Universidade Federal do Piauí – UFPI
Centro de Ciências da Natureza – CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

AS PERSPECTIVAS DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA À LUZ DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Danilo Leonardo Vieira da Rocha

Teresina - Piauí

Agosto/2019

Universidade Federal do Piauí – UFPI
Centro de Ciências da Natureza – CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

AS PERSPECTIVAS DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA À LUZ DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Danilo Leonardo Vieira da Rocha

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto

Teresina - Piauí
Agosto/2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN
Serviço de Processamento Técnico

R672p Rocha, Danilo Leonardo Vieira da.
As perspectivas do ensino-aprendizagem da análise combinatória à luz da Base Nacional Comum Curricular / Danilo Leonardo Vieira da Rocha. – 2021.
66 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Teresina, 2019.
“Orientador: Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto. ”

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Matemática - Aprendizagem. 3. Análise Combinatória 4. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). I. Matos Neto, Manoel Vieira. II. Titulo.

CDD 510.7

Bibliotecária (o): Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

Universidade Federal do Piauí – UFPI
Centro de Ciências da Natureza – CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

AS PERSPECTIVAS DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA À LUZ DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Danilo Leonardo Vieira da Rocha

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Trabalho Aprovado. Teresina - Piauí, 30 de Agosto de 2019:

Prof. Dr. Manoel Vieira de M. Neto
Universidade Federal do Piauí – UFPI
(Orientador)

Prof. Dr. Cleidinaldo de A. Souza
Universidade Federal do Piauí – UFPI
(Membro Interno)

Prof. Me. Fernando da Costa Gomes
Instituto Federal do Maranhão – IFMA
(Membro Externo)

Teresina - Piauí
Agosto/2019

Dedico este trabalho à minha Vovó Gonçala (in memorian), a quem eu carinhosamente chamava de Mamãe, à minha tia Mirian (in memorian), e ao meu Pequeno, grande amor, Túlio Aquiles.

Agradecimentos

Como não haveria de ser diferente, agradeço em primeiro lugar ao meu soberano Deus, por ser o meu sustentáculo até aqui (e sempre!) e ter me proporcionado a dádiva de poder concluir este curso. Obrigado, Meu Onipotente Deus!

Agradeço à minha família, nas pessoas de minha amada vó materna, Gonçala Maria (in memorian), que ao longo de toda a sua jornada se fez um modelo invejável de resiliência, força e a linda lição de que o perdoar o desagravo de um próximo para consigo e não guardar rancor por isto é algo libertador e faz com que sejamos um ser humano melhor; de minha dedicada mãe Maria Lúcia, que ao longo destes 38 anos de caminhada, me educou moralmente de forma explêndida, me mostrando sempre que o caminho digno é cheio de obstáculos e que os mesmos dever ser superados de forma honesta e com muito trabalho; de minha amorosa tia Mirian (in memorian) que, mesmo lutando contra um severa enfermidade, nunca deixou desfalecer em nenhum momento o seu amor por mim, me ensinando de forma prática que o amor é o verdadeiro elâ vital para o crescimento e fortalecimento do espírito de um ser humano; de minha tia Maria do Socorro (in memorian), que fez questão de me fazer ser uma criança alegre e feliz, mesmo ante a todas as dificuldades por nós enfrentada; de minha esposa, Geovana e de meu tão amado filho, Túlio Aquiles, que é a personificação do amor - você está me dando a oportunidade de experimentar o sabor do amor de um pai para com um filho. A todos vocês, minha eterna gratidão.

Dedico este parágrafo a você, Geovana, em pleno e devido agradecimento pela travessia dos últimos três anos. Por você ser a dedicada mãe do Túlio, nossa dádiva divina, e por todas as lições (muitas delas duras e complexas) as quais aprendi e venho aprendendo a teu lado. Foram/são lições necessárias para a vida em sua completude e que obviamente, junto com o que já tinha em bagagem, me trará em algum momento o equilíbrio e a experiência para seguirmos adiante na missão que Deus nos deu, que é criarmos da melhor forma possível o nosso amado filho. Aprendizagem significativa, eu diria. Não menos importante, peço aqui também as minhas devidas desculpas pelos erros e falhas que cometi nesta caminhada.

Agora, quero agradecer aos meus queridos amigos. Antes de tudo, gostaria de dizer, do fundo do coração que, eu os amo. Aqui, a ordem não existe ordem de importância ou afeto. Para tentar não falhar na lembrança de todos, aqui os separei por núcleos, onde alguns deles figuram em mais de um núcleo.

A você, Victor Nunes, Preto de um coração gigantesco, com quem tenho a alegria de partilhar uma amizade verdadeira e sincera, por ter confiado em minha pessoa e nunca ter abandonado o barco.

No mesmo sentido, agradeço a Márcio Jennys, o galego mais marrento de que já tive notícia.

Laércio Carvalho, meu preto, você é parte essencial e institucional desta conquista e de minha vida. Coração do tamanho do mundo. Meu muito obrigado pelo trato, cuidado e incentivo para com minha pessoa, principalmente nos períodos mais difíceis que atravessei nestes últimos três anos.

A Thárcio Adriano, Flaviano Lima e Franciano Lima, Gerson de Assis (a sua benção papai!). Estes são os amigos de infância. Neste núcleo agregarei aqui Warner Torres (Kana Loka), Ivan Silva, Rivonildo Côrrea, Williames Magalhães, Ronny Barbosa.

Aos meus amados amigos e irmãos Jesuíno Martins, Rhuiago Mendes, Deilson Barbosa, Fabrízio Caldas e Salvino Coimbra. Aqui também incluo Aurine Carvalho. Este núcleo do Condomínio Sollar é fora de série.

Aos Esparrentos, em especial, Glauber Coimbra, Taffarel Morais, Emanuel Monteiro, Raimundão de Jesus e Samir Buzar.

A Alixandre Coelho, o mais novo chegado, e a Jonas Noronha, pela amizade promissora que haverá de se fortalecer com tempo e pela confiança depositada em minha pessoa.

À minha turma de PROFMAT, inigualável. Em especial, Willians Lima, Daniel Ribeiro, Renilson Carvalho, Francisco Esteves, Márcio Costa e Marcelo Alessandro.

A todos os mestres que dos quais fui aluno e contribuíram de forma decisiva para a minha chegada até aqui. Em especial aos da Universidade Federal do Piauí – UFPI, nas pessoas do Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto, Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira, Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes, Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima, Prof. Me. Mario Gomes dos Santos e o saudoso Prof. Me. João Benício de Melo Neto. Meu muitíssimo obrigado a todos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto, pela paciência, pela disponibilidade, ajuda, esmero e credibilidade em minha pessoa depositada. Meu muito obrigado por tudo.

Ao Instituto Federal do Maranhão, minha atual casa de trabalho, extensivo à CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente para a minha chegada até aqui e a concretização deste trabalho.

"Antes de julgar a minha vida ou o meu caráter...
Calce os meus sapatos e percorra o caminho que eu percorri,
viva as minhas tristezas, as minhas dúvidas e as minhas alegrias.
Percorra os anos que percorri, tropece onde eu tropecei
e levante-se assim como eu fiz."
(Clarice Lispector)

Resumo

O presente trabalho objetiva identificar e agrupar as perspectivas do ensino-aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Básico ao que preconiza a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que atualmente norteia o ensino brasileiro. Correlato a isto, objetiva apresentar o apontamento de alguns dos obstáculos mais comuns enfrentados por alunos e professores na busca da aprendizagem significativa deste conteúdo no Ensino Básico. Em seguida, apresenta a demonstração dos dois principais resultados deste conteúdo no Ensino Básico: o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo (também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem). Por fim, apresenta a solução e a análise das questões dos últimos três anos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), um dos indicadores avaliativos da Educação Básica brasileira, relacionadas diretamente a este tema.

Palavras-chaves: Ensino-Aprendizagem, Análise Combinatória, Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Abstract

The present work aims to identify and group the teaching-learning perspectives of Combinatorial Analysis in Basic Education according to the Common National Curriculum Base (BNCC), a document that currently guides Brazilian education. Correlated to this, it aims to present an indication of some of the most common obstacles faced by students and teachers in the pursuit of meaningful learning of this content in Basic Education. Then, it presents the demonstration of the two main results of this content in Basic Education: the Additive Principle and the Multiplicative Principle (also known as the Fundamental Principle of Counting). Finally, it presents the solution and analysis of the questions of the last three years of the National Secondary Education Examination (ENEM), one of the evaluative indicators of brazilian Basic Education, directly related to this theme.

Key-words: Teaching-Learning, Combinatorial Analysis, Common National Curriculum Base (BNCC).

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EFI	Ensino Fundamental Séries Iniciais
EFF	Ensino Fundamental Séries Finais
EM	Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PNDL	Plano Nacional do Livro Didático
PNE	Plano Nacional da Educação
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
Pisa	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

Sumário

Introdução

A evolução da sistematização e organização dos conteúdos de Matemática do currículo do Ensino Básico, bem como a discussão em torno disto, trouxe à tona uma série de desafios que os professores de Matemática devem enfrentar no sentido de proporcionar a almejada aprendizagem significativa para os alunos.

