Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - Profmat

DEODATO PEREIRA DA SILVA FILHO

VETORES GEOMÉTRICOS: CONTRIBUIÇÕES PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS NO ENSINO MÉDIO

Parnaíba - 2017

DEODATO PEREIRA DA SILVA FILHO

VETORES GEOMÉTRICOS: CONTRIBUIÇÕES PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida à Ccoordenação do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Prof^{a}. Dr^{a}. Sissy da Silva Souza

Parnaíba - 2017

Silva , Deodato Pereira da Filho.

Vetores Geométricos: Contribuições para a construção
dos conteúdos matemáticos no ensino médio.

Deodato Pereira da Silva Filho – Parnaíba, 2017.

Impresso por computador (fotocópia)

Orientador: Prof$^{\text{a}}$ Dr$^{\text{a}}$ Sissy da Silva Souza.

1.Vetores 2.Operações 3.Geometria Analítica plana 4. Números Complexos

CDD 516.36

DEODATO PEREIRA DA SILVA FILHO

VETORES GEOMÉTRICOS: CONTRIBUIÇÕES PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Aprovado por:

Prof. Dra. Sissy da Silva Souza - UFPI - CMRV
Orientadora

Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos - UFPI - CMRV
Examinador Interno

Prof. Msc. Cleidivan Alves dos Santos - UFPI - CMRV
Examinador Externo ao Programa

Parnaíba - 2017

À minha esposa Maria Cardoso dos Santos e aos meus filhos Susan Christian e Joan Davi.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, à minha mãe Maria do Amparo Ferreira da Silva e a meu pai Deodato Pereira da Silva, aos meus irmãos, fundamentais na minha existência e formação.

A minha orientadora Profª Drª Sissy da Silva Souza

Aos meus amigos José Claudio Terto e José Eliésio

Ao meu Mestre Profº Roberto Ramos

A todos os meus colegas do profmat

Galileu dizia que o livro do universo está aberto diante de nossos olhos, mas só podemos entendê-lo se soubermos a linguagem em que foi escrito: A MATEMÁTICA. É uma imagem muito bonita e demonstra a real importância da matemática. E este cuso foi fundamental para enxergar e entender um pouco desta linguagem de Deus, e poder concluir o curso de mestrado profissionalizante, o PROFMAT.

Agradeço a CAPES pelo excelente programa que é o PROFMAT, à UFPI, ao Campus Ministro Reis Veloso, aos professores e toda direção por ter em sua grade a oferta desse importante programa de pós graduação, contribuindo assim para elevar o nível de pesquisa e extensão da matemática e oportunizando aos professores de Ensino Médio poder oferecer uma matemática que venha a fazer nossos discentes a entender e representar o mundo.

"A Matemática é a ciência daquilo que é claro por si mesmo.".

Carl Gustav Jacob Jacobi

RESUMO

A presente pesquisa aborda o objeto matemático: vetor geométrico, ou simplesmente vetor, como ferramenta para contribuir na construção dos conteúdos matemáticos do ensino médio. O conteúdo de vetores é de fácil compreensão e de extrema importância para auxiliar para resolução de problemas matemáticos na geometria plana, na física, na geometria analítica, etc. Buscamos viabilizar o uso de vetores nas aulas de matemática no ensino médio, melhorando a visualização de certos conteúdos matemáticos. Tentaremos enfatizar o uso de vetores como sendo, ao mesmo tempo, alternativo e complementar aos métodos sintético e cartesiano, facilitando alguns resultados como: Condição de alinhamento de três pontos, equação da reta, área de paralelogramo, entre outras aplicabilidades que os vetores podem auxiliar. Contribuimos assim, com uma proposta de introdução deste conteúdo no ensino médio a partir do 1º ano com o proposito de ser construido assim, um trabalho que possa orientar os profissionais da área da matemática a trabalhar este objeto matemático utilizando-o em sala de aula, no qual facilitará ao aluno a compreensão , dos problemas e conteúdos da matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Vetores, Operações Vetoriais, Produto Interno e Áreas.

ABSTRACT

The present research deals with the mathematical object: geometric vector, or simply vector, as a tool to contribute to the construction of the mathematical content of the high school. The contents of vectors is easy to understand and extremely important to helper for solving mathematical problems in plane geometry, analytical geometry, physics, etc. We seek to enable the use of vectors in math class in high school, improving the visualization of certain mathematical content. We will try to emphasize the use of vectors as being, at the same time, alternative and complement to the synthetic methods and Cartesian, facilitating some results as: three-point alignment condition, straight equation, parallelogram area, among other applications that the vectors may assist. We contribute as well, with a proposal for introduction of this content in high school from the first grade with the purpose of being built as well, a job that could guide professionals in the area of mathematics to work this mathematical object using it in the classroom, which will facilitate the student comprehension of the problems and math content.
KEYWORDS: Vectors, Vector Operations, Domestic Product and Areas.

Sumário

INTRODUÇÃO

"A utilização do conceito de Vetores e suas aplicações no início da 1ª série deste segmento serve como base para os conteúdos subsequentes de Matemática. Esta postura gera reflexos significativos na condução e organização do programa de Matemática nos três anos do Ensino Médio. Diante do despreparo dos alunos ingressantes na universidade, apontados por Nasser (2009) e Rezende (2003), dentre outros, e da dissociação entre os conteúdos de Matemática destacados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999), este novo currículo vem se consolidando há sete anos no CAp UFRJ".

Nossos alunos adquiriram vários campos do conhecimento matemático, no ensino fundamental,e agora estão em condições de utilizá-los, amplia-los e desenvolver de modo mais abrangente capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio, geométricos,etc, por este motivo acreditamos que a inserção do conteúdo vetores logo no 1º ano do ensino médio facilitará, aos alunos, uma compreensão maior de certos assuntos da mecânica na física e vários conteúdos matemáticos que fluirão de forma mais natural como, módulo de um número complexo, regra do paralelogramo, área do paralelogramo, área de triângulo, entre outras aplicabilidades. No Ensino Médio se apresentará ao aluno novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo, e o objeto matemático vetor é um dentre vários conteúdos matemáticos que possibilitará ao discente a ampliação das habilidades na abordagem de novos modelos para interpretar questões da matemática e de outras áreas do conhecimento.

"A introdução da noção de $\mathsf{Vetores}$ no R^2 no 1º ano do Ensino Médio pretende lançar mão de um instrumento importante e prático no estudo dos conteúdos expostos em sequência, mas principalmente da Trigonometria e Função Afim, reduzindo cálculos desnecessários que estes temas recorrem quando seu ensino é feito de maneira isolada. A organização dos conteúdos estruturados e baseados nos $\mathsf{Vetores}$ pretende conduzir o aluno a interpretações geométricas de fatos algébricos". (Assemany, 2011)

A importância da aplicação desse conteúdo para o aluno do ensino médio é de grande valia pois ampliará seu conhecimento a respeito de vetores e suas operações. Faremos um paralelo entre resoluções de problemas sem o uso de vetores e utilizando vetores. E Vale ressaltar que nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM, p.77), cabe a nós docentes do ensino médio, A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de matemática tanto do ponto de vista geométrico (segmentos orientados com mesma direção, sentido e módulo), quanto algébrico, caracterizado pelas suas coordenadas. É importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, diferença, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico.

Utilizaremos a metodologia sugerida pela OCEM (2006), para o ensino de vetores nas aulas de matemática, seja a socioconstrutivista, segundo a qual a aprendizagem se realiza por um processo dinâmico, em que, segundo Vygotsky (2001), há a construção de conceitos pelo próprio aluno através da interação entre sujeito e objeto e da ação do sujeito sobre o objeto.A aplicação do socioconstrutivismo de Piaget ou do sociointeracionismo de Vygotsky. Dessa forma, os novos conceitos matemáticos devem ser formalizados a partir da etnomatemática, modelo de problemas matemáticos que evidenciam situações reais vividas pelos discentes, problemas que mostram situações reais e que estejam próximas a comunidade.

Nos Parâmetros curriculares nacional +(PCN+, 2002, p.8), a ideia central expressa na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), estabelece o ensino médio como etapa conclusiva da educação básica de toda a população estudantil - e não mais somente uma preparação pré-universitária e a profissionalizante. Ora, isso nos leva a um grande desafio, construir e praticar propostas pedagógicas que estejam além do que se trabalhava no ensino médio. A etnomatemática contribuirá para isso, no qual proporcionará, uma linha de raciocínio que fará o aluno tirar suas próprias conclusões acerca do problema vivenciado por ele, buscando solucionar-los por meio de raciocínio que propiciará a ele dar um rumo ao seu futuro escolar, buscando a ampliação desses novos conhecimentos via universidade ou optando por um direcionamento de conhecimentos específicos à área técnica escolhida por ele.

A todo momento a matemática se faz muito presente no cotidiano, quer seja ir ao mercado comprar quilos ou gramas de algum produto, quer seja em algum estabelecimento que venda seu produto no metro, centímetros, quer seja fretar um ônibus para uma excursão, onde o valor vai ser em função da quantidade de pessoas e de quilometragem rodada, ou seja, várias ações que lida com aspectos matemáticos, e em todas elas a matemática financeira está presente. Pensando vetorialmente, de forma mais concreta, quando buscamos chegar a algum lugar na cidade ou fora dela, às vezes buscamos o caminho mais curto, e nossa mente trabalha planejando qual o melhor traçado nas ruas para se chegar mais rápido, e as vezes nem sempre o caminho mais curto, pra pegar menos trânsito, menos semáforos e que seja seguro. Portanto é essencial para a formação de todos os alunos do ensino médio, proporcionar-lhes a construção de uma visão abrangente e capacita-los a interpretar a realidade e buscar soluções que lhe serão necessárias no mundo do trabalho e na sua vida social.

É preciso ensinar a matemática de uma forma interdisciplinar que configure uma prática educativa contextualizada, integrada e que relaciona a outros conhecimentos.

De acordo com o PCN+, 2002(p. 24), respeitadas as diversidades das ciências, nós docentes devemos promover a construção de um ensino focado na realidade e interagindo com outras disciplinas, convergindo a compreensão dos aprendizados científicos de forma real e interdisciplinar reforçando o sentido de cada uma dessas disciplinas e propiciando ao aluno a elaboração de abstrações mais amplas.

O ensino interdisciplinar decorre do reconhecimento de que, apesar do seu caráter multidimensional, o conhecimento, por mais complexo que seja, é sempre inacabado e nunca atinge a sua plenitude. Nosso trabalho, facilitará: a aproximação mais ainda da geometria analítica da geometria plana, a compreensão da equação da reta, o trabalho do professor de física na abordagem dos vetores na mecânica, etc. Tornando possível que os conteúdos matemáticos sejam, de modo facíl, assimilados por nossos alunos do ensino médio.

Nos itens que se seguirá mostraremos a soma e diferença usual utilizando vetores, a interpretação vetorial de módulo de um vetor, o uso da chamada lei dos cossenos(regra do paralelogramo), produto escalar entre vetores, projeção de um vetor sobre o eixo cartesiano, ângulo entre vetores, área de paralelogramos e triângulos, a equação cartesiana da reta, equação afim ou reduzida da reta.

Capítulo 1

A pesquisa

1.1 C.E. Ateneu São José - Anexo II - Ilha Canárias

Escolhemos o Centro de Ensino Ateneu São José - Anexo II - Ilha Canárias, Colégio de Ensino Médio localizado na Ilha Canárias povoado do município de Araióses no estado do Maranhão, localizado cerca de 90 km da sede, Pelo fato de ser a unidade educacional na qual leciona o pesquisador. O Anexo II do Centro de Ensino Ateneu São José atende aos jovens que concluem o 9º ano do ensino fundamental, nos colégios municipais das localidades do Passarinho, Caiçara e das canárias, todas comunidades localizadas na Ilha canárias desde 2010 quando lá foi instalado o Anexo II. O prédio da escola municipal Sílvio Diniz administrado pela Prefeitura de Araioses, foi cedido ao estado para o funcionamento do Anexo II, durante os turnos da manhã e tarde trabalha-se o ensino fundamental do 5º ano ao 9º ano. O Ensino Médio no Anexo II funciona à noite e atende um público de cerca de 87 estudantes, distribuídos da seguinte forma, 1ªsérie: 35 alunos, 2ª série: 27 alunos e 3ª série: 27 alunos.

