Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

JHONNY ROSEMBERG

PROGRAMA OBMEP NA ESCOLA E O ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Orientador: Mário Olivero Marques da Silva

NITERÓI
FEVEREIRO/2020

JHONNY ROSEMBERG

PROGRAMA OBMEP NA ESCOLA E O ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada por JHONNY ROSEMBERG ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Mário Olivero Marques da Silva

Niterói
Fevereiro de 2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

R812p Rosemberg, Jhonny
Programa OBMEP na escola e o ensino da matemática por meio de resolução de problemas / Jhonny Rosemberg ; Mário Oliveiro Marques da Silva, orientador. Niterói, 2020.
89 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2020.mp.13782432770

1. Olimpiadas de Matemática. 2. OBMEP. 3. Ensino e aprendizagem. 4. Resolução de Problemas. 5. Produção intelectual. I. Silva, Mário Oliveiro Marques da, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

JHONNY ROSEMBERG

PROGRAMA OBMEP NA ESCOLA E O ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada por JHONNY ROSEMBERG ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 17/02/2020

BANCA EXAMINADORA

Dr. Mário Olivero Marques da Silva - UFF

(Orientador)

Dr(a). Cristiane de Mello - UNIRIO

Dr(a). Nancy de Souza Cardim - UFF

Dr(a). Miriam Del Milagro Abdón - UFF

NITERÓI

2020

DEDICATÓRIA

À minha bela esposa Thalyta Ornelas Rangel Rosemberg, por todo amor e carinho dedicados a mim, que tem sido a minha fonte de inspiração.

À minha querida e amada Mãe Leila Guimarães Veloso (*in memoriam*), com quem aprendi o ofício de ser professor de matemática.

À minha eterna Tia Sheila (*in memoriam*), que sempre acreditou na minha capacidade, incentivando-me a buscar conquistas maiores.

Aos meus queridos alunos do projeto “OBMEP na Escola”, sem vocês esse trabalho nunca teria sido realizado.

“Tudo acontece na hora certa. Tudo acontece, exatamente quando deve acontecer”. Albert Einstein.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela minha existência e por está comigo em todos os momentos da minha vida.

A minha esposa, que esteve ao meu lado em todos os momentos difíceis da minha vida. Obrigado por seu carinho, amor e por não me deixar desistir desse trabalho. Hoje vivo uma vida muito feliz ao seu lado. Não poderia esquecer do nosso cachorrinho “Jon Snow”, que trouxe muita alegria para o nosso lar.

Aos meus pais, que sempre lutaram por uma educação de qualidade e não mediram esforços para investir nos meus estudos.

A minha psicóloga Adriana, por ter me acolhido quando precisei, sempre me mostrado o quanto sou capaz.

Agradeço também ao meu amigo Anderson Goulart, por todo incentivo, por se manter sempre presente na minha formação acadêmica. Obrigado pelas suas dicas e sugestões que fizeram desse trabalho melhor.

Agradeço ao meu orientador o professor Dr. Mário Olivero Marques da Silva, por toda paciência, dedicação e comprometimento em conduzir esse trabalho.

Agradeço as minhas diretoras do Colégio Estadual Manuel de Abreu, Karen Diniz, Carol Padilha e Ana Paula. Por toda a dedicação e apoio ao projeto “OBMEP na Escola” e pelo incentivo na produção dessa dissertação. Ao corpo docente de matemática, por ter abraçado as olimpíadas na escola e, mais especificamente, ao professor Wagner, que sempre se colocou à disposição motivando-me a continuar.

Também quero deixar o meu agradecimento as minhas diretoras do Ciep 248 – Professor Túlio Rodrigues Perlingeiro, Rosy Carla e Adriana, pelo apoio para que esse trabalho fosse realizado. Agradeço também as professoras Jucis e Fátima, colegas de trabalho nessa escola que me apresentaram a OBMEP.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento-001.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Neste trabalho venho mostrar como a experiência na abordagem do Ensino da Matemática por meio de resolução de problemas, aliada ao incentivo dado aos alunos pela inserção da escola no Programa OBMEP tem mudado radicalmente o desempenho, o interesse e autoestima dos alunos. Ao longo da história, as Olimpíadas de Matemática têm desempenhado um papel significativo no que diz respeito a busca por jovens talentos na área. Veremos, inclusive, que cientistas e matemáticos importantes tiveram suas carreiras acadêmicas iniciadas por meio delas. Além disso, as olimpíadas, enquanto política pública, desempenham um caminho importante para a melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem da matemática. Nesse sentido, recorrerei a minha experiência no programa conhecido como “OBMEP na Escola”, tal como as atividades desenvolvidas no Colégio Estadual Manuel de Abreu visando demonstrar os impactos do projeto, não só quanto ao desempenho dos alunos nas olimpíadas, mas também, sua influência no que se refere a vida escolar e acadêmica dos discentes. A realidade da escola mudou muito após minha inserção no programa. Se antes a escola contava com o total de três alunos premiados com “Menção Honrosa”, atualmente, após três anos de projeto, esse número aumentou para dez, acrescido também de um “Medalhista de Prata”. A experiência dos estudantes participantes do projeto revela a importância do programa em relação a inserção desses alunos a espaços de conhecimento mais aprofundados. Muitos deles hoje encontram-se em colégios federais e participando do programa de iniciação cientifica PIC – OBMEP na UFF. Assim, a metodologia de Ensino da Matemática por meio da resolução de problemas, aliada ao material produzido pelo IMPA para a OBMEP, tem possibilitado o aperfeiçoamento dos professores e alunos.

Palavras-chave: Olimpíadas de Matemática; OBMEP; Ensino e aprendizagem; Resolução de problemas

ABSTRACT

In this work I come to show how the experience in approaching the Teaching of Mathematics through problem solving, combined with the incentive given to students for the insertion of the school in the OBMEP Program has radically changed the performance, interest and self-esteem of students. Throughout history, the Mathematics Olympics have played a significant role in the search for young talent in the field. We will even see that important scientists and mathematicians had their academic careers started through them. In addition, the Olympics, as a public policy, play an important role in improving the quality of mathematics teaching and learning. In this sense, I will use my experience in the program known as “OBMEP at School”, as well as the activities developed at the Colégio Estadual Manuel de Abreu to demonstrate the impacts of the project, not only regarding the performance of students in the Olympics, but also, their influence with regard to students' school and academic life. The reality of the school changed a lot after I joined the program. If before the school had a total of three students awarded with "Honorable Mention", today, after three years of project, this number has increased to ten, plus a "Silver Medalist". The experience of the students participating in the project reveals the importance of the program in relation to the insertion of these students into more in-depth knowledge spaces. Many of them are now in federal schools and participating in the scientific initiation program PIC - OBMEP at UFF. Thus, the methodology of teaching mathematics through problem solving, combined with the material produced by IMPA for OBMEP, has enabled the improvement of teachers and students.

Keywords: Math Olympics; OBMEP; Teaching and learning; Troubleshooting

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A História das Olimpíadas de Matemática nos evidencia que muitos dos seus jovens competidores têm se desenvolvido cientificamente em carreiras acadêmicas, conquistando prêmios importantes como, por exemplo, o matemático australiano Terence Tao ganhador da medalha Fields em 2006, conhecido como o mais jovem competidor a ganhar uma medalha de ouro na IMO, com 13 anos de idade em 1988. Desta maneira, a competição tornou-se também um espaço para a busca de jovens talentos.

É de se reconhecer que esse mérito é restrito a um seleto grupo de pessoas, que não representam a maioria da população. Mas o que venho salientar é como o trabalho realizado com as Olimpíadas de Matemática pode trazer resultados surpreendentes atingindo público mais amplo, principalmente quando visto sob a ótica de uma política pública educacional, servindo como um espaço de inclusão social e desenvolvimento científico. É justamente nessa linha que se traduz a motivação do tema de pesquisa.

O meu conhecimento a respeito das olimpíadas de matemática remete ao ano de 2014. Nesse período, eu já atuava como professor na rede estadual do Rio de Janeiro e a escola em que estava lecionando mantinha uma certa tradição em envolver os alunos nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. Este fato me incentivou a buscar mais conhecimentos acerca dessa competição e me levou a atuar em um projeto intitulado “OBMEP na Escola”, que tinha como princípio a melhoria da qualidade do Ensino de Matemática no Brasil.

Neste programa, fui apresentado à metodologia de Ensino da Matemática através da resolução de problemas, o que me fez refletir e transformou minha postura em sala de aula. O trabalho realizado em conjunto, entre o professor da rede básica, alunos de escolas públicas e instituições de ensino superior - na figura do professor universitário - mostram um caminho importante para a construção de uma educação de qualidade.

A busca por mais conhecimento a respeito dessa metodologia de ensino me levou ao trabalho desenvolvido pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de

Problemas – GTERP, criado em 1992 e coordenado pela professora Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic, que defende um Ensino de Matemática desenvolvido por meio da resolução de problemas. Argumentam ainda que:

> O ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição, mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem (ONUCHIC, 1999, p.215).

Para Onuchic (1999, p.212), *“Em sua maioria, as pesquisas em Resolução de Problemas sempre foram desenvolvidas em ambientes laboratoriais. Poucos estudos têm sido desenvolvidos em sala de aula”.* Assim, a oportunidade de formar uma turma, com alunos da rede pública, onde seria trabalhada essa metodologia de ensino aliada ao material produzido pelo IMPA para a OBMEP, revela a importância dessa pesquisa, que retrata minha experiência e observação sobre o programa.

Todas essas propostas estão alinhadas com o documento de caráter normativo conhecido como Base Nacional Comum Curricular – BNCC - que traz em seus princípios a definição de um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagem essenciais, os quais devem ser desenvolvidos com todos os alunos ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. De acordo com o documento, a matemática no Ensino Fundamental:

> [...] deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. A noção de competência é utilizada no sentido da mobilização e aplicação dos conhecimentos escolares, entendidos de forma ampla (conceitos, procedimentos, valores e atitudes). Assim, ser competente significa ser capaz de, ao se defrontar com um problema, ativar e utilizar o conhecimento construído. (BRASIL, 2018, p. 222).

Quanto aos modos de ensino-aprendizagem da matemática, acrescenta ainda que:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento

> matemático: raciocínio, representação, comunicação e argumentação. (BRASIL, 2018, p. 222).

Deste modo, a Resolução de Problemas é vista sob uma perspectiva metodológica, cujos objetivos espera que os alunos desenvolvam competências e habilidades específicas. Tal prática demanda novas posturas tanto do professor quanto do aluno frente aos processos de ensino-aprendizagem da matemática.

No segundo capítulo, procuro situar o leitor sobre o universo das Olimpíadas de Matemática trazendo uma retrospectiva histórica das competições, abrangendo desde seu início, com as disputas de matemáticos nas praças públicas durante o século XVI, até os aspectos que deram origem a OBMEP. Veremos também como a mesma tem se estabelecido, ao longo de sua história, como um espaço de pesquisa e desenvolvimento cientifico na área da matemática.

No terceiro capítulo, busco esmiuçar o referencial teórico que serve de embasamento para a metodologia utilizada no Projeto “OBMEP na escola”, bem como sua especificidade no que diz respeito a construção do processo de ensino-aprendizagem da matemática.

No quarto capítulo, falarei a respeito dos projetos associados a OBMEP e de minha atuação no programa “OBMEP na Escola”, tendo como base a metodologia utilizada no programa, destacando os problemas e aspectos positivos de algumas atividades realizadas em sala de aula. Por fim, tratarei dos impactos do programa tanto com relação a mudança de postura dos alunos quanto referindo-se aos resultados conquistados nas olimpíadas de matemática das escolas públicas.

2. HISTÓRIA DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Registros históricos apontam que as competições na área da matemática são organizadas há muito tempo, desde a Grécia já se tentavam resolver problemas de geometria. A partir do século XVI, eram famosos os "duelos" envolvendo matemáticos em praças públicas. Segundo MACIEL (2009, p.56), os vencedores *"cuja notoriedade do saber permitia que detivesse uma cátedra numa universidade, tinha reconhecimento público, prestígio e, principalmente, uma condição econômica privilegiada"*.

No século XIX, as competições passaram a se aproximar do formato que conhecemos hoje, tanto que, já em 1885, na cidade de Bucareste – Romênia, uma competição foi organizada voltada para cerca de 70 alunos de uma escola primária. Entretanto, foi somente em 1894, num concurso realizado na Hungria, que uma competição veio a ser classificada como Olimpíada.

Ao longo da história, as Olimpíadas de Matemática têm desempenhado um papel significativo no que diz respeito a busca por jovens talentos na área, destacaremos inclusive, matemáticos cujas suas carreiras tiveram como ponto de partida sua participação nas olimpíadas. Hoje em dia, diversos países têm adotado as Olimpíadas de Matemática como parte de suas políticas educacionais, tornando-se cada vez mais um projeto de inclusão social e desenvolvimento cientifico, tendo como um dos seus objetivos promover a matemática e aprimorar o seu ensino.

No Brasil, essa perspectiva das competições passa a ganhar novos rumos a partir de 1998, com o lançamento da revista das Olimpíadas Brasileiras de Matemática, "Eureka!". Assim, novos caminhos são traçados visando contribuir com a melhoria do Ensino da Matemática,

> reconhecemos que, com esta atividade, pode-se fazer muito mais. Com parceria do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e com a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), foi submetido ao CNPq um projeto que pretende contribuir para a melhoria do ensino de Matemática no Brasil utilizando as Olimpíadas de Matemática como mecanismo propagador (Revista Eureka!, número 1-1998 apresentação, Pág. 2 e 3)

No decorrer desse capítulo, falaremos das origens das Olimpíadas de Matemática tanto no Brasil como no mundo e dos processos históricos que culminaram na criação das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escola Públicas (OBMEP). Em cada seção e de acordo com o seu contexto, situando o leitor a respeito do formato de prova, regulamento, público alvo e os impactos positivos dessa competição.

2.1 Origens das Olimpíadas de Matemática

Estudos indicam que a primeira competição na área da matemática foi o concurso de “Eötvös”, realizado no leste europeu, mais precisamente na Hungria em 1894. A Sociedade Húngara de Matemática e Física realizou o concurso em homenagem a seu fundador e presidente, o famoso físico Loránd Eötvös[1], que se tornou ministro da Educação naquele ano. (HING, 2002).

A competição era destinada aos alunos que concluíram a segunda etapa do ensino regular – equivalente ao nosso ensino médio – os quais tinham que resolver três problemas no período de quatro horas.

> **1.** Sejam x e y inteiros. Prove que uma das expressões $2x+3y$ e $9x+5y$ é divisível por 17 se, e somente, se a outra também for.
> **2.** Dados um círculo e dois pontos P e Q, construa um triângulo retângulo inscrito no círculo de tal modo que os seus dois catetos passem pelos pontos P e Q respectivamente. Para quais posições de P e Q está construção é possível?
> **3.**Os comprimentos dos lados de um triângulo de área t formam uma progressão aritmética com razão d. Encontre os lados e ângulos desse triângulo. Especificamente, resolva o problema para $d=1$ e $t=6$. (BADARÓ, 2015, p.13)

Após a segunda guerra mundial a competição mudou seu nome de Eötvös para Kürschák, em homenagem ao professor Jósef Kürschák[2] – membro da Academia de Ciência Húngara e do Instituto Politécnico da Universidade de Budapeste. As competições eram realizadas anualmente, exceto nos períodos de guerra, excluindo assim os anos 1919,1920,1921,1944,1945,1946 em que a Eötvös não foi realizada por conta da 1ª e 2ª Guerra mundial e, também, o ano 1956 que suspendeu a Kürschák por conta da Revolução Húngura. (SUPPA,2007)

---

[1] **Loránd Eötvös** (1848 — 1919) foi um físico húngaro. Ficou conhecido internacionalmente como (barão) **Roland von Eötvös** (ou: **Roland Eötvös**).

[2] **József Kürschák** (1864 — 1933) foi um matemático húngaro. É conhecido por seu trabalho sobre trigonometria e pela criação da teoria da valoração. Foi eleito membro da Academia de Ciências da Hungria em 1897.

Os problemas propostos tinham como objetivo explorar a criatividade e o raciocínio e exigiam como pré-requisito o conhecimento de equações quadráticas, geometria plana e um pouco de trigonometria. Era esperado que os alunos buscassem soluções engenhosas dentro de um ambiente profundo de uma matemática considerada elementar. *"As soluções geralmente exigem um espírito pioneiro, um certo grau de insight e habilidades para solucionar problemas. O concurso desafia a criatividade dos alunos e não o seu conhecimento"* (HING, 2002, p.50).

> Um problema deve colocar à prova a maior parte da profundidade e não a quantidade do conhecimento do concorrente. O conteúdo do problema, sua solução ou o caminho que leva à solução deve ser interessante. Um problema deve ter uma solução que possa ser encontrada dentro do tempo alocado (AMBRUS,1996 apud HING, 2002, p.50)

Tamanho era o prestígio da participação nessa competição que, os dez melhores em matemática e os dez melhores em física tinham acesso direto a Universidade. Assim, "Eötvös Competion" oferecia um caminho alternativo para jovens talentosos ingressarem na Universidade. SUPPA (2007).

É interessante observar que muitos dos ganhadores dessa competição conquistaram, na fase adulta, prêmios importantes como o Nobel e Wolf. Alguns desses tem seus nomes citado a seguir.

> O físico Theodore von Kármán (1881-1963), vencedor em 1897, com16 anos de idade, cognominado hoje como o "pai da era supersônica"; o também físico Leo Szilard (1898-1964), vencedor em 1916, com 17 anos, que realizou diversos estudos sobre fissão nuclear ao lado de Albert Einstein, e ficou conhecido como um dos pais da bomba atômica; em 1925, outro físico, Edward Teller (1908-2003), com apenas 16 anos de idade, conhecido como "o pai da Bomba H", dividiu o 1º lugar dessa competição com Laszlo Tisza (1907-2009), professor emérito do Massachusetts Institute of Technology (MIT); em 1937, a vitória ficou com o jovem de 16 anos, John Harsanyi (1920-2000), economista que dividiu o Prêmio Nobel de Economia de 1994, com o matemático John Nash (1928-2015), pelos relevantes trabalhos desenvolvidos sobre Teoria dos Jogos (MARTINS, 2015, p.11).

HING (2002) se preocupou em investigar os motivos que estimularam o que classificou como surto de matemáticos e cientistas brilhantes por volta de 1900 na Hungria. Um sucesso que ficou conhecido como "Fenômeno Húngaro" e foi considerado estatisticamente improvável de ser reproduzido. Para o autor, o concurso de Eötvös- Kürschák, o diário de KöMal[3], juntamente com os bons professores e a atmosfera de alto valor na conquista intelectual foram grandes impulsionadores desse progresso.

Segundo Badaró (2015) e CALDAS (2013), a repercussão dessa competição foi tão grande que suas ideias rapidamente se espalharam pela Europa e posteriormente para outros lugares do mundo, passando a ser realizada todos os anos. Vale destacar que, em 1934, B.N. Delone e G.M. Frijtengolts organizaram na cidade de Leningrado (antiga União Soviética), aquela que pode ser apontada como a primeira Olimpíada de Matemática "Moderna".

Devido a maneira que foram estruturadas, pelo formato das questões e sua abrangência nacional o concurso de Eötvös- Kürschák é considerada como sendo a primeira Olimpíada de Matemática e importante percursora da Olimpíada Internacional de Matemática (International Mathematical Olympiad - IMO) em 1959.

2.2 Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)

A história da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) remete ao ano de 1959, quando sua primeira edição foi realizada na cidade de Brasov, na Romênia, e contou com a participação de sete países da chamada "Cortina de Ferro"[4]: Romênia, Hungria, Bulgária, Polônia, Checoslováquia, Alemanha Oriental e da atualmente extinta União Soviética.

