Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

OSWALDO DOS SANTOS AZEREDO COUTINHO

O USO DE VÍDEOS NO AMBIENTE ESCOLAR POR MEIO DE NARRATIVAS: A HISTÓRIA DO NÚMERO 1

Orientador:
Humberto José Bortolossi

NITERÓI
MARÇO/2020

Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar por Meio de Narrativas: A História do Número 1

Niterói – RJ

Março / 2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C871u Coutinho, Oswaldo dos Santos Azeredo
O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar por Meio de Narrativas : A História do Número 1 / Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho ; Humberto José Bortolossi, orientador. Niterói, 2020.
71 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2020.mp.05136562781

1. Narrativas. 2. Uso de vídeos. 3. Ensino e aprendizagem de matemática. 4. História da matemática. 5. Produção intelectual. I. Bortolossi, Humberto José, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar por Meio de Narrativas: A História do Número 1

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Março / 2020

OSWALDO DOS SANTOS AZEREDO COUTINHO

O USO DE VÍDEOS NO AMBIENTE ESCOLAR POR MEIO DE NARRATIVAS:
A HISTÓRIA DO NÚMERO 1

Dissertação apresentada por **OSWALDO DOS SANTOS AZEREDO COUTINHO** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Tecnologias no Ensino da Matemática.

Aprovada em: 02/03/2020

Banca Examinadora

Humberto José Bortolossi

Humberto José Bortolossi – Orientador
Doutor – Universidade Federal Fluminense

Dirce Uesu Pesco

Dirce Uesu Pesco – Membra
Doutora – Universidade Federal Fluminense

Flávia Landim

Flávia Maria Pinto Ferreira Landim – Membra
Doutora – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Luzia da Costa Tonon Martarelli

Luzia da Costa Tonon Martarelli – Membra
Doutora – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

NITERÓI

2020

Dedico este trabalho aos docentes, que diante das adversidades, não desistem de sua árdua e fundamental ?missão? e a minha esposa que está sempre a meu lado.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todos os momentos, fáceis e não tão fáceis, pois esses momento nos moldam e fortalecem.

Ao meu orientador, Humberto José Bortolossi, que nunca desistiu de mim e que com seu extremo profissionalismo e humanismo, esteve ao meu lado nessa fantástica jornada coletiva em busca de novos conhecimentos.

Aos meus companheiros de pesquisa e trabalho, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, KarlaWaack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas e Rodrigo Pessanha da Cunha por participarem deste incrível projeto, que deixará grandes memorias e saudades. Agradeço principalmente ao Rodrigo Pessanha da Cunha por suas palavras que foram fundamentais.

A minha esposa, Sabrina, companheira em todas as horas, ao meu amigo e irmão Marlon um incansável incentivador, a meus familiares e amigos que sempre estão ao meu lado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Podemos ser apenas felizes ignorantes, às vezes sem saber se a resposta está certa ou não. E isso é uma coisa boa, não?

(Terence Graham Parry Jones em "A História do Número 1")

Histórias ancoram nossas crenças. Se você tem uma história, a única coisa que muda sua mente é uma história melhor.

(Donald Taylor em "The Healing Power of Stories")

Resumo

Nesta última década, ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes e curtas) relacionados com Matemática e Estatística. Com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Esta dissertação contribui, então, para esse projeto oferecendo um roteiro detalhado para uso em sala de aula de um vídeo relacionado com a temática de História da Matemática: "A História do Número 1". O roteiro inclui, entre várias informações, indicações de objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo e, também, uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição de cada vídeo. Mais do que um texto definitivo, espera-se que o roteiro sirva como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma. Nosso trabalho apresenta também alguns recortes teóricos que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática e da Estatística.

Palavras-chave: ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, uso de vídeos em sala de aula, narrativa, *storytelling*, História da Matemática.

Abstract

In the last decade, there has been a remarkable increase in the production of audiovisual materials (documentaries, animations, films and short films) related to Mathematics and Statistics. With the aim of potentializing the didactic scope beyond the simple exhibition, a group of professors, undergraduate, and graduate students has cataloged the available videos and elaborated support material in the format of guidelines by the Film Society of Mathematics and Statistics Project of the Fluminense Federal University. This dissertation contributes to this project by offering one detailed guideline for classroom use of videos related to the theme of History of Mathematics: 'The Story of 1" . The guideline includes, among various information, indications of learning objectives that, in our opinion, can be achieved through the video and, also, suggestions of questions that can be worked out immediately after each video is exhibited. More than a definitive text, it is expected that the guideline serves as a starting point for the teacher to make adaptations and modifications according to the needs and characteristics of his/her class. Our work also presents some theoretical highlights that seek to provide different perspectives on the role of narrative (storytelling) in human society. The goal is to try to frame the reasons why a video (a powerful form of narrative that unites image and sound) constitutes a didactic instrument for the teaching and learning of Mathematics and Statistics.

Keywords: teaching and learning of Mathematics and Statistics, use of videos in the classroom, narrative, storytelling, History of Mathematics.

Sumário

1 Introdução

1.1 Nossa proposta

Nesta última década ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes, curtas) relacionados com Matemática e Estatística: vídeos da TV Escola do Ministério da Educação; documentários da BBC (British Broadcasting Corporation) e PBS (Public Broadcasting Service); episódios da série “Isto é Matemática” apresentada por Rogério Martins; o canal “Numberphile” no YouTube com suporte do MSRI (Mathematical Sciences Research Institute); vídeos educacionais TED-Ed; curtas das séries “Dimensions” e “CHAOS” idealizadas e produzidas por Étienne Ghyz e colaboradores; alguns vídeos de “Os Simpsons”; apenas para mencionar alguns (Figura 1.1).

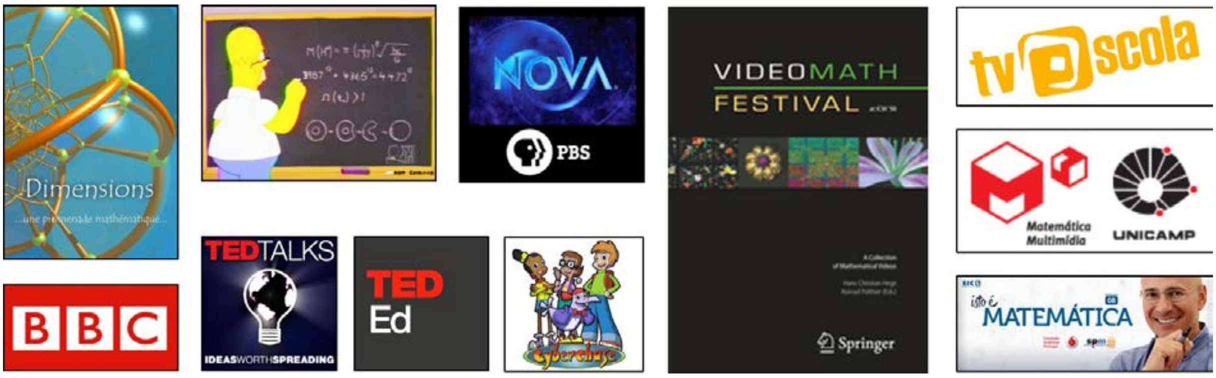


Figura 1.1: Algumas iniciativas na produção de materiais audiovisuais relacionados com Matemática e Estatística.

Nesse contexto, com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição com ênfase nos aspectos matemáticos e estatísticos, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado alguns vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Cada roteiro é dividido nas seguintes seções:

- **Ficha catalográfica**: faixa de classificação etária; idioma do áudio e das legendas; título original; gênero; duração; produtora e ano de produção; tópicos matemáticos abordados;

nível escolar sugerido; interdisciplinaridade; marcadores; competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias.

- **Imagens selecionadas**: seis imagens que permitem ao professor, visualmente, ter uma ideia do estilo do vídeo e, também, de seu conteúdo.
- **Sinopse**: uma breve descrição do conteúdo do vídeo sem *spoilers* (isto é, sem informações que poderiam estragar a apreciação do vídeo).
- **Orientações metodológicas gerais**: uma lista de recomendações metodológicas para a condução da atividade em sala de aula.
- **Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado**: um parágrafo indicando alguns objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo.
- **Sensibilização**: um texto e uma ou duas imagens que podem ser usadas para confeccionar um cartaz de divulgação do vídeo na escola.
- **Sugestões de questões gerais**: uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição do vídeo.
- **Sugestões de questões específicas**: uma proposta de questões que para serem respondidas, se faz necessário que trechos específicos do vídeo sejam revisitados (os tempos dos trechos são indicados no roteiro).
- **Observações para o professor**: orientações didáticas, desdobramentos, curiosidades, materiais suplementares relacionados com o vídeo.
- **Outras informações**: bibliografia, agradecimentos, créditos.

Cabe ressaltar que, mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma.

1.2 Vídeos em sala de aula

O uso de vídeos em sala de aula não é uma novidade. Já na época dos antigos videocassetes a questão era considerada[a]. Moran (1995), por exemplo, já apontava para os usos inadequados, observações estas que continuam ainda válidas nos dias de hoje com vídeos *on-line*, em DVD ou *blu-ray* e em formato *streaming*:

- **vídeo tapa-buraco**: colocar vídeo quando há um problema inesperado, como ausência do professor;
- **vídeo enrolação**: exibir um vídeo sem muita ligação com a matéria;

[a]Ainda que, nesta época, existisse relativamente pouco material disponível para a área de Matemática.

- **vídeo deslumbramento**: o professor que acaba de descobrir o uso do vídeo costuma empolgar-se e passar vídeo em todas as aulas, esquecendo-se outras dinâmicas por vezes mais pertinentes;
- **vídeo perfeição**: existem professores que questionam todos os vídeos possíveis porque possuem falhas de informação ou defeitos estéticos; não obstante, os vídeos que apresentam conceitos problemáticos podem ainda ser usados para, junto com os alunos, descobrir e analisar os erros existentes;
- **só vídeo**: não é didaticamente satisfatório exibir o vídeo sem discuti-lo, sem integrá-lo com o assunto da aula, sem reproduzir trechos com momentos mais importantes.

Outra referência clássica da época dos videocassetes é Ferrés (1996). Neste livro, o autor:

- **propõe uma sistematização para o uso didático de vídeos:** videolição, videoapoio, videoprocesso, programa motivador, programa monoconceitual, vídeo interativo;
- **estabelece critérios para a utlização didática do vídeo:** mudança de estruturas pedagógicas, o papel do professor, a formação do professor frente a este tipo de mídia, a relação didática do vídeo com outras mídias, etc.;
- **categoriza as diversas funções do vídeo no ensino:** função formativa/videodocumento, função motivadora/videoanimação, função expressiva/criatividade e videoarte, função avaliadora/videoespelho, função investigativa, função lúdica/ vídeo como brinquedo, função metalinguística, combinação e interação das funções previamente citadas;
- **dá sugestões práticas e técnicas para a exibição do vídeo:** preparação antecipada do local, disposição dos alunos de acordo com o tamanho da tela do televisor, problemas técnicos frequentes;
- **sugere abordagens pedagógicas após a exibição do vídeo:** comunicação espontânea dos alunos, reflexão crítica, pesquisa final e recapitulação, nuvem de palavras, entrevista com um especialista, gravação de pesquisa de opinião pública, manipulação de objetos, palavras-chave, resumo objetivo, recontar a história em grupo, desenho livre, desenho em quadrinhos, escrever uma carta, comunicação em duplas, interpelação em duplas, expressão corporal, cartazes e trabalhos em grupo, fotografia do ambiente, elaboração de um dossiê, tribunal e julgamento, criação de um mural, realização de uma colagem, Phillips 66, primeira exibição muda (sem som), interrupção da exibição, exibição invertida;
- **sugere várias pautas para avaliação do vídeo sob o ponto de vista didático:** tema, objetivos, formulação didática, estrutura, roteiro didático, formulação audiovisual, imagem como valor técnico, faixa sonora como valor técnico, interação dos elementos.

Desde então, vários trabalhos sobre vídeos no contexto escolar têm sido produzidos. Para o leitor interessado, indicamos: Polster e Ross (2012), Sklar e Sklar (2012), Machado e Mendes

(2013), Napolitano (2003, 2015), Muzás (2015), Pellicer (2015), Reiser (2015), Santos (2015), Bulman (2017). Indicamos também quatro páginas *WEB* especializadas na Matemática dos filmes: *Mathematics in Movies* (<http://bit.ly/2OuJOUU>) mantida por Oliver Knill, do Departamento de Matemática da Universidade de Harvard (nos EUA); *Matemáticas en El Cine y en Las Series de T.V.* (<http://bit.ly/2yPI8Aa>), mantida por José María Sorando Muzás (na Espanha); *MMDB–The Mathematical Movie Database* (<https://bit.ly/2HurRY8>) mantida por Burkard Polster (Monash University) e Marty Ross na Austrália; e *Mathematical Fiction* <https://bit.ly/1kcpcAR> mantida por Alex Kasman (College of Charleston) nos Estados Unidos.

Entre as iniciativas governamentais do uso de vídeos em sala de aula, destacamos o projeto "O Cinema Vai À Escola – O Uso da Linguagem Cinematográfica na Educação" da Fundação para o Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. De acordo com o *site* oficial (<http://bit.ly/2OnYXqT>), o projeto procura subsidiar a rede pública de ensino com materiais, equipamentos e acervos didáticos, fornecendo às escolas de Ensino Médio um conjunto de filmes de diferentes categorias e gêneros, em DVD, acompanhado de materiais de apoio à prática pedagógica. Os vídeos são principalmente produções cinematográficas do circuito comercial e os materiais de apoio incluem roteiros no formato PDF (<http://bit.ly/2F3hPMu>) e, também, vídeos tratando do universo dos vídeos (<http://bit.ly/2OorDA8>). Não obstante, observamos que, neste projeto, temas relacionados com a Matemática estão ausentes.

Por fim, registramos que o Whittier College nos Estados Unidos oferece uma disciplina de graduação, NTD 231 – *Numb3rs in Lett3rs & Fi1ms*, que explora a conexão entre a Matemática e as Artes criativas escritas/teatrais. Segundo o catálogo da instituição (<https://goo.gl/j5wtX4>), nessa disciplina, os alunos leem ficção e assistem a filmes nos quais os conceitos matemáticos fornecem a estrutura ou desempenham um papel central na peça criativa. Os alunos também estudam os tópicos matemáticos relacionados a esses trabalhos para entender melhor a intenção do autor. Detalhes da iniciativa podem ser encontrados no artigo Chabrán & Kozek (2015).

1.3 Concepção e divisão deste trabalho

Este texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 descrevemos algumas perspectivas relacionadas com o conceito de narrativa (*storytelling*) na intenção de tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os roteiros de dois vídeos (nos moldes descritos na seção anterior) são apresentados nos Capítulos 3 e 4. Experiências de uso dos vídeos e dos roteiros junto com algumas considerações finais são o tema do Capítulo 5.

Os Capítulos 1, 2 e parte do 5 foram redigidos de forma conjunta a partir de seminários realizados pelos mestrandos que trabalharam com a mesma metodologia acerca do uso didático de vídeos: André de Carvalho Rapozo, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas, Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho e Rodrigo Pessanha da Cunha. Os Capítulos 3, 4 e parte do 5 têm redação individual: mestrandos diferentes trabalharam com assuntos diferentes (Probabilidade e Estatística, Números e Medidas, Linguagem e Lógica Matemática, Fractais e Caos, etc.).

Dado que se pretende divulgar cada roteiro produzido em um *blog* para um melhor alcance na comunidade de professores, a formatação de um capítulo com roteiro é diferente, justamente para facilitar esse processo: as figuras não são numeradas, há uma bibliografia específica para o roteiro, trechos de observações para o professor podem eventualmente serem reaproveitadas em outros roteiros com alguma temática comum.

Por fim, indicamos que as respostas das questões propostas nos roteiros podem ser obtidas mediante solicitação para o e-mail <amec7a@gmail.com>.

2 Narrativas: Um Panorama

Neste capítulo, apresentamos alguns recortes que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Como aponta Gottschall (2013), *storytelling* é como gravidade: ela é esta força poderosa e abrangente que permeia nossas vidas e que acabamos por não perceber por estarmos tão habituados com ela. Vídeos (tema de nosso trabalho), quadrinhos, contos, piadas, parábolas (incluindo as religiosas), novelas, músicas, peças de teatro e *video games* são, todos, formas de narrativa que nos cercam e nos ensinam.

2.1 Narrativas e A História da Humanidade: Harari

Harari em seu livro "Sapiens: Uma Breve História da Humanidade" coloca o papel importante que a narrativa teve na evolução histórica dos seres humanos. De acordo com o autor, foi o surgimento da ficção que permitiu a cooperação humana em grande escala: um grande número de estranhos só pode cooperar de maneira eficaz se acreditar nos mesmos mitos, ou seja, histórias que existem na imaginação coletiva das pessoas. Formigas e abelhas também podem trabalhar juntas em grandes números, mas elas o fazem de uma maneira um tanto rígida, e apenas com parentes próximos. As religiões, as nações, o dinheiro, as leis, as culturas e as marcas são apenas alguns exemplos de realidades imaginadas que foram construídas e fortalecidas baseadas em mitos partilhados. Uma realidade imaginada não é uma mentira. Pelo contrário, é algo em que muitos acreditam e por essa razão, exerce influência sobre o mundo, molda comportamentos e preferências. A imensa diversidade de realidades imaginadas que os *sapiens* inventaram e a diversidade resultante de padrões de comportamento são os principais componentes do que chamamos "culturas". A partir da Revolução Cognitiva[a], as narrativas históricas

[a]Surgimento de novas formas de pensar e se comunicar, ocorrida entre 70 e 30 mil anos atrás, que pode ter sido causada por mutações genéticas acidentais que mudaram as conexões internas dos *sapiens*, possibilitando que pensassem de uma maneira sem precedentes e se comunicassem usando um tipo de linguagem totalmente novo.

substituem as narrativas biológicas como nosso principal meio de explicar o desenvolvimento do *Homo sapiens*.

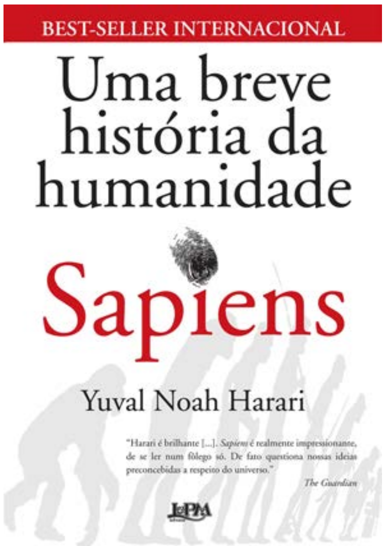


Figura 2.1: Capa do livro de Harari (2015).

