

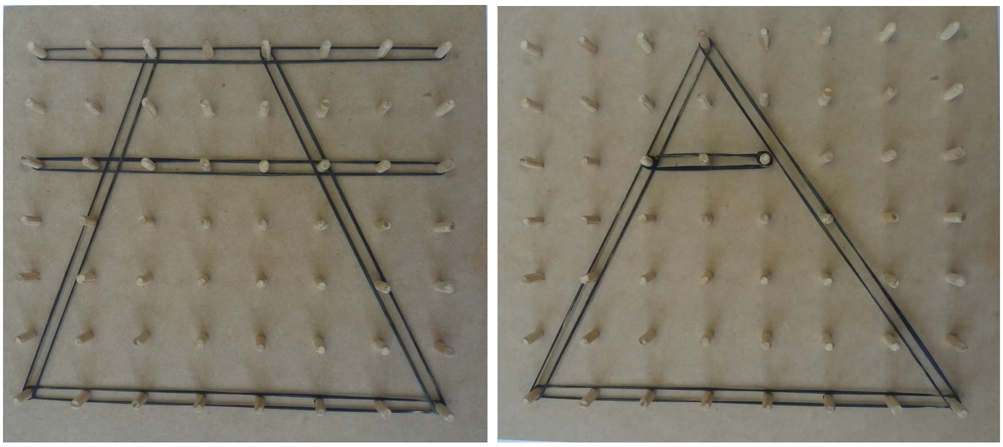


Figura 3.6: Atividades 02 e 03 respectivamente

Pode-se também fazer uso de um software de geometria dinâmica, como exemplo o Geogebra. O professor irá fornecer ilustrações prontas ou pedir que o aluno construa no software. Com este recurso não se faz necessário o uso de régua e calculadora, o aluno pode realizar toda a atividade de forma digital. A figura a seguir é um exemplo de atividade no Geogebra.

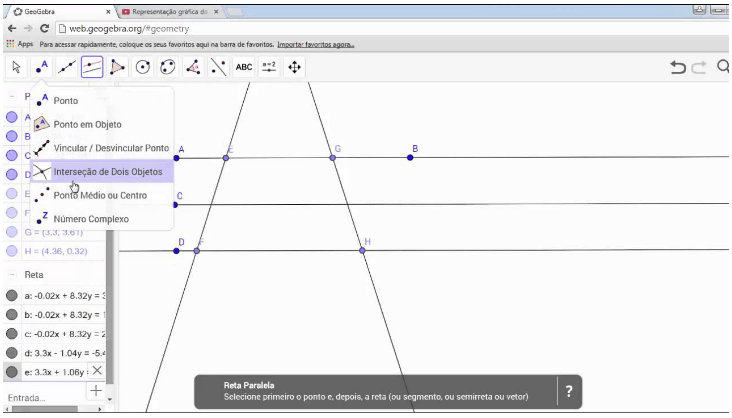


Figura 3.7: Atividade no Geogebra

É possível ter acesso, no plano de aula, a todas as atividades sugeridas. Este plano de aula possui cinco avaliações incluindo comentários.

3.1.4 Medindo distância inacessíveis

Esta proposta de aula é de autoria de Vitor Cesar Paixão Santos[11] da Universidade Feral do Rio de Janeiro, publicada em fevereiro de 2011 . O objetivo deste plano de aula é: "Introduzir o Teorema de Tales e aborda-lo em situações problemas do dia a dia.

O autor apresenta um guia ao professor quanto a aplicação da aula. Neste guia, ele começa sugerindo a leitura sobre à demonstração do Teorema de Tales, porém o endereço eletrônico disponibilizado não estar mais disponível. Além da demonstração sugerida, também é dito ao professor uma possível maneira de enunciar o teorema aos alunos.

É proposto ao professor que comece a aula apresentando uma imagem do dia a dia, que contém um feixe de retas paralelas. Além da imagem, também é sugerido um vídeo. A imagem e o vídeo podem ser obtidos nos endereços eletrônicos `http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/upload/conteudo_legenda/603f774628762e3d6d1702b3663c7b`

[11] `http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25789`

jpg e https://www.youtube.com/watch?v=xNoL_yMlLYc&feature=player_embedded respectivamente.

Num segundo momento, propõe que sejam passadas três atividades aos estudantes. As sínteses das atividades estão á seguir:

Atividade 01: Como atividade inicial o professor pode apresentar a semelhança de triângulos como consequência do Teorema de Tales. A explicação deve ser dada utilizando, por exemplo, a figura a seguir. Uma vez que ao traçarmos pelo ponto A uma reta paralela a $A'B'$ (reta vermelha), obtemos dois paralelogramos e assim a proporção entre os lados correspondentes dos triângulos ABD e ACE, fica evidente. *Importante saber: Essa atividade pode ser executada em um laboratório de informática ou na própria sala de aula.*

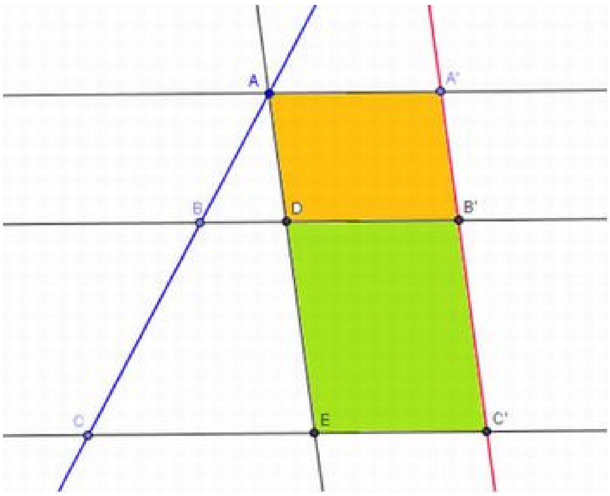


Figura 3.8: Atividade 01

Atividade 02: Nesta atividade o professor levará seus alunos para um local plano próximo a um poste de luz, de onde se pode medir com uma trena o comprimento da sombra desse poste formado pelos raios solares. Para realizar esta medida pode se utilizar a 'trena de roda". Em seguida, coloca-se um cabo de vassoura, com medida conhecida, na mesma direção do poste e após medir o comprimento ad sombra desse cabo de vassoura no chão, faz-se um esquema como na figura:

Em seguida, recortando as figuras e sobrepondo-as, obtém-se a figura a seguir.

Utilizando o Teorema de Tales, obtém-se a altura do poste.

Atividade 03: Nesta atividade o professor levará seus alunos para um laboratório de in-

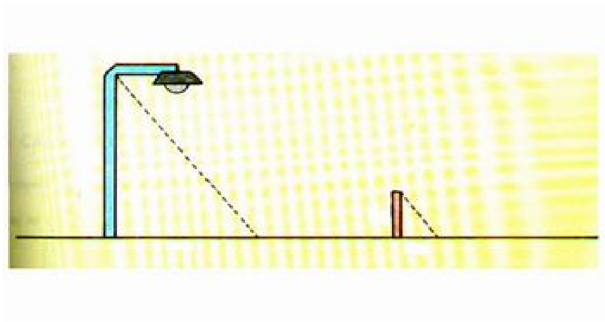


Figura 3.9: Atividade 02 ilustração 1

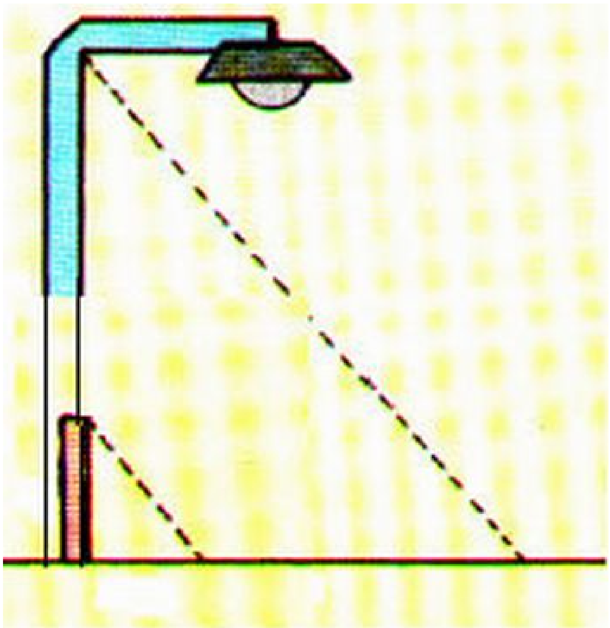


Figura 3.10: Atividade 02 Ilustração 2

formática ou similar. Ao acessar a internet, o professor pedirá aos alunos que se conectem ao site: `http://maps.google.com.br/` , em seguida pedirá que cada aluno investigue o mapa de ruas próximas a sua escola ou casa.

Nota: É importante destacar que os alunos percebam que a geografia das ruas apresentadas no mapa segue um padrão parecido com o feixe de paralelas e transversais. A atividade consiste em pedir que os alunos identifiquem as retas paralelas e as transversais nesse modelo geométrico.

Níveis de Van Hiele e as fases didática: Esta aula pode levar o aluno a atingir o nível 2 de Van Hiele, a Dedução Informal. Pois o aluno é capaz de estabelecer inter-relações das propriedades e acompanhar uma demonstração. Quanto as fases didáticas, o professor Santos começa com o questionamento apresentando o tema motivador, feixe de retas paralelas no dia a dia. A atividade 01 pode ser da fase 3,a Explicitação, se o aluno melhorar seu vocabulário e expor verbalmente o que está sendo observado. A atividade 02 pode ser da fase 4, a Orientação Livre, se o estudante tiver que pensar como resolver o problema além de ter que seguir múltiplas etapas de raciocínio. A atividade 03 é da fase 2, a Orientação Direta, pois o aluno explora o conceito em estudo por meio de um recurso escolhido pelo professor, o Google Mapas.

Percebe-se a ausência da fase didática 5, o fechamento. Pois nenhuma das atividades levam o aluno a concluir o conceito estudado. É importante destacar que é nesta fase didática que o professor concluí o pensamento do aluno e formaliza o conceito, não deixando dúvidas ou conceitos errôneos.

Comentários e sugestões: O objetivo proposto pelo autor é introduzir o conceito do Teorema de Tales. A atividade 01 sugerida apresenta uma justificativa Do Teorema de Tales usando semelhança de triângulos. Porém dessa forma o autor inverte o processo, pois o Teorema de Tales é a justificativa para a semelhança de triângulos. A justificativa do Teorema de Tales pode ser feita utilizando congruência de triângulos.

Não é abordado geometria não-Euclidiana nesse plano de aula, porém a atividade 03 apresenta um modelo não-Euclidiano. Os alunos identificam as retas paralelas pela definição de que elas não se encontram, nesse momento o professor poderia fazer uma breve abordagem de alguns modelos da geometria não Euclidiana.

Uma atividade sugerida seria o recurso educacional conhecido como Geometria do Táxi produzido pela professora Ana Kaleff da Universidade Federal Fluminense, publicado em dezembro de 2004. Este recurso é composto por uma maquete, um geoplano e um caderno de atividades. O artigo que contém esse recurso pode ser obtido no boletim do Gepem no endereço digital `http://www.uff.br/leg/publicacoes/01_04_artigopublicadoGT.pdf`.

A atividade 03 poderia ser feita na maquete que contém no recurso didático Geometria do Táxi . O aluno poderá identificar as retas paralelas e as transversais na maquete. A imagem à seguir é da maquete utilizada no recurso didático em questão.

É possível ter acesso, no plano de aula, a todas as atividades propostas. Até o momento este plano de aula não possui nenhuma avaliação e comentário.

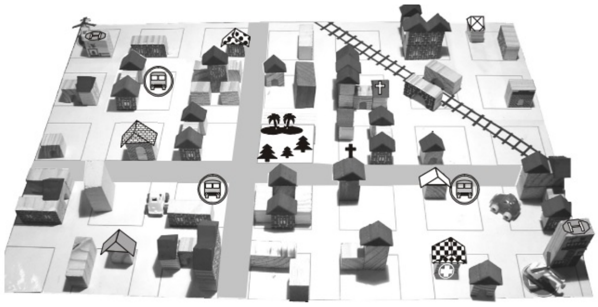


Figura 3.11: maquete Geometria do Táxi

3.1.5 Visualizando mapas online: um recurso prático para a compreensão do Teorema de Tales

Esta proposta de aula é de autoria do professor Ederson de Oliveira Passos[12] de Uberlândia, publicada em setembro de 2013. O objetivo deste plano é:

> $(\cdots)$Levar o aluno a aprender a avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas, conforme habilidade H4 da matriz de referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM; Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente, conforme habilidade H13 da matriz de referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM; E identificar em fontes diversas o processo de ocupação dos meios físicos e as relações da vida humana com a paisagem, conforme habilidade H26 da matriz de referência de Ciências Humanas e suas Tecnologias do ENEM.

O autor pede que o professor utilize o GOOGLE MAPAS e habilite a função de realização de medidas, para isso ele fornece um guia ao professor de como habilitar essa função. A atividade proposta é a de validação do Teorema de Tales.

O plano de aula não apresenta uma lista de atividades voltadas para os alunos e sim uma orientação ao professor de como deve proceder. Com a ferramenta de medidas habilitada, o professor, junto aos alunos, localiza uma região adequada para a validação do Teorema de Tales. Passos pede que nesse momento o conceito do Teorema já tenha sido dado aos alunos. A imagem à seguir é da cidade de Uberlândia-MG e tem a região ideal a ser estuda.

Em seguida, utilizando uma folha A4, o professor irá pedir aos alunos que façam uma representação da região escolhida na folha definindo as esquinas como pontos. A imagem a seguir tem uma representação possível, os pontos A, B, C, D, E e F são as esquinas.

[12] `http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=52076`

Figura 3.12: Região adequada para a validação do Teorema de Tales

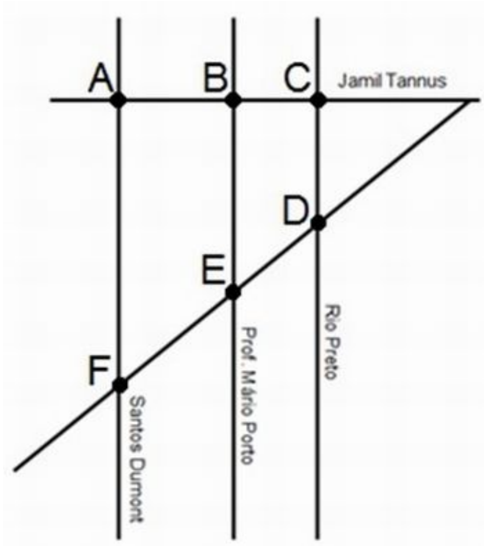


Figura 3.13: Representação da região no papel A4

Agora o aluno deverá voltar a internet e com a ferramenta de medição verificar a distância de três dos segmentos formados pelas paralelas nas transversais. A figura a seguir exemplifica a situação.

Nesse momento os alunos devem usar as medidas encontradas e realizar os cálculos de modo a validar a aplicação do Teorema de Tales. Após os cálculos ele deve voltar a internet e verificar a medida do segmento que faltava, comparando com o obtido. Validando o Teorema.

O autor termina solicitando que a atividade de encerramento, seja solicitar que os alunos realizem uma busca sobre a biografia de Tales de Mileto, suas obras e estudos. Além de abordar a forma com que ele aplicou o seu teorema para a realização de medidas de distâncias inacessíveis e em Astronomia.

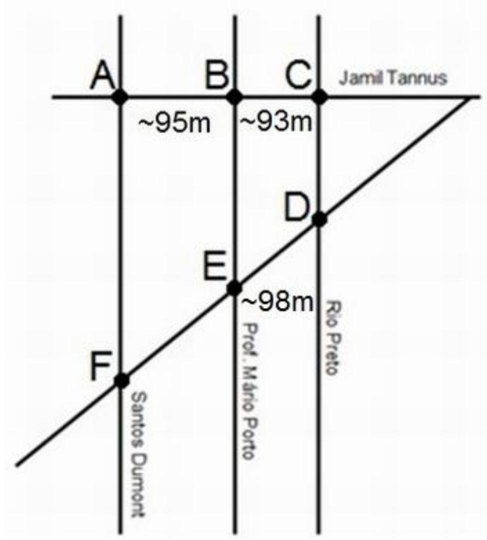


Figura 3.14: aferição das distâncias

Níveis de Van Hiele e as fases didática: Observa-se que esta atividade não introduz um conceito, ela é uma validação do Teorema e pode ser utilizada em diversos momentos da aula. Por esse motivo , não podemos classificar a atividade nos Níveis de Van Hiele. Ela pode levar o estudante a atingir o nível 2 ou 3, ou seja, Dedução Informal ou Formal, dependendo do que foi trabalhado anteriormente. Porém independente do nível a fase didática em questão é a da orientação livre. Pois o alunos precisa verificar as possibilidades para validar o teorema.