Considerada a maior, mais antiga e prestigiada Olimpíada científica para alunos do ensino médio, a competição é realizada anualmente, sediada em diferentes países, contando com a participação de mais de 100 nações dos cinco continentes. Para participar, os competidores devem ser cidadãos ou residentes daquele País e terem sido selecionados por meio de Olimpíadas de Matemática ou programa de seleção equivalente no seu país de origem. Os participantes precisam ter idade inferior a vinte anos no dia 1º de julho do ano de sua participação na IMO. Além disso,

[3] KöMal - Traduzido do inglês-Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok é um jornal de matemática e física húngaro para estudantes do ensino médio. Foi fundada por Dániel Arany, um professor do ensino médio de Győr, Hungria e tem sido continuamente publicado desde 1894.

[4] **Cortina de ferro** é uma expressão que se refere à divisão da Europa Ocidental do leste europeu, no período conhecido como Guerra Fria.

necessitam estar regulamente matriculados no Ensino Fundamental ou Médio. No caso do Brasil, os participantes têm que estar obrigatoriamente matriculados em Instituições credenciadas pelo Ministério da Educação (MEC).

A equipe é formada por até seis competidores, além de um “Líder” e um “Vice-Líder”. Que, entre outras funções, serão responsáveis pela conduta dos competidores e de esclarecer qualquer dúvida. Cada país participante[5] é responsável pelos critérios de seleção da sua equipe.

A prova é composta de seis problemas, que são realizados em dois dias, com tempo de 4h30m em cada dia. Cada problema vale 7 pontos, sendo 42 pontos a nota máxima. Tradicionalmente os problemas são organizados em ordem crescente de dificuldade e devem cobrir várias áreas da Matemática, como álgebra, geometria, análise combinatória e teoria dos números.

Os países participantes, exceto o país sede, são responsáveis pelo envio de até seis problemas com suas respectivas soluções. Somente o “Líder” pode enviar a proposta, que deve ser escrita na língua oficial[6] da IMO. A partir daí a escolha é feita pelo “Comitê de Seleção de Problemas”, respeitando os protocolos de segurança.

A classificação dos estudantes ocorre de acordo com sua pontuação. Sendo distribuído à metade dos competidores medalhas de ouro, prata e bronze na proporção de 1:2:3, respeitando os seguintes limites: não mais que 1/12 sejam premiados com medalha de ouro; não mais que 1/4 com medalha de prata e não mais que 1/2 com algum tipo de medalha (MACIEL,2009).

Aqueles que não receberem medalhas, mas responderem pelo menos uma questão completa, isto é, atingirem sete pontos em um problema são agraciados com certificado de menção honrosa. Embora, não seja oficial, existe uma classificação do país “vencedor” que leva em consideração o somatório de pontos obtidos por seus competidores.

---

[5] A participação em uma IMO se dá exclusivamente mediante convite. Cada país convidado (ou território convidado, em casos excepcionais e aprovados pelo Conselho Consultivo da IMO) (IMO,2019).

[6] Lingua oficial da IMO: inglês, francês, alemão, russo ou espanhol. Todas as propostas e soluções apresentadas em francês, alemão, russo e espanhol deverão ser entregues acompanhadas de suas respectivas versões em inglês. (IMO,2019)

Alguns acontecimentos importantes marcaram a história da IMO e são destacados a seguir:

> • Em 1965, a competição foi realizada em Berlin (Alemanha Oriental) com a participação de dez países, entre eles a Finlândia, que foi o primeiro país de fora da “Cortina de Ferro” a participar do evento.
> • Em 1974, a competição ocorreu pela segunda vez em Berlin e, dentre os dezesseis países participantes, pela primeira vez, estava os Estados Unidos.
> • Em 1979, a competição realizou-se em Londres (Inglaterra) e, dentre os 23 países participantes, pela primeira vez, estava o Brasil.
> • Em 1980 não houve competição.
> • Em 1981, pela primeira vez, a competição foi organizada fora da Europa, em Washington (Estados Unidos). (MACIEL, 2009, p. 58),

Atualizando esses dados, esse ano 112 países e 621 competidores estavam envolvidos na 60ª edição da competição ocorrida no Reino Unido.

Os objetivos desse evento seguem a “tradição” de descobrir, incentivar e desafiar jovens talentosos no campo da matemática. Por ser uma competição em nível internacional, ela permite criar oportunidades para o intercâmbio de informações sobre currículos e práticas escolares em todo o mundo. Além de promover a matemática de forma geral é um espaço que permite um relacionamento entre matemáticos de vários países. (IMO,2019).

O estímulo dado a esses jovens competidores tem demonstrado, mais uma vez, resultados positivos e promissores no que diz respeito ao futuro de sua vida acadêmica. A seguir destaco alguns nomes de matemáticos importantes, pesquisadores e cientistas que participaram da IMO.

> O professor australiano Terence Tao, por exemplo, ganhador da Medalha Fields em 2006, foi a pessoa mais jovem a receber uma medalha de ouro na IMO, em 1988, com apenas 13 anos de idade. A primeira mulher a receber a Medalha Fields, a iraniana Maryam Mirzakhani em 2014, foi bicampeã da IMO, recebendo duas medalhas de ouro em 1994 e 1995. O primeiro brasileiro a receber a Medalha Fields, Artur Ávila Cordeiro de Melo, em 2014, também foi medalhista de ouro na IMO em 1995, com 16 anos de idade. Artur foi o primeiro matemático na América Latina a receber essa importante comenda. (MARTINS,2015,p.9)

Ainda sobre o mesmo autor, os brasileiros que se destacaram na IMO:

> Dentre os brasileiros medalhistas de ouro na IMO, somente dois atingiram o *Perfect Score*, ou seja, gabaritaram a prova (1º lugar absoluto): os renomados professores de Matemática Nicolau Corção Saldanha (PUC-Rio), em 1981, e

> Ralph Costa Teixeira (UFF), em 1987, sendo este último o único brasileiro a ganhar duas medalhas de ouro na competição (1986 e 1987). (MARTINS,2015,p.11)

O Brasil iniciou sua participação em 1979 e desde então, tem demonstrado resultados cada vez melhores, acumulando 10 medalhas de ouro, 45 de prata, 81 de bronze e 33 certificados de menção honrosa (IMO,2019). Podemos destacar, inclusive, sua participação no ano de 2017, no qual, pela primeira vez, foi sede da competição em sua 58ª edição na cidade do Rio de Janeiro. Conquistando duas medalhas de prata e uma de bronze.

Um aspecto importante da participação brasileira nas Olimpíadas Internacionais é que a seleção dos participantes e a equipe formada leva em consideração o resultado da OBM e seu desempenho nos testes realizados em polos de treinamento. Além da seleção desses jovens para representar o Brasil em competições internacionais, as Olimpíadas Brasileiras de Matemática, ao longo dos anos, passaram a integrar em seus objetivos o desenvolvimento de políticas educacionais voltada para a melhoria do Ensino de Matemática no País, sobre qual falaremos na seção a seguir.

2.3 Olímpiadas Brasileiras de Matemática (OBM)

No Brasil, as competições estudantis na área da matemática são registradas a partir da década de 1930 e tinham como objetivo incentivar o estudo da matemática, a melhoria do seu ensino, além de revelar jovens talentos. Os primeiros eventos, que se tem notícias e receberam o nome de “Olimpíada da Matemática”, aconteceram nos anos de 1967 e 1969 no Estado de São Paulo e foram organizadas pelo Grupo de Estudo do Ensino da Matemática (GEEM)[7] em duas edições de Olimpíada Estadual (DUARTE,2014, p. 131).

A primeira edição, tinha como data prevista: outubro de 1967, e foi organizada em comemoração ao aniversário de cinco anos da criação do GEEM. Em relação aos alunos que participarão da competição e as intenções de estender as ideias para um âmbito nacional, temos que:

[7] O Grupo de Estudo do Ensino da Matemática (GEEM) – Foi criado em 1961, tendo como presidente o professor Osvaldo Sangiorgi. Considerado um dos grupos mais atuantes durante o Movimento da Matemática Moderna.

> *A Olimpíada abrangerá os alunos de 1ª e 2ª séries dos colégios oficiais e particulares de todo o Estado. Os estudantes serão selecionados por meio de testes, e aos primeiros colocados serão oferecidos prêmios, podendo figurar, entre eles, viagens a Estados brasileiros ou a outros países. Inicialmente, o certame abrangerá apenas as duas primeiras séries do ginásio, sendo pretensão do GEEM, posteriormente, estendê-lo ao curso primário e, numa etapa posterior, dar à Olimpíada caráter nacional (FOLHA DE SÂO PAULO,23 out. 1966 apud DUARTE, p.132).*

A segunda edição da “Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo”, aconteceu em outubro de 1969 na cidade de São Paulo. Contou com a participação de mais de 400 mil alunos e marcou a última competição organizada pelo GEEM. Somente em 1977, agora com outros estímulos e finalidades, novas olimpíadas voltaram a ocorrer.

Nesse mesmo ano, a Academia de Ciências do Estado de São Paulo (ACIESP) criou as Olimpíadas Paulista de Matemática (OPM) que teve como um de seus idealizadores o professor Shigueo Watanabe, o qual ocupava o cargo de diretor executivo da referida academia. Os objetivos dessa nova olimpíada são fincados no seu estatuto:

> 1. Incentivar o ensino de Matemática.
> 2. Proporcionar o entrosamento dos professores de Matemática de uma mesma escola e entre os de diferentes escolas de uma mesma região.
> 3. Favorecer a participação da comunidade local em problemas e atividades educacionais de jovens em idade escolar.
> 4. Avaliação e rendimento do ensino de Matemática no Estado. (ACIESP,1977 apud DUARTE, 2014, p.134).

A competição ficou voltada para alunos que cursavam entre a 5ª e 8ª série do 1º grau (equivalente hoje a última etapa do ensino fundamental do 6º ao 9º ano) ou 1ª série do segundo grau (hoje conhecida como 1ª série do ensino médio). E envolveu a participação, na sua primeira fase, de quase 1800000 alunos das diversas escolas estaduais, municipais e particulares do Estado de São Paulo. (DUARTE,2014)

De acordo com DUARTE (2014), os objetivos da edição de 1978 passaram a ganhar um novo direcionamento, o de selecionar estudantes para participar da XXI Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) a ser realizada em junho de 1979, em Londres. Ano em que, pela primeira vez, uma delegação brasileira foi enviada para representar o Brasil na competição internacional. Embora a participação brasileira não tenha sido “bem-sucedida”, serviu de inspiração e estímulo para a criação das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBM).

> *Consta no Relatório de Atividades de 1979 que a equipe brasileira que participou da Olimpíada Internacional em Londres não foi bem sucedida, mas essa participação gerou a iniciativa da Sociedade Brasileira de Matemática que realizou, em 1979, inspirada pelo certame da ACIESP, a I Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM. Ao longo dos anos, as equipes brasileiras selecionadas pela OBM amadureceram e nossos jovens representantes conseguiram resultados marcantes para a Matemática brasileira.* (DUARTE, 2014, p.138)

Fundada em 1979, trata-se de uma competição em nível nacional e tem como público-alvo alunos desde o 6º ano do ensino fundamental até o final da graduação, envolvendo escolas e universidades brasileiras da rede pública e privada. Atualmente a OBM é uma realização conjunta do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), e, de acordo com seu regulamento, tem como objetivos principais:

> a. Interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino de Matemática no Brasil, estimulando alunos e professores a um aprimoramento maior propiciado pela participação em olimpíadas.
> b. Descobrir jovens com talento matemático excepcional e colocá-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa.
> c. Selecionar os estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de Matemática a partir do seu desempenho na OBM, realizando o seu devido treinamento.
> d. Apoiar as competições regionais de Matemática em todo o Brasil.
> e. Organizar as diversas competições internacionais de Matemática, quando sediadas no Brasil. (REGULAMENTO OBM 2019, pag.1 e 2)

De acordo com CALDAS (2013), foi somente em 1998 que as Olimpíadas Brasileiras de Matemática deixaram de ser vistas apenas como um instrumento para detectar jovens talentos e desenvolvê-los. Doravante, ela ganha um novo formato e objetivo sendo utilizada, agora, como um novo método de auxílio ao Ensino da Matemática no Brasil, possibilitando sua melhoria nas escolas e seu desenvolvimento, em conjunto com alunos e professores, em âmbito nacional.

É interessante ressaltar que nesse mesmo ano, ocorre o lançamento da revista das Olimpíadas de Matemática - chamada de “Eureka!”, cujo objetivo principal era *“contribuir decisivamente para a melhoria de ensino de Matemática em nosso país”* (Revista Eureka! número 1-1998, Pág. 2). As atividades na revista eram voltadas aos alunos do 6º ano do ensino fundamental até a 3ª série do ensino médio e, consequentemente, aos professores da rede básica.

Sendo o principal instrumento de divulgação da OBM, os artigos publicados serviam como material de apoio e preparação paras as diversas competições de

Olimpíadas de Matemática (Nacional e Internacional). Começou sendo editada três vezes ao ano (1998 até 2003), passou para duas vezes ao ano (2004 até 2012) e por fim, uma vez ao ano (2013 até 2016). A partir de 2016 não houve mais publicação da revista. (OBM, 2019).

Também em 1998, foi criada a "Semana Olímpica", envolvendo apenas os alunos medalhistas da OBM. Durante esta semana, os alunos participavam de palestras, realizadas por professores de várias partes do Brasil, com muita experiência em treinamento olímpico. Nesse espaço era o momento de interagir com os outros jovens em atividades de lazer. No final do evento, ocorria a Cerimônia de Premiação da OBM. Uma curiosidade desse evento era a "Vingança Olímpica", momento em que os alunos medalhistas, criavam problemas no intuito de "Vingar-se" dos seus professores, claro que o termo "Vingança" era usado como ironia (OBM,2019).

Ao longo dos anos a OBM passou por diversas modificações em sua formatação, principalmente no que diz respeito as diferentes fases da competição, as quais não mencionei, mas para um leitor mais interessado sugiro o acesso ao site da OBM. O que venho chamar a atenção nesse momento foi a última mudança ocorrida no ano de 2017, na qual a competição passa a ser realizada em fase única para os níveis 1, 2 e 3, e seus participantes agora, são alunos convidados levando em consideração o seu desempenho nas provas da OBMEP.

Essa integração é muito importante, pois a competição passa a ganhar maior visibilidade e deixa de ficar restrita aos alunos de escolas privadas e colégio federais. Possibilitando, agora, o acesso de alunos oriundos das instituições estaduais e municipais. De acordo com NASCIMENTO (2014) essa integração das olimpíadas já era prevista desde a criação da OBMEP que tinha como meta *"motivar alunos e professores da rede pública no estudo da matemática e dentro de 10 anos integrá-los a OBM"*[8] o que expandiu a abrangência das competições e impulsionou mudanças no Ensino da Matemática em todo o país.

---

[8] Entrevista realizada com os ex-presidentes da SBM, como parte de sua pesquisa de tese de doutorado. Pode ser acessado no link <https://www.acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/36524/R%20-%20T%20-%20LUCIANO%20CAVALCANTI%20DO%20NASCIMENTO.pdf?sequence=1>,p.104.

2.4 Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP)

A primeira edição das Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aconteceu em 2005 e teve como idealizadores o professor César Camacho, diretor geral do IMPA e a professora Suely Druck, presidente da Socidade Brasileira de Matemática (SBM). Contou com o apoio da Presidência da República e do governo federal, especialmente do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações e do Ministério da Educação. (Revista OBMEP 12 anos, 2017)

O tocante projeto sofreu influência e se beneficiou de experiências que já aconteciam no Brasil tanto em nível nacional quanto regional.

> - A sua "irmã mais velha", a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), criada nos anos 70 pela SBM, que realiza competições em todo o Brasil e representa o país, com muito êxito, nos certames internacionais.
> - O projeto *Numeratizar,* criado e realizado no Ceará pelo professor João Lucas Barbosa, do qual a OBMEP pode ser considerada uma expansão nacional. (Revista OBMEP 12 anos, p. 12)

O projeto intitulado como "Linguagem dos Números – Numeratizar", surge no ano de 2013 no Estado do Ceará, sob a supervisão da Universidade Federal do Ceará (UFC) sendo voltado exclusivamente para alunos de escolas públicas. Esse projeto teve como motivação os resultados positivos das Olimpíadas de Matemática realizadas em Fortaleza -CE para alunos da rede privada. Por ter sido considerado um projeto de inclusão social, o "Numeratizar" marcou um movimento importante no que se refere a criação de políticas educacionais voltadas para a qualificação do Ensino da Matemática direcionadas as diferentes classes sociais.

Vale ressaltar que é a primeira vez que temos uma olimpíada de matemática voltada aos alunos de escolas públicas em nível estadual. Sua primeira edição em 2003 contou com a participação, na primeira fase, de 110.995 alunos das 646 escolas distribuídas nos 190 municípios do Estado do Ceará, dos quais 5.587 foram selecionados para a segunda fase e 346 estudantes foram premiados. A competição ficou direcionada aos alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental e 1ª série do ensino médio. (Barbosa, site, 2007)

De acordo com Maciel (2009, p.55 e 56), o projeto ocorreria em duas fases. A primeira dedicada a identificar novos talentos na área da matemática e a segunda voltada a fomentar o avanço nos estudos. A respeito desta última etapa, destaca-se o planejamento realizado em 2004 pelo professor Dr. Antônio Caminha Muniz Neto no qual enfatiza as inovações em “programas de treinamentos e orientação educacional”, que ficariam voltados aos primeiros colocados da 1ª fase do projeto e aos professores interessados.

Pouco tempo depois, o projeto perdeu sua força inicial, dando origem a OBMEP, considerada uma expansão nacional do NUMERATIZAR devido a forma como foi apresentada: *“Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): Um projeto de inclusão social inspirado no Projeto NUMERATIZAR do Estado do Ceará”* (OBMEP, s.d).

Sua primeira edição em 2005, envolveu mais de 10 milhões de estudantes de todo o país, sendo considerada a maior competição de matemática do mundo em termos de participação dos alunos. Seus objetivos principais são:

> - Estimular e promover o estudo da Matemática;
> - Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
> - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
> - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
> - Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
> - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. (OBMEP, s.d.)

O público alvo dessa competição são alunos desde o Ensino Fundamental II até o final do Ensino Médio de escolas públicas municipais, estaduais e federais. Os alunos participantes são divididos em três níveis, de acordo com o grau de escolaridade, o nível 1 (6º e 7º do ensino fundamental), nível 2 (8º e 9º ano do ensino fundamental) e nível 3 (todo o ensino médio).

A prova acontece em duas fases. Sendo a primeira composta de 20 questões objetivas, com cinco opções e apenas uma correta. Cada questão vale 1 ponto, totalizando vinte pontos no máximo. Os alunos realizam a prova na própria escola no período de 2h:30m (duas horas e trinta minutos), podendo ter o tempo aumentado em uma hora, no caso de alunos com necessidades especiais. Cabe a escola inscrita a aplicação e correção das provas, bem como o envio dos cartões de resposta de acordo com as orientações enviadas pelo IMPA. Apenas 5% do total de alunos inscritos, por nível, podem ser classificados para a segunda fase, que leva em consideração as maiores notas obtidas.

Já a segunda fase, de caráter classificatório, destinada a todos os aprovados na primeira etapa, é constituída de 6 (seis) questões discursivas, valendo até 20 (vinte) pontos cada, totalizando 120 (cento e vinte) pontos no máximo. A prova tem duração de 3h (três horas), podendo durar até 4h (quatro horas) no caso de estudantes com necessidade especiais. Em geral, são realizadas aos sábados e aplicadas pelo IMPA nos espaços cedidos pelas escolas participantes.