Um dos temas que provoca uma gama de discussões neste sentido, é sem dúvida, a Análise Combinatória. Por muitos professores é considerado o tema mais desafiador a ser ensinado, seja por sua enorme abrangência, seja pela grande necessidade de concentração, atenção e interpretação na resolução dos problemas por ela abordados ou ainda, seja pela abordagem do tema feito pelos livros didáticos disponibilizados. Isto, além de causar desconforto no docente, ainda pode gerar efeitos danosos à aprendizagem do discente. Em suas pesquisas, Gonçalves (2014) evidenciou que há uma grande quantidade de docentes que, quando tem a possibilidade da escolha, preferem por não ministrar este conteúdo em suas aulas por insegurança, por acusar falta de preparo e/ou domínio do conteúdo.

Paralelo aos desafios trazidos pela Análise Combinatória e enfrentados por professores, educadores e alunos, é necessário verificar e discutir como os documentos norteadores da Educação Brasileira propõem a condução do ensino deste conteúdo bem como os objetivos e metas a serem alcançadas com a apropriação das técnicas e ferramentas que o contéudo pode ofertar. Neste âmbito, observamos a a criação de um novo documento norteador, de caráter normativo, do conjunto de aprendizagens essenciais que o indivíduo deverá desenvolver ao longo da vida escolar: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Este documento veio substituir os conhecidos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e deverá entrar em vigor até o final deste ano.

Retornando à discussão das dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, no tocante ao domínio deste conteúdo em nível básico, é imprescindível a observação de que boa parte dos material didático disponibilizado aos professores e alunos não fazem jus textual ao desafio do ensino deste conteúdo. Em termos mais claros: há a carência de rigor e clareza textuais por parte dos livros didáticos e apostilas na apresentação deste conteúdo aos professores e alunos do Ensino Básico.

No sentido de dialogar e refletir sobre estas temáticas em respeito ao processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, estruturamos este trabalho em cinco capítulos. No primeiro, tratamos da apresentação breve do que seja a Análise Combinatória e ao que ela se destina e, da apresentação da Base Nacional Comum Curricular. No segundo, colecionamos os objetos de conhecimento, habilidades e objetivos apontados pela BNCC relacionados à Análise Combinatória ao longo de todo o Ensino Básico. No terceiro, discorremos brevemente sobre três dos principais desafios mais apontados no processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória. No quarto, apresentamos uma demonstração dos dois principais resultados da Análise Combinatória no Ensino Básico: o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo bem como de alguns resultados correlatos bastante. Finalmente, no quinto apresentamos uma proposta de solução de oito problemas colecionados das últimas três edições do Exame Nacional do Ensino Médio juntamente com um comentário em respeito à estrutura destes problemas.

1 A Análise Combinatória e os Documentos Orientadores da Educação Brasileira

1.1 Uma breve Contextualização da Análise Combinatória

De acordo com Batanero (1996), a Análise Combinatória é definida como a parte da Matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfazem certos critérios específicos, e podem se apresentar por meio de situações que solicitem a contagem de elementos ou a enumeração desses elementos, além de situações que promovem a elaboração de uma solução ótima, ou a classificação de elementos de um determinado conjunto e situações que requeiram questionamentos sobre a existência ou não de elementos que satisfazem a mesma.

Consonante a esta definição, Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), que além da analise de estruturas e relações discretas[1]a Análise Combinatória objetiva também demonstrar a existência (para além da contagem e enumeração) destes subconjuntos finito[2] que cumprem estes critérios específicos.

Para o leitor interessado na história do desenvolvimento da Análise Combinatória, sugerimos Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991).

1.2 O Que é e o Que Objetiva a BNCC

No que concerne à sua definição, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é

> “ documento de caráter normativo que define, explicita e direciona o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais e significativas que a totalidade discente deve desenvolver e adquirir no decorrer de sua vida escolar enquanto discente da Educação Básica [3], de modo a que os direitos de aprendizagem e desenvolvimento sejam assegurados, em consonância com o que requer e orienta o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, conforme definição feita pelo §1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n° 9.394 de 20 de Dezembro de 1996) e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva como estabelece as Diretrizes Nacionais da Educação Básica.”

[1] De maneira intuitiva, uma estrutura discreta é aquela formada por objetos distintos e desconexos entre si.

[2] Para definição deste objeto matemático, veja o Capítulo 4 deste trabalho.

[3] Vale ressaltar que a Educação Básica brasileira é, segundo a BNCC (p. 24), dividida em três grandes etapas: Ensino Infantil, Ensino Fundamental (que, por sua vez é subdividido em Séries Iniciais – do 1º ao 5º Ano – e Séries Finais – do 6º ao 9º Ano) e Ensino Médio.

Em termos gerais, a BNCC objetiva servir de referência para a elaboração dos currículos dos sistemas e redes escolares brasileiras, tanto públicos como privados, com a finalidade de superar a fragmentação das políticas educacionais (que comumente são discrepantes nas esferas governamentais) e ser a equalizadora da qualidade da educação.

Como instrumentos para o alcance destes objetivos, este documento faz a forte utilização dos conceitos de **Competência** (que é classificada em *Geral* e *Específica*) e **Habilidade**. Segundo a BNCC Competência é definida como sendo

> "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), Habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho."

No sentido do conceito dado, as Habilidades (este conceito será visto com maiores detalhes no próximo capítulo) representam as aprendizagens essenciais a serem garantidas a fim de assegurar o desenvolvimento das Competências Específicas de cada uma das áreas de conhecimento.

As **Competências Gerais da Educação Básica** são aquelas que o aluno deve desenvolver ao longo do processo educacional, de forma a assegurar como resultado de sua aprendizagem uma formação humana sustentada numa construção social justa, igualitária, democrática e inclusiva. Cada uma das dez Competências Gerais dialoga diretamente com as **Competências Específicas**(também no próximo capítulo, será apresentado todas as Competências Específicas relativas ao Ensino-Aprendizagem da Análise Combinatória) de cada Área de Conhecimento[4], isto feito de modo peculiar a cada uma delas. Como exemplificação para um bom entendimento: as Competências Específicas da Área de Conhecimento *Matemática*, uma vez desenvolvidas, contribuirão e/ou levarão o aluno a desenvolver substancialmente cada uma das Competências Gerais.

Além da sua devida importância, será arrolado em seguida, as Competências Gerais da Educação Básica, para fins de norteamento para posteriormente serem apresentadas as contribuições das Habilidades e Competências Específicas relativas à Análise Combinatória no capítulo seguinte. Deste modo, segundo a BNCC, tais Competências são:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva;

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade,

[4] A divisão do Ensino Básico por Área de Conhecimento, aparece apenas nas etapas Fundamental e Médio.

para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural;

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo;

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva;

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade,autonomia, consciência crítica e responsabilidade;

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta;

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compre endendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas;

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza;

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Após o norteamento dos objetivos a serem alcançados de uma forma geral, passaremos a tratar dos mecanismos específicos para este fim no que tange o conteúdo de Análise Combinatória.

2 As Competências e Habilidades Desenvolvidas no Ensino da Análise Combinatória

Uma vez sabido o que é a Base Nacional Comum Curricular, seus objetivos e seus instrumentos, neste capítulo estreitaremos a relação desta com o objeto de estudo da Análise Combinatória, esta vinda com toda a sua carga de dificuldades e problemáticas na relação ensino-aprendizagem (tema do próximo capítulo), divididas em duas partes: a primeira, com o Ensino Fundamental[1], por sua vez subdividida em Séries Iniciais e Séries Finais; a segunda, com o Ensino Médio.

2.1 A Estruturação da Área de Conhecimento Matemática no Ensino Fundamental e sua Relação com a Análise Combinatória

De acordo com a BNCC (pp. 27 e 28), o Ensino Fundamental é organizado em cinco Áreas de Conhecimento[2], dentre as quais, a Matemática é uma delas e em si mesma, é um Componente Curricular. Cada Área de Conhecimento, estabelece as suas Competências Específicas de Área que, como já mencionado anteriormente, refletem como as Competências Gerais se expressam nesta área. Além disto, possibilitam a articulação horizontal entre as áreas, que é a transversalização dos componentes curriculares estudados, bem como a articulação vertical entre as séries que é a possibilidade do aluno progredir nas séries ao longo dos nove anos previstos para esta etapa da Educação.

No tocante à aprendizagem significativa em Matemática, a BNCC norteia-se pelo pressuposto de que aquela é intimamente relacionada à absorção dos significados dos objetos matemáticos, sem obliterar suas aplicações onde estes significados são resultantes das conexões que os discentes firmam entre eles e as demais Áreas de Conhecimento, seu cotidiano e os diferentes temas matemáticos.

O Ensino Fundamental tem como principal meta o desenvolvimento do chamado **letramento matemático** que, segundo o Pisa, é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e

[1] Uma vez que não há menção explicíta a nenhum conteúdo (objeto de conhecimento) relativa à Análise Combinatória no Ensino Infantil, iniciaremos a discussão no Ensino Fundamental.

[2] As Áreas do Conhecimento nas quais o Ensino Fundamental está organizado são Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso.

reflexivos posssam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias, capacidade esta que assegura aos discentes o reconhecimento de que os conhecimentos matemáticos são necessários para a compreensão e a atuação no mundo e percepção do caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e além disso, pode ser prazeroso.

Neste sentido, a BNCC considera que os diversos campos que compoem a Matemática, trazem consigo um conjunto de idéias fundamentais articuladas entre si, as quais são equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Estas, são de crucial importância para o desenvolvimento do pensamento matemático e do processo matemático do discente e devem naturalmente se converter, na escola, em objetos de conhecimento.