Nota-se uma extrema carência por parte dos discentes que moram na caiçara e passarinho, localidades que distam do anexo II cerca de uma hora de viagem, há um carro improvisado que os traz e os levam ao final do período escolar. Predomina a atividade pesqueira entre as famílias dos discentes, inclusive muitos dos nossos alunos também praticam esta atividade.

o corpo docente que atua no anexo II é composto por 07 professores e a parte administrativa composta por 04 membros.

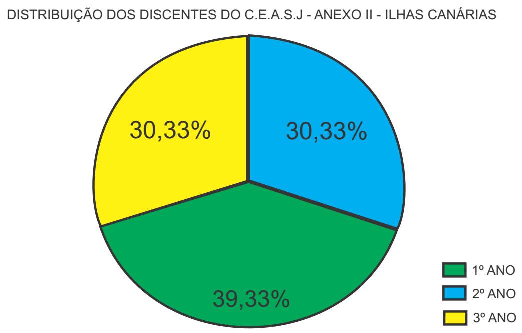


Figura 1.1: Fonte: Elaboração própria

O prédio é composto por 02 salas administrativas, 05 salas de aula, 01 cantina, 03 banheiros(01 professores, 01 alunos masculino e 01 alunos feminino), 01 sala depósito e 01 sala que em tese seria o laboratório de multimídias, porém está servindo de depósito.

1.2 Gênese da pesquisa

Observamos nas aulas do PROFMAT na disciplina de Geometria Analítica, a importância do conteúdo vetores para o ensino médio. Vislumbrei q a construção deste conteúdo: Vetores, com os discentes a partir da 1ª série expandindo o assunto nas séries seguintes, poderia enriquecer todo um raciocínio e compreensão dos conteúdos tradicionais da grade curricular exposto nas três séries do ensino médio. Logo a partir dai comecei a elaborar, de forma sintética, um material a ser lecionado com os discentes do anexo II. Selecionei o material a ser ministrado em sala de aula, no qual deveria ser apenas as bases para a construção deste conteúdo, então restringi a partir de Segmento Orientado até a Equação da Reta no Plano, passando por Produto interno e área do Paralelogramo.

Elaboramos também um questionário para coleta de dados pessoais e de referência social dos alunos. foi elaborado duas listas de exercícios a serem aplicados em sala de aula para analisar o nível de compreendimento do assunto e já fazer alguns diagnósticos para futuras correições.

1.3 Análise dos Dados do Questionário

O questionário aplicado traz importantes informações a respeitos do perfil dos discentes em relação a local de nascimento, sexo, idade, acesso a internet, tipos de plataformas no qual acessam a rede, que tipo de recursos mais utilizam, contato com o conteúdo de vetores, entre outras informações. Observou-se que dentre o universo das três séries do ensino médio, há uma maioria do sexo masculino, porém por uma pequena margem, na 1ª série há 20 homens e 15 mulheres, na 2ª série há 15 homens e 12 mulheres e na 3ª série há 11 homens e 16 mulheres, nesta última há uma maioria do sexo feminino. A faixa etária

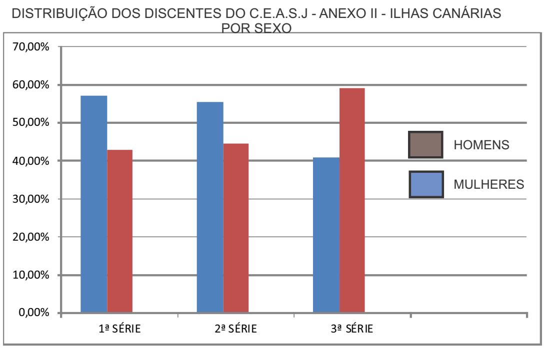


Figura 1.2: Fonte: Elaboração própria

dos pesquisados varia entre 14 anos a 27 anos. Predominando as idades da faixa entre 14 anos e 16 anos na 1ª série, idades entre 16 anos e 17 anos na 2ª série e na 3ª série entre 17 anos a 27 anos. Outro dado importante coletado foi a origem do grupo pesquisado. Foi observado que a grande maioria dos discente do Anexo II nasceram na cidade de Parnaíba, Piauí, pelo fato da Ilha canárias ser fronteira com o estado do Piauí, a mesma é a cidade mais próxima. o restante nasceram na própria Ilha, alguns nas comunidades de Canárias e Caiçara, outros em Araioses, 01 em São Paulo, 01 em Porto Velho e 01 em São Luís. No qual devido as raízes familiares dos pais foram residir na Ilha Canárias. E sendo o Anexo II o único colégio de ensino médio da Ilha Canárias, a grande maioria dos jovens que habitam a ilha estudam no mesmo. Houve, por parte deste pesquisador, o interesse de coletar informações sobre o acesso dos pesquisados a internet. Constatou-se que apenas

DISTRIBUIÇÃO DOS DISCENTES DO C.E.A.S.J - ANEXO II - ILHAS CANÁRIAS
POR LOCAL DE NASCIMENTO

LOCALIDADE	%
PARNAÍBA	65,2
ARAIÓSES	13,8
CANÁRIAS	9,5
CAIÇARA	4,9
SÃO PAULO	2,2
SÃO LUÍS	2,2
PORTO VELHO	2,2

Figura 1.3: Fonte: Elaboração própria

13,95% , não tinham acesso a rede mundial, enquanto que 86,05% tinham acesso a rede, dos quais 89,2%, portanto, a maioria, acessavam a net por smartphone e 10,8% acessam a rede por um PC. O item 08 do questionário enfatiza o uso da rede para o estudo, na realização de trabalhos e pesquisas das disciplinas curriculares e uma totalidade de 94,6%, dos discentes, se utilizam desta conexão para o estudo e somente 5,4% não fazem uso desta ferramenta, a internet, para seus estudos. Pelo fato, já citado, do Anexo II não possuir um laboratório de informática questionamos através do item 11 se gostariam que o colégio tivesse um laboratório e por quê. Foi unânime a resposta SIM,e a justificativa no geral foi a mesma: "....para facilitar os estudos", "....a pesquisa", "....preparação de deveres", "...para facilitar o aprendizado", entre outras afirmativas positivas em prol de um melhor desempenho escolar.

Finalmente chegamos ao que interessa sobre o trabalho que temos em mãos, questões sobre Vetores. Do conjunto das três séries do ensino médio do Anexo II, apenas 04 alunos, segundo eles na pesquisa, não tiveram contato com o conteúdo vetores, os demais tomaram conhecimento desta valorosa ferramenta matemática que são os Vetores. Destes, 56,41% conheceram vetores através da Física, 28,21% pela Física e Matemática e 15,38% pela matemática.

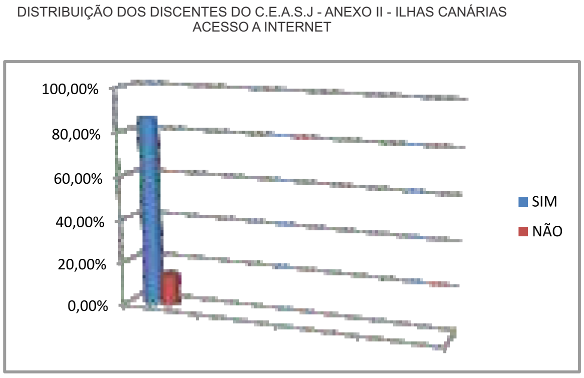


Figura 1.4: Acesso a internet Fonte: Questionário-Pesquisa

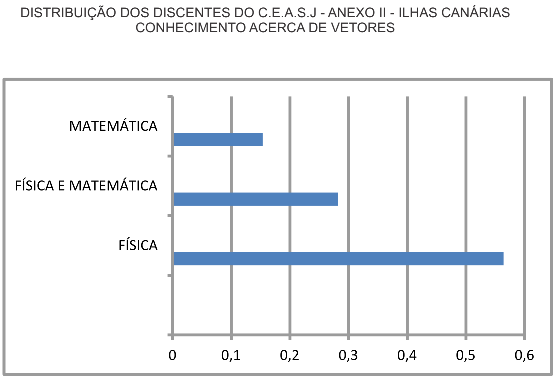


Figura 1.5: Conhecimento acerca dos vetores;Fonte: Questionário-Pesquisa

1.4 Atividades da Pesquisa: Aplicadas em sala de aula

Na sequência da exposição do conteúdo teórico sobre vetores em sala de aula, contribuição proposta na dissertação, aplicamos as atividades sobre operações com vetores. Foram 21 horas aula distribuídas de forma igual na três séries do ensino médio. Dedicamos em cada turma quatro horas aula para o conteúdo teórico e três horas aulas para realização das atividades e posteriormente correção. Ficamos muito surpresos pelo retorno dos discentes em relação a este conteúdo de vetores. Em primeiro plano focamos a adição, subtração, produto por escalar, localização de vértices de figuras geométricas no plano cartesiano. Foram três questionários com atividades diversas, o primeiro e o segundo trataram da adição, subtração, produto por escalar e produto interno, o terceiro focamos o plano cartesiano com respectivas coordenadas de pontos para que o discente visualize vetores no plano e consequentemente as figuras geométricas pedidas.

Iniciamos nosso trabalho de pesquisa de forma simultânea nas três séries do ensino médio. Para a 1ª série fizemos a parte introdutória do conteúdo proposto, as primeiras noções intuitivas de vetores no plano em paralelo às coordenadas de um vetor, seguido das definições de segmento orientado, igualdade de vetores, oposto de um vetor, vetor unitário, direção e sentido, módulo de um vetor e neste momento chamei atenção de que aquele item seria muito útil para o conteúdo números complexos, no qual iria ser apresentado a eles na 3ª série, houve uma atenção maior por parte dos mais interessados, no qual ficaram maravilhados com a utilização do teorema de Pitágoras para se determinar o módulo de um vetor. Na sequência expusemos a equipolência de vetores, onde se exigiu uma abstração por parte dos pesquisados, mas que foi bem compreendido por todos. Pelo fato do conteúdo proposto pela pesquisa à 1ª série ser mais teórico, com exceção do módulo, houve poucos questionamentos acerca do material. Ao 2º ano iniciamos nosso trabalho com as operações com vetores, seguido de produto interno. No decorrer da exposição da teoria muitas perguntas foram realizadas, dentre as quais em que os vetores ajudaria na aprendizagem. Muitas reações positivas partiram dos pesquisados alguns externaram estar gostando e compreendendo bastante daquele assunto, outros relataram que gostaram porém estavam achando um pouco complicado, mas interessante. Principalmente quando lhes foram apresentado as operações com vetores, em especial a soma. Muitos relataram e se admiraram que somar vetores não era uma operação simples da forma usual conhecida por eles, pois para algumas situações em relação a sentido e direção dos vetores a soma era a usual, em outras o que ocorria era a diferença dos módulos dos vetores. Quando ao posicionar os vetores para buscar o vetor soma e os mesmos formavam um triângulo retângulo, não houve a percepção por parte da maioria o uso do teorema de Pitágoras, isso chamou a atenção deles, e que ao realizar alguns exemplos, os exercícios fluíram de forma mais natural, uma pequena parcela observaram e afirmaram:

- Professor, quando em uma situação observamos que há a formação de um triângulo retângulo faremos uso do teorema de Pitágoras.

De pronto concordei com sua afirmação.

Outro momento muito interessante no decorrer da soma de vetores foi quando ao posicionar os vetores nos quais estávamos somando, não mais formavam triângulos retângulos e sim um triângulo obtusângulo, a grande maioria questionaram:

- e agora professor? como iremos buscar a soma destes vetores se não formam o triângulo retângulo.

Neste momento apresentamos a eles a regra do paralelogramo, houve uma tensão no ar, pois para os discentes da 2ª série, em tese já deveriam de ter visto no 1º ano em física, mas aquela regra era uma novidade um pouco assustador, pois,segundo eles não trabalharam esse assunto com o professor de física. Explanei a parte teórica da regra e partimos para os exemplos, no qual foi bem compreendido pelos alunos e viram que a utilização da regra do paralelogramo era suave e de fácil manipulação, houve uma apreensão maior em relação da busca do valor do cosseno, porém os tranquilizei comentando que a regra do paralelogramo nada mais é do que a lei dos cossenos, no qual seria visto, também por eles, naquela mesma série e que valores do cosseno para ângulos obtusângulo seriam de fácil obtenção a partir da compreensão dos arcos côngruos na circunferência trigonométrica. Quando iniciamos produto interno de dois vetores senti que houve uma dificuldade por parte da maioria, mas com o decorrer da exposição o assunto ficou mas palpável para eles. Para a abordagem geométrica precisamos de dois conceitos preliminares : norma ou módulo de um vetor e ângulo entre dois vetores. Foi de fácil compreensão a definição e a busca pela norma ou comprimento de um vetor, logo após abordamos o ângulo entre dois vetores que também foi de assimilação tranquila. A partir destes conceitos partimos para definir o produto interno ou produto escalar de dois vetores, de início houve muitos comentários colocando como "muito difícil"o assunto, mas no decorrer das resoluções de alguns exemplos muitos começaram a entender a dinâmica da coisa e começaram a ficar maravilhados por estarem conseguindo raciocinar de forma mais natural em relação a alguns conteúdos da grade curricular normal, começaram a visualizar os procedimentos para se buscar o produto escalar entre dois vetores.