Nesta segunda etapa fica sob responsabilidade do IMPA a correção da prova, realizada em duas etapas: correção regional e nacional. Em cada uma delas, a prova será corrigida e revisada pelo menos uma vez por corretores diferentes, definindo ao final a pontuação obtida. Os alunos com melhor desempenho podem ser premiados com medalha (de ouro, prata ou bronze) ou Certificado de Menção Honrosa, seguindo uma ordem decrescente de notas.

Vale salientar as mudanças ocorridas no ano de 2017 quando a competição passou a se chamar "Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública + Escola Privada" (OBMEP) em decorrência de sua integração com a OBM, que a partir dessa data, passou a ser realizada em fase única, substituindo a primeira e segunda fase pelos resultados obtidos pelos alunos na OBMEP.

Em 2018, foi criada a OBMEP nível A que teve a participação de 1,5 milhão de estudantes do 4º e 5º ano do ensino fundamental de escolas públicas municipais, estaduais e federais. Apesar dessa competição seguir os mesmos objetivos que a OBMEP, sua prova é realizada em fase única, e composta por 15 (quinze) questões objetivas, abrangendo conteúdos de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais. Fica sob responsabilidade das escolas inscritas, a aplicação, correção e eventuais cerimônias de premiação (OBMEP, 2019).

Atualmente, com a universalização das olimpíadas de matemática, os estudantes de diferentes classes sociais têm acesso as diversas competições tanto em nível nacional como internacional, sobre as quais discorreremos brevemente na seção a seguir.

2.5 Competições com Participação de Brasileiros

Em um evento realizado em comemoração dos 40 anos da OBM o professor Edmilson Mota[9] destaca que *"com a criação de vários tipos de olimpíadas, todo mundo encontra espaço para ser feliz. A escola pode não ser premiada na olimpíada X, mas pode ser na Y"*[10]. Tamanho tem sido o sucesso com as olimpíadas, que hoje temos jovens brasileiros de todo o país envolvidos nas mais diversas competições, seja ela nacional, regional ou internacional. A seguir apresento algumas competições com participação de brasileiros, sobre as quais maiores informações podem ser encontradas no site da OBM.

NACIONAL

- Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas + Escola privadas (OBMEP)
- Torneio Mulheres na Matemática (TM^2)

INTERNACIONAL

- Olimpíada Internacional de Matemática – IMO
- Olimpíada Iberoamericana de Matemática – OIM
- Olimpíada de Matemática do Cone Sul
- Olimpíada de Maio
- Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária – OIMU
- Internacional Mathematica Competition for University Students – IMC
- Romanian Master of Mathematics – RMM
- Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática – CIIM
- Asian Pacifc Mathematics Olympiad – APMO
- Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa – OMCPL
- Canguru de Matemática Brasil
- Concurso Universitário de Matemática Galois Noether
- Olimpíada Iraniana de Geometria – IGO
- European Girls'Mathematical Olympiad – EGMO

REGIONAL

- Olimpíada Alagoana de Matemática e Matfest
- Olimpíada Parintinense de Matemática
- Olimpíada de Matemática do Estado da Bahia – OMEBA
- Olimpíada Cearense de Matemática

[9] Edmilson mota, atualmente é professor do colégio etapa e membro Nacional de Olimpíada de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).
[10]

- Olimpíada Capixaba de Matemática
- Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
- Olimpíada Mineira de Matemática
- Olimpíada Lavrense de Matemática
- Olimpíada Sul Matogrossense de Matemática
- Olimpíada Regional de Matemática de Barra do Bugres
- Olimpíada Pessoense de Matemática
- Olimpíada Campinense de Matemática, Professor José Vieira Alves
- Olimpíada Pernambucana de Matemática – OPM
- Olimpíada Pontagrossente de Matemática
- Olimpíada Paranaense de Matemática
- Olimpíada de Matemática de Maringá e Região
- Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro
- Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte
- Olimpíada de Matemática UNIVATES (Lajeado – RS)
- Olimpíada de Matemática da Grande Porto Alegre
- Olimpíada de Matemática da Região Central
- Olimpíada Regional de Matemática – Santa Catarina
- Olimpíada Sergipanas de Matemática
- Olimpíada Paulista de Matemática
- Olimpíada de Matemática do Grande ABC
- Olimpíada Regional de Matemática de Rio Preto
- Olimpíada São Carlense de Matemática
- Olimpíada de Matemática do Distrito Federal – OMDF
- Olimpíada Nepomucense de Matemática e Festival de Poesias
- Olimpíada Trespontana de Matemática e Festival de Poesias
- Olimpíada Bom-sucessense e Ibiturunense de Matemática e Festival de Poesias

É possível observar que toda a trajetória que deu origem às olimpíadas de matemática bem como o papel por ela desempenhado tem sido extremamente significativo na busca de jovens talentos e, principalmente, no incentivo ao ingresso nas universidades em áreas científicas e tecnológicas.

Assim, as olimpíadas, vista como uma política pública, tornam-se uma ferramenta poderosa e indispensável para mudar, elevar e melhorar a qualidade do ensino-aprendizagem da matemática no país. Nesse sentido, se faz cada vez mais necessário a integração das escolas com as universidades, que constituem um elo importante para o desenvolvimento de pesquisas e ampliação da comunidade científica, incentivando o aperfeiçoamento de professores da educação básica e contribuindo para sua valorização profissional.

Quando falamos em Educação Matemática cabe refletir a respeito das práticas pedagógicas voltadas ao seu ensino e, mais especificamente, sobre como as olimpíadas são utilizadas como instrumento para esse fim. Os problemas que cercam essa competição têm como intuito estimular a criatividade e o raciocínio dos alunos, entretanto muitos educadores destacam que o excesso de treinamento pode provocar o efeito oposto.

> Se ele [o professor] dedica seu tempo alocado à perfuração de seus alunos em operações rotineiras, ele mata o interesse deles, dificulta o desenvolvimento intelectual e aproveita mal as oportunidades. Mas se ele desafia a curiosidade de seus alunos, colocando-os problemas proporcionais ao seu conhecimento e ajudando-os a resolvê-los com perguntas estimulantes, ele pode dar-lhes um gosto e alguns meios de pensamento independente (POLYA,1944, prefácio)

As olimpíadas de matemática, ao meu ver, devem ser vistas como a última etapa de um trabalho realizado durante todo o ano, de promover e estimular o estudo desta disciplina. Uma vez que, o mais importante nessa competição é alimentar uma cultura da matemática na sociedade. É justamente nessa perspectiva que busco evidenciar como as olimpíadas de matemática podem vir a contribuir para novas práticas pedagógicas na educação básica, principalmente quando se adota uma metodologia de Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas que, em minha experiência, tem sido indispensável para a construção de um processo de ensino-aprendizagem significativo para os alunos da rede básica e pública de ensino.

3. ENSINO DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> *Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades investigativas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (**POLYA, 1944, prefácio**)*

Nesse capítulo, falaremos a respeito da metodologia de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas e suas possíveis relações com as Olimpíadas. Veremos, inclusive, o quanto é recente essa concepção sobre a resolução de problemas como um ponto de partida para o Ensino da Matemática e que nem sempre essa perspectiva foi bem compreendida pelos educadores da disciplina ao longo de sua história,

> Entretanto, não havia coerência e clareza na direção necessária para se atingir bons resultados com o ensino de Matemática apoiado na resolução de problemas; ou seja, não havia concordância quanto à forma pela qual esse objetivo seria alcançado. (ONUCHIC; ALEVATTO, 2011, p.78)

Embora os registros históricos apontem que os problemas fazem parte da matemática, é importante destacar que a termologia “Problema” e “Resolução de Problema” tem ganhado diferentes significados nos diversos contextos em que foram empregados. Com isso, é natural buscar compreender o que os estudiosos da educação matemática ponderam a respeito do conceito de problema. Ainda hoje, é comum nas aulas de matemática o professor usar essas termologias sem nenhuma distinção, muitas vezes tratando “problemas” e “exercícios” como sinônimos. Dessa forma, a compreensão sobre esses conceitos se torna fundamental para que se estabeleça uma análise dessa metodologia de ensino, visando responder as seguintes perguntas: O que é um problema? O que é um problema matemático? O que se entende por Resolução de Problemas? Quais são os tipos de problemas?

No contexto do Ensino da Matemática, ONICHIC (1999) aponta que existiam diferenças de entendimento ou tratamento que se faziam a “respeito da resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”. Nesse viés, recorre ao trabalho de

Schroeder e Lester (1989)[11], que esclarece três modos em que os estudos sobre a resolução de problemas poderiam ser abordadas, embora na teoria sejam separados na prática se sobrepõem: (1) ensinar sobre resolução de problemas; (2) ensinar Matemática para resolver problemas; e (3) ensinar matemática através da resolução de problemas. Cada uma dessas tendências não deve ser apresentada de forma isolada, o que se espera é que sejam abordadas em consonância às circunstâncias em que o ensino se realize.

Quando se fala em ensinar sobre resolução de problemas, temos como referência os trabalhos brilhantes desenvolvidos pelo matemático George Polya (1944)[12] em seus estudos da Heurística e dos métodos e estratégias de resolução de problemas. Vale destacar que nesse período "a *ênfase do ensino de Matemática estava sendo colocada na aritmética significativa".* ONUCHIC, ALLEVATO (2011, p.78).

ALLEVATO (2011), destaca que a partir do século XX com o movimento de reforma da Matemática Moderna durante a década de 60 e 70 o Ensino da Matemática tinha como ênfase a teoria dos conjuntos, apoiados em estruturas lógicas, algébrica, topológica e de ordem. A partir desse momento, mais especificamente na década de 80, surgem algumas interpretações, uma delas é que a resolução de problemas se daria após o estudo da matemática formal, baseado na ideia de se ensinar matemática para resolver problemas, que funcionava na prática como uma aplicação de conceitos anteriormente aprendidos.

Foi somente a partir da década de 90, após uma sequência de publicações da National Council of Teachers of Mathematics – NTCM[13], que educadores matemáticos passaram a pensar no ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas. Essa nova perspectiva começou a influenciar o Ensino de Matemática no Brasil, como destacado pelo PCN – Parâmetros Curriculares Nacional – que coloca a concepção de que a "*Resolução de problemas é um caminho para o ensino de Matemática",* PCN (1997, p.22). Neste sentido, não podemos deixar de prestigiar o

---

[11] SCHROEDER, T. L.; LESTER JR. F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). *New Directions for Elementary School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

[12] Essa obra foi traduzida para o português como: *A Arte de Resolver Problemas*, publicada pela Editora Interciência, no ano de 1986 (1ª reimpressão).

[13] NCTM —"Conselho Nacional de Professores de Matemática" - É a principal organização dos Estados Unidos.

importante trabalho desenvolvido pelo GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, criado em 1992 e sendo sempre coordenado pela professora Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic - que tem construído, ao longo desses anos, importantes conhecimentos sobre essa temática da Educação Matemática, a qual se apoia o referencial teórico desse capítulo. Nas palavras da autora,

> *a razão mais importante para esse tipo de ensino-aprendizagem é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática e de que o ensino pode ser feito por meio da resolução de problemas”*. (ONUCHIC, 1999, p.208)

Dessa forma, temos que pensar em novas práticas pedagógicas para adotar essa metodologia no Ensino da Matemática no contexto das salas de aula. Sendo assim, compreendo os problemas da OBMEP e o material produzido pelo IMPA como um campo propício para o desenvolvimento de possibilidades promissoras para a estruturação de um processo de ensino-aprendizagem significativo, que a partir do envolvimento dos alunos com competições matemáticas, conseguem tornar as aulas mais atrativas e dinâmicas, tornando-os sujeitos da construção do conhecimento e trabalhando a sua autoestima.

3.1 O Conceito de Problema na Matemática

A relação dos indivíduos com o conhecimento matemático tem suas raízes numa perspectiva histórica da resolução de problemas. Essas experiências têm base milenar, vide registros históricos que demonstram o uso da matemática por egípcios, gregos, romanos e chineses desde a antiguidade. Os conhecimentos estavam sempre voltados a resolver problemas da ordem “prática”, vinculados a uma situação real, seja ela de teor econômico, agrícola ou demais áreas. O Papiro de Rhind ou Ahmes[14] exemplifica bem como se dava a construção do conhecimento matemático neste período reunindo 84 problemas vividos no cotidiano do Antigo Egito.

Quando usamos o termo “Resolver Problemas” é preciso ter em mente que os problemas podem surgir em diferentes áreas de conhecimento, e dessa forma, é importante a compreensão do que seja um problema e, mais especificamente, o que é

---

[14] O Papiro de Rhind ou Ahmes – Um dos documentos mais antigos da matemática, datado aproximadamente no ano de 1650 a.C., em escrita hierática pelo escriba Ahmes.

um problema na matemática. Além disso, "*as definições de problemas são estreitamente relacionadas ao seu uso na prática pedagógica, assim como a concepção de "resolver problema"*". LAMONATO (2011, p. 60 - 61). A seguir apresentaremos a definição sob o ponto de vista de alguns autores.

> Estabelecemos que problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em saber. (Onuchic, 1999, p.215).
>
> Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta (Onichic; Allevato, 2004, p.221 apud Van de Walle 2001)
>
> O que é um problema? É qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. (DANTE, 2003, p.9)
>
> Um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para quem tenta resolvê-lo, e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. (DANTE, 2000, p.10)
>
> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la (PCN,1997, p.31)

Podemos dizer que estamos diante de um "problema" quando não conhecemos os caminhos a serem percorridos para chegar ao resultado correto, mas é possível construí-lo, desde que haja interesse em saber. Se essas atividades de descoberta envolvem informações matemáticas, então teremos um "problema matemático".

Doravante os "problemas" que serão apresentados nesse trabalho estarão relacionados ao que classificamos como "problema matemático". Dessa forma, é importante estabelecer as distinções entre os termos problema e exercício, que apesar de serem abordados de forma indiscriminada nas aulas de matemática apresentam discrepâncias fundamentais quanto ao caminho percorrido pelas resoluções. Uma vez que, quando nos referimos aos exercícios temos o caminho inverso do que se espera obter com a solução de um "problema", já que nesse caso, a solução viria a partir de procedimentos padronizados, por uma regra, fórmula ou aplicação de algoritmo, que o aluno iria reproduzir após a apresentação de um modelo.

Diversos estudiosos da educação matemática ao longo dos anos publicaram trabalhos nos quais *"[...] podem ser encontrados muitos conceitos de problema adjetivados, refletindo qualidades específicas que deles se espera [...]. Na realidade,* *são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias", (*ONICHIC; ALLEVATO, 2011, p.81).

Para DANTE (2003, p.16-21), as classificações dos problemas ocorriam da seguinte forma:

- ***Exercícios de reconhecimento:*** Seu objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade etc.

- ***Exercícios de Algoritmos:*** São aqueles que podem ser resolvidos passo a passo. Geralmente, no nível elementar, que pedem a execução de algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais.

- ***Problemas Padrão:*** O objetivo desses problemas é recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos das quatro operações fundamentais, além de reforçar o vínculo existente entre essas operações e seu emprego nas situações do dia-a-dia. De um modo geral, eles não aguçam a curiosidade do aluno nem o desafiam.

- ***Problemas-processo ou Heurístico:*** São problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidas diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução. [...] Os problemas-processos aguçam a curiosidade do aluno e permitem que ele desenvolva sua criatividade, sua iniciativa e seu espírito explorador.

- ***Problemas de Aplicação ou situação-problema:*** São aqueles que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. São também chamados de situações-problema.

- ***Problemas de quebra cabeça:*** São problemas que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Geralmente constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou facilidade de perceber algum truque, que é a chave da solução.

De acordo com ALLEVATO (2011), as classificações dos problemas auxiliariam a identificar as estratégias que serão utilizadas para sua resolução, admitindo que para cada uma delas exija uma abordagem diferente. Porém, há uma divergência a respeito dessa classificação quanto aos seus objetivos didáticos na educação matemática. Sendo exposto por LOPES (1994), numa crítica feita à DANTE:

> Tais classificações pouco auxiliam os professores na compreensão e exploração das atividades de resolução de problemas e expressam uma visão reducionista no que se refere a objetivos didáticos e educacionais pretendidos pela Educação Matemática. (LOPES, 1994, p.34).

Ainda de acordo com autor, ele destaca que ao se preparar uma atividade de resolução de problemas o foco não deveria ser sua classificação, mas sim *"o potencial do problema no desenvolvimento de capacidades cognitivas, procedimentos e atitudes e na construção de conceitos e aquisição de fatos da Matemática"* (LOPES, 1994, p.40).

Podemos considerar que, ao se preparar uma atividade de resolução de problemas, a essência não deve ser a classificação dos problemas e sim os objetivos didáticos pretendidos alcançar com sua resolução, dessa forma a escolha dos problemas se torna fundamental para construção de conceitos na matemática, cabendo a classificação deles, apenas como uma forma de auxiliar nas estratégias de resolução. Neste momento, se faz necessário discutir e refletir o que os educadores matemáticos pensam a respeito da resolução de problemas. Para depois compreender o que se deseja alcançar com seu ensino. Um tema que embora seja tão presente na sala de aula, são poucas as relações feitas a respeito de seu uso em práticas pedagógicas.

3.2 A Resolução de Problemas no contexto do Ensino

Como já foi dito, os problemas têm suas raízes milenares, podendo ter ou não uma relação com a matemática. Entretanto, é de se esperar, em qualquer um dos casos, que haja um interesse envolvido, ou mesmo uma necessidade de buscar uma forma para chegar a sua solução. Os problemas fazem parte do dia a dia escolar e levar essa discussão para o campo do processo de ensino-aprendizagem da matemática é uma ação que impulsiona o desenvolvimento de alguma habilidade do aluno em resolver problemas. Dessa maneira, perceberemos que o conceito de resolução problemas está intimamente relacionado com sua prática e, por isso, para dar significado e entender o seu papel no contexto escolar devemos primeiro analisar o que os estudiosos e educadores matemáticos dizem a respeito deste importante conceito.

Na literatura da Educação Matemática diversos autores têm apresentado alguns modos de pensar e abordar a resolução de problemas, como evidencia LAMONATO (2011) ao analisar as três divisões propostas por ONUCHIC (1999, p.2006) apud SCHROEDER e LESTER , STANIC e KILPATRICK (1989), MENDONÇA

(1999) e BRANCA (1997) .Neste trabalho dedicar-me-ei a divisão proposta por SCHROEDER e LESTER, que apresenta da seguinte forma: (1) ensinar sobre a resolução de problemas; (2) ensinar para resolver problemas e (3) ensinar matemática através da resolução de problemas.

Nesse primeiro caso, mais precisamente no final da década de 50 nos Estados Unidos, a resolução de problemas é vista num contexto em que o grande objetivo do Ensino da Matemática é desenvolver nos estudantes técnicas e procedimentos que os tornem bons "resolvedores" de problemas. Dessa forma, o ensino da resolução de problemas estava centrado no desenvolvimento de estratégia para chegar as soluções, apesar de ser considerada uma experiência bem-sucedida não havia uma preocupação com o processo na resolução de problemas.

Nesse sentido, vários autores ao longo de sua história atuaram nessa perspectiva, sendo o pioneiro e mais famoso deles, o matemático Húngaro Georg Polya, cujos trabalhos estavam voltados para o estudo dos métodos de resolução, chamados de Heurística. De acordo com Polya (2006), para chegar na solução correta de um problema eram necessárias quatro fases, "Compreensão do Problema", "Estabelecimento de um plano", "Execução do plano" e "retrospecto", ao distinguir essas fases ele considera:

> Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (POLYA, 2006, p.4-5).