2.2 Narrativas e A Neurociência: Zak

Uma outra explicação para a afinidade humana com *storytelling* se dá no campo da neurociência com a substância oxitocina[b] (um tipo de hormônio). Um dos principais pesquisadores desta área é o neurocientista americano Paul J. Zak, fundador do campo de estudo "neuroeconomia".

O estudo do Dr. Zak busca entender um pouco mais sobre os efeitos da oxitocina. O que se sabia deste hormônio é que ele induzia as contrações no parto e a produção de leite na amamentação, além de ser liberado por ambos os sexos durante o ato sexual. Mas as perguntas que ele se fez foram: "Por que os homens também a produziam?"e "Qual era exatamente a sua importância?". Sua busca por respostas resultaram no livro "A Molécula da Moralidade: As Surpreendentes Descobertas sobre A Substância que Desperta O Melhor em Nós". Ele também tem divulgado seu trabalho por meio de palestras, como o vídeo TED "Confiança, Moralidade – e Oxitocina" (<https://goo.gl/PmzKve>).

[b]Alguns autores escrevem ocitocina no lugar de oxitocina.

Figura 2.2: Zak, seu livro e sua palestra TED sobre a oxitocina (2011).

O laboratório de Paul Zak foi o primeiro a descobrir que a oxitocina neuroquímica é sintetizada no cérebro humano e que essa molécula motiva a reciprocidade, isto é, mesmo sem contato visual, face a face, o hormônio da oxitocina parece sinalizar que o outro é familiar e confiável. Esse pequeno peptídio sintetizado no hipotálamo dos cérebros dos mamíferos pode ser identificado por meio das alterações no exame de sangue que refletem as alterações na produção cerebral.

Em seu trabalho “*Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*” (“Por que Histórias Inspiradoras Nos Fazem Reagir: A Neurociência da Narrativa”, tradução nossa) de 2015, Zak fez experimentos para verificar como o tipo de narrativa de um vídeo se correlaciona com a liberação de oxitocina e como a liberação de oxitocina se correlaciona com o grau de atenção de um indivíduo. A medição do nível de oxitocina foi feita por uma aferição indireta a cada milésimo de segundo via eletrocardiograma no nervo vago (descobriu-se que esse nervo está repleto de receptores de oxitocina). O nível de atenção foi medido pela aceleração do batimento cardíaco e pelo suor proveniente de glândulas écrinas na pele. O vídeo exibido contava uma história com arco dramático envolvente: um pai que aparecia falando de seu filho Ben com câncer terminal e a sua tentativa de superar seus medos e frustrações para conseguir conectar-se ao seu filho e desfrutar de sua companhia pelos meses que ainda tinha. O experimento verificou que a produção de oxitocina e a atenção estão correlacionadas com o grau de dramaticidade. Ao longo dos cem segundos do vídeo, observou-se que o nível de atenção aumentava e diminuía, com o cérebro ficando atento à história para, em seguida, fazer uma rápida pesquisa do restante do ambiente e, então, reorientar para a história à medida que a tensão aumentava. O pico de resposta da atenção ocorreu no clímax do vídeo, quando o pai de Ben revela que seu filho está morrendo.

Paul Zak (2015) conclui: “Narrativas que nos levam a prestar atenção e também nos envolvem emocionalmente são as histórias que nos movem para a ação. Isto é o que um bom documentário faz." (tradução nossa). Assim, segundo o pesquisador, as narrativas convincentes causam liberação de oxitocina e, portanto, elas têm o poder de afetar nossas atitudes, crenças e comportamentos.

2.3 Narrativas, Matemática e A Língua Materna: Machado

Em sua palestra intitulada "A Narrativa em Matemática", proferida na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da Universidade Federal Fluminense em 2016, o educador Nilson José Machado analisa as correlações entre a Língua Materna (o Português, em nosso caso) e a Matemática, mostrando como uma faz uso da outra a todo momento e o papel das narrativas neste processo. No que se segue, nessa seção, apresentaremos algumas ideias apresentadas pelo autor nessa palestra.

Machado inicia observando que informações soltas, em geral, perdem o seu valor, enquanto narrativas encadeiam informações e criam elos cognitivos que constroem os significados mais marcantes, estabelecendo assim o conhecimento. Segundo Machado, a conexão entre "conhecimento" e "narrativa" é tão profunda que ambas as palavras têm um léxico comum: *gnarus* (em Latim).

A ideia de narrativa, destaca Machado, surge do diálogo entre as ideias de cadeia e de rede. Na rede, tudo está ligado, articulado. O encadeamento é a ideia cartesiana que segue uma linha: "se isso, então aquilo". Atualmente, continua o autor, as pessoas tendem a dizer que as ideias cartesianas são ultrapassadas e que tudo está em rede, porém temos que pensar que até mesmo para falar precisamos de um encadeamento de ideias; do contrário, não formamos sequer uma frase. Quem conta uma história, encadeia, pois toda narrativa é um encadeamento.

Machado, em seguida, estabelece que o *conhecimento explícito* é aquele que, quando perguntados a respeito, respondemos imediatamente. Este tipo de conhecimento, acrescenta o educador, representa uma parte muito pequena de todo o conhecimento que adquirimos na vida. A maior parte de tudo o que sabemos não conseguimos expressar claramente e este é o *conhecimento tácito*. A narrativa combina os dois tipos de conhecimento: o tácito (que ele chama de "recheio da história") e o explícito (que é a "moral da história"). Machado prossegue: a informação sem narrativa se perde, é como se fosse uma cena isolada e informações isoladas de nada valem. O que não vira uma história para contar, morre. É preciso "linkar" as coisas, criar um roteiro, para que elas (as informações) permaneçam na memória.

Machado destaca, então, a importância das metáforas na construção do significado: quando encontramos algo que explica tão bem o que queremos, as coisas tornam-se claras de modo que não precisamos defini-las. De acordo com o pesquisador, há vários tipos de narrativas: binárias (que são as mais simples e polarizadas entre o “bem” e o “mal”), quaternárias (que são as que têm dois eixos) e as multifárias (mais complexas, sem definição explícita de bem e mal, e que são mais parecidas com a realidade).

Machado apresenta, na sequência, vários indícios de um “paralelismo” entre a Matemática e os Contos de Fadas em Língua Materna.

- Contos de Fadas são, em geral, binários, isto é, polarizados (o “bem” contra o “mal”); em Matemática, há também uma polarização: ou uma sentença matemática fechada é “verdadeira” ou ela é “falsa”.
- A palavra “contar” tem, por um lado, na Matemática, a noção de “enumerar” e, por outro, em Português, ela traz a ideia de “narrar” (entre outros significados).
- Os Contos de Fadas começam com “Era uma vez ...” e terminam com “E foram felizes para sempre!”; em Matemática, as demonstrações começam com “Seja ...” e terminam com “Como queríamos demonstrar!”.
- A Matemática, assim como os Contos de Fadas, fazem forte uso de abstrações. Por exemplo, não existem unicórnios nem círculos no mundo real (ambos são objetos abstratos). Contudo, frequentemente, a abstração na Matemática é vista como algo muito complicado, enquanto que, nos Contos de Fadas, ela é aceita de forma mais natural.
- Os significados, tanto na Matemática, como nos Contos de Fadas, devem passar por narrativas coerentes: é preciso contar bem a história, mesmo sendo ela uma demonstração, com começo, meio e fim.

Existem ainda outros aspectos comuns, complementa Machado: o tempo que tem que ser presente na história, mas que serve a qualquer tempo ou em qualquer época; a micromotivação que gera a macromotivação; a hermenêutica que não exclui a interpretação aberta; o genérico que trata do particular.

Por fim, Machado cita o filósofo britânico Bertrand Russell, ao colocar que o papel principal do professor é evitar duas coisas na mente dos alunos: a primeira são as *narrativas unárias*, aquelas nas quais se acredita que haja uma única verdade e que dão origem a dogmatismos e fanatismos; a segunda são as *narrativas binárias*, que levam aos extremismos ao não permitirem opções alternativas intermediárias (para mais detalhes, ver a referência Russell (2009)).

2.4 Narrativas e A Prova Matemática: Doxiadis e Mazur

O livro "*Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*", editado pelos professores Apostolos Doxiadis e Barry Mazur, e publicado pela Princeton University Press, em 2012, tem sua origem em uma conferência em Mykonos, na Grécia, em 2005, com a formação do grupo THALES + FRIENDS. O grupo foi criado com o objetivo de transpor "o abismo entre a Matemática e as outras formas de atividades culturais". A segunda conferência, que ocorreu em Delphi, também na Grécia, em 2007, e contou com matemáticos, historiadores, filósofos, professores de Literatura e um romancista especialista em Matemática, focou em estudos sobre Matemática e Narrativa. Os trabalhos desta conferência tornaram-se a base para o referido livro, cujo título remete às palavras "Não perturbe meus círculos!" atribuída a Arquimedes antes de ser assassinado por um soldado romano em Siracusa.

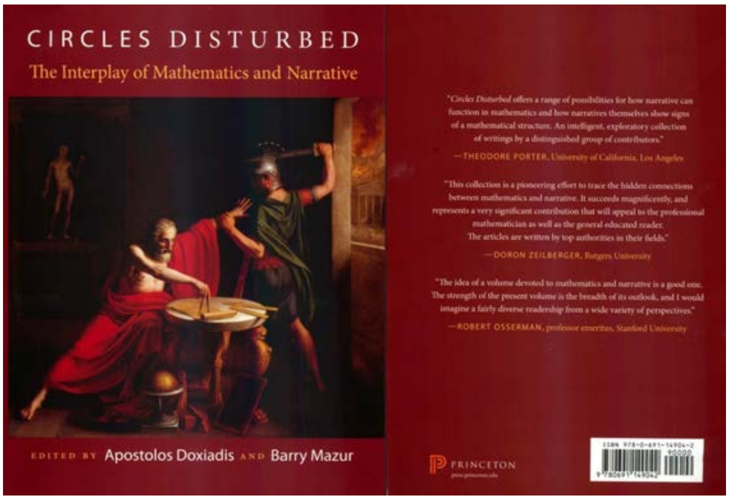


Figura 2.3: Doxiadis, Mazur e a estrutura narrativa da Matemática.

O Capítulo 10 do livro, '*'A Streetcar Named (among Other Things) Proof: From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric*" ("Um Bonde Chamado (entre Outras Coisas) Prova: Da Narrativa à Geometria, via Poesia e Retórica"), escrito por Apostolos Doxiadis, é o capítulo mais longo da obra, ocupando mais de cem páginas. Nele, o autor defende que a origem grega da maneira de se fazer e escrever provas que usamos hoje está relacionada com a narrativa, a narrativa poética e, sobretudo, com a retórica forense. Doxiadis sintetiza as várias conexões em um diagrama, conforme a figura a seguir. No diagrama, a flecha preta sólida denota influência direta e a pontilhada, indireta. As flechas cinzas indicam influências de domínios específicos nos dois domínios em que a prova matemática teve início (*Prática Jurídica e Política* e *Geometria Prática*).

Os termos "narrativa" e "história" são frequentemente usados intercambiavelmente, mas precisamos distingui-los, usando narrativa para denotar algo mais geral, ou seja, todas as histórias são narrativas, mas nem todas as narrativas são histórias. O termo narrativa denota um modo de comunicação cujo objetivo é representar uma ação bem como representar uma mediação simbólica entre o mundo das ações e o mundo das representações mentais. De acordo com Zacks, Tversky e Iyer (2001), "narrativas são discursos que descrevem uma série de ações", um ponto de vista compartilhado por Doxiadis.

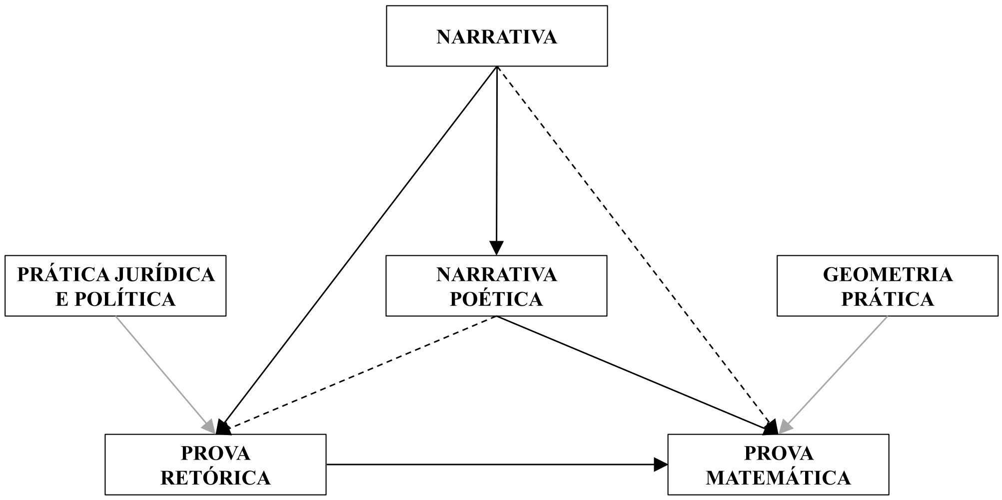


Figura 2.4: relações de práticas culturais que deram origem à prova matemática.

Por narrativa poética, o autor entende como aquela narrativa em prosa e verso desenvolvida na Grécia Antiga nos séculos VI e VII a.C. da qual fazem parte as epopeias de Homero e Hesíodo. Tais formas de narrativa dominaram a cultura grega e suas características serviram para a formação das formas narrativas subsequentes.

De acordo com Doxiadis, o estilo arcaico de narrativa, especialmente aquele encontrado nas epopeias, trabalha com uma combinação de mecanismos cognitivos inatos e os hábitos de uma prática de desenvolvimento cultural, unindo sentenças narrativas curtas com o objetivo de criar uma representação viva na mente do leitor. Na Idade Clássica, surge um novo estilo narrativo, a tragédia, que dá um novo formato à representação da ação por meio do uso da mimese (figura em que o orador imita outrem, na voz, estilo ou gestos, em discurso direto). Doxiadis coloca que "o desenvolvimento conjunto da tragédia e da retórica é parte da história maior das mudanças trazidas na vida das cidades-estados gregas pela transformação política, da tirania à oligarquia, para práticas mais participativas, a mais avançada das quais é a democracia". Central para essa transformação, continua Doxiadis, são formas de discurso culturalmente desenvolvidas cujo objetivo é a persuasão. A retórica, a arte da persuasão, também usa uma forma de prova, diferente, mas não em sua totalidade, da prova matemática. Existiram três gêneros de retórica na Antiguidade Clássica: cerimonial, política e judicial. A retórica cerimonial é usada em ocasiões festivas ou em exibições oratórias, a retórica política usada em assembleias e a retórica judicial usada pelos litigantes em uma corte judicial.

Por fim, a Geometria Prática é aquela evidenciada na Grécia Antiga, na qual as ferramentas básicas se resumiam à régua e ao compasso. Por volta do ano 900 a.C. podemos perceber a evidência de uma ferramenta semelhante a um compasso. Seria um pincel articulado que foi utilizado para desenhar em ânforas (vasos antigos). Vale ressaltar que muitas vezes uma ferramenta é criada para um determinado propósito, mas seus usuários a tornam mais sofisticada do que para aquilo que fora criada. Esta obra artesanal acabou sendo o mesmo desenho utilizado em muitas provas geométricas realizadas séculos depois.

2.5 Narrativas e O Ensino de Matemática: Zazkis e Liljedahl

Rina Zazkis e Peter Liljedahl da Simon Fraser University, no Canadá, escreveram o livro "*Teaching Mathematics as Storytelling*" que trata especificamente do uso de narrativas (*storytelling*) no ensino da Matemática. O livro apresenta *storytelling* em Matemática como um meio para se criar uma aula em que a Matemática seja apreciada, entendida e divertida. Os autores mostram como envolver os alunos nas atividades matemáticas por meio da narrativas. O texto apresenta vários tipos de narrativas que podem ser usadas em sala de aula: (1) narrativas que proporcionam uma trama ou plano de fundo para os problemas matemáticos; (2) narrativas que se entrelaçam profundamente com o conteúdo e que explicam conceitos e ideias; (3) narrativas que ajudam a resolver um problema ou a alcançar um melhor entendimento de uma solução; (4) narrativas na forma de problemas que propõem questões. Além disso, os autores apresentam um enquadramento teórico para a criação de novas narrativas, ideias para enriquecer e usar narrativas já existentes, bem como várias técnicas que tornam uma narrativa mais interativa e invocativa para o leitor. O livro é, assim, de interesse para quem ensina Matemática ou para quem forma professores de Matemática.

Ao longo dos seus 12 capítulos, o livro intercala justificativas e ponderações sobre o uso de *storytelling* no contexto escolar. Destacamos os seguintes trechos:

- O valor de uma história para o ensino está precisamente no poder de engajar as emoções dos estudantes e, de forma conjunta, suas imaginações no material curricular.
- O grande poder das histórias está em sua missão dupla: elas comunicam informação de uma forma memorável e delineiam os sentimentos dos ouvintes sobre a informação que está sendo comunicada.
- Contar uma história é estabelecer um significado e estabelecer significado é o fio condutor

no ensino da Matemática, uma disciplina que é frequentemente percebida como uma mera manipulação de símbolos cujo significado está muitas vezes longe de estar claro para os estudantes.

- Usar histórias em sala de aula pode servir para muitos e diferentes propósitos. Histórias podem despertar interesse, ajudar na memorização e reduzir a ansiedade. Elas podem criar uma atmosfera confortável e de suporte na sala de aula, bem como estabelecer um relacionamento entre o professor e os estudantes.
- As escolas de hoje estão mais acostumadas com os *word problems* (problemas com palavras), primos distantes das boas histórias. Contudo, uma análise mais cuidadosa dos *word problems* revela que esses de fato não são histórias engajantes, pois foram desprovidos dos detalhes e emoções que ajudam a orientar os sentimentos dos ouvintes.

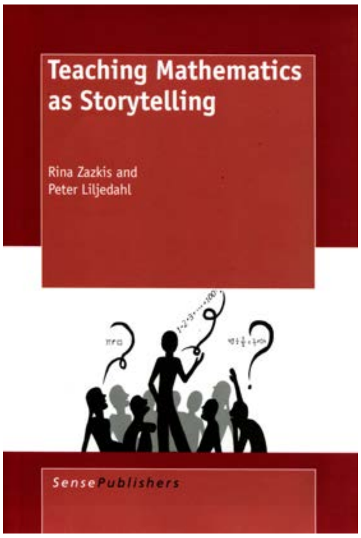


Figura 2.5: Zazkis, Liljedahl e o uso de narrativas no Ensino da Matemática.