É possível ter acesso, no plano de aula, a sequência completa de atividades. Até o momento este plano de aula não possui nenhuma avaliação e comentário.

3.2 Publicações em Periódicos

Nesta seção é apresentado um panorama das publicações nacionais sobre Matemática ou Educação Matemática. As publicações selecionadas abordam recursos didáticos ou propostas para o ensino dos temas Teorema de Tales e Semelhança. Serão expostos uma breve descrição e uma análise crítica dos recursos e ou propostas obtidas em cada publicação e, além disso, todas as atividades sugeridas serão classificadas de acordo com os níveis do pensamento geométrico de Van Hiele.

3.2.1 Revista do Professor de Matemática - RPM

Pode-se ter acesso a uma breve descrição do periódico na página eletrônica da RPM:

> $(\cdots)$A RPM, como seu próprio nome diz, é uma publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio. A revista publica artigos de matéria de nível elementar ou avançado, que seja acessível ao professor do ensino médio e a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática. Uma experiência interessante em sala de aula, um problema que suscita uma questão pouco conhecida, uma história que mereça ser contada ou até uma nova abordagem de um assunto conhecido.[13]

Foram obtidas, na RPM, três publicações com propostas didáticas para o ensino de semelhança de triângulos. Será exposto um breve resumo das atividades e dos recursos didáticos abordados em cada publicação, além de uma análise crítica dos recursos utilizados, suas aplicações e as classificações de acordo com os Níveis de Van Hiele.

Um problema, dez soluções[14]

Esta publicação é de autoria do professor Carlos Nely C. de Oliveira do Colégio Bandeirantes, São Paulo, publicada na RPM 83 (ver [de Oliveira,]). É apontado que:

> $(\cdots)$Os problemas de Matemática podem, muitas vezes, ser resolvidos de duas ou mais formas diferentes. No entanto, com pouca frequência vemos em publicações ou em sala de aula mais do que uma solução para um problema. Depois de encontrar uma resposta, os alunos e o professor ficam satisfeitos e passam para o próximo item. Afinal, se o problema está resolvido, por que resolvê-lo de novo?

Aponta-se que levar, aos alunos, mais de uma solução de determinado problema é uma grande oportunidade de rever conceitos anteriores, além de estimular o poder da descoberta. Foi proposto um exercício de áreas e semelhança de triângulos que possui mais de uma solução. As soluções apresentadas, foram as obtidas na aplicação do problema aos seus alunos do Ensino Médio.

A questão proposta é do vestibular da FUVEST de 2007:

A figura representa um retângulo $ABCD$, com $AB = 5$ e $AD = 3$. O ponto E está no segmento CD de maneira que $CE = 1$, e F é o ponto de intersecção da diagonal AC com o segmento BE. Então, a área do triângulo BCF vale:

a) 6/5 b) 5/4 c) 7 d) 6 e) 5

[13] `http://rpm.org.br/default.aspx?m_id=4`

[14] `http://www.rpm.org.br/cdrpm/83/4.html`

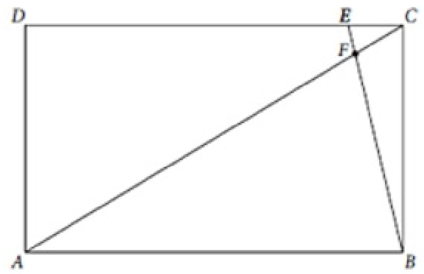


Figura 3.15: FUVEST - 2007

Apesar do título do artigo, o autor apresenta apenas seis soluções para o problema. Abaixo estão indicadas aquelas que envolvem semelhança ou proporcionalidade:

Solução 1: Usando o caso de semelhança ângulo-ângulo, os triângulos ABF e CEF são semelhantes. Então $AF = 5CF$ e é possível observar triângulos equivalentes, como os da figura a seguir:

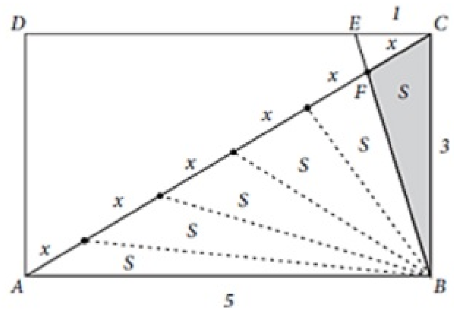


Figura 3.16: Triângulos equivalentes

Logo, a área sombreada corresponde à sexta parte da área do triângulo ABC.

Solução 2: Assim como na solução 1 usa-se o caso ângulo-ângulo de semelhança e obtém-se $AF = 5CF$. Traçamos, pelos pontos de divisão de AF em 5 partes iguais, segmentos paralelos ao segmento BE, como na figura a seguir.

A área do triângulo CQA pode ser calculada. Observe que o triângulo CEF é semelhante ao triângulo CQA pelo caso LAL de semelhanças. Sendo assim, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre quaisquer linhas homólogas. desse modo, pode-se obter a área do triângulo CEF.

Pode-se, agora, calcular a área do triângulo CEB. Como a área do triângulo CEF já é conhecida, para obter a área do triângulo BCF, que é pedido no problema,

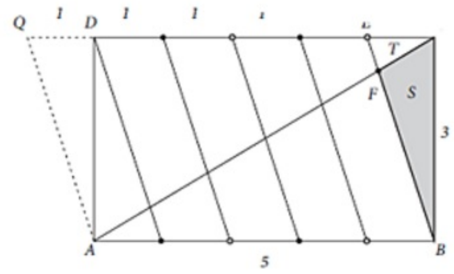


Figura 3.17: Razões entre áreas

basta fazer a diferença entre as áreas dos triângulos CEB e CEF.

Solução 3: Os triângulos CEF e ABF são semelhantes e a razão 1 : 5 entre seus lados homólogos CE e AB é igual à razão entre suas alturas correspondentes a esses lados. Além disso, $6x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$ (ver figura 3.18). Sendo assim, já é possível calcular a área do triângulo CEF e, portanto, a área do triângulo BCF.

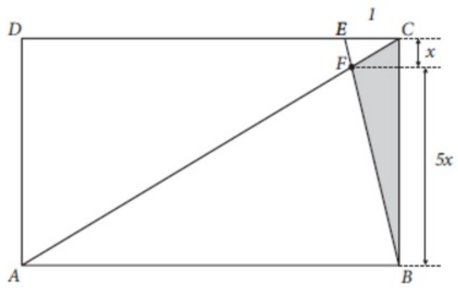


Figura 3.18: Utilizando razão entre alturas homólogas

Solução 4: Observe a figura a seguir.

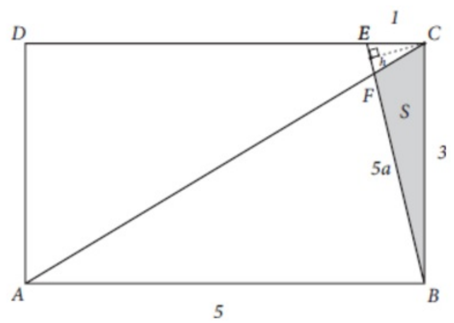


Figura 3.19: Utilizando razão entre alturas homólogas

Observe que os triângulos CEF e BCF possuem mesma altura com relação ao vértice C. Como a razão de semelhança entre os triângulos ABF e ECF é 5 : 1, define-se $EF = a$, logo $BF = 5a$. Por uma relação métrica no triângulo retângulo vale $BC \cdot CE = 6a \cdot h$, de onde se obtém uma relação entre a e h. Logo já é possível calcular sua área.

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: Apesar do que possa parecer num primeiro contato com a questão, o autor não apresenta nenhuma solução que envolva a relação entre a razão das áreas e a razão de semelhança entre as figuras. Essa atividade pode ser classificada como uma fase didática capaz de lebar o estudante a atingir nível 3 de Van Hiele, a Dedução Formal. A fase didática em questão é a Orientação Livre, pois permite mais de uma solução. Vale lembrar, que o professor ao mostrar as demais soluções aos alunos, pode estar realizando um fechamento, ou seja, a fase didática 5.

Uma sugestão ao professor é que permita que o estudante obtenha as soluções sem sua interferência. Tornando-se ativo no fechamento, concluindo as soluções e apresentando alguma solução que não foi abordada por nenhum aluno.

Como abrir um túnel se você sabe geometria[15]

Esta publicação é de autoria do professor Euclides Rosa do Colégio D. João VI, Rio de Janeiro, publicada na RPM 05 (ver [Rosa, 2004]). é apresentada uma proposta didática para o ensino de semelhança de triângulos, em especial, um caso particular de semelhança (LAL). Usando fatos históricos e contextualização ele apresenta o problema como abrir um túnel se vc sabe geometria. Seu personagem principal é Eupalinos e a história se passa em Samos, ano 530 a.c.

Quanto aos fatos históricos o professor aponta que:

> $(\cdots)$Como sabemos destas coisas? Eupalinos não deixou obras escritas. Mas Heron de Alexandria publicou muitos livros, alguns deles ainda hoje existentes. Um desses livros é sobre um instrumento de agrimensura chamado dioptra. Nele, Heron descreve o processo que expusemos acima. Em seu todo, os livros escritos por Heron formam uma enciclopédia de métodos e técnicas de Matemática Aplicada, sintetizando o conhecimento da época. Outros livros, talvez menos completos, certamente foram publicados antes com propósitos semelhantes e não se pode deixar de supor que a construção de Eupalinos tenha figurado entre essas técnicas.

O autor aponta, também, os motivos as quais tornam a sua publicação importante para o ensino de semelhança.

[15] `http://www.rpm.org.br/cdrpm/5/2.htm`

> (···)O exemplo de Eupalinos merece ser conhecido pelos leitores da Revista do Professor de Matemática por dois motivos: fornece um tópico interessante para ilustrar nossas aulas e mostra como o conhecimento matemático, mesmo quando de natureza teórica, pode ter influência decisiva no progresso tecnológico.

O problema histórico, apresentado para a sala de aula, tem início quando o tirano Polícrates, preocupado com o abastecimento de água de sua cidade, decidiu abrir um tunél por dentro do monte Castro, para trazer água. Após o monte existia uma ilha com água abundante. Eupalinos foi o “engenheiro” dessa obra e resolveu o problema com os conceitos que tinha de geometria.

O conceito de Geometria usado por Eupalinos foi: Se dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, seus ângulos agudos são iguais. Este é um caso particular de semelhança de triângulos, e para ser exato esse não foi bem o conceito que Eupalinos utilizou. Ele utilizou a consequência a seguir: Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos retângulos com um vértice em comum. Observe a figura a seguir.

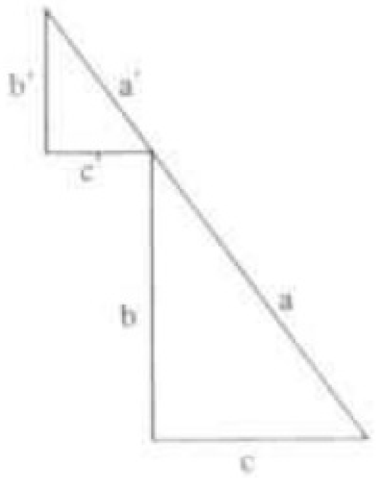


Figura 3.20: Consequência do caso particular de semelhança

Se os catetos b e c' são perpendiculares e, além disso, tem-se $\dfrac{b}{c} = \dfrac{b'}{c'}$, então as hipotenusas a e a' estão em linha reta.

O desafio proposto a Eupalinos foi construir um túnel ligando o ponto A ao ponto B. O desafio em questão era como começar a cavar no ponto A e sair no ponto B, sem se perder no caminho. O grande “ engenheiro”decide então cavar simultaneamente a partir do ponto A e do ponto B.

A indagação que deve ser passado aos alunos é: Mas como Eupalinos conseguiu, partindo simultaneamente de A e B, traçar uma reta ligando esses pontos, através da montanha?

A figura a seguir (situação problema) mostra uma ilustração do monte e dos pontos A e B.

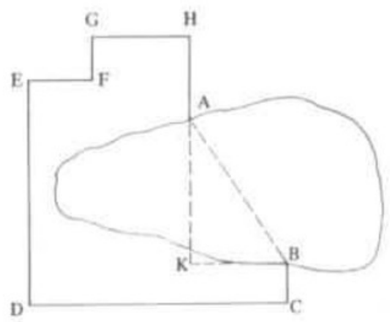


Figura 3.21: situação problema

A partir de um dos pontos traça-se uma poligonal, na qual cada lado forma um ângulo reto com o seguinte até atingir o outro ponto. Na figura 3.21 a poligonal traçada é a $BCDEFGHA$. Obtendo-se os valores de cada lado da poligonal $BCDEFGHA$ é possível obter os valores dos catetos KA eKB. obtém-se então a razão $r = AK/KB$. Usando os pontos A e B, constroem-se dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos ainda tenham as direções dos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos, a razão entre os catetos seja igual à razão r entre os catetos do triângulo AKB. Observe a figura a seguir.

Agora é só cavar o morro, a partir dos pontos A e B, na direção das hipotenusas dos triângulos pequenos. Normalmente, os pontos A e B estão no mesmo nível. Sendo assim basta-se cavar sempre na horizontal. É fácil de determinar o plano horizontal por meio de vasos comunicantes ou outros processos. No caso em questão, é obviamente desejável que B seja mais baixo e sem dúvida levou-se isto em conta na sua escolha como ponto de saída. Mas é fácil calcular d = diferença de nível entre A e B. Basta ir registrando, à medida que se percorre a poligonal $BCDEFGHA$, a diferença de nível entre cada vértice e o seguinte.

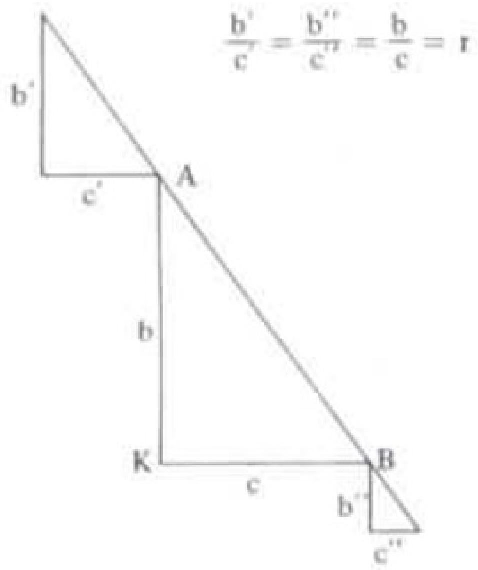


Figura 3.22: situação problema

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: Esta atividade pode levar ao nível 3 de Van Hiele, a Dedução Formal. Pois o aluno deverá utilizar de todos os conceitos adquiridos para solucionar o problema. Neste nível, o aluno é capaz de acompanhar uma demonstração, por esse motivo, se faz importante que o professor mostre a consequência utilizada por Eupalinos. A fase didática depende do uso do professor.

Comentários e sugestões: Foi apresentado um fato histórico para a contextualização de um caso particular de semelhança de triângulos. O professor, se desejar, pode também, fazer uso de materiais concretos, que exemplifiquem a situação desejada. O material concreto fará com que o aluno visualize melhor a situação e entenda a aplicação do caso especial de semelhança.

É possível ter acesso, na publicação, a todos os fatos históricos que antecedem o problema em questão.

Um problema[16]

Esta publicação é de autoria de Eduardo Wagner, da Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro, membro do Comitê editorial da RPM (ver [Wagner, 2007]). Este artigo não faz referência a sala de aula, porém é facilmente adaptável. Por possuir um problema muito interessante, será feita uma descrição do mesmo e suas possíveis aplicações em sala

[16]http://www.rpm.org.br/cdrpm/61/8.html

de aula.