Polya (2006), descreve na tabela abaixo uma lista de indagações e sugestões que poderiam ser usadas por estudantes e professores para chegar na solução correta de um problema.

Tabela 1 - Como Resolver um Problema

COMPREENSÃO DO PROBLEMA	
Primeiro É preciso compreender o problema.	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou

	redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas parte da condicionante. É possível anotá-las?
ESTABELECIMENTO DE UM PLANO	
Segundo Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano.	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte as definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximo entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
EXECUÇÃO DO PLANO	
Terceiro Execute o plano	Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

RETROSPECTO	
Quarto Examine a solução obtida	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema?

Fonte: POLYA (2006, p. XIX – XX)

Ainda de acordo com Polya (2006, p.5) a escolha dos problemas tem um papel fundamental quanto ao seu ensino, eles devem apresentar um nível adequado de dificuldade e despertar no aluno um interesse em resolve-lo. Acrescentando, ainda, que *“[...] um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante”.*

Uma consequência dessa abordagem de ensino eram os efeitos ocasionados no currículo escolar, o qual se previa, como parte do programa, o estudo de métodos de resolução de problemas seja como conteúdo ou como disciplina a ser discutida no Ensino da Matemática.

Já a segunda abordagem, ensinar para resolver problemas, coloca como foco que a resolução de problemas aconteceria no Ensino da Matemática como uma aplicação de conceitos anteriormente estudados, o professor tinha o compromisso de fazer muitos exemplos e mostrar várias aplicações. *“[...]. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la. ”* ONICHIC (1999, p.206). Um risco que se corria, era o aluno ter a crença de que só era possível resolver um problema depois de aprender a dominar a matemática (o que não é verdade). Apesar de no contexto escolar, esse tipo de abordagem ter sua relevância para mostrar o aluno as aplicações da matemática no dia a dia, é preciso deixar claro que nem toda matemática tem uma aplicação próxima.

A terceira maneira de abordar o conceito de resolução de problemas, como um instrumento para o ensino na matemática, enfrentou dificuldades para se visto como uma metodologia de ensino e percorreu um longo caminho até se tornar um meio eficiente para ensinar matemática, como veremos a seguir.

3.3 A Resolução de Problemas Sob a Ótica de uma Metodologia de Ensino

De acordo com ONICHIC (1999), foi somente a partir da década de 60 que o ensino da resolução de problemas veio a ter uma preocupação com o seu processo. Já no final da década de 70, relata que começou um movimento no mundo inteiro a favor da resolução de problemas. Tendo ganhado mais visibilidade nos Estados Unidos em 1980 com a publicação do NCTM, cujo título pode ser traduzido para " Uma agenda de ação: Recomendações para a matemática escolar da década de 1980". O documento chamava a atenção de toda comunidade interessada em buscar uma melhoria para a educação matemática e dizia em sua primeira recomendação que "Resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80". Nessa época a autora ainda relata a dificuldade a respeito da compreensão dessa recomendação, pois questionava-se a forma pela qual esse objetivo seria alcançado no Ensino da Matemática apoiado na metodologia em questão.

Nesse período muitos recursos foram desenvolvidos e contribuíram para que os professores fizessem da resolução de problemas o foco de suas atividades. *"É importante dizer que os estudos da década de 1980 deram grande atenção ao processo de resolução de problemas, não se limitando à busca de solução."* ONUCHIC (1999, p.206). Ao final dos anos oitenta e durante a década de 90 *"[...] pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas*" ONUCHIC (1999, p.207). Referindo-se a esse momento, ONICHIC e ALLEVATO (2011, p.79) destacam que as publicações: *Curriculum and Evaluation Standards for the School Mathematics (NCTM, 1989), Professional Standards for School Mathematics (NCTM, 1991) e Assessment Standards for School Mathematics (NCTM, 1995)* foram fundamentais para que educadores matemáticos começarem a pensar na resolução de problemas como metodologia de ensino, ao colocar que o ensino-aprendizagem da matemática poderia ser feito por seu intermédio, sendo o problema visto com um ponto de partida e um meio de ensinar matemática. Assim, podemos dizer que:

> Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas. O ensino de resolução de problemas não é mais um processo isolado. Nessa metodologia o ensino é fruto de um processo mais amplo, um ensino que se faz por meio de resolução de problemas. ONUCHIC (1999, p.210 - 11).

Ainda nessa perspectiva, é interessante destacar qual seria a relação professor e aluno no processo de ensino-aprendizagem da matemática de acordo com essa metodologia. É importante salientar que os estudos de resolução de problemas sofreram influências de teorias construtivistas como afirma ONUCHIC (1999), nas quais o aluno passa a ser protagonista do processo, ganha um papel autônomo, sendo um ser ativo nesse meio. O professor deixa de ser visto como detentor do conhecimento e passa assumir o papel de mediador, orientando seus alunos no processo de ensino-aprendizagem. Ao considerar os deveres do professor quanto ao auxílio que o estudante deveria receber, POLYA (2006) coloca que:

> O Estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajuda demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. POLYA (2006, p.1).

Os estudiosos da educação matemática têm apontado diversos benefícios provenientes da adoção dessa metodologia de ensino nas salas de aula, destacando que a partir da mesma constrói-se um ensino-aprendizagem da matemática com “compreensão” e “significado”. O grupo de pesquisa GTERP liderado pela professora Lourdes Onuchic tem desenvolvido importantes trabalhos nessa linha de pesquisa, o que tem motivado diversas publicações de dissertação de mestrado e tese de doutorado e intensificado o desenvolvimento dessa metodologia nas escolas. Cabe aqui algumas indagações: Como esse material tem chegado ao professor da educação básica? Existe alguma recomendação ou sugestão que oriente os professores nesse processo? De fato, para responder essas perguntas, é necessário entender o que dizem os PCNs a respeito da temática apresentada e quais são as suas provisões para o Ensino de Matemáticas nas escolas.

3.4 O que dizem os PCNs a respeito da Resolução de Problemas

No Brasil, as publicações da NCTM: “Uma Agenda para Ação” na década de 80 foram importantes para construção dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, que inclusive, atesta que suas ideias influenciaram as reformas ocorridas em todo mundo no período de 1980/1995. O PCN tem sido um dos documentos mais importantes quando o assunto é orientar e auxiliar os professores quanto ao seu trabalho. *“Foram elaborados de modo a servir de referencial para o seu trabalho [no caso o professor], respeitando a sua concepção pedagógica própria e a pluralidade cultural brasileira [...] serão instrumento útil no apoio às discussões [...] na reflexão sobre a prática educativa”* PCN (1997, ao professor).

Sua elaboração contou com a participação de técnicos das secretarias, especialistas e educadores atuantes em diversas instituições de ensino público e privado dos variados Estado e Municípios brasileiros. Seus propósitos não devem ser confundidos com um pacote de ações pedagógicas que o professor deve seguir e impor, mas sim como um referencial de qualidade para educação em todo o País atentando as diversidades de cada região.

Apoiando-se nessas ideias e direcionando o foco para o Ensino da Matemática, os PCNs (1997, p.32) apontam alguns caminhos para “fazer matemática” na sala de aula, são esses: O recurso à Resolução de problemas, à História da Matemática, à Tecnologia da Informação e aos Jogos. Acrescentando ainda *“que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática”*, mas que os conhecimentos das diversas formas de trabalho auxiliariam o professor na construção de sua prática escolar.

Ao considerar o recurso à resolução de problemas, essa proposta se resumiria nos seguintes princípios:

> • o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
>
> • o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
>
> • aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
>
> • o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;

> • a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (PCN,1997, p.32)

Concordando com a autora ONUCHIC (1999, p.207), quando estabelece que *"[...] ensinar matemática através da resolução de problemas é a abordagem mais consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da resolução de problemas"*. Fica evidente que é cada vez mais necessário desenvolver atividades, que possibilitem nas salas de aula, mudanças de posturas em relação aos professores e alunos, referente a implementação de uma metodologia de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas.

Como poderemos exigir dos nossos alunos que eles sejam criativos e sujeitos do seu próprio conhecimento com uma prática docente que não desenvolve essas habilidades. Quando digo que problemas e exercícios são conceitos distintos na matemática, é para chamar atenção no tratamento que são dados aos mesmos no dia a dia escolar. Não que os "exercícios" deixem de ter o seu valor, o problema ocorre no seu uso excessivo, que, muitas das vezes, estimula uma crença de que para aprender matemática é necessário apenas aplicar fórmulas.

Sendo assim, é de se esperar que os alunos diante de um problema encontrem dificuldades em resolvê-los, não conseguindo relacioná-los. Já que são condicionados a utilizar uma série de procedimentos algoritmizados ou aplicar alguma fórmula como via para obter um resultado numérico. O que limita sua capacidade de pensar além das mesmas técnicas.

> Todavia, tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos.
> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. (PCN, 1997, p.32)

Muitas das vezes é possível observar a surpresa e inquietação dos alunos quando a solução de um problema é justamente mostrar que não existe solução. Como prova disso, somos indagados constantemente durante as aulas por perguntas como: “Professor, qual é a resposta? ”; “Quanto deu? ” etc.

Se um dos objetivos com a educação matemática é que o seu ensino-aprendizagem seja realizado com compreensão e significado, para que ao final desse processo os alunos, não só, aprendam matemática resolvendo problemas, mas também a usem para resolver problemas e ainda, tonando-se capazes de formular novos problemas, é preciso trazer para as salas de aula essa proposta e criar meios para que essa perspectiva se torne possível.

Nesse sentindo, vejo como um caminho promissor para essa finalidade envolver cada vez mais os alunos com as olimpíadas de matemática, em particular com a OBMEP. Uma vez que seus problemas, juntamente com o material produzido pelo IMPA, têm sido bons indicadores na formação de um referencial importante, tanto para professores quanto para os alunos, a respeito da prática dessa metodologia de Ensino da Matemática por meio da resolução de problemas,

A seguir falarei da minha experiência com o uso dessa metodologia de ensino no trabalho realizado com as olimpíadas de matemática para alunos de uma escola Estadual do Rio de Janeiro. Trabalho esse que me incutiu novas práticas pedagógicas, apresentando novas formas de Ensino da Matemática e sobretudo me inspirando a refletir sobre minha prática docente e sobre os rumos da educação matemática no Brasil, principalmente quanto aos seus propósitos para os alunos das escolas públicas, não somente referente a sua vida escolar, mas também quanto ao seu futuro acadêmico.

4. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PROGRAMA “OBMEP NA ESCOLA” – RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA.

A História das Olimpíadas de Matemática evidencia que os países do leste europeu foram fundamentais para criação dessa competição como as conhecemos hoje. Além disso, vimos que ano após ano vários países têm se integrado a essa competição que tomou rumos internacionais, disseminando e estimulando uma cultura da matemática na sociedade.

Há mais de um século existem os “Círculos Matemáticos”, uma tradição que ocorre em Moscou e também em outros países. Sua estrutura estava baseada na criação de um ambiente de aprendizagem que previa encontros semanais e não obrigatórios, onde os alunos eram orientados por tutores a desenvolverem suas habilidades e criatividade na resolução de problemas. Segundo Holanda (2018) os Círculos atendiam a três propósitos: *“Ensinar matemática através de resolução de problemas, aproximar pesquisadores experientes a jovens talentos e promover a emulação através de competições imbuídas do espírito olímpico. ”*

Essas tradições dos Círculos de Matemática também chegaram ao Brasil e inspirou os programas atualmente voltados para as olimpíadas de matemática. Nesse capítulo falaremos a respeito desses programas, mais precisamente sobre o “OBMEP na Escola”, com o qual tenho atuado desde 2016, acumulando experiência e resultados positivos. Uma atuação que fez, inclusive, refletir acerca das minhas práticas pedagógicas e estimulou uma cultura da matemática na minha escola.

4.1 Programas voltados para educação básica relacionados a OBMEP

Atualmente existem diversos programas espalhados pelo Brasil que oferecem treinamento para as Olimpíadas de Matemática, sejam elas Municipais, Estaduais, Nacionais ou Internacionais. O foco nessa seção está nos programas voltados para a Educação Básica que se encontram vinculados à participação dos alunos na OBMEP. A seguir, destaco os três principais:

Programa de Iniciação Cientifica Jr. - PIC

Voltado para alunos medalhista na OBMEP dos níveis 1, 2 ou 3. A intenção inicial é promover o contato desse jovem aluno com a Universidade, estimulado a criatividade e o raciocínio por meio do confronto com problemas interessantes do ramo da Matemática. Como parte das atividades, os alunos são treinados quanto ao rigor da leitura e da escrita de resultados matemáticos. Pretende-se despertar sua vocação científica e prepará-los para um futuro desempenho profissional e acadêmico. Em caso de desistência, a vaga também pode ser preenchida por alunos premiados com Menção Honrosa. (OBMEP, s.d.).

A participação do estudante ocorre de duas maneiras: PIC Presencial ou PIC a Distância. No primeiro caso, é direcionado aos alunos que residem perto de um polo de Iniciação Científica ou que consigam se deslocar até ele. Em geral os encontros presenciais são realizados aos sábados. No caso dos alunos que não podem participar dos encontros presenciais é oferecida a modalidade do PIC à distância, com aulas virtuais. O fluxograma abaixo, extraído das diretrizes do programa, simplificam a distinção dos alunos.

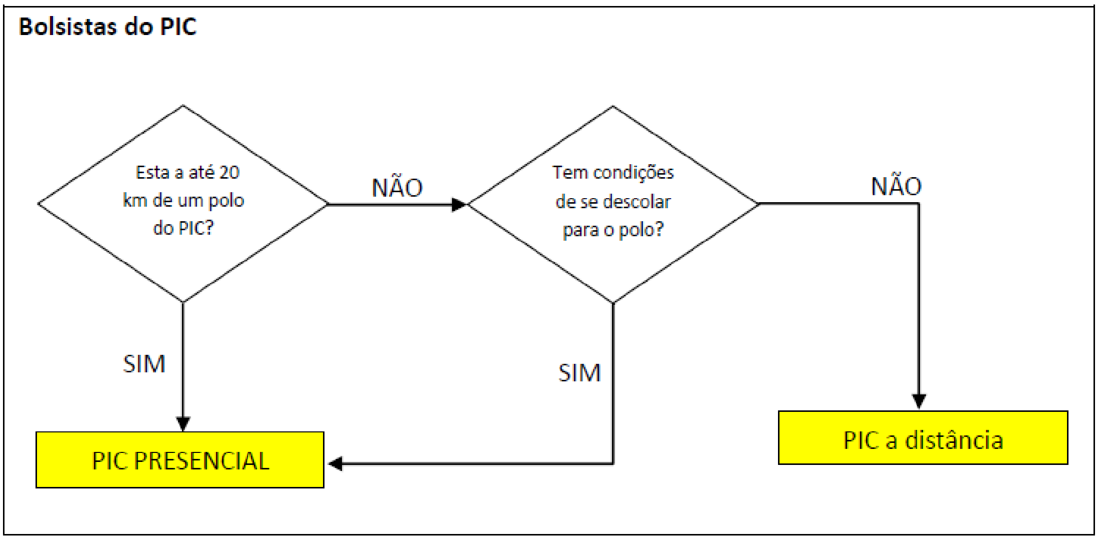


Figura 1 - Fluxograma do PIC

Fonte: Diretrizes do PIC e OBMEP na Escola

Em ambas as modalidades os alunos possuem atividades em um ambiente virtual de aprendizagem elaborado pela OBMEP, no qual devem cumprir tarefas obrigatórias e avaliações. Como estímulo à manutenção dos estudos, os alunos recebem uma bolsa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

O coordenador da região, que é um professor universitário, indicará alunos de sua instituição para atuar como professores do PIC ou como monitores do fórum, estando esses sob sua supervisão. As aulas são organizadas em ciclos, normalmente oito, com duração de até quatro semanas cada um. Sendo que cada ciclo é dividido em dois encontros com duração de quatro horas cada. A medida em que os alunos se tornem “veteranos” em participação no PIC, outras oportunidades lhes são oferecidas.

Mentores OBMEP

O programa Mentores da OBMEP é destinado aos alunos que já participaram do PIC presencial ou a distância mais de duas vezes, no qual cumpriram pelo menos uma dessas multiplicidade pelo nível 3. As atividades são ministradas por professores universitários, que pode ser o próprio coordenador ou um professor indicado por ele, ofertando cursos sobre tópicos específicos que envolvam a matemática ou áreas afins. De forma similar ao que acontece no PIC, são oferecidas as modalidades presenciais ou a distância em consonância as limitações de trânsito dos alunos e os mesmos também recebem uma bolsa de estudos pela CNPq. Possui plataforma própria, com recursos diferenciais, como videoconferências, fóruns e chat online. A seleção desse grupo mais seleto, pode ser melhor compreendida pelo fluxograma abaixo, disponível nas diretrizes do programa.

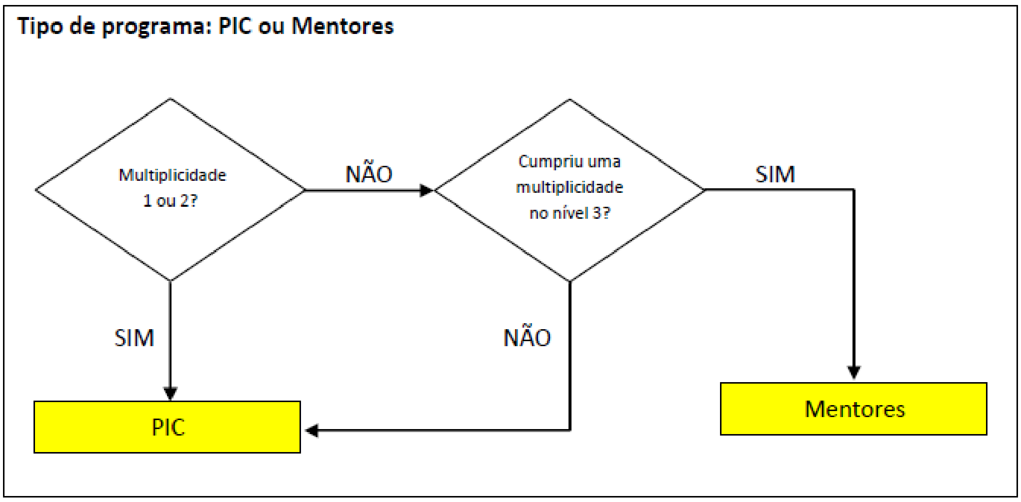


Figura 2: Fluxograma do PIC e Mentores

Fonte: Diretrizes do PIC e OBMEP na Escola

OBMEP na Escola

O programa “OBMEP na Escola” está associado à Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP), tem como um dos objetivos principais:

> Melhorar a qualidade do ensino da matemática nas escolas públicas do país, estimulando a adoção em sala de aula de novas práticas pedagógicas e do material didático produzido pelo IMPA para a OBMEP, e incentivando a criação de atividades extraclasse vinculadas às provas da Olimpíada. (OBMEP, 2019)

O projeto é voltado para professores de matemática que atuam na rede pública de ensino municipal ou estadual, com no mínimo dois anos de experiência e que tenham sido aprovados na “Prova de Habilitação”.

A implementação do programa na escola ocorre sob a orientação da Coordenação de Programas de Extensão Acadêmica do IMPA e com a autorização da Diretoria da unidade escolar. O “professor habilitado” deve selecionar um nível (1, 2 ou 3) para atuar e formar uma turma com pelo menos 20 alunos da sua escola de origem ou das escolas vizinhas, condizentes com o nível escolhido. Deve definir um dia na semana, o horário e o local, em que irá ministrar, no contraturno, duas aulas por mês com duração de quatro horas cada.