No que tange esta disciplina, a BNCC está orientada no pressuposto de que a aprendizagem significativa desta está intimamente ligada à compreensão, isto é, na absorção de significado dos objetos de conhecimento da Matemática, sem pôr em detrimento suas aplicações.

Assim, em consonância com as Competências Gerais da Educação, a (Área de Conhecimento) Matemática fôra sistematizada em oito Competências Específicas, as quais segundo a BNCC, são as seguintes[3]

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho;

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo;

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes;

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados;

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados);

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza;

[3] Necessariamente, não há uma relação explícita de cada Competência Específica com a Análise Combinatória.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Segundo a BNCC (p. 29), as habilidades refletem e expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares. Relativo ao questionamento de quando se iniciar o ensino de Análise Combinatória, várias pesquisas evidenciam que problemas de Combinatória devem ser iniciados desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Segundo Rocha (2011), por exemplo, a exploração e a elaboração de variadas estratégias de resolução pelos alunos para problemas combinatórios, como o levantamento de possibilidades, a busca sistemática das mesmas e a escolha de alternativas válidas, são atividades que devem fazer parte de todo o Ensino Fundamental.

Consonante a esta perspectiva, a BNCC traz a abordagem da Análise Combinatória de forma explícita, a partir da primeira série do Ensino Fundamental. Para o desenvolvimento e alcance do letramento, pensamento e processamento matemáticos, são propostas cinco Unidades Temáticas[4], as quais definem um arranjo dos objetos de conhecimento (conteúdos) adequado às especificidades dos diferentes componentes curriculares interrelacionadas, que orientam a formulação de Habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, sob diferentes ênfases. São elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

Quanto a isto, a BNCC destaca que

> Na definição das habilidades, a progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas. Os problemas de contagem[a], por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. Outro exemplo é o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica.
>
> [a] Grifo nosso.

[4] Cada Unidade Temática pode contemplar um leque maior ou menor de Objetos de Conhecimento, não havendo um número fixo destes para cada uma daquelas. O mesmo se aplica quanto ao número de Habilidades para cada Objeto de Conhecimento.

Segundo a BNCC (p. 268), a Unidade Temática Números tem como objetivo principal o desenvolvimento do pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos, de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades, onde neste processo há a necessidade do desenvolvimento de idéias relacionadas à ordem e equivalência. A expectativa, dentro do âmbito da Análise Combinatória, é de que os discentes resolvam problemas com números naturais, argumentando e justificando os procedimentos utilizados para a resolução e além disso, avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados.

De acordo com a BNCC (pp. 270 e 271) a Unidade Temática Álgebra, tem como objetivo o desenvolvimento do chamado pensamento algébrico, que é imprescindível para a utilização de modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas, bem como de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros simbólos (os chamados símbolos algébricos). Ainda relativo a isto, um outro aspecto a ser considerado a esta Unidade Temática, é que a aprendizagem desta pode contribuir sensivelmente para o desenvolvimento do pensamento computacional dos discentes, uma vez que eles precisarão ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como por exemplo, transformar uma situação dada em linguagem matemática e vice-versa.

A Unidade Temática Geometria por sua vez, envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.

A Unidade Temática Grandezas e Medidas propõe o estudo das medidas e das relações entre elas e favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento e contribui ainda, de maneira fundamental, para a consolidação e ampliação do conceito de número, aplicação de noções geométricas e a estruturação do pensamento algébrico.

Finalmente, a Unidade Temática Probabilidade e Estatística tem como objetivos principais o estudo da incerteza e o tratamento de dados, onde a evolução destes se faz com o aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada diretamente aos problemas de contagem.

2.1.1 As Habilidades Relacionadas à Análise Combinátoria para o Ensino Fundamental – Séries Iniciais

Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. No entanto, é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada. A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores (BNCC, p. 276).

Nas tabelas seguintes, apresentamos a relação das Habilidades relacionadas à Análise Combinatória. As mesmas são diluídas entre as Unidades Temáticas Números, Álgebra e Grandezas e Medidas. Curiosamente, não há a abordagem direta ou indireta[5] à Análise Combinatória na Unidade Temática Probabilidade e Estatística (que no Ensino Médio é intimamente ligada a esta).

Tabela 1 – Objetos de Conhecimento e Habilidades Relacionadas à Análise Combinatória para a Unidade Temática Números.

SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
1º Ano	Contagem de rotina; Contagem ascendente e descendente; Reconhecimento de números no contexto diário: indicação de quantidades, indicação de ordem ou indicação de código para a organização de informações.	(EF01MA01) Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação.
	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação	(EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA03) Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar tem mais, tem menos ou tem a mesma quantidade.
	Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100).	(EF01MA04) Contar a quantidade de objetos de coleções até 100 unidades e apresentar o resultado por registros verbais e simbólicos, em situações de seu interesse, como jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros.
	Construção de fatos básicos da adição.	(EF01MA06) Construir fatos básicos da adição e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.

[5] Apesar da Habilidade (EF05MA22) que é 'apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não' sugira a enumeração de todos os elementos que constituem o espaço amostral de um experimento aleatório, acreditamos que o objetivo da aquisição desta habilidade seja qualitativo, ou seja, saber quem são os elementos do espaço amostral e não quantos são estes elementos.

	Composição e decomposição de números.	(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo.
	Problemas envolvendo diferentes significados de adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar e retirar)	(EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
2º Ano	Leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até três ordens pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e papel do zero)	(EF02MA01) Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero); (EF02MA02) Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades); (EF02MA03) Comparar quantidades de objetos de dois conjuntos, por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois, entre outros), para indicar tem mais, tem menos ou tem a mesma quantidade, indicando, quando for o caso, quantos a mais e quantos a menos.
3º Ano	Leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até quatro ordens	(EF03MA01) Ler, escrever e comparar números naturais de até a ordem de unidade de milhar, estabelecendo relações entre os registros numéricos e em língua materna;
	Composição e decomposição de números naturais	(EF03MA02) Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens;
	Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação	(EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito.
	Procedimentos de cálculo (mental e escrito) com números naturais: adição e subtração	(EF03MA05) Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito, inclusive os convencionais, para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais.
	Problemas envolvendo significados da adição e subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades	(EF03MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo o cálculo mental.

	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida	(EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.
4º Ano	Sistema de numeração decimal: leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de até cinco ordens	(EF04MA01) Ler, escrever e ordenar números naturais até a ordem de dezenas de milhar
	Composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adições e multiplicações por potências de 10	(EF04MA02) Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo.
	Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais	(EF04MA03) Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado; (EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.
	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas de Contagem[6]	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

[6] Grifo nosso.

5º Ano	Problemas de contagem[7] do tipo: se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?	(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Tabela 2 – Objetos de Conhecimento e Habilidades Relacionados à Análise Combinatória para a Unidade Temática Álgebra).

SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
1º Ano	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figura, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e explicitação de um padrão (ou regularidade) os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º Ano	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA10 Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º Ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	Relação de igualdade	(EF03MA11) Compreender a idéia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4º Ano	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

2.1.2 As Habilidades Relacionadas à Análise Combinátoria para o Ensino Fundamental – Séries Finais

No que tange o desenvolvimento das habilidades conjecturadas para o Ensino Fundamental - Anos Finais, é essencial que se leve em consideração todas as experiências

[7] Grifo nosso.

Tabela 3 – Objetos de Conhecimento e Habilidades relacionados à Análise Combinatória para a Unidade Temática Grandezas e Medidas.

SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
4º Ano	Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.

e conhecimentos matemáticos tanto vivenciados como adquiridos pelos discentes, oportunizando situações nos quais eles possas fazer observações sistêmicas da realidade que o cerca e a partir daí, partir para o desenvolvimento de conceitos mais complexos.

De acordo com a BNCC,

> “Da mesma forma que na fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.”

Tabela 4 – Objetos de Conhecimento e Habilidades Relacionados à Análise Combinatória para a Unidade Temática Números.

SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
6º Ano	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural; Números e divisores de um número natural; Números primos e compostos	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par); (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos é múltiplo de, é divisor de, é fator de, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000; (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
7º Ano	Múltiplos e divisores de um número natural	(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
8º Ano	O princípio multiplicativo da contagem	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

Tabela 5 – Objetos de Conhecimento e Habilidades Relacionados à Análise Combinatória para a Unidade Temática Álgebra.

SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
8º Ano	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequeência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmos por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes

Tabela 6 – Objetos de Conhecimento e Habilidades relacionados à Análise Combinatória para a Unidade Temática Probabilidade e Estatística.

SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
8º Ano	Princípio Fundamental da Contagem	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

2.1.3 As Habilidades Relacionadas à Análise Combinátoria para o Ensino Médio

Após o longo processo de estruturação e sistematização da aprendizagem de conteúdos significativos por parte do indivíduo no Ensino Fundamental, chegamos no Ensino Médio. Para a área Matemática e suas Tecnologias, a BNCC traz como proposta a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas na etapa anterior. Como mecanismo para este fim, há a tentativa da exploração do conteúdo de forma mais transversalizada com os conhecimentos já explorados na etapa anterior juntamente com o contexto sócio-cultural vivido pelo aluno, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.

De acordo com a BNCC,

> "a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos."