O problema enunciadoé: *Imagine dois postes verticais AA' e BB' de tamanhos diferentes no plano horizontal π. Para que posições uma formiga P, no plano, vê os dois postes do mesmo tamanho?*

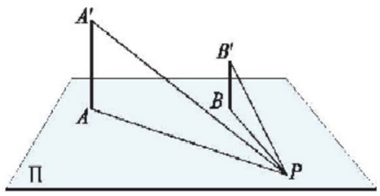


Figura 3.23: Problema inicial

Eduardo Wagner diz que:

> $(\cdots)$Em primeiro lugar, devemos pensar o que ocorre quando vemos dois objetos com o mesmo tamanho. Por exemplo, uma moedinha de 1 centavo segura entre os dedos com o braço esticado tem, aparentemente, o mesmo tamanho da lua cheia. A conclusão é a seguinte: dois objetos aparentam ter o mesmo tamanho para certo observador, quando os ângulos de visada são iguais. Portanto, observando a figura acima, a formiga vê os postes AA' e BB' do mesmo tamanho se os ângulos de visada APA' e BPB' forem iguais.

A partir daí são expostas duas situações problemas. Para compreender melhor as situações considere os pontos A e B sendo os pés dos postes e o ponto P a localização da formiga. Sendo assim a situação 01 é quando os pontos A, B e P são colineares e a situação 02 quando não são colineares.

Possivelmente o estudante não apresentará muita dificuldade em visualizar a situação 01. Ele precisará apenas identificar os dois lugares possíveis para o ponto P utilizando semelhança de triângulos. As figuras a seguir apresentam possíveis soluções geométricas.

A situação 02 é um pouco mais complexa para o estudante e será necessária a participação direta do professor. A solução para o problema quando os pontos A, B e P não são colineares é obtido pela circunferência de Apolônio. O autor explica como levar o aluno a obter a circunferência de Apolônio utilizando o teorema das bissetrizes. Após as demonstrações é exposto que o lugar geométrico de onde a formiga vê os postes de mesmo tamanho é a circunferência de Apolônio do segmento AB na razão $\dfrac{AA'}{BB'}$.

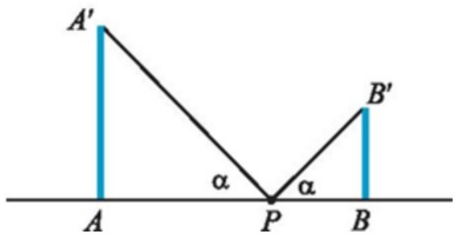


Figura 3.24: Solução para P entre A e B

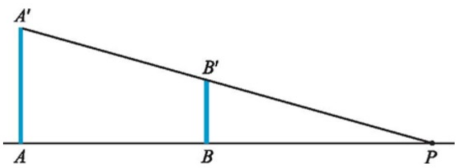
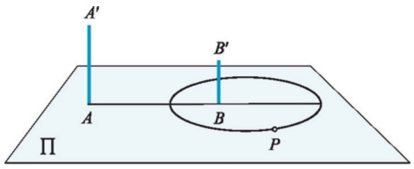


Figura 3.25: Solução para o poste A ser maior e P não esteja entre A e B



Comentários e sugestões: Este problema pode ser aplicado no nível médio da Educação Básica. Provavelmente, muitos alunos sentirão dificuldade na situação 02. Porém o propósito didático dele não é apenas que o aluno chegue ao resultado, mas que o professor, junto ao aluno, caminhe por todo processo, revisando conceitos importantes e apresentando a circunferência de Apolônio.

É aconselhável o uso de um software dinâmico para o desenvolvimento da situação 02, facilitando a visualização para o estudante. O professor ,pode também, fazer uso de um material concreto para indicar o problema, deixando assim, as situações possíveis para solução mais claras.

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: Nesta atividade o estudante já é capaz de acompanhar uma demonstração e utiliza-se de vários conceitos matemáticos para resolver o problema. Sendo assim, o estudante pode atingir o nível 3 de Van Hiele, a Dedução Formal. As fases didáticas serão apontadas de acordo com a aplicação em sala de aula.

É possível ter acesso, na publicação, a todos demonstrações necessárias para a solução do problema.

3.2.2 Repositório digital UFRGS

Na página do Repositório Digital da UFRGS[17] foi obtido um artigo que retrata um recurso digital para o ensino de semelhança de triângulos. Este recurso é composto por simulações e um guia do professor. A seguir será exposto a proposta do recurso didático digital.

Medindo objetos através de semelhança de triângulos [18]

Este artigo é de autoria de Leandro Duarte Radin, de Três Passos e de Márcio Alexandre Rodriguez de Rodrigues, da UFRGS. De acordo com [Radin, 2015]:

> (···)Este trabalho tem por objetivo apresentar uma experiência didática realizada com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escola municipal da cidade de Santo Augusto-RS. Nesta experiência, visamos levar ao conhecimento dos alunos as mídias digitais, especificamente um Objeto de Aprendizagem que trata de alturas inacessíveis a partir da semelhança de triângulos. Por meio da manipulação desse Objeto, os alunos aprenderam a calcular alturas inacessíveis em situações de nosso dia a dia.

O objeto de aprendizagem, aqui apresentado, é um recurso didático digital composto por três simulações interativas. O objetivo desse recurso é levar os estudantes a calcularem alturas usando semelhança de triângulos. Este recurso digital é de autoria de um equipe pedagógica e técnica da Universidade Federal de Santa Maria. A equipe pedagógica era constituída pela professora, pelos autores do artigo e pelas alunas Ana Luíza Kesseler e Evelin Teixeira. A equipe técnica era constituída por Rosiclei Aparecida C. Lauermann, Alexandro Klein dos Santos, João Antonio Fogliatto e Edgardo Gustavo Fernández.

É apresentado também, um Guia do Professor. Cujo o objetivo é dar instruções de como utilizar o objeto de aprendizagem, como ele pode ser trabalhado e as soluções das atividades. Consta no Guia do Professor que:

> (···)Este objeto de aprendizagem visa proporcionar ao aluno uma aplicação do conteúdo de semelhança de triângulos que pode ser encontrada em diversas situações do seu dia-a-dia. O aluno será motivado a descobrir a

[17] https://www.lume.ufrgs.br/apresentacao

[18] http://www-usr.inf.ufsm.br/~jaf/oa_teste/index2.html

> altura de diversos objetos e, para isso, terá que utilizar um outro objeto, o qual servirá de referência, pois sua altura será conhecida (p.1).

A página inicial é a apresentada na figura a seguir, observe que nela já consta o acesso ao objeto de aprendizagem, aos créditos e ao Guia do Professor.

Figura 3.26: Objeto de aprendizagem

Ao acessar o Objeto de aprendizagem, são apresentados, aos alunos, os personagens principais e os cenários possíveis. Os estudantes só terão acesso ao problema quando entrarem em um dos cenário. As figuras a seguir, representam esses dois momentos.

Cenário 01: Este cenário representa o interior de uma cidade e solicita que o estudante calcule a altura do prédio mais alto. Para esse cálculo o aluno deverá utilizar o conceito de semelhança de triângulos.

Inicialmente pede-se que o aluno escolha um horário, como na figura a seguir. Este horário irá indicar a posição do Sol.

O estudante é informado que deverá utilizar as sombras do prédio e de um objeto para calcular a altura solicitada. Após a seleção do horário, o estudante deverá escolher um objeto para comparação. Nesse cenário os objetos possíveis são um carro e uma árvore.

Em seguida a simulação irá identificar os triângulos semelhantes e pedirá que o aprendiz faça as contas necessárias para obter a altura do prédio. As figuras a seguir

Figura 3.27: Apresentação dos personagens

Figura 3.28: Problema a ser resolvido e os possíveis cenários

apresentam parte desse processo. Foi escolhido o horário das 17h e a árvore.

Nesse momento é pedido que o aluno complete as razões e realize as contas necessárias.

Caso o discente apresente dúvidas, quanto aos cálculos a serem feitos, ele poderá ir em ajuda e obter orientações sobre o conceito de semelhança de triângulos. Além das dicas, terá também, uma simulação de um outro exemplo utilizando sombras.

Cenário 02: Este cenário apresenta as pirâmides do Egito, em particular, a de Quéops.

Figura 3.29: Escolhendo o horário

Figura 3.30: Identificando os triângulos semelhantes

O objetivo agora, é assim como Tales de Mileto, calcular a altura da pirâmide. Apesar de apresentar o filósofo Tales de Mileto, não é feita nenhuma referência aos conceitos ou demonstrações que levam o seu nome. Tales aparece como elemento histórico apenas, como se pode ver na figura a seguir.

Novamente é pedido ao estudante para escolher um horário e um objeto disponível. Assim como no Cenário da Cidade, a altura será calculada usando as sombras. A figura à seguir mostra os triângulos semelhantes determinados. O horário escolhido foi

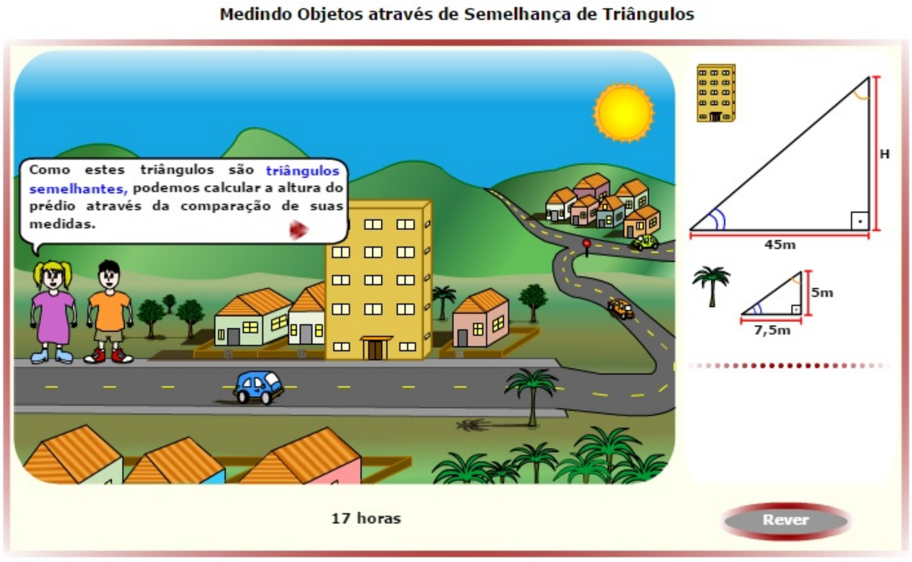


Figura 3.31: Exposição dos triângulos semelhantes

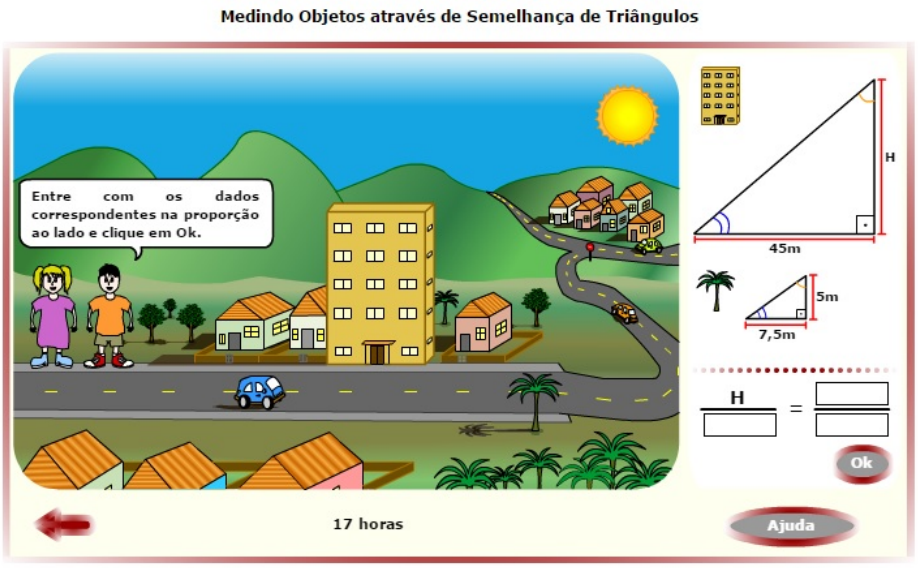


Figura 3.32: Completando as razões

o das 9h e o objeto para comparação foi o camelo.

As etapas que seguem são as mesmas do cenário da cidade. É solicitado que o estudante complete as razões e em seguida calcule a altura da pirâmide. Assim como no cenário 01, se o aprendiz apresentar dúvidas, poderá acessar a ajuda e obter as informações necessárias para a solução do problema.

Cenário 03: Este cenário contém parte de um campo e o objetivo, diferente dos demais cenários, não é apenas calcular uma determinada altura. Os personagens principais

Figura 3.33: Abordagem sobre Tales de Mileto

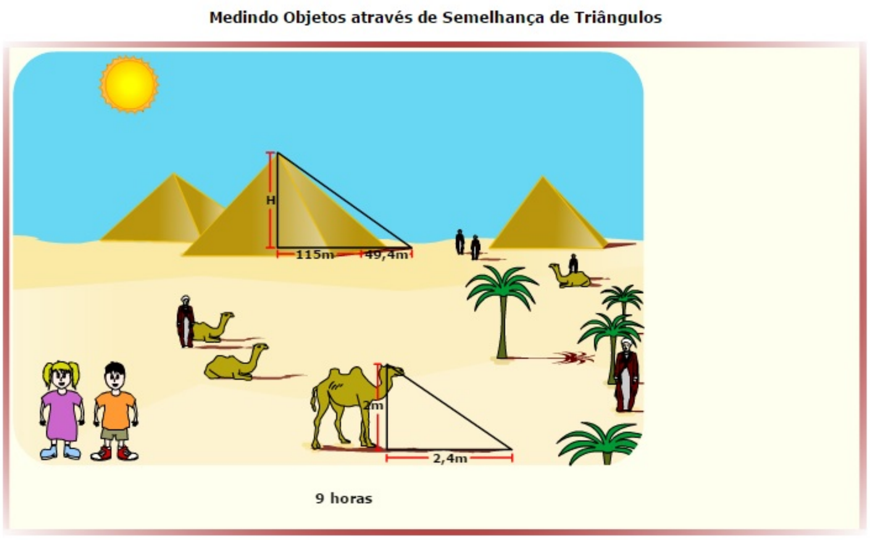


Figura 3.34: Identificando os triângulos semelhantes

precisam atravessar um Rio, como é exposto na figura a seguir.

Existem duas árvores disponíveis no terreno, o estudante deverá realizar os procedimentos feitos nos outros cenários em cada uma das árvores e descobrir qual a melhor árvore para atravessar o rio.

Após selecionar uma árvore, o aprendiz optará pelo horário e pelo objeto de comparação, assim como nos demais cenários, e calcular sua altura. Após o calculo ele será questionado se a árvore escolhida serve como ponte, Como pode ser visto na figura a

Figura 3.35: Problema inicial

seguir.

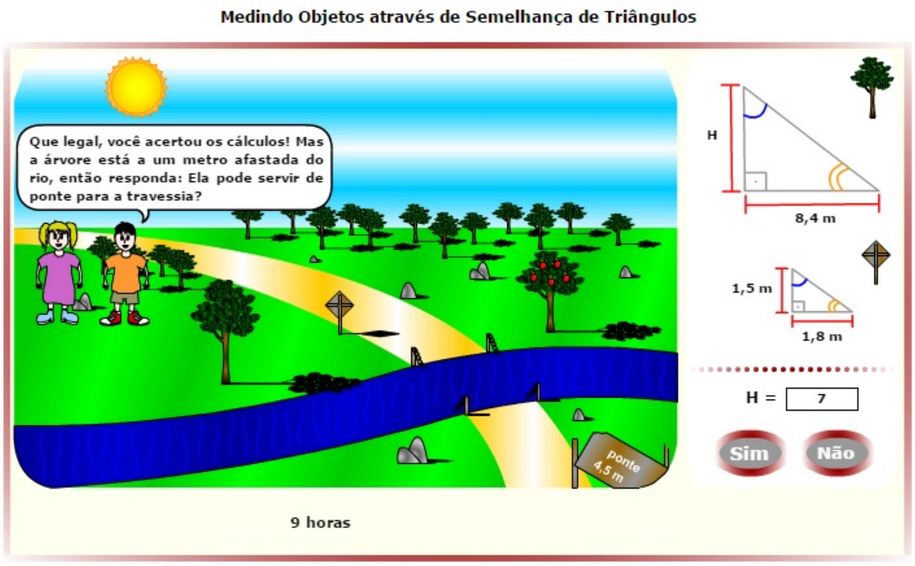


Figura 3.36: Questionamento

Nota-se que este cenário é o mais completo, pois o estudante não só utiliza os conceitos de semelhança de triângulos para calcular a altura da árvore, como precisa interpretar a situação problema e identificar a melhor resposta.