O objetivo da dissertação foi alcançado no momento em que todos os alunos de todas as séries do ensino médio se envolveram para aprender um conteúdo onde alguns nunca tinham ouvido falar e outros tinham conhecimento de vetores somente através da física, tanto que em algumas aulas havia um debate entre alguns alunos sobre as aulas de vetores, se era matemática ou física, e vinham me perguntar e eu esclarecia que era matemática, porém um assunto com aplicabilidade em física.

Capítulo 2

Contribuição do uso dos vetores para o aprendizado de alguns conteúdos matemáticos no ensino médio

Diante do Referencial Teórico elaborado, das atividades aplicadas em sala de aula, podendo assim diagnosticar as dificuldades, falhas e acertos promovidas pelos discentes, e com base na convicção de que a utilização da ferramenta vetores irá dinamizar alguns conteúdos que são ministrados nas três séries do ensino médio. Acreditamos que a aquisição da noção do uso de vetores será de extrema importância para relacionar a geometria com a álgebra. contribuindo para um aprendizado matemático de maior qualidade a partir do 1º ano do ensino médio.

"Mostra-se a relevância do conceito de vetores para um melhor aproveitamento no estudo dos conteúdos relacionados com a Álgebra Linear do ensino médio, ou seja, o presente trabalho afirma que, com os vetores, é possível fazer um estudo mais significativo das Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares".(Alexandre Silva das chagas, 2014. p.11)

Segundo Raquel Montezuma Pinheiro Cabral(2014): "Constatou-se, através das demonstrações e dos exemplos, que o conhecimento de vetores facilita cálculos e tornam mais clara a visualização geométrica."(p.81)

2.1 A Contribuição

"De maneira concisa, pode-se afirmar que o ensino de Vetores no início da 1ª série do EM proporciona, dentre outras coisas: construção do gráfico de uma circunferência, utilização das transformações no plano para o ensino de trigonometria, determinação da equação da reta e a translação de gráficos".(Marcelo Torraca, 2013)

Para José Ribamar Penha Lindoso (2013) "Esta nova metodologia acreditamos ser mais vantajosa, por ser o vetor uma grandeza com acesso às propriedades geométricas das figuras. O estudo pode ser aplicado em todos os ramos da geometria e da física e outras áreas do conhecimento, o que facilita a interdisciplinaridade."(p.95)

"...destacou-se que o estudo do conteúdo de vetores pode contribuir no processo de transição do ensino médio para o Ensino Superior, por reduzir as dificuldades e oferecer um melhor preparo para algumas disciplinas de nível superior dos cursos da área de exatas".(Alexandre Silva das chagas, 2014. p.83)

2.1.1 Objetivos

Observando os conteúdos do ensino médio que possibilitam o uso do conceito de vetores, temos a equação da reta, a área do paralelogramo, condição de alinhamento de três pontos, uso extenso na geometria analítica, entre outros. A visualização de vetores paralelos e normais, através de inclusão de seus conceitos atendem a interdisciplinaridade de conteúdos da física. As contribuições são enormes, produtivas e compensadoras, pois a representação de figuras geométricas por meio de equação, utilizando os conceitos de vetores e produto interno, facilitará compreensão, por parte dos alunos, a razão de ser das equações, da álgebra em si.

2.1.2 Relação dos conteúdos e seus objetivos para as séries do ensino médio

Conteúdos:

Plano cartesiano, coordenadas cartesianas, equação da reta, condição de alinhamento de três pontos, área do paralelogramo, área do triângulo, distância entre dois pontos no plano, ponto médio de um segmento, posição relativa entre duas retas, ângulo entre retas concorrentes e módulo de um número complexo.

Objetivos:

-Usar os vetores como ferramenta, no plano cartesiano, para resolução de problema matemáticos que envolvam a reta e o ponto;

-Verificar e identificar, na equação da reta, posição de vetores paralelos e normais;

-Identificar vetorialmente o módulo de um número complexo no plano de Argand-Gauss;

Conteúdo programático para as três séries do ensino médio:

1ª Série do ensino médio:

1. O Plano Cartesiano: coordenadas cartesianas, distância entre dois pontos.

2. Vetores no plano: segmento orientado, equipolência de segmentos orientados, igualdade de vetores, vetor nulo, oposto de um vetor, direção e sentido, vetor unitário, módulo de um vetor, coordenadas de um vetor.

2ª série do ensino médio:

1. Operações com vetores: adição de vetores, multiplicação de um vetor por um escalar, diferença entre vetores;

2. Produto interno: ângulo entre dois vetores, definição de norma de um vetor, definição do produto interno de dois vetores, desigualdade triangular, desigualdade de Schwarz.

3ª série do ensino médio:

1. Componentes de um vetor(projeção de um vetor sobre outro vetor);

2. Área do paralelogramo;

3. Área do triangulo;

4. Equação da reta no plano;

2.1.3 Público-alvo

As contribuições que os vetores poderão proporcionar ao público alvo do ensino médio, será de forma mais acessível sendo o conteúdo iniciado a partir do 1º ano, com o conteúdo programático proposto, estendendo-se ao 2º ano e aprofundado no 3º ano relacionando-o com as equações da geometria analítica, que de praxe já faz parte do conteúdo programático usual, porém de forma cartesiana, a abordagem vetorial será a contribuição que os vetores darão, fazendo com que os discentes tenham uma maior compreensão e visualiza¸cão das figuras geométricas, facilitando assim o ensino e aprendizagem da geometria analítica plana.

2.1.4 Recursos didáticos

Para a execução da pesquisa e por conseguinte a dissertação, foi elaborado um material de forma sucinta e simples, para maior compreensão e assimilação do conteúdo vetores, por parte dos discentes do ensino médio, pois sabemos da dificuldade em relação a disciplina matemática.

Portanto acrescentar mais um conteúdo aos já existentes, deve ser de forma gradual, sem muita formalidades, deixando a universidade este papel. Foi pesquisado diversos livros de ensino médio: Joamir Souza(2013), Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce(2013), Dante(2013), Moderna(2014), Paiva(2013), entre outros, e poucos ou quase nenhum deles menciona sobre vetores como ferramenta matemática que os auxiliariam na resolução de problemas em determinados conteúdos.

Organizamos um conteúdo no qual utilizamos como recursos os seguintes livros:Jorge Delgado, Kátia Frusel, Thaylla Crissaf(SBM - 2013 - Profmat), Ivan de Camargo, Paulo Boulos (2007), Antônio Caminha(2015), Iezzi (2013), Oswaldo Dolce (2013). Material selecionado de forma que pudesse suprir a necessidade de conteúdo teórico como base do ensino e aprendizagem de vetores no ensino médio, contribuindo e enriquecendo o saber matemático, criando novas habilidades e competências sobre a disciplina.

2.1.5 Metodologia

Utilizar os vetores em alguns conteúdos matemáticos do ensino médio não modifica os métodos de ensino do professor de matemática, pois deve-se manter a facilidade da compreensão dos conteúdos matemáticos com sua devida visualização. A utilização de compasso, esquadro, transferidor, papel quadriculado, réguas, entre outros, deverão ser usado para podermos construir e visualizar os objetos matemáticos. O uso das tecnologias são um incrementos poderosos para o ensino e aprendizagem dos nossos discentes, logo indica-se utilizar data-show, computadores, programas que facilitam a construção e visualização como o winplot, o geogebra, e fazer uso de vídeos que permeiam a rede mundial. Contribuindo assim a concretização da metodologia proposta na pesquisa que é a socioconstrutivista de Piaget e/ou sociointeracionismo de Vygotsky.

2.1.6 Carga horária

"A inserção do assunto Vetores implicará em uma redistribuição de carga horária ao longo desta nova sequência didática que, não trará prejuízos em relação à sequência didática utilizada hoje, pois ao longo de todos os tópicos serão introduzidos, em forma de exercícios de aplicação dos mesmos, os conceitos que serão formalizados dentro do assunto Vetores."segundo Magda Braga Chaves Lemos(2014, p.11)

O material, com o conteúdo de vetores, que contribuirá para o aprendizado de alguns conteúdos matemáticos no ensino médio, se adéqua em 60 h/a, a se distribuir em 20 h/a para o 1º ano, 20 h/a para o 2º ano e 20 h/a para o 3º ano. Correspondendo 10% da carga horária total prevista pela LDB.

Capítulo 3

Tópicos em Geometria Analítica

3.1 Histórico

É importante falar aos alunos sobre o contexto histórico do conteúdo que abordaremos nos capitulos que se seguirá, para poder contextualiza-los e direcioná-los a um entendimento primário desse objeto matemático que são os vetores.

A noção básica de vetor surgiu na Mecânica com o engenheiro Simon Stevin, em 1586, quando apresentou um trabalho com o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Regra esta que a conhecemos hoje como regra do paralelogramo, que também aparece como primeiro corolário no Principia Mathematica(1687) de Isaac Newton. Em 1832 Giusto Bellavitis publicou um trabalho sobre o conceito de equipoiência que originou a definição de vetor e foi formalizada em 1844 por Hermann Grassmann.

Os vetores aparecem com as representações geométricas de números complexos, com Jean Robert Argand e Carl Friedrich Gauss que conceberam números complexos como pontos no plano bidimensional, isto é, como vetores bidimensionais. Em 1832, Giusto Bellavitis apresenta um trabalho onde o conceito de equipolência entre segmentos é, basicamente, a noção de vetor que conhecemos(OLIVEIRA, 2014).

Os alunos do ensino médio tem um primeiro contato com os vetores através da física com representação que simboliza um tipo particular de vetor, nessa representação elementar, os vetores são associados a grandezas que necessitam de direção, módulo e sentido, para serem completamente especificadas. Buscaremos abranger a noção de vetor com o uso de suas operações e propriedades para complementar os conteúdos matemáticos do ensino médio com o uso de vetores,

Neste primeiro capítulo os alunos do primeiro ano do ensino médio poderão tomar conhecimento sobre os vetores. Serão enunciadas as definicões necessárias sobre vetores e suas operações relevantes na formação básica dos alunos do Ensino Médio.

3.2 Vetores no Plano

Definiremos os conceitos de segmento orientado e equipolência de segmentos orientados. Este último servirá de base para a formalização do conceito de vetor(LINDOSO, 2013). Observamos que este conteúdo poderá ser trabalhado no 1º ano e 2º ano, tal a simplicidade e fácil compreensão do conteúdo.

3.2.1 Segmento Orientado

Um segmento orientado é um par ordenado (A, B) de pontos do espaço. O ponto A é chamado de origem do segmento orientado e o ponto B é chamado de extremidade do segmento orientado. Vamos representar um segmento orientado por AB.

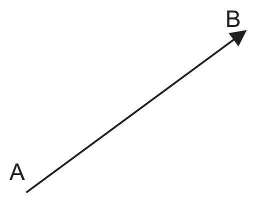


Figura 3.1: Segmento orientado - Fonte: Elaboração própria

Denomina-se segmento orientado AB, de origem A e extremidade B, aquele em que se estabelece um sentido de percurso de A para B. Geometricamente é indicado por uma seta, como mostra a figura . Designa-se por BA o mesmo segmento tomado no sentido oposto, como mostra a figura . Um segmento é dito nulo quando a origem coincide com a extremidade.

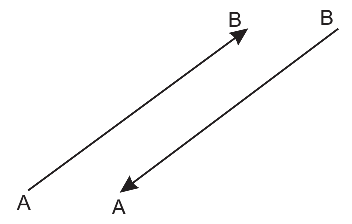


Figura 3.2: Segmentos com sentidos opostos - Fonte: Elaboração própria

3.2.2 Equipolência de Segmentos Orientados

Sejam AB e CD segmentos orientados não nulos. Dizemos que AB e CD são equipolentes (ou equivalentes), e escrevemos:

$$\mathsf{AB} = \mathsf{CD},$$

se eles têm o mesmo comprimento, a mesma direção (são paralelos ou colineares) e o mesmo sentido.