Ainda segundo a BNCC, como mecanismos para que se tenha êxito no alcance destes propósitos na área Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem desenvolver (e fazer uso das) habilidades relativas aos **processos de investigação**, de **construção de modelos** e de **resolução de problemas**. Neste âmbito, as Competências Específicas para a área Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio são as seguintes:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral;

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas

sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática;

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente;

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas;

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

No Ensino Médio, a Anáise Combinatória (em seus rudimentos básicos) passa a ser o Objeto de Conhecimento concentrado na Unidade Temática Probabilidade e Estatística e não mais diluído nas outras Unidades Temáticas como no Ensino Fundamental. As Habilidades a serem desenvolvidas pelo aluno quanto à aprendizagem da Análise Combinatória estão relacionadas abaixo:

- **(EM13MAQT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore;
- **(EM13MAQT310)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade.

3 Os Desafios do Processo Ensino-Aprendizagem da Análise Combinatória

Ao longo do tempo, é notório o grande desafio encontrado pelos professores de Matemática do Ensino Básico para a superação do enorme leque de dificuldades existentes no caminho da aprendizagem significativa da Análise Combinatória. Neste âmbito, podemos destacar três delas:

- A etapa do Ensino Básico em que o aluno teve (ou irá ter) o primeiro contato com a Análise Combinatória: a grande maioria dos alunos somente tiveram (ou irão ter) contato com este conteúdo no Ensino Médio;
- Há uma quantidade considerável de professores do Ensino Básico que não tiveram uma preparação adequada em Análise Combinatória em sua formação acadêmica;
- A existência de professores que lecionam Matemática do Ensino Fundamental não tem formação específica em Matemática e por conseguinte, não tiveram a possibilidade de se apropriar dos conteúdos, ferramentas e técnicas para o ensino de Análise Combinatória de forma apropriada.

Relativo ao primeiro problema apresentado, Gonçalves (2014) aponta que 89% dos alunos só irão ter o primeiro contato com a Análise Combinatória apenas no Ensino Médio (sendo 69% no segundo ano). Ainda segundo ela, o ensino da Análise Combinatória ter início apenas na metade da última etapa do Ensino Básico desfavorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos.

Levando-se em consideração a extrema importância das operações combinatórias (mais precisamente do raciocínio combinatório) para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, se faz necessário que o mesmo tenha o seu primeiro contato com esse conteúdo logo nos primeiros anos da escola básica, para que o mesmo desenvolva familiaridade com problemas de contagem, no sentido da descrição dos casos possíveis das situações-problemas por ele analisados, e da enumeração destes casos através de uma representação por ele mesmo escolhida, sem um método específico inicialmente, de modo que o indivíduo se aproprie de uma sistematização gradativa para a resolução da maior diversidade de problemas possível, objetivando uma posterior formalização no Ensino Médio.

Gonçalves (2014), afirma que enquanto a sociedade espera que os alunos, ao término de cada etapa de seus estudos tenham desenvolvido a capacidade de analisar e propor soluções para problemas de forma prática e rápida, não é isto que se observa ao se deparar com uma educação voltada para a memorização de fórmulas e ensino de algoritmos - uma educação matemática voltada para a resolução de questões sem aplicabilidade e sem significado, o que impossibilita ao aluno um real aprendizado. Ela afirma que

> essa separação evidente entre teoria e prática, entre ensino e aprendizado, muita das vezes se dá devido à falta de preparo da equipe docente e pedagógica, devido à falta de atualização profissional e com isso, a educação se torna algo degastado e obsoleto, onde se faz necessária a busca de um novo paradigma[...] (Goncalves (2014), p. 12).

Relativo às duas outras dificuldades apresentadas, observa-se o entrave encontrado pelo professor do Ensino Básico quanto a abordagem do conteúdo de Análise Combinatória em sala de aula. Uma vez sem o preparo adequado na sua formação acadêmica, os professores são compelidos a seguir o roteiro sugerido pelos livros didáticos disponíveis em suas escolas os quais por sua vez tentam modelar as diversas formas de contagem, induzindo tanto professores quanto alunos a acreditar que todo problema da Análise Combinatória se reduz ao trabalho de se determinar a que tipo de agrupamento este problema se encaixa – combinação, arranjo ou permutação – e aplicar a fórmula correspondente ao problema em desfavor da progressão natural que se deve ter quanto ao raciocíno combinatório.

Em sua dissertação de mestrado, Rocha (2011) aponta que elementos da formação acadêmica do professor podem interferir com os conteúdos que ele irá ministrar e por conseguinte, nas escolhas das práticas para ensinar estes conteúdos. Ou seja, o modo como o professor tenha sido apresentado à Análise Combinatória e o modo como ele tenha absorvido este conteúdo pode ser um fator decisivo quanto à prática docente no ensino deste. Ainda neste âmbito, Rocha ainda aponta que há a necessidade de um maior tempo na formação dos professores de Matemática, na qual sejam discutidos a natureza dos conhecimentos matemáticos, seus aspectos históricos e as aplicações na sociedade. Em suma,

> é preciso entender sobre a natureza do conteúdo matemático em questão no presente estudo, no caso a Combinatória. Além disso, é necessário compreender as particularidades de seu ensino e aprendizagem nos diferentes níveis de escolaridade e as pesquisas desenvolvidas em relação a esse conteúdo (ROCHA, p. 34).

Ainda segundo Gonçalves (2014), é salutar também ressaltar que, não há um único caminho correto para o ensino de Análise Combinatória – o que há é a necessidade urgente do aprimoramento das técnicas pedagógicas para que se tenha a possibilidade do alcance de mudanças notáveis no modo como o aluno aprende, para que seja percebida a real construção do conhecimento feito pelo mesmo, aprendendo a Matemática de uma forma contextualizada e significativa, desenvolvendo um raciocínio lógico-dedutivo que será útil para a resolução dos mais diversos problemas que irão surgir ao longo da vida.

Para tal, a abordagem dita *construtivista*[1], esta voltada para o que se chama hoje de resolução de problemas, idéia que induz o aluno a construir seu próprio conhecimento, onde o professor assume o papel de mediador e sistematizador do conhecimento efetivo e da aprendizagem significativa. Neste ponto, retomamos a discussão da formação do professor e do domínio do mesmo relativo ao conteúdo a ser ministrado – ao se trabalhar com a proposta de Resolução de Problemas, várias serão as propostas de resolução de uma mesma questão que irão surgir e assim, caso o professor não tenha um domínio de conteúdo consistente, o mesmo poderá vir a ficar inseguro, onde tal insegurança poderá vir a se tornar um empecilho e prejudicar o sucesso do viés metodológico utilizado.

Ainda neste sentido, Rocha (2011) também aponta como um fator importante para uma prática pedagógica exitôsa no âmbito da Análise Combinatória a experiência e experimentação do docente. Segundo ela, é necessária a experimentação do docente com o consequente desenvolvimento de habilidades no sentido de propor situações diferenciadas no intuito de construção de conceitos e, para além disto, ter a exata consciência de qual será a situação melhor indicada para cada momento, ante cada dificuldade apresentada.

Há diversos outros aspectos a serem considerados na problematização apresentada neste breve capítulo. Para uma discussão mais aprofundada, recomendamos a leitura de Borba (2015),

[1] Para maiores detalhes consulte Goncalves (2014).

4 Uma Demonstração dos Principios Básicos de Contagem

Neste capítulo apresentamos, a título de conhecimento e enriquecimento de conteúdo, a demonstração dos Princípio Aditivo e Multiplicativo, que são os dois pilares da Análise Combinatória básica. As definições e os resultados obtidos neste capítulo foram extraídos de Muniz Neto (2012); Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2016); Morgado e Carvalho (2019) e Lima (2016).

Para o que se segue, dado $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $I_n = \{i \in N; 1 \leq i \leq n\}$ dos números naturais de 1 a n. Assim, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$ e assim por diante.

Definição 1. Um conjunto $A \neq \varnothing$ é dito *finito* quando existe uma bijeção $f : I_n \longrightarrow A$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Assim, colocando $a_j = f(j)$, com $j \in \{1, \ldots, n\}$ pode-se escrever $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Diz-se que n é o **número de elementos** de A e é denotado por $\#A = n$ ou $|A| = n$.

Teorema 2. *(Princípio Bijetivo) Se A ou B são conjuntos finitos e não vazios, então $\#A = \#B$ se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \longrightarrow B$.*

Demonstração. Suponhamos que $\#A = \#B = n$. Pela definição, existem as bijeções $g : I_n \longrightarrow A$ e $h : I_n \longrightarrow B$. Ora, $g^{-1} : I_n \longrightarrow A$ também é bijeção e ainda, $f = h \circ g^{-1}$ também é bijeção, com $f : A \longrightarrow B$. Reciprocamente, suponhamos agora que $\#A = n$ e exista uma bijeção $f : A \longrightarrow B$. Por definição, existe uma bijeção $g : I_n \longrightarrow A$. Obviamente, $g \circ f : I_n \longrightarrow B$ também é bijeção. Logo, $\#B = n$. $\square$

Lema 3. *(Princípio Aditivo) Se A e B são finitos e disjuntos, com $\#A = m$ e $\#B = n$, então existe uma bijeção $f : I_{(m+n)} \longrightarrow (A \cup B)$. Em outras palavras, se $(A \cap B) = \varnothing$, então*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B. \tag{4.1}$$

Demonstração. Por hipótese, existem bijeções $g : I_m \longrightarrow A$ e $h : I_n \longrightarrow B$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Supondo $m \leq n$, definamos a função $f : I_{(m+n)} \rightarrow (A \cup B)$, que para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq m \leq m + n$, faz corresponder o elemento $c_i = f(i)$ da seguinte forma

$$f(i) = \begin{cases} g(i), & se \quad 1 \leq i \leq m \\ h(i), & se \quad m < i \leq m + n. \end{cases}$$

Provemos que f assim definida é uma bijeção. Para tanto, veja que:

1. f **é injetiva.** De fato, tomando $i, j \in \mathbb{N}$, tais que $1 \leq i < j \leq m$, segue que, $f(i) = g(i) \neq g(j) = f(j)$, pois g é bijeção. Se tivermos $1 \leq i < m < j \leq m+n$, então $f(i) = g(i) \neq h(j) = f(j)$. Finalmente, se $m < i < j \leq m+n$, então $f(i) = h(i) \neq h(j) = f(j)$, pois h é bijeção;

2. f **é sobrejetiva.** De fato, tomando $c \in (A \cup B)$, temos que ou $c \in A$ ou $c \in B$ pois $A \cap B = \varnothing$. No primeiro caso, existe $i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq m$, tal que $g(i) = c$, pois g é bijeção e daí $f(i) = g(i) = c$, pela definição de f. Caso contrário, se $c \in B$, então existe $i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq n \leq m+n$, tal que $c = h(i)$, pois $h : I_n \longrightarrow B$ é bijeção e daí $f(i) = h(i) = c$.