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: Todas as simulações apresentam um exercício de semelhança de triângulos, cujo o objetivo é calcular a altura de certo objeto utilizando um objeto de apoio e suas sombras. Dessa forma, não existe nenhuma demonstração ou a necessidade de mais de um conceito ou etapa na realização dessas atividades. Com base nessas informações, pode-se dizer que este recurso didático leva o aluno ao nível 2 de Van Hiele, a Dedução Informal. A fase didática aqui abordada é a fase didática 2, a Orientação Direta.

Para a análise desse recurso educacional, foram utilizados o artigo publicado e a fonte original do recurso, ou seja, onde os autores postaram as atividades. O artigo completo pode ser obtido na página `https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134149/000984350.pdf?sequence=1`.

3.2.3 Revista científica do IFMG - ForScience

Foi obtido um artigo [19] que apresenta uma proposta de aula para o ensino de semelhança de triângulos com ênfase na contextualização e no uso de mídias digitais. Esta proposta foi aplicada a uma turma de PROEJA, também conhecida como Educação de jovens e adultos. A seguir será exposto a proposta de aula, a atividade digital e os resultados obtidos com a aplicação.

O problema do carpinteiro: Estudando semelhança de triângulos por meio da fachada de uma casa [20]

Este artigo é de autoria de Márcio Antônio Souza Paim e foi publicado na revista ForScience do IFMG, no volume 3, número 1, do ano de 2015 (ver [Paim, 2015]). De acordo com o autor:

> (⋯)Este trabalho tem o objetivo de investigar o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) como recursos didáticos no processo de aprendizagem da matemática na escola básica. Foi realizada uma sequência de ensino utilizando o software Régua e Compasso (R.e.C.) para a compreensão da semelhança de triângulos em uma turma da Educação de Jovens e Adultos - EJA. (p.104)

O Software dinâmico chamado de régua e compasso, utilizado para a construção das atividades, é apresentado da seguinte forma:

> (⋯)O Régua e Compasso, abreviado por R.e.C em português e em inglês em C.a.R, foi criado e desenvolvido pelo professor René Grothmann da Universidade Católica de Berlim, na Alemanha em 1988 (ARAÚJO,

[19] `http://www2.formiga.ifmg.edu.br/forscience/index.php/forscience/index`

[20] `http://www2.formiga.ifmg.edu.br/forscience/index.php/forscience/article/view/139/96`

> 2003). (...) É um software de geometria dinâmica e permite que qualquer objeto plano criado dentro do seu ambiente rotacione ou se desloque de um ponto a outro. Pode ser conseguido diretamente pela internet acessando o link: `http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/conformeBartolossi(2010).` (p.106)

Inspirado na vista lateral de uma casa foram criadas atividades no régua e compasso que abordam semelhança de triângulos. As figuras a seguir mostram a lateral da casa utilizada como exemplo e a construção no R.e.C..

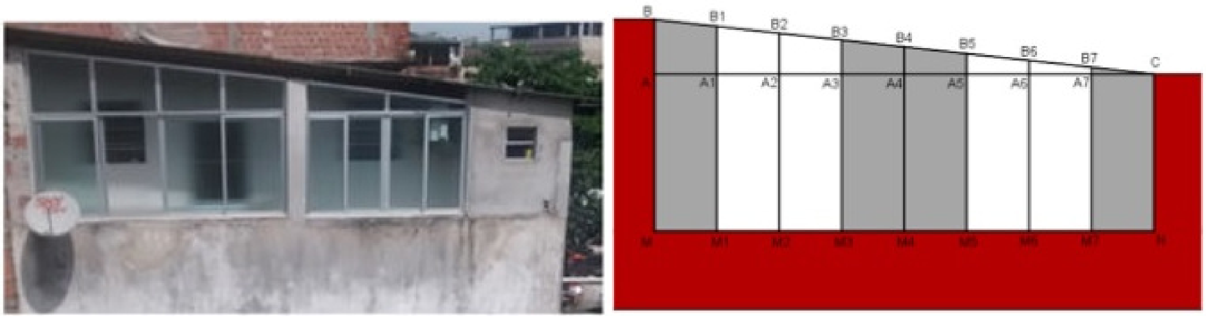


Figura 3.37: Vista lateral da casa em observação e a construção

Observe que nas janelas existem diversos segmentos de reta paralelos que formam polígonos. Entre eles, podemos citar os triângulos ACB e $A1CB1$ semelhantes entre si. Com o auxilio do software, os estudantes são capazes de verificar as dimensões de qualquer segmento e investigar as razões de semelhança. O objetivo da atividade é obter razões de semelhança entre triângulos.

Sequência de ensino proposta:

Um carpinteiro pretende ajustar diferentes tipos de vidros em iguais janelas (espaços vazios em branco) que se encontram na fachada de uma parede da sua casa. Para isso, precisa saber quais são os possíveis valores das dimensões dos seus lados: observe a figura 3.37. Com o auxílio do software R.e.C., ajude o dono a alcançar o seu objetivo, seguindo os passos indicados e respondendo às questões propostas:

- Acione a ferramenta ponto e deslize com o mouse em cima dos lados de cada janela da lateral da casa. Ao fazer isso, perceba que surgirá um ponto de cor laranja em cada lado. Clique, então, com o botão direito do mouse em cima de cada segmento. O que você percebeu ?
- Cite exemplos de segmentos de reta com a mesma medida.

- Complete a tabela abaixo de acordo com alguns dos valores obtidos anteriormente, com uma casa decimal.

Segmentos	AB	$A1B1$	$A2B2$	$A3B3$	$A4B4$	$A5B5$
Comprimentos						

- Com a ferramenta segmento, escolha o segmento indicado e complete a seguinte tabela com uma casa decimal:

BC:	$B1C$:	$B2C$:	$B3C$:	$B4C$:	$B5C$:
AC:	$A1C$:	$A2C$:	$A3C$:	$A4C$:	$A5C$:

O que é comum à todos os segmentos?

- O segmento MN se divide em 8 segmentos iguais? O mesmo vale para AC e BC ? Justifique.

- Novamente com a ferramenta ponto, clique, respectivamente, sobre os pontos B, C e A. Acione a ferramenta ângulo com amplitude fixa e observe o tamanho do ângulo. Repita o mesmo procedimento para $B1$, C, $A1$, para $B2$, C, $A2$, e assim sucessivamente. O que é possível afirmar?

- Com uma calculadora, obtenha os valores das razões indicadas na tabela:

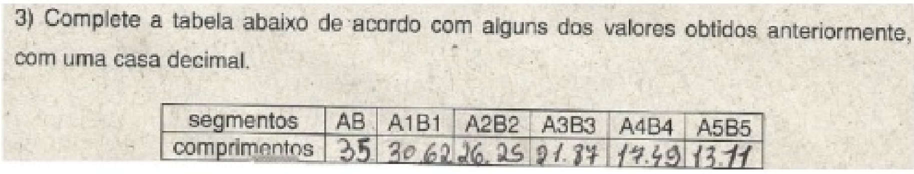
Triângulos	Razões		
ABC	$AB/BC =$	$AB/AC =$	$BC/AC =$
$A1B1C$	$A1B1/B1C =$	$A1B1/A1C =$	$B1C1/A1C =$
$A2B2C$	$A2B2/B2C =$	$A2B2/A2C =$	$B2C2/A2C =$
$A3B3C$	$A3B3/B3C =$	$A3B3/A3C =$	$B3C3/A3C =$
$A4B4C$	$A4B4/B4C =$	$A4B4/A4C =$	$B4C4/A4C =$
$A5B5C$	$A5B5/B5C =$	$A5B5/A5C =$	$B5C5/A5C =$

De acordo com os dados da tabela, qual a sua conclusão sobre os triângulos? E sobre as razões?

- Com os botões apropriados, clique e arraste os vidros para as suas respectivas janelas.

Antes da aplicação da sequência de ensino, foi realizado um pré-teste com conteúdo matemático para avaliar o conhecimento dos alunos sobre semelhança de triângulos. Por último, os alunos avaliaram a aula e o uso de uma mídia digital.

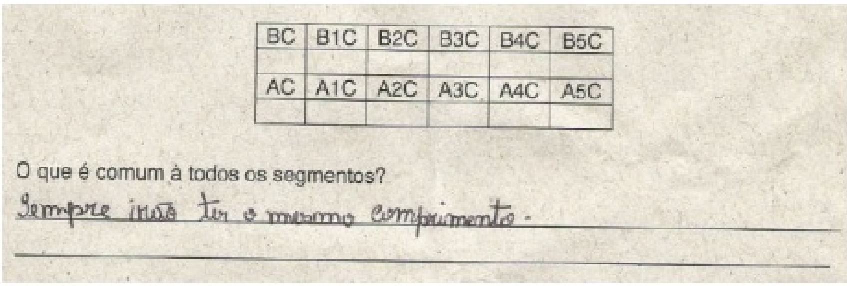
Foram fornecidas algumas imagens das respostas dadas pelos estudantes, seguem dois exemplos.



3) Complete a tabela abaixo de acordo com alguns dos valores obtidos anteriormente, com uma casa decimal.

segmentos	AB	A1B1	A2B2	A3B3	A4B4	A5B5
comprimentos	35	30.62	26.25	21.87	17.49	13.11

Figura 3.38: Resposta da aluna A referente a terceira questão



BC	B1C	B2C	B3C	B4C	B5C
AC	A1C	A2C	A3C	A4C	A5C

O que é comum à todos os segmentos?

Sempre irão ter o mesmo comprimento.

Figura 3.39: Resposta da aluna A referente a quarta questão

O autor conclui que:

> (· · ·)De uma maneira geral, foi possível perceber que as atividades criadas causaram nos estudantes uma predisposição em manusear as ferramentas em um novo ambiente de aprendizagem nunca visto antes por eles, dando-lhes condições de inventividade e construção de conhecimentos sem a ajuda do professor, como realizar proporções simples com as medidas dos lados dos triângulos, trapézios e retângulos representados pelos vidros das janelas da figura da atividade.
> A importância deste trabalho está em provocar uma reflexão sobre os benefícios de práticas pedagógicas que utilizam softwares educacionais para o ensino de Matemática, buscando investigar como o uso de recursos computacionais podem favorecer a uma aprendizagem mais significativa e dinâmica na construção de conceitos matemáticos por parte dos alunos da escola básica. (p.114)

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: Observa-se que estas atividades fazem parte de uma fase didática de Van Hiele. A fase didática em questão, é a Orientação Direta. Pois por meio de um material selecionado pelo professor, o aluno irá manipular as informações previamente recebidas. A classificação quanto aos níveis de Van Hiele depende da ênfase dada pelo professor na atividade.

É possível ter acesso, na publicação, a todas as atividades propostas e ao pré-teste citado.

3.2.4 Encontro Nacional de Educação Matemática

Na página da SBEM [21] foram obtidas na sessão Anais do ENEM [22] duas publicações relacionadas com o ensino de semelhança de triângulos. Ambas apresentam propostas de atividades a serem aplicadas em sala de aula.

Uma breve exposição das atividades junto as classificações quanto aos níveis de Van Hiele será exposto a seguir.

Uma proposta de atividades para semelhança de triângulos utilizando o Geogebra[23]

Este artigo é de autoria de Pedro Carlos Pereira e foi publicado no XI ENEM, no ano de 2013 (ver [Pereira, 2013]). De acordo com o autor,

> $(\cdots)$ na disciplina Núcleo de Ensino e Pesquisa Educacional Softwares Educacionais (NEPE-AA192), sob a coordenação dos professores Dr. Robson Mariano e Dr. Pedro Carlos Pereira, desenvolvemos o trabalho intitulado Triângulos: Uma ótica prática de suas semelhanças, onde utilizamos o software Geogebra como ferramenta para apresentarmos conceitos geométricos relacionados à medida de ângulos e cálculo de perímetro e áreas dos polígonos básicos. O principal motivo pela escolha do Geogebra se dá por ser uma ferramenta livre, simples e ter a vantagem de possuir diversos recursos, dentre eles, o geométrico, que foi o tema central do nosso trabalho monográfico desta disciplina.

Foram desenvolvidas três atividades, baseadas em grandes monumentos históricos e turísticos, sendo eles o Cristo Redentor, no Rio de Janeiro, a torre Eiffel, em Paris e as Pirâmides de Gizé, no Cairo. Todas as atividades apresentam fatos históricos sobre o monumento a ser estudado e um questionamento motivador.

[21] `http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem`
[22] `http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/apresentacao.html`
[23] `http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1430_1968_ID.pdf`

A metodologia utilizada para a aplicação das atividades consistia de quatro fases: A apresentação do software dinâmico, o Geogebra; Relatos históricos sobre o monumento escolhido; Manuseio do software e a solução do questionamento motivador.

A seguir será exposto o questionamento motivador de cada atividade, assim como os itens levam a solução do mesmo.

O Cristo Redentor:

Considerando a vista frontal do Cristo Redentor, como está apresentada na figura a seguir, e com o auxílio do Geogebra, calcule, aproximadamente, a medida da área e do perímetro do monumento.

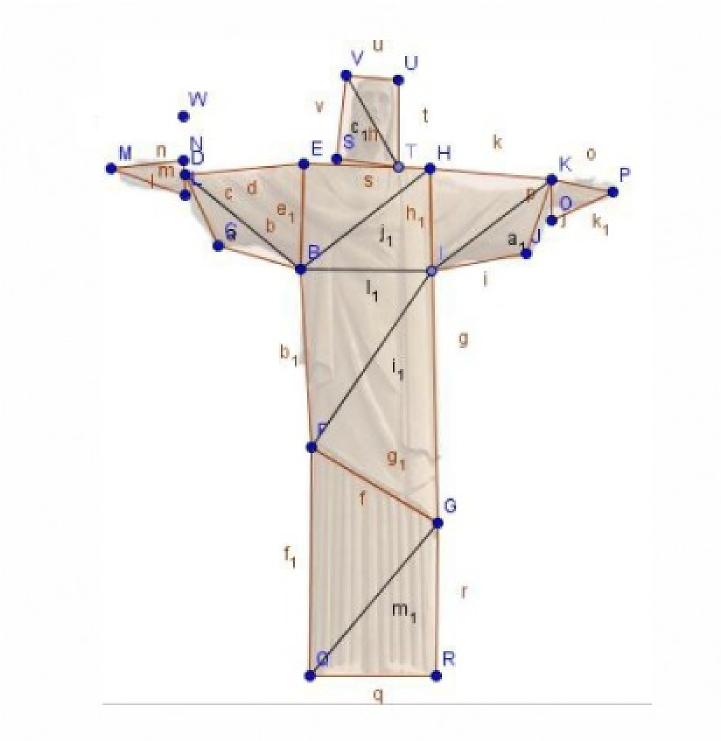


Figura 3.40: Cristo Redentor divido em polígonos

Para respondê-la foram feitos alguns questionamentos a todos os estudantes:

- Na figura representativa do Cristo Redentor é possível traçar figuras geométricas? Caso seja afirmativa sua resposta, você consegue enxergá-las?
- Identifique-as na figura abaixo fazendo os traços.
- Na figura encontramos figuras diferentes de triângulos. Porém, é possível transformá-las em triângulos?

- Se a resposta for sim, há semelhanças entre eles?
- Quais são eles? Considerando a vista frontal do Cristo Redentor, como está apresentada na foto, e com o auxílio do Geogebra, calcule, aproximadamente, a medida da área e do perímetro do monumento.

Torre Eiffel:

Considerando a vista frontal da Torre Eiffel, como está apresentada na figura a seguir, e com o auxílio do Geogebra, calcule, aproximadamente, a medida da área e do perímetro do monumento.

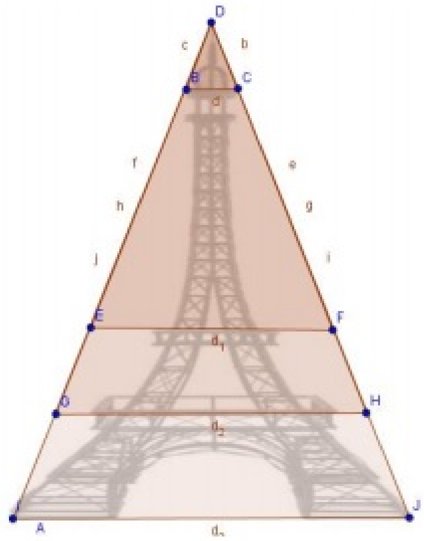


Figura 3.41: Imagem da Torre Eiffel no Geogebra

Para responder esta pergunta, foram feitos os seguintes questionamentos aos estudantes:

- Na figura representativa da Torre Eiffel é possível traçar figuras geométricas?
- Caso seja afirmativa sua resposta, você consegue enxergá-las?
- Identifique-as na figura abaixo fazendo os traços.
- Na figura encontramos figuras diferentes de triângulos. Porém, é possível transformá-las em triângulos?
- Se a resposta for sim, há semelhanças entre eles?