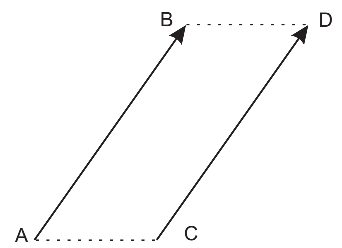


Figura 3.3: Segmentos orientados equipolentes - Fonte: Elaboração própria

Se AB e CD são segmentos paralelos e de mesmo comprimento,então AB e CD têm o mesmo sentido quando ABDC é um paralelogramo.

Observe que dois segmentos orientados AB e CD são chamados colineares se eles estiverem apoiados sobre a mesma reta. Tal reta é denominada reta suporte.

Com isto podemos então definir:

Diz-se que os segmentos orientados AB *e* CD *são equipolentes, e se escreve* $\mathsf{AB} = \mathsf{CD}$*, quando satisfazem as três propriedades*:

(a) têm o mesmo comprimento;

(b) são paralelos ou colineares;

(c) têm o mesmo sentido.

Propriedades da Relação de Equipolência.

A relação de equipolência goza das seguintes propriedades:

(a) reflexiva: $\mathsf{AB} = \mathsf{AB}$;

(b) simétrica: se $\mathsf{AB} = \mathsf{CD}$, então $\mathsf{CD} = \mathsf{AB}$;

(c) transitiva: se $\mathsf{AB} = \mathsf{CD}$ e $\mathsf{CD} = \mathsf{EF}$, então $\mathsf{AB} = \mathsf{EF}$

Seja AB um segmento orientado. Chama-se de vetor e representa-se por $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$, ao conjunto de todos os segmentos equipolentes a $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$. Pode-se usar também uma letra minúscula com uma flecha para representar um vetor $\overrightarrow{\mathsf{AB}} = \overrightarrow{v}$.

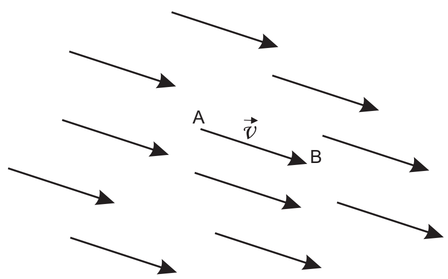


Figura 3.4: Representantes do vetor $\overrightarrow{v}$ - Fonte: Elaboração própria

Observe a diferença entre um segmento orientado e um vetor. Um segmento orientado é um segmento de reta direcionado, o qual é firmemente fixado e tem um ponto inicial e final bem definidos, enquanto um vetor representa uma infinidade de segmentos orientados equipolentes. Assim, um segmento determina um conjunto que é o vetor, e qualquer um destes representantes determina o mesmo vetor. Portanto, com origem em cada ponto do espaço, podemos visualizar um representante de um vetor.

3.2.3 Etmologia da Palavra Vetor

O termo vetor é oriundo do verbo latino **vehere** que significa transportado, levado. No caso específico da matemática, podemos dizer que um vetor é um transportador de três informações de uma grandeza vetorial: direção, sentido e magnitude, ou ainda, que um ponto A é transportado (pelo vetor) até um ponto B.

3.2.4 Igualdade de Vetores

Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são iguais, e indica-se por $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, se tiverem iguais o módulo, a direção e o sentido.

3.2.5 Vetor Nulo

Dado um ponto A do plano, o vetor $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$ determinam um único vetor, chamado vetor nulo ou vetor zero.

3.2.6 Oposto de um Vetor

Dado o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ (Figura 1.5) o vetor $\overrightarrow{BA}$ (Figura 1.5) mantém o comprimento e a direção de $\overrightarrow{v}$, mudando apenas o sentido, por isso é denominado oposto ou simétrico de $\overrightarrow{v}$ e indica-se por $-\overrightarrow{AB}$ ou $-\overrightarrow{v}$.

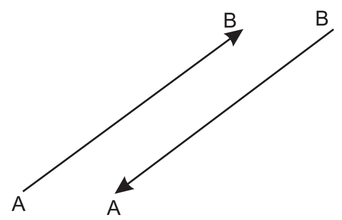


Figura 3.5: oposto de um vetor - Fonte: Elaboração própria

3.2.7 Módulo de um Vetor

O módulo de um vetor $\overrightarrow{u}$ é o comprimento de qualquer segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{u}$, o qual indicamos por $\|\overrightarrow{u}\|$.

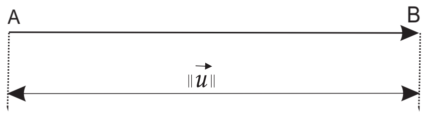


Figura 3.6: Módulo de um vetor - Fonte: Elaboração própria

O módulo de um vetor também é chamado de **"Norma"** do vetor.

3.2.8 Direção e Sentido

A direção (o sentido) de um vetor $\vec{u}$ é a direção (o sentido) de qualquer um de seus representantes.

3.2.9 Vetor Unitário

Dizemos que um vetor $\vec{u}$ é unitário quando seu módulo é igual a um: $\|\vec{u}\| = 1$.

3.2.10 Coordenadas de um Vetor

Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ *e* $B = (b_1, b_2)$*, os números* $b_1 - a_1$ *e* $b_2 - a_2$ *são as coordenadas do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$*, e se escreve* $\vec{v} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$. Note que se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, pela proposição citada, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

Sejam os pontos $X = (2, 4)$, $Y = (4, 2)$ e $Z = (5, 1)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{XY}$ e as coordenadas do ponto K tal que $\vec{v} = \overrightarrow{ZK}$.

Solução:

Temos $\vec{v} = \overrightarrow{XY} = (4 - 2, 2 - 4) = (2, -2)$.Além disso, se $K = (k_1, k_2)$, segue que:

$\vec{v} = \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZK} \Leftrightarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZK} \Leftrightarrow (2, -2) = (k_1 - 5, k_2 - 1) \Leftrightarrow 2 = k_1 – 5$
e $-2 = k_2 - 1 \Leftrightarrow k_1 = 2 + 5 = 7$ e $k_2 = -2 + 1 = -1$

Portanto; $K = (7, -1)$

3.3 Operações com Vetores

Definiremos duas operações com vetores através da sua representação gráfica: a adição de vetores e a multiplicação de vetores por escalar (números reais). Com grandezas vetoriais, o cálculo aritmético é acompanhado com a interpretação e representação gráfica, pois trabalhamos módulo, também com a direção e o sentido do vetor que representa a grandeza.

3.3.1 Adição de Vetores

No cotidiano encontramos situações que representam adição de vetores, quando várias pessoas, obviamente, todos agindo na mesma direção! Estão somando forças com a mesma direção e sentido.

A operação de adição de vetores associa a cada par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ um novo vetor, designado $\vec{w}$ que representa a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, definido por: *Sejam os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *dados por* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{BC}$*, respectivamente. A partir de um ponto A do plano, tracemos o segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$ *representante do vetor* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$*; a partir da extremidade B tracemos o segmento orientado* $\overrightarrow{BC}$ *representante do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$*. O vetor soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$*, é representado pelo segmento orientado* $\overrightarrow{AC}$.

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2)$ *vetores no plano expresso em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos* OXY*. Então,*

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Demonstração:

Sejam os pontos $P = (u_1, u_2)$e $Q = (v_1, v_2)$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, e seja $S = (w_1, w_2)$ o ponto tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$.

Dai,

$$(v_1 - 0, v_2 - 0) = (w_1 - u_1, w_2 - u_2).$$

Logo,

$$S = (w_1, w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

e portanto,

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.

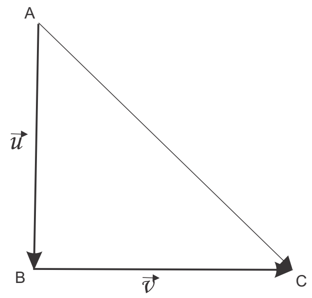


Figura 3.7: Representação da soma de dois vetores no plano: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ - Fonte: Elaboração própria

Propriedades da Adição de Vetores.

Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores do plano, valem as seguintes propriedades:

(a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (Comutatividade)

(b) $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$ (Associatividade)

(c) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$(Existência do elemento neutro)

O elemento neutro aditivo é o vetor nulo $\overrightarrow{0} = (0, 0)$

(d) $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ (Existência de inversos aditivos): para cada vetor $\overrightarrow{u}$, existe um único vetor, que designamos por $-\overrightarrow{u}$, denominado simétrico aditivo de $\overrightarrow{u}$, tal que a soma de ambos é o vetor nulo.

O inverso aditivo de $\overrightarrow{v} = (x, y)$ é o vetor $-\overrightarrow{v} = (-x, -y)$

Regra do Paralelogramo

Equivalentemente para a soma de dois vetores é sugerida, pela interpretação de vetores como forças, em Mecânica na física, é chamada regra do paralelogramo: *Sejam* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *representantes respectivos de* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *com o mesmo ponto inicial* A. *Sendo D o ponto de interseção das paralelas às representantes* $\overrightarrow{AB}$ *passando pelo ponto* B *e a* $\overrightarrow{AC}$ *passando por* C, *respectivamente. Obtemos o paralelogramo* $ABCD$ *(Figura 1.7) onde o vetor* $\overrightarrow{u}$ +

$\vec{v}$ *é representado pela diagonal (segmento orientado)* AD*, isto é,*
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ *ou* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

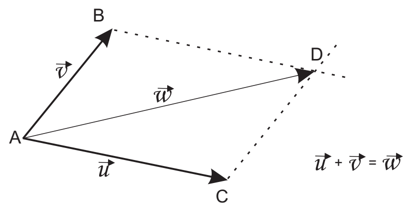


Figura 3.8: Regra do paralelogramo - Fonte: Elaboração própria

3.3.2 Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Dado um vetor $\vec{u} \neq 0$ *e um número real (escalar)* $\lambda \neq 0$*, então o produto do vetor* $\vec{u}$ *pelo escalar* λ *é o vetor* $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$ definido por:

- $\vec{v}$ tem a direção de $\vec{u}$;
- $\vec{v}$ tem o mesmo sentido de $\vec{u}$ se $\lambda > 0$e sentido oposto ao de $\vec{u}$ se $\lambda < 0$;
- $\vec{u}$ tem comprimento$|\lambda|$ vezes o comprimento de u, ou seja,$|\vec{v}| = |\lambda|\,|\vec{u}|$.

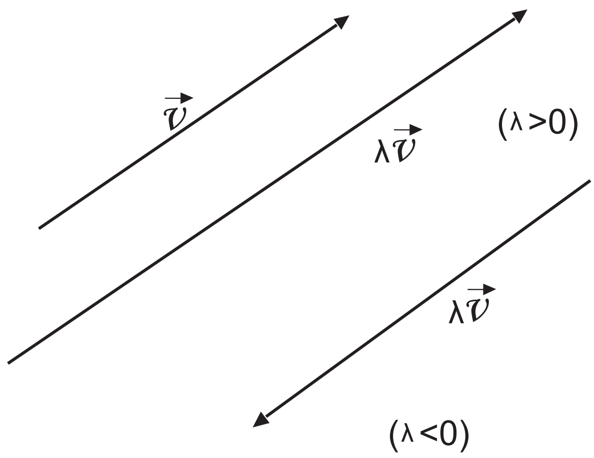


Figura 3.9: multiplicação de vetor por escalar - Fonte: Elaboração própria

Observações:

(a) O vetor nulo $\vec{0}$ é múltiplo de qualquer vetor $\vec{u}$, uma vez que $\vec{u} = 0\vec{u}$;

(b) Um vetor não nulo não é múltiplo do vetor nulo pois $\lambda \in \mathbb{R}$

(c) O vetor $(-1)\vec{u}$ tem o mesmo comprimento e direção que $\vec{u}$, mas sentido oposto, assim,$(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

(d) Dois vetores não-nulos são paralelos se, e somente se, um é múltiplo escalar do outro.

Propriedades da Multiplicação de Vetores

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, λ e μ números reais, temos:

(a) $\lambda(\vec{u}\ \vec{v}\ ) = (\lambda\ \vec{u})\vec{v}$ (Associatividade).

(b) $(\lambda+ \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\ \vec{v}$ (Distributiva em relação à adição de escalares).

(c) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}\ ) = \lambda\ \vec{u} + \lambda\ \vec{v}$ (Distributiva em relação à adição de vetores).