Assim, $f : I_{(m+n)} \longrightarrow (A \cup B)$ é bijeção e portanto,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

□

Corolário 4. *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos e dois a dois disjuntos, então*

$$\#\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\#A_j\Big).$$

Demonstração. A prova será feita utilizando o Princípio da Indução Finita[1]. O caso $n = 1$ é de imediata verificação e o caso $n = 2$ é o lema anterior. Suponhamos que a afirmação seja válida para os $n-1$ primeiros números naturais. Segue então que

$$\begin{aligned}
\#\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) &= \#\Big[\Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\Big) \cup A_n\Big] \\
&= \#\Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\Big) + \#A_n \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \Big(\#A_j\Big) + \#A_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \#\Big(A_j\Big),
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade (de cima para baixo) é válida pelo lema anterior e a terceira é validada pela hipótese de indução. Assim, pelo Princípio da Indução Finita, a proposição acima é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Corolário 5. *Se A é um conjunto finito e $B \subset A$, então*

$$\#A = \#B + \#(A - B).$$

Demonstração. Observe que, se $B \subset A$, então o conjunto $B \cap (A - B) = \varnothing$ e ainda, $A = B \cup (A - B)$. O resultado segue por aplicação direta do Princípio Aditivo. □

[1] Para mais informações sobre este resultado, consulte Lima (2016).

Corolário 6. *(Princípio da Inclusão-Exclusão) Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Demonstração. Primeiramente, observe que

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \tag{4.2}$$

e

$$A \cup B = B \cap (A - B), \tag{4.3}$$

onde as duas uniões acima são disjuntas e, portanto, pelo Princípio Aditivo, segue que

$$\#A = \#(A - B) + \#(A \cap B) \tag{4.4}$$

e ainda

$$\#(A \cup B) = \#B + \#(A - B) \tag{4.5}$$

donde combinando 4.4 e 4.5 obtemos o resultado desejado.[2] □

Definição 7. Dados os conjuntos A e B e os elementos $a \in A$ e $b \in B$, definimos o *par ordenado* (a, b) como sendo

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}.$$

Definição 8. Dados os conjuntos não-vazios A e B, o *produto cartesiano* entre os conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, isto é,

$$A \times B := \{(a, b); a \in A \quad \text{e} \quad b \in B\}.$$

Teorema 9. *Sejam A e B dois conjuntos, com $a, c \in A$ e $b, d \in B$. Então, $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.*

Demonstração. A recíproca é óbvia. Suponhamos então que $(a, b) = (c, d)$. Pela definição, segue que $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$. Por conseguinte

1. $a \in \{c, \{c, d\}\}$, o que nos diz que $a = c$, pois $a \neq \{c, d\}$;

2. $\{a, b\} \in \{c, \{c, d\}\}$, o que nos diz que $\{a, b\} = \{c, d\}$, pois $\{a, b\} \neq c$.

Finalmente, como já temos $a = c$, logo só poderemos ter $c = d$.

□

[2] Este resultado é geralmente apresentado ao aluno no nono ano do Ensino Fundamental e/ou primeira Série do Ensino Médio. Em alguns livros didáticos, aparecem demonstrações similares a esta que foi apresentada aqui porém, sem a prévia e importantíssima justificativa (ou sequer alusão) ao Princípio Aditivo.

Teorema 10. *Sejam $A, B_1, \ldots, B_n$ conjuntos não-vazios. É válido que,*

$$A \times \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n}(A \times B_j).$$

Ademais, se $B_1, \ldots, B_n$ forem dois a dois disjuntos, a união do segundo membro também o é.

Demonstração. Tomemos inicialmente $x \in A \times \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)$, ou seja, $x = (a, b)$, com $a \in A$ e $b \in \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, o que implica que $b \in B_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Logo, $x = (a, b) \in A \times B_j$, e portanto $x \in \bigcup_{j=1}^{n}(A \times B_j)$. Assim, provamos que

$$A \times \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n}(A \times B_j).$$

Suponhamos agora que $x \in \bigcup_{j=1}^{n}(A \times B_j)$. Então $x = (a, b) \in A \times B_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Como $b \in B_j$, temos $b \in \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, assim,

$$x = (a, b) \in A \times \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

e portanto a inclusão contrária está demonstrada. Para o que falta, suponhamos que

$$(A \times B_i) \cap (A \times B_j) \neq \emptyset,$$

ou seja, que exista pelo menos um par ordenado (a, b) tal que

$$(A \times B_i) \cap (A \times B_j) = \{(a, b)\} \quad \textit{com} \quad i \neq j.$$

Ora, isto nos diz que $B_i \cap B_j = \{b\}$, o que contraria o fato de que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. □

Lema 11. *(Princípio Multiplicativo)*[3] *Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então*

$$\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$$

Mais geralmente, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos e não vazios, então

$$\#(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\#A_j\right).$$

[3] Este resultado também é conhecido como **Princípio Fundamental da Contagem**.

Demonstração. Coloquemos

$$B = \{y_1, \ldots, y_n\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{y_j\}.$$

Da proposição anterior, segue que

$$A \times B = A \times \Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \Big) = \bigcup_{j=1}^{n} \Big(A \times B_j \Big) = \bigcup_{j=1}^{n} \Big(A \times \{y_j\} \Big),$$

que é uma reunião disjunta. Logo, pelo Corolário 4, segue que

$$\# \bigcup_{j=1}^{n} \Big(A \times \{y_j\} \Big) = \sum_{j=1}^{n} \# \Big(A \times \{y_j\} \Big).$$

Finalmente, perceba que a função $f : A \longrightarrow A \times \{y_j\}$ dada por $f(x) = (x, y_j)$ é uma bijeção (com inversa $g : A \times \{y_j\} \longrightarrow A$ dada por $g(x, y_j) = x$), e portanto, $\#A = \# \Big(A \times \{y_j\} \Big)$ para $1 \leq j \leq n$. Daí,

$$\# \Big(A \times B \Big) = \sum_{j=1}^{n} \#A = (\#A) \cdot m = (\#A) \cdot (\#B)$$

□

Corolário 12. *(Extensão do Princípio Multiplicativo) Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos e não-vazios, então*

$$\#(A_1 \times \ldots \times A_n) = (\#A_1) \cdot \ldots \cdot (\#A_n) = \prod_{j=1}^{n} \#A_j.$$

Demonstração. Provemos por indução sobre n. Para $n = 1$ não há o que demonstrar. Para $n = 2$ temos o resultado do lema anterior. Suponhamos então que o resultado seja válido para um certo $n > 2$. Observemos que

$$\begin{aligned} \#(A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}) &= \#[(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}] \\ &= \#(A_1 \times \ldots \times A_n) \cdot (\#A_{n+1}) \\ &= (\#A_1) \cdot \ldots \cdot (\#A_n) \cdot (\#A_{n+1}) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \#A_j, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade (de cima para baixo) aplicamos o Lema 11 e na última, a hipótese de indução. Logo, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. □

O próximo corolário traz uma versão mais elaborada do Princípio Multiplicativo.

Corolário 13. *Se $A_1, \ldots, A_k$ são conjuntos finitos com $\#A_1 = n_1, \ldots, \#A_k = n_k$, então há exatamente $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ sequências de tamanho k com o j-ésimo termo em A_j para todo $1 \leq j \leq k$.*

Demonstração. Perceba que uma sequência $(a_1, \ldots, a_k)$ tal que $a_1 \in A_1, \ldots, a_k \in A_k)$ é um elemento do produto cartesiano $(A_1 \times \ldots \times A_k$. Assim, o número destas sequências é igual ao número de elementos de $(A_1 \times \ldots \times A_k)$, o qual, pelo Corolário 12 anterior, é $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$. □

No intuito de tornar a compreensão mais acessível tanto ao professor quanto ao aluno do Ensino Básico, o Corolário 13 é comumente enunciado na seguinte forma mais simplicada que, pela imensa importância, o colocaremos sob forma de teorema.

Teorema 14. *Se uma decisão D_1 pode ser tomada de x modos e se, uma vez tomada a decisão D_1, a decisão D_2 puder ser tomada de y modos, enttão o número de maneiras de se tomar as duas decisões simultaneamente é $x \cdot y$.*

A partir desta exposição, estabeleceros as três contagens específicas mais utilizadas no Ensino Básico

Definição 15. Seja A um conjunto finito com n elementos. Um **Arranjo Simples sem repetição** de k elementos escolhidos dentre os n possíveis de A é qualquer escolha ordenada de elementos distintos do conjunto A.