A próxima etapa, foi selecionar a escola em que seria direcionado o projeto. E a escolha do Colégio Estadual Manuel de Abreu levou em consideração dois fatores importantes: primeiramente era a questão numérica, eram necessários pelo menos vinte alunos interessados em fazer parte do projeto, o que foi facilitado pela quantidade de turmas da escola e a clientela que a mesma atende. Outro ponto importante, estava relacionada a pouca tradição e informação a respeito da OBMEP tanto por parte dos alunos quanto dos professores e gestores, que acabaram influenciando minha decisão. Desde então tenho me dedicado ao trabalho realizado com os alunos do Nível 2 (8º e 9º ano do Ensino Fundamental).

O projeto está organizado em sete ciclos (de março a outubro) com duração de até quatro semanas cada um, cada ciclo é estruturado em três momentos. Sendo o primeiro um encontro de quatro horas entre os professores e o Coordenador, onde são analisados os conteúdos do planejamento discutindo questões de estratégias para o desenvolvimento dos conteúdos. Os outros dois momentos são referentes as aulas ministradas pelo “Professor Habilitado”, após o planejamento. A tabela a seguir indica os assuntos a serem abordados em cada ciclo e encontro.

Tabela 2: Ciclos e aulas do Programa "OBMEP na Escola"

	ENCONTRO 1	**ENCONTRO 2**
CICLO 01	• Paridade • O sistema decimal: representações e operações numéricas.	• Divisão Euclidiana. • Fenômenos periódicos: padrões numéricos.
CICLO 02	• Princípios aditivo e multiplicativo: identificar, modelar e resolver situações-problemas correlatas aos princípios.	• Noções básicas de probabilidade.
CICLO 03	• Áreas e perímetros de figuras planas.	• Congruências de triângulos. • Paralelismo: soma dos ângulos internos de um triângulo, propriedades e caracterização dos quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango).
CICLO 04	• Múltiplos, divisores e primos. • Algoritmo de Euclides: MDC e MMC.	• Razões e proporções; • Função Afim: interpretações de gráficos de funções afins e tabelas.

CICLO 05	• Explorando o uso de "simetrias" na resolução de problemas. • Explorando a inserção de "ambientes recreativos" ao processo de ensino-aprendizagem.	• Explorando o uso de "padrões" na resolução de problemas. • Explorando o "reconhecimento de representações numéricas, gráficas ou geométricas" em problemas de modelagem.
CICLO 06	• Semelhança de triângulos. • Teorema de Tales.	• Relações métricas no triângulo retângulo: o teorema de Pitágoras.
CICLO 07	• Problemas variados de provas anteriores da OBMEP e dos Bancos de Questões. Por uma opção didática, iremos direcionar as questões para os assuntos "aritmética ou contagem".	• Problemas variados de provas anteriores da OBMEP e dos Bancos de Questões. Por uma opção didática, iremos direcionar as questões para os assuntos "geometria".

Fonte: Roteiro de atividades do Programa OBMEP na Escola

Vale destacar que diferentemente do que ocorre nos dois projetos anteriores, os alunos que fazem parte do programa "OBMEP na Escola" são convidados pelo "Professor Habilitado" e não recebem nenhum auxílio financeiro comprometendo-se a participar do programa para buscar mais conhecimentos na área da matemática. Não existe também a possibilidade de o projeto ocorrer a distância.

4.2 Experiência do projeto no Colégio Estadual Manuel de Abreu – RJ

Minhas atividades no Colégio Estadual Manuel de Abreu como regente de turma iniciaram-se em 2014. Nesse mesmo ano, por influência de colegas de trabalho de outra escola, tive o privilégio de conhecer as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. A primeira impressão com a prova de nível 1 me fez perceber a criatividade e engenhosidade dos problemas cujas soluções envolviam ideias simples que demandava dos alunos o exercício da reflexão como requisito para chegar a suas respostas.

Nas buscas por mais informações a respeito das olimpíadas de matemática cheguei ao conhecimento sobre a prova de habilitação para o “Programa OBMEP na Escola. Assim, após a aprovação na prova os professores deveriam enviar um projeto, que tinha como uma de suas finalidades melhorar o desempenho dos alunos nas fases da OBMEP, com previsão de início das atividades para o ano seguinte, 2015.

Devido à falta de recursos e alguns entraves burocráticos, o programa apenas iniciou-se em 2016 e, infelizmente, após a prova da primeira fase da OBMEP. Os projetos elaborados pelos professores precisaram ser descartados. Um novo projeto foi elaborado pelos organizadores do programa e repassado à todos os professores selecionados. Além disso, os alunos do PIC foram incorporados para o mesmo programa. Esse movimento gerou muitas críticas, principalmente referente ao nível de conhecimentos prévios dos alunos, uma vez que, aqueles que faziam parte do “PIC” já haviam passado por um “processo seletivo”, eram alunos já premiados pela OBMEP. Enquanto que os aluno convidados à fazerem parte do programa estavam apenas no início de sua trajetória, com uma bagagem significativamente diferente. Essa fusão tornou o primeiro ano do projeto um tanto complicado, pois era muito difícil conduzi-lo de forma a atender satisfatoriamente ambos os públicos. Essa discrepância também se fez presente no material indicado a ser trabalhado que estava muito mais adequado aos alunos do PIC do que aos alunos selecionados para o projeto.

No ano seguinte, 2017, o projeto passou por diversas mudanças houve a separação do “PIC” e do “OBMEP na Escola” que voltaram a se configurar com projetos distintos e um novo material foi elaborado a ser trabalhado com os alunos do projeto. Novos ajustes foram feitos e um reforço a metodologia do programa, que é o Ensino da Matemática através da resolução de problemas, foi enfatizado. Tais transformações redirecionaram o programa a uma realidade mais adequada ao contexto das escolas públicas, possibilitando resultados positivos que enriqueceram não somente a minha experiência com o programa, mas principalmente apresentou a esses alunos novas possibilidades.

4.3 Atividades e Problemas realizados no Projeto “OBMEP na Escola”.

Os problemas e algumas das atividades que veremos nessa seção fazem parte do material produzido pelo IMPA para a OBMEP. O programa utiliza uma metodologia de Ensino da Matemática baseada na resolução de problemas, ao todo, nos anos de minha atuação no projeto, já foram discutidos mais de 180 problemas em sala de aula.

A seguir, apresento um recorte desse trabalho com as principais atividades, as quais considero bem-sucedidas quanto aos objetivos propostos e que tem demonstrado resultados positivos referente a participação dos alunos e ao aumento de interesse pela disciplina, aguçando a curiosidade e estimulando a criatividade. A seção está dividida em três parte: Aritmética, Contagem e Geometria que abrange os conteúdos das Olimpíadas de Matemática.

ARITMÉTICA

Costumo dizer que a primeira aula é o “cartão de visita” do projeto. É nesse encontro que os alunos irão decidir se continuarão ou abriram mão da vaga que lhes foram ofertadas. Vale lembrar que são alunos do contraturno que estão, supostamente, interessados em aprender matemática e por isso, esperam uma proposta de aula diferente das que já estão acostumados a ver. É nesse momento que o professor tem uma boa oportunidade de desconstruir a ideia negativa difundida sobre a disciplina matemática. Por isso, torna-se imprescindível o preparo de uma boa aula com problemas e nível de conhecimento adequados para que possa despertar a curiosidade dos alunos e envolve-los num processo de aprendizagem diferenciado.

Tenho observado que os problemas envolvendo “Paridade” tem sido um bom ponto de partida para trabalhar essas ideias e motivá-los. Considero essa atividade, uma das mais “democráticas”, já que os alunos precisam de conhecimentos básicos, como saber se um número é par ou ímpar, para compreendê-las. Dessa forma, início a aula com o “Jogo das Faces” extraído da apostila “Encontros de Aritmética do PIC” (p.2-3). Para melhor compreensão, sugiro que pegue 5 moedas idênticas e acompanhe a atividade a seguir.

<u>Atividade "Jogo das Faces"</u>

[JOGO DAS FACES]. Para iniciar o estudo de paridade, sugerimos a seguinte adivinhação que pode ser realizada entre o Professor Orientador e os alunos.

(a) sobre uma mesa coloque 5 moedas: três com a coroa para cima e duas com a cara para cima (veremos logo a seguir que estes números podem ser trocados por quaisquer outros).

(b) O Professor vira de costas para as moedas e pede para os alunos virarem uma moeda qualquer.

(c) Em seguida, ele pede para os alunos virarem novamente uma moeda qualquer (que pode inclusive ser a mesma que tinha sido virada anteriormente).

(d) O professor continua pedindo que os alunos virem uma moeda qualquer por vez, totalizando 6 viradas ao todo (veremos que este número também poderá ser substituído por um outro qualquer).

(e) Após 6 viradas, o professor solicita que os alunos escondam uma moeda, observando antes a sua face superior.

(f) Escondida a moeda, o professor observa, então, as 4 moedas que ficaram sobre a mesa e adivinha a face superior da moeda escondida.

É interessante observar a reação dos alunos, no início eles ficam tão supressos que classificam a atividade como "mágica" e logo interessam-se para aprender. Após realizar a atividade várias vezes começo a fazer algumas perguntas: É possível desenvolver alguma estratégia para que consiga adivinhar sempre a face escondida? Qual seria ela? Esse é um momento muito importante da aula, e sugiro que eles pensem junto com seus colegas.

Após perceber que os alunos estão com dificuldades, começo a fornecer pequenas dicas como: “vire as moedas apenas duas vezes”, o que vocês observaram? Já tive alguns alunos que após essa sugestão conseguiram responder e aplicar a atividade com outros colegas. Procuro sempre valorizar o conhecimento dos alunos e já fui surpreendido muitas vezes com raciocínios engenhoso e criativos que eu mesmo não havia pensado.

Quando eles viram as moedas apenas duas vezes fica mais fácil verificar o total de possibilidades para em seguida conjecturar algumas hipóteses. Assim, caso o aluno decida virar a mesma moeda ou uma cara e uma coroa, vai perceber que a configuração inicial de três coroas e duas caras não se alteram. Do contrário, teríamos duas outras possibilidades:

- Escolher duas coroas para virar, que vai apresentar a configuração 1 coroa e 4 caras

- Escolher duas caras para virar, que vai apresentar a configuração de 5 coroas

Em ambos os casos, fica mais simples desenvolver alguma estratégia que possibilite adivinhar a face escondida. Mas será que essa estratégia funcionaria após virar uma quantidade par de vezes? Ou uma quantidade ímpar de vezes? É necessário ilustrar todas as possibilidades em cada um desses casos para depois desenvolver alguma estratégia?

Essas perguntas são importantes no contexto de generalizar o problema, pois ao ilustrar todas as possibilidades virando as moedas apenas duas vezes, é importante provoca-los para que percebam que a paridade das moedas não se altera quando viramos duas vezes, na verdade ela não se altera quando viramos uma quantidade par de vezes, isto é, teremos sempre uma, três ou cinco coroas contra quatro, zero ou duas caras. De uma maneira geral, observe que:

- No início tem uma quantidade ímpar de coroas e par de caras
- Após a 1ª virada, independente da moeda, teremos uma quantidade par de coroa e ímpar de cara.
- Na 2ª virada, retornaremos à paridade do início. Daí, sucessivamente.

Dessa forma, o professor deve estar atento a configuração inicial do jogo para depois combinar quantas vezes irão virar as moedas (nesse caso 6 vezes), somente após essas observações iniciais que a atividade deve prosseguir. Quando o aluno esconde uma moeda, seja ela cara ou coroa, para o professor adivinhar, ele sabe que a paridade não se alterou. Assim, ao observar as 4 moedas restantes vai perceber que o tipo (cara ou coroa) que estiver diferente da situação inicial é o tipo de moeda escondida.

Para validar os conhecimentos aprendido, peço que se organizem em duplas e repitam a atividade com seu colega. Depois, é sugerido que eles mudem a quantidade de moedas, para virar uma quantidade ímpar de vezes e outras variações que mantém os princípios da “adivinhação”. O entusiasmo de alguns alunos é tão grande que muitos deles dizem ter realizado a atividade em casa com os pais.

Figura 3: Alunos participando do "Jogo das Faces"

Por se tratar da primeira atividade a ser realizada, é esperado que ela ocorra corretamente. Ninguém quer iniciar algo que dê errado, mas infelizmente isso acaba acontecendo, já que para o professor “adivinhar” ele precisa que o aluno faça a sua parte corretamente, é um trabalho em equipe. Uma dica que pode ser útil é pedir para todos os alunos conferirem se o colega está procedendo conforme o combinado.

Após a atividade, as reflexões e explicações, partimos para a resolução de alguns problemas. Apresento alguns desses a seguir bem como minhas considerações a respeito da sua receptividade no contexto da sala de aula.

Problema 4.3.1: Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja igual a 100?

Solução: É impossível! Uma prova por contradição é facilmente colocada ao considerar que seja possível que exista esses 5 números ímpares, perceberá que essa soma será sempre um número ímpar, mas 100 é par.

<u>Comentário:</u> Tenho observado que muitos alunos ficam comprometidos em encontrar quais são esses números, passam alguns minutos nesse propósito e após várias tentativas dizem que não é possível, porém não conseguem inserir argumentos que justifique sua afirmação. Outros, por sua vez, conseguem relacionar com a atividade do “jogo das faces” e elaboram uma justificativa com base nesses argumentos. De uma forma natural, começam a querer convencer seus colegas sobre a solução encontrada.

Durante esse momento minha função é de mediar as discussões e orientá-los quanto ao processo de solução. Ao final, os alunos são convidados a irem ao quadro para apresentarem a solução encontrada. Percebo a surpresa de muitos alunos ao saber que a solução do problema é justamente mostrar que não existe solução. É um choque, para a maioria, já que estão condicionados a apresentar um resultado numérico como resposta. Fica evidente essa constatação em perguntas como: “Professor quanto deu?”; “Qual é a resposta?”.

Em seguida, outros problemas da lista são oferecidos com tema “paridade”, despertando cada vez mais a curiosidade, estimulando a criatividade e valorizando esse processo de construção do conhecimento.

Problema 4.3.2: Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escrito nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990?

Solução: Cada folha arrancada contém a numeração de duas páginas consecutivas, dessa forma, teremos um número par e ímpar em cada folha e a soma desses números será sempre ímpar. Como Vitor somou 25 folhas, isto é, somou uma quantidade ímpar de números ímpares o resultado será ímpar, logo não seria possível que o resultado dessa soma fosse 1990, que é par!

<u>Comentários:</u> Inicialmente percebo que os alunos ficam muito presos a ideia de saber quais foram as páginas arrancadas por Vitor. Ao longo da aula, vão percebendo que essa informação não é possível de ser obtida e que novas abordagens serão necessárias. A partir desse momento, ao discutirem o problema com seus colegas, vão percebendo que essa informação não é essencial para solução do mesmo.

Várias ideias diferentes foram apresentadas evidenciando a maneira que cada um pensa a respeito da situação apresentada, o que é muito relevante para o processo de construção do conhecimento. A figura abaixo por exemplo, ilustra o raciocínio utilizado pelo aluno para justificar a solução do grupo.

Figura 4: Aluno apresentando a solução do grupo

Ao fazer um desenho representativo da situação, considera inicialmente que “Vitor” tenha arrancado, por exemplo, as 25 primeiras folhas. Dessa forma, entende que ao somar os 25 números ímpares o resultado será um número ímpar, da mesma forma que ao somar os 25 números pares, será um número par, assim o processo se resume a soma “Impar + Par = Ímpar” e argumenta que o resultado será sempre um número ímpar, independente da folha arrancada por Vitor, o que torna impossível ter encontrado o número par colocado no enunciado da questão.

O papel do professor na dinâmica dessas atividades é fundamental, cabendo a ele o papel de mediador. Estimulando que os alunos desenvolvam sua criatividade e raciocínio. A solução do problema com a participação dos alunos é fundamental para o processo de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas.

<u>Atividade do Calendário</u>

A atividade consiste em descobrir o dia em que a pessoa faz aniversário, para isso, o aluno deve responder à pergunta: O dia em que você faz aniversário está circulado em vermelho? Sim ou Não? A pergunta é repetida em todas as cartelas e ao final delas, mediante as respostas, o professor “adivinha” o dia do aniversário.

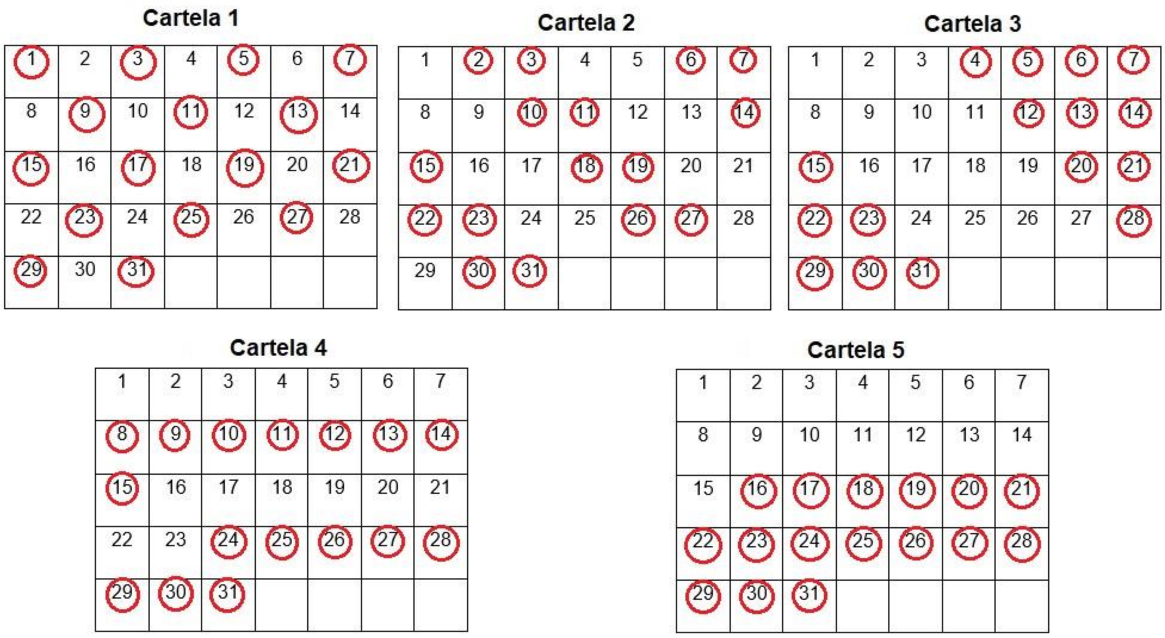


Figura 5: Cartelas representando o calendário
Fonte: Autor

Digamos que a pessoa faça aniversário no dia 13 ela responderá que os números aparecem circulados em vermelho nas cartelas 1, 3 e 4. Rapidamente, o professor soma o primeiro número circulado em vermelho dessas cartelas, neste caso, 1 + 4 + 8 = 13. O processo é válido para qualquer número de 1 a 31.

Com um pouco mais de atenção, é fácil perceber que o primeiro número circulado em cada cartela são potências de 2 e até mesmo as respostas (sim ou não) fazem parte de uma linguagem binária. Tudo isso não é de forma aleatória, e muito menos coincidência como veremos daqui a pouco.

O que venho chamar atenção nesse momento é como essa atividade tem demonstrados bons resultados. Os alunos ficam curiosos e extremamente surpresos se perguntando: “Como isso é possível? ”. De forma estratégica eu redireciono o questionamento para que eles reflitam sobre de que modo o professor consegue “adivinhar”, para que tentem observar algum padrão ou estratégia.