Os autores citam ainda os 10 benefícios enumerados por Haven (2000) sobre o uso de narrativas como ferramenta educacional:

- *Storytelling* é um elemento efetivo e poderoso no esforço de melhorar e desenvolver todas as quatro primeiras habilidades da linguagem (ler, escrever, ouvir e falar).
- Informações (tanto conceitos como fatos) são melhor lembradas e por mais tempo quando apresentadas em forma de narrativa.
- *Storytelling* é uma ferramenta de ensino multidisciplinar efetiva e poderosa que perpassa todo o currículo.
- *Storytelling* motiva positivamente os estudantes para o aprendizado.
- *Storytelling* constrói efetivamente a autoconfiança e a autoestima do estudante.

- *Storytelling* envolve e desenvolve as habilidades ligadas à imaginação e à criatividade melhor do que qualquer outra atividade escolar.
- *Storytelling* envolve e entretém.
- *Storytelling* cria empatia e senso de conectividade.
- *Storytelling* melhora as habilidades de análise e resolução de problemas.
- *Storytelling* cria conexões valiosas com a comunidade e com a herança familiar.

2.6 Narrativas e Propaganda

Como coloca McSill (2013), desde tempos imemoriais, a estória[c] é utilizada como instrumento para ensinar, informar, entreter, reforçar crenças, dominar e, como se chama hoje, "fidelizar o cliente". Estudiosos da área de *marketing* colocam a narrativa como uma das pedras angulares da boa propaganda: se propaganda é a alma do negócio, então narrativa é a alma da propaganda.

Embora seja um livro destinado ao público de propaganda, Xavier (2015) discute as implicações educacionais de *storytelling*:

> *Pergunte a um professor qual é seu maior problema no exercício do magistério. A resposta mais ouvida certamente será o binômio desinteresse/desatenção. [...] Tudo começa com atenção, sem a qual o restante se inviabiliza. Se logo após a atenção inserirmos algum grau de afetividade (ou, se preferirmos, de emoção), estará aberto o caminho para uma identidade mais profunda entre comunicador e público. [...] A maneira de cumprir esse difícil percurso é contar uma boa história, que prenda a atenção, envolva com emoção, crie laços profundos com o público, una todas as pontas em um relato compreensível, seja apreciada e lembrada.*
>
> (Xavier, 2015)

Neste contexto, Xavier (2015) coloca o papel fundamental da narrativa (*storytelling*) em capturar e conduzir os capitais emocional, cultural e de atenção:

> *As pessoas estão à procura de conexões novas e emocionais. Elas procuram algo para amar [...] Só existe uma forma de prosperar como profissional de marketing na Economia da Atenção: parar de correr atrás de modismos e dedicar-se a estabelecer conexões consistentes e emocionais com os consumidores.*
>
> (Xavier, 2015)

Ao leitor interessado em mais detalhes sobre a questão da narrativa no âmbito da propaganda, recomendamos, portanto, a leitura dos livros Xavier (2015) e McSill (2013).

[c]Aqui, estamos usando "estória" seguindo o uso do próprio McSill (2013), mas o significado é o mesmo de "história". De fato, atualmente, os dois termos têm sido usados como sinônimos.

3 A História do Número 1

Faixa de classificação etária: Livre L.

Áudio: Português e Inglês.

Legendas: Português.

Título original: *The Story of 1*.

Gênero: Documentário.

Duração: 59 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: BBC e Impossible Pictures (2005).

Tópicos matemáticos abordados: Algarismos Romanos; Algarismos Indo-Arábicos; Aritmética Básica; Unidades de Medida; Teorema de Pitágoras; Números Inteiros; Números Irracionais; Juros Compostos; Sistema Binário.

Nível escolar sugerido: Ensino Fundamental; Ensino Médio; Formação de Professores.

Interdisciplinaridade: Arte; História; Geografia; Filosofia; Música; Língua Portuguesa.

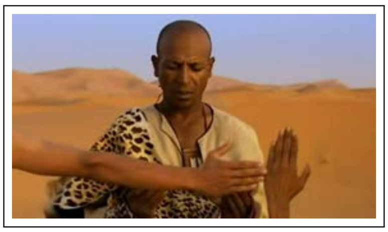
Marcadores: BBC; História do Número 1; História da Matemática; Documentário; Matemática.

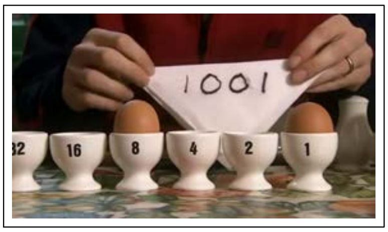
Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: H1, H2, H3, H4, H5, H10.

Link para o vídeo: <https://youtu.be/3rijdn6L9sQ> (parcialmente legendado) ou <https://youtu.be/ZWZKJb06CTU> (dublado).

Página web oficial: <http://news.bbc.co.uk/2/hi/entertainment/4272538.stm>.

Imagens selecionadas





Sinopse

Neste documentário da BBC, Terry Jones (historiador, ator e comediante do grupo Monty Python) usa uma boa dose de humor para contar a história do número 1, desde os seus primórdios na África com o osso de Ishango até os dias atuais com o computador digital, passando por vários povos e culturas (sumérios, egípcios, gregos, romanos, indianos e árabes).

Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

O documentário pode ser usado para levar o aluno a perceber de forma mais holística, que a Matemática (e, em particular, o conceito de número) é uma construção humana multicultural desenvolvida ao longo da história e motivada por diversas necessidades de nossa sociedade.

Sensibilização (para montar um cartaz)

O herói desta história é um mestre na arte do disfarce. Para algumas pessoas, ele apareceu em forma de cunha, para outras, como um cone. Mas independente da forma que assumiu, ele sempre foi o numero “1”. Sua história é a nossa história. É uma história de lutas, de sabedoria, de filosofia. Uma história sobre as origens dos números.

Fonte: Humberto José Bortolossi

Veremos como o “1” ajudou a criar as primeiras cidades, como ajudou a construir impérios e como inspirou as mentes mais brilhantes da história. Também conheceremos sua participação no modo de funcionamento do dinheiro. Por fim veremos como o “1” se associou ao “0” para dominar o mundo em que vivemos hoje. O mundo digital que funciona com “1”s e “0”s.

Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo de novo com o vídeo? O quê?
3. Segundo o documentário, o que motivou a “invenção” da matemática?
4. Qual é o avanço tecnológico das peças em formato de cone dos sumérios com relação às marcas no Osso de Ishango?
5. Segundo o documentário, qual foi o primeiro tipo de escrita humana?
6. Segundo o documentário, qual era o propósito de se estabelecer uma unidade (o “cúbito”) na sociedade egípcia antiga?
7. Segundo o documentário, qual era a definição de “cúbito”?
8. Usando a notação e a terminologia atual, descreva qual era o segredo de Pitágoras sobre o “triângulo retângulo com dois lados iguais”.
9. Segundo o documentário, quais eram os inconvenientes da notação romana antiga para os números?
10. Segundo o documentário, quais eram as vantagens dos algarismos indianos?
11. Segundo o documentário, quais necessidades levaram o mundo islâmico a usar os algarismos indianos?
12. Segundo o documentário, qual é a origem da palavra “bancarrota”?

13. Segundo o documentário, por que a sociedade medieval tinha receios em aceitar os algarismos indianos e preferia continuar com os algarismos romanos? Ainda segundo o documentário, por que, mesmo assim, no final, os algarismos indianos acabaram substituindo o ábaco e os algarismos romanos?
14. Por que 1001 em binário é o número 9 em decimal?
15. Segundo o documentário, como os números 1 e 0 são representados em um computador eletrônico?
16. No final do documentário, o apresentador comenta que todas aquelas razões para usar e entender os números (fazer cálculos astronômicos, lidar com medidas, descobrir percentagens, taxas de câmbio, juros compostos, todos os cálculos que preocuparam e, às vezes, deixaram perplexas as grandes mentes da antiguidade) podem, agora, ser deixadas para o computador e que, por isso, podemos "ser apenas felizes ignorantes, às vezes sem saber se a resposta está certa ou não". Ele então pergunta: "É isso uma coisa boa, não?". Qual é sua resposta a essa pergunta?
17. Do que você mais gostou no vídeo?
18. Se você fosse o diretor deste vídeo, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. No trecho (22:10-22:39), o documentário mostra Pitágoras tentando formar um triângulo retângulo com dois lados iguais com varetas de mesmo comprimento. O narrador dá a entender que isso não é possível. Por quê realmente não é possível? Apresente uma justificativa!

2. Ao longo do vídeo, cada novo estágio de "transformação" do número 1 é marcado por uma frase. Os tempos (06:35-06:40) e (12:46-12:52) são dois exemplos. Liste todas essas transformações, indicando como o "1" é transformado e qual é a frase apresentada para essa transformação.
3. (a) Como a distância *rajju* é definida (30:26-30:41) no documentário? Tente estimar o valor dessa distância em quilômetros.

(b) Como a quantidade de tempo *palya* é definida (30:42-30:58) no documentário? Tente estimar o valor dessa quantidade em séculos.

4. O nome do estudioso islâmico “al-Khwārizmī” deu origem a uma palavra de nosso idioma. Faça uma pesquisa e descubra qual!
5. No trecho (46:15-46-30), o apresentador coloca o problema de calcular o quanto deve ser pago por um empréstimo de 10 libras a meio por cento de juros por mês ao final de um ano. O matemático (usando algarismos arábicos) chega à resposta de 10,616777664035 libras. Essa resposta está correta? Por que sim? Por que não? Justifique sua resposta!

Observações para o professor

- O apresentador deste documentário é o galês Terence Graham Parry Jones (1942-2020) ou, mais simplesmente, Terry Jones, ator, escritor, comediante, roteirista, diretor de cinema e historiador. Ele fez parte da equipe de comédia britânico Monty Python, onde escreveu, atuou e dirigiu espetáculos e filmes. Jones foi em grande parte responsável pela estrutura inovadora e surreal do Grupo Monty Python.

Figura: Terry Jones atuando na peça “A Inquisição Espanhola”.
Fonte: Flickr.

Jones é um historiador medieval bem respeitado, formado na St. Edmund Hall em Oxford), tendo escrito vários livros e apresentado documentários de televisão sobre o período. Também é autor de diversos livros infantis. Em 2016, Jones recebeu um prêmio Lifetime Achievement no BAFTA (*British Academy of Film and Television Arts*) Awards, o Oscar Britânico. Terry Jones faleceu na noite de 21 de janeiro de 2020 depois de uma batalha longa, extremamente corajosa, mas sempre bem-humorada contra uma rara forma de demência diagnosticada em 2015.

- O método mais universal comprovado na história da contagem, além de ser o mais antigo, é o do osso entalhado ou do pedaço de madeira entalhado. Esse método, permitia ao ser humano, por meio da comparação, mensurar quantidades, numa época em que ele ainda não sabia contar de modo abstrato. Existem ossos entalhados de antes de 80000 a.C.. Os primeiros testemunhos arqueológicos conhecidos desta prática datam do período denominado pelos especialistas em pré-história como *aurignacense* (35000 a 20000 a.C.). Trata-se de inúmeros ossos, cada um com um ou uma série de entalhes, porém, entre todos eles, podemos destacar dois: o *Osso de Lobo* e o *Osso de Ishango*.

O Osso de Lobo, segundo a professora Maria Elisa Esteves Lopes Galvão (IME-USP) <http://bit.ly/2OalqdO>, foi descoberto em 1937. Sua datação aponta para aproximadamente 30000 a.C.. Ele foi encontrado por Karl Absolom (1877-1960) em Vestonice, na Tcheco-Eslováquia e, atualmente, se encontra exposto no Morávia Museu de Brno, na República Tcheca. O osso contém 57 marcas profundas, sendo que duas delas são mais longas e separam um grupo de 25 de um grupo de 30 marcas, supostamente correspondentes ao número de presas de um caçador. As 25 marcas estão agrupadas de 5 em 5, possivelmente mostrando um método de contagem referindo-se aos cinco dedos da mão (Huylebrouck (2019)). Pouco se sabe sobre os povos dessa região à essa época, pois eram populações nômades que deixaram pouquíssimos vestígios. Além do osso, deixaram também uma estátua de marfim.

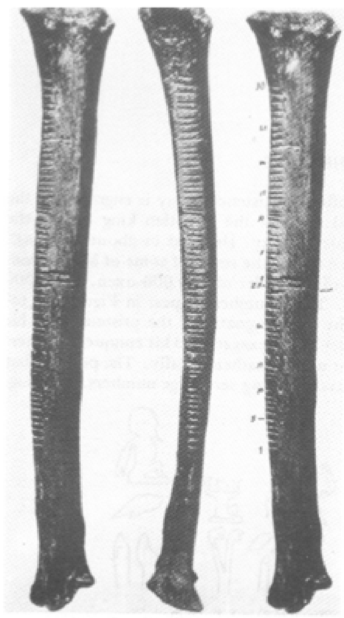


Figura: Osso de lobo pré-histórico.

Fonte: IME-USP <http://bit.ly/2OalqdO>.

O Osso de Ishango foi descoberto em 1957 pelo belga Jean de Heinzelin de Braucourt (1920-1998). O nome “Ishango” se refere ao local da descoberta, Ishango, que é uma subestação do Parque Nacional Virunga, situada nas margens do norte do Lago Edward, na República Democrática do Congo. Até hoje não se sabe de qual animal esse osso vem. É muito comum, em várias publicações, dizer que o osso é a fíbula (canela) de um babuíno fossilizada, mas isso é resultado de alguma confusão com outro osso entalhado, segundo Huylebrouck (2019). Seu comprimento é de aproximadamente 10,2 centímetros (mais ou menos o comprimento de um lápis).

Figura: Vistas do Osso de Ishango.
Fonte: <http://bit.ly/37ODAt7> e <https://youtu.be/X3slnefSI0c>.

No final do osso há, preso, um pedaço de quartzo com somente 2 milímetros para fora. Provavelmente o osso era usado para fazer gravuras e escritas em outros objetos ou até mesmo na pele humana (uma vez que há uma longa tradição ancestral de tatuagem). Datações revelam o período 18.000 a.C. a 23.000 a.C. aproximadamente.

Figura: Pedaço de quartzo incrustado no Osso de Ishango.
Fonte: <https://youtu.be/X3slnefSI0c>.

Uma análise mais atenta revela que o osso está dividido em três colunas. As três colunas de traços agrupados assimétricos implicam que a ferramenta era mais funcional do que decorativa. Os entalhes no osso estão representados na figura a seguir (um modelo 3D está disponível em <http://bit.ly/3b5dqV2>).

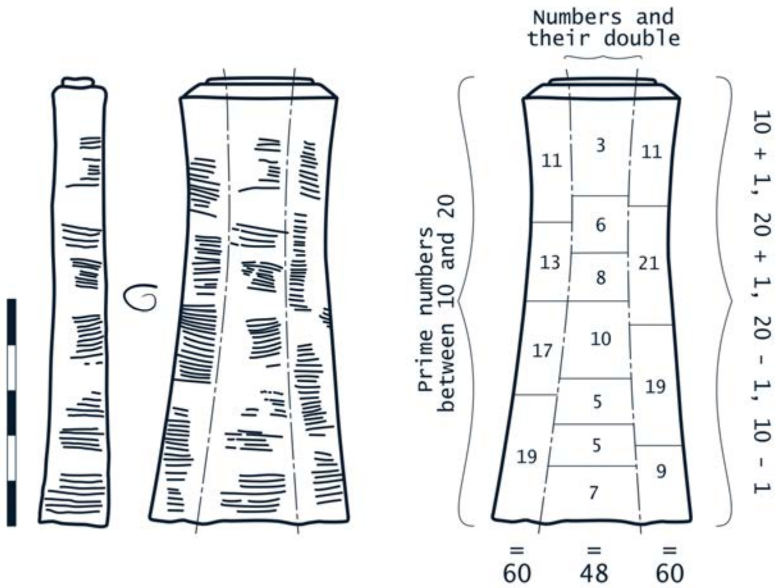


Figura: Diagrama ilustrando os entalhes e os números que eles representam no Osso de Ishango.

Fonte: Royal Belgian Institute of Natural Sciences <http://bit.ly/36Hjjoc>.

A coluna central começa com 3 traços e logo duplica o seu número. O mesmo processo é repetido com o número 4, que se duplica a 8 traços, e logo inverte-se o processo com o número 10, que é dividido pela metade resultando em 5 traços. Por isto chega-se à conclusão de que estes números não podem ser puramente arbitrários, eles sugestionam algum indício de cálculos, possivelmente de multiplicação e divisão por 2. Embora a grande maioria dos historiadores considerem o Osso de Ishango uma ferramenta matemática, há alguns que discordam disso, sugerindo que os agrupamentos e números apresentados pelos riscos entalhados são mera obra do acaso, pois seria surpreendente atribuir o desenvolvimento de noções aritméticas avançadas a um pequeno grupo de pessoas neolíticas vivendo em relativo isolamento nas margens de um lago. Um segundo Osso de Ishango foi revelado no encontro de 2007 "Ishango, 22000 and 50 Years Later" em comemoração aos 50 anos da descoberta do Osso de Ishango. Nas escavações de Ishango, realizadas entre 1950 e 1959, um membro da equipe de pesquisa de Heinzelin descobriu outro osso, porém, sua descoberta só foi revelada nas anotações, escritas por Heinzelin, em outono de 1998, quase literalmente em seu leito de morte. O segundo osso é um pouco mais longo e tem uma seção oca no meio. A determinação anatômica é tão duvidosa quanto a do primeiro osso. Ele está bem preservado, embora tenha um corte em uma de suas extremidades, o que sugere que pode ter havido um cristal de quartzo, assim como há no primeiro osso. Para saber mais sobre o Osso de Ishango e da Matemática desenvolvida na África, recomendamos fortemente a leitura de Huylebrouck (2019).