Em geral, o número de Arranjos Simples sem repetição de k elementos tomados dentre os n elementos possíveis é denotado por $A_{n,k}$.

Teorema 16. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Se A é um conjunto com n elementos, então há exatamente $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ funções injetivas $f : I_k \longrightarrow A$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*[4]

Uma vez que uma função injetiva $f : I_k \longrightarrow A$ pode ser interpretada como uma sequência de k termos, os quais são elementos distintos de A, o Teorema 16 pode ser reescrito na forma abaixo, que é mais acessível aos professores e alunos do Ensino Básico.

Corolário 17. *Se $\#A = n$, então há $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ sequências de k termos, os quais são elementos distintos de A. Mais precisamente,*

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definição 18. Seja A um conjunto finito com n elementos. Um **Arranjo Simples com Repetição** de k elementos escolhidos dentre os n possíveis de A é qualquer escolha ordenada de elementos distintos ou não do conjunto A.

Teorema 19. *Seja A um conjunto finito com $\#A = n$. O número de Arranjos Simples com repetição de tamanho k dentre os n elementos possíveis de A é igual a n^k.*

[4] A demonstração desta proposição foge do objetivo deste texto. Para uma demonstração deste, consulte Muniz Neto (2012).

Demonstração. Fazendo $A_1 = \ldots = A_k = A$ no Corolário 13, o resultado é imediato. $\square$

Definição 20. Seja A um conjunto não-vazio. Uma permutação dos elementos de A é uma função bijetiva $f : A \longrightarrow A$.

Uma vez que o conjunto A é finito, segue que $f : A \longrightarrow A$ é bijetiva se, e somente se, ela for injetiva. Denotando por P_n o número de Permutações Simples do conjunto finito A e fazendo $k = n$ no Corolário 17, temos o seguinte resultado

Teorema 21. *Seja A um conjunto finito com n elementos. Então, $P_n = n!$.*

Definição 22. Seja A um conjunto finito de n elementos. Uma **Combinação Simples** de classe k dos n elementos é cada subconjunto de k elementos escolhidos dos n possíveis.

Em geral, o número de combinações simples de classe k de n elementos é denotado por $C_{n,p}$.

Teorema 23. *Seja A um conjunto finito com n elementos. Dado $k \leq n$ então, o número de combinações simples de classe k dos n elementos é dado por*

$$C_{n,p} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Demonstração. Se $n = 0$, então $A = \varnothing$. Neste caso, ele terá apenas um subconjunto (que é ele próprio). Por outro lado,

$$C_{0,0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$$

Portanto, a afirmação é válida para $n = 0$. Supondo $1 \leq k \leq n$, fixemos $\#A = n$. Pelo corolário 17, existem $A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ sequências de k termos, formadas a partir dos elementos de A. Por outro lado, ao se permutar os elementos de cada subconjunto de k de A (ao todo, são $C_{n,p}$ subconjuntos), geramos $k!$ sequências de k termos (observe que este número contempla todas as sequências que podemos formas e todas elas são distintas entre si). Portanto,

$$k!C_{n,p} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Longrightarrow \quad C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Como queríamos mostrar. $\square$

5 Análise das Questões Envolvendo Combinatória Apresentadas pelo ENEM 2016 - 2018.

Neste capítulo apresentaremos as soluções e uma análise das questões sobre o tema Análise Combinatória propostas pelo ENEM–Exame Nacional do Ensino Médio nos anos de 2016, 2017 e 2018. Este exame foi instituído em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao término da educação básica e é um dos indicadores utilizados pelos organismos da Educação Brasileira para a avaliação da qualidade do ensino no país.

ENEM 2016/1ª Aplicação/2° Dia/Caderno Rosa/Questão 152

O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?
a) $\frac{10!}{2!\times 8!} - \frac{4!}{2!\times 2!}$
b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$
c) $\frac{10!}{2!\times 8!} - 2$
d) $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$
e) $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

Uma solução: De acordo com o enunciado da questão, devemos escolher dois tenistas, dentre os dez disponíveis com a única restrição de que ambos não devem ser canhotos. Desta forma, para se escolher um par de tenistas sendo um canhoto e um destro, há $6 \times 4 = 24$ modos de escolha e para um par de tenistas destros, há $\frac{6\times 5}{2} = 15$ modos de escolha (uma outra forma de escolher dois tenistas destros dentre os seis disponíveis é diretamente dada por $C_{6,2} = 15$ modos). Assim, pelo **Princípio Aditivo**, há

$$\frac{6 \times 5}{2} + 6 \times 4 = 15 + 24 = 39$$

ou ainda

$$C_{6,2} + 6 \times 4 = 15 + 24 = 39$$

modos de escolha dos tenistas atendendo a restrição imposta. □

Em uma análise superficial das alternativas disponíveis para na questão, nota-se que aparentemente nenhuma delas se enquadra com o resultado obtido seguindo-se a linha de raciocínio usado na solução acima. Neste momento, surge o impasse: ou o discente duvida da sua solução ou em uma melhor hipótese, ele verifica se alguma das alternativas apresentadas, após serem feitos os devidos cálculos, contém embutida a resposta e, por eliminação, ele chega à conclusão de que a resposta correta é a **alternativa A**. Obviamente, se o aluno enveredar pelo primeiro caminho, haverá a natural perda de tempo na conclusão da solução da questão, pois o mesmo certamente irá buscar uma outra forma de interpretar o enunciado da questão e na tentativa de chegada a uma das alternativas apresentadas.

Outra solução: Se fôssemos escolher dois tenistas dentre os dez disponíveis sem nenhuma restrição, isto poderia ser feito de $C_{10,2} = \frac{10!}{2!\times 8!} = 45$ modos (um raciocínio alternativo, nos daria 10 modos de se escolher o primeiro tenista e 9 modos de se escolher o segundo tenista, o que nos daria como resultado inicial $10 \times 9 = 90$ duplas. Como a dupla Rhuiago/Deilson é a mesma dupla Deilson/Rhuiago, então estamos contando a mesma dupla duas vezes de modo que devemos dividir o resultado inicial pelo fator corretivo 2. Portanto, o número total de duplas que realmente podem ser formadas é $\frac{10\times 9}{2} = 45$ duplas). De modo similar, para escolher dois tenistas canhotos, podemos fazê-lo de $C_{4,2} = \frac{4!}{2!!} = 6$ modos (raciocínio semelhante ao anterior, nos leva à conclusão alternativa de $\frac{4\times 3}{2} = 6$ modos). Logo, pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, segue que a resposta será

$$C_{10,2} - C_{4,2} = \frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!} = 45 - 6 = 39.$$

que é a resposta contida na alternativa A. □

Nesta questão, claramente o elaborador do problema fez um aceno enfático ao questionamento relativo ao conhecimento do aluno acerca do Princípio da Inclusão-Exclusão, o que de forma nenhuma é incoerente. O Princípio da Inclusão-Exclusão é uma ferramenta eficaz de se chegar à resposta de vários problemas. Uma crítica pertinente aqui é quanto à insistência do elaborador da questão em induzir o discente a resolver o problema de modo exclusivo, em detrimento do raciocínio que o aluno pode desenvolver a seu próprio modo. De uma forma mais clara, é muito mais salutar apresentar nas alternativas, o valor final da contagem do que da forma que foi apresentada.

Segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2016), é de muito mais valia se prezar por raciocínios construtivos do que destrutivos (os populares truques) e ainda, quanto mais simples e objetivo for o método utilizado pelo discente para se solucionar um determinado problema, mais se consolida o sua apropriação do raciocínio combinatório. Ora, a pelo o que foi visto na primeira solução apresentada, o discente poderia resolver o problema utilizando apenas o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo, sem a necessidade de que o aluno tenha o conhecimento explícito do que seja um Arranjo ou uma Combinação.

Finalmente, deixamos uma reflexão a respeito das alternativas incorretas. Caso o aluno não reconheça que o agrupamento formado não é caracterizado pela ordem dos seus elementos dentro do agrupamento, isto o levaria a assinalar a alternativa B. Caso o discente tenha a errônea conclusão de que com os quatro tenistas canhotos só se podem formar duas duplas isto o levaria a marcar a alternativa C. Já a resposta encontrada na alternativa D é a que apresenta maior distorção quanto à solução do problema, pois mesmo que o discente/candidato confunda as definições de arranjo e combinação, a segunda parcela da soma apresenta um erro mais visível, uma vez que a mesma deve ser a escolha de um tenista destro (6 possibilidades) e um tenista canhoto (4 possibilidades). Caso similar encontramos na alternativa E aonde o discente/candidato terá a obrigação de discernir e perceber que a escolha de dois tenistas dentre os seis disponíveis trata-se de uma combinação simples e não de um arranjo simples sem repetição.

ENEM 2016/1ª Aplicação/2° dia/Caderno Rosa/Questão 172

Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

(Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.)