Nesses anos de experiência com a aplicação dessa atividade, pude acompanhar vários alunos que conseguiram “desvendar o mistério” após repetir o processo algumas vezes. Sempre faço o convite para irem ao quadro e apresentar a solução para os colegas.

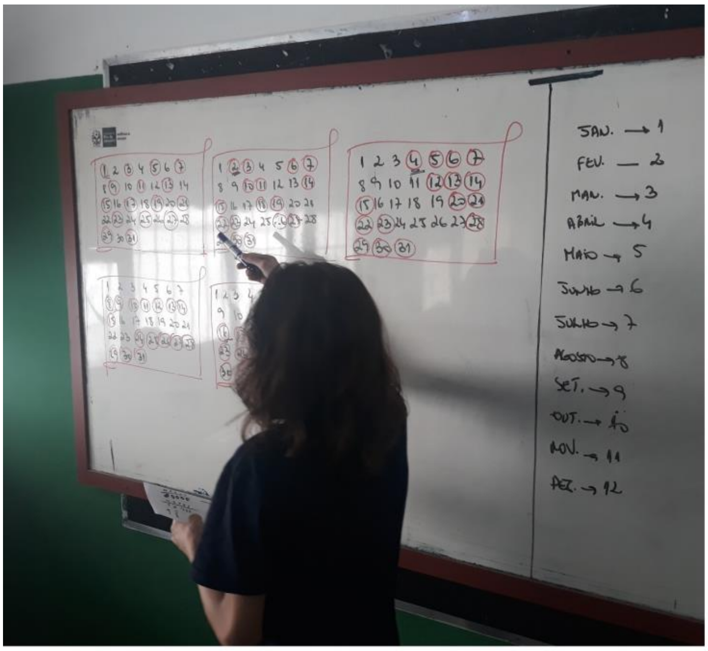


Figura 6: Aluno aplicando a atividade

Já tive alunos que observaram que o resultado da adivinhação era somar os números iniciais em vermelho das cartelas que a resposta à pergunta foi “Sim”. Outros por sua vez, ao comparar os números que se repetem nessa tabela chegaram a uma argumentação próxima da seguinte:

- Os números que se repetem nas três cartelas respondidas com “Sim”, são: 13, 15, 29 e 31
- Sendo 13 o único número que não aparece circulado em vermelho nas tabelas respondidas com “Não”.

Tais respostas levam a um pensamento mais profundo para justificar a atividade com argumentos matemáticos, os porquês dessas soluções estarem corretas. Nesse viés, chamo a atenção para os números que foram circulados em vermelho, no qual entenderemos o processo de construção da tabela em três passos:

1. Vamos imaginar uma balança de dois pratos na qual você deseje pesar objetos, usando blocos de massa: 1, 2, 4, 8 e 16 quilogramas, tendo uma unidade de cada disponível.

2. É fácil verificar que podemos pesar qualquer objeto de massa 1 a 31 quilogramas. Para isso, vamos associar os números 0 e 1 a cada bloco utilizado de acordo com a figura abaixo.

NÚMERO	CARTELA 5	CARTELA 4	CARTELA 3	CARTELA 2	CARTELA 1
PESO	16	8	4	2	1
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
7	0	0	1	1	1
8	0	1	0	0	0
9	0	1	0	0	1
10	0	1	0	1	0
11	0	1	0	1	1
12	0	1	1	0	0
13	0	1	1	0	1
14	0	1	1	1	0
15	0	1	1	1	1
16	1	0	0	0	0

NÚMERO	CARTELA 5	CARTELA 4	CARTELA 3	CARTELA 2	CARTELA 1
PESO	16	8	4	2	1
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

Figura 7: Transformando os números para a base 2
Fonte: Autor

3. A primeira coluna, da direita para esquerda, indica os números que serão circulados na primeira cartela, de acordo com as linhas que aparecem marcadas com “1”. O mesmo processo ocorre com a marcação das outras cartelas, de acordo com a coluna associada a elas e os números das linhas marcados com “1”.

Após montar as cartelas, vamos percebendo que os números de 1 a 31 foram convertidos para um sistema de base 2, isto é, foram transformados em uma sequência de 0s e 1s. A cartela 1 tem **peso 1**, a cartela 2 tem **peso 2**, a cartela 3 tem **peso 4**, a cartela 4 tem **peso 8** e a cartela 5 tem **peso 16**. Dessa forma, ao responder “Sim” estaremos atribuindo um “peso” correspondente a cartela, que ao soma-los, estaremos convertendo esse número da base 2 para a base 10.

$$
\begin{aligned}
13 = (01101)_2 &= 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \\
&= 8 + 4 + 1
\end{aligned}
$$

Um outro comentário a se fazer é que o resultado é único. Observe que os números que se repetem nas três cartelas respondidas com “Sim” foram 13, 15, 29 e 31. Sendo o 13 o único número que não aparece circulado em vermelho nas demais cartelas, conforme a figura abaixo.

	16	8	4	2	1
13	0	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1
29	1	1	1	0	1
31	1	1	1	1	1

Figura 8: Transformando os números do exemplo na base 2

Fonte: Autor

São ideias simples que levam a processos engenhosos e criativos. Vários outros conhecimentos podem ser associados a atividade, por exemplo, mostrar sistemas de numeração em outras bases; ressaltar que utilizamos um sistema de numeração decimal que é posicional, isto é, a ordem em que os algarismos ocupam possuem um “peso”; fazer conversões de mudanças de base por meio de agrupamento, entre outros. Problemas envolvendo linguagem binária são facilmente relacionados com o dia a dia dos nossos alunos, como o caso dos computadores, que fazem a transformação de qualquer número em uma sequência de zeros e uns e pode ser apresentada de maneira simples.

Problema 4.3.3: Quantos pesos diferentes podem ser pesados com pesinhos de 1kg, 2kg, 4kg e 8kg?

Problema 4.3.4: Será possível pesar de 1 a 15 com uma quantidade de peso menor que 4?

A solução desse problemas são apresentadas pelo professor Fábio Henrique pelo portal da Matemática no link https://www.youtube.com/watch?v=9kByW-avcDw.

MÉTODOS DE CONTAGEM

Não é novidade que problemas envolvendo contagem costumam ser um desafio tanto para alunos quanto para professores, apesar dos requisitos matemáticos serem considerados elementares, basicamente envolvendo os conhecimentos de operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

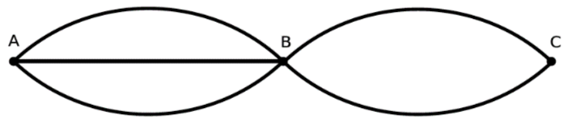
Os processos de ensino-aprendizagem desse tema envolvem uma postura diferente da tradicional, isto é, os alunos precisam pensar e elaborar alguma estratégia para resolver problemas, até mesmo os simples. De certa forma, isso gera um desconforto, já que estão acostumados a um formato de aula, que na maioria das vezes, está voltado para reprodução de conceitos e aplicações de fórmulas.

Novas posturas devem ser discutidas e implementadas, por se tratar de um tema perfeitamente acessível, é recomendado que o estudo de problemas de contagem se inicie no Ensino Fundamental. Atualmente estou lecionando para uma turma de 3ª série do ensino médio e ao ensinar Análise Combinatória, pude perceber que os alunos da turma que participaram do projeto quando estavam no ensino fundamental apresentam um desempenho melhor quando comparados aos demais.

Quando falamos de Contagem, incialmente esboçamos uma reação natural ao qual se deseja contar o número de elementos de um determinado conjunto. Um caminho eficiente, e um tanto óbvio, é de se fazer uma contagem direta do número de possibilidades por tentativas. Entretanto é possível perceber que nem sempre esse é um caminho viável. Formas de organizar também auxiliam nesse processo, como o caso do diagrama de árvore, mas ainda assim é preciso desenvolver alguns métodos de contagem para responder determinados problemas.

É recomendado inclusive que o ensino não esteja voltado para utilização de fórmulas ou agrupamentos padrões, mas que o aluno seja capaz de analisar e interpretar os textos das questões, dentre os quais verifiquem as consequências do princípio fundamental da contagem, ou da disjunção de casos, associada ao uso do princípio aditivo. A seguir, apresentarei alguns problemas da OBMEP, que aliados a algumas atitudes e posturas constituem um caminho promissor ao que se espera obter com esse tema.

Problema 4.3.5: Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.



a) de quantas formas diferentes podemos ir de A até C, sem passar duas vezes por uma mesma cidade ou passar por estradas já percorridas?

b) de quantas formas diferentes podemos ir de A até e C e depois voltar para A, passando exatamente duas vezes por B e sem passar duas vezes por uma mesma estrada ao longo de todo o trajeto?

Solução (Apresentada pela OBMEP):

a) Observe que existem 3 possibilidades de seleção de uma estrada de A até B e duas possibilidades de B até C, então pelo princípio multiplicativo existe um total de 3 x 2 = 6 possibilidades para um trajeto de A até C.

b) Observe que pelo item (a), para ir de A até C, existem 6 possibilidades, mas apenas uma delas foi escolhida. Então, estando em C, para não repetir estradas na volta, resta 1 possibilidade de C para B e 2 de B para A. Temos pelo princípio multiplicativo 6 x 1 x 2 = 12 possibilidades nas condições desejadas.

<u>Comentários:</u> Em um primeiro momento é fundamental que o aluno entenda o enunciado do problema, assim é interessante que ele conte quantos caminhos diferentes podem ser tomados para responder o item (a). A apresentação de uma estrutura organizada de contagem, como o diagrama de árvore, auxilia tanto no processo de resolução quanto na organização do pensamento. Essas ideias são importantes para a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem. Tenho notado que alguns alunos respondem 5 possibilidades no item (a), o que na verdade é um erro muito comum, ao considerar o resultado 3 + 2. No item (b), o erro pode acabar chegando no resultado "correto" por meio de uma "coincidência algébrica", isto é, o aluno considera 6 possibilidades tanto na ida quanto na volta e apresenta a resposta 6 + 6 = 12 possibilidades. Neste sentido, é crucial que o professor trabalhe em torno dos "erros cometidos", mostrar o que está sendo contado as vezes parece um trabalho árduo, porém extremamente necessário.

Problema 4.3.6: Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?

Solução: A bandeira possui três faixas, que será numerada de cima para baixo. Assim, devemos inicialmente escolher qual faixa será pintada, digamos que escolhemos a primeira. É fácil perceber que ela pode ser pintada usando qualquer uma das 4 cores. Qualquer que seja a cor escolhida resta apenas 3 cores para pintar a segunda faixa. Escolhida a cor da segunda faixa, a terceira pode ser pintada de 3 modos diferentes, pois não se deve repetir a cor usada na segunda faixa. Logo o total de possibilidades será 4 x 3 x 3 = 36.

<u>Comentários</u>: Uma atividade que costumo realizar é fazer com que os alunos pintem de fato a bandeira, para isso consideramos o problema com três cores disponíveis. É nessa etapa que os alunos se colocam no lugar da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e verifica que decisões devem ser tomadas. Algumas perguntas importantes surgem nesse processo como, por exemplo, se pode pintar da mesma cor a primeira e última faixa. Observe que a atividade é livre na escolha da ordem em que as faixas serão pintadas, mas será que a ordem das decisões a serem tomadas pode tornar o problema mais difícil? Após construir a solução do problema utilizando vários argumentos como o diagrama de árvore e o princípio multiplicativo, costumo provoca-los para colorir a bandeira começando pela primeira faixa, depois a terceira faixa e, por último a segunda faixa. O que acontece? Rapidamente eles percebem que ao fazer isso uma situação um pouco inconveniente ocorre, na qual precisamos saber se a primeira e última faixa foram pintadas com a mesma cor ou não.

De todo o modo, para chegar a solução do problema por esse caminho é necessário a divisão em dois casos. Saber o que está sendo contado é de suma importância para uma aprendizagem com significado desse tema.

Problema 4.3.7: Um professor de matemática escreveu no quadro a seguinte pergunta:

“De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol (composto por 11 jogadores) para representá-lo em uma cerimônia de premiação? ”

Alguns minutos para o término da aula um aluno apresentou a solução:

“O primeiro jogador pode ser escolhido de 11 modos distintos. O segundo, de 10 e o terceiro, de 9. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número total de possibilidades distintas para a escolha dos jogadores parece ser $11 \times 10 \times 9 = 990$.”

A solução está certa ou errada? Se estiver errada, então encontre a solução correta.

Solução (Apresentada pela OBMEP): Esta solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A, B e C. A comissão de representantes, assim formada, seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B, depois A, depois C. No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A, B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $990/6=165$.

Comentários: O problema acima mostra um dos erros mais comuns cometido em análise combinatória. Mostrar para os alunos que a solução na verdade está incompleta e que é possível ajustá-la é fundamental para o ensino-aprendizagem. A dica é que se faça problemas auxiliares reduzindo tanto o número de jogadores quanto dos escolhidos para a premiação sendo possível, dessa forma, até mesmo fazer a contagem e conjecturar hipóteses tornando-os mais ativos e conscientes nas tomadas de decisões. O professor deve adotar a postura de mediador e anotar as soluções apresentadas pelos alunos, para depois levar a discussão para o grupo e justificar os raciocínios apresentados.

GEOMETRIA

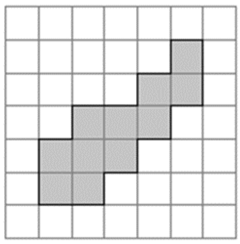
A geometria continua sendo um dos temas pouco explorado na educação básica sendo, infelizmente, sempre o último assunto a ser ensinado pelos professores. Diversos são os motivos e justificativas que atestam essa realidade constante no que diz respeito ao Ensino da Matemática no Brasil, dentre as quais foge do objetivo desse trabalho. É necessário, portanto, propor atividades que mudem esse cenário. Nesse sentido, venho apresentar algumas das atividades que realizei em sala no programa “OBMEP na Escola” e como elas tem contribuído para uma aprendizagem significativa.

- **ÁREA E PERÍMETRO**

Muito do que se ensina em geometria na educação básica está relacionada aos conteúdos de áreas e perímetro de figuras planas. Nesses casos, uma visão algébrica se sobrepõe ao geométrico e o conceito de área e unidade são perdidos e ignorados, dando lugar a fórmulas e manipulações algébricas. Esses conhecimentos não parecem fazer o menor sentido para os alunos, que de uma certa maneira acabam tendo uma visão deturpada do conteúdo. Dessa forma, é de se esperar que o aluno encontre dificuldade em resolver esses problemas que demandam o desenvolvimento de ideias geométricas para serem respondidos.

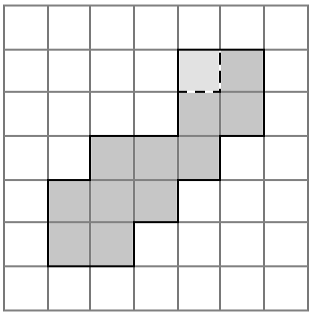
Vejo que é de fundamental importância a ênfase nos problemas que envolvem o raciocínio geométrico, sem utilizar fórmulas para o cálculo de áreas. A álgebra é importante na geometria, mas ao meu ver, deve ser apresentada após o raciocínio geométrico. Boa parte das questões da Obmep envolvendo o conceito de área e perímetro de figuras planas estão relacionados a problemas de dobraduras. Mais uma vez, procuro ressaltar o quanto tais problemas constituem um momento ímpar para a realização dessas atividades prática.

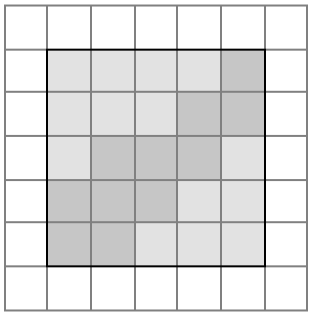
Problema 3.2.8: A figura sombreada a seguir foi desenhada em uma malha de quadrados de lado 1 cm. Qual é a área e qual é o perímetro desta figura? Quantos quadradinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



Solução (Apresentada pela OBMEP):

Por uma contagem direta verifica-se que a figura é formada por 11 quadradinhos e que o contorno da figura é formado por 20 segmentos de comprimento 1. Daí a figura tem área 11 e perímetro 20. Analisando agora a figura a seguir à esquerda vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura por outros dois segmentos. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5. Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir e à direita.





Comentários:

Apesar de ser considerado um problema relativamente simples, algumas dificuldades surgem no processo de resolução. No início percebo o “vício” dos alunos em tentar encontrar uma fórmula que determine a área da região. Em seguida confundem a área do quadradinho (1 cm²) e a medida do seu lado (1 cm), que embora sejam representados pelo mesmo número apresentam conceitos distintos.

A primeira pergunta é respondida facilmente após observar a unidade de área e uma contagem direta realizada em seguida. Já a segunda pergunta, foi respondida por meios de tentativas, ao acrescentar um “quadradinho” de cada vez, foram percebendo que chegariam no máximo a um quadrado ao manter constante seu perímetro.

Essa última pergunta em particular, acompanha o homem bastante tempo, pois são comuns na matemática problemas envolvendo “otimizações” e, na maioria das vezes, a solução envolve a descoberta de polígonos regulares ou círculos.

Outras perguntas poderiam surgir, como por exemplo: Ao considerar um quadrilátero de perímetro fixo, qual seria o de área máxima?; E se a figura fosse um triângulo?; Com um pedaço de barbante fixo, qual seria a figura de área máxima?; São perguntas cada vez mais complexas, que dão continuidade aos problemas e estimulam a criatividade.

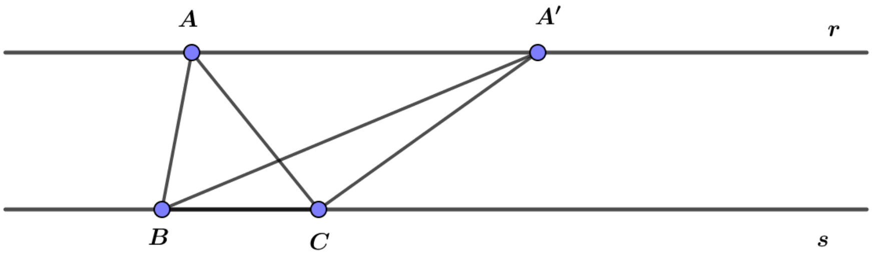
Figura 9: Alunos apresentando a solução encontrada

Em seguida, outras atividades foram realizadas com objetivo de justificar que a área de um quadrado de lado x é x^2, sendo x um número real qualquer. Inicialmente começamos uma dedução ao considerar x um número natural até chegar no caso irracional. As demais fórmulas, dos principais polígonos, foram deduzidas em sequência.

- **ÁREA DO TRIÂNGULO**

Como já havia dito, na educação básica poucas são as atividades que abordam o conceito de área de figuras planas, em que o pensamento geométrico venha primeiro do que o algébrico. Dessa forma, propor atividades que valorize tal raciocínio se torna indispensável para um Ensino da Matemática com qualidade e significado. Assim, temos no material da OBMEP, uma oportunidade de trabalhar problemas significativos como veremos a seguir.

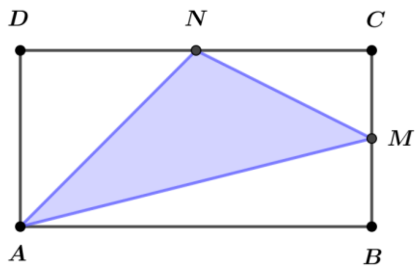
Propriedade 4.3.1: A área do triângulo não se altera quando a mantemos sua base fixa e quando percorremos o seu terceiro vértice sobre uma reta paralela a base.