- Segundo o documentário, alguns animais possuem a capacidade de contar alguns poucos números (04:49-04:59). Existem estudos que mostram que macacos, salamandras, peixes, pintinhos e abelhas, entre outros animais, possuem a habilidade de diferenciar entre quantidades (sensos numéricos aproximado e exato) e até mesmo fazer alguma aritmética básica (saber, por exemplo, que $1+2$ é maior do que $4-2$). Diversos artifícios foram empregados para identificar essa capacidade discriminatória de números nos animais: objetos geométricos em telas de computador com macacos, moscas em tubos com salamandras, grupos de parceiros reprodutivos com peixes, objetos geométricos e câmaras com açúcar com abelhas, bolas e papel com pintinhos. Segundo Callaway (2009), os animais desenvolveram esse senso numérico por conta da sobrevivência: para obter comida, é preciso constantemente decidir qual árvore tem mais frutas ou qual conjunto de flores tem mais néctar, por exemplo (esse vídeo da NewScientist <https://youtu.be/HfoQEUm4drk> exibe alguns desses experimentos). O assunto, contudo, ainda é controverso: alguns cientistas consideram o processamento numérico em animais como um último recurso que deve ser aceito somente se todos os outros enquadramentos não numéricos falharem em explicar um comportamento observado (Dehaene, Dehaene-Lambertz, Cohen, 1998). Também, alguns animais que pareciam saber contar estavam apenas respondendo às reações de seu treinador (como o caso do cavalo "Hans Esperto").

Figura: Descobriu-se que o cavalo "Hans Espero" não contava, mas apenas respondia às reações de seu treinador.

Fonte: Wikimedia Commons.

Uma questão que se investiga nesse campo é sobre a ntureza abstrata de um número: será que quando um rato ativa uma alavanca duas vezes, ouve dois sons, come duas sementes, ele reconhece que todos esses eventos são instanciamentos do número 2? Para um aprofundamento no assunto, recomendamos as referências Roberts (2002) e Dehaene (2011).

- O documentário apresenta a tribo Walpiri na Austrália que vive sem um sistema numérico

(07:29-09:30): há palavras apenas para “um” e “muitos“. O processo de contagem pode assumir várias formas, dependendo da cultura. Os pesquisadores ainda não encontraram uma linguagem que não represente números de algum modo. Algumas culturas usam partes do corpo para contar ou sistemas de recursão linguística por meio de uma pequena base numérica. No Brasil, os Pirahã são uma população monolíngue (menos de 200 habitantes) que rejeitaram a assimilação com a cultura brasileira. Uma população predominantemente de caçadores-coletores, os Pirahã vivem em aldeias entre 10 e 20 pessoas nas margens do rio Maici, na região da Amazônia brasileira. O sistema de contagem dos Pirahã consiste no que é chamado de sistema “um-dois-muitos” (Gordon, 2004).

- Os bebês têm algum conhecimento abstrato de aritmética ao nascer? Pela teoria construtivista de Jean Piaget (1896-1980), a resposta é não: o cérebro de um recém-nascido seria como uma página em branco, desprovido de qualquer conhecimento conceitual. O conceito de número (ou qualquer outra representação abstrata do mundo) seria construído por meio de interações sensórias-motoras com o ambiente. Segundo observações de Piaget, o conceito de número não começaria a ser entendido antes das idades de 4 ou 5 anos. Outros acadêmicos, como Dehaene (2011), contudo, defendem que este não é o caso e que já existem algumas representações mentais até mesmo para recém-nascidos. Mas como avaliar o senso numérico de crianças tão jovens? Para idades de 3 e 4 anos, no lugar de usar objetos sem significado (como esferas de plástico) e fazer perguntas que poderiam não ser bem interpretadas por questões linguísticas, os cientistas usaram balas de M&M distribuídas em filas com espaçamentos diferentes e quantidades diferentes de balas e observaram qual fila as crianças preferiam. Para recém-nascidos, o que se observa é o tempo de atenção dos bebês para objetos novos (como brinquedos). Segundo Dehaene (2011), qualquer pai ou mãe sabe que, quando um bebê vê o mesmo brinquedo repetidamente, acaba perdendo o interesse nele. Nesse momento, a introdução de um novo brinquedo pode reviver o interesse do bebê. Essa observação elementar – que obviamente precisa ser replicada em laboratório e em uma situação fortemente controlada – prova que a criança notou a diferença entre o primeiro e o segundo brinquedo. Essa técnica pode ser estendida para fazer todos os tipos de perguntas aos bebês. É dessa maneira que os pesquisadores conseguem demonstrar que, muito cedo na vida, bebês e até recém-nascidos podem perceber diferenças de cor, forma, tamanho e, mais precisamente, número. Não é nosso objetivo detalhar os interessantes desdobramentos deste tópico. Para o leitor interessado, recomendamos Dehaene (2011) e Gomes (2010).

Jean Piaget (1896-1980) Stanislas Dehaene (1965-)

Figura: Dois pesquisadores da área de senso numérico em crianças.

Fonte: Wikimedia Commons.

- O trecho do vídeo (11:05-11:52) mostra o processo de abstração no registro de contagens por meio de peças em envelopes de argila e marcas nesses envelopes. As peças usadas, denominadas *tokens* em Inglês (símbolo, sinal ou código em Português), também feitas de argila, tinham formatos diferentes: cones, esferas, discos, cilindros, etc.

Figura: Tokens de Tepe Gawra (Iraque), c. 4000 a.C..

Fonte: University of Pennsylvania, Philadelphia.

Não existiam *tokens* genéricos. Em vez disso, um *token* particular era necessário para representar cada tipo de mercadoria: frascos de óleo eram contados com *tokens* ovoides, por exemplo, enquanto pequenas medidas de grãos com cones, grandes medidas de grãos com esferas, etc. (Schmandt-Besserat, 1996) .

Os envelopes (denominados *bullae*) consistiam em peças de argila ocas esféricas ou ovais medindo cerca de 5 a 7 cm. Sua fabricação era simples. A cavidade por onde se colocavam os *tokens* era feita por um buraco em uma bola de argila com os próprios dedos, como é mostrado por traços de pontas de dedos visíveis dentro destes envelopes. A cor vermelha de alguns envelopes sugere que os artefatos foram assados. Um deles está no Iraque (Umk), um na Arábia Saudita (Dharan), um em Israel (Dumah), e três na Síria (Habuba Kabira, Tell Sheikh Hassan e Tell Qraya) (Schmandt-Besserat, 1996). O número total de envelopes agora conhecidos é de cerca de 130 espécimes e 70 fragmentos. Cerca de 100 envelopes estão completos, sendo 85% deles provenientes do Irã. Os envelopes eram marcados com selos (espécie de “carimbo” que era prensado nos envelopes) de autoridades. Como regra geral, um único selo era pressionado em todo o artefato, mas há casos em que dois ou três selos diferentes foram usadas em um mesmo envelope.

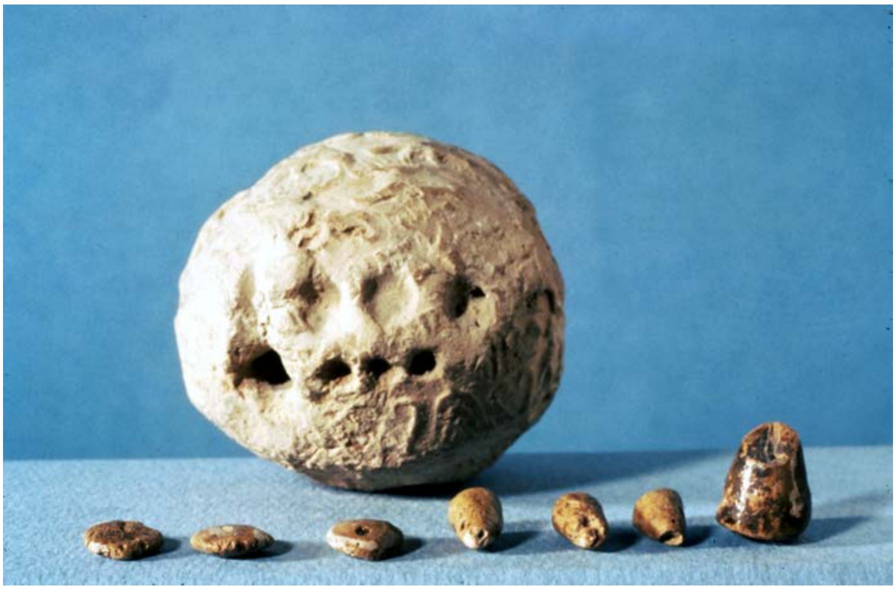


Figura: Envelope (*bulla*) de Sua, c. 3300 a.C..
Fonte: Musee du Louvre, Department des Antiquites Orientales.

A maior desvantagem dos envelopes foi que eles escondiam os *tokens*: não era possível verificar o conteúdo de um envelope sem quebrá-lo e, portanto, sem adulterar suas vedações. Provavelmente foi para superar essa dificuldade que sistemas de marcas externas foram desenvolvidos. Cabe enfatizar que o número total de espécimes marcados equivale apenas a dezenove espécimes, ou 9% do número total de artefatos. Envelopes com essas marcas foram encontrados em três locais: Susa, Habuba Kabira e Tepe Yahya. A raridade dos envelopes com marcas talvez possa ser atribuída a sorte das escavações; caso contrário, parece indicar que o uso não foi generalizado. Um método de mostrar o que estava dentro dos envelopes consistia em anexar um conjunto de marcas, na superfície externa do envelope, presumivelmente idênticas aos tokens armazenados dentro dos envelopes. Isso foi feito afundando os *tokens* na argila quando ela ainda estava mole. O sistema de marcas em envelopes de argila inaugurou uma nova fase do sistema de *tokens*. No início, as notações prensadas foram acessórias aos contadores (*tokens*), mas eventualmente elas o substituíram. Placas sólidas de argila prensadas substituíram os envelopes ocos com os seus respectivos tokens. Essas marcas prensadas ainda mantinham a forma dos tokens, mas elas assumiram uma função totalmente nova. Isso foi um passo decisivo na invenção da escrita uma grande revolução na comunicação, a escrita, que, como vimos, tem origem na Matemática.

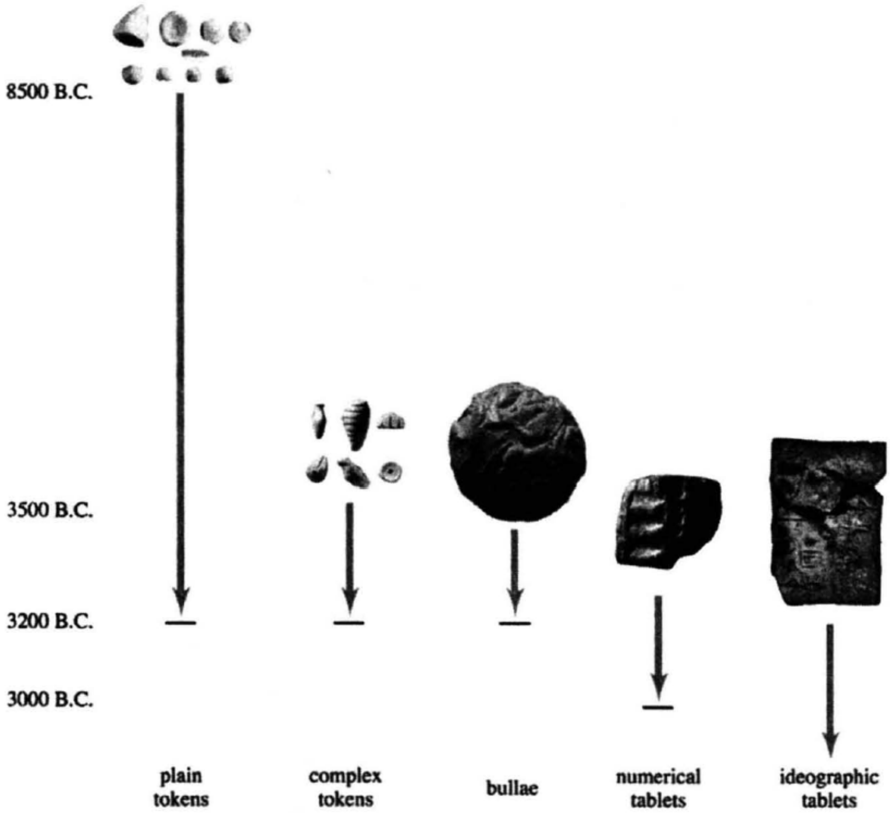


Figura: Desenvolvimento da proto-escrita segundo Schmandt-Besserat.

Fonte: Englund (2008).

- No documentário, o cúbito (também denominado côvado) foi definido como a medida do braço de um homem, de seu ombro até as pontas dos dedos, mais a largura de sua mão (15:35-15:42). Segundo Stone (2014), o termo cúbito é derivado da palavra *cubitus* (cotovelo, em Latim) e, como unidade de medida de comprimento, ele tem sido usado desde a Idade Antiga, passando pela Idade Média, até os tempos atuais (em alguns poucos lugares). Outras definições similares foram usadas (a medida do cotovelo à base da mão, a medida do cotovelo a um ponto entre o polegar e o dedo mínimo em uma mão esticada), o que dificulta uma descrição precisa da medida de um cúbito. De fato, a medida de um cúbito varia com a história e com a região: temos os cúbitos egípcio real e comum, o romano, o grego, o assírio, o sumério, o da Bíblia Cristã, etc. A tabela a seguir, extraída de Stone (2014), lista alguns valores médios de referência para os diferentes cúbitos.

Cúbito	Polegadas	Metros
Romano	17,48	0,444
Egípcio (comum)	17,72	0,450
Grego	18,23	0,463
Assírio	19,45	0,494

Sumério	19,76	0,502
Egípcio (real)	20,62	0,524
Talmudista	21,85	0,555
Palestino	25,24	0,641

O cúbito real egípcio, cuja medida varia entre 523 mm e 525 mm, é dividido em 7 palmos com 4 dedos cada, totalizando assim 28 dedos. Há ainda, no cúbito, indicações das frações unitárias $1/2$, $1/3$, $\ldots$, $1/16$ de um dedo (figura a seguir).

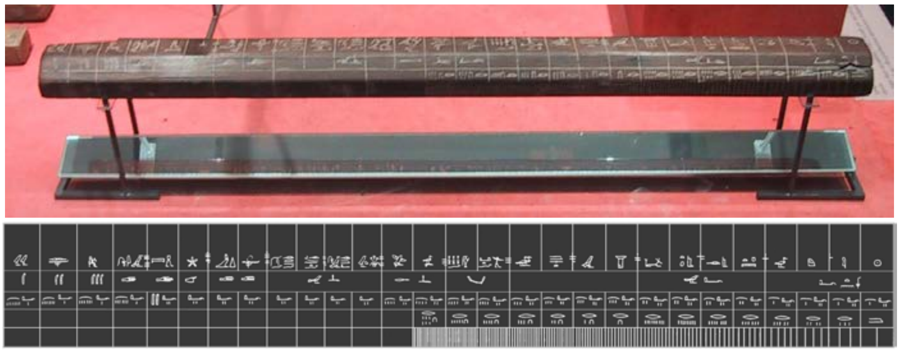


Figura: cúbito egípcio (o cúbito da imagem superior, do Museu do Louvre, pertenceu a Maya, supervisor do tesouro do faraó Tutancâmon).

Fonte: Wikimedia Commons.

O hierógrafo para o cúbito tem a forma de um braço com a palma virada para baixo , como podemos ver na fotografia a seguir da peça 1 da Pedra de Palermo.

Figura: peça 1 da Pedra de Parlemo.

Fonte: Wikimedia Commons.

Observação: apesar do documentário legendado definir o cúbito como a medida do braço de um homem, de seu ombro até as pontas dos dedos, mais a largura de sua mão, o que a imagem mostra é a medida do cotovelo e não do ombro. Na versão totalmente dublada, a fala está correta.

- O trecho (22:12-23:02) mostra Pitágoras tentando "fazer os três lados de um triângulo retângulo com dois lados iguais contar com um número exato de unidades", isto é, no vídeo, Pitágoras tenta encaixar segmentos representados por cilindros congruentes sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles.

Figura: Pitágoras tentando fazer os três lados de um triângulo retângulo com dois lados iguais contar com um número exato de unidades.

Fonte: History Channel.

O que Pitágoras está fazendo, em termos modernos, é verificar se a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles são *comensuráveis*: dizemos que dois segmentos AB e CD são comensuráveis se existe um segmento $w = RS$ que cabe n vezes em CD e m vezes em AB. Nesse caso, w será então uma *medida comum* de CD e AB (Lima et al. (2006)). Observe também que, nesse caso,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m \cdot w}{n \cdot w} = \frac{m}{n},$$

isto é, a razão entre as medidas dos segmentos AB e CD é um número racional. Como apontado pelo vídeo, Pitágoras descobriu que a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles não são comensuráveis. Vamos demonstrar esse fato. Para isso, vamos precisar do seguinte lema, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor: Se m é um inteiro e m^2 é par, então m é par. Seja agora ABC um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa AB e catetos BC e AC (com $\overline{AC} = \overline{BC}$. Suponha, por abursdo, que AB e AC sejam comensuráveis. Então, pelo que vimos, $x = \overline{AB}/\overline{AC}$ é um número racional. Mas, pelo Teorema de Pitágoras,

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AC})^2 = 2\,(\overline{AC})^2,$$

de modo que

$$x^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{(\overline{AB})^2}{(\overline{AC})^2} = 2.$$

Como $x > 0$ x é um número racional, segue-se que $x = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x = m/n$, onde m e n não possuem fatores em comum. Se $x = m/n$ e $x^2 = 2$, então $(m/n)^2 = 2$ e, por conseguinte, $m^2 = 2 \cdot n^2$. Então, m^2 é um número par. Pelo lema, concluímos que m deve ser par: $m = 2 \cdot k$ para algum inteiro k. Desta maneira, $2 \cdot n^2 = m^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2$. Daí, segue-se que $n^2 = 2 \cdot k^2$. Logo, n^2 é par. Usando o lema novamente, concluímos que n é par. Mas se m é par e n é par, então m e n possuem um fator em comum (o número 2), uma contradição.

Observamos que, fora da Matemática, a palavra incomensurável tem também o significado de imenso, infinito (como em “a vastidão incomensurável do universo”).

- No documentário, no intervalo de tempo (22:39-23:02), sugere-se que um discípulo de Pitágoras teria descoberto que não é possível contar os três lados de um triângulo retângulo isóceles com um “número exato de unidades” e que, por esse motivo, ele teria sido afogado pelos outros discípulos. O discípulo mencionado trata-se de Hípaso de Metaponto (c. 530 a.C.-c. 450 a.C.).

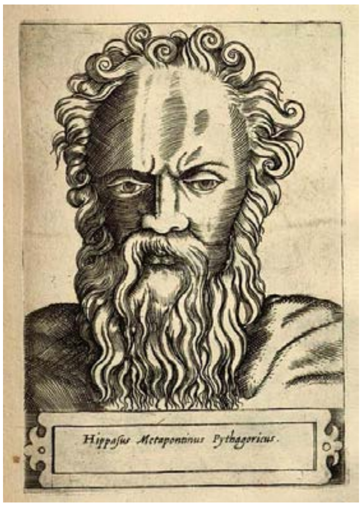


Figura: Hípaso de Metaponto (c. 530 a.C.-c. 450 a.C.) como idealizado por Girolamo Olgiati em um livro de 1580.