(d) $1\vec{v} = \vec{v}$

3.3.3 Diferença de Vetores

Do elemento simétrico da adição de vetores, definimos a diferença entre dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como sendo a soma do primeiro com o oposto do segundo vetor, ou seja,

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

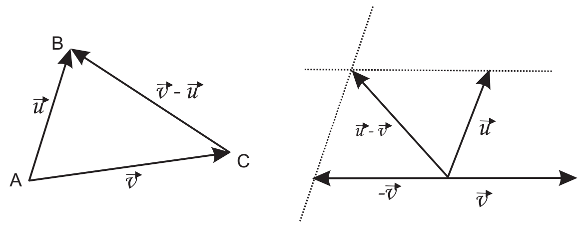


Figura 3.10: Diferença entre dois vetors - Fonte: Elaboração própria

Observação:

• As diagonais do paralelogramo construído sobre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representam o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ e o vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$.

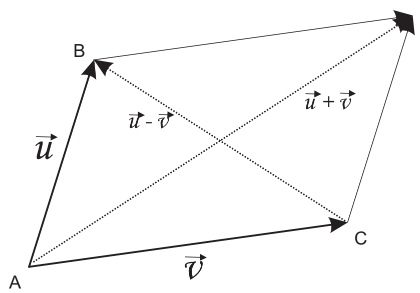


Figura 3.11: Diagonais do paralelogramo - Fonte:Elaboração própria

Dados os pontos $\mathsf{A} = (-2, 3), \mathsf{B} = (4, -2)$ e $\mathsf{C} = (-3, 4)$, determinar $\mathsf{D} = (x, y)$ de modo que $\overrightarrow{\mathsf{CD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathsf{AB}}$.

Solução

$\overrightarrow{\mathsf{CD}} = \mathsf{D}–\mathsf{C} = (x, y) - (-3, 4) = (x + 3, y - 4)$ e
$\overrightarrow{\mathsf{AB}} = \mathsf{B}–\mathsf{A} = (4, -2) - (-2, 3) = (6, -5)$, como
$\overrightarrow{\mathsf{CD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathsf{AB}}$, temos que:
$\overrightarrow{\mathsf{CD}} = \frac{1}{2}(6, -5)$
$\overrightarrow{\mathsf{CD}} = (3, \frac{-5}{2})$.

Capítulo 4

Produto Interno

Neste item faremos o estudo de uma operação interna envolvendo vetores e suas respectivas propriedades. A operação entre vetores que associa a cada par de vetores um número real é denominada produto interno ou produto escalar. O produto interno surgiu formalmente no livro Vector Analysis (1901) de Edwin B. Wilson. Mas a sua notação é devida ao físico Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903) que o considerava como produto direto. Defini-se o produto interno de duas maneiras. A primeira em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais e a outra, geometricamente.(SOUZA, 2015)

4.0.1 Ângulo Entre Dois Vetores

O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$,vetores não nulos do plano, supondo que estes vetores foram posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem, é o menor ângulo entre os segmentos AB e AC representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Denotamos por θ medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

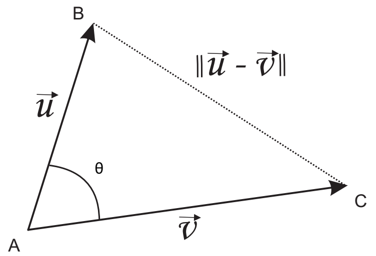


Figura 4.1: Ângulo entre dois vetores - Fonte: Elaboração própria

4.0.2 Norma do vetor

A norma ou módulo de um vetor $\vec{v}$ *é o número* $|\vec{v}|$ *dado pelo comprimento de um segmento orientado que representa* $\vec{v}$. Se $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ são dois pontos no plano, então a distância entre A e B é a norma ou módulo de um vetor $\vec{v}$, tais que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, como $AB = (c - a, d - b)$,tem-se que:

$$|\vec{v}| = d(A, B) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

Em relação à norma de um vetor temos as seguintes observações:

1) Se $O(0, 0)$ e $P(a, b)$, são tais que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, então $\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2) $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$. Alem disso $\vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| > 0$
3) $\|k.\vec{v}\| = |k| . \|\vec{v}\|$, $k \subset \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ um vetor.
4)Se a norma de $\vec{v}$ é igual a 1, isto é, $\|v\| = 1$, o vetor é chamado de unitário.
5) Se $v \neq 0$, $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário e chamado de normalizado do vetor $\vec{v}$, com igual direção e sentido de $\vec{v}$.

4.0.3 Produto interno

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2)$ *vetores do plano expressos em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais* OXY. *O produto interno usual de* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *é o número real dado por:* $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$. O produto interno de dois vetores é um número real (ou escalar) e não é um vetor, e é chamado também de produto escalar. Propriedades do produto escalar : Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores arbitrários do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

(i) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
(ii) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
(iii) $\lambda(\vec{u}.\vec{v}) = (\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v})$
(iv) $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 > 0$

Demonstração do item (i)

Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$, então, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_1x_2 + y_1y_2$, pela comutatividade temos que, $= x_2x_1 + y_2y_1 = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

Demonstração do item (iv)

Se $\overrightarrow{u} = (x, y)$, então,

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = xx + yy = x^2 + y^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 > 0$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ então $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$, onde $\overrightarrow{u} \neq 0 \overrightarrow{v} \neq 0$.

Demonstração:

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, é imediato o resultado da proposição. Se os vetores $\overrightarrow{u} \mathsf{e} \overrightarrow{v}$ são paralelos, então existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que :

$\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, com $\lambda > 0$ e $\theta = 0$ ou $\lambda < 0$ e $\theta = \pi$, em ambos os casos temos:

$\left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta = \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\lambda\overrightarrow{u}\right| = \lambda \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{u}\right| = \lambda \left|\overrightarrow{u}\right|^2$ (*)

E, além disso:

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\lambda\overrightarrow{u}$

$= \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$

$= \lambda \left|\overrightarrow{u}\right|^2$ (**)

De (*) e (**) conclui-se o resultado da proposição. Isto é,

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$

Caso geral em que $\overrightarrow{u} \mathbf{e} \overrightarrow{v}$ são não-nulos e não-paralelos:

Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1) \mathsf{e} \overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ dois vetores não nulos no plano e θ o ângulo entre eles, Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OAB, temos:

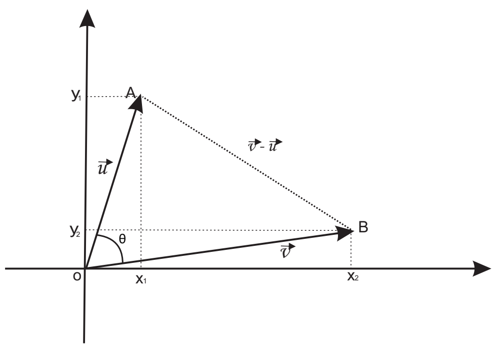


Figura 4.2: Produto interno - Fonte: Elaboração própria

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|\cos\theta$$

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ podemos reescrever a expressão acima como:
$\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left|\overrightarrow{v}\right|\cos\theta = \frac{1}{2}(\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right\|^2)$

Sabemos que:
$\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 = x_2^2 + y_2^2$ e $\left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right\|^2 = (x_1 + y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, dai

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|\cos\theta$$

Assim para determinar o ângulo entre os vetores não nulos, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ utiliza-se :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$$

Calcular o ângulo entre os vetores:
(a) $\overrightarrow{a} = (3,1)$ e $\overrightarrow{b} = (4,-2)$
Solução:
Precisamos calcular o produto escalar, e o módulo de cada um desses vetores, daí:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 3.4 + 1.(-2) = 10$$
$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{(3^2 + 1^2)} = \sqrt{10}$$
$$\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \text{ , segue que:}$$
$$.\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ , portanto } \theta = 45°$$

Desigualdade de Schwarz

Tomando o módulo em ambos os membros da identidade que define o produto interno e sabendo que $|\cos\theta| \leqslant 1$, para todo θ, vem:

$$|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leqslant |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|$$

Se $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é nulo, ambos os membros se anulam.
$\overrightarrow{u} \neq 0$ e $\overrightarrow{v} \neq 0$, então a desigualdade de Schwarz resulta imediatamente de

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|\cos\theta$$

Além disso, vale a igualdade se e somente se, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos um do outro, pois $|\cos\theta| = 1$ se e só se $\theta = 0^o$ ou π.
Prova. Inicialmente vamos provar que se $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ são vetores unitários, então

$$||\overrightarrow{w}.\overrightarrow{z}|| \leqslant 1.$$

Usando este resultado, faremos a prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz no caso geral. Para provarmos o caso particular, $|\overrightarrow{w}.\overrightarrow{z}| \leqslant 1$, observemos que,

$$||\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}||^2 = (\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}).(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w}.\overrightarrow{z} - \overrightarrow{z}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}.\overrightarrow{z} = ||\overrightarrow{w}||^2 - 2\overrightarrow{w}.\overrightarrow{z} + ||\overrightarrow{z}||^2$$

e que

$$|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}|^2 \geqslant 0.$$

Logo,

$$||\overrightarrow{w}||^2 - 2\overrightarrow{w}.\overrightarrow{z} + ||\overrightarrow{z}||^2 \geqslant 0 \text{ ou } 2\overrightarrow{w}.\overrightarrow{z} \leqslant ||\overrightarrow{w}||^2 + ||\overrightarrow{z}||^2.$$

Como $||\overrightarrow{w}||^2 = ||\overrightarrow{z}||^2 = 1$, temos

$$2\overrightarrow{w}.\overrightarrow{z} \leqslant 2 \text{ ou } \overrightarrow{w}.\overrightarrow{z} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Analogamente, partindo de

$$||\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}||^2 = ||\overrightarrow{w}||^2 + 2\overrightarrow{w}.\overrightarrow{z} + ||\overrightarrow{z}||^2 \geqslant 0.$$

obtemos

$$-1 \leqslant \vec{w}.\vec{z} \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos

$$\left||\vec{w}.\vec{z}|\right| \leqslant 1$$

Sejam, agora, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores unitários. Se $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$. $\frac{\vec{u}}{(|\vec{u}|)}$ *Desigualdade Triângular*
Essa proposição confirma a propriedade geométrica segundo a qual, em um triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados $|\vec{u}| + |\vec{v}|$ é maior do que o comprimento do terceiro lado $|\vec{u} + \vec{v}|$. A igualdade somente ocorre quando $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é zero ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos positivos um do outro.

Podemos mostrar a Desigualdade Triângular com o uso de vetores Para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano vale a desigualdade,

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Demonstração:

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2$

Como

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Temos que,

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 \leqslant |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}.\vec{v}| + |\vec{v}|^2 \leqslant |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}|.|\vec{v}| + |\vec{v}^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 \leqslant (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$

$|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$

O vetor $\vec{u}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v}$ e escrevemos : $\vec{u} \perp \vec{v}$, se : $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ ou $\theta = 90°$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Dois vetores são perpendiculares se e só se seu produto interno é zero: $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$. *Demonstração*: Se um dos dois vetores é nulo então $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Se os dois vetores são não nulos e θ ângulo entre os vetores não nulos, então
$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta = 0 \leftrightarrow \cos\theta = 0 \leftrightarrow \theta = 90°$ Se $\vec{u}$ = (a, b) é um vetor não nulo, então $\vec{v}$ = (-b, a) é um vetor perpendicular ao vetor $\vec{u}$. *Demonstração*: Temos que:
$\vec{u}.\vec{v} = (a, b).(-b, a) = a(-b) + ba = 0$
Logo, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

4.1 Componentes de um Vetor

Definimos componente de um vetor $\vec{u}$ sobre outro vetor $\vec{v}$, como o escalar $\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

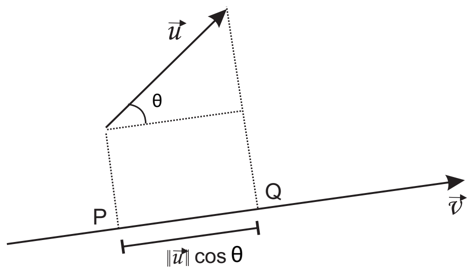


Figura 4.3: Componente do vetor - Fonte: Elaboração própria

$PQ = |\vec{u}|\cos\theta$.
Como $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta$

$$PQ = |\vec{u}|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

$\rightarrow \vec{u} = PQ = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

Sejam $\vec{u} = PQ$ *e* $\vec{v} = P'Q' \neq 0$ *vetores representados por segmentos orientados com a mesma origem. Seja* P' *o pé da perpendicular baixada do ponto* P *sobre a reta que contém os pontos* P' *e* Q'*. A projeção ortogonal do vetor* $\vec{u}$ *sobre o vetor* $\vec{v}$ *é o vetor* $\text{Proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = P'Q' = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.