Fonte: Autor

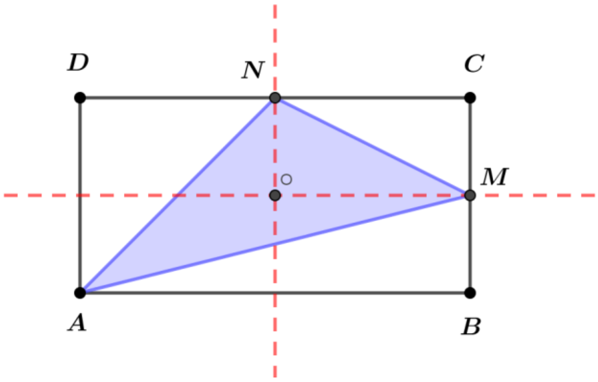
Apesar de visualmente não parecer óbvio que os triângulos acima possuem mesma área, a justificativa matemática é de fácil compreensão dos alunos que assimilam a ideia de que os triângulos possuem mesma base e altura. Uma sugestão inclusive é que seja feita essa apresentação com auxílio de um software matemático como, por exemplo, o Geogebra. Na ausência desse recurso é possível realizar a atividades por meio de recortes e dobraduras. Vejamos alguns problemas da OBMEP envolvendo essa propriedade.

Problema 3.2.9: Na figura a seguir M e N são pontos médios dos lados de um retângulo. A área do triângulo sombreado AMN é igual a qual fração da área do retângulo ABCD?



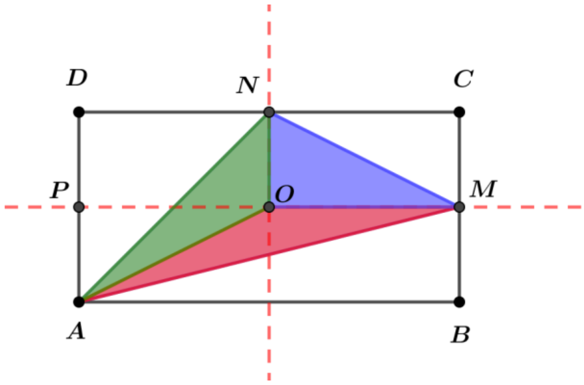
Fonte: Autor

Solução: O primeiro passo é dividir a figura em quatro partes congruentes. Para isso, trace as retas **r** (paralela ao seguimento AB passando por M) e **s** (paralela ao seguimento BC passando por N), conforme a figura abaixo.



Fonte: Autor

Segundo passo, consiste em dividir o triângulo em três regiões e observar que, pela propriedade 1, as áreas equivalentes [OAM] = [OBM] = 1/8, [OAN] = [OPN] = 1/8 e [OMN] = 1/8 onde se conclui que a região AMN é igual a 3/8 da área do retângulo ABCD.



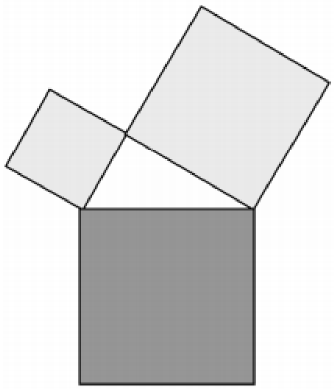
Fonte: Autor

<u>Comentários:</u> Quando o aluno é confrontado a responder o problema, imediatamente ele se questiona a respeito das dimensões do retângulo. Tenho percebido que algebrizar o problema costuma ser a prática mais comum, dessa forma, se eles não conhecem as medidas dos lados da figura, imediatamente o chamam de "x" e "y". Em seguida, começam a calcular as áreas dos três triângulos retângulos (branco), para depois determinar a área da região AMN, que é obtida fazendo a diferença da área do retângulo e do valor anteriormente calculado. Após várias manipulações algébricas, não errando nenhum cálculo pelo meio do caminho, conseguem até chegar no resultado 3/8. Ao comparar as soluções apresentadas podemos perceber que o vício em buscar equacionar o problema continua cada vez mais constante. Dessa forma, busco sempre estimular a criatividade dos alunos, fazer perguntas é fundamental. Vocês conseguem apresentar uma solução diferente? Tal postura tem revelado resultados interessantes como, por exemplo a própria solução, que foi apresentada por um aluno do projeto.

- **TEOREMA DE PITÁGORAS**

Sem dúvidas constitui um dos teoremas mais famosos da matemática, principalmente na educação básica. Muitas são as suas demonstrações, mas pouco se valoriza o pensamento geométrico. Dessa maneira, tenho realizado uma atividade prática que tem tornado significativo sua apresentação.

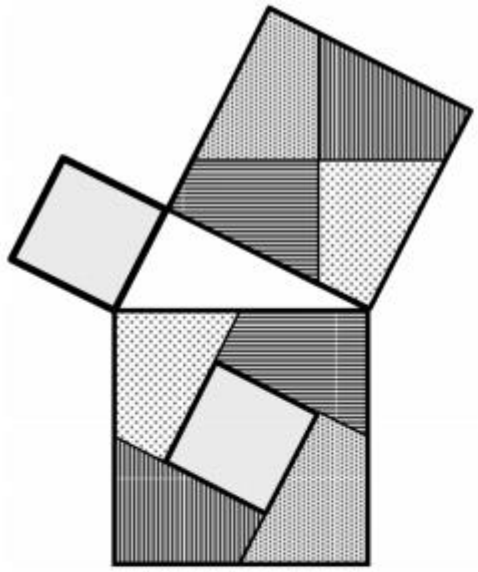
Teorema 4.3.1: Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas do quadrados que têm como lados cada um dos catetos.



Fonte: Apostila do PIC “Teorema de Pitágoras e Áreas”

A figura abaixo ilustra a maneira que Perigal[15] utilizou para demonstrar o teorema de Pitágoras. A atividade em questão se apoia inclusive nessas ideias, já que é considerada a forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

[15] Henry Perigal – Um livreiro de Londres que publicou em 1873 a demonstração acima do teorema de Pitágoras.



Fonte: Apostila do PIC “Teorema de Pitágoras e Áreas”

Sua demonstração envolvia cortar o maior quadrado construído sobre o cateto em quatro partes congruentes. Que foram feitas traçando duas retas pelo seu centro, sendo a primeira paralela a hipotenusa e a segunda perpendicular. Nesse momento, o nosso interesse é explorar as ideias geométricas do teorema, dessa forma, fica em um segundo plano por exemplo, provar que a região interior do quadrado maior (da hipotenusa) é de fato congruente ao quadrado menor.

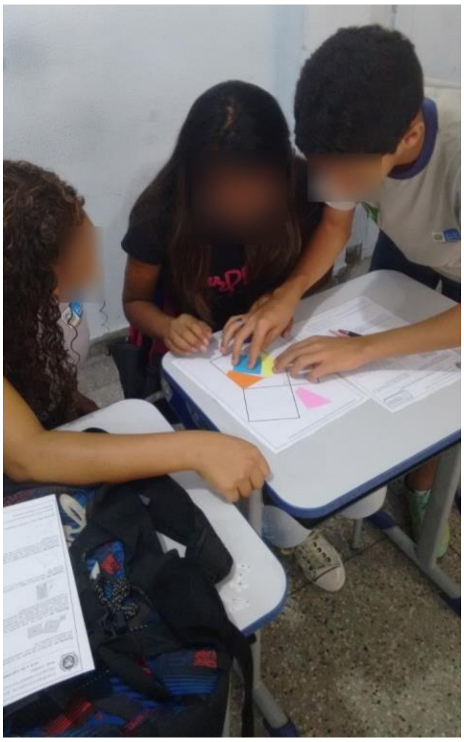
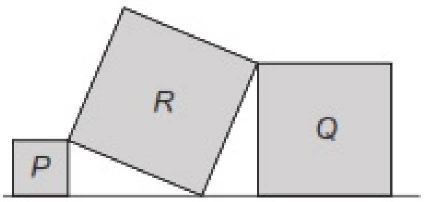


Figura 10: Atividade do teorema de Pitágoras

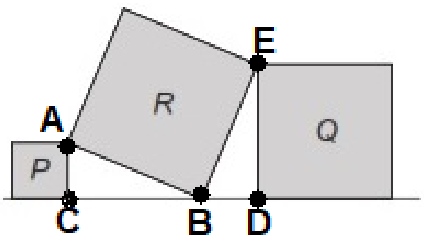
Assim, foram distribuídos uma ficha que continha o desenho do triângulo retângulo e seus respectivos quadrados. Além de um papel cartão colorido, que seriam utilizados nos quadrados construídos sobre os catetos de acordo com a divisão proposta por Perigal. Agora, os alunos tinham que compor o quadrado maior, sem sobrepor, com os outros dois quadrados.

Fica evidente, após essa apresentação, a famosa relação $a^2=b^2+c^2$ ao considerar que a representa a medida da hipotenusa do triângulo retângulo e b e c seus catetos. Vários problemas surgem na matemática em consequência desse teorema e de sua generalização.

Problema 3.2.10. Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a 24 cm² e 168 cm², respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?



Solução: Basta observar que os triângulos ABC e BDE são congruentes pelo caso A.L.A, dessa forma, os segmentos BC e DE tem a mesma medida. Segue pelo teorema de Pitágoras, que a área da região R = área da região P + área da região Q e, portanto, a área da região Q é 168 – 24 = 144 cm².



Fonte: Autor

Comentários: As intenções com esse problema era estimular e provocar o raciocínio geométrico, de forma que os alunos fossem capazes de relacionar o problema com a apresentação geométrica do teorema de Pitágoras, sem o uso de fórmulas. Ao decorrer da resolução, pude perceber que esse objetivo havia sido alcançado. Embora a maior dificuldade enfrentadas pelos alunos estava relacionada a congruência de triângulos.

É interessante também mostrar aos alunos uma generalização do teorema de Pitágoras algo que, infelizmente, não é explorado na educação básica. Apesar de ter uma vasta aplicação na matemática, com problemas que valorizam o raciocínio geométrico, como veremos a seguir. De acordo com LIMA, et. Al (2006, p.70) " *Se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos".*

Problema 3.2.11. (O problema de Hipócrates) A figura a seguir mostra um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados como diâmetros. Mostre que a soma das áreas das duas "lúnulas" é igual à área do triângulo.

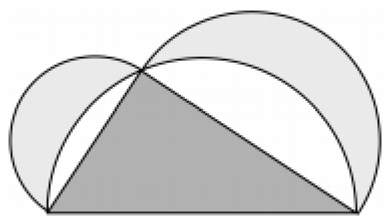
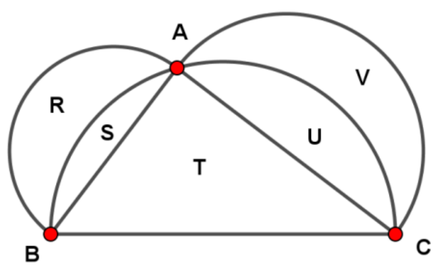


Figura 11: O problema de Hipócrates

Fonte: Apostila do PIC "Teorema de Pitágoras e Áreas"

Solução: Pela generalização do teorema de Pitágoras, podemos afirmar que a área do semicírculo de diâmetro BC é igual à soma das áreas dos semicírculos de diâmetros AC e BA, conforme ilustra a figura abaixo.



Fonte: Autor

Ao decompor a figura nas regiões R, S, T, U e V. É fácil verificar que as áreas das regiões S+T+U = R+S+U+V, o que implica dizer que T=R+V.

Comentários: Quando proponho esse problema para os alunos do projeto, alguns se questionam se “não está faltando dados” como por exemplo, as medidas dos lados do triângulo. Ao perceberem que essa informação não será fornecida, tão pouco é necessária, buscam novas estratégias. Mais uma vez estamos diante de um problema que possui ideias simples para sua solução e que o uso de fórmulas se torna totalmente desnecessários. Tenho observado que problemas como esse, estimulam a criatividade e o coloca em prática o pensamento geométrico, conceitos fundamentais para uma aprendizagem com significado.

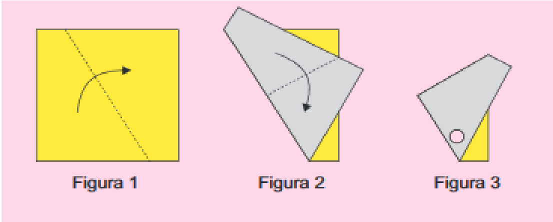
- **Explorando o uso de Simetria**

Ao explorar o uso de “simetria” na resolução de problemas, os alunos foram provocados por meio de situações problemas e discussão com os seus colegas, a construírem o “conceito de simetria” ao final das atividades. O meu papel, tem sido o mesmo desde o início, de mediar, elaborar perguntas e conduzir as discussões de modo que o Ensino da Matemática se realize através da resolução de problemas.

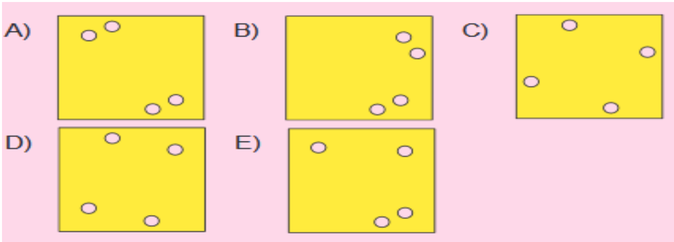
Para a realização das atividades foram utilizados um projetor, materiais concretos e manipuláveis, esses recursos constituíram uma ferramenta importante para o desenvolvimento do trabalho. Além de tornar a aula mais dinâmica e iterativa, contribuíram para que eles se sentissem mais “atraídos” a participar.

Para responder os exercícios propostos sugeri a resolução, em duplas ou trios, mas que sempre fosse divulgado para os seus colegas a solução encontrada. No início os alunos tentaram responder sozinhos, e progressivamente, passaram a responder os exercícios em dupla e essas “duplas” passaram a discutir com as outras.

Problema 3.2.12: Maria fez duas dobras em uma folha de papel quadrada, ambas passando pelo centro da folha, como indicado na Figura 1 e na Figura 2. Depois ela fez um furo na folha dobrada, como indicado na Figura 3.

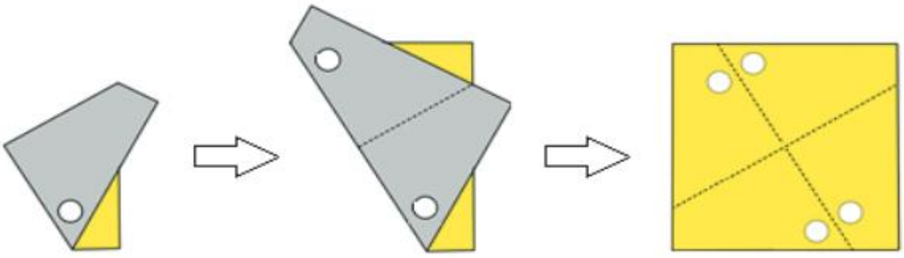


Qual das figuras abaixo representa a folha dobrada? Explique a sua resposta.

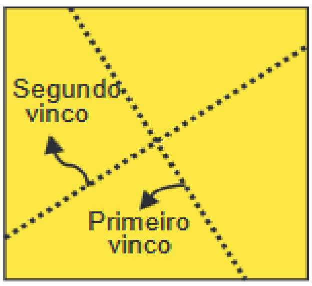


Solução (Apresentada pela OBMEP):

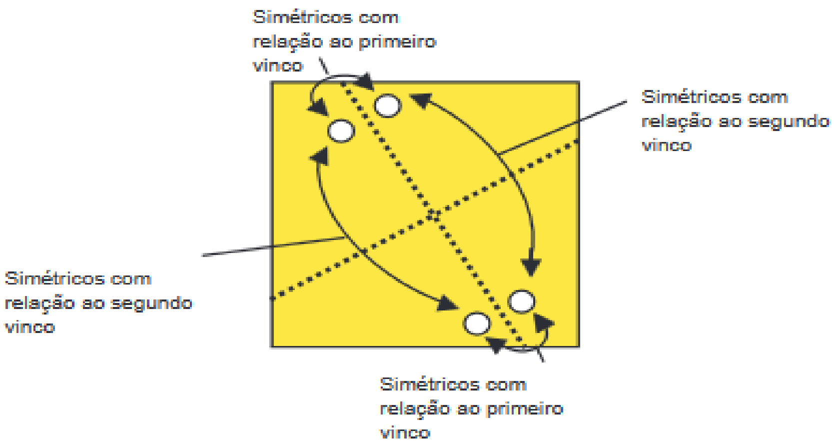
Iniciamos observando que Maria fez 4 furos na folha desdobrada, uma vez que, após as duas dobras, o local escolhido para furar tem 4 camadas de papel. A figura abaixo mostra a posição dos furos após cada desdobra. Observamos ainda que, após uma desdobra, para cada furo, obtemos dois: um na mesma posição e outro em posição simétrica à linha de desdobra.



Dentre as figuras das alternativas, apenas a primeira respeita essas simetrias. Vejamos com mais detalhes: na folha desdobrada, notamos que os vincos deixados pelas duas dobras feitas têm o seguinte aspecto:



Há dois furos inferiores simétricos com relação ao primeiro vinco e mais dois furos superiores que aparecem quando desdobramos a última dobra; esses furos superiores são simétricos aos inferiores com relação ao segundo vinco.



Comentários:

Esse problema foi apresentado em 2016 na primeira fase da Obmep para o nível 2, a dificuldade em compreender o problema foi um dos obstáculos enfrentados pelos alunos. A interpretação de textos, principalmente os de matemática, são requisitos básicos na resolução de problemas. Não se pode responder algo que não tenha sido compreendido, dessa forma, é muito importante que os alunos entendam a pergunta, para depois serem capazes de elaborar um plano e traçar estratégias para responder o problema proposto.

Após sanar essa etapa inicial, eles divergiram e muito qual o item que representava a solução correta. Foi muito interessante a discussão acerca de qual seria esse item, a todo momento foram estimulados a usarem argumentos, e com isso, e utilizavam as palavras: “Espelhada”, “Reflexo”, “Mesma distância” e “Congruentes” na tentativa de convencer os colegas. Tal raciocínio, mais adiante, foram aproveitados para escrever a solução do problema. Até que em dado momento da aula eles conseguiram reduzir em dois itens que representariam a reposta correta, no caso seria o item A ou C.

Neste instante, a turma ficou dividida em dois grupos e cada grupo acreditava em um item. Como apenas um, representava a resposta correta, cabia agora o grupo “certo” convencer, o outro. Ao final da discussão entre eles, a turma conseguiu chegar na resposta correta. Apesar de um aluno não se dá por convencido da resposta final ele não conseguiu expressar argumentos que julgava ser a “resposta correta”.

Ao se colocar no lugar do aluno podemos refletir sobre a dificuldade de realizar, mentalmente, a manipulação de figuras espaciais que infelizmente ainda é pouco explorado na educação básica. Dessa forma, sugeri o uso de materiais concretos e manipuláveis, para isso, foram distribuídos uma folha de papel cartão, que simulava fielmente os desenhos. Nesse momento, os alunos conseguiram validar o processo e redigir uma solução para o problema.