Fonte: Google Books.

Apesar de ser uma passagem muito difundida (a descoberta de que a diagonal e o lado do quadrado são incomensuráveis com o consequente afogamento de Hípaso), existem acadêmicos que duvidam dessa história e a consideram uma lenda. Roque (2012), por exemplo, coloca que a descoberta das grandezas incomensuráveis provavelmente não teve sua origem na escola pitagórica e que essa descoberta não gerou uma crise, como se costuma afirmar. Ainda segundo a historiadora, não se sabe exatamente qual foi a importância da geometria na escola pitagórica, mas acredita-se que ela não tenha sido tão relevante quanto a aritmética. Para os pitagóricos, que praticavam aritmética e estavam preocupados com teorias sobre o cosmos, resumidas pelo enunciado “tudo é número”, a descoberta da incomensurabilidade não deve ter tido nenhuma importância. A frase “tudo é número” não significava “todas as grandezas são comensuráveis”. A tese de que “tudo é número” não se traduz na crença de que todas as grandezas podem ser comparadas por meio de números, uma vez que o problema geométrico da comparação de grandezas parecia não fazer parte do pensamento pitagórico (Roque, 2012). Para mais detalhes sobre o tema, recomendamos a leitura do Capítulo 2 de Roque (2012) e o artigo de Gonçalves e Possani (2010).

- O documentário mostra como os indianos criaram “números estupendamente grandes” como as medidas *rajju* e *palya* (30:26-30:58). Segundo Joseph (2011), essas medidas estão no contexto do jainismo, uma das três grandes religiões mais antigas na Índia (as outras duas são o hinduísmo e o budismo). Os jainas conceberam uma unidade de medida de tempo denominada shirsa prahelika, que equivale a $756 \times 10^{11} \times (8400000)^{28}$ dias. A contemplação de números dessa natureza levou os jainas a um conceito inicial de infinito o qual, apesar de não ser matematicamente preciso, não é de forma alguma simplório.
- A placa com o “zero” inscrito exibida no vídeo (33:20-33:41) fica no Templo Chaturbhuj dedicado a Vishnu (c. 875 d.C.) em Gwalior, India.

Figura: O zero em “270” e “50” no Templo Chaturbhuj, Gwalior, India.

Fonte: Alex Bellos.

Como apresenta o documentário, a inscrição declara, entre outras coisas, que a comunidade plantou um jardim de 187 hastas por 270 hastas (1 hasta = 45,7 cm), que o jardim produzia 50 flores para o templo todos os dias. Os últimos dígitos de 270 e 50 têm o formato “0”. Enquanto textos indianos e não indianos mencionam zero muito antes, este templo tem as primeiras evidências epigráficas conhecidas inscritas em pedra que já conhecem e usam o conceito de zero.

O registro manuscrito do zero mais antigo que se conhece nos dias de hoje é o Manuscrito Bakhshali encontrado em 1881 na província de Khyber Pakhtunkhwa do Paquistão. Embora ainda existam divergências com relação a datação por carbono do documento, alguns acadêmicos situam o documento por volta do século III ou IV.

Menninger (1992 p. 513-514) afirma que em sânscrito (língua falada na Índia) o zero era chamado *sunya* (“vazio”). Quando os árabes (responsáveis por levar os números da Índia para o Ocidente) se familiarizaram com o zero no século IX, eles traduziram a palavra indiana *sunya*, de forma literal, para a expressão árabe ṣifr ("o vazio"). O Ocidente, quando tomou conhecimento do novo dígito, não traduziu mais seu nome, usando as formas latinas *cifra* e *cephirum*. Estas duas palavras, em seguida, gradualmente trilharam seu caminho e em Italiano a segunda foi alterada para zefiro, zefro ou zevero, que finalmente foi encurtado no dialeto de Veneza para zero.

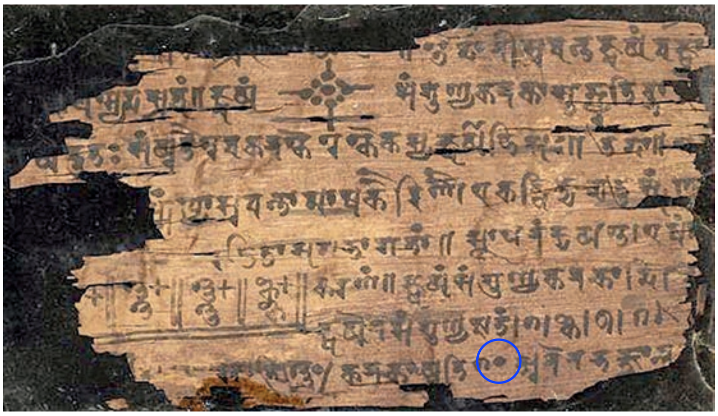


Figura: O zero representado como um ponto no Manuscrito Bakhshali (ver círculo azul).

Fonte: Wikimedia Commons.

- O sistema de numeração romano antigo teve diversas fases e nem sempre foi como aprendemos na escola nos dias de hoje. Menninger (2011) observa, por exemplo, que os romanos antigos nunca usaram M como notação para 1000 ou MM para 2000 mas, sim, CIƆ e CIƆCIƆ e, eventualmente IIM, usando o M como uma abreviação para a palavra *mille*. No monumento chamado Columna Rostrata de Duilius (260 a.C.), em Roma, há entre 23 e 33 cópias de CCCIƆƆƆ (100000) inscritas para registrar um saque de mais de 2 milhões de moedas de bronze. Na Idade Média, contudo, o M tornou-se um símbolo comum para 1000: por exemplo, MMCXII representa o número 2112.

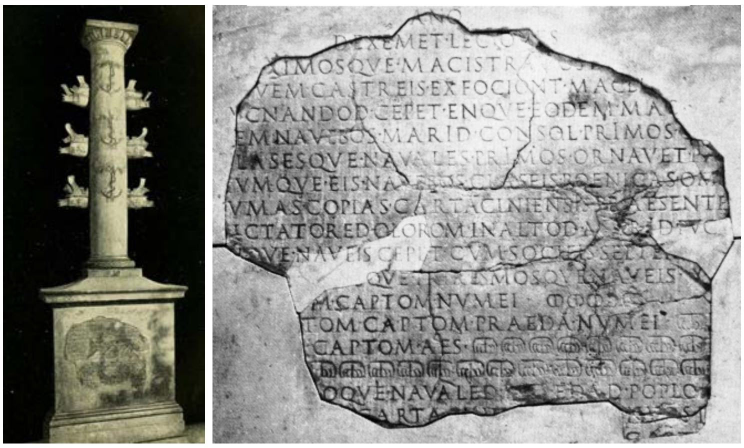


Figura: Reprodução da Columna Rostrata e destaque da parte com as inscrições de várias cópias de CCCIƆƆƆ.

Fonte: Wikimedia Commons e <https://goo.gl/Uyb9SN>.

Outro exemplo bastante citado se encontra no Coliseu de Roma, que teve sua construção finalizada por volta de 80 d.C., em que, diante do portão 44, muitos turistas se sentem “enganados” por seus professores de matemática, pois o número 44 é ali representado não por XLIV como aprendemos, mas por XLIIII.

Figura: Portão 44 do Coliseu de Roma.
Fonte: UFRGS (<https://goo.gl/0JcicS>).

Por volta do século XV, o sistema indo-arábico, criado pelos indianos e difundido pelos árabes, substituiu o sistema de numeração romano, devido às suas diversas vantagens.

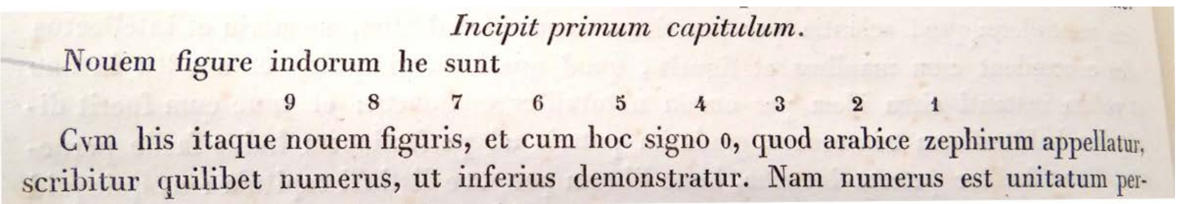
- O intervalo de tempo (39:40-42:26) conta que o grande responsável por introduzir os algarismos indo-arábicos na Europa foi Fibonacci. Mas afinal, quem foi Fibonacci? Segundo Katz (2009, p. 336), Leonardo Pisano (ou Leonardo de Pisa) (1170-1240) só veio a ser chamado de Fibonacci (filho de Bonaccio), no século XIX. Esse “apelido” foi dado a ele por Baldassarre Boncompagni (1821-1894), o editor de suas obras do século XIX. O pai de Fibonacci era um comerciante pisano que tinha negócios na Bugia na costa norte-africana (agora Bejaia, Argélia). Fibonacci passou grande parte de sua vida lá aprendendo árabe e estudando matemática. Mais tarde, ele viajou pelo Mediterrâneo, provavelmente a negócios para seu pai. Em cada local, ele se encontrou com estudiosos islâmicos e absorveu o conhecimento matemático do mundo islâmico. Após seu retorno a Pisa em cerca de 1200, passou os próximos 25 anos escrevendo obras em que incorporou o que tinha aprendido. As que foram preservadas incluem o *Liber Abbaci* (Livro do Cálculos (1202, 1228), a *Practica Geometriae* (Geometria Prática) (1220) e o *Liber Quadratorum* (Livro dos Quadrados) (1225). Como coloca o documentário, a intenção declarada de Fibonacci era introduzir o sistema numérico hindu e suas operações ao povo italiano. No entanto, segundo Sigler (2013), *Liber Abaci* é muito mais do que apenas uma introdução ao sistema numérico hindu e os algoritmos para trabalhar com ele. *Liber Abaci* é um trabalho enciclopédico que trata grande parte da matemática conhecida do século XIII em aritmética, álgebra e resolução de problemas. Além de ensinar todos os métodos necessários de aritmética e álgebra, Fibonacci incluiu em *Liber Abaci* uma grande variedade de aplicações da matemática para todos os tipos de situações nos negócios e no comércio, conversão de unidades de dinheiro e peso, métodos de troca, parcerias comerciais e alocação de lucro, empréstimo de dinheiro, investimento de dinheiro, juros simples e compostos. Os problemas do comércio fornecem informações valiosas sobre o mundo medieval

(Sigler, 2013, p. 5).

Figura: Estátua de Fibonacci no *Camposanto Monumentale* de Pisa.

Fonte: Wikimedia Commons.

Os dez números do sistema numérico hindu, incluindo zero (que vem de ṣifr do Árabe), são apresentados no Capítulo 1 do *Liber Abaci*. O sistema posicional é explicado de modo que números de qualquer tamanho podem ser representados com apenas os dez símbolos. O zero ou zéfiro, como Fibonacci chama, não conta para nada e serve para marcar o espaço. Números grandes são organizados em triplas para facilitar a leitura (como costumamos fazer atualmetne). Acostumados como estamos com o uso de nosso sistema decimal e de nossos algoritmos para adição e outras operações, é fácil ignorar que, para a Europa no século XIII, este livro trouxe uma maneira nova e revolucionária de fazer aritmética.



Incipit primum capitulum.

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cvm his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur. Nam numerus est unitatum per-

Figura: Fibonacci apresentando o 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 e o 0 (chamado de zéfiro) em seu livro *Liber Abaci*.

Fonte: <http://bit.ly/38j3ZQ2>.

- O documentário apresenta a tábua de contar, uma espécie de ábaco utilizado para fazer conversões de dinheiro nas cidades medievais (43:00-44:05).

Figura: Tábua de Contar.
Fonte: History Channel.

Segundo Menninger (1992) (nossa principal referência aqui), a configuração da tábua de contar permitia usar pedras ou fichas para distribuir, agrupar e operar com o dinheiro. Os contadores recebem seus valores de agrupamento por suas posições. Assim, uma tábua de contar é dividida em tiras ou colunas de acordo com a qualidade do agrupamento (por exemplo, uma para as unidades, as dezenas, as centenas, e os milhares, assim sucessivamente) e identificadas por números romanos (conhecidos por ambas as partes da negociação). O uso dos números romanos para representar as quantidades e da tábua de contagem para fazer os cálculos, criou uma ferramenta adequada e conveniente para cálculos simples, que as pessoas eram extremamente relutantes em trocar para o novo sistema de números indianos, que combina os dois aspectos (representar as quantidades e fazer cálculos), de forma mais eficiente, em um único procedimento. Na Idade Média as pessoas queriam utilidade, não perfeição intelectual ou espiritual.

Figura: Xilogravura com uma tábua de contar medieval.
Fonte: Wikimedia Commons.

Menninger observa que nenhuma tábua de contar romana foi encontrada, porém, a única tábua de contar grega antiga que foi preservada, nos dá uma ideia de como eram as tábuas de contar romanas. A tábua de Salamis é uma placa e mármore branco encontrada no meado do século passado na ilha de Salamis. Sua data exata não é conhecida.

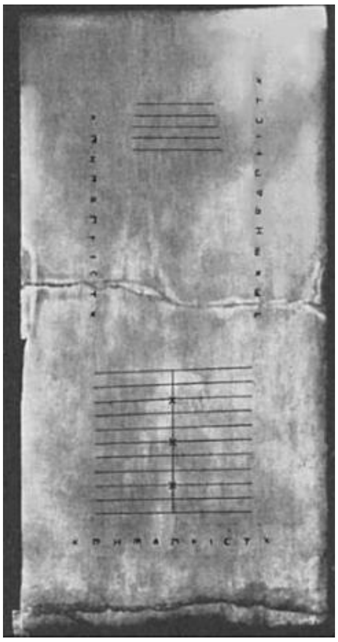


Figura: Tábua de Contar de Salamis (tamanho: 149 cm $\times$ 75 cm $\times$ 4 cm).
Fonte: Wikimedia Commons.

Nas tábuas de contar romanas, as peças usadas para contagem eram inicialmente pequenas pedras, por isso eram chamados de *calculis* (cuja tradução seria "pequena pedra"). Posteriormente foram substituídos por fichas de vidro, metal ou marfim e normalmente não tinham símbolos ou escrita. Nas tábuas de contar do século XIII, apareceram pela primeira vez peças de contagem de metal semelhantes a moedas: discos com desenhos estampados sobre eles, e assim, como suas irmãs mais nobres, começaram a refletir a história cultural não só da tábua de contar, mas também a de seu tempo. O costume de estampar peças de contagem como moedas começou na França e, a partir desse momento, foram feitas peças apenas de metal. Essas peças não eram dinheiro, mas elas poderiam facilmente ser confundidas e, de fato, foram muitas vezes usadas como se fossem dinheiro. Assim, muitas das peças tinham um aviso de que não eram dinheiro, frequentemente na forma de uma declaração: "*Je suis de laiton, je ne suis pas d'argent.*" (cuja a tradução seria: "Eu sou feita de latão, não de prata."). As peças medievais conhecidas, desse "novo formato", são datadas do meio do século XIII. Elas têm origem nos escritórios fiscais do governo real da França. As peças de contagem francesas eram chamadas de "*jetons*" ou "*jettons*".

Figura: Jeton, Nuremberg, c. 1553 (diâmetro: 28 mm).
Fonte: Wikimedia Commons.

- No documentário, no intervalo de tempo (45:20-46:02), se afirma que “os tradicionalistas que lidavam com o ábaco e os algarismos romanos, nunca precisaram calcular juros de empréstimos, porque a Igreja Católica dizia que cobrar juros era um pecado, a chamada usura”. Nesse trecho, o documentário afirma que um dos fatores decisivos para a “queda” do sistema de numeração romana e a “ascensão” dos algarismos indo-arábicos, foi o fim da usura. Segundo o conceito moderno, a *usura* é entendida como a cobrança de remuneração abusiva pelo uso do capital, ou seja, quando da cobrança de um empréstimo pecuniário (ou seja, em dinheiro), são cobrados juros excessivamente altos, o que lesa o devedor. Isso pode ser verificado no decreto de Lei nº 22.626 de 7 de abril de 1933, a Lei da Usura, feita no contexto das renegociações de dívidas rurais. O novo dispositivo proibia a cobrança de juros maiores que o dobro da “taxa legal”, definida pelo artigo 1.062 do Código Civil de 1916 em 6%. O texto também proibia o anatocismo, isto é, a cobrança de “juros sobre juros” (artigo 4), e definia o “delito de usura”, punido com reclusão entre seis meses e um ano de prisão (artigo13) (Franco, 2017). Existe ainda um debate jurídico sobre a questão se a Lei da Usura continua válida ou não no Brasil. Um decreto sem número de 25 de abril de 1991 revogou a Lei da Usura. Mas esse decreto, por sua vez, foi derrogado por outro Decreto sem número de 29 de novembro de 1991. O ponto de debate é que no sistema jurídico brasileiro, salvo disposição em contrário, uma lei revogada não se restaura por ter a lei revogadora perdido vigência.

  Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), em sua obra publicada em 1252 a.C. e traduzida por Ferreira (1998, p. 28), coloca que “O que há de mais odioso, sobretudo, do que o tráfico de dinheiro, que consiste em dar para ter mais e com isso desvia a moeda de sua destinação primitiva? Ela foi inventada para facilitar as trocas; a usura, pelo contrário, faz com que o dinheiro sirva para aumentar-se a si mesmo; assim, em grego, lhe demos o nome de *tokos*, que significa progenitura, porque as coisas geradas se parecem com as que as geraram. Ora, neste caso, a moeda que torna a trazer moeda, gênero de ganho totalmente contrário à natureza.”. No Direito Romano, vê-se que a Lei das XII Tábuas (disponível em: <http://bit.ly/2tGwZm0>) também combateu a prática da usura, conferindo-a na Tábua VIII, referente aos delitos. Além de fixar um limite máximo de remuneração do capital, proibia a agiotagem, bem como o anatocismo, o que, quando verificado, remetia à pena de infâmia. Na Idade Média, tem-se a ascensão do Direito Canônico e a proibição ou punição de uma conduta se baseava em uma lógica cristã fundamentada pela Bíblia (cabe lembrar que a usura também é condenada em sociedades não cristãs, como as islâmicas).

Figura: Gravura medieval ilustrando a expulsão de cambistas do Templo.
Fonte: British Library Arundel 157 f. 6v (<http://bit.ly/3bFtvkJ>).