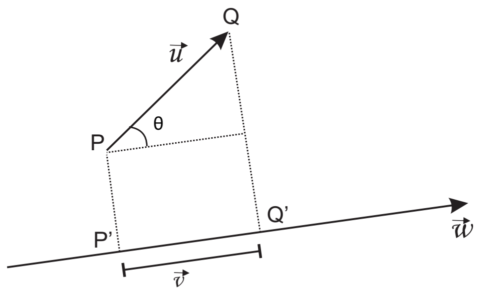


Figura 4.4: Projeção do vetor $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. - Fonte:Elaboração própria

$$\text{Temos } \vec{v} = \mathsf{P'Q'}\vec{v}_w, \text{ Daí}$$
$$\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\vec{v}_w$$
$$\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$
$$\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

logo $\mathsf{Proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.

Determine a projeção do $\vec{u}$ = (3, 2) na direção $\vec{v}$ = (5, 0) .

Solução:

Sabemos que $\vec{w} = \mathsf{Proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$,

e como

$\vec{v}.\vec{u} = 3.5 + 2.0 = 15$

e $\left|\vec{v}\right|^2 = \vec{v}.\vec{v} = 25 + 0 = 25$;

temos: $\vec{w} = \mathsf{Proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$

$\vec{w} = \mathsf{Proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{15}{25}\ (5, 0) = (3,\ 0)$.

Capítulo 5

Área de Paralelogramos

Nos livros didáticos atuais a parte que se refere a encontrar a área de uma região plana, em particular, do paralelogramo, é da forma a seguir(MUNIZ NETO, 2013):
A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah.
Prova: Sejam ABCD um paralelogramo de diagonais AC e BD, e E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta AB. Ademais, suponha, sem perda de generalidade, que $E \in AB$. É imediato verificar que os triângulos ADE e,

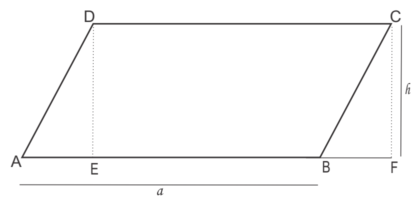


Figura 5.1: Paralelogramo - Fonte: Elaboração própria

BCF são congruentes pelo caso CH, de modo que $AE = BF$ e (pelo postulado 1.)

$$A(ADE) = A(BCF). \text{ Então temos}$$
$$A(ABCD) = A(ADE) + A(BEDC)$$
$$= A(BCF) + A(BEDC)$$
$$= A(CDEF).$$

Por outro lado, $CDEF$ é um retângulo de altura h e base a

$$\begin{aligned} EF &= EB + BF \\ &= EB + AE \\ &= AB \\ &= a. \end{aligned}$$

Portanto, $A(ABCD) = A(CDEF) = ah$

Vamos determinar a área do paralelogramo ABCD, representado na figura, considerando que a unidade das medidas indicadas é o centímetro.

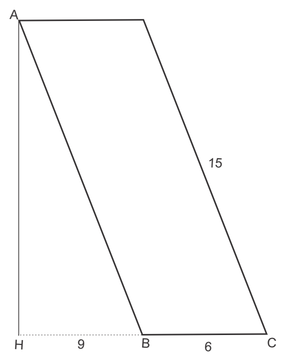


Figura 5.2: Paralelogramo - Fonte: Elaboração própria

Solução: note que a altura do paralelogramo é a perpendicular AH, traçada pelo vértice A à reta suporte do lado BC.

Como o triângulo AHB é retângulo, então pelo teorema de Pitágoras,

temos:$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 = 152 + 92 = 144 \Rightarrow AH = 12cm$.

Logo a área de ABCD é:

$A = BC.AH = 6.12$

$A = 72cm^2$

Vamos demonstrar agora através de vetores.

Considere o paralelogramo P, formado a partir dos vetores $\vec{u} = AB$ e $\vec{v} = AC$.

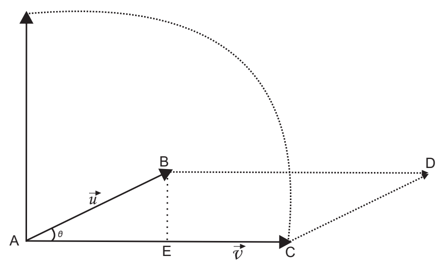


Figura 5.3: Área do Paralelogramo ABCD - Fonte:Elaboração própria

Seja θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A área de P é dada por: $A_p = |AC||EB|$, Note que $|EB| = |AB|\theta$ e portanto,$A_P = |AB||AC|\theta$. Temos que:

$$A_p = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\theta$$

$$\text{Como } \sin\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}^{\perp}}{\|\vec{v}^{\perp}\|\|\vec{u}\|}$$

$$A_p = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\frac{\vec{u}.\vec{v}^{\perp}}{\|\vec{v}^{\perp}\|\|\vec{u}\|}$$

$$A_p = \|\vec{v}\|\,\frac{\vec{u}.\vec{v}^{\perp}}{\|\vec{v}\|^{\perp}}$$

Onde $\vec{v}^{\perp}$ é o vetor perpendicular a $\vec{v}$.

Por outro lado vemos que:

$A_p = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\sin\theta$

sendo $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, temos:

$(A_p)^2 = (\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta)^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\,(1-\cos^2\theta)$

$=\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\cos^2\theta) = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta)^2$

$= \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - \langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2$.

Portanto,

$$A_p = \sqrt{\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - \langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2}$$

Propriedade:

$$(A_p)^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2 = \det\begin{pmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle & \|\vec{v}\|^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle & \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle & \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \end{pmatrix}$$

Se $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\vec{v} = (\alpha', \beta')$ em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY, então:

$\|\vec{u}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\|\vec{v}\|^2 = (\alpha')^2 + (\beta')^2$ e $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'$

e portanto,

$(A_p)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha')^2 + (\beta')^2 - (\alpha\alpha' + \beta\beta')$

$= \alpha^2(\alpha')^2 + \alpha^2\beta'^2 + \beta^2(\alpha')^2 + \beta^2(\beta')^2 - \alpha^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - \beta^2(\beta')^2$

$= \alpha^2\beta'^2 + \beta^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' = (\alpha\beta')^2 - 2(\alpha\beta')(\beta\alpha') + (\beta\alpha')^2$

$= (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 = \left[\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \right]^2$

Logo, a área do paralelogramo P, cujos lados adjacentes são representantes dos vetores $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\vec{v} = (\alpha', \beta')$, é igual ao módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente:

$$A_p = \left| \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \right|$$

Determine a área do paralelogramo $ABCD$, onde $A = (1,2), B = (3,1)$ e $C = (4,1)$.

Solução: Como $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (3,-1)$, temos:

$$\text{Área}(ABCD) = \left| \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right| = |-2+3| = 1.$$

Capítulo 6

Equação da Reta no Plano

Um dos objetivos da Geometria Analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos. $\overrightarrow{a}$ - Vetor que define a direção da reta L.

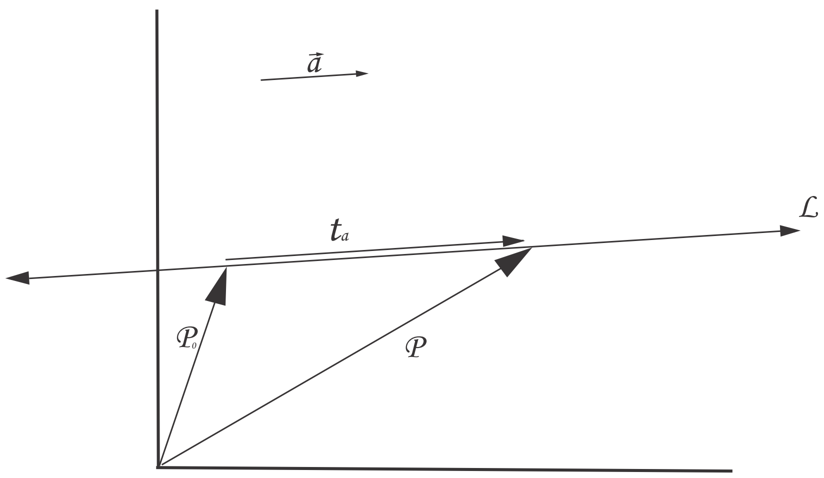


Figura 6.1: Fonte: Elaboração própria

$\overrightarrow{p}_0$ - vetor de referência, por cujo extremo passa a reta L.

$\overrightarrow{p}$ - qualquer vetor definido pela reta L.

Vemos que, $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P}_0 + \overrightarrow{t}_a$,

Formalmente:

$L = \{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t_a, t \in \mathbb{R}\}$

A reta q passa por $(2,1)$ com vetor diretor $(-1,1)$, é dada por:

$$L = \left\{ \ (2,1) + t(-1,1) \quad t \in \mathbb{R} \right.$$

Existe uma única reta que passa por dois pontos distintos (1º Postulado de Euclides). Veja na figura a representação da reta r que passa pelos dois pontos: $A(1,2)$ e $B(4,4)$ no plano cartesiano. Utilizaremos o produto interno e a condição de

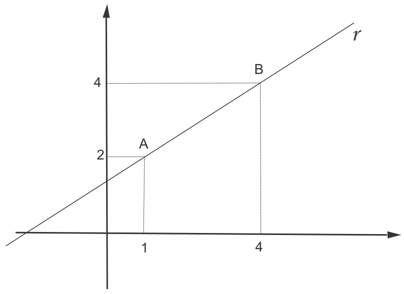


Figura 6.2: Fonte: Elaboração própria

perpendicularismo entre vetores para determinar a equação cartesiana da reta.
Um vetor $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ é normal ou perpendicular à uma reta s se $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos A, B $\in s$.

$$\begin{aligned}
P = (x,y) \in s &\iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n} \\
&\iff \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n} = 0 \\
&\iff (x - x_0, y - y_0).(a,b) = 0 \\
&\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) \\
&\iff ax + by - (ax_0 + by_0) = 0 \\
&\iff ax + by = ax_0 + by_0 \\
&\iff ax + by = c
\end{aligned}$$

onde $c = ax_0 + by_0$.

Portanto, a equação cartesiana da reta r é $r : ax + by = c$.

Determine as equações paramétricas da reta r que passam pelo ponto $A(-1,4)$ e é paralela ao vetor $v=(2,-1)$.

Solução:

$$r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=4-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto $A=(-2,3)$ e é normal ao vetor $n=(1,1)$.

Solução

Como n, deve-se ter $r: x+y=c$.

Como $A=(-2,3)\in r$,

$c=1(-2)+1(3)=-2+3=1$. Portanto, a equação reta é

$$r: x+y=1.$$

A equação da reta recebe várias denominações de acordo com a forma que ela é apresentada, mas o que é importante mesmo é a visualização geométrica que se tem a partir da equação apresentada e que partindo de entes geométricos pode-se escrever a equação da reta e vice-versa.

Chama-se, ainda, a atenção para outra forma de apresentação da reta, já conhecida como função afim e recebendo também o nome de equação reduzida.

Da equação cartesiana da reta, onde $(a,b)\perp r$ e $r: ax+by=c$, pode-se escrever:

$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$. se $b\neq 0$, fazendo $m=-\frac{a}{b}$ e $n=\frac{c}{b}$, temos

$y=mx+n$, observe que:

O número n, a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo OY.

O número m, chamado inclinação ou coeficiente angular da reta r, a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta.

De fato, se $x_0\neq x_1; y_0=mx_0+n$ e $y_1=mx_1+n$, então:

$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{(mx_1+n)-(mx_0+n)}{x_1-x_0}=\frac{m(x_1-x_0+n-n)}{x_1-x_0}=m$

Além disso, a função $y=mx+n$ é: crescente se $m>0$ e decrescente se $m<0$. Se θ é o ângulo que a reta $r: y=mx+n$ faz com o semieixo OX positivo, então, tg $\theta=m$; ou seja, o coeficiente angular de uma reta é numericamente igual à tangente do ângulo entre a reta e o sentido positivo do eixo das abscissas (isto ocorre quando as escalas dos eixos x e y são as mesmas). Para $=90°$, quando a reta é vertical, a tangente não é definida.

Analisando-se graficamente a inclinação da reta, observa-se que esta coincide com a definição da tangente do ângulo θ.