- Quais são eles?

Pirâmides de Gizé:

Considerando a vista frontal das Pirâmides, como está apresentada na figura a seguir, e com o auxílio do Geogebra, calcule, aproximadamente, a medida da área e do perímetro do monumento.

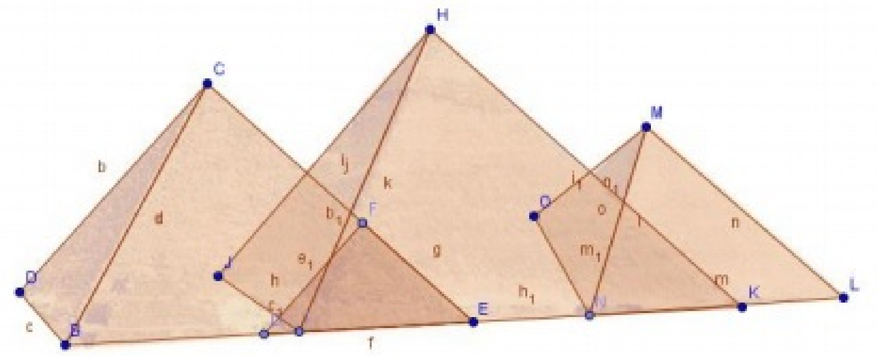


Figura 3.42: Imagem das pirâmides de Gizé no Geogebra

Para responder esta pergunta, foram feitos os seguintes questionamentos aos estudantes:

- Na figura representativa da Pirâmide é possível traçar figuras geométricas?
- Caso seja afirmativa sua resposta, você consegue enxergá-las?
- Identifique-as na figura abaixo fazendo os traços.
- Na figura encontramos figuras diferentes de triângulos. Porém, é possível transformá-las em triângulos?
- Se a resposta for sim, há semelhanças entre eles?
- Quais são eles?

O autor relata que em todas as figuras procurou-se traçar quadriláteros e quando não foi possível, triângulos. Em seguida foi feita uma análise dos triângulos semelhantes correspondentes. Quanto a área e o perímetro, ele afirma que:

> $(\cdots)$Para determinarmos a medida da área, tomamos como unidade de medida o menor triângulo e verificamos quantas vezes ele cabe na figura.

> O mesmo procedimento para determinarmos a medida de perímetro. Todo este processo foi muito trabalhoso para nós, pois tivemos que encontrar um triângulo que coubesse um número exato de vezes na figura. Este processo nos tornou possível trabalharmos, também, o conceito de fração e proporcionalidade.

Comentários e sugestões: Pode-se observar que o questionamento das três atividades são os mesmos, calcular a área e o perímetro do monumento em questão. Pra a solução foi utilizado o conceito de semelhança de triângulos, porém não é solicitado, aos alunos, que identifiquem os casos de semelhança de triângulos. Pede-se apenas para identificar os triângulos semelhantes, sem justificativa. Quanto a isso, o autor reforça que:

> (⋯)esta proposta de atividade é de caráter introdutório. Sendo assim, o nosso intuito é fazer com que os alunos pensem de forma natural, o mais prático possível e que absorvam os conteúdos matemáticos de forma simples e prática e que possam ser apreendidos por eles. Em seguida, sejam capazes de resolver qualquer exercício, sem importar o nível, usando como ferramenta estes conhecimentos.

Entende-se que os discentes já conhecem o conceito de semelhança, pois eles já são capazes de identifica-los. Sendo assim, a atividade não leva o estudante a um novo conceito e sim a fixar algo já abordado anteriormente.

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: Os questionamentos, mencionados pelo autor, são de caráter norteadores. Ou seja, servem para orientar o professor quanto ao processo a ser elaborado. Sendo assim, é possível que estas atividades possam levar os estudantes a atingirem mais de um nível de Van Hiele, dependendo do uso e do objetivo do professor. Se o objetivo for apenas verificar se o aluno identifica os triângulos semelhantes a partir da definição, podem ser classificadas como uma fase didática do nível 1 de Van Hiele, a Análise. Neste nível o estudante raciocina sobre conceitos geométricos.Essas atividades não levam o aluno a construção de um conceito e sim a utilizar algo previamente conhecido, classificando-as a uma fase didática de Van Hiele caracterizada por apresentarem múltiplas etapas e requerer mais de um conceito matemático, chamada de fase didática 4, ou seja, a Orientação Livre.

É possível ter acesso, na publicação, a todas as atividades propostas.

Essa é do baú! Do arquivo da professora Estela Kaufman para sala de aula [24]

[24] http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2893_1765_ID.pdf

Este artigo, referente ao minicurso " Essa é do baú!", é de autoria de Marcelo Ferreira Martins Salvador da UNIBAN-USS e foi publicado no XI ENEM, no ano de 2013 (ver [Salvador, 2013]). De acordo com o autor:

> (···)terá como objetivo oferecer apoio aos colegas, professores de Matemática, que buscam atividades "diferentes"relacionadas ao ensino de Geometria. Esperamos que a visão histórica e as discussões fomentadas ao longo deste minicurso ofereçam ao professor uma oportunidade de conhecer mais sobre seu ofício e ampliem o debate sobre a condução da educação matemática hoje. (p.1)

O minicurso foi baseado no paradidático "Geometria: do arquivo de Estela a sala de aula"[25] (ver [Salvador, 2012])

As atividades apresentadas no minicurso, que serão expostas aqui, basearam-se em documentos do arquivo pessoal de Estela Kaufman Fainguelernt. A sequencia das atividades apresentadas não são destinadas a um único ano de escolaridade. Cabe ao professor observar o nível desejado e como deseja aplicar.

As atividades, aqui relatadas, são as de numeração doze e quatorze que abordam os assuntos de semelhança de triângulos no triângulo retângulo e o Teorema de Tales.

Semelhanças no triângulo retângulo: Esta atividade tem por objetivo levar o estudante a obter as relações métricas de um triângulo retângulo por meio das semelhanças de triângulos existentes. O recurso didático utilizado é uma folha de papel retangular, uma tesoura e uma régua.

Em um primeiro momento, é dado ao estudante a folha de papel retangular e pede-se que ele recorte sobre uma diagonal desse retângulo obtendo assim dois triângulos retângulos.

Em seguida, o aluno é levado a traçar a altura relativa a hipotenusa nos dois recortes de triângulos retângulos. Um desses recortes será novamente recortado sobre a altura, obtendo assim mais dois triângulos retângulos.

Então serão expostos aos alunos itens que indicam os processos a serem realizados a fim de identificar os triângulos semelhantes e obter as proporções necessárias para a obtenção das relações métricas desejadas.

[25] https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/134648/E-book_Livro_Marcelo_Salvador.pdf?sequence=2&isAllowed=y

A seguir será exposto alguns dos itens indicados anteriormente:

h) Nessas condições, qual a posição relativa das hipotenusas de medidas a, b e c, respectivamente?

i) Podemos afirmar que os triângulos são semelhantes? Justifique.

l) Qual a posição relativa dos segmentos de medidas n, hec ? Justifique.

Retas paralelas e transversais: É fornecido aos estudantes uma figura com retas paralelas e transversais. Pede-se que o aluno identifique essas retas paralelas e as transversais e em seguida identifique os polígonos gerados por elas. A atividade é finalizada pedindo que o estudante verifique se os polígonos formados pelas paralelas e as transversais são semelhantes.

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: A atividade semelhanças no triângulo retângulo leva o estudante a identificar as relações métricas por meio da semelhança de triângulos. Para esse processo é necessário que o aluno saiba o conceito de semelhança e entenda suas propriedades. Dessa forma ele desenvolve uma sequencia de afirmações que as levam a uma teoria geométrica. Sendo assim, esta atividade pode levar o estudante ao nível 3 de Van Hiele, a Dedução Formal.

A atividade é expressa com itens que direcionam o estudante aos processos que devem ser realizados, porém é necessário que o aluno saiba o conceito de semelhança e aplique-o em diversas etapas tornando assim o objeto em estudo mais claro. Desse modo, esta atividade pertence a fase didática 4, a orientação livre.

A atividade Retas paralelas e transversais apresenta pouca informação quanto ao seu objetivo. O que se percebe é que o aluno irá identificar os polígonos semelhantes concluindo assim o Teorema de Tales, o que parece um equivoco. Visto que o Teorema de Tales é a condição para a semelhança de triângulos. Sendo assim, esta atividade não pode ser classificada quando aos níveis e fases de Van Hiele.

É possível ter acesso, na publicação, a todas atividades aqui apresentada.

3.3 Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat

Tendo o conhecimento de que as dissertações do ProfMat[26] possuem temas pertinentes a educação básica, foi feita uma pesquisa no site do ProfMat, a respeito das dissertações defendidas. Nessa busca, foram obtidas quatro dissertações relacionadas com o ensino de semelhança de triângulos. A seguir será exposto a proposta de cada dissertação.

3.3.1 Propostas para o ensino da semelhança

Esta dissertação é de autoria de Leonardo dos Santos Sá[27] do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (ver [SÁ, 2013]). De acordo com o autor,

> $(\cdots)$Este trabalho tem por objetivo principal levar os professores de matemática e os alunos a pensarem a semelhança num sentido mais amplo. Pois, praticamente todos os livros da literatura matemática abordam esse conceito de uma forma restrita aos triângulos. Com isso, propomos esta obra com o intuito de complementar essa lacuna no ensino da matemática.

Ele dar ênfase a semelhança de figuras existente no dia a dia do estudante, sendo assim, ele estimula o professor a iniciar a aula apresentando figuras semelhantes adequadas a faixa etária do aluno, como as figuras a seguir.

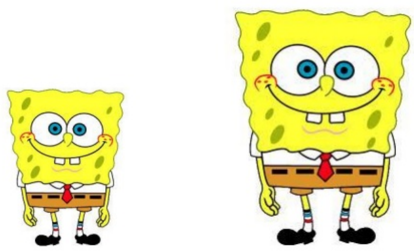


Figura 3.43: Figuras semelhantes

Para definir figuras semelhantes é utilizado a figura do desenho animado Simpsons. Com a figura, ele aborda a ideia de redução e ampliação, identificando o valor pelo qual deve-se multiplicar todos os segmentos da figura menor para obter a figura maior.

[26] http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes

[27] http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2013/leonardo_dos_santos.pdf

Observe a figura a seguir, utilizada pelo autor. Note que ele seleciona alguns segmentos para o calculo da razão de semelhança.

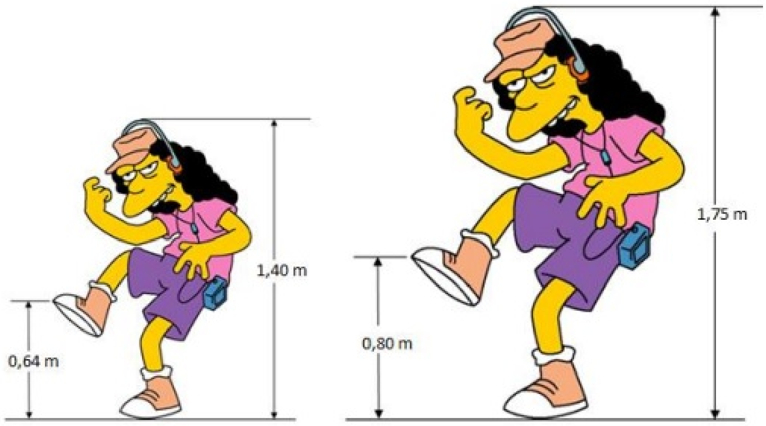


Figura 3.44: Cálculo da razão de semelhantes

Em seguida é feito a definição de semelhança tanto para os triângulos quanto para qualquer polígono. é sugerido que seja feito desse modo com os alunos, que a definição seja feita sobre o conceito de semelhança e não apenas semelhança de triângulos.

Em último momento é sugerido ao professor uma lista de exercícios as quais é dividida em resolvidos e propostos. A seguir será exposto alguns exercícios sugeridos.

Exercício Resolvido:

1) Sejam três retângulos $R1$, $R2$ e $R3$. Se $R1$ é semelhante a $R2$ e $R2$ é semelhante a $R3$.

a) $R1$ é semelhante a $R3$?

b) Caso sejam semelhantes, o que podemos dizer sobre a razão de semelhança entre $R1$ e $R3$?

Seja r a razão de semelhança entre $R1$ e $R2$ e k a razão de semelhança entre $R2$ e $R3$. Sendo assim, os retângulos ficam da seguinte forma:

a) Sim , pois os lados são proporcionais, ou seja, $\dfrac{a.r.k}{a} = \dfrac{b.r.k}{b}$.

b) Seja V a razão de semelhança entre $R1$ e $R2$, então $\dfrac{a.r.k}{a} = \dfrac{b.r.k}{b} = r.k$.

Exercícios propostos:

1. Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados (em particular, dois quadrados) são figuras semelhantes. Quando é que dois retângulos são semelhantes?

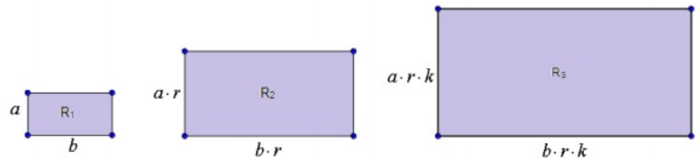


Figura 3.45: Solução

2. Usando semelhança de triângulos, mas não diretamente a noção de área, prove que o produto da base pela altura de um paralelogramo não depende de qual lado se tomou como base.

3. A pirâmide de Quéops, construída por volta de 2.500 a.C. é considerada uma das grandes maravilhas do mundo antigo; sua base é um quadrado cujos lados medem cerca de 230 metros. O filósofo grego Tales, nascido na cidade de Mileto por volta do ano 585 a.C., conseguiu medir a altura da pirâmide de Quéops. Partindo do princípio de que existe uma razão entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra que esse objeto projeta no chão, e que esta razão é a mesma para diferentes objetos no mesmo instante. No caso da pirâmide de Quéops ele usou apenas um bastão e as medidas das sombras da pirâmide e do bastão, num mesmo instante.

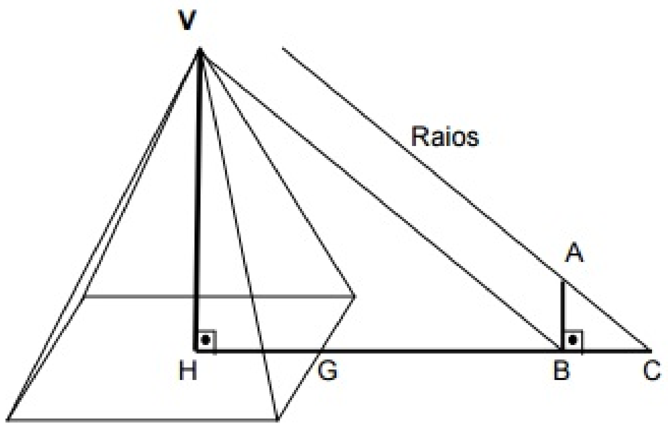


Figura 3.46: Esquema proposto por Tales

Sabendo que o bastão AB usado por Tales, media 2 metros, a sombra da pirâmide GB media 155 metros e que a sombra do bastão BC mede 3,6 metros. Daí pode-se afirmar que a medida da altura da pirâmide de Quéops calculada por Tales de Mileto foi de:(o ponto H é o centro do quadrado)

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: O tema motivador para introduzir o conceito de semelhança leva ao nível 0 de Van Hiele, a visualização. O professor, ao abordar o assunto, pode levar o aluno aos níveis 1 e 2, ou seja, a Análise e a Dedução Informal. O estudante pode ser conduzido a investigar os motivos pelos quais as figuras apresentadas são semelhantes, chegando assim na Análise. Ao realizar os cálculos exemplificados pelo autor, o discente poderá verificar a propriedade de semelhança de figuras, atingindo a Dedução informal.

Nos exercícios propostos, o estudante terá que realizar uma sequência de afirmações, adquiridas anteriormente, deduzindo novas. Sendo assim, as atividades podem leva-lo ao nível 3 de Van Hiele. A Dedução Formal.