Mas se a usura era tão condenada, como a cobrança de juros passou a ser uma das bases do capitalismo? Essa é uma pergunta que gera muita polêmica e que, naturalmente, incluí argumentos históricos, sociológicos, religiosos e econômicos. Não é nossa intenção se aprofundar neste tópico aqui. Para o leitor interessado, sugerimos as referências Fischoff (1944), Roover (1967), Weber (2013) e Dorin (2015).

- Na competição entre a abacista e o algorista (46:15-47:50) no cálculo de juros compostos, o apresentador aponta que a abacista Kimi, pela limitação de seu ábaco, precisou fazer arredondamentos à medida que fazia as contas. Contudo, o matemático du Satoy também fez um arredondamento e sua resposta com 12 casas decimais está correta até a quinta casa após a vírgula. Vemos, no documentário, que a resposta dada por du Satoy é 10,616777664035, mas a resposta correta com 12 casas decimais após a vírgula é 10,616778118644. Acompanhando o vídeo, é possível perceber a técnica de cálculo empregada por du Satoy no seu cálculo. De fato, o problema proposto por Terry Jones é: suponha que eu empreste a alguém dez libras a meio por cento de juros por mês, quanto ela vai me dever no final do ano? Se $i = 1{,}005$, então a resposta é dada por $10\,i^{12} = 10\,(1{,}005)^{12}$. A dificuldade aqui é calcular i^{12}. du Satoy o fez calculando $i^2 = 1{,}010025$. Com isso, é possível calcular i^4 como $i^2 \times i^2 = 1{,}020150500625$. Usando a mesma ideia, para calcular i^8, basta fazer $i^4 \times i^4$ mas, aqui, du Satoy aproxima $i^4 = 1{,}020150500625$ por $1{,}0201505$. Desse modo, o cálculo de

i^8 é aproximado: $1{,}0201505 \times 1{,}0201505 = 1{,}04070704265025$. Para finalmente calcular $i^{12} = i^8 \times i^4$, du Satoy aproxima $1{,}04070704265025$ para $1,040707$, de modo que seu cálculo final é $10 \times 1{,}040707 \times 1{,}0201505 = 1{,}0616777664035$.

Se fizermos a conta exatamente como ele fez, porém, sem usarmos aproximações, encontraremos o resultado preciso, com doze casas decimais, como ele pretendia exibir. Veja a seguir:

$$
\begin{aligned}
i^2 &= 1{,}005 \times 1{,}005 = 1{,}010025, \\
i^4 &= i^2 \times i^2 = 1{,}010025 \times 1{,}010025 = 1{,}020150500625, \\
i^8 &= i^4 \times i^4 = 1{,}020150500625 \times 1{,}020150500625 = 1{,}0407070439254381253906 25.
\end{aligned}
$$

Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
i^{12} &= i^8 \times i^4 = 1{,}040707043925438125390625 \times 1{,}020150500625 \\
&= 1{,}061677811864499568789707617431640625.
\end{aligned}
$$

e

$$10\,i^{12} = 10{,}61677811864499568789707617431640625.$$

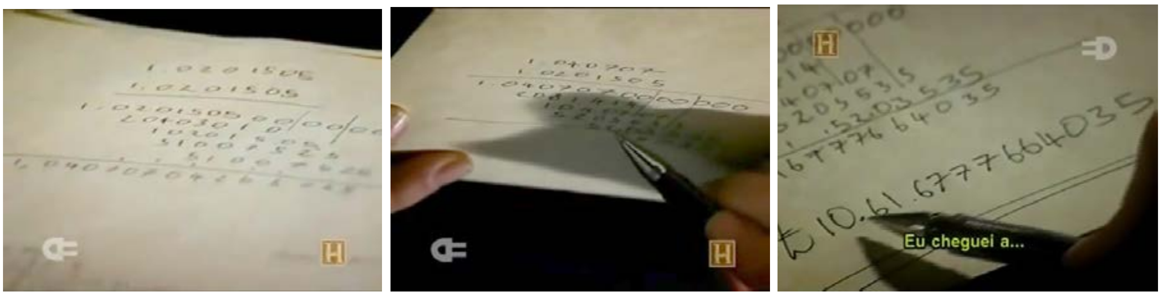


Figura: Cálculo de juros compostos por du Satoy.

Fonte: History Channel.

- A ilustração (anacrônica) de um abacista competindo com um algorista que aparece no intervalo (45:20-47:53) do documentário é da obra *Margarita Philosophica* (1503) do escritor humanista alemão Gregor Reisch (c. 1467-1525) (a obra está disponível na íntegra em <http://bit.ly/2STxHoB>). Este texto é uma enciclopédia do conhecimento destinada a servir de livro de texto para jovens estudantes e discursa sobre gramática latina, dialética, retórica, aritmética, música, geometria, astronomia, física, história natural, fisiologia, psicologia e ética. A xilogravura mostra Aritmética observando um algorista e um abacista. Ela parece favorecer o algorista. O vestido dela é adornado com numerais Gobar (uma forma árabica de se escrever os números indianos) e ela está olhando com aprovação na direção dele. O algosita é representado por Boécio e o abacista por Pitágoras (seus nomes aparecem nas faixas).

Figura: Algorista $\times$ abacista segundo Gregor Reisch (c. 1467-1525) .

Fonte: Wikimedia Commons.

A competição entre algoristas e abacistas também foi retratada por outro autores, Adam Ries (1492-1559) e Robert Recorde (c. 1512-1558). As letrs ‘V D M I E’ que aparecem na ilustração de Reisch significam: *Verbum Domini Manet In Eternum* (A palavra de Deus continua a mesma).

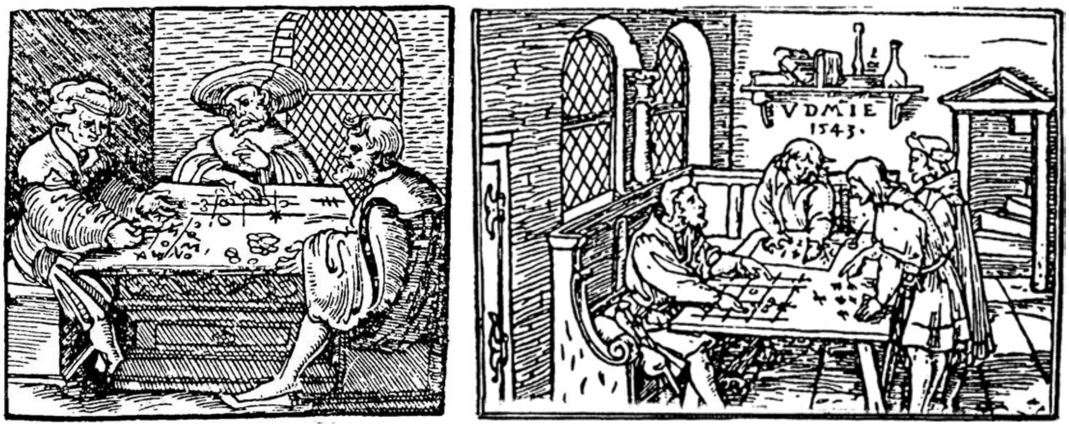


Figura: Algorista $\times$ abacista segundo Adam Ries (1492-1559) e Robert Recorde (c. 1512-1558).

Fonte: Wikimedia Commons.

- No documentário no intervalo de tempo (49:18-0:37), fala-se um pouco sobre um dos maiores matemáticos de todos os tempos, e atribui-se a ele a invenção de uma máquina de calcular, precursora do computador, que tinha como objetivo, segundo o próprio documentário, “livrar a humanidade do erro”. Mas afinal, quem foi esse matemático? E sua máquina de cálculos funcionou?

Figura: Gottfried Wilhelm (von) Leibniz (1646-1716).

Fonte: Wikimedia Commons.

Segundo Stillwell (2010, p. 177-179), Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig em 1646 e morreu em Hannover em 1716. Seu pai, Friedrich Leibniz (1597-1652), era professor de filosofia em Leipzig, e sua mãe, Katherina Schmuck, também veio de uma família acadêmica. A partir dos seis anos, Leibniz teve acesso gratuito à biblioteca de seu pai, tornando-se um leitor voraz. Aos 15 anos entrou na Universidade de Leipzig e concluiu o doutorado em direito pela Altdor em 1666 (Leipzig recusou-lhe um doutorado por causa de sua idade). Ainda segundo Stillwell (2010, p. 177-179), durante 1663, em uma visita de verão à Universidade de Jena, ele aprendeu um pouco da matemática de Euclides, mas grande parte de seus estudos eram em direito e filosofia. A falta de prática em matemática deixou sua marca em seu estilo matemático, pois, suas boas ideias são, às vezes, insuficientemente desenvolvidas justamente por sua falta de habilidade técnica. Muitas vezes ele parecia não só não ter a técnica, mas também a paciência para desenvolver as ideias concebidas por sua imaginação extremamente ampla. Leibniz foi pioneiro em combinatória, lógica matemática, e topologia, mas suas ideias nestes campos eram muito fragmentárias para serem aceitas ou usadas por seus contemporâneos.

Leibniz foi sem dúvida uma das mais brilhantes inteligências de todos os tempos, cuja cultura abrangia, além da Matemática, o Direito, a História, a Filosofia, a Política, a Lógica, a Filologia, a Geologia e a Teologia. Entre 1672 e 1676, então um jovem diplomata, Leibniz viveu em Paris, onde se tornou amigo de Christiaan Huygens (1629-1695), um dos maiores físico-matemáticos da época e, com ele, pela primeira vez, Leibniz ganhou uma compreensão firme da Matemática (Stillwell, 2010, p. 179). Seus últimos anos foram amargurados pela disputa prioritária com Isaac Newton (1643-1724), sobre a invenção do cálculo, e a negligência de seu empregador (a família real dos Brunswick) para quem ele escrevia sobre a genealogia de tal família. Ele ainda estava obstinadamente tentando completar a história da Casa de Brunswick quando morreu em 1716. Seu secretário foi a única pessoa a ir ao seu funeral e a notícia de sua morte só foi publicada em 1843 (Stillwell, 2010, p. 178).

Segundo Katz (2009, p. 909), Leibniz construiu uma máquina que também fazia multiplicação e divisão. Leibniz tinha bastante certeza de que sua máquina seria de grande utilidade prática. Infelizmente, nem a máquina de Leibniz nem os vários modelos melhorados construídos por outros durante os 150 anos seguintes foram realmente usados da forma que ele havia previsto. Os próprios praticantes da matemática continuaram a fazer cálculos à mão, provavelmente porque essas máquinas, operadas manualmente, forneceram pouca vantagem em velocidade em relação aos cálculos manuais.

Segundo a página da Universidade de Lisboa (<http://bit.ly/37MGwqm>), Leibniz elaborou mecanismos que permitiam executar essas operações por adições e subtrações sucessivas de forma autônoma. A máquina de Leibniz foi concebida em 1673, mas construída apenas em 1694, tendo sido a primeira máquina feita com o propósito de multiplicar. Uma dessas máquinas pode ainda ser vista no Museu Kastner em Hannôver, a cidade onde Leibniz passou os seus últimos anos.

A máquina de Leibniz foi a primeira calculadora capaz de executar todas as operações aritméticas por meios puramente mecânicos. O que não quer dizer que não apresentasse problemas de funcionamento, sobretudo resultantes da complexidade dos seus mecanismos. O primeiro modelo foi construído para cálculos com 12 dígitos; mais tarde foi feita uma versão para cálculos com 16 dígitos.

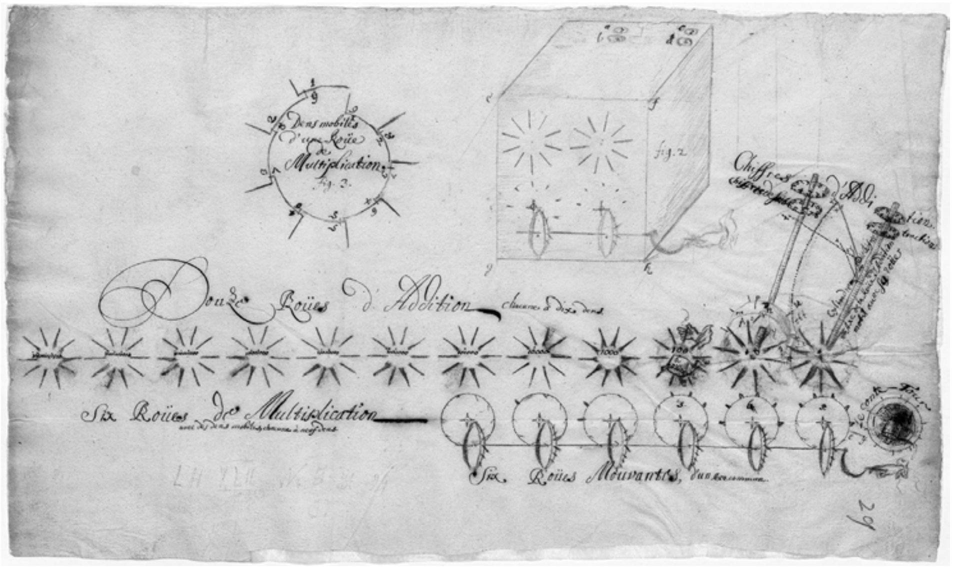


Figura: Desenho de Leibniz de sua máquina de multiplicar.
Fonte: Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek–Niedersächsische Landesbibliothek, Hanover.

Figura: Réplica da calculadora de Leibniz no Museu de Dresden na Alemanha.
Fonte: Wikimedia Commons.

A calculadora tem duas partes que são interligadas, uma das partes é responsável pelas adições e subtrações. A parte responsável pela multiplicação e divisão tem um funcionamento bem mais complexo. Caso se interesse em saber mais sobre a máquina de Leibniz, há um texto do próprio Leibniz sobre a sua máquina. O texto foi escrito em 1685, depois de a máquina ter sido inventada, mas foi publicado somente em 1897, na revista D*ei Zeitscbrift fur Vermessungswesen*, após a morte de Leibniz. O manuscrito tem o título: "*Machina arithmetica in qua non additio tantum et subtractio sed et multiplicatio nullo, divisio vero paene nullo animi labore peragantur*" e há uma versão traduzida para o português na página mantida pela Universidade de Lisboa: <http://bit.ly/2vwLQzN>.

- No intervalo de tempo (50:38-55:31), o documentário afirma que Leibniz inventou o sistema binário e que 265 anos depois, em 1944, esse sistema seria usado para criar o primeiro computador binário do mundo, o Colossus, o que seria a realização do sonho de Leibniz. Muitos livros de Matemática e de História da Matemática atribuem a Leibniz a invenção do sistema binário (O’Regan, 2016; Davis, 2018). Contudo, existem outros acadêmicos que questionam essa atribuição. Ares et al. (2018) defendem a tese de que Leibniz plagiou Juan Caramuel de Lobkowitz (1606-1682) no que se refere ao sistema binário e sua aritmética.

Em seu texto, “Explication de l’Arithmétique Binaire” (1703/1705), Leibniz explicava como transformar um número de base decimal para a base binária e vice-versa, mas seus contemporâneos o ignoraram e o próprio Leibniz, ao que parece, nunca voltou a retomar a ideia da nova linguagem.

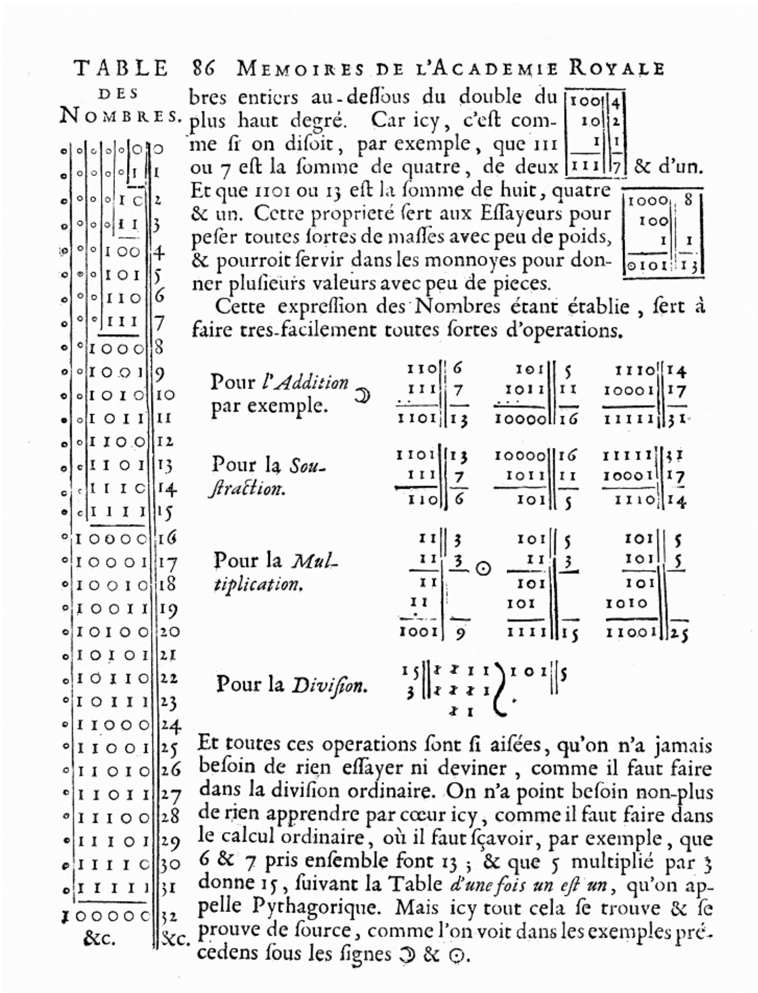


TABLE DES NOMBRES. 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16
10001	17
10010	18
10011	19
10100	20
10101	21
10110	22
10111	23
11000	24
11001	25
11010	26
11011	27
11100	28
11101	29
11110	30
11111	31
100000	32
&c.	&c.

bres entiers au-deſſous du double du plus haut degré. Car icy, c'eſt comme ſi on diſoit, par exemple, que 111 ou 7 eſt la ſomme de quatre, de deux & d'un. Et que 1101 ou 13 eſt la ſomme de huit, quatre & un. Cette proprieté ſert aux Eſſayeurs pour peſer toutes ſortes de maſſes avec peu de poids, & pourroit ſervir dans les monnoyes pour donner pluſieurs valeurs avec peu de pieces.

100	4	
10	2	
1	1	
111	7	& d'un.

1000	8
100	4
1	1
1101	13

Cette expreſſion des Nombres étant établie, ſert à faire tres-facilement toutes ſortes d'operations.