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por
a) $10 \times 2 \times 26 \times 2$
b) $10^2 \times 52^2$
c) $10^2 \times 52^2 \times \frac{4!}{2!}$
d) $10^2 \times 26^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!}$
e) $10^2 \times 52^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!}$

Uma solução: Considere o esquema a seguir, que representa a configuração da senha que deverá ser criada:

A	B	C	D

De acordo com o enunciado da questão, propomos a seguinte sequência de decisões a serem tomadas:

- D_1**:** Escolha das duas letras: 52^2 modos (são 52 possibilidades para cada uma das letras). Aqui dever ser observado que no texto o elaborador da questão fez a referência de que há a distinção entre as letras maiúsculas e minúsculas na senha (p.ex., o caractere "A" é distinto do caractere "a");

- D_2**:** Escolha dos dois números: 10^2 modos (são 10 possibilidades para cada número);

- D_3**:** Escolha da localização das letras e dos números: Deve-se escolher dois lugares para as letras, o que pode ser feito de $C_{4,2}$ modos e, uma vez tendo-se escolhida a localização das letras, há apenas 1 modo de se colocar os números.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta correta da questão é $10^2 \times 52^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!}$. Que é a resposta encontrada na **alternativa E**. $\square$

Nesta questão, notamos que a interpretação textual é fator determinante para o sucesso na solução da mesma, mais precisamente em dois itens: no discernimento da natureza do caractere (se maiúsculo ou se minúsculo) e na percepção de que tanto letras quanto números podem ocupar qualquer um dos espaços na configuração da senha. Isso se justifica ao analisarmos os distratores propostos na questão. Se não fossem levados em consideração os dois itens de forma simultânea, levaria o candidato à escolha errônea da alternativa A. Se fosse levado em consideração o primeiro item e não o segundo, levaria o candidato à escolha errônea da alternativa B. Se fosse levado em consideração o segundo item e não o primeiro, levaria o candidato à escolha errônea alternativa D. Finalmente, observamos que a escolha dos locais destinada às letras, é o mesmo que escolher um subconjunto de dois elementos dentre todos os subconjuntos deste formato gerados a partir do conjunto $\{A, B, C, D\}$ onde A,B,C e D representa cada uma das entradas da senha na configuração acima, ou seja, é a quantidade de **combinações simples** de 4 elementos tomados 2 a 2.

Observamos também que, dentro do que enseja a BNCC, neste problema espera-se que o aluno tenha o entendimento (e discernimento) de **arranjos simples sem repetição** de elementos, **combinação simples** e também **arranjo com repetição** de elementos, além do próprio Princípio Multiplicativo. A crítica que fazemos é a de que se deveria levar em consideração apenas se o aluno tem um método eficiente de resolver o problema sem precisar necessariamente saber as fórmulas para cada caso particular de agrupamento. Ora, o aluno tendo em mãos o dominio do uso do Princípio Multiplicativo e uma boa interpretação textual (que em termos práticos, são os dois itens realmente importantes), o mesmo irá encontrar a resposta correta naturalmente, sem grandes dificuldades.

ENEM 2017/1ª Aplicação/2° Dia/Caderno Amarelo/Questão 140

Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que **L** e **D** representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

opção	formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. A opção que mais se adequa às condições da empresa é
a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Uma solução: De acordo com o enunciado do problema, o público esperado é de 1 milhão de clientes (em notação científica, 1×10^6). Assim, devemos saber em qual das opções teremos uma quantidade de senhas Q tal que, $1 \times 10^6 < Q < 2 \times 10^6$. Para isto, vamos calcular o número de senhas possíveis que podem ser formadas em cada formato.

- No formato I, temos 26 possibilidades (letra) para o primeiro caractere, e 10 possibilidades (número) para cada um dos 5 caracteres restantes. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $Q = 26 \times 10^5 = 2,6 \times 10^6$ senhas com este padrão. Como este número não se encontra dentro do intervalo requerido, a alternativa A **não** é a resposta correta desta questão;

- No formato II, temos 10 possibilidades para cada um dos seis caracteres formadores da senha, pois cada um deles é um número. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $Q = 1 \times 10^6$ senhas com este padrão. Como este número não se encontra dentro do intervalo requerido, a alternativa B também **não** é a resposta correta desta questão;

- No formato III, temos 26 possibilidades para cada um dos dois primeiros caracteres e 10 possibilidades para cada um dos caracteres restantes. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $Q = 26^2 \times 10^4 = 6,76 \times 10^6$ senhas com este padrão. Como este número também não se encontra dentro do intervalo requerido, a alternativa C **não** é a resposta correta desta questão;

- No formato IV, temos 10 possibilidades para cada um dos cinco caracteres formadores da senha, pois cada um deles é um número. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $Q = 1 \times 10^5$ senhas com este padrão. Como este número também não se encontra dentro do intervalo requerido, a alternativa D também **não** é a resposta correta da questão;

- No formato V, temos 26 possibilidades para cada um dos três primeiros caracteres (letras) e 10 possibilidades para os dois caracteres restantes (números). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $Q = 26^3 \times 10^2 = 1,7576 \times 10^6$ senhas neste padrão. Observe que esta quantidade Q encontrada é a única que satisfaz à condição imposta pelo elaborador do problema. Logo, **a alternativa E**, é a solução correta da questão. $\square$

Neste problema, o elaborador fez um aceno direto à definição de **arranjo simples com repetição**. Contudo, foi dada a flexibilidade do discente/candidato usar a ferramenta que lhe fosse conveniente para solucionar o problema, uma vez que as alternativas não apresentam o valor da contagem em no formato de notação de arranjos, combinações e/ou permutações. ´É válido ressaltar que nesta questão houve uma proposta de interdisciplinaridade (no tocante à interpretação textual) e exploração de outros conteúdos matemáticos (além do conteúdo de Combinatória, foram também explorados os conteúdos de Notação Científica e Intervalos).

ENEM 2017/1ª Aplicação/2° Dia/Caderno Amarelo/Questão 141

Como não são adeptos da prática dos esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro abaixo:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for oito, quantas partidas serão realizadas?

a) 64.

b) 56.

c) 49.

d) 36.

e) 28.

Uma solução: Para a formação de uma partida, basta escolher dois jogadores dentre os oito disponíveis. Ora, isto pode ser feito de $C_{8,2} = 28$ modos. Portanto, a resposta correta é a **alternativa E**. $\square$

Outra solução: Para a formação de uma partida, a escolha do primeiro jogador pode ser feita de 8 modos e a escolha do segundo jogador pode ser feita de 7 modos. Pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de partidas em primeiro plano seria 8Ö7 = 56. Porém, é necessário observar que a partida Federer versus Djokovic, por exemplo, é a mesma Djokovic versus Federer. Assim, cada partida está sendo contada duas vezes na contagem inicial, sendo necessário a divisão desta contagem pelo fator corretivo 2. Assim, o número real de partidas será $\frac{8\times 7}{2} = 28$ partidas. $\square$

Outra Solução (alternativa): Mesmo que o argumento a seguir não tenha a tipicidade do raciocínio combinatório, este não deixa de ser um método de contagem. Colocando $x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 6, x_5 = 10, x = 6 = 15$ e $x_7 = 21$ pode-se perceber que estes termos fazem parte de uma sequência que apresenta um padrão específico[1]: a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência constitui uma progressão aritmética cuja razão é 1. De fato,

$$
\begin{aligned}
x_3 - x_2 &= 2 \\
x_4 - x_3 &= 3 \\
x_5 - x_4 &= 4 \\
x_6 - x_5 &= 5 \\
x_7 - x_6 &= 6
\end{aligned}
$$

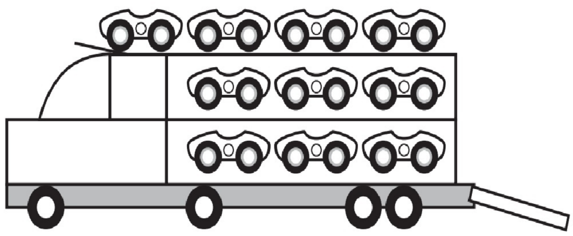
A partir desta constatação, pode-se inferir que $x_8 - x_7 = 7$, donde $x_8 = 7 + 21 = 28$. $\square$

[1] Sequências que possuem este padrão são denominadas de Progressões Aritméticas de Segunda Ordem. Para mais detalhes, consulte Lima (2013)

Neste problema, pode-se notar a liberdade dada para que o candidato pudesse usar do raciocínio que lhe fosse conveniente para resolver o problema[2].

ENEM 2017/1ª Aplicação/2° Dia/Caderno Amarelo/Questão 149

Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$.
b) $C_{9,3}$.
c) $C_{10,4}$.
d) 6^4.
e) 4^6.

Uma Solução: Embora, em um primeiro momento se pense que a resposta seja $C_{10,4}$, neste caso deve-se resistir a este errôneo raciocínio, pois este número conta quantas são as escolhas de 4 carrinhos dentre os 10 disponíveis o que não responde à indagação feita, que é saber de quantas formas se pode pintar os carrinhos com as cores dadas, sendo que deve haver pelo menos um carro de cada cor no brinquedo.