As fases didáticas ficam a critério do professor. Pode-se observar que o autor deixa sugestões para a elaboração da aula, deixando assim, o professor independente. Ele exemplifica as fases didáticas Questionamento, Explicitação e a Orientação Livre.

Todas as atividades e o tema motivador, podem ser adaptados para atividades que utilizam materiais concretos ou softwares dinâmicos.

É possível ter acesso, na publicação, a todas as atividades sugeridas.

3.3.2 Medidas de alturas inacessíveis por segmentos proporcionais em projeções de sombras: um relato de experiência

Esta dissertação é de autoria de Luciano Faustinoni[28] da Universidade Federal de Santa Maria (ver [Fontinoni, 2015]). De acordo com o autor,

> ($\cdots$)O Teorema de Tales é conteúdo do Ensino Fundamental, na maioria dos currículos, no 9º ano, séries finais. No entanto, o que entra em foco é justamente o modo de trabalhar com esse conteúdo que é, muitas vezes, relegado ou tratado em sala de aula minimamente, com aulas teóricas e descontextualizadas da prática e da realidade do aluno. Em função dessas constatações, "de que modo se pode trabalhar de forma prática o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos no Ensino Fundamental? Para respondê-lo traçou-se como objetivo geral "motivar os alunos a uma atividade prática de alturas inacessíveis, visando, acima de tudo, contribuir no aprendizado destes conceitos alinhando a teoria com a prática na aprendizagem da matemática.

Propõe-se um projeto de ensino com aspectos teóricos e práticos do Teorema

[28]https://www.imed.edu.br/Uploads/LUCIANO_FAUSTINONI.pdf

de Tales e da semelhança de triângulos. O objetivo central é apresentar uma solução para medidas inacessíveis usando segmentos proporcionais em projeções de sombra. A aplicação se dá em cinco/ quatro semanas, num total de vinte períodos de aula, onde nas duas semanas iniciais serão aulas expositivas sobre o teorema de Tales e Semelhança de triângulos. Nas aulas expositivas, o autor sugere que o professor não apenas apresente os conceitos mas comente também sobre a contextualização histórica de como Tales de Mileto mediu a famosa Pirâmide de Quéops no Egito. Nas semanas seguintes os alunos serão levados para o trabalho de campo. Nesse momento o professor já deve ter em mente qual o objeto desejado para medição.

No projeto aplicado, os alunos tiveram que descobrir qual a altura do prédio administrativo da direção. Para isso, eles foram levados a medir a sombra do prédio e a sombra do equipamento fabricado e utilizado para auxiliar no cálculo de alturas inacessíveis.É sugerido um questionário final sobre a atividade.

Com o apoio da Escola de Engenharia Civil e da Arquitetura e Urbanismo foi confeccionado um equipamento que auxilia a medição de alturas inacessíveis. Para esta confecção foram utilizados 1,5 m de cano PVC de 25 mm de diâmetro, ainda, uma cruzeta de 25 mm para encaixes de canos e 50 cm de mangueira com diâmetro equivalente ao de uma broca de tamanho 8,5 mm. Além de brocas de madeiras e de ferros nos tamanhos de 6 e 8 mm para obter os devidos furos nos canos de PVC de 25 mm.

Procedimentos realizados na tarefa de campo:

Após a abordagem teórica em sala de aula, os estudantes foram desafiados a medirem a altura do prédio central da escola. Para isso, foram divididos em grupos e receberam as orientações iniciais. Cada grupo ficou responsável por medir a sombra do prédio e a sombra do equipamento produzido, tendo um aluno responsável por anotar as medidas e os demais responsáveis pelas medições.

Para a realização da medida, um estudante posicionava o equipamento na ponta da sombra do prédio, nivelava-o em relação ao prumo de água contido na mangueira do equipamento, de maneira mais precisa possível. A figura a seguir, fornecida pelo autor, apresenta essa situação.

E por fim, outro aluno era quem mensurava as duas medidas, sendo a primeira delas a sombra da estaca e depois a sombra do prédio. A figura a seguir, também fornecidas pelo autor, apresenta um exemplo de medição de sombras.

Figura 3.47: Procedimento para medição - Nivelamento

Figura 3.48: Procedimento para medição - Medindo a sombra do equipamento

Ao medir a sombra do prédio central os estudantes se depararam com um obstáculo, a escada externa do prédio. A professora contornou o problema motivando o calculo da altura da escada. Após a tomada e anotação de medidas os alunos foram incentivados a aplicar tais medidas e calcular efetivamente a altura da entrada do prédio da Escola, momento em que se utilizaram da semelhança de triângulos e do Teorema de Tales na prática, fazendo a representação de triângulos imaginários, e considerando conceitos essenciais como os obstáculos (escada) e proporcionalidade.

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: A proposta didática é dividida em teórica e prática. A teórica consiste em uma aula expositiva não envolvendo, necessariamente, o uso de materiais concretos. A atividade prática consiste em uma situação problema envolvendo uso de materiais concretos. Para solucionar a situação problema o estudante precisa desenvolver sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de outra. Ele já raciocina formalmente no contexto de um sistema matemático completo, com definições e teoremas. Sendo assim está atividade pode levar o aluno a atingir o Nivel 3 de Van Hiele, a Dedução Formal.

O professor que irá aplicar esse projeto de ensino poderá utilizar diversas fases de Van Hiele. Desde o questionamento ao apresentar a situação problema até a Orientação Livre e o Fechamento. A Orientação Livre ocorre na aplicação da atividade de campo, onde se faz necessário o uso de múltiplas etapas para a realização do problema.

É possível ter acesso, na publicação, ao passo a passo da aplicação da atividade de campo assim como os resultados obtidos com a aplicação.

3.3.3 Uma sequência didática com embalagens de pipoca para o estudo de semelhanças

Esta dissertação é de autoria de Geoges Ibrhaim Filho [29], da Universidade Federal de São carlos ([Ibrahim Filho et al., 2016]). De acordo com o autor,

> $(\cdots)$Este trabalho apresenta uma sequência didática para aulas de Geometria abordando o conceito de semelhança com foco na variação da razão de semelhança entre medidas lineares e medidas de áreas e de volumes de alguns poliedros, tendo como situação problema a comparação de preços de diversos tamanhos de embalagens de pipocas vendidas em salas de cinema da região de Bauru.

É proposto uma sequência de atividades para o ensino de semelhança. A sucessão é iniciada por um problema motivador e em seguida tarefas envolvendo materiais manipulativos. As atividades possuem caráter autônomo, ou seja, o estudante pode realizar sem o acompanhamento direto de um professor. A princípio entende-se que a atuação do professor é dispensável, porém é deixado claro o quão importante é sua ação. Ele aparece como mediador das atividades, questionando e orientando o procedimento. Além de elaborar e adequar a sequência para o público alvo.

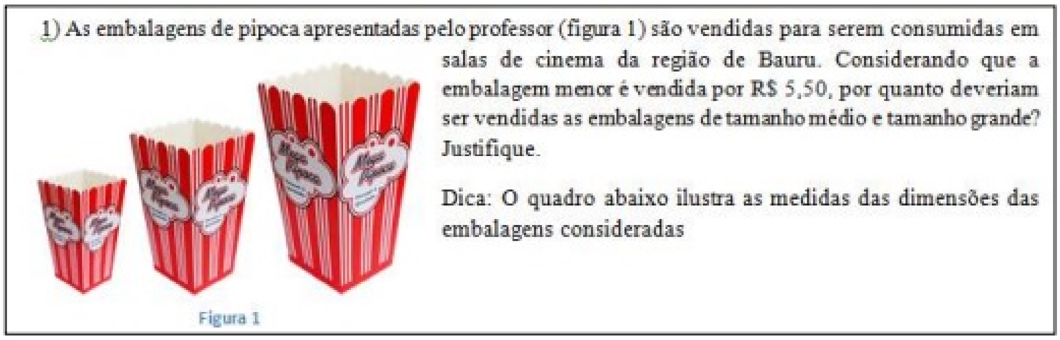
Para proporcionar maior autonomia ao estudante é fornecido quatro folhas

[29] file:///C:/Users/aninh/Downloads/2016_000094581_GEORGES_IBRAHIM_FILHO.pdf

de atividades. A seguir será exposto um breve resumo de cada folha, assim como seu objetivo.

Folha de Atividade 01:

A folha de Atividades 01 apresenta o problema central da sequência didática, desencadeador das ações e que remeterá ao estudo do conceito de semelhança. As figuras a seguir apresentam o problema motivador.


1) As embalagens de pipoca apresentadas pelo professor (figura 1) são vendidas para serem consumidas em salas de cinema da região de Bauru. Considerando que a embalagem menor é vendida por R$ 5,50, por quanto deveriam ser vendidas as embalagens de tamanho médio e tamanho grande? Justifique.

Dica: O quadro abaixo ilustra as medidas das dimensões das embalagens consideradas

Figura 1

Figura 3.49: Problema Central

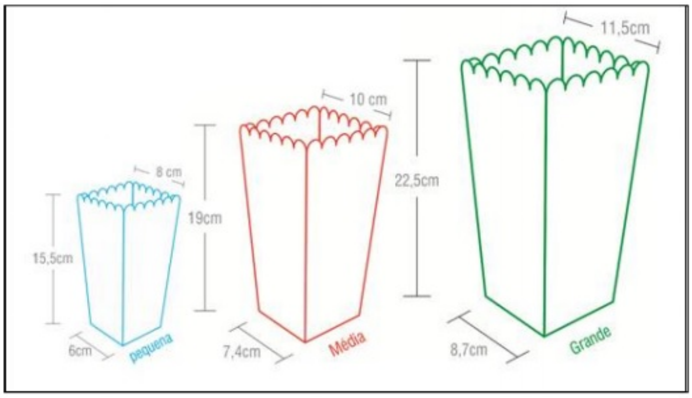


Figura 3.50: Problema Central - dimensões

Esta atividade foi aplicada a uma turma do nono ano do Ensino Fundamental. Sendo assim, não era esperado que os alunos resolvem o problema e sim discutissem sobre. Os sacos de pipoca são troncos de pirâmides de base quadrada, conteúdo abordado somente no Ensino Médio. O problema motivador apresenta-se como uma ferramentar de despertar e aguçar a curiosidade dos alunos. Que eles sejam capazes de relacionar o preço com a quantidade de pipoca e essa quantidade com as dimensões do pacote.

Folha de Atividade 02:

É sugerido, ao professor, que as atividades propostas na folha 02 sejam realizadas em pequenos grupos de estudantes.

Será necessário a confecção de paralelepípedos sem uma de suas faces, com dimensões $4cm$ x $6cm$ x $8cm$, identificada como embalagem pequena, $8cm$ x $12cm$ x $16cm$, identificada como embalagem média, e $12cm$ x $18cm$ x $24cm$, embalagem grande. Esses paralelepípedos formarão um conjunto de embalagens a serem distribuídos a cada grupo. Faz-se necessário também $500g$ de pipoca para preenchimento da embalagem grande, para posterior comparação. A figura a seguir ilustra o conjunto de embalagens.

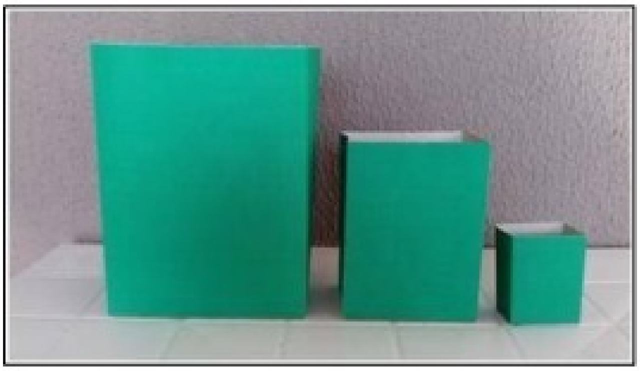


Figura 3.51: Conjunto de embalagens

A primeira questão da folha consiste em medir medir as arestas dos paralelepípedos e calcular o seu volume, como mostra a figura a seguir.

A segunda e a terceira atividade da folha 02, busca levar o estudante a observar e constatar as razões de ampliação ocorrida entre as medidas das arestas e as áreas das bases, para assim comparar os resultados obtidos e por meio de um raciocínio lógico dedutivo, notar a relação entre as razão das áreas e a razão das arestas. A figura a seguir exemplifica as atividades 2 e 3.

A quarta atividade, busca levar o estudante a determinar experimentalmente quantas vezes o volume das embalagens médias e grandes são maiores do que o da embalagem pequena, e através dessa observação estabelecer uma relação entre o volume das embalagens e o preço a ser pago. A figura a seguir exemplifica a atividade 4.

A quinta e a sexta atividade, busca levar o estudante a comparar a relação entre a razão das arestas e a razão dos volumes. A figura a seguir exemplifica a atividade

1) Vamos considerar os paralelepípedos sem tampa disponibilizados pelo professor como objetos semelhantes as embalagens de pipocas observadas na folha de atividades I, com o auxilio de uma régua meça as dimensões dos paralelepípedos e complete as tabelas abaixo:

Embalagem	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
Pequena			
Média			
Grande			

Embalagem	Área da base (cm^2)	Volume (cm^3)
Pequena		
Média		
Grande		

Figura 3.52: Atividade inicial

2) Em comparação com a embalagem pequena quantas vezes a medida da aresta (comprimento, largura ou altura) da embalagem de tamanho médio é maior? Quantas vezes a área da base da embalagem média é maior?

3) Em comparação com a embalagem pequena quantas vezes a medida da aresta (comprimento, largura ou altura) da embalagem grande é maior? Quantas vezes a área da base da embalagem de tamanho grande é maior?

Figura 3.53: Atividades 2 e 3

4) Tomando a embalagem pequena como unidade de medida preencha as embalagens (paralelepípedos) de tamanho médio e grande com as pipocas disponibilizadas pelo professor. Quantas vezes o volume da embalagem média é maior que a embalagem pequena? E quantas vezes o volume da embalagem grande é maior que a embalagem pequena? E por quanto deveriam ser vendidas as embalagens de tamanho médio e grande?

Figura 3.54: Atividade 4

5 e 6.

Os valores obtidos para as razões encontradas entre as medidas das arestas, da

5) Em comparação com a embalagem pequena quantas vezes a medida da aresta (comprimento, largura ou altura) da embalagem de tamanho médio é maior? Quantas vezes o volume base da embalagem média é maior?

6) Em comparação com a embalagem pequena quantas vezes a medida da aresta (comprimento, largura ou altura) da embalagem grande é maior? Quantas vezes o volume da embalagem de tamanho grande é maior?

Figura 3.55: Atividades 5 e 6

área e do volume das embalagens de tamanho médio e grande quando comparadas com a embalagem menor são sintetizadas na sétima questão, figura a seguir, novamente com a intenção de caracterizar a variação quadrática e cúbica ocorridas.

7) Tomando as medidas encontradas para a embalagem pequena como referência, complete:

	Razão de ampliação dos lados	Razão entre as áreas da base	Razão entre os volumes
Média			
Grande			

Figura 3.56: Atividade 7

O literato destaca também um quadro intitulado Para você pensar, que tem por objetivo chamar a atenção do estudante a conjecturar uma expressão que relacione variação na razão de semelhança ocorrida entre as medidas lineares e a variação obtida nas medidas volumétricas. A figura a seguir destaca o quadro citado.

Por fim, pede-se para expressar a variação quadrática e cúbica, levando o estudante ao calculo dos valores das embalagens. As questões 8, 9 e 10 são responsáveis por esse processo, como pode ser visto a seguir.

Deseja-se que os estudantes compreendam, com a menor intervenção possível, que quando ampliamos ou reduzimos um paralelepípedo de um determinado fator (razão de semelhança), sua área (área da base, faces ou área total) ficará ampliada ou reduzida pelo quadrado deste mesmo fator e que seu volume ficará ampliado ou reduzido pelo cubo

Para você pensar: Se aumentarmos k vezes a medida da aresta, será que existe uma expressão em função de k para determinar o quanto o volume irá aumentar? Será que o mesmo vale se diminuirmos k vezes a medida da aresta?

Figura 3.57: Para você pensar

8) Vamos imaginar uma embalagem "Jumbo" cuja razão de ampliação entre ela e a embalagem pequena seja 3,5 vezes maior. Quantas vezes maior será a área da base? E quantas vezes maior será o seu volume quando comparado com a embalagem pequena?

9) Supondo que o preço da embalagem pequena fosse de R$ 0,50 e considerando os valores obtidos com relação ao volume da tabela da questão 7, por quanto deveriam ser vendidas as embalagens de tamanho médio e grande?