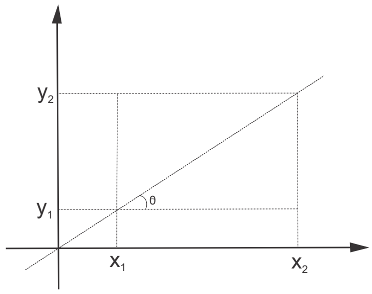


Figura 6.3: Fonte: Elaboração própria

$$tg\theta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 0$$
$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$$

Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $(2, 5)$ e tem coeficiente angular igual a 2.

Solução

Usando a equação ponto-coeficiente angular: $y – y_0 = m(x – x_0)$

tem-se:

$$y - 5 = 2(x - 2)$$
$$y - 5 = 2x - 4$$
$$y = 2x + 1.$$

Capítulo 7

Atividades

As atividades abrangem o assunto de vetores na resolução nas questões a serem aplicadas em sala de aula . Acreditamos que as atividades desse trabalho podem ser utilizadas pelos professores do Ensino Básico com o intuito de abordar o conteúdo de Vetores.

01.Sejam dados $A(-3,5), B(1,1)$ e $C(3,-1)$. Verifique se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos um do outro.

Solução:
$\overrightarrow{AB} = (4,-4) = 4(1,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (6,-6) = 6(1,-1)$ AC = 64 AB. Os vetores são múltiplos um do outro.

02. Os vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, formam um triângulo conforme a figura.Sendo:$\overrightarrow{u} = (1,3)$ e $\overrightarrow{v} = (3,-5)$, então $\overrightarrow{w}$ é igual a?

03. $ABCD$ é um quadrado de lado a. Qual é o módulo do vetor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$?

04. Seja $\overrightarrow{u} = (5,6)$, represente-o no plano cartesiano e determine o seu módulo. Em seguida determine o módulo do vetor $\overrightarrow{v}$ e represente-o, em cada caso:

a) $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$

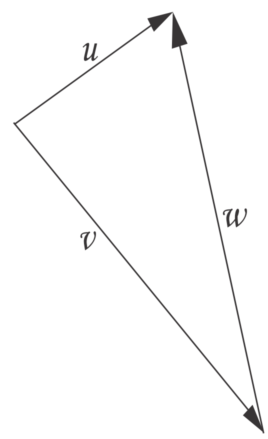


Figura 7.1: Fonte:Elaboração própria

b) $\overrightarrow{v} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$

c) $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$

05. O trabalho realizado por uma força

O produto escalar é uma importante ferramenta matemática para a Física, uma vez que inúmeras grandezas físicas são definidas com seu emprego, como o trabalho.

O trabalho realizado por uma força constante $\overrightarrow{F}$ ao longo de um determinado deslocamento $\overrightarrow{d}$ é definido como o produto escalar desta força pelo deslocamento efetuado pelo corpo no qual a força está aplicada.

Pode-se observar que a componente da força $\overrightarrow{f}$ que realiza o trabalho é Fx paralela ao deslocamento $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{d}$, conforme mostra a Figura . Logo$\left|\overrightarrow{Fx}\right| = \left|\overrightarrow{F}\right| \cos\theta$

onde θ é ângulo entre a força e o deslocamento.

A grandeza física trabalho, notada por W, é uma grandeza escalar e tem como unidade no Sistema Internacional (SI) o $joule$, notada por J. A expressão para o cálculo do trabalho W é, pela Definição:

$$W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d} \text{ ou } W = \left|\overrightarrow{F}\right|\left|\overrightarrow{d}\right| \cos\theta$$

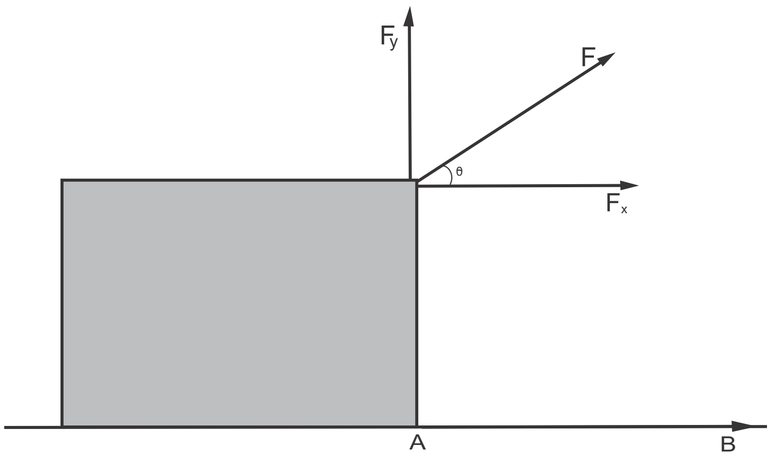


Figura 7.2: Componentes$\overrightarrow{F_x}$ e $\overrightarrow{F_y}$ da força $\overrightarrow{F}$ - Fonte:Elaboração própria

06. Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pontos distintos do plano. Usando vetores, determine o **ponto médio** do segmento AB.

Solução. Devemos determinar o ponto $M = (x, y)$ que divide o segmento AB em dois segmentos de igual comprimento, isto é,

$AM \equiv MB$, ou ainda, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Como $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$,

temos, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Logo,

$$(x - a_1, y - a_2) = \tfrac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$
$$\Longleftrightarrow x - a_1 = \tfrac{1}{2}(b_1 - a_1) \text{ e } y - a_2 = \tfrac{1}{2}(b_2 - a_2)$$
$$\Longleftrightarrow x = a_1 + \tfrac{1}{2}(b_1 - a_1) \text{ e } y = a_2 + \tfrac{1}{2}(b_2 - a_2)$$
$$\Longleftrightarrow x = \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1) \text{ e } y = \tfrac{1}{2}(a_2 + b_2).$$

Portanto, $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2} \right)$ é o ponto médio do segmento AB

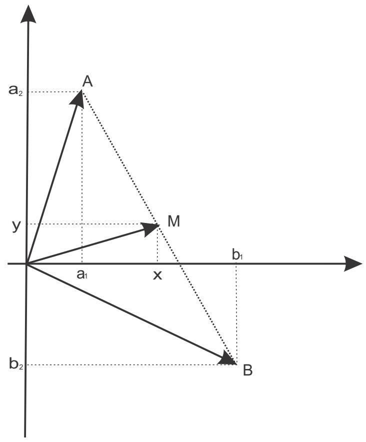


Figura 7.3: Ponto médio de AB - Fonte:Elaboração própria

07. A figura 7.4 mostra os seguintes vetores:

$\overrightarrow{a} = (4, 2m)i - (1, 5)j$,
$\overrightarrow{b} = (-1, 6m)i + (2, 9m)j$,
$\overrightarrow{c} = (-3, 7m)j$

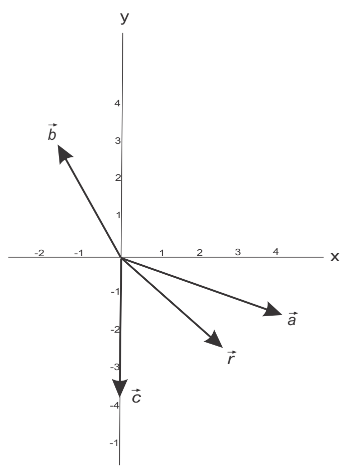


Figura 7.4: vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{r}$ - Fonte:Elaboração própria

Qual é o vetor soma $\overrightarrow{r}$ que também aparece na figura 7.4 ?

IDÉIA-CHAVE Podemos somar os três vetores somando sua componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultanters para obter o vetor soma $\overrightarrow{r}$:

Cálculos: No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\overrightarrow{r}$:

$r_x = a_x + b_x + c_x$

$= 4,2m - 1,6m + 0 = 2,6m$

Analogamente, no caso do eixo y:

$r_y = a_y + b_y + c_y$

$= -1,5 + 2,9m - 3,7m = -2,3m$

Podemos então combinar essas componentes de $\overrightarrow{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

$\overrightarrow{r} = (2,6m)i - (2,3m)j,$

onde $(2,6m)i$ é a componente vetorial de $\overrightarrow{r}$ em relação ao longo eixo do eixo x, e

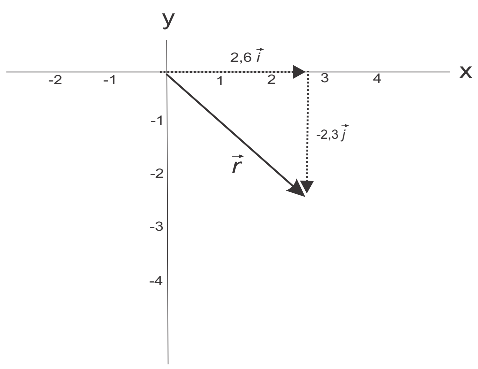


Figura 7.5: vetor $\overrightarrow{r} = 2,6\,\overrightarrow{i} - 2,3\,\overrightarrow{j}$ - Fonte:Elaboração própria

$-(2,3m)j$ é a componente vetorial de $\overrightarrow{r}$ em relação ao eixo y. A figura 7.5 mostra uma forma de obter o vetor $\overrightarrow{r}$ a partir dessas componentes. (Você pode imaginar outras formas?).

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\overrightarrow{r}$.De acordo com a Eq.3-6, o módulo é dado por

$r = \sqrt{(2,6m)^2 + (2,3m)^2} = 3,5m$

e o ângulo (medido em relação ao semi-eixo x positivo) é dado por

$\theta = \left(\frac{-2{,}3m}{2{,}6m}\right) = -41°$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

08. Aqui está um problema de soma vetorial que não pode ser resolvido diretamente em uma calculadora. Uma amiga se afasta de você em linha reta (vetor $\overrightarrow{a}$), muda de direçao, caminha novamente em linha reta (vetor $\overrightarrow{b}$) e pára. Que distância você deve caminhar em linha reta (vetor $\overrightarrow{c}$)para chegar ate ela?

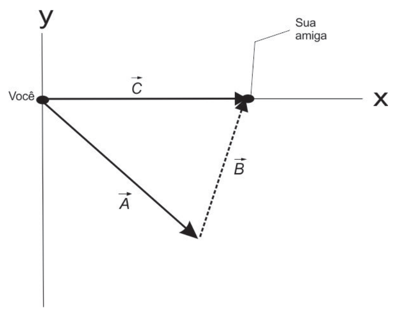


Figura 7.6: vetor $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ - Fonte:Elaboração própria

Os três vetores(que aparecem na figura 7.6) estão relacionados pela equação

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}(*)$$

o vetor $\overrightarrow{a}$ tem módulo de $22,0m$ e faz um ângulo de $-47°$ (sentido horário) com o semi-eixo x positivo. O vetor $\overrightarrow{b}$ tem módulo de $1,70m$ e faz um ângulo ϕ (no sentido anti-horário)com semi-eixo x positivo. Qual é o módulo de $\overrightarrow{c}$

IDÉIA-CHAVE Não podemos responder à pergunta somando vetorialmente $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ em uma calculadora, mesmo que ela seja capaz de executar uma instruçao como

[módulo de $\overrightarrow{a}\angle$ ângulo de $\overrightarrow{a}$]+[módulo de $\overrightarrow{b}\angle$ ângulo de $\overrightarrow{b}$]

porque nao conhecemos o valor do ângulo ϕ de $\overrightarrow{b}$ Entretanto, podemos expressar (*) em termos das componentes em relação ao eixo x e ao eixo y.

Cálculos: Escrevendo (*) em termos das componentes em relação ao eixo x, temos :

$$c_x = a_x + b_x$$

Expressando as componentes x de acordo com a parte referente a x da Equação $a_x = a\cos\theta$, e subtituindo os valores conhecidos obtemos,

$$\cos 0^\circ = 22\cos(-47^\circ) + 17\cos\phi.\ (**)$$

Esta equação não é suficiente para resolver o problema, já que não podemos calcular o valor de c sem conhecer ϕ.

vamos escrever (*) em termos das componentes em relação ao eixo y:

$$c_y = a_y + b_y$$

Expressando as componentes y de acordo com a parte referente a y da Equação $a_y = a\sin\theta$ e substituindo os valores conhecidos obtemos:

$$\sin 0^\circ = 22\sin(-47^\circ) + 17\sin\phi$$

o que nos dá

$$0 - 22\sin(-47^\circ) + 17\sin\phi.$$

Explicitando ϕ obtemos

$$\phi = \sin^{-1} - \tfrac{22\sin(-47^\circ)}{17} = 71,17^\circ$$

Substituindo este valor em (**),temos:

$$c = 20,5m$$

Observe a técnica usada para resolver o problema: Quando chegamos a um beco sem saída ao trabalhar com componentes x, usamos componentes y para determinar o valor de ϕ. Em seguida, voltamos a trabalhar com as componentes x para calcular o valor de c.