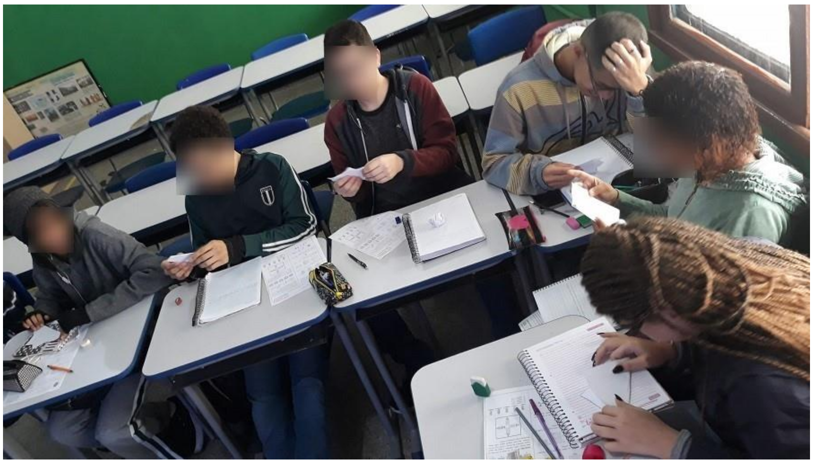
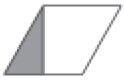


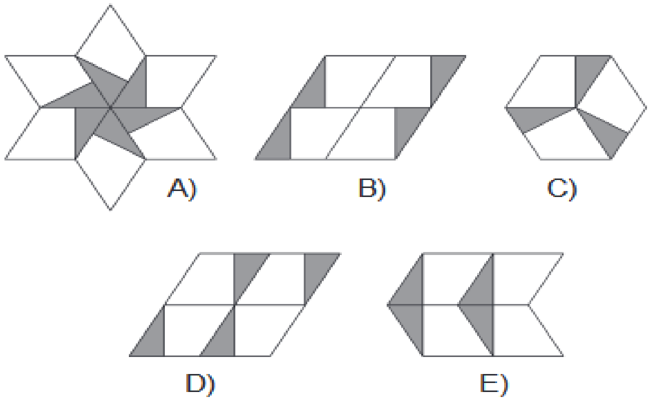
Figura 12: Alunos reproduzindo o problema por meio de dobraduras

Trabalhar a escrita e redigir textos matemáticos não é uma tarefa simples. Mas uma dinâmica, sugerida inclusive por um aluno, foi que cada um escrevesse sua resposta e depois apresentariam para o grupo em voz alta. Foi uma proposta bem interessante e partiu da iniciativa deles, o que fez da aprendizagem ainda mais significativa.

Problema 3.2.13: A figura mostra a superfície pintada de um azulejo em forma de losango:

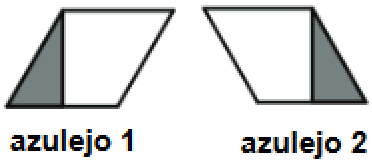


Dos cinco padrões abaixo, apenas um NÃO pode ser montado com cópias desse azulejo. Qual é esse padrão? Explique a sua resposta.



Solução (Apresentada pela OBMEP):

Mostramos abaixo dois azulejos.



O azulejo 1 é o azulejo do enunciado, com o qual foram formadas as figuras das alternativas A), B), C) e D). Por outro lado, a figura da alternativa E) foi feita com duas cópias do azulejo 1 e duas cópias do azulejo 2. Como não é possível obter o azulejo 2 por “translação” ou “rotação” do azulejo 1, segue que não podemos montar a figura da alternativa E) com cópias do azulejo 1.

<u>**Comentários:**</u> Por se tratar de um problema que busca estimular a criatividade e explorar a visualização de figuras tridimensionais em ambientes recreativos. A proposta para os processos de investigação e construção de conhecimento não foram diferentes da anterior. Pude perceber também que os alunos estavam mais autônomos e seguros para expressar a solução encontrada e alguns deles pediram para ir ao quadro e explicar para os outros colegas.

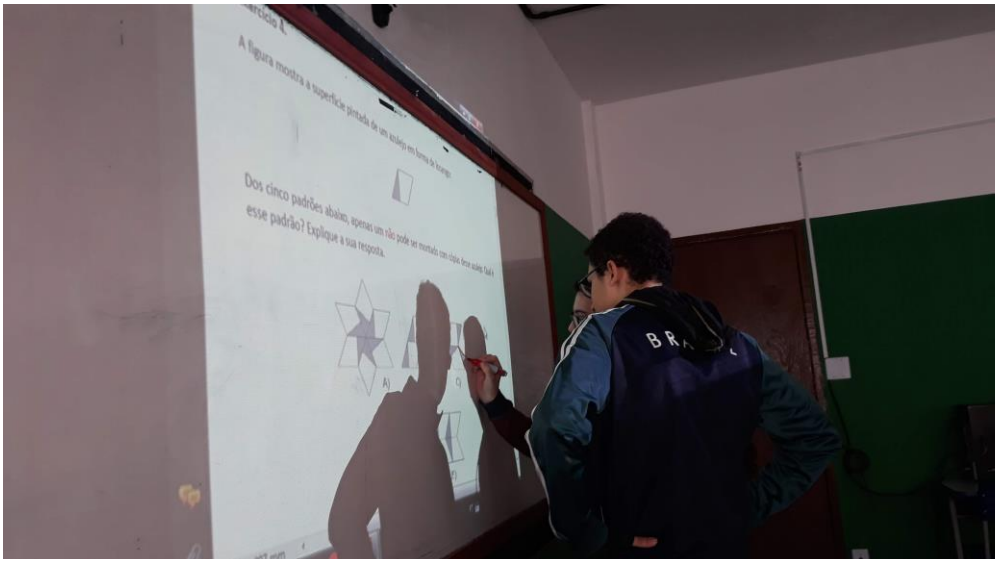


Figura 13: Alunos mostrando os resultado obtidos

Embora alguns alunos conseguiram chegar na solução, outros por sua vez, encontraram dificuldades nas explicações dos seus colegas. Assim sendo, foram distribuídas figuras em papel cartão que representavam o azulejo (paralelogramo), no qual teriam que formar as outras figuras com ela. Ao chegarem no item incorreto, disseram que só seria possível se virassem o paralelogramo “Ao contrário” ou “Do lado oposto”. Apresentaram inclusive uma aplicação do uso de simetria ao considerar que a figura incorreta foi “dobrada ao meio” na linha horizontal.

Figura 14: Alunos verificando a solução do problema

Antes mesmo de realizar a atividade prática um dos alunos apresentou a ideia de que a solução do problema estaria no item (A), ao levar em consideração que essa figura representava “todas as rotações possíveis do paralelogramo”, percebendo que a única figura que NÃO poderia ser obtida por meio de “rotações” e “translações” seria o item (E).

Algumas perguntas e questionamentos surgiram durante o processo investigativo de resolução. Uma delas se referia ao paralelogramo distribuído na atividade, poderia ter ângulos internos quaisquer ou deveria ter ângulos específicos? Aproveitando a figura (A), puderam perceber que o ângulo interno do triangulo destacado em cinza foi utilizado seis vezes para formar um ângulo de uma volta, desta maneira, concluíram que esse ângulo media 60º e que o paralelogramo deveria ter ângulos de 60º,120º,60º e 120º.

4.4 Impactos do programa na Escola

Apesar de todas as dificuldades enfrentadas, posso dizer que tem sido uma vivência muito gratificante fazer parte desse programa. Tive o privilégio de acompanhar a evolução dos meus alunos ao longo do curso e apresentá-los a uma matemática divertida e criativa. Aprendemos que para resolver os problemas propostos pela OBMEP era necessário novas posturas e um pouco de engenhosidade e criatividade. E nesse sentido, o meu papel tem sido de mediar e estimular suas ideias.

A dinâmica das minhas aulas era dividir os alunos em grupos. E cada grupo era convidado a fazer pelo menos um problema no quadro. Alguns alunos conseguiram resolver o mesmo problema, mas de maneiras diferentes. Nesse caso, o grupo também apresentava a solução para turma. Essa tem sido uma prática muito acertada para as turmas do “OBMEP na Escola”, fez com que os alunos trabalhassem em equipe e discutissem suas ideias para cada problema proposto. Quando os alunos iam ao quadro para apresentar sua solução, eles reforçavam o seu conhecimento e discutiam as opiniões dos seus colegas. Essa abordagem tem funcionado muito bem em todas as aulas. Fazer dos alunos um ser ativo no processo de construção do seu próprio conhecimento são conceitos fundamentais para um processo de ensino-aprendizagem com significado.

A respeito do impacto do programa na escola” é preciso destacar que quando iniciei o projeto minha escola contava apenas com três alunos premiados com “Menção Honrosa” desde sua primeira edição em 2005. A participação dos alunos nessa competição era, na maioria das vezes, dirigida a um pequeno grupo da escola, em geral formada pelos ditos “melhores alunos”, isso quando a escola era inscrita.

Após o início do programa em 2016, tivemos dois alunos participantes do projeto premiados com “Menção Honrosa”. Algo até então inédito em nossa escola. Nesse mesmo ano, por questões burocráticas do colégio, a competição ficou voltada apenas para os “Anos Finais da Educação”: 9º Ano do E.F. e 3ª Série do E.M.

A partir de 2017, a prova tem sido aplicada para todos os alunos da escola desde o 6º Ano do Ensino Fundamental até a 3ª Série do Ensino Médio, essa postura tem demonstrado resultados promissores e nesse mesmo ano três alunos foram premiados com Menção Honrosa.

No ano de 2018, agora com mais envolvimento do corpo docente e discente, conseguimos dois alunos premiados com Menção Honrosa e um Medalhista de Prata. Totalizando em apenas três anos de projeto sete “Menção Honrosa” e uma “Medalha de Prata”. Evidenciando-se assim o impacto positivo do programa na escola e na qualidade do ensino-aprendizagem da Matemática. O gráfico abaixo ilustra a melhora do desempenho da nossa escola.

Figura 15: Gráfico indicando o desempenho médio da escola na OBMEP nos últimos anos

Fonte: Arquivo disponível na página do programa “OBMEP na Escola”

A esse grupo de alunos que conquistaram bons resultados nas Olimpíadas são oferecidas oportunidade e bolsa para participar de classes cada vez mais restritas como por exemplo, o “PIC” e o “Mentores OBMEP”. Suas conquistam podem levar a competições cada vez mais difíceis como a OBM, e seu desempenho o levará para polos de treinamento específicos para competições internacionais. Dessa forma, qualquer aluno matriculado em uma escola pública do Brasil que esteja envolvido com a OBMEP tem a chance de conquistar essas oportunidades.

Em nossa escola por exemplo, alguns desses alunos foram direcionados e estão participando do PIC, dando prosseguimento ao avanço de seus estudos. O Nível ao qual tenho voltado as atividades do programa é formado em sua maioria por alunos matriculados no 9º ano e boa parte desses alunos têm sido aprovados em colégios federais ou ganharam bolsas de estudos em colégios privados. Deste modo, a escola não absorve esses alunos que têm conquistado espaços maiores que aqueles que a mesma pode oferecer.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Envolver os alunos no universo das olimpíadas de matemática é oferecer a eles uma oportunidade de terem contato com uma matemática que desenvolva suas habilidades, aguçando sua curiosidade, desenvolvendo o pensamento matemático, a criatividade, o raciocínio e dentre outros conceitos fundamentais para uma educação de qualidade. Dessa forma, pensar em algo que resgate esses valores é fundamental para a melhoria do Ensino de Matemática no Brasil.

Infelizmente, o que se faz mais presente nas aulas de matemática é um ensino voltado para reprodução, aplicações e manipulações de fórmulas. Com isso constrói-se uma imagem negativa da matemática que difundida cria preconceitos e resistência pela disciplina.

Atualmente, lecionar matemática nas escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro significa lidar com uma realidade ainda muito presente, de baixo desempenho dos alunos na disciplina. Uma série de questões contribuem para essa situação que é uma constante em todo território brasileiro, entretanto é sempre atribuído a figura do professor toda a responsabilidade por tal conjectura.

O trabalho do professor se traduz em questões complexas, muitas das vezes o ato de ensinar é realizado em estruturas precárias e com pouquíssimos recursos a sua volta, cabendo ao mesmo contornar toda as diversidades na luta por oferecer um ensino de qualidade. A logo prazo o trabalho do professor torna-se cada vez mais cansativo e difícil, o que somando aos baixos salários, ao pouco incentivo a profissão e a falta de reconhecimento, levam muitos a migrarem para outras áreas.

Na minha experiência com o magistério estadual, pude vivenciar uma política que leva o professor a se acomodar na profissão e foi somente a partir da minha experiência com as olimpíadas que comecei a refletir sobre minhas práticas docentes de modo a repensá-las e reestruturá-las. A oportunidade de trabalhar uma matemática bonita e acessível aos alunos, aliada a metodologia do programa OBMEP na Escola, tornaram enriquecedora a minha prática docente.

Não quero causar a impressão de que seja fácil operacionalizar a metodologia de Ensino da Matemática através da resolução de problemas, na verdade não é. Basta lembrar que eu estava trabalhando com um grupo reduzido de alunos (no máximo vinte) que se propuseram estudar matemática no seu contraturno, como uma atividade extracurricular. Esse cenário não expressa a realidade da educação brasileira, na qual trabalhamos com turmas cheias, com alunos que demonstram, em sua maioria, não querer está ali. Ultrapassar essas barreiras é, por si só, uma tarefa extremamente cansativa e quase que diária no cotidiano de todo o professor.

Quando vencemos essa etapa muitas das vezes esbarramos em questões estruturais, para as quais não podemos fechar os olhos, pois influenciam significativamente na qualidade das aulas. Quando comecei o projeto, ainda que tivesse alunos naturalmente interessados éramos confrontados com questões logísticas, por vários momentos os alunos tiveram que me ajudar a limpar a sala, retirar livros e ainda lidar com o calor. Hoje, após várias mudanças, de ordem estrutural e administrativa, conto com uma sala climatizada, equipada com projetor, computador e acesso à internet, mas entendo que essa condição não é regra à todas as salas de aula da escola.

A metodologia adotada no programa não deve ser entendida como um modelo formatado a ser implementado nas aulas de matemática, elas se constituem, na verdade, como um recurso a mais a ser utilizado. Cabe ressaltar que cada turma é única, os alunos que as compõem tem formas diferentes de raciocinar quando se deparam com um problema e tais princípios exigem do professor tempo e planejamento para executar suas atividades de forma coerente, objetiva e adequada a singularidade dos alunos.

Vale lembrar inclusive, que vários países têm adotado as Olimpíadas de Matemática como parte de suas políticas públicas educacionais. Considero esse aspecto como um fator muito positivo, que possibilita novas estratégias que podem contribuir para a melhoria da qualidade do Ensino de Matemática nas escolas brasileiras.

Os Programas desenvolvidos pela OBMEP têm colaborado com a formação continuada de professores da rede pública (Municipal ou Estadual) em todo território Nacional, por meio dos problemas olímpicos. Nesse espaço de inclusão social e desenvolvimento cientifico aproxima-se a Escola da Universidade tornando o espaço escolar um campo de pesquisa com enfoque nos processos de aprendizagem dos alunos.

Mais do que revelar novo talentos, as olimpíadas permitem nutrir uma cultura da matemática na sociedade e o desenvolvimento desse programa vem ampliando o leque de oportunidades que chegam aos alunos da escola pública. Torna-se possível uma educação que ultrapassa uma concepção disciplinar e hierarquizada para construir um espaço de aprendizado mútuo e dinâmico que garante aos alunos o papel de protagonista na construção do seu conhecimento.

Evidentemente ainda temos muito trabalho pela frente, porém identifico nessa metodologia e nesse programa um caminho promissor que indica bons passos a serem seguidos, com a valorização do professor, peça chave para todas essas mudanças, e compromisso com a construção de um ensino de qualidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BADARÓ, R.L. **Do Zero às Medalhas: ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES DE CURSOS PREPARATÓRIOS PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Bahia, 2015.

BARBOSA, J. L. M. **Olimpíadas de Matemática: uma experiência de sucesso em educação no Ceará.** s.d. Disponível em: <http://www.sbpcnet.org.br/livro/57ra/programas/CONF_SIMP/textos/joaolucasbarbosasimp.htm>. Acesso *on-line* em 19 set. 2019.

CADAR, L.; DUTENHEFNER, F. **Apostila do PIC da OBMEP "Encontro de Geometria – Parte 1".** Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

CADAR, L.; DUTENHEFNER, F. **Apostila do PIC da OBMEP "Encontro de Aritmética".** Rio de Janeiro, IMPA, 2017.

CALDAS, C.C.S; VIANA, C. S. **As Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas na Formação de Professores e Alunos**. Revista Interdisciplinar da Divisão de Pesquisa e Pós-Graduação Campus Universitário de Abaetetuba / Baixo Tocantins / UFPA, Vol. 6 N. 8, p. 325-339, Abril de 2013.

CARVALHO, P. **Apostila do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade".** Rio de Janeiro, IMPA, 2017.

DANTE, L. R., **Didática da resolução de problemas**. Editora Ática. São Paulo, 2000.

DANTE, L. R., **Didática da resolução de problemas**. 12.ed. Editora Ática. São Paulo, 2003.

DUARTE, A.R.S; GALVÃO, M.E.E.L. **OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA: QUASE QUATRO DÉCADAS DE INCENTIVO AO ESTUDO DA MATEMÁTICA**. Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 14 no 29 - p. 129-143 , agosto de 2014.

HEFEZ, A. **Apostila do PIC da OBMEP "Iniciação à Aritmética"**. Rio de Janeiro, IMPA, 2014.

HING, Ling Siu. The Hungarian Phenomenon. EduMath, 2002.

HOLANDA, B.; CHAGAS,E.A. **Círculos de Matemática da OBMEP – Volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra.** Rio de Janeiro, IMPA, 2018.

IMPA, **Mesa redonda celebra os 40 anos da OBM.** Disponível em: <https://www.obm.org.br/2019/08/02/mesa-redonda-celebra-os-40-anos-da-obm/> Acesso on-line set.2019

IMPA, **REVISTA OBMEP 12 ANOS**. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/images/Revista_OBMEP_12_anos.pdf>. Acesso on-line em set.2019

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: < http://www.imo-official.org/default.aspx>. Acesso em: 19 set.2019.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. **Discutindo Resolução de problemas e exploração-investigação Matemática: Reflexões para o Ensino de Matemática.** Zetetiké – FE/Unicamp – V.19, n. 36 – Jul/dez. 2011.

LIMA, Elon et al. **Temas e Problemas Elementares**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOPES, Antônio José et al. **Resolução de problemas: observações a partir do desempenho dos alunos.** A educação matemática em revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) Ano II – n.º 3 e 2 semestre 1994 p. 33-40.

MARTINS, A.M. **Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas Internacionais de Matemática: uma reflexão voltada para o ensino da Geometria Plana no Brasil**. Dissertação (Mestrado). Universidade de Brasília. Brasília, 2015.

NASCIMENTO, L. C. **Políticas educacionais de avaliação dos conhecimentos escolares de matemática**: campos, agentes e suas filiações. 2014.162 f. Tese (Doutorado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

OBM, **REVISTA EUREKA!,** número 1,p. 2 a 3.Rio de Janeiro, 1998. Disponível em <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/09/eureka1-1.pdf>. Acesso on-line em set.2019

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: < https://www.obm.org.br/>. Acesso em: 19 set. 2019.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>Acesso em: 19 set.2019.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 199-218.

ONICHIC, L.R.; ALEVATTO, N.S.G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Revista Bolema, Rio Claro (SP), v.25, n.41, p.73-98, dez.2011.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: **um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro, Interciência, 2006

REGULAMENTO, **Olimpíada Brasileira de Matemática 2019**. Disponível em: < https://www.obm.org.br/content/uploads/2019/03/Regulamento_OBM_2019.pdf>. Acesso *on-line* em set. 2019.

SUPPA, E. ***Eötvös-Kürschák competitions.*****Mathematical and Physical Society (Hungria)**. Budapeste, 2007.

WAGNER, E. **Apostila do PIC da OBMEP "Teorema de Pitágoras e Áreas"**. Rio de Janeiro, IMPA, 2017.