Para isto, sejam a, b, l e v respectivamente a quantidade de carros de cores amarela,

[2] Este problema também poderia ser resolvido fazendo uso da função quadrática. Para maiores detalhes, consulte Lima (2013).

branca, laranja e verde. De acordo com o enunciado do problema devemos ter

$$a + b + l + v = 10 \quad com \quad a, b, l, v \geq 0.$$

Na equação acima, há a possibilidade de soluções inteiras não-negativas. Como devemos ter pelo menos um exemplar de cada cor, deve-se devemos impor que a', b', l' e v', tais que $a' = a + 1$, $b' = b + 1$, $l' = l + 1$ e $v' = v + 1$, de modo que a quantidade de soluções da nova equação que será encontrada satisfaça às condições do problema. Desta forma, a equação anterior, toma a seguinte forma

$$a' + b' + l' + v' = 6$$

donde se chega ao resultado $P_9^{6,3} = C_{9,3}$. Portanto a resposta correta, é a **alternativa B**. $\square$

Este tipo de problema é considerado atípico em termos de ENEM com nível de dificuldade mais elevado pois há a necessidade de que o aluno tenha um bom domínio do Princípio Multiplicativo e também saiba de cor a definição, a distinção e a contagem dos agrupamentos estudados no Ensino Básico e além disto, que ele tenha um conhecimento mais apurado de certas ferramentas específicas de contagem (no caso em tela, as Permutações com elementos repetidos e/ou as Combinações Completas), bem como de suas aplicações.

Observamos também que dificilmente um aluno que não tido a oportunidade de resolver um problema similar a este logre êxito na solução do mesmo. Isto nos leva a conjecturar que em alguns momentos, a especificidade e particularidade estão sendo colocadas em maior destaque ante as situações mais gerais.

Destacamos também que boa parte dos livros didáticos de Matemática disponibilizados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNDL) ou não contemplam a definição e nem contagem do número de Combinações Completa, ou não fazem a alusão de que um problema deste tipo pode ser resolvido aplicando corretamente a técnica de contagem por meio das Permutações Repetidas ou pelo Princípio Multiplicativo. No segundo caso, além da exposição feita no livro didático, será necessário um domínio de conteúdo consistente por parte do professor.

ENEM 2017/1ª Aplicação/2° Dia/Caderno Amarelo/Questão 167

O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca, composta de uma figura plana e o slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

a) 15
b) 30
c) 108
d) 360
e) 972

Uma solução: A dificuldade que esta problema apresenta é a de a restrição implícita quanto à pintura da figura dada, a qual é a escolha da primeira região a ser colorida (e que será a primeira decisão a ser tomada para resolução do problema).

A primeira região a ser colorida deve ser a central, onde para esta decisão temos 4 maneiras de escolha. Para a escolha da cor das regiões adjacentes à região central, temos 3 maneiras de escolha para cada uma, totalizando 3^3 maneiras e para as regiões restantes há 3^2 maneiras de escolha. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $4 \times 3^3 \times 3^2 = 972$ maneiras de se colorir a logomarca. Assim a resposta correta é a **alternativa E**. $\square$

Este problema, ao contrário do anterior, traz uma situação geral que pode ser resolvida apenas com o desenvolvimento de um raciocínio combinatório correto, sem a necessidade de uso de fórmulas e/ou contagens específicas.

ENEM 2018/1ª Aplicação/2° Dia/Caderno Amarelo/Questão 149

Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na primeira fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na segunda fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

Em torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

a) 2×128
b) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
c) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
d) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
e) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

Uma solução: A primeira rodada será composta por 64 partidas, já que são 128 times e cada partida será formada por dois deles. Daí, os 64 perdedores serão eliminados, restando 64 times. Seguindo o mesmo raciocínio, a segunda rodada será composta por $\frac{64}{2} = 32$ partidas, donde 32 times (perdedores) serão eliminados. Na terceira rodada, serão $\frac{32}{2} = 16$ jogos, na quarta rodada serão $\frac{16}{2} = 8$ partidas, na quinta rodada, $\frac{8}{2} = 4$ partidas, na sexta rodada $\frac{4}{2} = 2$ partidas e na sexta e última rodada, $\frac{2}{2} = 1$ partida. Logo, pelo Princípio Aditivo, o número de partidas serão $64+32+16+8+4+2+1$ partidas. Portanto, a resposta correta é a **alternativa E**. $\square$

Similar ao problema anterior, temos aqui uma situação geral aonde o aluno tem a possibilidade de resolver o problema desenvolvendo o seu raciocínio combinatório baseado nos princípios gerais da Análise Combinatória sem a utilização de métodos de contagem especiíficos e/ou uso de fórmulas.

ENEM 2018/1ª Aplicação/2° Dia/Caderno Amarelo/Questão 161

O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 de fev.2015 (adaptado)

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

a) $A_{10,4}$
b) $C_{10,4}$
c) $C_{4,2} \times C_{6,2} \times 2 \times 2$
d) $A_{4,2} \times A_{6,2} \times 2 \times 2$
e) $C_{4,2} \times C_{6,2}$

Uma solução: A escolha dos carros compactos pode ser feita de $C_{4,2}$ modos (ou, pelo Princípio Multiplicativo), de $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ modos) e a escolha das caminhonetes de $C_{6,2}$ modos (ou, de $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ modos, pelo Princípio Multiplicativo). Uma vez escolhidos os carros compactos, digamos carro A e carro B, e, as caminhonetes, digamos a caminhonete preta e a caminhonete branca (segundo o enunciado do problema, as caminhonetes são de cores distintas) deve-se atentar que os lugares aonde os mesmos serão expostos também são distintos, portanto há 2 modos de apresentação tanto para os carros quanto para as caminhonetes, e aqui, faça-se a referência de que os estandes são distintos, porém o modo de apresentação dos carros dentro do estande é irrelevante, de acordo com o enunciado. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos, é

$$C_{4,2} \times C_{6,2} \times 2 \times 2,$$

que é a resposta encontrada na **alternativa C**. $\square$

Este problema apresenta uma situação geral bem elaborada, contextualizada, a qual necessita de um raciocínio combinatório bem desenvolvido, além da interpretação textual, por parte do candidato para a solução do mesmo. Embora a BNCC traga como objetivo a aquisição da habilidade do domínio e distinção dos principais tipos de agrupamentos básicos por parte do estudante, chamamos a atenção para a importância dada a esta habilidade específica (as respostas sugeridas nas alternativas então sob forma de notação da contagem destes agrupamentos) em detrimento do raciocínio combinatório mais geral, uma vez que o problema poderia ser resolvido com o devido uso dos Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Considerações Finais

A adaptação a uma nova perspectiva, por diversas vezes, não é tarefa fácil. A elaboração e implementação desta nova proposta de documento normativo para guiar a construção do conhecimento do indivíduo no Ensino Básico trará novos desafios que se juntarão aos pré-existentes e que precisarão ser discutidos no sentido da minimização dos eventuais prejuízos que esta mudança ocasionalmente poderá trazer.

Simultaneamente a isto, pudemos perceber ainda a necessidade do prosseguimento da discussão acerca do ensino de Matemática, em particular da Análise Combinatória. Há um longo caminho a ser percorrido, várias barreiras e dificuldades a serem enfrentadas e superadas para que a aprendizagem significativa deste (agora) objeto de conhecimento venha a se concretizar em nossas salas de aula. Pesquisas e estudos nesta área devem ter o devido prosseguimento, de modo que novos métodos possam ser estabelecidos e novas ferramentas sejam desenvolvidas para colaborarem para a efetiva aprendizagem de Análise Combinatória, sem deixar de lado a devida fundamentação matemática na obtenção destas.

Consonante a isto, precisa-se também rever o que realmente deve-se avaliar e esperar do indivíduo ao terminar a sua jornada no Ensino Básico. Como foi visto, por vezes o principal instrumento avaliador (e quantificador) do ensino brasileiro preza o conhecimento específico (em geral, absorvido de modo tecnicista) em detrimento ao raciocínio combinatório desenvolvido de forma individual baseado em princípios gerais. Este ponto precisa ser tema de discussões construtivas para que o processo de ensino-aprendizagem seja algo vinculado ao caminho do conhecimento libertário e não o contrário.

Finalmente, esperamos que este trabalho possa contribuir de forma positiva, agregando conhecimento e trazendo novas perspectivas de discussão e pensamento no intuito de contribuir com o desenvolvimento e evolução da Educação Brasileira.

Referências

ROCHA, Cristiane de Arimátea. *Formação docente e o ensino de problemas combinatórios : diversos olhares, diferentes conhecimentos*. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia. Pernambuco, UFPE (2011). Nenhuma citação no texto.

GONCALVES, Rafaela Ramos Soares.*Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio: a utilização do Princípio Multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica*. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Rio de Janeiro: IMPA(2014). Nenhuma citação no texto.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ROCHA, Cristiane de Arimátea; AZEVEDO, Juliana. *Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica*. Artigo publicado no Boletim de Educação Matemática - BOLEMA. São Paulo (2015). Nenhuma citação no texto.

BATANERO, Carmen. *Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.* Educacion Matemática (1996) Nenhuma citação no texto.

BNCC *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2017. Nenhuma citação no texto.

ENEM *Exame Nacional do Ensino Médio.* Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos Nenhuma citação no texto.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha.*Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 4, 1ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM (2012). Nenhuma citação no texto.

LIMA, Elon Lages. *Um curso de análise*, vol. 01. 14ª. Ed. Rio de Janeiro: IMPA (2016). Nenhuma citação no texto.

LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*, 1ª Edição. Rio de Janeiro, SBM: (2013). Nenhuma citação no texto.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo César Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. *A matemática do Ensino Médio*, vol. 2. 7ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM (2016). Nenhuma citação no texto.

MORGADO, Augusto Cesar; CARVALHO, Paulo César Pinto. *Matemática Discreta*, Coleção PROFMAT. 2ª. Ed. Rio de janeiro: SBM (2019). Nenhuma citação no texto.

MORGADO, Augusto Cesar; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo César Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade.* 9ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM (1991). Nenhuma citação no texto.