09. Calcule a área do triângulo de vértices $A = (4,2), B = (6,1)$ e $C = (3,2)$.

Solução. temos $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,0)$, logo,

$$\acute{A}rea(ABC) = \tfrac{1}{2}\left|\ \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}|-1| = \tfrac{1}{2}.$$

10. Seja $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ fixado. Dado um vetor $\overrightarrow{w}$, existe um único par ordenado $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ com $\overrightarrow{w_1} // \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2} \perp \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$; $\overrightarrow{w_1}$ se chama projeção de $\overrightarrow{w}$ na direção de $\overrightarrow{v}$(ou sobre $\overrightarrow{v}$), e se indica por $\mathsf{Proj}_{\overrightarrow{v}}^{\overrightarrow{w}}$.

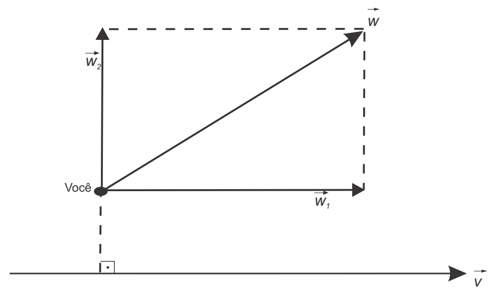


Figura 7.7: Fonte:Elaboração própria

Prove que

$$\mathsf{Proj}_{\overrightarrow{v}}^{\overrightarrow{w}} = \overrightarrow{w_1} = \left(\overrightarrow{w} \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{v} \|}\right) \frac{\overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{v} \|} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{v} \|^2} \overrightarrow{v}$$

Resolução

Como $\overrightarrow{w_1} // \overrightarrow{v}$, temos

$$\overrightarrow{w_1} = \lambda \overrightarrow{v} \qquad (\alpha)$$

donde $\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w_2}$. Multiplicando escalarmente por $\overrightarrow{v}$, obtemos $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \| \overrightarrow{v} \|^2 + \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \| \overrightarrow{v} \|^2$ (pois $\overrightarrow{w_2} \perp \overrightarrow{v}$) . Daí, $\lambda = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{v} \|^2}$. Substituindo em (α) resulta a tese.

11.Represente, através de um vetor, uma queda livre de $100m$ de um objeto.

12.Dados os vetores A e B determine graficamente $S = A + B$(figura 7.8) pela regra da Poligonal. Determine o módulo de S.

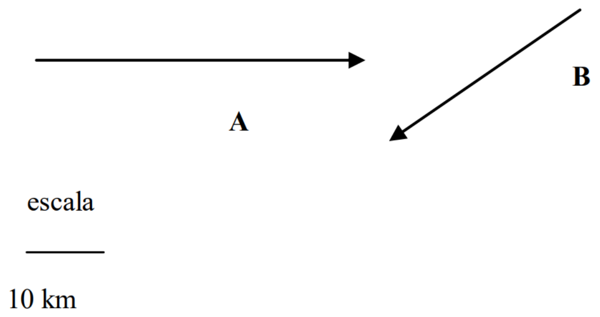


Figura 7.8: Fonte:Elaboração própria

13.Repita a operação vetorial da questão anterior ($S = A + B$) utilizando a regra do paralelogramo

14. Dados os vetores A e B(figura 7.9) determine graficamente $D = A - B$ pela regra da Poligonal Determine o módulo de D . Escolha a escala

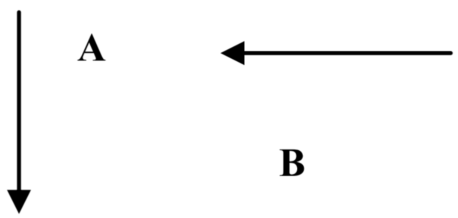


Figura 7.9: Fonte:Elaboração própria

15. Calcule o módulo do vetor resultante da soma dos vetores na figura 7.10, utilizando a Lei dos Cossenos. Dados: $X = 10$ e $Y = 10$

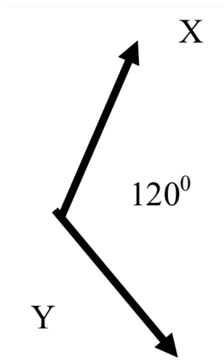
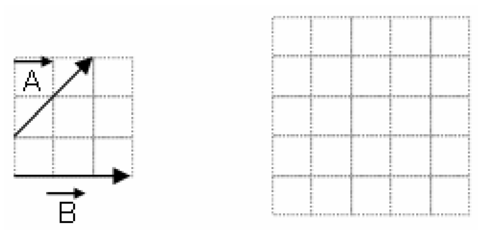


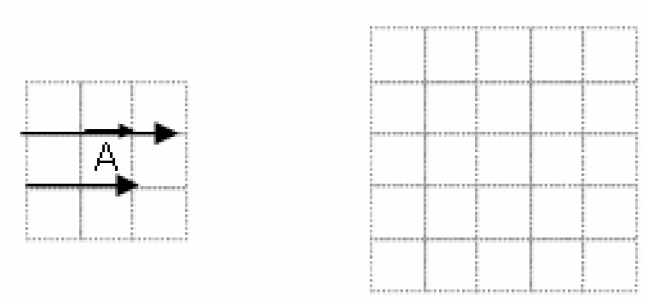
Figura 7.10: Fonte:Elaboração própria

16. Nos casos abaixo, represente graficamente o vetor diferença $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$



(a)

Figura 7.11: Fonte:Elaboração própria



(b)

Figura 7.12: Fonte:Elaboração própria

17.A figura 7.13 mostra, em escala, duas força $\vec{a}$ e $\vec{b}$ atuando num ponto material P.

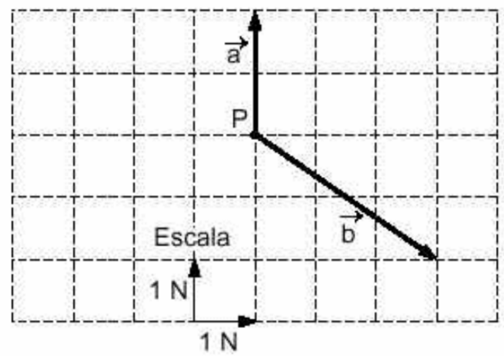


Figura 7.13: Fonte:Elaboração própria

a) Represente na figura 7.13 a força $\vec{R}$, resultante das forças $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e determine o valor de seu módulo em newtons.

b) Represente, na figura 7.13, o vetor $\vec{c}$, de tal modo que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

18.Uma pessoa atravessa uma piscina de 4,0m de largura, nadando com uma velocidade de módulo 4,0m/s em uma direção que faz um ângulo de 60 com a normal. Quantos décimos de segundos levará o nadador para alcançar a outra margem?

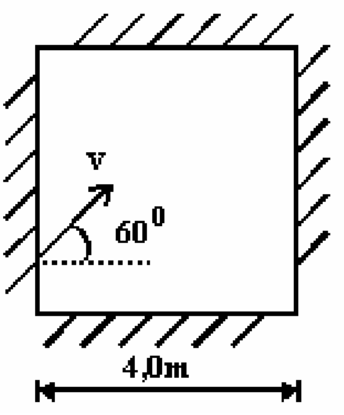


Figura 7.14: Fonte:Elaboração própria

19.A figura 7.15 representa, em escala, as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_1}$ que atuam sobre um objeto de massa $m = 1,0kg$. Determine o módulo da força resultante que atua sobre o objeto e o módulo da aceleração que a força resultante imprime ao objeto

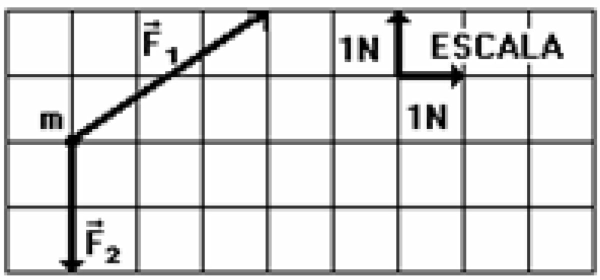


Figura 7.15: Fonte:Elaboração própria

20. Dois vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ possuem módulos iguais a $|\overrightarrow{a}| = 5u$ e $|\overrightarrow{b}| = 12u$ determine o módulo do vetor soma quando o ângulo θ entre eles for:

(a) 0

(b) 90

(c) 180

(d) 60

Considerações Finais

O material elaborado possibilita uma nova abordagem para pontos importantes da geometria analítica, como: condição de alinhamento de três pontos, equação da reta no plano. Em diversos momentos foi possível deixar claro que o uso de vetores possibilita outras maneiras, diferentes das utilizadas atualmente, para se pensar e resolver os problemas e que a construção geométrica é indispensável para dar significado às equações. Ressalta-se a importância de utilizar vetores paralelos e normais às retas, que possibilitam uma melhor compreensão das diversas formas de apresentação das retas e das posições relativas, no plano. Constatou-se, através das demonstrações e dos exemplos, que o conhecimento de vetores facilita cálculos e torna mais clara a visualização geométrica.

Abordamos o conceito de vetor através do conceito de equipolência de segmentos orientados.

Apresentamos duas operações fundamentais envolvendo vetores: a adição e a multiplicação de um vetor por um escalar, sem o sistema cartesiano ortogonal.

Introduzimos o estudo dos vetores na forma de pares ordenados com o uso de um sistema cartesiano ortogonal. Definimos as operações de adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar em termos das coordenadas dos vetores com suas respectivas propriedades.

Sabemos que o currículo básico no Ensino Médio é extenso, por isso a nossa proposta não é acrescentar um novo componente curricular aos livros didáticos de matemática do último ano da educação básica e sim de promover uma reflexão de como o professor de matemática pode contribuir com o ensino de vetores, para isto é importante um planejamento interdisciplinar. Alguns dos tópicos de matemática estudados pelos alunos no 3º ano do ensino médio podem ser vistos sob a ótica dos vetores:

Geometricamente, a distância de dois pontos na geometria analítica e o módulo de um número complexo é equivalente ao módulo de um vetor ;

Para determinar o argumento de um número complexo,, determinando o ângulo entre o vetor dado pela representação geométrica do número complexo e o vetor $\overrightarrow{u} = (1; 0)$.

Portanto, a aplicação e o uso de vetores nas três séries é de grande valia para o ensino-apredizagem dos conteúdos matemáticos do ensino médio.

1) Represente, através de um vetor, uma queda livre de 100m de um objeto

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 1999.

[2] BOLDRINI, J.L. [et al.]. Álgebra Linear. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. 3a ed.

[3] CABRAL, Raquel Montezuma Pinheiro. Introdução do estudo de vetores no ensino médio : um ganho significativo para o estudo da geometria analítica / Raquel Montezuma Pinheiro Cabral. – 2014.

[4] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[5] DELGADO,Jorge. Geometria analítica/Jorge Delgado, Katia Frensel, Lhaylla Crissaff - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[6] DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; DEGENSZAJN, David Mauro. Matemática: volume único: manual do professor. São Paulo: Atual, 1997.

[7] LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1977. v.2.

[8] LINDOSO, José de Ribamar Penha. Uma nova abordagem da geometria no ensino médio usando vetores/ José de Ribamar Penha Lindoso.- São Luis: UFMA, 2013.

[9] MEC.Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. v. 2.

[10] MUNIZ NETO,Antonio Caminha. Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana/Caminha Muniz Neto. 2ª ed - Rio de Janeiro: SBM,2013.

[11] WALKER,Jearl. Fundamentos de Física/Jearl Walker, Halliday, Hesnick - 8ª ed.São Paulo: LTC, 2007. v.1

[12] OLIVEIRA, Fernando Pereira de. Vetores: uma abordagem para o ensino médio/ Fernando Pereira de Oliveira. - São Luís, 2014.

[13] PAIVA,Manoel. Matemática. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2009. v. 3

[14] PROFMAT,Geometria Analítica. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[15] SOUZA, Patricio do Carmo de. Uma investigação por meio de uma sequência didática com o software geogebra para o estudo de vetores no ensino médio/ Patricio do Carmo de Souza.- Campos dos Goytacazes: UENF, 2015.

[16] REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. Geometria Analítica. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.