Pour l'*Addition* par exemple. ☽

110	6	101	5	1110	14
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	31

Pour la *Souſtraction.*

1101	13	10000	16	11111	31
111	7	1011	11	10001	17
110	6	101	5	1110	14

Pour la *Multiplication.* ⊙

11	3	101	5	101	5
11	3	11	3	101	5
11		101		101	
11		101		1010	
1001	9	1111	15	11001	25

Pour la *Diviſion.* 15 | 1111 | 101 | 5; 3 | 11

Et toutes ces operations ſont ſi aiſées, qu'on n'a jamais beſoin de rien eſſayer ni deviner, comme il faut faire dans la diviſion ordinaire. On n'a point beſoin non-plus de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut ſçavoir, par exemple, que 6 & 7 pris enſemble font 13; & que 5 multiplié par 3 donne 15, ſuivant la Table *d'une fois un eſt un*, qu'on appelle Pythagorique. Mais icy tout cela ſe trouve & ſe prouve de ſource, comme l'on voit dans les exemples précedens ſous les ſignes ☽ & ⊙.

Figura: Página de “Explication de l’Arithmétique Binaire” (1703/1705) de Leibniz.

Fonte: Wikimedia Commons.

Leibniz não conseguiu descobrir nenhuma utilidade imediata para o produto de seus esforços. Sua calculadora de rodas dentadas foi projetada para trabalhar com sistema decimal e não com o sistema binário e Leibniz nunca a converteu para números binários, talvez intimidado pelas longas cadeias de dígitos criadas por esse sistema. Ainda no contexto do sistema de numeração binário, para Leibniz, o número um representava Deus; zero corresponderia ao vazio (o universo antes que existisse qualquer outra coisa a não ser Deus). Tudo proveio do um e do zero, assim como o um e o zero podem expressar todas as ideias matemáticas (Breger, 2005, p. 491; Strickland, 2006, p. 22). Leibniz idealizou um medalhão sobre a criação do sistema binário. O medalhão tinha as seguintes expressões *Imago creationism* (uma imagem da Criação), *Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum* (A fim de produzir qualquer coisa do nada, basta o um [uma coisa]) e *Unum est necessarium* (Só é preciso uma coisa).

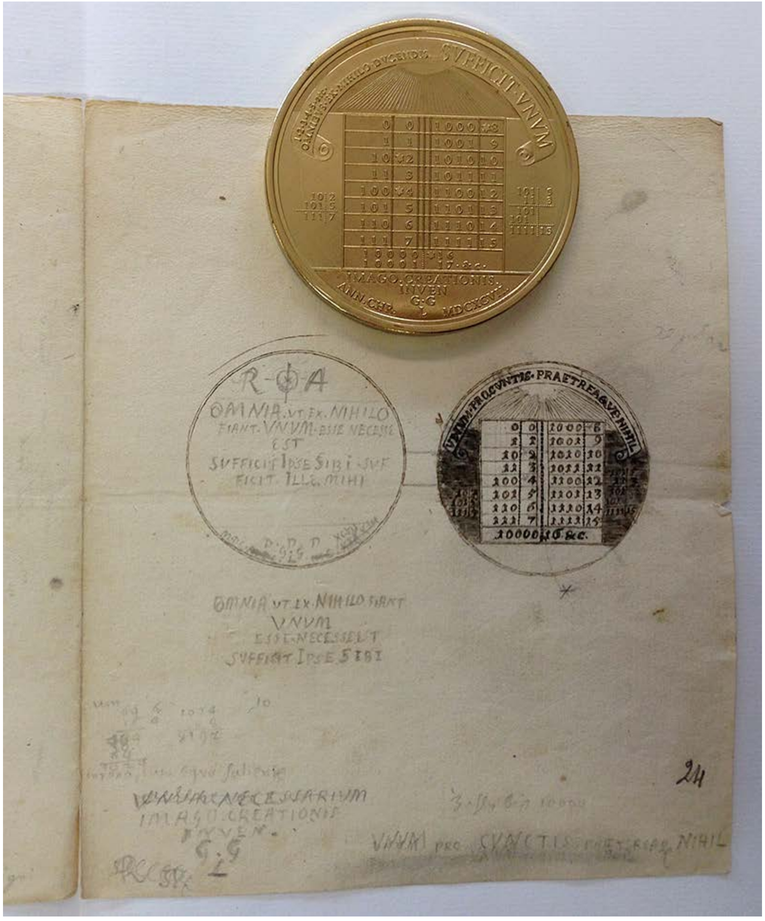


Figura: Design original do medalhão de Leibniz e uma versão moderna feita por Stephen Wolfram.

Fonte: <http://bit.ly/38cb6tR>.

- O documentário, no intervalo de tempo (54:45-56:30), fala sobre a construção do primeiro computador binário eletrônico do mundo, o Colossus, era a realização do sonho de Leibniz, e ocorreu no sul da Inglaterra em 1944, em plena Segunda Guerra Mundial. Segundo Terry Jones, talvez o Colossus tenha ajudado a encurtar a guerra em dois anos.

  O Colossus foi projetado e construído nos *Post Office Research Laboratories* no norte de Londres, em 1943, para ajudar Bletchley Park na decodificação de mensagens telegráficas alemãs interceptadas. Os telegramas foram codificados usando a máquina de cifras Lorenz SZ42. O Colossus foi o primeiro computador lógico programável. Não apenas um, mas dez deles foram construídos e estavam operacionais em Bletchley Park (Sale, 2000).

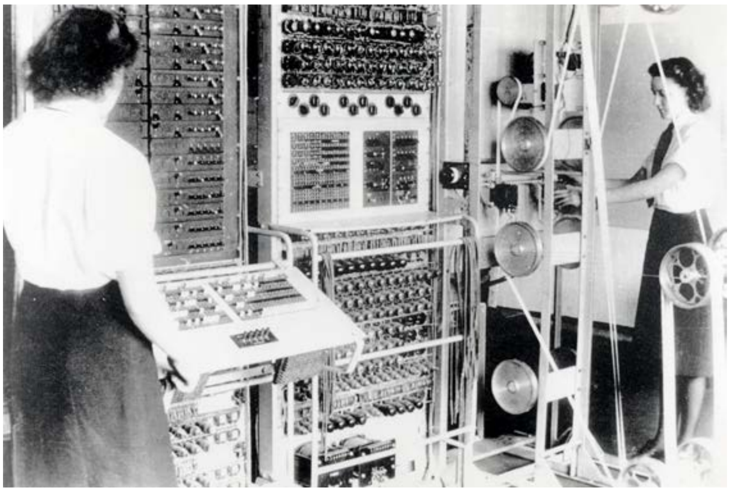


Figura: Computador Colossus Mark 2 (1944).
Fonte: Wikimedia Commons.

O Colossus foi desenvolvido pelo engenheiro britânico Thomas Harold Flowers (1905-1998), com a colaboração de Sidney W. Broadhurst, William Chandler e Allen ‘Doc’ Coombs. A existência dos computadores Colossus foi mantida em segredo até meados da década de 1970; as máquinas e os planos para construí-las tinham sido destruídos anteriormente nos anos 1960, como parte do esforço para manter o sigilo do projeto. Isso privou a maioria dos envolvidos com Colossus do crédito pelo pioneirismo da computação digital eletrônica durante suas vidas. A reconstrução em funcionamento de um Colossus Mark 2 foi concluída em 2008 por Tony Sale e alguns voluntários e está em exibição no Museu Nacional de Computação do Bletchley Park. Para mais detalhes sobre o Colossus, recomendamos as referências Copeland et al. (2006) e Gannon (2007).

Figura: Thomas Harold Flowers (1905-1998).
Fonte: Wikimedia Commons.

Observação: o nome do matemático Alan Turing (1912-1954) é frequentemente assocido ao Colossus. Enquanto certamente as técnicas desenvolvidas por Turing foram importantes para a concepção da criptoanálise das cifras de Lorenz, Turing não trabalhou diretamente no Colossus (Copeland et al., 2006, p. 382). A máquina desenvolvida por Turing se chamava *Bombe* e o objetivo era decifrar códigos gerados pela máquina alemã Enigma.

Referências relacionadas

- Ares, J. et al. *Who Discovered the Binary System and Arithmetic? Did Leibniz Plagiarize Caramuel?* Science and Engineering Ethics, v. 24, p. 173-188, 2018.
- Breger, Herbert. *God and Mathematics in Leibniz's Thought*. In: Koetzer, Teun; Bergmans, Luc. Mathematics and The Divine: A Historical Study. Elservir, 2005.
- Copeland et al. *COLOSSUS: The Secrets of Bletchley Park's Codebreaking Computers*. Oxford University Press, 2006.
- Callaway, Ewen. *Animals That Count*. NewScientst, p. 37-39, 20 de junho, 2009.
- Davis, Martin. *The Universal Computer: The Road from Leibniz To Turing*. Third edition. Taylor & Francis, 2018.
- Dehaene, Stanislas. *The Number Sense: How The Mind Creates Mathematics*. Revised and Updated Edition. Oxford University Press, 2011.
- Dehaense, Stanislaas; Dehaene-Lambertz, Ghislaine; Cohen, Laurent. *Abstract Representations of Numbers in Animal and Human Brain*. TINS, v. 21, n. 8, p. 355-361, 1998.
- Dorin, Rowan William. *Banishing Usury: The Expulsion of Foreign Moneylenders in Medieval Europe, 1200-1450*. Doctoral dissertation, Harvard University, Graduate School of Arts & Sciences, 2015.
- Englund, R. K.. *An Examination of The "Textual" Witnesses To Late Uruk World Systems*. In: Gong, Yushu; Chen, Yiyi. A Collection of Papers On Ancient Civilizations of Western Asia, Asia Minor and North Africa. Oriental Studies Special Issue, p. 1-38, 2008.
- Fischoff, Epharim. *The Protestant Ethic and The Spirit of Capitalism: The History of A Controversy*. Social Research, v. 11, n. 1, p. 53-77, 1944.
- Franco, Gustavo H. B.. *A Moeda e A Lei: Uma História Monetária Brasileira, 1933-2013*. Editora Zahar, 2017.
- Gannon, Paul. *Colossus: Bletchley Park's Greatest Secret*. Atlantic Books, 2007.
- Gomes, Anne Michelle Dysman. *A Matemática dos Bebês*. Projeto Conteúdos Digitais em Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2010. Disponível em: <http://bit.ly/2OWZval>. Acesso em 14 de fevereiro de 2020.
- Glaser, Anton. *History of Binary and Other Nondecimal Numeration*. Tomash Publishers, 1981.
- Gonçalves, Carlos H. B.; Possani, Cláudio. *Revisitando A Descoberta dos Incomensuráveis*

na Grécia Antiga. Matemática Universitária, Sociedade Brasileira de Matemática, p. 16-24, 2010. Disponível em: <http://bit.ly/2Fxltvh>. Acesso em 9 de janeiro de 2020.

- Gordon, Peter. *Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia*. Science, v. 306, n. 5695, p. 496-499, 2004.
- Joseph, George Gheverghese. *The Crest of The Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Third edition. Princeton University Press, 2011.
- Huylebrouck, Dirk. *Mathematics, Culture, and the Arts: From Colonial Findings Back To The Ishango Rods*. Springer-Verlag, 2019.
- Katz, Victor J.. *A History of Mathematics*. Pearson, 2009
- Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto de; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006
- Menninger, Karl. *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*. Dover Publications, 2011.
- O'Regan, Gerard. *Introduction To The History of Computing: A Computing History Primer*. Springer-Verlag, 2016.
- Roberts, William A.. *Mechanism of "Counting" in Animals*. In: Fountain, Stephen B. et al. Animal Cognition and Sequential Behavior: Behavioral, Biological, and Computational Perspective. Springer Science+Business Media New York, 2002.
- Roover, Raymond de. *The Scholastics, Usury, and Foreign Exchange*. The Business History Review, v. 41, n. 3, p. 257-271, 1967.
- Roque, Tatiana. *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Zahar, 2012.
- Sale, Anthony F.. *The Colossus of Bletchley Park – The German Cipher System*. Em: Rojas, Raúl; Hashagen, Ulf. *The First Computers: History and Architectures*. The MIT Press, 2000.
- Schmandt-Besserat, Denise. *How Writing Came About*. University of Texas Press, 1996.
- Sigler, Laurence E.. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer-Verlag, 2003.
- Stillwell, John. *Mathematics and Its History*. Springer-Verlag, 2010.
- Strickland, Lloyd. *Leibniz Reinterpreted*. Continuum, 2006.
- Stone, Mark H. *The Cubit: A History and Measurement Commentary*. Journal of Anthropology, v. 2014, Article ID 489757, 11 pages. Disponível em: <http://goo.gl/HT9pOk>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Weber, Max. *A Ética Protestante e O Espírito do Capitalismo*. Martin Claret, 2013.

Referências sobre o uso de vídeos em sala de aula

- Ferrés, Johan. *Vídeo e Educação*. Segunda Edição. Artes Médicas, 1996.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. Editora Contexto, 2003.

Concepção

Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho

Revisão

Hamanda de Aguiar

Agradecimentos

Fabiana Silva de Miranda pela observação para o professor sobre o cúbito e
Karla Waack Nogueira pela observação para o professor sobre os números romanos.

Orientação

Humberto José Bortolossi

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

4 Considerações finais

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho colaborativo, com o propósito de auxiliar nas concepções, nos testes e nos aprimoramentos dos roteiros produzidos, promovemos diversas ações de exibição de vídeos relacionados com Matemática e Estatística em vários eventos: Semana da Matemática da UFRR (2015), Programa Dá Licença da UFF (2016), Semana da Matemática da UFF (2016), Semana Pedagógica no Colégio Estadual Manuel de Abreu (2016, 2018), Festival da Matemática (2017), Simpósio ANPMat da Região Norte (2017), Semana da Ciência e Tecnologia no IMPA (2017), Semana da Matemática da UFSC em Blumenau (2017), Festival da Matemática do Rio Grande do Sul (2017), Semana Pedagógica no Instituto GayLussac (2017), Semana da Matemática da UFMS (2018), 70ª Reunião da SBPC (2018), Semana Pedagógica no Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho (2018).

Figura 4.1: Exibições de vídeos.

Entre estes eventos, destacamos o Festival da Matemática, uma iniciativa do IMPA e da SBM, como parte do "Biênio da Matemática 2017-2018 Gomes de Sousa", realizado entre 27 e 30 de abril de 2017 na Escola SESC do Rio de Janeiro. Durante os quatro dias de evento foram realizadas sessões *non-stop* de 30 em 30 minutos. Estima-se que mais de 1600 pessoas (entre alunos, professores e o público em geral) tenham participado. Após a exibição de cada vídeo, voluntários respondiam a algumas questões gerais do roteiro. Um brinde de participação (um chocolate) era dado à pessoa voluntária. Duas sessões foram especiais com as participações do matemático português Rogério Martins (do Programa "Isto é Matemática") e do matemático francês Étienne Ghys.

Os vídeos também foram exibidos na ação de extensão "Cineclube de Matemática e Estatística" do Projeto "Dá Licença" da Universidade Federal Fluminense. Nestes eventos, filmes mais longos foram apresentados e cada sessão contou com a participação de um convidado especial que, ao final da exibição, fazia comentários e respondia às perguntas da plateia.

Figura 4.2: Exibições de vídeos (continuação).

Nossa proposta de uso didático de vídeos também foi usada em atividades de formação continuada de professores (Simpósio ANPMat da Região Norte e Instituto GayLussac) e, mais recentemente, na formação inicial de professores no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) para o núcleo da Matemática da Universidade Federal Fluminense.

É interessante perceber como alguns alunos que normalmente não se destacam em aulas tradicionais de matemática, participam e contribuem de forma muito positiva em aulas que saem do convencional; em nosso caso, com a exibição de vídeo, orientada.

O roteiro apresentado neste trabalho foi aplicado no Centro Municipal de Educação Padre Manuel (Saquarema, RJ) com uma turma de 8º Ano e duas turmas do 9º Ano do Ensino Fundamental II. Ele também foi trabalhado com duas turmas do turno integral do curso de empreendedorismo do 3º Ano do Ensino Médio do CIEP 148 (Araruama, RJ). Para as turmas do Ensino Fundamental II, optou-se pela versão do documentário sem legendas, isto é, totalmente dublado em português. Devido a um problema de foco no projetor, as turmas do Ensino Médio também acabaram assistindo essa versão.

Em todas as turmas, o documentário foi trabalhado da seguinte maneira: foram entregues fichas com as questões do roteiro para uma leitura prévia dos alunos antes da exibição do vídeo. Devido à duração longa do documentário (quase 1 hora), as respostas puderam ser escritas em três momentos: na primeira pausa do documentário em 26:29, na segunda pausa em 48:51 e no final do documentário. Em cada pausa, as questões pertinentes ao que se tinha sido visto até aquele momento eram lidas e explicadas. Os alunos tinham um determinado tempo para respondê-las (esse tempo variou de acordo com cada turma e a disponibilidade de tempo para a apresentação). No 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental II, as 14 questões foram distribuídas em duas fichas diferentes, cada uma com 9 questões, sendo algumas repetidas e outras não. No 3º Ano do Ensino Médio, somente um tipo de ficha foi entregue, com as 14 questões na mesma ordem em que elas são apresentadas no roteiro. Não ocorreu, em nenhuma das turmas, problemas com falta de atenção ou tumulto: os alunos se mostraram bastante interessados nos assuntos abordados. As questões escolhidas foram retiradas da seção "Sugestões de questões gerais" do roteiro.

Nas turmas do 8º e 9º Anos, nas quais leciono, os alunos foram avisados que as fichas com as respostas valeriam 15 pontos na média do primeiro trimestre. Durante a exibição do documentário, pipoca foi servida aos alunos, de forma organizada e sem prejudicar a atenção. Nessas turmas, dois tempos (1 hora e 40 minutos ao todo) foram usados apenas para a exibição e preenchimento das fichas, sendo o debate realizado no próximo dia de aula. O debate também foi bastante produtivo. Não obstante, ficou claro a dificuldade dos alunos em entender certas partes do documentário como, por exemplo, a explicação de du Satoy sobre o sistema binário. As turmas do Ensino Fundamental acharam as perguntas difíceis e algumas explicações confusas. Ao meu ver, o ideal seria utilizar três tempos, o que não foi possível. No Ensino Fundamental, eu não voltaria a exibir o vídeo em um único dia. Exibiria em dois dias, pois o documentário contém uma quantidade de informações grande demais para alunos desse segmento escolar e, embora o documentário os tenha agradado, eles acabaram confusos na hora de responder algumas perguntas.

Figura 4.3: Exibição do vídeo “A História do Número 1” em turma de 8º Ano do Ensino Fundamental.