10) Um cubo de medidas indicadas na tabela seguinte foi ampliado de uma razão de semelhança igual a quatro, sendo assim complete:

Poliedro	Aresta (cm)	Área total (cm^2)	Volume (cm^3)
Cubo Inicial	a	b	c
Cubo ampliado			

Figura 3.58: Atividades 8, 9 e 10

deste determinado fator. Espera-se também que tenham estabelecido que o valor (preço) a ser calculado para uma determinada embalagem está associado com a capacidade (volume) de tal embalagem quando relacionada a uma unidade tomada como referência.

Folha de Atividade 03:

A folha de atividade 03 também pode ser aplicada a pequenos grupos. Ela foi dividida em duas partes, primeiro a argumentação teórica dos conceitos discutidos e em seguida exercícios contextualizados sobre o assunto. Na parte teórica houve-se uma preocupação em exemplificar a verificação da proporcionalidade, como pode ser visto na figura a seguir.

A constatação de semelhança é fornecida aos alunos pelo quadro a seguir.

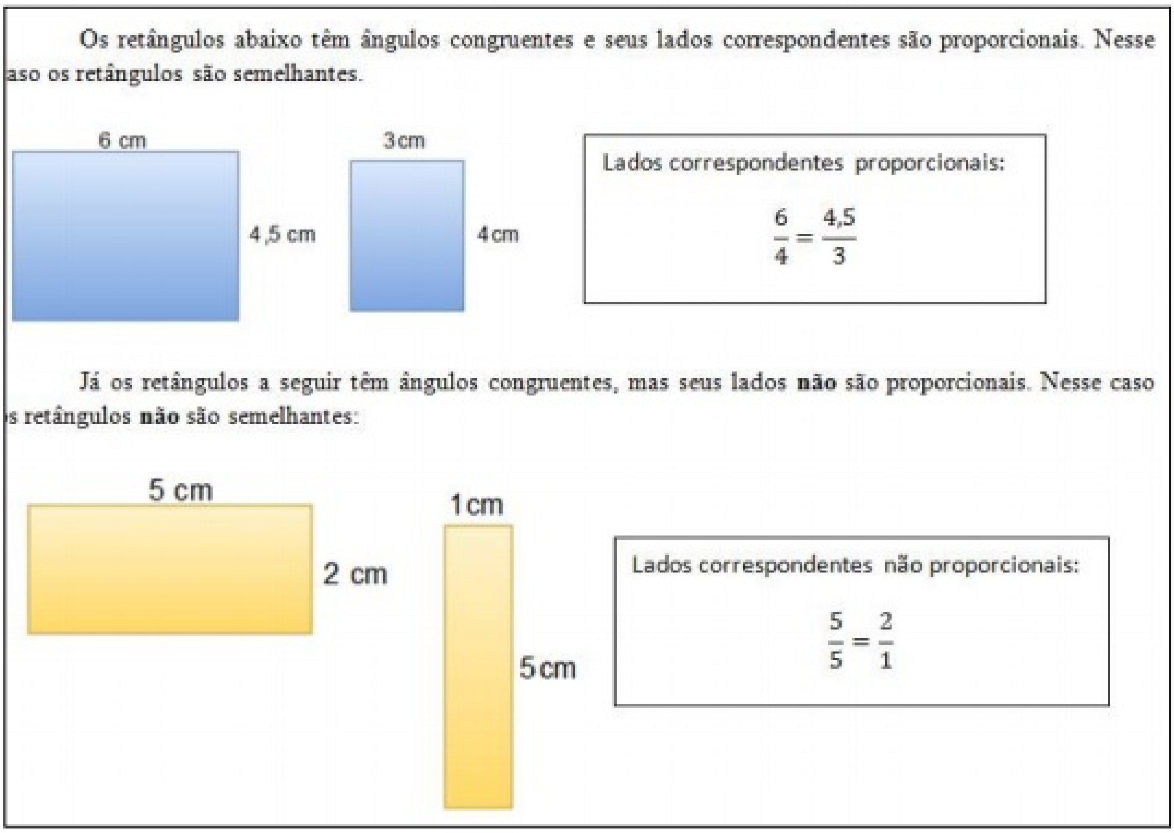


Figura 3.59: Verificando a proporcionalidade

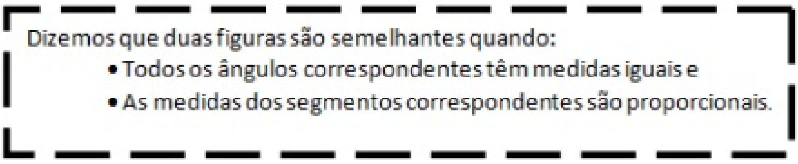


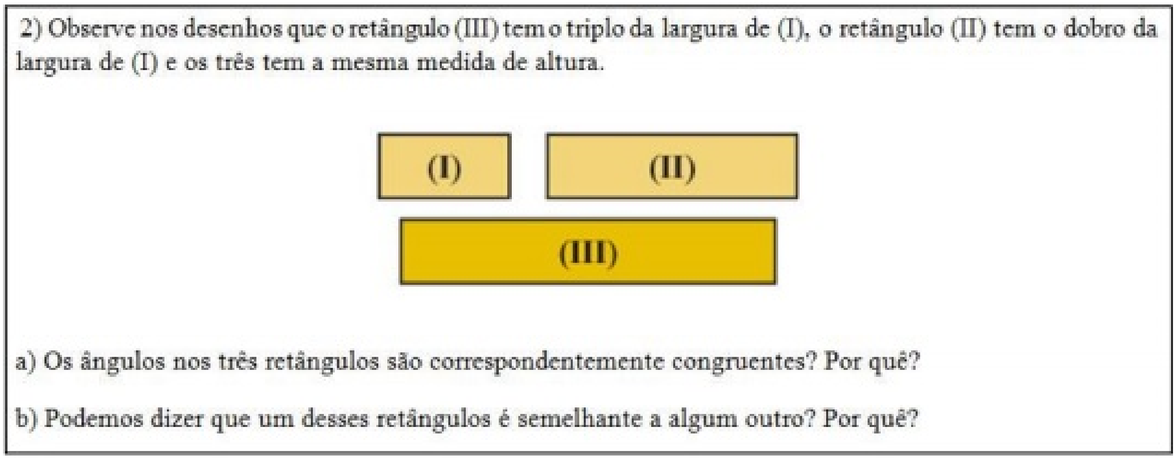
Figura 3.60: Semelhança de figuras

A segunda parte da folha de atividade 03 é composta de questões discursivas e objetivas que visam fixar e aplicar os conceitos sobre semelhança. A figura a seguir exemplifica uma dessas atividades.

Folha de Atividade 04:

Espera-se que o estudante já seja capaz de resolver o problema motivador. A folha de atividade 4 consiste na solução desse problema.

A sequência didática em questão tem por objetivo introduzir e aplicar o conceito de semelhança de figuras. Mesmo não abordando os conteúdos referentes ao Teorema


2) Observe nos desenhos que o retângulo (III) tem o triplo da largura de (I), o retângulo (II) tem o dobro da largura de (I) e os três tem a mesma medida de altura.

a) Os ângulos nos três retângulos são correspondentemente congruentes? Por quê?

b) Podemos dizer que um desses retângulos é semelhante a algum outro? Por quê?

Figura 3.61: Exemplo de exercício aplicado

de Talles e Semelhança de triângulos, a proposta didática aborda o tema central dessa pesquisa, semelhança.

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: De fato, a sequência didática proposta utiliza o material didático como recurso na construção do saber matemático. Os materiais concretos utilizados são relevantes para a construção do conceito de semelhança e as atividades propostas estabelecem uma sequência mental necessária e suficiente para a construção desse conceito.

O propósito das atividades é atingido passando por mais de um nível de Van Hiele. Nota-se que não são apresentadas atividades que levem o estudante a justificar algumas relações observadas. Por exemplo a relação volumétrica é aceita após algumas observações, não sendo deixado como instrução ao professor justificar essa relação. Sendo assim não necessariamente é atingido o Nível 3 de Van Hiele, a Dedução Formal. O professor pode levar o aluno a esse nível trabalhando um pouco mais as definições na parte teórica da folha 3, mas não é citado uma atividade com esse objetivo.

Ao indagar aos alunos sobre o preço das embalagens de pipoca e apresentar as embalagens está sendo verificado o Nível 0 de Van Hiele, a visualização. Nesse momento, o estudante, apenas visualizando o tamanho das embalagens poderá argumentar qual deve ser mais cara e qual deve ser mais barata. Quando é solicitado ao aluno para anotar as dimensões das três embalagens de pipoca e observar a relação entre elas espera-se que obtenha a razão de semelhança entre as embalagens. O mesmo ocorre ao comparar as razões das áreas e dos volumes. Sendo assim o aluno raciocina sobre conceitos geométricos, a partir de uma análise informal, criando relações e propriedades. Nesse momento temos atividades que levam ao Nível 1 de Van Hiele, a Análise.

Nas atividades propostas na segunda parte da folha 3 o estudante poderá validar quais são as condições necessárias para que duas figuras sejam semelhantes, nesse momento se faz necessária inter-relações das propriedades definidas. Dessa forma a atividade tem como obejtivo levar o estudante a atingir o Nível 2 de Van Hiele, a Dedução Informal. Pode-se destacar que nesse momento ele é capaz de acompanhar uma justificativa ou demonstração, como pode ter sido feito na parte teórica dessa mesma folha.

Quantas as fases didáticas, pode-se observar a presença de todas. Quando ela não fica explícita na atividade, deixa-se uma orientação ao professor. O tema motivador aparece como fase didática 1, o questionamento. Mas não só ele está na fase 1, nota-se que em todas as folhas a atividade inicial começa com um questionamento implícito. Em todas as folhas existe a presença da fase didática 5, o fechamento. Ela aparece como sugestão ao professor, ou até mesmo como parte da atividade, como é indicado na parte inicial da folha 3. Ao apresentar o material didática e as folhas com atividades o professor aplica a fase didática 2, a Orientação Direta. Quando é solicitado relações e propriedades, chegando em uma definição ele está na fase didática 3, a explicitação. A fase didática 4, a Orientação Livre ocorre na última folha. Pois nela o aluno deverá fazer uso de todos os conhecimentos adquiridos realizando múltiplas etapas para solucionar o problema motivador.

É possível ter acesso, na publicação, a todas folhas de atividades assim como os resultados obtidos com a aplicação.

3.3.4 Um Estudo das Transformações Geométricas no Plano via Congruências e Semelhança de Figuras Planas

Esta dissertação é de autoria de Ricardo Gomes Assunção[30], da Universidade Federal de Goiás ([Assunção, 2015]). De acordo com o autor,

> (···)Este trabalho visa estudar as isometrias e homotetias, conhecidas transformações geométricas do plano, por meio da congruência e semelhança de figuras geométricas planas. Afim de explorar e facilitar

[30]https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4812/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Ricardo%20Gomes%20Assun%C3%A7%C3%A3o%20-%202015.pdf

o entendimento dos conceitos dessas duas transformações geométricas, algumas atividades com figuras geométricas congruentes e semelhantes são propostas num material didático manipulável criado para esse fim, denominado plano isométrico, e, também, no software GeoGebra.

São propostas atividades para que as isometrias e homotetias sejam exploradas por meio das congruências e semelhanças de figuras planas. A primeira parte das atividades envolve o uso do material concreto para se trabalhar isometrias e a segunda utiliza o software dinâmico Geogebra para se trabalhar isometrias e homotetias.

O material concreto utilizado é de autoria própria e foi chamado de *plano isométrico*. Foi desenvolvido com o objetivo de incentivar os estudantes , por meio de movimentações livre de figuras geométricas no plano, a descobrirem quais isometrias caracterizam a congruência das figuras planas apresentadas. Ele é constituído de uma placa de metal, de dimensões 38 cm por 27 cm, pintada de cinza, e um adesivo, de dimensões 37 cm por 26 cm, cuja estampa é branca e apresenta um quadriculado preto de 1 cm por 1 cm, como pode ser visto na figura a seguir.

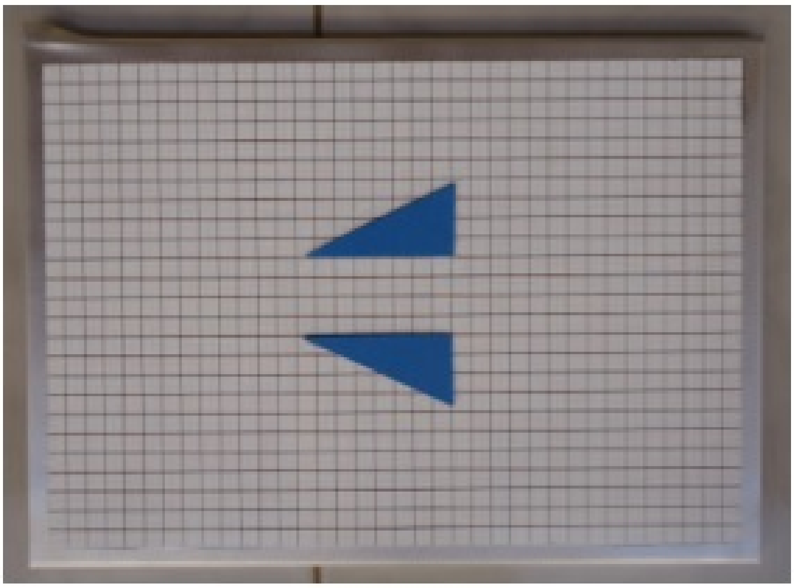


Figura 3.62: *plano isométrico*

Foram confeccionadas também figuras geométricas em folhas de Espuma Vinílica Acetinada (EVA), de diversas cores, que tem na parte inferior um adesivo imantado fixado. É esse adesivo que faz com que a figura fique "presa" no plano de metal. As figuras foram imantizadas com o propósito que fiquem pressa ao plano, pois o seu uso será na posição vertical.

Em um primeiro momento, serão dadas, aos estudantes, duas figuras congruentes no plano e o mesmo tem que deslocar uma até coincidir com a outra e, anotar como esse deslocamento foi realizado. É importante destacar ao aluno que existe mais de uma maneira de realizar esse deslocamento. Após esse primeiro contato deverá ser formalizado ao aluno que essas movimentações são isometrias no plano. Esse momento de explanação termina quando o conceito de congruência é generalizado para congruência de figuras geométricas via isometria.

Após a exposição dos conceitos foram novamente distribuídos os *planos isométricos*, dessa vez em duplas, os estudantes realizaram várias atividades em que deveriam descobrir qual ou quais isometrias determinavam as congruências de pares de figuras geométricas planas congruentes, distribuídas em diversas configurações diferentes do plano.

A segunda parte da proposta didática consiste em atividades que utilizam como ferramenta o software Geogebra. As atividades envolvem semelhança de triângulos e homotetia e seguem a mesma dinâmica das atividades realizadas no *plano isométrico*. São apresentadas configurações geométricas congruentes ou semelhantes e, por meio de deslocamentos, o estudante terá que descobrir quais isometrias (ou homotetias) foram utilizadas.

A figura a seguir exemplifica uma das atividades proposta, onde o objetivo é que o estudante perceba que uma simples translação horizontal leva um triângulo no outro.

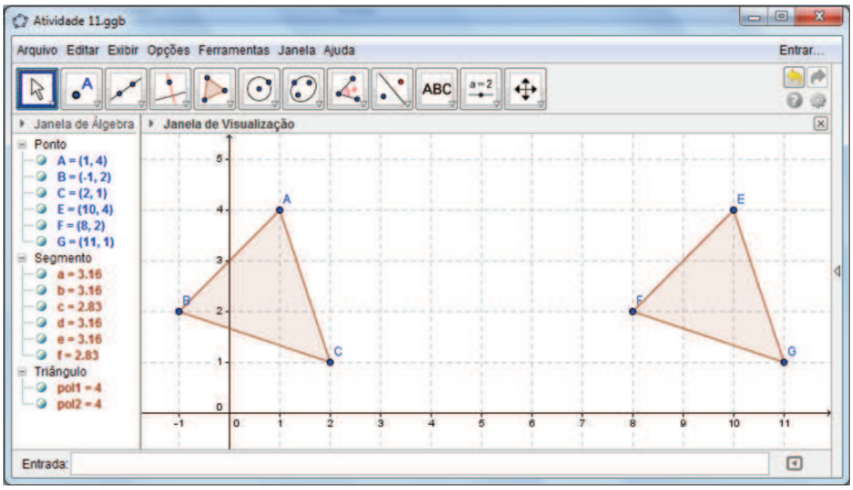


Figura 3.63: *Atividade no Geogebra - Congruência*

Na próxima figura é possível ver uma das atividades que tem por objetivo levar o aluno a certificar a semelhança através de uma homotetia. No exemplo, em questão, a homotetia de razão $k = 3$ e com centro no ponto $O(0,5)$ garante a semelhança.