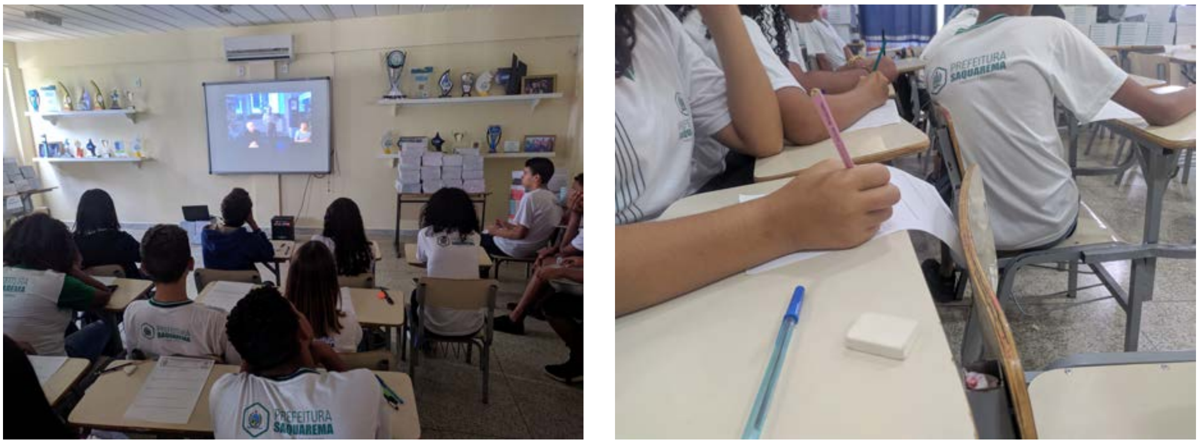


Figura 4.4: Exibição do vídeo “A História do Número 1” em turma de 9º Ano do Ensino Fundamental.

Nas turmas do 3º Ano do Ensino Médio, após a exibição do vídeo e do preenchimento das fichas, foi feito um debate com perguntas dos alunos e de dois professores que também assistiram à exibição do documentário. Ocorreram várias perguntas referentes ao que foi apresentado no vídeo, mas os temas mais explorados foram os números binários e a percepção natural para a quantidade de objetos. Os alunos do 3º Ano elogiaram bastante a iniciativa da escola em permitir que fosse feito um trabalho diferenciado com um professor externo, já que não leciono nessa escola. Ao final do debate, agradeci aos alunos e os presenteei com bombons. Nas turmas do 3º Ano, toda a atividade durou um pouco mais de duas horas, tempo que se mostrou mais do que suficiente.

Figura 4.5: Exibição do vídeo “A História do Número 1” em turma de 3º Ano do Ensino Médio.

A seguir, apresentaremos algumas respostas dadas pelos alunos. Os respectivos anos escolares estão escritos entre parênteses.

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
   “Sim. Como nasceu a matemática.”(8º Ano do Ensino Fundamental), “Sim. Ele queria transmitir a história dos números e de onde vieram.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “Sim. Como a matemática é importante e esteve presente e muito entrelaçada a evolução da humanidade e sua história.” (3º Ano do Ensino Médio), “Sim. Acredito que o vídeo não esteja apenas abrangendo a matemática, mas, também nossa história, nossa humanidade e como evoluímos junto com as épocas e os desafios apresentados por elas.” (3º Ano do Ensino Médio).
2. Segundo o documentário, o que motivou a “invenção” da matemática?
   “Para contar a quantidade de pessoas que tinham e poder pagar impostos também.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “A motivação foi querer organizar as coisas e também para poder contar as coisas.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “A vida urbana que o ser humano passou a adotar, motivou a invenção da matemática, já que havia uma enorme concentração de pessoas e recursos para serem organizados.” (3º Ano do Ensino Médio), “Manter a organização das cidades.” (3º Ano do Ensino Médio).
3. Qual é o avanço tecnológico das peças em formato de cone dos sumérios com relação às marcas no Osso de Ishango?
   “As marcas no osso Ishango somente tinham como adicionar, e os cones tinham como adicionar e também subtrair.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “O avanço é que com os cones era possível fazer a subtração.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “O cone dos Sumérios foi revolucionário, pois as marcas no osso não podiam ser apagadas (subtraídas), já os cones, poderiam ser retirados (subtraídos).” (3º Ano do Ensino Médio).

4. Segundo o documentário, qual foi o primeiro tipo de escrita humana?

   “Linguagem matemática.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “Com números.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “Matemática (números).” (3º Ano do Ensino Médio).

   Observações: vários alunos, principalmente do 3º Ano do Ensino Médio, responderam “escrita cuneiforme”. Porém, essa palavra não é citada no documentário, o que parece demonstrar que esses alunos já possuíam um conhecimento prévio sobre o assunto.

5. Segundo o documentário, qual era o propósito de se estabelecer uma unidade (o “cúbito”) na sociedade egípcia antiga?

   “Facilitar a forma de medida na sociedade.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “Para que o povo tivesse um padrão de medida.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “Para criar uma unidade de medida, tipo uma régua.” (3º Ano do Ensino Médio).

6. Segundo o documentário, qual era a definição de “cúbito”?

   “Do cotovelo mais a mão.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “A medida de um braço mais a palma da mão.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “Era uma régua que eles criaram medindo do cotovelo a ponta do dedo, mais a palma da mão.” (3º Ano do Ensino Médio).

   Observações: muitos alunos inverteram as respostas das Questões 5 e 6, o que parece demonstrar que eles não conseguem diferenciar “propósito” de “definição”. Nos debates com os alunos do Ensino Fundamental, pedi que eles me explicassem a diferença entre “propósito” e “definição”. Nenhum aluno conseguiu explicar de forma satisfatória.

7. Segundo o documentário, quais eram os inconvenientes da notação romana antiga para os números?

   “Demorava muito para escrever os números e não dava para somar e nem subtrair.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “Eram mais complicados e ruins para calcular.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “Com eles não era possível realizar cálculos, somente registrar os valores, também era difícil registrar números grandes.” (3º Ano do Ensino Médio).

   Observações: grande parte dos alunos responderam erroneamente “por não poderem escrever números infinitos”. Talvez isso ocorreu pelo fato do documentário ter mostrado que escrever números grandes, em romanos, leva mais tempo que em indo-arábicos e, provavelmente, os alunos confundiram as definições de “números grandes” com “números infinitos”.

8. Segundo o documentário, quais eram as vantagens dos algarismos indianos?

   “Eles poderiam fazer contas, escrever números mais rápidos e muito mais.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “Com os números indianos era possível fazer cálculos e chegar a números bem maiores com mais facilidade.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “Realizar cálculos mais complexos, registrar mais facilmente números grandes e com a invenção do zero, surgiu a possibilidade de criar unidade, dezena, centena, etc.” (3º Ano do Ensino

Médio).

9. Segundo o documentário, por que a sociedade medieval tinha receios em aceitar os algarismos indianos e preferia continuar com os algarismos romanos? Ainda segundo o documentário, por que, mesmo assim, no final, os algarismos indianos acabaram substituindo o ábaco e os algarismos romanos?

   "Os romanos não queriam aceitar os algarismos indianos porque não o conheciam. Poderiam ser roubados facilmente não conhecendo bem. Até porque já tinham um sistema que funcionava. Mas acabaram aceitando, pois os algarismos indianos tinham muitas vantagens." (8º Ano do Ensino Fundamental), "Por que o número indiano era um número fácil de escrever e o número romano era um número difícil de escrever porque era um número grande." (9º Ano do Ensino Fundamental), "Suas rotinas envolviam algarismos romanos, como eram números conhecidos, não havia receio de supostas trapaças; contudo, acabou se comprovando que o sistema indiano era mais fácil e preciso, e assim, ele foi adotado." (3º Ano do Ensino Médio).

   Observações: a quantidade de respostas do 3º Ano do Ensino Médio consideradas coerentes com o documentário foi muito maior que nas Questões 7 e 8 que falam sobre o mesmo tema. Em tese, para responder a Questão 9, o aluno deveria saber responder as Questões 7 e 8. Isso parece demonstrar que os alunos do 3º Ano possuem maior facilidade em responder questões que comparem duas "situações" ao invés de responder questões que possuam essas duas "situações" separadas. Para os alunos do 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental, a maioria mostrou a mesma dificuldade em responder qualquer uma das três questões.

10. Por que 1001 em binário é o número 9 em decimal?

    "Pois 1001 é o 9 em decimal, já que $8+1=9$." (8º Ano do Ensino Fundamental), "Você cria alguma coluna com o número 1, 2, 4 e 8, aí você coloca uma pedra no buraco 8 e uma no buraco 1, aí fica 1001." (9º Ano do Ensino Fundamental), "Porque o primeiro 1 representa o número 8 e o último 1 representa o número 1. Então somamos o 1 com o 8 e obtemos 9." (3º Ano do Ensino Médio), "1001 é uma soma de dois números, pois os zeros não contam. Você tira os zeros e soma os uns que sobraram, trocando por um dos números da sequência 8, 4, 2, 1, na mesma ordem, logo, $8+1=9$." (3º Ano do Ensino Médio).

    Observações: muitos alunos do 3º Ano do Ensino Médio escreveram como resposta que não entenderam a pergunta. Porém, nenhum deles perguntou nada referente a ela durante o preenchimento das fichas (lembramos que todas as perguntas foram lidas e explicadas anteriormente). No 8º Ano do Ensino Fundamental, nenhum aluno conseguiu responder essa questão de forma satisfatória. Possivelmente, a alta quantidade de respostas incoerentes se deve à grande dificuldade de entender o funcionamento do sistema binário, pois o aluno o associa ao sistema decimal sem parar para pensar. Observamos que, nos debates, após a execução dos trabalhos, o ponto mais discutido foi justamente o sistema binário.

11. Segundo o documentário, como os números 1 e 0 são representados em um computador eletrônico?

    "São representados com 1 e 0." (8º Ano do Ensino Fundamental), "Corrente elétrica: 1 positivo (ligado) e 0 negativo (desligado)." (9º Ano do Ensino Fundamental), "Por luzes acendendo e apagando nas bolinhas." (3º Ano do Ensino Médio).

    Observações: essa foi a única questão onde nenhum aluno do 3º Ano do Ensino Médio teve uma resposta 100% coerente com o que foi apresentado no documentário. A maioria dos alunos do 3º Ano responderam que são representados por números binários e alguns outros que são representados por códigos. Nos 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental, a maioria dos alunos simplesmente respondeu "binários" ou "sistema binário". Em tese, essa pergunta seria uma das mais fáceis do questionário, pois o aluno somente precisava lembrar da resposta dada por Terry Jones. Porém, o índice de respostas incoerentes foi o maior em todas as turmas. Isso parece ter ocorrido pelo fato dos alunos não terem entendido a explicação com ovos de du Satoy sobre o funcionamento do sistema binário. A partir dai, tudo que se dizia a respeito do tema passou a ser classificado pelos alunos como muito difícil, criando assim um bloqueio.

12. No final do documentário, o apresentador comenta que todas aquelas razões para usar e entender os números (fazer cálculos astronômicos, lidar com medidas, descobrir percentagens, taxas de câmbio, juros compostos, todos os cálculos que preocuparam e, as vezes, deixaram perplexas as grandes mentes da antiguidade) podem, agora, ser deixadas para o computador e que, por isso, podemos "ser apenas felizes ignorantes, às vezes sem saber se a resposta está certa ou não". Ele então pergunta: "É isso uma coisa boa, não?". Qual é sua resposta a essa pergunta?

    "Não é uma coisa boa, pois nós devíamos estar sempre buscando aprender mais e não simplesmente deixar nas mãos das máquinas." (8º Ano do Ensino Fundamental), "Eu acho que sim, pois podemos economizar tempo em alguns cálculos mais complexos por exemplo." (9º Ano do Ensino Fundamental), "Eu acho isso ruim, pois, nos torna dependentes da tecnologia, e facilmente manipulados." (3º Ano do Ensino Médio).

    Observações: a maioria das respostas do 3º Ano do Ensino Médio mostrava preocupações com "manipulação" por meio das máquinas. Contudo, os alunos não explicavam como ou qual seria essa "manipulação". Infelizmente, o debate nessas turmas foi feito antes da correção das fichas e, como não leciono nessa escola, não tive a oportunidade de perguntar qual seria essa “manipulação” exatamente. Tudo leva a crer que seria a manipulação de informação.

13. Do que você mais gostou no vídeo?

    “Tudo. Gostei de descobrir a origem dos números e suas histórias.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “De conhecer mais sobre a história dos números.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “É inteligente e dinâmico, consegue mostrar a matemática de um modo instrutivo e posso até dizer divertido.” (3º Ano do Ensino Médio), “Da forma como os números foram tratados como seres vivos e não como objetos ou simples ferramentas.” (3º Ano do Ensino Médio), “Do humor do apresentador do documentário, assim como das histórias contadas. Esse modelo de aprendizagem, através de vídeos, me interessou muito.” (3º Ano do Ensino Médio).

    Observações: a maioria dos alunos do 3º Ano do Ensino Médio citou a forma bem-humorada de apresentar as histórias como um ponto positivo. Suas respostas foram bem elaboradas e bem descritas. A maioria dos alunos do 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental simplesmente respondeu “as animações”. Aparentemente, a diferença nas construções das respostas mostra a grande dificuldade que os alunos do Ensino Fundamental têm em construir textos e, principalmente, em focar sua atenção nos elementos que realmente são importantes, o que é compreensível devido a sua pouca idade e ao fato de que a construção e interpretação de textos acabam sendo trabalhados somente na disciplina de língua portuguesa.

14. Se você fosse o diretor deste vídeo, você faria algo diferente? O quê?

    “Sim. Poderia explicar melhor, pois algumas partes ficaram confusas.” (8º Ano do Ensino Fundamental), “Colocaria um modo mais divertido de explicar, deu sono.” (9º Ano do Ensino Fundamental), “Não, pois prende a atenção, é engraçado e ao mesmo tempo muito explicativo e fácil de entender.” (3º Ano do Ensino Médio), “Sim. Faria os números com menos vida.” (3º Ano do Ensino Médio).

    Observações: a maioria dos alunos reclamaram da qualidade da dublagem, dizendo que, se fossem diretores, iriam fazer uma dublagem melhor. Embora seja fato que a dublagem de documentários ainda tenha que melhorar bastante, essa resposta é incoerente, pois a dublagem, em geral, não é responsabilidade da direção do filme. Isso novamente mostra uma falta de atenção e interpretação na hora de se ler uma pergunta, pois a questão proposta não é “O que você faria de diferente nesse vídeo?” e, sim, “Se você fosse o diretor deste vídeo, você faria algo diferente?”.

Como trabalho futuro, pretendemos organizar um *blog* para melhor divulgar os roteiros dos vídeos, bem como criar um canal de comunicação com o professor de Matemática e outros profissionais interessados no uso de vídeos como instrumento de ensino e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

Bulman, Jeannie Hill. *Children's Reading of Film and Visual Literacy in The Primary Curriculum: A Progression Framework Model*. This Palgrave Macmillan, 2017

Chabrán, H. Rafael; Kozek, Mark. *Mathematics in Literature and Cinema: An Interdisciplinary Course*. PRIMUS, 2015.

Doxiadis, Apostolos; Mazur, Barry. *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*. Princeton University Press, 2012.

Ferrés, Joan. *Vídeo e Educação*. Editora Artes Médicas, 1996.

Gottschall, Jonathan. *The Storytelling Animal: How Stories Make Us Human*. New York: Harcourt Publishing Company, 2013.

Harari, Yuval Noah. *Sapiens: Uma Breve História da Humanidade*. Porto Alegre: L&PM, 2015.

Haven, K. *Super Simple Storytelling: A Can-Do Guide for Every Classroom, Every Day*. Englewood, CO: Teacher Ideas Press, 2000.

Machado, Benedito Fialho; Mendes, Iran Abreu. *Vídeos Didáticos de História da Matemática: Produção e Uso na Educação Básica*. História da Matemática para Professores, Sociedade Brasileira da História da Matemática, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

Machado, Nilson José. *A Narrativa em Matemática*. Palestra na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da UFF, Universidade Federal Fluminense, 2016.

McSill, James. *Cinco Lições de Storytelling: Fatos, Ficção e Fantasia*. São Paulo: DVS Editora, 2013.

Moran, José Manuel. *O Vídeo na Sala de Aula*. Comunicação & Educação, v. 2, p. 27-35, 1995.

Muzás, José Maria Sorando. *Aventuras Matemáticas em El Cine*. Editorial Guadalmazán, 2015.

Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2003.

Napolitano, Marcos. *Como Usar A Televisão na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2015.

Pellicer, Pablo Beltrán. *Series y Largometrajes como Recurso Didáctico em Matemáticas en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica, Organización Escolar y Didácticas Especiales, Facultad de Educación, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, 2015.

Polster, Burkaro; Ross, Marty. *Math Goes To The Movies*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2012.

Reiser, Elana. *Teaching Mathematics using Popular Culture: Strategies for Common Core Instruction from Film and Television*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2015.

Russell, Bertrand. The Functions of A Teacher. Em: Egner, Robert E.; Denonn, Lester E.. *The Basic Writings of Bertrand Russell*. Routledge Classics, 2009.

Santos, Rosiane de Jesus. *Uma Taxonomia para O Uso de Vídeos Didáticos para o Ensino da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade de Juiz de Fora, 2015.

Sklar, Jessica K.; Sklar, Elizabeth S. *Mathematics in Popular Culture: Essays On Appearences in Film, Fiction, Games, Television and Other Media*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2012.

Xavier, Adilson. *Storytelling: Histórias Que Deixam Marcas*. Rio de Janeiro: Best*Seller*, 2015.

Zak, Paul J. *Confiança, Moralidade e Ocitocina. TED Global 2011*. Disponível em: <https://goo.gl/tFhoqb>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *A Molécula da Moralidade*. Elsevier, 2012.

Zak, Paul J. *Empathy, Neurochemistry, and The Dramatic Arc*. Future of StoryTelling, 2013. Disponível em: <https://vimeo.com/61266150>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *How Stories Change The Brain*. 17 dezembro de 2013. Disponível em: <https://goo.gl/DgBnnB>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *Why Your Brain Loves Good Storytelling*. HBR 28 de outubro de 2014. Disponível em: <https://goo.gl/BVyRng>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*. Cerebrum Jan-Feb; 2015. Disponível em: <https://goo.gl/LPFn7P>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zacks, J. M.; Tversky, B.; Iyer, G. 2001. *Perceiving, Remembering, and Communicating Structure in Events*. Journal of Experimental Psychology: General, v. 130, p. 29-58, 2001.

Zazkis, Rina; Liljedahl, Peter. *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 2009.