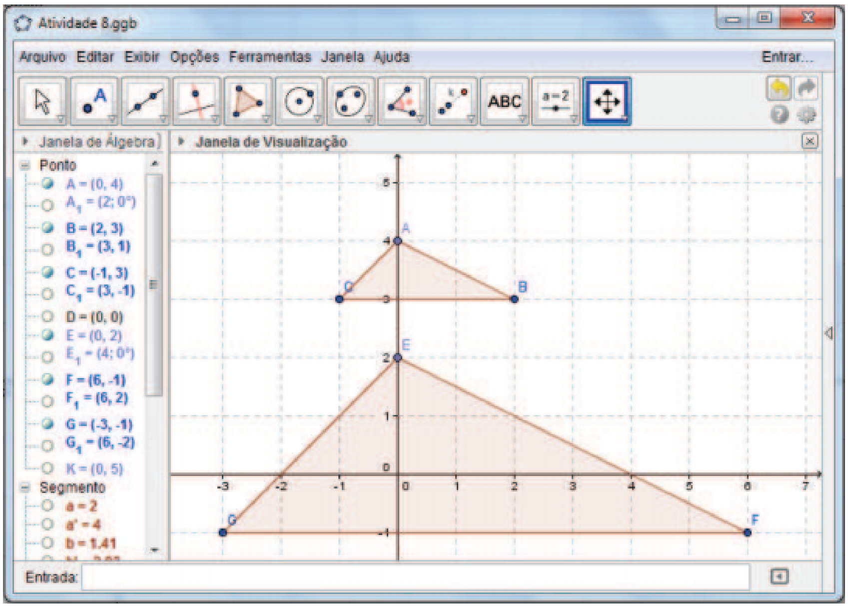


Figura 3.64: *Atividade no Geogebra - Semelhança de triângulos*

Foram propostas trinta e três atividades no Geogebra. As quatorze atividades iniciais tinham por objetivo apresentar os comandos necessários para se obter as isometrias no Geogebra. Cada atividade apresenta uma única isometria. Após essa sequência inicial, foram apresentadas quatro atividades para que o aluno identificasse a isometria que garantia cada concruência apresentada. Em seguida, são apresentadas onze atividades que continham configurações de pares de diversas figuras geométricas semelhantes, para que os estudantes pudessem conhecer os comandos de homotetia do Geogebra. E por fim, são abordadas quatro atividades que apresentam duas figuras geométricas semelhantes para que o aluno identifique as isometrias e homotetias que "levam" uma figura na outra. É importante destacar que as atividades envolvem polígonos e não apenas triângulos, o autor defende a importância de generalizar o conceito de congruência e semelhança para os demais polígonos.

Os Níveis de Van Hiele e as fases didática: Esta proposta didática não tem por objetivo introduzir o conceito de figuras semelhantes e sim fazer uso de homotetias e isometrias para abordar o assunto. O autor sugere diversas aplicações, mas o professor ainda assim, esta livre para encaixar as atividades em sua aula. Se a atividade é abordada antes da definição de semelhança, ela levará o estudante ao Nível 0 de Van Hiele, a

Visualização. Se ela for aplicada para introduzir a definição, levar-a ao Nível 01 de Van Hiele, a Análise. Sendo assim, não pode-se classificar a proposta didática sem saber em que momento ela será utilizada.

Independente do Nível de Van Hiele, esta atividade sempre será a fase didática 2, a Orientação direta. As demais fases irão aparecer de acordo com o uso do professor. O autor tem o cuidado de solicitar que o professor sempre faça um Fechamento.

É importante destacar que ao imantizar as peças do material concreto criado, o autor tornou o seu recurso didático acessível aos alunos com deficiência visual.

É possível ter acesso, na publicação, a todas atividades propostas assim como os resultados obtidos com a aplicação.

4 Considerações finais

Embora a matemática tenha potencial para ser criativa, divertida, estimulante e desenvolvedora de bons hábitos de pensamento, ela tem sido fonte de medo e frustação para estudantes em todo o mundo (Jo Boaler 2016), que veem a matemática como acessível apenas para alguns poucos dotados de talento. O professor de matemática tem papel fundamental na democratização do ensino da disciplina e na mudança de mentalidade dos estudantes, fazendo-se necessária uma formação acadêmica eficiente para tal proceso É necessária uma aproximação entre a teoria e a prática na formação dos professores de matemática. Mas também é de responsabilidade do docente zelar pela sua formação continuada, buscando sempre estar atualizado sobre as práticas docentes eficazes.

Todo o processo de investigação, análise e aplicações mudaram, de forma considerável, a minha prática em sala de aula. Passei a me preocupar mais com a funcionalidade dos materiais concretos e seus usos no processo de ensino e aprendizagem. Espero que o presente estudo, possa contribuir para a atualização das práticas docente do leitor.

Durante a leitura das 12 propostas didáticas selecionadas, senti a necessidade de aplicar algumas delas, eu queria saber se elas efetivamente cumpriam o que prometiam em seus objetivos. As atividades propostas, na maioria das vezes, foram escritas para os professores e eu queria saber se os alunos entenderiam a linguagem e caso não, como eu poderia adequar ao vocabulário do aluno, respeitando seus níveis cognitivos. Após a aplicação, tive maior envolvimento com as propostas e me permiti substituir alguns materias concretos e aplicativos computacionais. As implementações foram feitas para aprimoramento pessoal, sem uma metodologia de pesquisa. Mas algumas observações importantes desse processo, merecem algum destaque sobre sua e sobre como serviu no meu processo de aperfeiçoamento profissional. As propostas didáticas aplicadas foram:

1. Proporcionalidade no Cap UERJ: O teorema de Tales, (Professor- MEC);

2. Medindo distâncias inacessíveis, (Portal do Professor- MEC);

3. Como abrir um túnel se você sabe geometria?, (Revista do Professor de Matemática);

4. Medindo objetos através da semelhança de triângulos, (Repositório digital da UFRGS);

5. Uma sequência didática com embalagens de pipoca para o estudo de semelhanças, (dissertação do PROFMAT).

As propostas 1 e 2 foram aplicadas em tumas do nono ano do Ensino Fundamental da rede pública de ensino. Decidi usar o geoplano e a geometria do táxi, criados no LEG-UFF, conforme indicado no Cap.3. Os alunos ficaram muito entusiasmados com os materias concretos, principalmente a maquete da Geometria do Táxi. Senti um pouco de dificuldade com a administração do tempo na atividade e foquei em não perder o fechamento dos assuntos. As duas propostas são apenas uma fase didática, elas aplicam os conceitos já aprendidos.

A proposta 3 foi aplicada em turmas do terceiro ano do Ensino Médio da rede privada de ensino. Nesta atividade, o aluno é instigado por uma situação problema a criar uma solução. Para tal solução, se faz necessária uma justificativa, utilizando conceitos de semelhança de triângulos. Por esse motivo e pela falta de tempo dos anos iniciais do Ensino Médio, apliquei somente no último ano. Os estudantes sentiram-se completamente envolvidos com a situação problema! Diferente do que estamos habituados a encontrar em uma turma de Pré-vestibular, eles se empenharam em resolver a situação problema, buscando estratégias e revisitando o que era necessário de conceitos matemáticos. Poucos alunos chegaram sozinhos à solução,assim mesmo sem muitas justificativas. Mas após orientados, quanto às etapas a serem cumpridas, os alunos conseguiram, quase que em toda sua totalidade, resolver o problema e elaborar uma justificativas guiada ao conceito utilizado.

As propostas 4 e 5, foram aplicadas nas turmas de primeiro ano do Ensino Médio da rede privada de ensino. Na atividade "Medindo objetos atráves da semelhança de triângulos", os alunos ficaram eufóricos com as animações das situações problemas, entendo como um jogo. Mas depois da segunda, já começaram a dispersar, aparentemente pela repetição e falta de novos desafios. Quanto a última, antes de aplicar as atividades, construímos diversas embalagens de pipoca em sala, respeitando as necessidades das atividades, e em seguida as realizamos. Os alunos participaram muito e frequentemente questionaram quanto ao volume. Como eram turmas de primeiro ano, falei sobre as relações proporcionais entre áreas e volumes de figuras semelhantes, mas sem dar muita ênfase. Todas as aplicações acrescentaram na minha formação profissional. Muitas das atividades encontradas me serviram como inspiração para a criação de novas.

Após toda análise, observei que nenhuma atividade compreende um módulo educacional completo para o ensino de semelhança de triângulos, ou seja, nenhuma proposta apresenta todos os níveis de Van Hiele, mesmo sendo facultativo o Rigor. Às vezes, as atividades presentes nas propostas são apenas fases didáticas. Existem também aquelas que atingem um nível mais alto, como a Dedução Informal e a Dedução Formal, porém não passam pelos os níveis iniciais e como é enfatizado pelo casal Van Hiele, os níveis cognitivos do desenvolvimento do pensamento geometrico não são facultativos, ou seja, não podem ser pulados. A Tabela 4.1 resume os níveis atingidos pelas propostas didáticas. Aquelas que se configuram apenas como fases didáticas foram omitidas da tabela.

Proposta	**Visualização**	**Análise**	**Ded. informal**	**Ded. formal**
Semelhança de Triângulos em três casos	⋆	⋆		
Aferição de distâncias inacessíveis	⋆	⋆	⋆	
Proporcionalidade no CAp UERJ: teorema de Tales	⋆	⋆		
Proposta para o ensino de semelhança	⋆	⋆	⋆	
Uma sequência didática com embalagem de pipoca para o estudo de semelhança	⋆	⋆	⋆	
Um estudo das transformações geométricas no plano via congruência e semelhança de figuras planas	⋆	⋆	⋆	
Uma proposta de atividades para semelhança de triângulos utilizando o Geogebra			⋆	

Proposta	**Visualização**	**Análise**	**Ded. informal**	**Ded. formal**
Medindo distâncias inacessíveis			⋆	
Medindo objetos através de semelhança de triângulos			⋆	
Um problema, 10 soluções				⋆
Como abrir um túnel se você sabe geometria?				⋆
Um problema				⋆
Essa é do baú				⋆
Medidas de alturas inacessíveis por segmentos proporcionais em projeções de sombra				⋆

Tabela 4.1: Níveis de Van Hiele das propostas didáticas.

Fica como sugestão ao leitor, o desenvolvimento de um módulo educacional para o ensino de semelhança que contenha uma porposta didática embasada em atividades que utilizem materiais concretos manipuláveis e softwares de geometria dinâmica, seguindo os níveis de Van Hiele, deixando apenas o Rigor facultativo. As propostas aqui apresentadas, servirão como inspiração, podendo até mesmo serem reaproveitadas. Pretendo dar continuidade ao estudo e produzir um módulo didático composto por um conjunto de materiais concretos manipuláveis, softwares de geometria dinâmica e um caderno de atividades. Essas atividades terão como objetivo levar o aluno a sistematizar os conceitos de ampliação e redução de figuras planas vistos de um ponto de vista matematicamente coerente, reduzir a problemática à semelhança de triângulos e utilizar-se do Teorema de Tales para sua demonstração.

Referências Bibliográficas

[Adanéz, 2002] Adanéz, Gerardo Prieto e Velasco, A. D. (2002). Construção de um teste de visualização a partir da psicologia cognitiva.

[Assunção, 2015] Assunção, R. G. (2015). Um estudo das transformações geométricas no plano via congruência e semelhança de figuras planas. Master's thesis, Profmat/UFGO.

[Boaler, 2018] Boaler, J. (2018). *Metalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador*. Penso Editora.

[Caldeira, 2009] Caldeira, M. F. T. H. S. (2009). A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática.

[Costa, 2004] Costa, R. d. (2004). A inteligência coletiva: cartografando as redes sociais no ciberespaço. *II Congrès Online de L'observatori per la Cibersocietat: Cap a quina societat del coneixement*.

[de Oliveira,] de Oliveira, C. N. C. Um problema, dez soluções. *Revista do Profesor de Matemática. São Paulo: SBM*, 83.

[de Souza and de Godoy Dalcolle, 2007] de Souza, S. E. and de Godoy Dalcolle, G. A. V. (2007). O uso de recursos didáticos no ensino escolar.

[Diniz-Pereira, 2000] Diniz-Pereira, J. E. (2000). Formação de professores: pesquisas, representações e poder.

[Fontinoni, 2015] Fontinoni, L. (2015). Medidas de alturas inacessíveis por segmentos proporcionais em projeções de sombras: Um relato de experiência. Master's thesis, Profmat/UFSM.

[Gasparin, 2001] Gasparin, J. (2001). Motivar para aprendizagem significativa. *Revista Mundo Jovem*, pages 12–25.

[Gravina et al., 2012] Gravina, M. A., Borigo, E. Z., BASSO, M. V. d. A., and Garcia, V. C. V. (2012). Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática. *Porto Alegre: Evangraf.*

[Ibrahim Filho et al., 2016] Ibrahim Filho, G. et al. (2016). Uma sequência didática com embalagens de pipoca para o estudo de semelhanças. Master's thesis, Profmat/Universidade Federal de São Carlos.

[Kaleff, 2008] Kaleff, A. M. M. (2008). Tópicos em ensino de geometria: a sala de aula frente ao laboratório de ensino e história da geometria. *Rio de Janeiro: UFF/UAB/-CEDERJ.*

[Levy, 2002] Levy, P. (2002). *Cyberdemocratie.* Odile Jacob.

[Lorenzato, 2006] Lorenzato, S. (2006). *O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.* 1ª. Ed. Campinas, SP: Autores Associados, p. 3-37, 2006 (Coleção Formação de Professores).

[Macedo et al., 2007] Macedo, L. N., Siqueira, D. M. B., and Mathias, A. A. (2007). Desenvolvendo o pensamento proporcional com o uso de um objeto de aprendizagem. *Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico*, pages 17–26.

[Monforte, 2017] Monforte, L. (2017). Semelhanças no geogebra e o modelo de Van Hiele. Master's thesis, Profmat/UNIRIO.

[Moreira, 2013] Moreira, M. A. (2013). Aprendizagem significativa, organizadores prévios, mapas conceituais, diagramas v e unidades de ensino potencialmente significativas. *PUC/PR*, page 5.

[Paim, 2015] Paim, M. A. S. (2015). O problema do carpinteiro: estudando semelhança de triângulos por meio da fachada de uma casa. *ForScience*, 3(1):104–121.

[Pereira, 2013] Pereira, P. C. (2013). Uma proposta de atividades para semelhanças de triângulos utilizando o geogebra.

[Radin, 2015] Radin, L. D. (2015). O estudo da semelhança de triângulos: uma abordagem por meio de objetos de aprendizagem.

[Rodrigues, 2017] Rodrigues, A. C. (2017). O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.

[Rosa, 2004] Rosa, E. (2004). Como abrir um túnel se você sabe geometria. *Secretaria de Educação Básica. Explorando o ensino da Matemática: artigos. Brasília: MEC*, pages 158–162.

[Salvador, 2012] Salvador, M. F. M. (2012). Geometria: do arquivo da estela à sala de aula. *Produto apensado a essa dissertação. Vassouras-RJ: LaPHEM.*

[Salvador, 2013] Salvador, M. F. M. (2013). Essa é do baú! do arquivo da professora estela kaufman para sala de aula.

[Santos, 2009] Santos, C. d. O. (2009). A importância da visualização no ensino da geometria plana e espacial.

[Santos, 2011] Santos, Darcson Capa Dos; Cury, H. N. (2011). O uso de materiais manipulÁveis como ferramentana resoluÇÃo de problemas trigonomÉtricos.

[Sarmento, 2011] Sarmento, A. K. C. (2011). A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática.

[SÁ, 2013] SÁ, L. D. S. (2013). Propostas para o ensino da semelhança. Master's thesis, Profmat/IMPA-OS.

[Velasco and Kawano, 2002] Velasco, A. D. and Kawano, A. (2002). Avaliação da aptidão espacial em estudantes de engenharia como instrumento de diagnóstico do desempenho em desenho técnico. *Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP.*

[Wagner, 2007] Wagner, E. (2007). A formiga inteligente. *Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM*, 61.

[Weingartner and Postman, 1969] Weingartner, C. and Postman, N. (1969). Teaching as a subversive activity.